

ESTUDO TEÓRICO DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVEÇÃO  
NATURAL E RADIAÇÃO TÉRMICA EM CANAIS VERTICais E INCLINADOS

Antonio Carlos Moldes da Rocha

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Leopoldo E. Bastos

Leopoldo Eurico Gonçalves Bastos

Antonio Mac Dowell de Figueiredo

Antonio dos Santos Vargas

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1982

DA ROCHA, ANTONIO CARLOS MOLDES

Estudo Teórico da Transferência de Calor por Convecção Natural e Radiação Térmica em Canais Verticais e Inclinados (Rio de Janeiro) 1982.

VIII, 100 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc., Engenharia Mecânica, 1980).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Fac. de Engenharia.

I. Energia Solar

I. COPPE-UFRJ

II. Título (Série)

Aos meus pais,

Avôs,

Amigos,

E à minha esposa, Vera

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Leopoldo Eurico Gonçalves Bastos,  
pela orientação e dedicação constante junto à minha pesquisa.

Ao Professor Antonio Mac Dowell de Figueiredo,  
pela colaboração dispensada.

Aos Professores Antonio dos Santos Vargas, Antonio  
Salvador e Getúlio pelo apoio e incentivo científico à  
minha  
pessoa.

Ao Programa de Engenharia Mecânica e à CAPES pe-  
lo auxílio financeiro.

A Vera Lúcia, pela ajuda e cooperação constantes.

E agradeço a todos que direta ou indiretamente  
de alguma forma foram úteis ao desenvolvimento desta pesquisa.

## RESUMO

A finalidade deste trabalho é o estudo dos efeitos da transferência de calor por radiação térmica e convecção natural no escoamento de ar em canais verticais e inclinados.

As equações de camada limite do fluido, massa, quantidade de movimento, e energia, assim como as equações de balanço térmico nas paredes do canal, são resolvidas pelo método das diferenças finitas implícitas.

São obtidas as distribuições de temperatura, velocidade, pressão do fluido e comprimento do canal, e feitas análises quanto ao desenvolvimento do regime de escoamento.

ABSTRACT

This work deals with an analysis of natural convection and thermal radiation transport process of heated air in vertical and inclined channels.

The boundary layer equations of the fluid, mass, momentum and energy, as the thermal boundary equations of the walls are resolved by use of implicit finite difference method.

It is obtained temperature, velocity, pressure and the channel length and is discussed the results concerning the physical development of the fluid flow.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO . . . . .	1
CAPÍTULO II - MODELAÇÃO . . . . .	2
II.1 - Revisão Bibliográfica . . . . .	2
II.2 - Formulação do Problema . . . . .	5
II.3 - Modelo Vertical . . . . .	10
II.4 - Presença da Radiação Térmica . . . . .	11
CAPÍTULO III - MÉTODO DE SOLUÇÃO . . . . .	13
III.1 - Problema Convectivo . . . . .	13
III.2 - Problema Radiativo . . . . .	20
CAPÍTULO IV - APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS . . . . .	27
IV.1 - Resultados para o Canal Vertical & Inclinado . .	27
IV.2 - Discussão dos Resultados . . . . .	40
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES . . . . .	44
V.I - Sugestões . . . . .	46

APÊNDICE 1 - Balanço para o Fluido . . . . .	48
APÊNDICE 2 - Simplificação de Camada Limite . . . . .	54
APÊNDICE 3 - Dedução das Equações Radiativas nas Paredes do Canal . . . . .	63
APÊNDICE 4 - Observações sobre o Método das Diferenças Finitas . . . . .	69
APÊNDICE 5 - Observação sobre o Método de Eliminação de Gauss . . . . .	71
APÊNDICE 6 - Demonstrações Auxiliares . . . . .	73
APÊNDICE 7 - Cálculo da Eficiência . . . . .	80
APÊNDICE 8 - Fluxograma e Listagem . . . . .	82
NOMENCLATURA . . . . .	94
BIBLIOGRAFIA . . . . .	97

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Os coletores solares utilizados para o aquecimento de ar têm vastas aplicações, desde as diversas operações de secagem de frutos e cereais, ao emprego no projeto arquitetônico através de técnicas construtivas apropriadas às características climáticas e regionais. Estas últimas constituem-se nos sistemas passivos de aquecimento solar ou resfriamento (parede de Trombe, torre ou chaminé de arrefecimento, etc), cujo desenvolvimento vem sendo objeto de intensa pesquisa teórica e experimental no momento, Grainer, Othier & Twidell |<sup>1</sup>|, Philip |<sup>2</sup>| e Bahadori |<sup>3</sup>|.

Não obstante não se dispõe, até o momento, de dados decorrentes de uma análise mais profunda sobre os processos de escoamento com transferência de calor intervenientes nestes tipos de equipamentos e sistemas de aquecimento de ar.

A finalidade deste trabalho é o estudo de um modelo teórico de coletor solar para o aquecimento de ar por meio de convecção natural. O coletor é constituído por um canal de paredes planas e paralelas por onde flui de forma ascendente o ar que está sendo aquecido. Sabe-se que para uma maior eficiência de operação estes coletores devem ser montados inclinados com ângulo dependente da latitude do lugar e voltados para o norte geográfico (hemisfério sul).

No modelo considerado, o ar escoa ascendente mente (nas direções vertical ou inclinada) por convecção natural, entre duas placas planas sendo uma de vidro e outra metálica enegrecida (absorvedor). A radiação solar incidindo sobre o equipamento atravessa a janela de vidro e é absorvida pela placa metálica. O ar é aquecido pelos fluxos de calor provenientes destas duas paredes.

As equações resultantes de conservação da massa, da quantidade de movimento, e da energia para o fluido, assim como as equações de balanço de energia por convecção e radiação nas paredes do canal são resolvidas via processo numérico.

Com esta solução pretende-se estudar os efeitos da transferência de calor por radiação e convecção natural num canal vertical ou inclinado onde é feito o aquecimento de ar. São analisadas as relações entre o comprimento e a distância entre placas do coletor em função da vazão de ar e do nível de insolação incidente.

## CAPÍTULO II

MODELAÇÃOII.1 - Revisão Bibliográfica

Na literatura, ainda não são muitos os trabalhos que tratam da transferência de calor por convecção natural em canais.

Bodoia & Osterle |<sup>4</sup>|, inicialmente estudaram o escoamento de ar entre duas placas paralelas verticais para condições de paredes isotérmicas. Admitindo a formação de camada limite na região de entrada do canal; Aung, Fletcher & Sernas|<sup>5</sup>|, ampliaram os resultados para condições de temperatura e fluxos de calor uniformes nas paredes, assumindo, em essência, um modelo físico semelhante ao de Bodoia & Osterle.

Davis & Perona |<sup>6</sup>|, investigaram a região de desenvolvimento térmico em um tubo aberto e vertical. Mais recentemente, Carpenter, Briggs & Sernas|<sup>7</sup>| estudaram em canais verticais a interação da radiação com a transferência de calor convectiva, considerando as emissividades das paredes e definindo um número de radiação.

Akbari & Borges|<sup>8</sup>| analisaram o sistema denominado "parede de Trombe", usado para o aquecimento ou resfriamento de habitações, sendo o modelo utilizado o de canal vertical

com temperaturas de parede constantes. Visando uma aplicação direta no projeto de coletores de aquecimento do ar para seca gem, Macedo |<sup>9</sup>| considerou geometrias inclinadas utilizando porém, resultados de Aung, Fletcher & Sernas, para transferência de calor por convecção natural em sistemas verticais, definindo um número de Rayleigh modificado que inclui o ângulo de inclinação. Considerou a presença da radiação, na forma de duas equações radiativas para as paredes.

Zaparolli |<sup>10</sup>| estudou por sua vez o problema de transferência de calor por convecção natural em canais inclinados sem incluir as equações radiativas para as paredes, mas considerando as temperaturas de parede desiguais e especificadas. O efeito da inclinação aparece diretamente nas equações de conservação para o fluido no modelo de camada limite. O presente trabalho investiga o processo de aquecimento natural do ar em canais inclinados através de um modelo apropriado de camada limite para o fluido em escoamento laminar no interior do canal, seguindo basicamente a metodologia de Bodoia & Osterle. O estudo é feito para condição de fluxos de calor uniformes das paredes para o fluido, com as temperaturas das paredes variando ao longo do coletor, quando submetidas à radiação solar. Considera-se duas equações resultantes de balanços radiativos para ambas placas, e o problema é resolvido iterativamente com as equações de conservação do fluido de escoamento.

## II.2 - Formulação do Problema

O modelo teórico do coletor consiste de duas placas planas paralelas afastadas de uma largura  $b$  e tendo um comprimento  $\lambda$ . O sol é considerado como um corpo negro à 5762K.

São feitas as seguintes hipóteses:

- a) O regime de escoamento é laminar e permanente (são moderadas as diferenças de temperaturas entre a parede de vidro e o ambiente  $T_y - T_0$ , entre a placa metálica e o ambiente,  $T_p - T_0$ );
- b) As paredes têm baixa condutividade térmica excluindo-se os efeitos da condução axial;
- c) É válida a hipótese de Boussinesq, que admite o escoamento do fluido como incompressível, considerando no entanto, a densidade do meio dependente da temperatura nos termos devido a força de empuxo, nas equações de quantidade de movimento;
- d) Admite-se a formação de camada limite no interior do canal. Esta hipótese pode ser utilizada devido à forma abrupta da região de

entrada;

- e) As temperaturas das paredes são desiguais assim como, os fluxos de calor destas para o fluido em escoamento;
- f) As paredes são consideradas como superfícies cinzas (superfícies que absorvem uma certa fração da radiação incidente de qualquer direção e para qualquer comprimento de onda, emitindo posteriormente esta fração fixa de radiação para todas direções).  
A transmitância do vidro para a placa metálica da radiação solar incidente, se faz em sua maior parte entre a faixa de comprimentos de onda de  $0,4\mu - 2,5\mu$ , Kreith [13]. Por consequência, o estudo situou-se neste intervalo.
- g) O fluido de trabalho (ar) é tratado como um gás não-absorvente.

Para a geometria do problema indicada na Figura II-1, as equações que regem o problema de escoamento do fluido, utilizando as hipóteses (a), (b) e (c) são,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) \quad (2)$$

$$\rho(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu (\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \quad (3)$$

$$\frac{\rho c}{K} p (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = (\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \quad (4)$$

onde (1) representa a equação de continuidade de massa, (2), (3) as equações da conservação da quantidade de movimento, e (4) a equação da conservação da energia.

Com a hipótese (d) e adimensionalizando as equações (1) - (4) resulta.

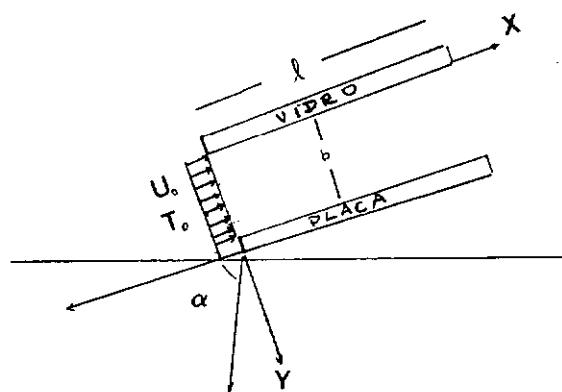


Fig. III.1  
O coletor Plano - Paralelo

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial p}{\partial X} + \theta \quad (6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{1}{Gr^*} \operatorname{tg} \alpha \quad (7)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (8)$$

Estas equações estão desenvolvidas e adimensionais nos Apêndices 1 e 2. Os agrupamentos adimensionais são:

$$X = x / \ell Gr, \quad U = u b^2 / \ell v Gr, \quad Y = y / b$$

$$V = v b / v, \quad Gr = (g \beta q_p b^5 / \ell v^2 k), \quad P = p^* b^4 / \ell^2 \rho v^2 Gr^2$$

$$r_H = q_v / q_p, \quad \theta = (T - T_0) / (q_p b) / k, \quad Gr^* = Gr \ell / b$$

O termo  $p^*$  que aparece no agrupamento adimensional da pressão é definido como:

$$p^* = p - p_0 \quad (9)$$

ou seja, é uma pressão resultante da diferença entre a pressão no interior do canal e a pressão ambiente.

À entrada e saída do canal a pressão induzida fica sendo idêntica a  $p_0$ , sendo no entanto, sempre menor do que esta no canal.

$r_H$  representa a razão entre os fluxos de calor nas paredes do canal para o ar em movimento, sendo considerado que o fluxo de calor para a placa é maior do que o fluxo no vidro ( $q_p > q_v$ ).

Levando em conta agora a hipótese (c) as condições de contorno para a entrada, saída e paredes do canal podem ser escritas:

### ENTRADA

$$X = 0 , \quad 0 \leq Y \leq 1$$

$$U = U_0 , \quad P = 0 , \quad \theta = 0 , \quad V = 0 \quad (10)$$

### VIDRO

$$L \geq X \geq 0 , \quad Y = 0$$

$$U = 0 , \quad V = 0 , \quad \partial\theta / \partial Y = - r_H \quad (11)$$

### PLACA

$$L \geq X \geq 0 , \quad Y = 1$$

$$U = 0, \quad V = 0, \quad \partial \theta / \partial Y = 1 \quad (12)$$

### SAÍDA

$$X = L, \quad 0 \leq Y \leq 1$$

$$P = 0 \quad (13)$$

A condição de contorno (10) não se refere à uma condição típica de convecção forçada, mas quer indicar que se está admitindo o fluido já em escoamento. Quando a condição de contorno (13) for satisfeita, ou seja,  $P = 0$ , o comprimento  $L$  ficará determinado. Este comprimento está relacionado ao perfil da velocidade uniforme na entrada,  $U_0$ .

### II.3 - MODELO VERTICAL

A única alteração no modelo vertical, em relação ao modelo inclinado, dar-se-á nas equações da quantidade de movimento, resultando:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (5)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{dP}{dX} + \theta \quad (14)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (8)$$

A equação (7) é suprimida, por ser  $\partial P/\partial Y$  nulo para a direção vertical. Resulta então um sistema de três equações (5), (8) e (14) à quatro incógnitas  $U$ ,  $V$ ,  $P$  e  $\theta$ . A distribuição de temperaturas é determinada pela utilização da equação da energia, as distribuições de velocidade axial e de pressão são calculadas pela equação da quantidade de movimento, e, pela introdução de uma equação recorrente, segundo hipótese utilizada por Bodoia & Osterle |<sup>4</sup>|

$$\int_0^b u dy = u_0 \quad (15)$$

ou adimensionalmente,

$$\int_0^b U dY = U_0 \quad (16)$$

a equação (16) é a equação da continuidade integrada em  $Y$ , sendo utilizada conjuntamente com a equação (14) para solução dos perfis de  $U$  e  $P$ . Após o que, a equação (5) determina a velocidade  $V$ .

#### II.4 - PRESença DA RADIAÇÃO TERMICA

Considerando as hipóteses (f) e (g), e aplicando

a primeira lei da Termodinâmica para um balanço de energia nas paredes do canal obtém-se:

### PLACA DE VIDRO

$$\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda V} I_{\lambda S} d\lambda = \bar{h}_{ar} (T|_{y=0} - T_0) + \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda V} E_{\lambda V} d\lambda + q_v + \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda V} - E_{\lambda p}}{1/\epsilon_{\lambda V} + 1/\epsilon_{\lambda p} - 1} d\lambda \quad (17)$$

### PLACA METÁLICA

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \tau_{\lambda V} \alpha_{\lambda V} I_{\lambda S} d\lambda = q_p + \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda V} - E_{\lambda p}}{1/\epsilon_{\lambda V} + 1/\epsilon_{\lambda p} - 1} d\lambda \quad (18)$$

A dedução das equações (17) e (18) é apresentada no Apêndice 3. As duas equações introduzem os perfis das temperaturas de paredes como incógnitas no problema de escoamento com transferência de calor no canal.

## CAPÍTULO III

MÉTODO DE SOLUÇÃOIII.1 - PROBLEMA CONVECTIVO

As equações (5) - (8) e (14) são equações diferenciais parciais parabólicas, indicando que há uma direção predominante de difusão térmica definida pela coordenada de posição X, como é indicado por Rosenberg [14]. As condições existentes nas regiões anteriores determinam assim as condições atuais do escoamento. O método numérico das diferenças finitas é utilizado na solução do sistema de equações. São empregadas formas implícitas de discretização, estas formas apesar de promoverem um processo lento para obtenção das incógnitas à cada passo, são universalmente estáveis para velocidades na direção predominante de fluxo de calor positivo. Podendo-se usar passagens de progressões maiores, que compensem a lentidão dos cálculos.

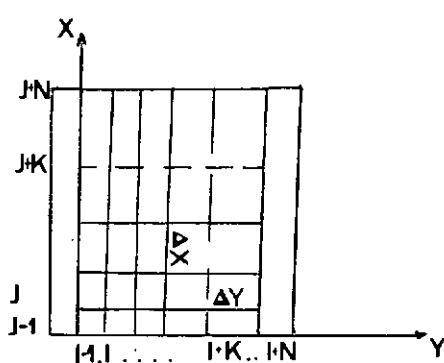


Figura III.1 - Rede Finita

Na direção  $Y$ , no intervalo entre  $0 \leq Y \leq 1$  utilizou-se uma discretização constante. Observando que nos pontos,

$$Y = 0 \quad \text{e} \quad Y = 1$$

$$U = 0 \quad \text{e} \quad V = 0 ,$$

e,

$$X = 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq Y \leq 1$$

$$V = 0 ,$$

o que implica que nestes pontos a solução numérica não pode ser adequadamente representada por uma expansão em série de Taylor (a representação no entorno de um ponto, é possível se a função e todas suas derivadas existam e sejam finitas nesta região).

Para tratar destas singularidades numéricas, na direção  $X$  foi tomado um  $\Delta X$  muito pequeno próximo à entrada do canal, e realizando-se um número maior de passos à entrada do canal, pois a propagação dos efeitos das singularidades é primariamente uma função do número de passos e não da posição  $X$ .

Define-se uma relação, para contornar o problema,

$$\Delta X_{j+1} = M \cdot \Delta X_j \quad (19)$$

onde  $M$  é um multiplicador.

Segundo Akbari & Borges |<sup>8</sup>| poderão ser tomados os seguintes valores:

$U_0$	$\Delta_x$	$\Delta_y$	$M$
0,03	$7 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	1,08
0,003	$7 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	1,03
0,0003	$2,1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$	1,002

As equações da continuidade de massa, quantidade de movimento e energia, respectivamente equações (5), (14) e (8), sob a forma de diferenças finitas implícitas, de acordo com a Figura III.1 (Ver Apêndice 4), ficam:

$$\frac{U_{J+1,I} + U_{J,I}}{\Delta X} + \frac{V_{J+1,I+1} - V_{J+1,I}}{\Delta Y} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{U_{J,I} (U_{J+1,I} - U_{J,I})}{\Delta X} + \frac{V_{J,I} (V_{J+1,I+1} - V_{J+1,I-1})}{2 \Delta Y}$$

$$- \frac{U_{J+1,I+1} + 2 U_{J+1,I} - U_{J+1,I-1}}{(\Delta Y)^2} = \theta_{J+1,I} \left( \frac{P_{J+1} - P_J}{\Delta X} \right) \quad (21)$$

$$\frac{U_{J,I} (\theta_{J+1,I} - \theta_{J,I})}{\Delta X} + \frac{V_{J,I} (\theta_{J+1,I+1} - \theta_{J+1,I-1})}{2 \Delta Y} = \\ = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{\theta_{J+1,I+1} - 2\theta_{J+1,I} + \theta_{J+1,I-1}}{(\Delta Y)^2} \right] \quad (22)$$

E, para a equação integral da continuidade, pode-se utilizar tanto a regra do trapézio (Equação (23)) ou a regra de Simpson (Equação (24)) para o cálculo;

$$\sum_{I=1}^N U_{J+1,I-1} = (N+1) U_0 , \quad (23)$$

ou,

$$((\Delta Y) / (3\Delta X)) \cdot ((U_{J+1,I-1} + 4U_{J+1,I} + 2U_{J+1,I+1} + 4U_{J+1,I+2} + \dots + U_{J+1,N}) - (U_{J,I-1} + 4U_{J,I} + 2U_{J,I+1} + 4U_{J,I+2} + \dots + U_{J,N})) = 0 \quad (24)$$

A solução deste conjunto de equações é obtida adotando um valor fixo do número de Prandtl,  $Pr = 0.7$  para o ar, e também para  $U_0$  e  $r_H$ .

A equação da energia é resolvida inicialmente para os pontos  $\theta_{J+1,I+1}, \theta_{J+1,I+2}, \dots, \theta_{J+1,I+K}, \dots, \theta_{J+1,I+N}$ . Ela é resolvida por meio de um método de redução matricial. A

equação da energia é escrita na forma de diferenças finitas como uma matriz da forma, (Apêndice 5),

$$\begin{bmatrix} B_{I+1} & C_{I+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{I+2} & B_{I+2} & C_{I+2} & 0 & \dots & 0 \\ A_{I+3} & B_{I+3} & C_{I+3} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & A_{I+N-2} & B_{I+N-2} & C_{I+N-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_{I+N-1} & B_{I+N-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{J+1, I+1} \\ \theta_{J+1, I+2} \\ \theta_{J+k, I+3} \\ \vdots \\ \theta_{J+1, I+N-2} \\ \theta_{J+1, I+N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{I+1} + \theta_{J+1, I} \cdot A_{I+1} \\ D_{I+2} \\ D_{I+3} \\ \vdots \\ D_{I+N-2} \\ D_{I+N-1} + \theta_{J+1, I+N-2} \cdot A_{I+N-1} \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde identificam-se os coeficientes:

$$B_I = U_{J+I} \cdot (\Delta X)^{-1} + 2 (Pr \cdot (\Delta Y))^{-1} \quad (26)$$

$$C_I = V_{J,I} \cdot (2 \Delta Y)^{-1} - Pr^{-1} \quad (27)$$

$$A_I = V_{J,I} \cdot (2 \Delta Y)^{-1} + (Pr \cdot (\Delta Y))^{-1} \quad (28)$$

$$D_I = \theta_{J,I} \cdot (U_{J,I}) \cdot (\Delta X)^{-1} \quad (29)$$

Testa-se a singularidade do sistema. E utiliza-

-se o método de Gauss para obtenção da solução. O processo consiste em conversão por meio de uma redução matricial do sistema (25), numa matriz triangular superior. Deve-se observar que os elementos que servem de pivô nas sucessivas eliminações não devem ser nulos.

Conhecendo-se a distribuição de temperaturas numa rede de linhas, segue-se para a determinação das distribuições de  $U$  e  $P$ , para a mesma linha, ou seja,  $U_{J+1, I+1}, U_{J+1, I+2}, \dots, U_{J+1, I+K}, \dots, U_{J+1, I+N}$  e  $P_{J+1}$ .

As equações (21) e (23) são armazenadas numa matriz da forma,

$$\left| \begin{array}{cccccc|c|c} F_{I+1} & G_{I+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & H & U_{J+1, I+1} & K_{I+1} \\ E_{I+2} & F_{I+2} & G_{I+2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & H & U_{J+1, I+2} & K_{I+2} \\ 0 & E_{I+3} & F_{I+3} & G_{I+3} & 0 & \dots & \dots & 0 & H & \dots & \dots \\ \vdots & H & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & E_{I+N-2} & F_{I+N-2} & G_{I+N-2} & H & U_{J+1, I+N-2} & K_{I+N-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & E_{I+N-2} & F_{I+N-1} & H & U_{J+1, I+N-1} & K_{I+N-1} \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 & P_{J+1} & (N+1) U_0 \end{array} \right| = \quad (30)$$

onde identificam-se os coeficientes

$$E_I = - V_{J,I} \cdot (\Delta Y)^{-1} + (\Delta Y)^{-2} \quad (31)$$

$$F_I = U_{J,I} \cdot \Delta X^{-1} - 2 \cdot (\Delta Y)^{-2} \quad (32)$$

$$G_I = V_{J,I} \cdot (2 \Delta Y)^{-1} - (\Delta Y)^{-2} \quad (33)$$

$$K_I = U_{J,I} \cdot U_{J,I} \cdot (\Delta Y)^{-1} + P_J \cdot \Delta X^{-1} + \theta_{J+1,I} \quad (34)$$

$$H = \Delta X^{-1}$$

Conhecendo-se por sua vez a distribuição de  $U$ , determina-se  $V$  pela equação da continuidade, que pode ser escrita analogamente a (25) e (30), numa matriz da forma

$$\left[ \begin{array}{cccccc} S_{I+1} & W_{I+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{I+2} & W_{I+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & S_{I+N-1} & W_{I+N-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} V_{J+1,I+1} \\ V_{J+1,I+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{J+1,I+N-1} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} R_{I+1} \\ R_{I+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{I+N-1} \end{array} \right] \quad (36)$$

onde os coeficientes são:

$$R_I = - (U_{J+1,I} - U_{J,I}) \cdot (\Delta X)^{-1} \quad (37)$$

$$S_I = - (\Delta Y)^{-1} \quad (38)$$

$$w_1 = \Delta Y^{-1} \quad (39)$$

O procedimento é reiniciado para o ponto  $J+2$ , e assim sucessivamente até a saída do canal,  $J+N$ , quando a condição de contorno (13) seja satisfeita, ou seja  $P \rightarrow 0$ , determinado por conseguinte o comprimento do canal  $L$ , e fornecendo o número de Grashof correspondente.

### III.2 - Problema Radiativo

O método de solução descrito até aqui não considera a presença das equações (17) e (18), acarretando que a solução do problema combinado será feita em duas etapas:

- a) Inicialmente é resolvido o problema de radiação, considerando-se as potências emissivas nas paredes de vidro absorvedor, respectivamente. (Ver Figura III.1)

$$E_{L,I-1} = \sigma \cdot T_{L,I-1}^4, \quad (L = J-1, J, J+1, \dots, J+K, \dots, J+N) \quad (40)$$

$$E_{L,I+N} = \sigma \cdot T_{L,I+N}^4, \quad (L = J-1, J, J+1, \dots, J+K, \dots, J+N) \quad (41)$$

Logo, as equações (17) e (18) resultam:

$$\tau_v \cdot \alpha_p \cdot I_s = \sigma F_{v-p} (T_{L,I-1}^4 - T_{L,I+N}^4) + q_p$$

$$\alpha_v I_s = \epsilon_v \sigma T_{L,I-1}^4 + \sigma F_{v-p} (T_{L,I-1}^4 - T_{L,I+N}^4) + \bar{h}_{ar} (T_{L,I-1}^4 - T_0) + q_v$$

$$\forall : L \in [J-1, J+N]$$

Fazendo como aproximação inicial,

$$\bar{T}_L = (((T_{L,I-1} + T_{L,I+N}) / 2 + T_0) / 2) \quad (42)$$

$$\forall : L \in [J-1, J+N]$$

E, procedendo a linearização do problema, definindo um número de radiação,

$$N_{R_L} = 4 b \sigma \bar{T}_L^3 / K \quad (43)$$

que leva à forma

$$T_{L,I-1} = \frac{(\alpha_v - \tau_v \alpha_p) I_s + q_p - q_v + \bar{h}_{ar} + T_0}{N_{R_L} K^* + \bar{h}_{ar}} \quad (44)$$

com,

$$K^* = \frac{\epsilon_v \cdot k}{4 b} \quad (45)$$

por conseguinte, para a placa metálica,

$$T_{L, I+N}^4 = \frac{q_p - \tau_v \alpha_p I_s + \sigma F_{v-p} T_{L, I-1}^4}{\sigma F_{v-p}} \quad (46)$$

As equações (45) e (46) são resolvidas de forma iterativa e, também do Capítulo III é conhecida a razão entre os fluxos de calor convectivos  $r_H$ .

São calculadas a partir de um dado número de Grashof médio,  $\overline{Gr}$ , e de uma razão de fluxos  $r_H$ , a partir do problema de transferência de calor no interior do canal, pois:

$$\overline{Gr} = \frac{g \beta q_p b^5}{\ell v^2 k} \quad (47)$$

A seguir, admite-se uma variação inicial para as temperaturas de paredes ao longo do canal, ou seja,

$$T_{L, I+1}^{(1)}$$

$$\forall : L \in [J-1, J+N] \quad (48)$$

$$T_{L, I+N}^{(1)}$$

$$\forall : L \in [J-1, J+N]$$

O índice superior representa o número da iteração realizada.

Estas distribuições de temperaturas iniciais escolhidas ficam a critério do usuário, sabendo-se que um valor mal arbitrado pode acarretar um tempo de programação maior. Uma boa regra, a ser observada é que, quando se estiver considerando um perfil de velocidade de entrada com um valor superior a  $U_0 = 0,12$ , o escoamento tenderá a apresentar-se plenamente desenvolvido. Assim resulta uma variação linear assintótica para o crescimento para as temperaturas de paredes. Logo, trabalhando-se nesta faixa de vazões tal hipótese inicial para o cálculo das temperaturas do vidro e placa absorvedora não seria uma má escolha. Quando se afastando para vazões médias e baixas, o problema de escolha torna-se difícil e aleatório, ver por exemplo Aung, Fletcher & Sernas |<sup>4</sup>|.

Pode-se agora calcular as  $\bar{T}_L$ ,  $\forall L \in [J-1, J+N]$  através da equação (42).

E também os números de radiação correspondentes via Equação (43).

Entra-se com os valores das características radiativas do problema ( $\alpha_v, \alpha_p, \tau_v, \epsilon_p, \epsilon_v$ ) e das características convectivas ( $\bar{h}_{ar}, T_0, Pr$ ). E calcula-se uma nova distribuição de temperaturas de paredes pelas equações (43) e (44), ou seja,  $T^{(2)}_{J-1, I-1}, T^{(2)}_{J, I-1}, T^{(2)}_{J+1, I-1}, T^{(2)}_{J+2, I-1}, \dots, T^{(2)}_{J+N, I-1}$ , e,  $T^{(2)}_{J-1, I+N}, T^{(2)}_{J, I+N}, T^{(2)}_{J+1, I+N}, T^{(2)}_{J+2, I+N}, \dots,$

$$T_{J+N, I+N}^{(2)}$$

Testa-se, após a convergência do problema,

$$\left[ T_{L, I-1}^{(2)} - T_{L, I-1}^{(1)} \right] \leq \varepsilon_1, \quad (49)$$

$$\left[ T_{L, I+N}^{(2)} - T_{L, I+N}^{(1)} \right] \leq \varepsilon_1, \quad (50)$$

$$\forall : L \in [J-1, J+N]$$

A convergência do problema está assegurada quando o valor atual encontrado não diferir do anterior mais do que uma certa tolerância,  $\varepsilon_1$ , pré-fixada, ( $\varepsilon_1 = 10^{-3}$ ).

- b) A segunda etapa, consiste na solução do problema convectivo que é representado pelas equações de conservação, Eqs. (5), (14), (8) e (16), com as condições de contorno (10 - 13).

O método de solução é o mesmo descrito anteriormente no Parágrafo III.1.

Uma vez obtidas as distribuições de velocidade, temperatura e pressão, testa-se a convergência do problema conjunto, uma vez que partiu-se da hipótese inicial de um número de Grashof médio e uma dada razão de fluxo de calor  $rH$ .

Usando a condição de contorno, equação (11) e re escrevendo-a em forma de diferenças finitas:

$$\frac{(\theta_{L, I+N-1} - \theta_{L, I+N})}{\Delta Y} = - r_H \quad (51)$$

$$\forall L \in [J-1, N] .$$

Devendo ser satisfeita a condição:

$$\left[ r_H^{(\text{atual})} - r_H^{(\text{inicial})} \right] < \epsilon_2 \quad (52)$$

com

$$\epsilon_2 = 10^{-2} .$$

Caso a relação (52) não seja satisfeita à primeira iteração, as distribuições de pressão, temperatura e velocidade, são recalculadas usando os valores da primeira solução.

E assim se prossegue, até que a convergência, testada via a relação (52), seja estabelecida.

Para a solução do problema de transferência de calor para o canal inclinado, inclui-se ainda a Eq. (17), que pode ser escrita sob a forma de diferenças finitas explícitas:

$$\frac{P_{J+1,I} - P_{J+1,I-1}}{\Delta Y} = \frac{1}{Gr^*} \operatorname{tg} \alpha \theta_{J+1,I} \quad (53)$$

Bem como, deve ser incluída a equação (21), da quantidade do movimento na direção  $-x$ , reescrita na forma:

$$U_{J,I} \frac{U_{J+1,I} - U_{J,I}}{\Delta X} + v_{J,I} \frac{U_{J+1,I+1} - U_{J+1,I-1}}{2 \Delta Y} = \\ = \frac{U_{J+1,I+1} - 2U_{J+1,I} + U_{J+1,I-1}}{(\Delta Y)^2} - \frac{P_{J+1,I} - P_{J,I}}{\Delta X} + \theta_{J+1,I} \quad (54)$$

Pela equação (53) pode-se determinar imediatamente a variação da pressão ao longo da direção  $Y$ . A metodologia de cálculo é idêntica à aquela seguida no caso do canal vertical.

## CAPÍTULO IV

### APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

#### IV.1 - RESULTADOS PARA O CANAL VERTICAL & INCLINADO

Inicialmente foram obtidas soluções para o modelo teórico de canal vertical para condições de fluxo de calor uniforme nas paredes, estudando-se também a influência da inclinação.

Comparações foram realizadas, para a situação de transferência de calor em canais verticais com convecção natural, com os resultados de Aung [5]. Para a presença da radiação térmica comparou-se com os de Carpenter [7]. Estes testes permitiram uma confiabilidade no método numérico empregado.

O problema utilizou os seguintes dados de entrada, conforme a Tabela 2:

CONVEÇÃO NATURAL, Aug   <sup>5</sup>		CONVEÇÃO NATURAL + RADIAÇÃO TÉRMICA, CARPENTER   <sup>7</sup>
$r_H$	0 - 0,1 - 0,5	0 - 0,1 - 0,5
$U_o$	0,15 - 0,005	0,005 - 0,007
$\alpha$	0º	0º
$N_r$	-	3,75 - 5,0
$\Delta x$	$10^{-2}$ - $10^{-7}$	$10^{+7}$ - $10^{+16}$
$\Delta y$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
Pr	0,7	0,7

Tabela 2 - Dados das Referências | <sup>5</sup> | e | <sup>7</sup> |

Os resultados obtidos através da metodologia de cálculo desenvolvida, são a seguir apresentados graficamente. Convém ser observado que no modelo teórico com a presença da radiação foram especificados adicionalmente os valores dos seguintes parâmetros:

$$I = 700 \text{ W/m}^2 , \quad \alpha_v = \varepsilon_v = 0,4 , \quad \varepsilon_p = 0,85 , \quad \alpha_p = 0,9 ,$$

$$\tau_v = 1,0 \quad \bar{h}_{ar} = 3,92 \text{ W/m}^2 \text{ C} \quad (55)$$

As figuras (IV-1) à (IV-10) apresentam as soluções para o problema convectivo em canal vertical.

Observa-se que as Figuras (IV-1) à (IV-3) in-

dicam um regime de escoamento plenamente desenvolvido para um número de Grashof da ordem de  $Gr = 10^{-1}$ , e um valor de  $U_0 = 0,15$ .

Na faixa de um número de Grashof da ordem de,  $Gr = 10^{-6}$ , o regime de escoamento está em desenvolvimento, à uma baixa vazão de valor,  $U_0 = 0,005$ . Esses resultados são fornecidos nas Figuras (IV-4) à (IV-8).

Um estudo quanto a influência de  $r_H$ , para  $U_0 = 0,15$  é apresentado nas figuras (IV-9) a (IV-11).

Para um valor,  $U_0 = 0,005$ , nota-se que o aumento de  $r_H$  induz uma evolução mais linear do perfil de temperatura da placa absorvente. No entanto, a diferença entre os valores máximos atingidos é insignificante, como se vê nas Figuras (IV-9) à (IV-11).

Uma boa concordância foi obtida com os resultados de Aung.

As Figuras (IV-12) à (IV-16) consideram a influência da radiação térmica associada a convecção natural em canal vertical. Dois números de radiação foram fixados,  $N_R = 3,75$  e 5,00, dentro de uma mesma faixa de vazão, como indicado na Tabela 2. As distribuições de temperatura e velocidade são afeadas, no sentido de que a radiação térmica ajuda a transferir calor no interior do canal.

O perfil da velocidade é mais pronunciado nas proximidades da placa metálica, Figuras (IV-14) e (IV-15). A distribuição da temperatura do ar próxima à placa de vidro se reduz ao passo que cresce próxima à placa absorvente, como se vê nas Figuras (IV-12) e (IV-13).

A figura (IV-16) apresenta o comportamento da temperatura da placa metálica ao longo do coletor para um aumento do número de radiação. O valor máximo do perfil não se dá à saída do canal. Este efeito foi observado por Carpenter [7] para alguns números de radiação. De um modo geral obteve-se uma boa concordância com os resultados deste autor. Para o canal inclinado foi fixado um ângulo de  $\alpha = 60^\circ$  com a vertical para os dados explicitados na própria Figura (IV-17).

O crescimento do perfil da temperatura da placa metálica foi progressivo ao longo do canal. O escoamento se apresenta na região de desenvolvimento, para uma vazão,  $U_0 = 0,005$ , como na situação de canal vertical. Os dois casos praticamente coincidem, muito embora a inclinação sirva para aumentar a troca de calor entre as placas, como se observa a evolução do gradiente de temperatura da Figura (IV-17) em comparação com a distribuição da Figura (IV-16).

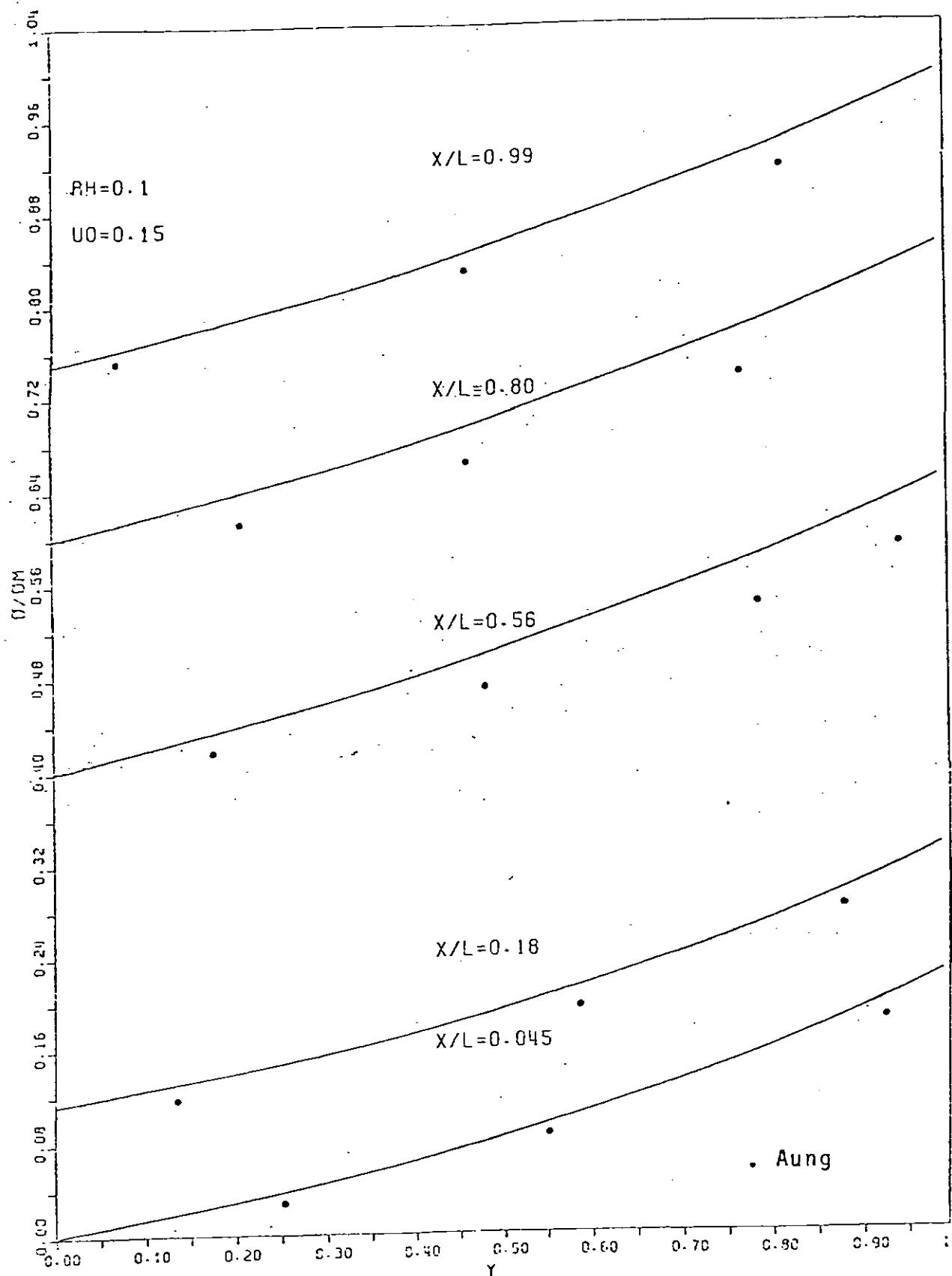


Figura IV-1 - Perfil de Temperatura do Ar no Canal

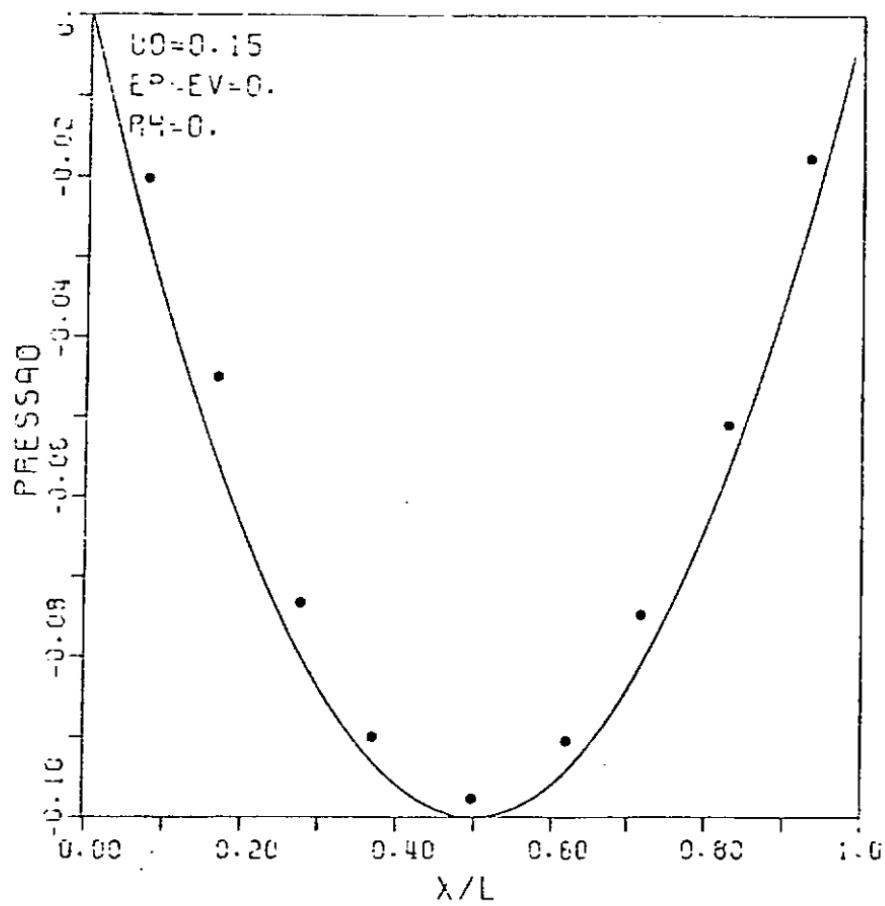


Figura IV.2 - Perfil de Pressão do Ar no Canal

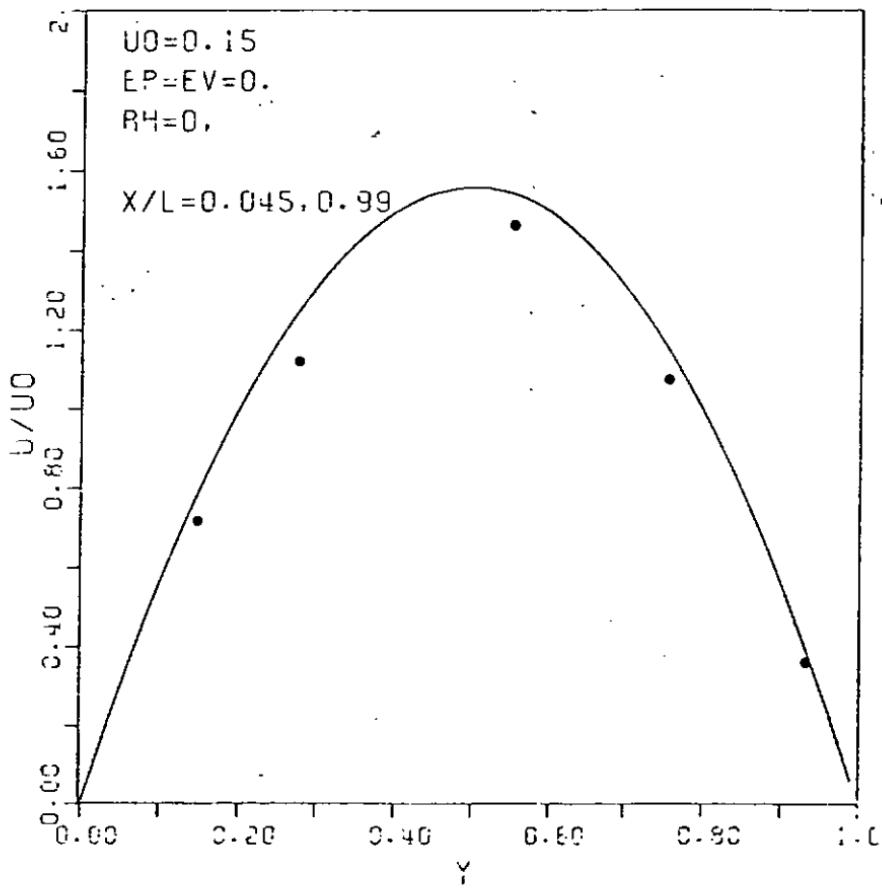


Figura IV.3 - Perfil de Velocidade do Ar no Canal

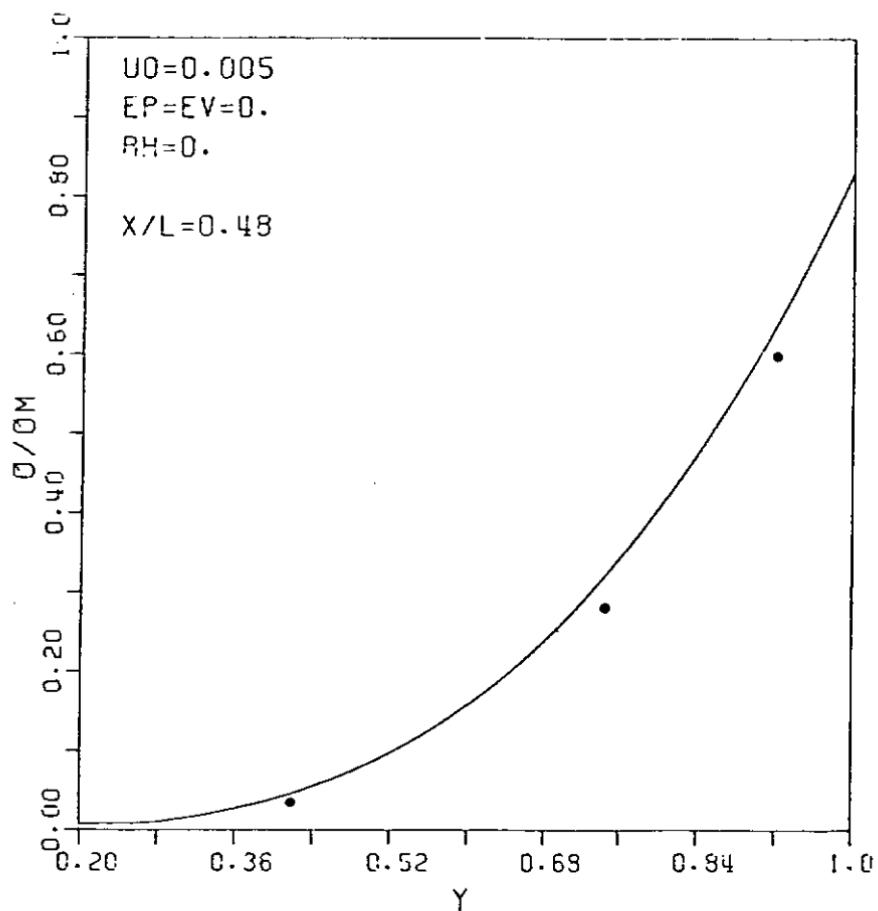


Figura IV.4  
Perfil de Temperatura do Ar por Seção no Canal

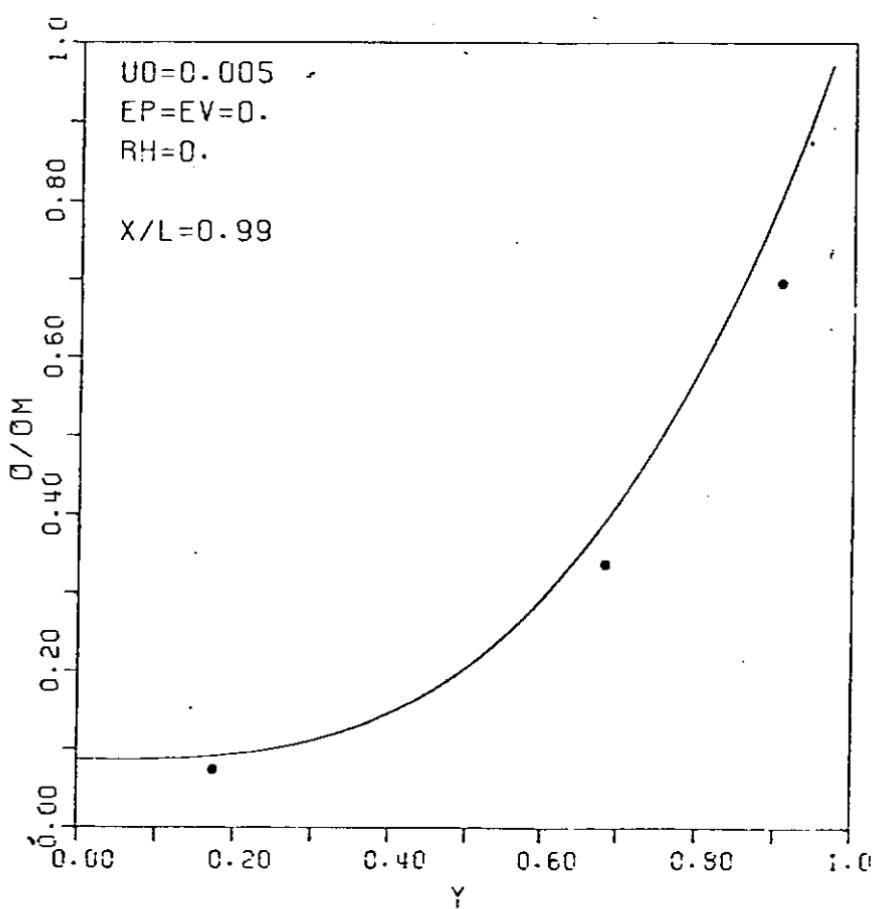


Figura IV.5  
Perfil de Temperatura do Ar por Secção no Canal

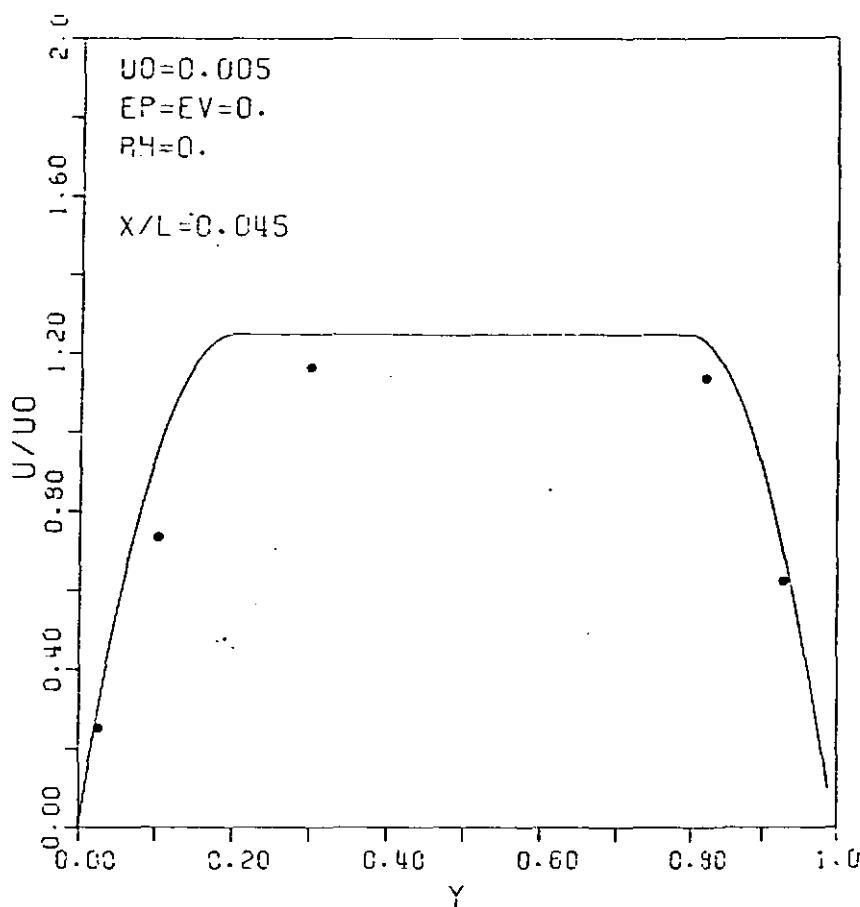


Figura IV.6  
Perfil de Velocidade do Ar por Seção no Canal

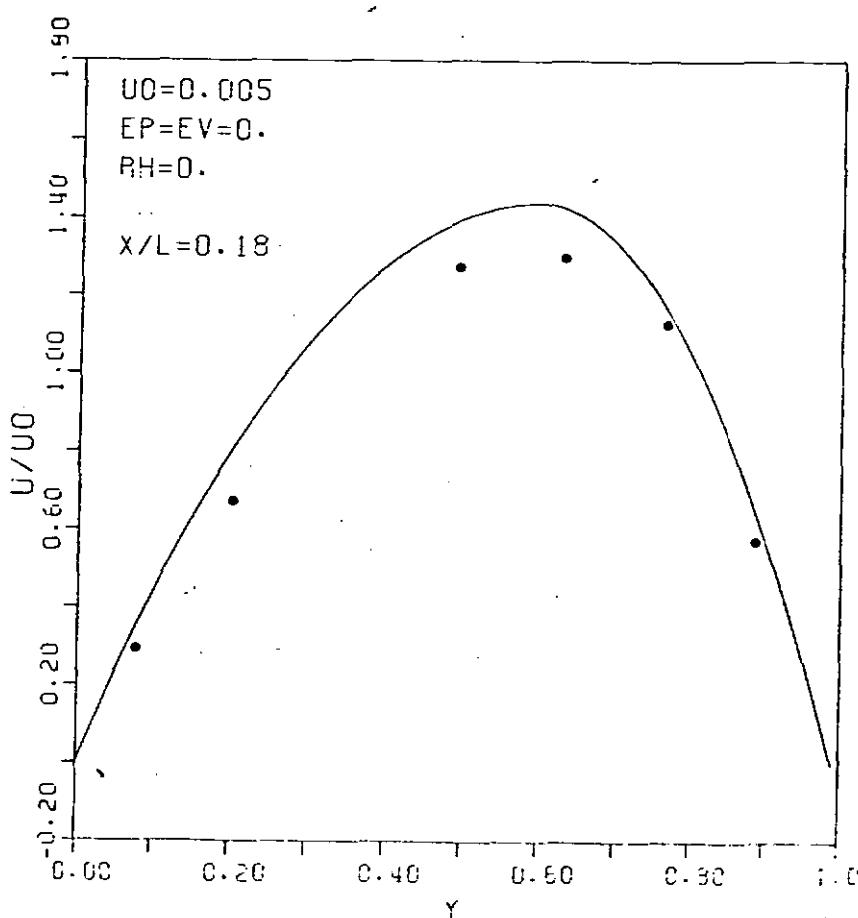


Figura IV.7 - Perfil de Velocidade do Ar por Secção no Canal

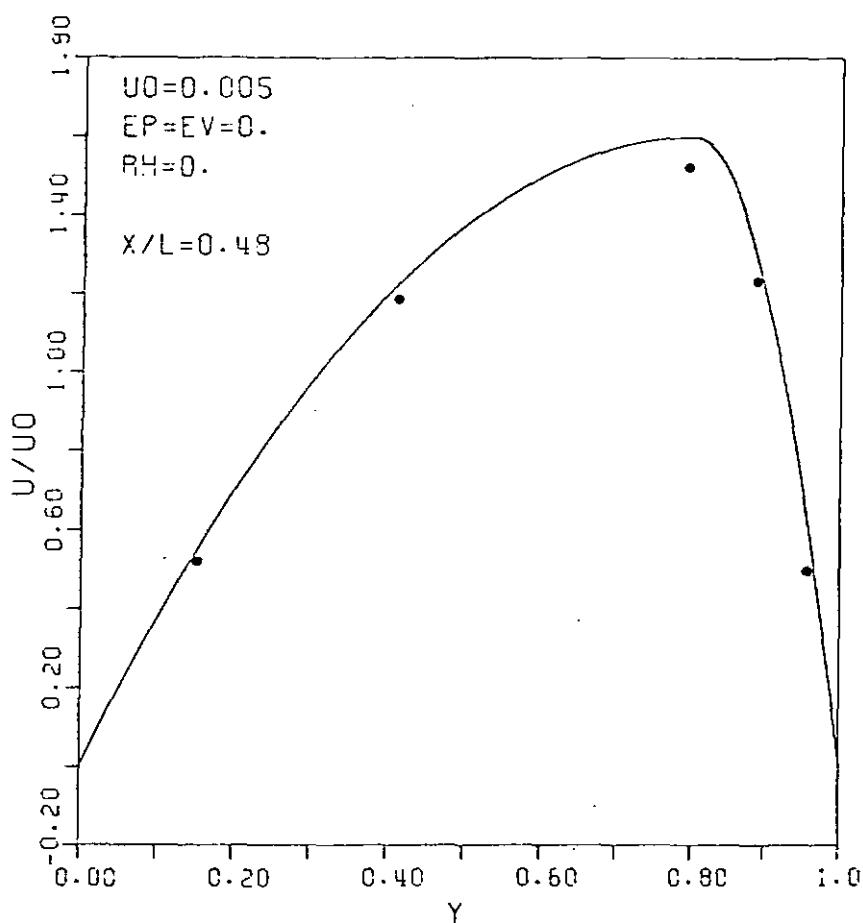


Figura IV.8 - Perfil de Velocidade do Ar no Canal

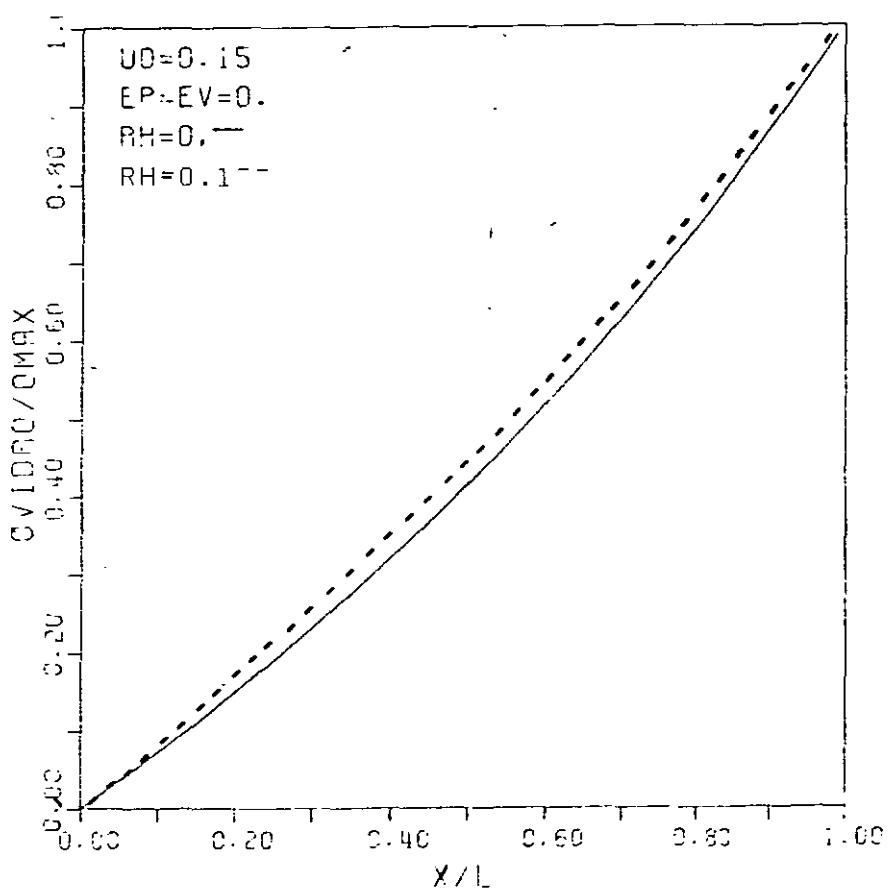


Figura IV.9 - Perfis de Temperaturas do Vidro no Canal

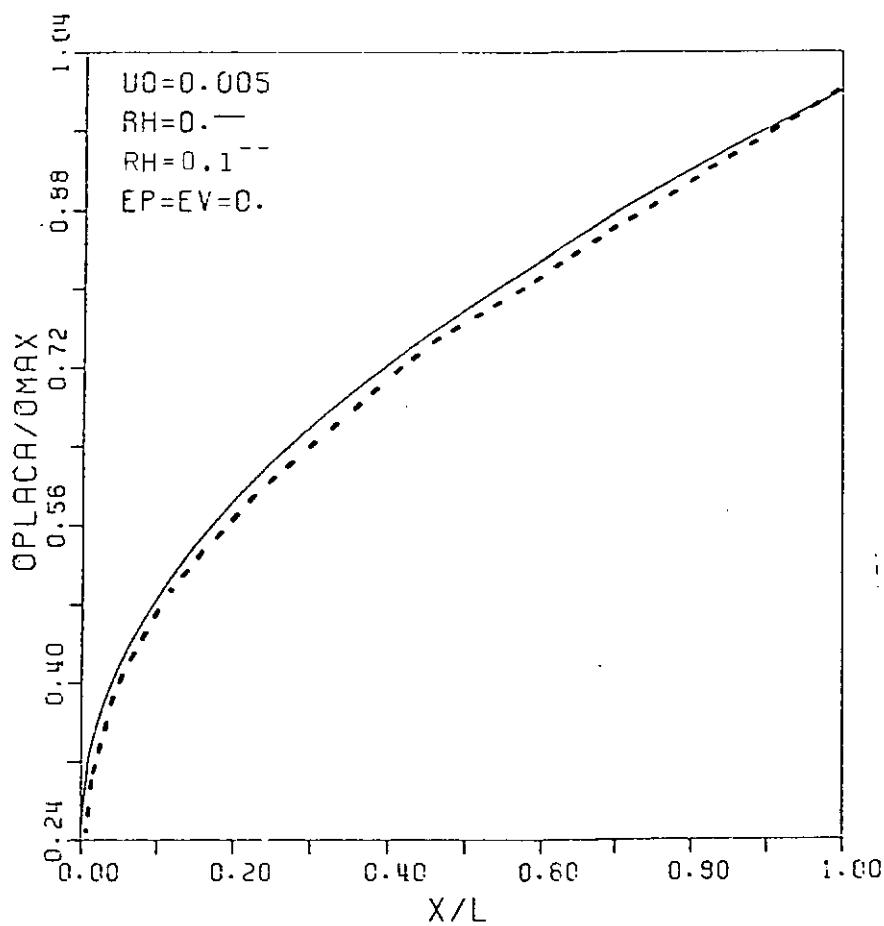


Figura IV.10  
Perfis de Temperaturas da Placa Absorvedora no Canal

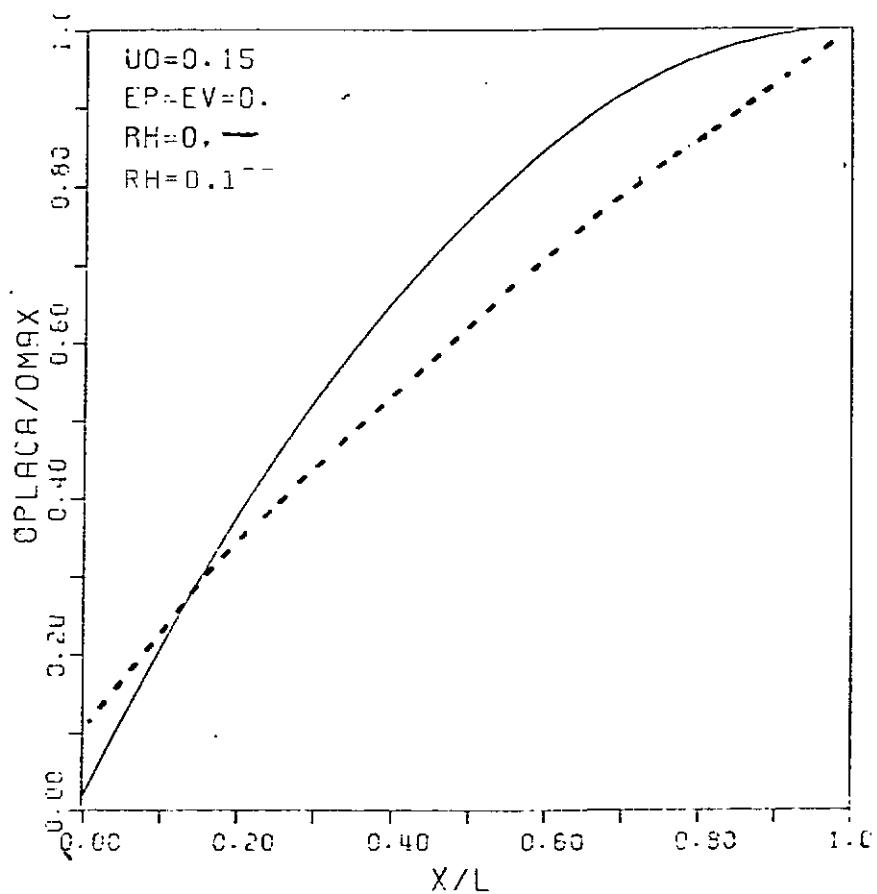


Figura IV.11 - Perfis de Temperaturas da Placa Absorvedora no Canal

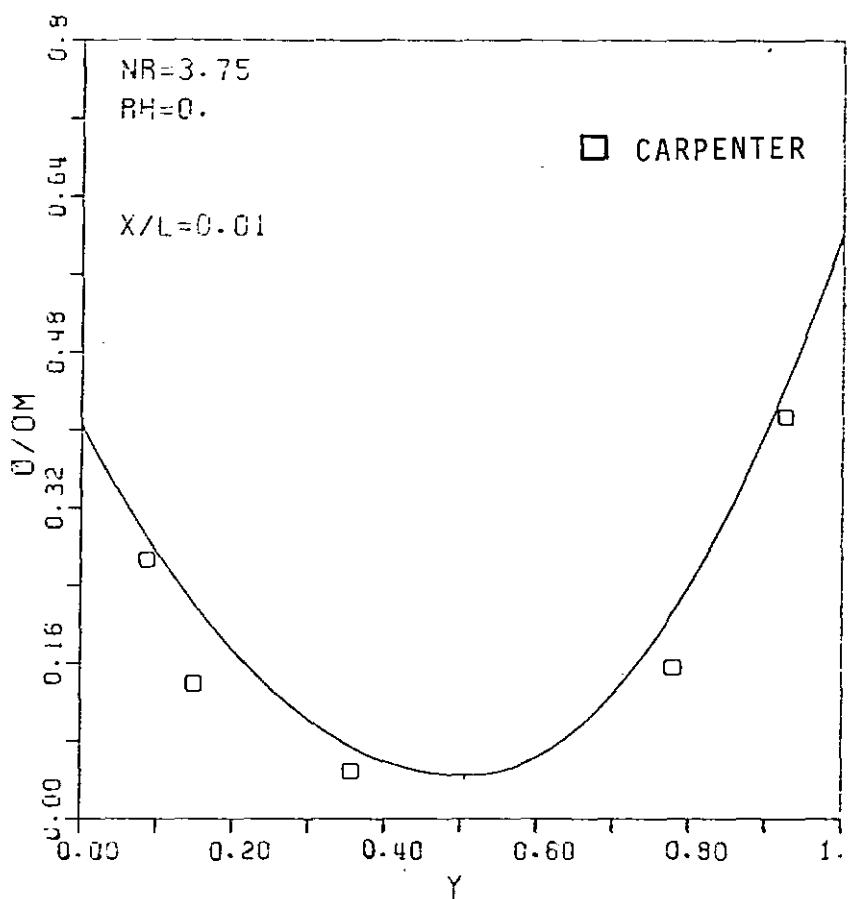


Figura IV.12  
Perfil de Temperatura do Ar por Seção no Canal

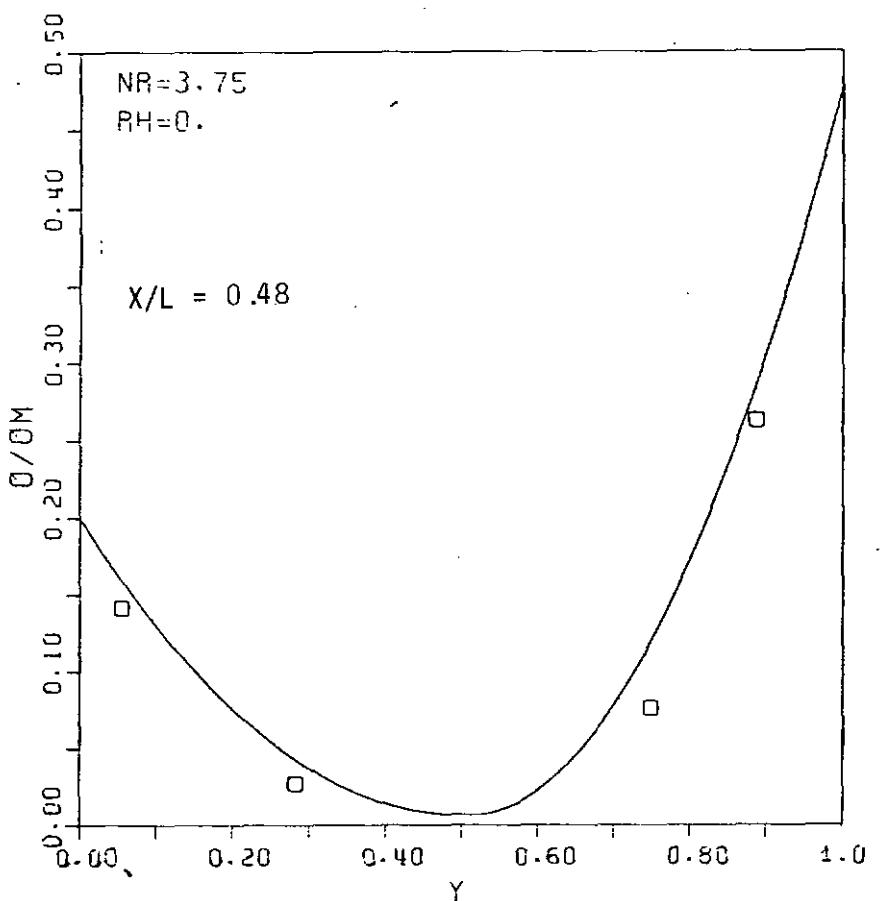


Figura IV.13  
Perfil de Temperatura do Ar por Seção no Canal

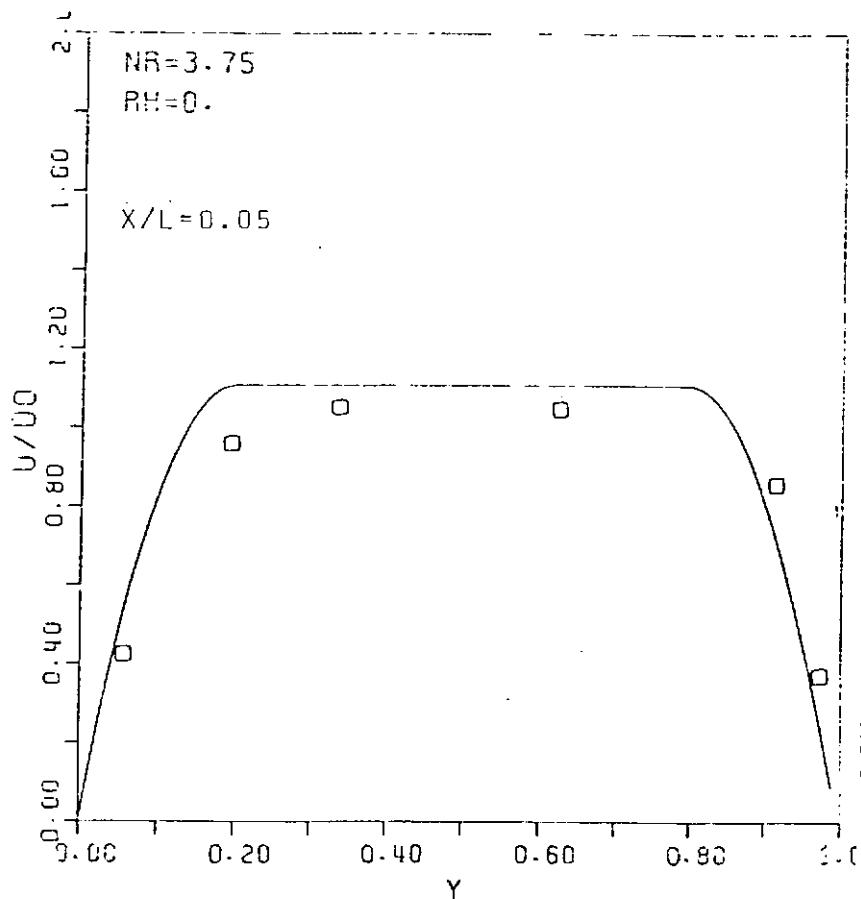


Figura IV.14 - Perfil de Velocidade do Ar por Seção no Canal

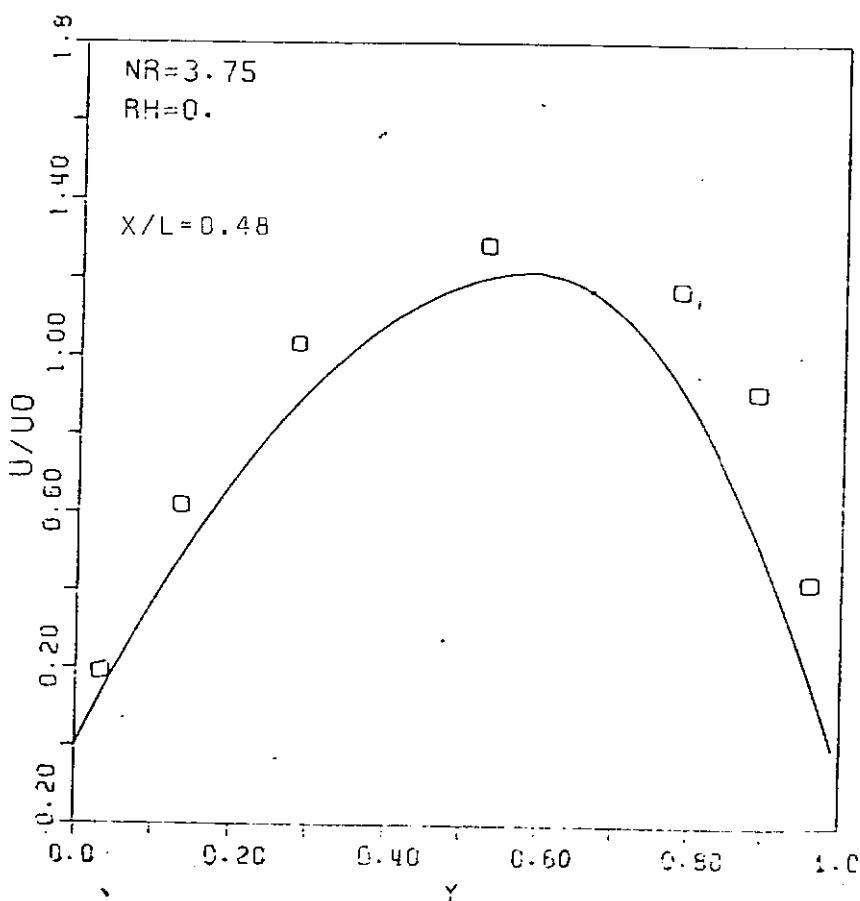


Figura IV.15 - Perfil de Velocidade do Ar por Seção no Canal

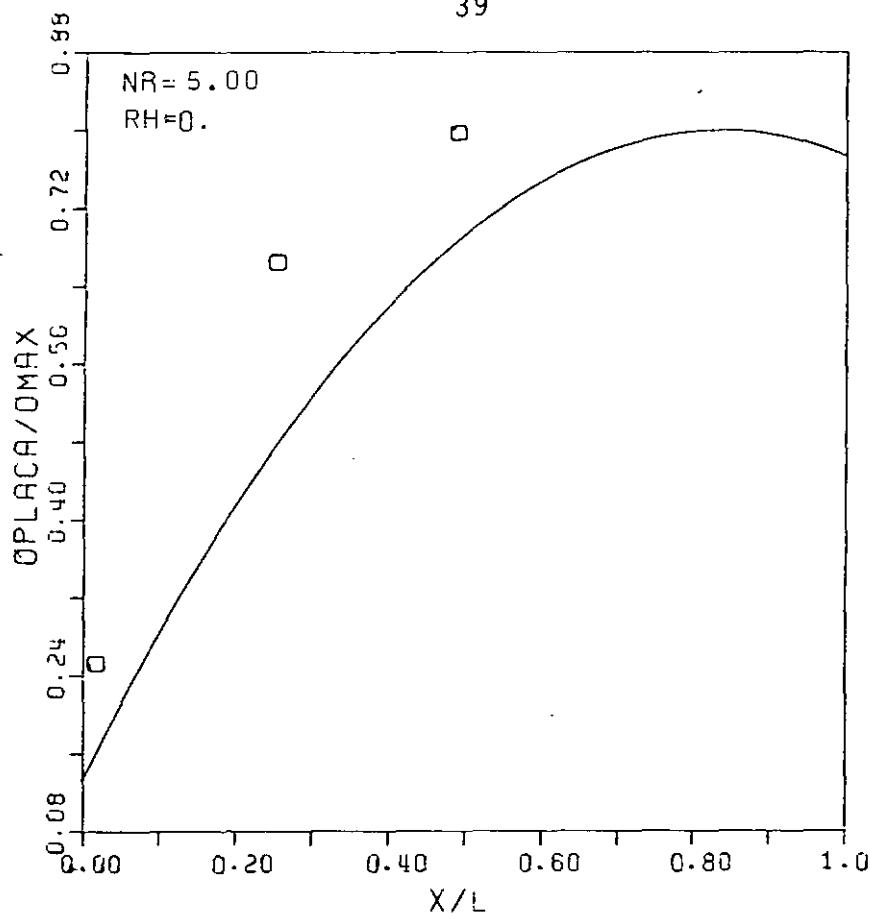


Figura IV.16 - Perfil de Temperatura da Placa Absorvedora

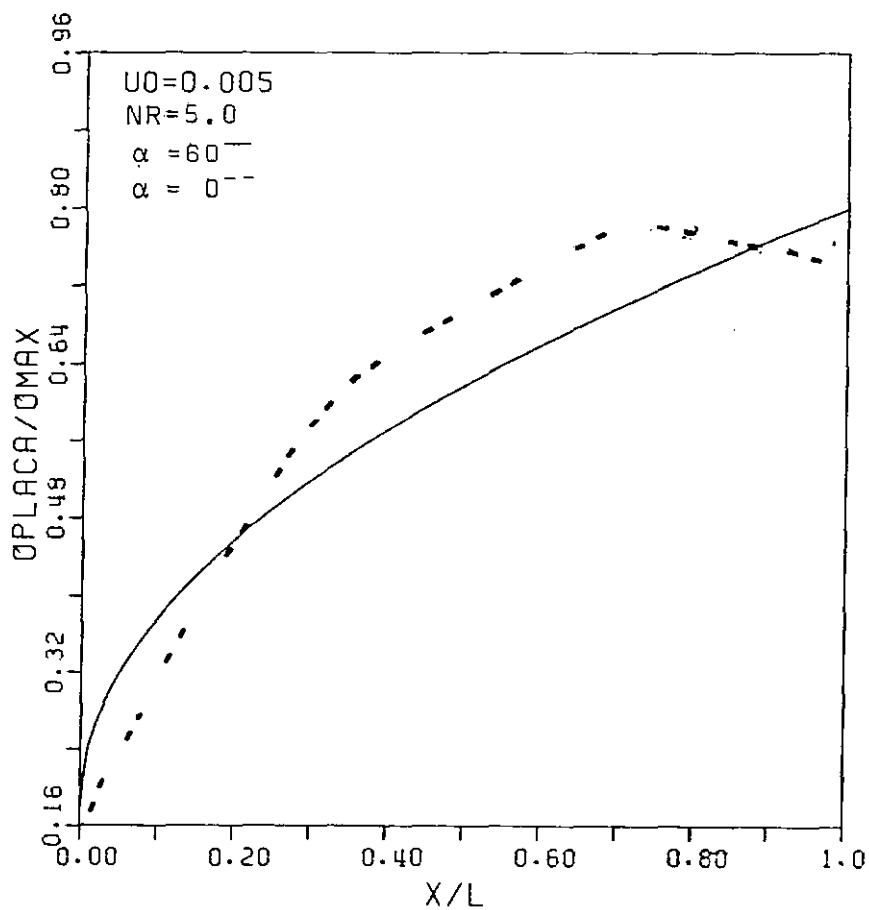


Figura IV.17 - Perfil de Temperatura da Placa Absorvedora

## IV.2 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Considerando os resultados para  $U_0 = 0,15$  e  $U_0 = 0,005$ , o comportamento da temperatura é aproximadamente linear com a direção axial, quando o escoamento se apresenta plenamente desenvolvido, Figura IV.1. Observa-se que estes perfis variam muito pouco ao longo da direção-X do canal.

A consideração da radiação térmica por meio das equações de balanço de energia para as paredes do canal, (17) e (18), introduz alguns parâmetros adimensionais na análise, ou seja, o número de radiação,  $N_r$ , a razão adimensional do canal,  $r_b = b/\ell$ , as emissividades e absorтивidades das paredes de vidro e metal.

Os resultados com a radiação presente podem ser vistos graficamente nas Figuras IV(14) - (17), onde o escoamento se apresenta em desenvolvimento. Tais conclusões também foram verificadas por Carpenter [7] e Macedo [9].

Observaram-se maiores valores para o comprimento adimensional,  $L$ , do canal, quando a velocidade de entrada,  $U_0$ , aumentou. Ainda, as temperaturas máximas nas duas paredes ocorreram à saída do canal, como se verifica nas Figuras (IV-1), (IV-4) e (IV-5). À medida que  $L$  aumenta, o escoamento tende a se apresentar plenamente desenvolvido, Figuras (IV-1 a IV-3) e a

diferença entre os valores das temperaturas máximas das paredes diminui. Para valores mais baixos de  $U_0$ , ou seja,  $U_0 = 0,005$ , observou-se o efeito da radiação sobre as temperaturas das paredes. Há uma redução da temperatura da placa metálica com o consequente aumento da taxa de transferência de calor, quando são consideradas progressivamente seções ao longo do canal, Figuras (IV-12) e (IV-13). Este comportamento difere do caso em que não há radiação presente, Figuras (IV-4) e (IV-5).

As razões  $r_b$  são moderadas ( $\geq 10^{-1}$ ) para a faixa de números de Rayleigh moderados, e baixas ( $\leq 10^{-3}$ ), para números de Rayleigh pequenos, com a radiação não tendo nenhum efeito no processo de transferência de calor. Nestes casos  $\ell \gg b$ , ou seja, a distância entre placas é muito pequena em relação ao comprimento do canal, apresentando-se o escoamento desenvolvido, Tabela 3.

Em aplicações tecnológicas, para o dimensionamento de coletores solares não é interessante a situação encontrada na linha superior da Tabela 3. Isto porque haverá a necessidade de grandes comprimentos para se manter o regime do escoamento plenamente desenvolvido.

A faixa em que os valores de  $r_b$  são moderados é a mais adequada ao projetista, observando-se que o regime de escoamento está em desenvolvimento. Justifica-se assim os estudos atuais que estão sendo feitos especificamente para o escoa-

mento à baixas vazões, Akbari |<sup>8</sup>|, Macedo |<sup>9</sup>|.

	$Gr = 1/L$	$L$	$Ra = Pr \cdot Gr$	Regime do Escoamento	$r_b = b/l$
Altas vazões $(U_0 \geq 0,15)$	Números baixos $[10^{-2}, 10^{+1}]$	Grandes	Números baixos $[10^{-2}, 10^{+1}]$	Plenamente Desenvolvidos	Valores pequenos $(\leq 10^{-3})$
Baixas vazões $(U_0 \leq 0,005)$	Números moderados $[10^{-1}, 10^{-8}]$	Moderados	Números Moderados & Baixos $[10^{-1}, 10^{+8}]$	Em Desenvolvimento	Valores Moderados $(\geq 10^{-1})$

Tabela 3 - Conjunto de Soluções

CAPÍTULO VCONCLUSÕES

- i) Verificaram-se resultados prévios de Mace-  
do [9], no sentido de que o escoamento se  
apresenta em desenvolvimento para situações  
onde a radiação térmica esteja presente, for-  
necendo  $r_b$  moderados, o que corresponde as  
situações mais adequadas à aplicações práti-  
cas de dimensionamento de coletores.
- ii) Quando a radiação não está presente, o escoa-  
mento tende assintoticamente a plenamente de-  
senvolvido, para um aumento contínuo do com-  
primento adimensional L do canal. Os resul-  
tados concordam com os de Aung [5].
- iii) A presença de radiação térmica alterou os  
perfis de temperatura do fluido em torno de  
50% em relação aos resultados com convecção  
natural somente presente. A radiação, en-  
quanto reduz a temperatura máxima para a pa-  
rede de metal, favorece a transferência de  
calor no canal, Figuras (IV-4), (IV-5), (IV-12),  
e (IV-13).
- iv) À medida que a distância entre as paredes,

b, foi sendo reduzida, a radiação foi tendo seus efeitos atenuados.

Nestas situações podem-se desprezar a radiação e aplicar os resultados de escoamento desenvolvido por convecção natural.

- v) No canal inclinado, na faixa de um número de Grashof moderado, encontrou-se um comportamento para a transferência de calor, semelhante ao do canal vertical. A inclinação contribui para um crescimento mais uniforme nos valores da temperatura encontrados no interior do canal, Figura (IV-17).
- vi) Para a situação de canal inclinado, pode-se observar que a temperatura máxima atingida pelo fluido não ocorre à saída do canal. E deve esperar que a medida que o número de Rayleigh e/ou razão  $r_b$  aumentem, as perdas radiativas à saída do canal venham a ser maiores, como Zapparolli [¹⁰] e Carpenter [⁷] verificaram. Nestes casos ocorre uma reversão do fluxo de calor, ou seja, encontram-se valores negativos para a velocidade do fluido, e há um decréscimo do número de Nusselt.
- vii) Concluiu-se ainda que falta uma maior verifi-

cação experimental para as diversas situações aqui estudadas. Os resultados empíricos para a transferência de calor por convecção natural em canal vertical, foram verificadas por Aung [ 5 ]. As demais análises, como a influência da radiação térmica e inclinação, merecem futuras avaliações mais rigorosas.

#### V.1 - Sugestões

- i) Pode-se fazer um estudo mais detalhado da influência do escoamento com as grandezas dimensionais do canal, especificamente à baixas vazões;
- ii) O modelo parabólico originário das simplificações decorrentes da hipótese de formação de camada limite no interior do canal pode ser substituído por uma análise física mais rigorosa a partir das equações completas de Navier-Stokes;
- iii) Quanto a solução numérica atual empregada, tornar-se-ia interessante pensar no refinamento da malha na progressão da coordenada -Y, fazendo-a mais fina próxima às paredes do canal;

iv) De uma maneira geral, observa-se a necessida de de serem realizadas experiências para a obtenção de dados, que venham possibilitar futuras comparações com os modelos matemáticos formulados.

APÊNDICE 1BALANÇO PARA O FLUIDO

- a) Fazendo o balanço de conservação de massa para o fluido, considerando o escoamento bidimensional:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de escoamento} \\ \text{em um elemento de} \\ \text{volume na direção x} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Taxa de escoamento} \\ \text{em um elemento de} \\ \text{volume na direção y} \end{array} \right\} = 0 \quad (56)$$

Matematicamente, os termos podem ser representados,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \Delta x \Delta y + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \Delta x \Delta y = 0 \quad (57)$$

Tratando-se a densidade como uma constante, de modo que resulta,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (58)$$

- b) As equações de conservação da quantidade de movimento são derivadas da segunda lei de Newton do movimento. As forças externas atuando em um elemento de volume consistem das forças de corpo e superfície.

Tem-se:

$$(massa) \cdot (\text{Aceleração na direção } x - y) = (\text{Forças de corpo na direção } x - y) + (\text{Forças de Superfície na direção } x - y)$$

(i)

(ii)

(iii)

(iv)

Termo a termo no balanço vem:

$$(i) \rho \Delta x \Delta y$$

$$(ii) \frac{D}{Dt} = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(iii) F_x \Delta x \Delta y, \quad F_y \Delta x \Delta y$$

$$(iv) \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y, \quad \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) \Delta x \Delta y$$

Escreve-se os quatro termos acima segundo as considerações de escoamento laminar incompressível bi dimensional em regime permanente para um fluido de propriedades constantes, salvo no termo de empuxo.

Em (i)  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  significam tensões normais às direções x e y, respectivamente.  $\tau_{yx}$  e  $\tau_{xy}$  significam as tensões de cisalhamento, onde o primeiro índice indica o eixo perpendicular à superfície de atuação e o segundo indica a direção da tensão ao longo da superfície.

Sob as hipóteses mencionadas, tem-se expressões correlatas para os componentes das tensões, por Schlichting<sup>[17]</sup>

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial j} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (59)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (60)$$

e,

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (61)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (62)$$

Usando as expressões acima, as equações da quantidade de movimento são escritas:

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = F_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

e,

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F_y + \frac{\partial}{\partial y} \left( -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

ou ainda,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$$

Os termos,  $\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \right)$ ,  $\mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)$ ,

são simplificados em vista da equação da continuidade pois,

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0$$

de onde resulta,

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (63)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (64)$$

- c) Quanto à equação da energia, ela pode ser derivada ao proceder-se um balanço de acordo com a primeira lei da termodinâmica, para um elemento diferencial de volume no campo fluido, ou seja,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de calor adicionada} \\ \text{num elemento diferencial} \\ \text{por condução} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de energia transfe-} \\ \text{rida à um elemento dife-} \\ \text{rencial devido ao tra-} \\ \text{balho realizado pelas for-} \\ \text{ças de corpo e superfície} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de energia} \\ \text{armazenada num} \\ \text{elemento dife-} \\ \text{rencial} \end{array} \right]$$

Assim,

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + (u F_x + v F_y) + \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de trabalho por atri-} \\ \text{to num elemento diferencial} \end{array} \right] = \frac{D}{Dt} \left\{ \rho \left[ e + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \right] \right\}$$

Vê-se por Schlichting [17] que,

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de trabalho por} \\ \text{átrito num elemento} \\ \text{diferencial} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) \end{array} \right]$$

Então o balanço de energia toma a forma,

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + u F_x + v F_y + \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) = \rho \frac{De}{Dt} + \frac{\rho}{2} \left[ \frac{D}{Dt} (u^2 + v^2) \right]$$

ou,

$$\frac{K}{\rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - \frac{D e}{D t} + \phi = 0 \quad (65)$$

$\phi$  representa o termo dissipativo devido ao escoamento viscoso do fluido,

$$\begin{aligned} \phi = & (u F_x + v F_y) + \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_y) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) \right] - \frac{\rho}{2} \left[ \frac{D}{D t} (u^2 + v^2) \right] \end{aligned}$$

Para o modelo os termos de dissipaçāo viscosa sāo desprezadas devido a que a velocidade de escoamento se dā razōes moderadas. Para densidade constante podemos aproximar,

$$\frac{D e}{D t} \approx c_p \frac{D T}{D t} \quad (66)$$

o que leva a equaçāo (64) ser escrita,

$$\frac{\rho c_p}{K} (u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}) = \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \quad (67)$$

APÊNDICE 2SIMPLIFICAÇÕES DE CAMADA LIMITE

As seguintes condições iniciais e de contorno são estabelecidas pelo problema de transferência de calor no canal:

$$x = 0, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$u = u_0, \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad v = 0 \quad (68)$$

$$\ell \geq x \geq 0, \quad y = 0$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} = q_v \quad (69)$$

$$\ell \geq x \geq 0, \quad y = b$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad k \frac{\partial T}{\partial y} = q_p \quad (70)$$

$$x = \ell, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$p = p_{hid} \quad (71)$$

O modelo de convecção natural baseia-se na hipótese de Boussinesq, considerando a densidade como variável no termo de empuxo das equações (63) e (64).

Logo,

$$p = p^* + p_0 \quad (72)$$

onde  $p$  representa a pressão induzida no interior do canal.

Derivando em  $x$ ,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (73)$$

e determinando o gradiente da pressão ambiente, para a condição de contorno próxima à borda da camada limite,

$$p \rightarrow p_0, \quad u \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = -p_0 g \cos \alpha \quad (74)$$

o ângulo é introduzido devido a inclinação do canal.

Levando as equações (74) e (73) nas equações (63) e (64):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = F_x - \frac{\partial p^*}{\partial x} + p_0 g \cos \alpha + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (75)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = F_y - \frac{\partial p^*}{\partial y} + \rho_0 g \sin \alpha + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (76)$$

Como,

$$F_x = -\rho_0 g \cos \alpha \quad (77)$$

$$F_y = -\rho_0 g \sin \alpha \quad (78)$$

Logo, alternativamente pode-se escrever:

$$\frac{F_x}{\cos \alpha} = \frac{F_y}{\sin \alpha}, \text{ ou }, F_x = \tan \alpha F_y \quad (79)$$

e,

$$\frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial p_0}{\partial y} = \rho_0 g, \text{ ou }, \frac{\partial p_0}{\partial x} = \tan \alpha \frac{\partial p_0}{\partial y} = \rho_0 g \quad (80)$$

No sentido de se exprimir os componentes de força em termos da temperatura do fluido, admite-se uma variação linear da densidade com a temperatura. Definindo, um coeficiente de expansão volumétrica,

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\Delta \rho}{\Delta T} \right)_p \quad (81)$$

ou,

$$\frac{(\rho_0 - \rho)}{\rho} = g B (T - T_0) \quad (82)$$

Usando-se as relações (79), (80) e (82), nas equações da quantidade de movimento, (75) e (76) fica:

$$u \frac{\partial u}{\partial v} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + g B (T - T_0) + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (83)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + g B (T - T_0) \operatorname{tg} \alpha + v \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (84)$$

A dimensionalização das equações da quantidade de movimento pode ser imediatamente efetuada. Primeiramente, considerando a equação (83), multiplica-se toda a equação por  $(b^2 / \ell v Gr)$ :

$$\frac{u b^2}{\ell v Gr} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{b^2}{\ell v Gr} \right) = v \frac{\partial^2 u^2 \left( \frac{b^2}{\ell v Gr} \right)}{\partial y^2}$$

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} \cdot \left( \frac{b^2}{\ell v Gr} \right) + g B \left[ \frac{(T - T_0) b^2}{\ell v Gr} + \frac{v \partial^2 u \left( \frac{b^2}{\ell v Gr} \right)}{\partial x^2} \right]$$

E, fazendo as operações seguintes,

$$\begin{aligned}
 & \frac{u b^2}{\ell v Gr} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(b^2/\ell v Gr)}{(b^2/\ell v Gr)} + \frac{v b}{v} \cdot \frac{v}{b} \frac{\partial u}{\partial y} \left[ \frac{(b^2/\ell v Gr) \cdot b}{(b)} \right] = \\
 & v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left[ \frac{(b^2/\ell v Gr) \cdot b^2}{b^2} \right] - \frac{1}{\rho} \frac{\partial [p^* \cdot (b^2/\ell v Gr) \cdot (b^2/\ell v Gr)]}{\partial (x \cdot (b^2/\ell v Gr))} + \\
 & + \frac{g \beta (T - T_0) b^2}{\ell v Gr} \cdot \frac{q_p b^3 v k}{q_p b^3 v k} + v \frac{\partial^2 u [(b^2/\ell v Gr) (\ell^2 Gr^2)]}{\partial x^2} (\ell^2 Gr^2)
 \end{aligned}$$

É fácil ver que identificando os seguintes agrupamentos adimensionais;

$$\left. \begin{aligned}
 X &= x / \ell Gr, & Y &= y / b, & U &= ub^2 / \ell v Gr \\
 v &= vb / v, & \theta &= (T - T_0) \cdot k / q_p b \\
 Gr &= (g \beta q_p b^5 / \ell v^2 k), & p &= p^* b^4 / \ell^2 \rho v^2 Gr^2
 \end{aligned} \right\} (85)$$

resulta para a equação da quantidade de movimento na direção  $-x$  o seguinte,

$$\begin{aligned}
 & U \frac{\partial U}{\partial X} \cdot \frac{v}{b^2} + v \left( \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial U}{\partial Y} \cdot \frac{1}{b} \right) = \frac{v}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \left( \frac{\partial P}{\partial X} \cdot \frac{v}{b^2} \right. \\
 & \left. + \left( \theta \cdot \frac{v}{b^2} \right) + \left( \frac{v}{\ell Gr} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Onde são simplificados em todos os termos da equação acima a quantidade ( $v/b^2$ ). Por fim, em uma análise de ordem de grandeza, segundo Ozisik [18], pode ser dispensado o termo  $\partial^2 U / \partial X^2$ , o que implica na equação final,

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial P}{\partial X} + \theta \quad (86)$$

Para a equação (84) a adimensionalização é feita de modo análogo, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{ub^2}{\ell v Gr} \cdot \frac{\ell v Gr}{b^2} \cdot \frac{\partial v (b/v) (v/b)}{\partial x} + v \frac{b}{v} \left[ \frac{v}{b} \frac{\partial v (b/v) (v/b)}{\partial y} (b/b) \right] = \\ v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} (b/v) (v/b) \cdot \frac{b^2}{b^2} - \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p * (b^4/\ell^2 v^2 Gr^2)}{\partial y} (b/b) \right] \\ + \left[ \frac{g \beta (T-T_0) k}{q_p b} \cdot \frac{q_p \cdot b}{k} \frac{b^4}{\ell v^2} \frac{\ell v^2}{b^4} \operatorname{tg} \alpha \right] + \frac{v^2}{b} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} (b/v) \frac{\ell^2 Gr^2}{\ell^2 Gr^2} \end{aligned}$$

Onde podem ser identificados os devidos agrupamentos já mencionados resultando,

$$\begin{aligned} U \frac{v^2}{b^3} \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{v^2}{b^3} \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{v^2}{b^3} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - \frac{\partial P}{\partial Y} \frac{\ell^2 v^2 Gr^2}{b^5} + Gr \theta \operatorname{tg} \alpha \frac{\ell v^2}{b^4} + \\ + \frac{v^2}{b \ell^2 Gr^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \end{aligned}$$

Simplificando todos os membros da equação acima pelo termo  $v^2/b^3$ , e identificando um número de Grashof modifi-  
cação escrito na forma,

$$Gr^* = Gr \frac{l}{b} \quad (87)$$

Resulta na equação da quantidade do movimento na direção -y escrita sob a forma,

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + \gamma \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} - \frac{\partial P}{\partial Y} Gr^{*2} + Gr^* \theta \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{Gr^{*2}} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (88)$$

Em uma análise de ordem de grandeza, dispensa-se os termos à esquerda da equação (88), bem como as derivadas de segunda ordem em  $V$ , restando,

$$- \frac{\partial P}{\partial Y} Gr^{*2} = - Gr^* \theta \operatorname{tg} \alpha \quad (89)$$

ou,

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{1}{Gr^*} \theta \operatorname{tg} \alpha \quad (90)$$

Para a equação da continuidade, (58), identifi-  
ca-se os agrupamentos:

$$X = x / \ell Gr, \quad Y = y/b, \quad U = ub^2 / \ell v Gr$$

$$V = vb / v$$

onde facilmente tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (91)$$

Por fim, resta a equação da energia, (67). Imediatamente multiplica-se todos os membros da equação pelo termo  $K / q_p b$ ,

$$\frac{\rho c_p}{k} \left( \frac{ub^2}{\ell v Gr} - \frac{\ell v Gr}{b^2} \right) \frac{\partial T}{\partial X} (K / q_p b) + \frac{v b}{v} \frac{v}{b} \frac{\partial T}{\partial Y} \frac{(K / q_p b)}{(b / b)} =$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \left[ \frac{(K / q_p b) \cdot (\ell^2 G r^2)}{(\ell^2 G r^2)} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \left[ \frac{(K / q_p b)}{(b^2 / b^2)} \right]$$

que pode ser escrita,

$$(U \frac{\partial \theta}{\partial X} \cdot \frac{v}{b^2} + v \frac{\partial \theta}{\partial Y} \cdot \frac{v}{b^2}) = \frac{K}{\rho c_p} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \cdot \frac{1}{\ell^2 G r^2} \right)$$

Novamente, procedida uma análise de ordem de grandeza, o termo  $\partial^2 \theta / \partial X^2$  pode ser dispensado em relação à sua importância com relação ao restante da equação. Resulta

então,

$$(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y}) = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (92)$$

Para adimensionalização das condições de contorno de fluxos de calor nas paredes, usam-se os agrupamentos anteriormente definidos.

APÊNDICE 3DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕESRADIATIVAS NAS PAREDES DO CANAL

O balanço considerado a seguir, segue Kreith [¹³] e Macedo [⁹]. Aplicando a primeira lei da termodinâmica para a placa de vidro tem-se:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Quantidade de radiação Solar} \\ \text{absorvida pelo vidro} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Transferência de Calor Convectiva} \\ \text{do vidro para o meio fluido} \end{array} \right] + \quad (i) \qquad (ii)$$

$$- \left[ \begin{array}{l} \text{Transferência de calor convectiva} \\ \text{do vidro para o meio ambiente} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Transferência de calor Radiativa} \\ \text{do vidro para o meio ambiente} \end{array} \right] \quad (iii) \qquad (iv)$$

$$+ \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa de troca radiativa} \\ \text{entre o vidro e a placa} \end{array} \right] \quad (v)$$

Onde identificando termo-a-termo:

$$(i) : \int_0^{\infty} \alpha_{\lambda v} I_{\lambda s} d\lambda$$

$$(ii) : q_v$$

$$(iii) : Q_v$$

$$(iv) : Q_R$$

$$(v) : q_{\lambda R} v \not\geq p$$

onde,

$$Q_v = - \bar{h}_{ar} (T|_{y=0} - T_0) \quad (93)$$

e,

$$Q_R = \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda v} E_{\lambda v} d\lambda \quad (94)$$

Quanto ao termo  $q_{R_v \not\geq p}$ , tem-se que para a radiosidade de uma superfície escreve-se:

$$\int_0^{\infty} q_{\lambda R} v \not\geq p d\lambda = \int_0^{\infty} A_v F_{v-p} (B_{\lambda v} - B_{\lambda p}) d\lambda \quad (95)$$

onde  $A_v$  é a área do vidro e  $F_{v-p}$  é o fator de vista entre superfícies negras.

A radiosidade para cada superfície (vidro e placa), por faixa monocromática, por sua vez é definida se,

$$\int_0^{\infty} B_{\lambda p} d\lambda = \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda p} E_{\lambda p} d\lambda + \int_0^{\infty} \rho_{\lambda p} I_{\lambda s} d\lambda \quad (96)$$

e,

$$\int_0^{\infty} B_{\lambda v} d\lambda = \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda v} E_{\lambda v} d\lambda + \int_0^{\infty} p_{\lambda v} I_{\lambda s} d\lambda \quad (97)$$

Podem ser consultados quaisquer livros textos básicos de transferência de calor para maiores detalhes, como por exemplo Siegel [4] e Howell [19].

Pelo uso da analogia à circuitos elétricos, pode-se expressar a troca radiativa entre as duas superfícies fisicamente como:

$$q_{\lambda R} \quad v \neq p = \frac{\text{Diferença Total de Potencial}}{\text{Resistência Total}} \quad (98)$$

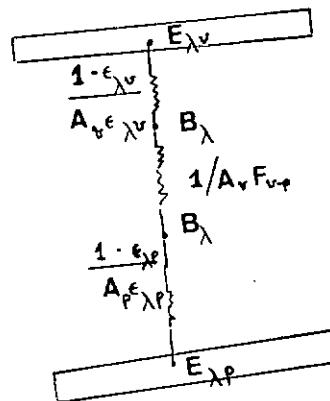


Figura 3.1  
Circuito do Sistema

Através da figura acima, pode-se identificar que a resistência entre os modos  $E_{\lambda v}$  e  $B_{\lambda v}$  é  $(1 - \varepsilon_{\lambda v}) / (A_v \varepsilon_{\lambda v})$ , entre  $B_{\lambda v}$  e  $B_{\lambda p}$  é  $1 / (A_v F_{v-p})$ , e entre  $B_{\lambda p}$  e  $E_{\lambda p}$  é  $(1 - \varepsilon_{\lambda p}) / A_p \varepsilon_{\lambda p}$ .

A expressão matemática correlata para o circuito em série, extendendo a relação (98) para todo o circuito é

$$\int_0^\infty q_\lambda R_{v \neq p} d\lambda = \frac{E_{\lambda v} - E_{\lambda p}}{\frac{1 - \varepsilon_{\lambda v}}{A_v \varepsilon_{\lambda v}} + \frac{1}{A_v F_{v-p}} + \frac{1 - \varepsilon_{\lambda p}}{A_p \varepsilon_{\lambda p}}} d\lambda \quad (99)$$

Agora, escrevendo a taxa radiativa em função do fator de vista para corpos cinzas tem-se

$$\int_0^\infty q_\lambda R_{v \neq p} d\lambda = \int_0^\infty A_v F_{v-p} (E_{\lambda v} - E_{\lambda p}) d\lambda \quad (100)$$

Igualando (99) com (100) tira-se que,

$$A_v F_{v-p} = \frac{1}{\frac{1 - \varepsilon_{\lambda p}}{A_v \varepsilon_{\lambda v}} + \frac{1}{A_v F_{v-p}} + \frac{1 - \varepsilon_{\lambda p}}{A_p \varepsilon_{\lambda p}}} \quad (101)$$

onde  $F_{v-p}$  é o fator de vista para radiação difusa entre duas superfícies cinzas.

Para placas planas paralelas infinitas,

$$A_v = A_p$$

$$F_{v-p} = 1.0 ,$$

o que leva a equação (101) à forma

$$F_{v-p} = \frac{1}{1/\epsilon_{\lambda v} + 1/\epsilon_{\lambda p}-1} \quad (102)$$

E, finalmente  $q_{\lambda R_v} \neq p$  pode ser escrito por faixa monocromática como:

$$\int_0^{\infty} q_{\lambda R_v} \neq p d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda v} - E_{\lambda p}}{1/\epsilon_{\lambda v} + 1/\epsilon_{\lambda p}-1} d\lambda \quad (103)$$

Substituindo (104) devidamente na equação de balanço para a placa de vidro vêm,

$$\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda v} I_{\lambda s} d\lambda = \bar{h}_{ar}(T|_{y=0} - T_0) + \int_0^{\infty} \epsilon_{\lambda v} E_{\lambda v} d\lambda + q_v + \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda v} - E_{\lambda p}}{1/\epsilon_{\lambda v} + 1/\epsilon_{\lambda p}-1} d\lambda \quad (104)$$

Analogamente, um balanço para a placa - absorvedora compreende:

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{l} \text{Radiação Solar} \\ \text{Absorvida pela} \\ \text{Placa} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Transferência de Calor} \\ \text{Convertida da placa pa-} \\ \text{ra o meio fluido} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Taxa Radiativa} \\ \text{de Troca entre} \\ \text{vidro e placa} \end{array} \right] \\ (\text{i}) \qquad \qquad \qquad (\text{ii}) \qquad \qquad \qquad (\text{iii}) \end{array}$$

Matematicamente, termo a termo:

$$(\text{i}) : \int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \tau_{\lambda v} \alpha_{\lambda p} I_{\lambda s} d\lambda$$

$$(\text{ii}) : q_p$$

$$(\text{iii}) : q_{\lambda R} \underset{v \neq p}{=} = \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda v} - E_{\lambda p}}{1/\epsilon_{\lambda v} + 1/\epsilon_{\lambda p} - 1} d\lambda$$

Substituindo no balanço resulta:

$$\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} \tau_{\lambda v} \alpha_{\lambda p} I_{\lambda s} d\lambda = q_p + \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda v} - E_{\lambda p}}{1/\epsilon_{\lambda v} + 1/\epsilon_{\lambda p} - 1} d\lambda \quad (105)$$

APÊNDICE 4OBSERVAÇÕES SOBRE O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

Somente em certos casos especiais podem as equações a derivadas parciais serem resolvidas analiticamente. Métodos numéricos baseados em técnicas de diferenças finitas são utilizados para obtenção das soluções.

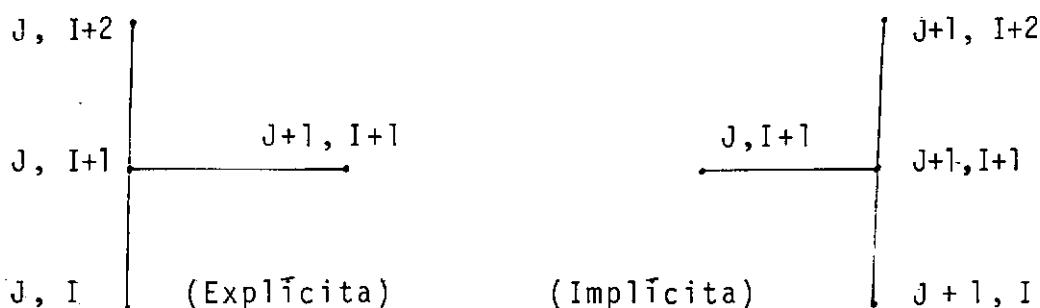
A utilização de diferenças finitas para aproximação das derivadas das equações parciais pressupõe que não se procure uma solução contínua, para a equação, mas que, ao contrário, seja suficiente conhecer o valor da função em certos pontos selecionados, ou pontos nodais do campo. Consequentemente, o campo contínuo é substituído por uma rede, ou malha, que forma aproximação discreta para o campo contínuo.

A representação por diferenças finitas é baseada no truncamento dos primeiros termos da série de Taylor, ou seja, por exemplo,

$$\left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)_{J,I} = \frac{U_{J,I+1} - U_{J,I}}{\Delta Y} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)_{I,J} \frac{\Delta Y}{2!} + \dots \quad (106)$$

O truncamento desta série se dá após o primeiro termo e é dito que a relação (106) é correta de primeira - ordem em  $Y$ , por Pacitti & Atkinson |<sup>20</sup>|, e Rosemberg |<sup>14</sup>|.

São duas as formas de representação por diferenças finitas. Explícitas e implícitas. A forma explícita requer a solução de uma equação algébrica, e a



$J$  - Posição conhecida ,  $J + 1$  - Posição a determinar

implícita requer a solução de um sistema de equações algébricas.

A forma implícita apresenta as vantagens de rapidez e simplicidade, mas apresenta também condições de estabilidade severas, que torna seu uso inviável em muitos casos. Foram usadas formas implícitas de representação das equações a derivadas parciais para obtenção das incógnitas no canal. As condições de estabilidade dessas formas justificam a escolha.

APÊNDICE 5OBSERVAÇÕES SOBRE O MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

O algoritmo para computador pode ser formulado usando-se o que se chama de "matriz aumentada". Considerando por exemplo a matriz A abaixo,

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (107)$$

que sob a forma aumentada fica,

$$[A][I] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (108)$$

Os passos de eliminação sucessivas se utilizam de pivôs, para execução dos cálculos, caso se tenha um pivô nulo, deve se processar uma troca de linhas.

Exemplos de programas existem em livros textos, como do Pacitti & Atkinson |<sup>20</sup>| ou Carnahan et. al |<sup>21</sup>|.

Dispõe o usuário da rotina DGELG (precisão dupla) que resolve um sistema de equações por eliminação de Gauss e podem ser imediatamente empregadas.

Para a rotina DGELG, uma tolerância pré-fixada entre  $10^{-14}$  -  $10^{-16}$  é usada.

Estas rotinas são parte de uma biblioteca de programas denominado SSP/IBM |<sup>22</sup>|, atualmente em uso no núcleo de Computação Eletrônica (N.C.E.) da UFRJ.

APÊNDICE 6DEMONSTRAÇÕES AUXILIARES

Para a equação (22) que é a equação da energia, em formas de diferenças finitas implícitas, escreve-se

$$\frac{U_{J,I} (\theta_{J+1,I} - \theta_{J,I})}{\Delta X} + \frac{V_{J,I} (\theta_{J+1,I+1} - \theta_{J+1,I-1})}{2 \Delta Y} =$$

$$\frac{1}{Pr} \left[ \frac{(\theta_{J+1,I+1} - 2\theta_{J+1,I} + \theta_{J+1,I-1})}{(\Delta Y)^2} \right] \quad (109)$$

Em função dos termos dependentes da temperatura, reagrupa-se a equação acima na forma,

$$\begin{aligned} \theta_{J+1,I+1} \cdot \left( \frac{V_{J,I}}{2 \Delta Y} \right) - \theta_{J+1,I+1} \left( \frac{1}{Pr} \right) + \theta_{J+1,I} \left( \frac{U_{J,I}}{\Delta X} \right) + \\ \theta_{J+1,I} \left( \frac{2}{Pr (\Delta Y)^2} \right) = \theta_{J,I} \left( \frac{U_{J,I}}{\Delta X} \right) + \theta_{J+1,I-1} \left( \frac{1}{Pr (\Delta Y)^2} \right) \\ + \theta_{J+1,I-1} \left( \frac{V_{J,I}}{2 \Delta Y} \right) \end{aligned} \quad (110)$$

Identificando os coeficientes:

$$\theta_{J+1, I+1} \left( \frac{V_{J, I}}{2\Delta Y} - \frac{1}{Pr} \right) + \theta_{J+1, I} \left( \frac{U_{J, I}}{\Delta X} + \frac{2}{Pr(\Delta Y)^2} \right) = \\ C_I \quad \quad \quad B_I$$

$$\theta_{J, I} \left( \frac{U_{J, I}}{\Delta X} \right) + \theta_{J+1, I-1} \left( \frac{V_{J, I}}{2\Delta Y} + \frac{1}{Pr(\Delta Y)^2} \right) \\ D_I \quad \quad \quad A_I \quad \quad \quad (111)$$

Resulta:

$$C_I = V_{J, I} \cdot (2\Delta Y)^{-1} - Pr^{-1}$$

$$B_I = U_{J, I} \cdot (\Delta X)^{-1} + 2(Pr \cdot (\Delta Y))^{-1} \quad (112)$$

$$D_I = \theta_{J, I} \cdot (U_{J, I}) \cdot (\Delta X)^{-1}$$

$$A_I = V_{J, I} \cdot (2\Delta Y)^{-1} + (Pr(\Delta Y)^2)^{-1}$$

A equação da energia agora pode ser escrita de modo simplificado,

$$\theta_{J+1, I+1} \cdot C_I + \theta_{J+1, I} \cdot B_I = D_I + \theta_{J+1, I-1} \cdot A_I \quad (113)$$

Que generalizando para todo  $I$  (fixado  $J$ ) fica:

$$\theta_{J+1, I+2} \cdot C_{I+1} + \theta_{J+1, I+1} \cdot B_{I+1} = D_{I+1} + \theta_{J+1, I} \cdot A_{I+1}$$

$$\theta_{J+1, I+3} \cdot C_{I+2} + \theta_{J+1, I+2} \cdot B_{I+2} = D_{I+2} + \theta_{J+1, I+1} \cdot A_{I+2}$$

$$\theta_{J+1, I+k} \cdot C_{I+K-1} + \theta_{J+1, I+K-1} \cdot B_{I+K-1} = D_{I+K-1} + \theta_{J+1, I+K-2} \cdot A_{I+K-1}$$

$$\theta_{J+1, I+N} \cdot C_{I+N-1} + \theta_{J+1, I+N-1} \cdot B_{I+N-1} = D_{I+N-1} + \theta_{J+1, I+N-2} \cdot A_{I+N-1}$$

Em forma matricial:

$B_{I+1}$	$C_{I+1}$	0	0	...	0	$\theta_{J+1, I+1}$	$D_{I+1} + \theta_{J+1, I} \cdot A_{I+1}$
$A_{I+2}$	$B_{I+2}$	$C_{I+2}$	0	...	0	$\theta_{J+1, I+2}$	$D_{I+2}$
$A_{I+3}$	$B_{I+3}$	$C_{I+3}$	...	0		$\theta_{J+1, I+3}$	$D_{I+3}$
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
0 ..	$A_{I+N-2}$	$B_{I+N-2}$	$C_{I+N-2}$			$\theta_{J+1, I+N-2}$	$D_{I+N-2}$
0 ..	0	$A_{I+N-1}$	$B_{I+N-1}$			$\theta_{J+1, I+N-1}$	$D_{I+N-1} + \theta_{J+1, I+N-2} \cdot A_{I+N-1}$

Para a equação da quantidade de movimento faz-se novamente um procedimento idêntico:

$$\frac{U_{J,I} \cdot (U_{J+1,I} - U_{J,I})}{\Delta X} + \frac{V_{J,I} (U_{J+1,I+1} - U_{J+1,I-1})}{2 \Delta Y} +$$

$$- \frac{U_{J+1,I+1} + 2U_{J+1,I} - U_{J+1,I-1}}{(\Delta Y)^2} = \theta_{J+1,I} - \left( \frac{P_{J+1} - P_j}{\Delta X} \right)$$

(115)

Pondo em evidência os termos contendo a velocidade  $U$ :

$$U_{J+1,I} \left( \frac{U_{J,I}}{\Delta X} \right) - U_{J,I} \left( \frac{U_{J,I}}{\Delta X} \right) + U_{J+1,I+1} \left( \frac{V_{J,I}}{2 \Delta Y} \right)$$

$$- U_{J+1,I-1} \left( \frac{V_{J,I}}{2 \Delta Y} \right) - U_{J+1,I+1} \frac{1}{(\Delta Y)^2} +$$

$$U_{J+1,I} \cdot \frac{2}{(\Delta Y)^2} - U_{J+1,I-1} \cdot \frac{1}{(\Delta Y)^2} + P_{J+1} \frac{1}{\Delta X} = \theta_{J+1,I} + \frac{P_j}{\Delta X}$$

(116)

Identificando os coeficientes:

$$\frac{U_{J+1,I} \left( \frac{U_{J,I}}{\Delta X} + \frac{2}{(\Delta Y)^2} \right) + U_{J+1,I+1} \left( \frac{V_{J,I}}{2 \Delta Y} - \frac{1}{(\Delta Y)^2} \right)}{F_I} -$$

$$\frac{U_{J+1,I-1} \left( \frac{V_{J,I}}{2 \Delta Y} \right) + P_{J+1} \frac{1}{\Delta X} - \theta_{J+1,I} - \frac{P_j}{\Delta X}}{G_I}$$

$$+ U_{J+1,I-1} \left( \frac{-V_{J,I}}{2\Delta y} + \frac{-1}{(\Delta Y)^2} \right) = U_{J,I} \left( \frac{U_{J,I}}{\Delta X} + \frac{P_J}{\Delta X} \right) + \theta_{J+1,I} - P_{J+1} + \frac{1}{\Delta X}$$

$E_I$        $K_I$        $H_I$

(117)

Resulta:

$$F_I = U_{J,I} \cdot \Delta X^{-1} - 2 \cdot (\Delta Y)^{-2}$$

$$G_I = V_{J,I} \cdot (2 \Delta Y)^{-1} - (\Delta Y)^{-2}$$

$$E_I = V_{J,I} \cdot (2 \Delta Y)^{-1} + (\Delta Y)^{-2} \quad (118)$$

$$K_I = U_{J,I} (U_{J,I} \cdot (\Delta X)^{-1}) + P_J \cdot \Delta X^{-1} + \theta_{J+1,I}$$

$$H = \Delta X^{-1}$$

A equação da quantidade de movimento pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{array}{cccccc|c|c}
 F_{I+1} & G_{I+1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & H & U_{J+1,I+1} & K_{I+1} \\
 E_{I+2} & F_{I+2} & G_{I+2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & H & U_{J+1,I+2} & K_{I+2} \\
 0 & E_{I+3} & F_{I+3} & G_{I+3} & 0 & \dots & \dots & 0 & H & \cdot & \cdot \\
 0 & \cdot \\
 \cdot & = \\
 \cdot & \cdot \\
 E_{I+N-2} & F_{I+N-2} & G_{I+N-2} & H & & & & U_{J+1,I+N-2} & K_{I+N-2} \\
 0 & \dots & \dots & \dots & E_{I+N-2} & F_{I+N-1} & H & U_{J+1,I+N-1} & K_{I+N-1} \\
 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & 0 & P_{J+1} & (N+1) U_0
 \end{array}
 \tag{119}$$

Acresceu-se na matriz da equação do movimento, a equação integral da continuidade, de forma que o número de incógnitas iguala-se ao número de equações disponíveis para cálculo de  $U_{J+1,I+1}, \dots, U_{J+1,I+K}, \dots, U_{J+1,I+N-1}$  e  $P_{J+1}$ .

A equação da continuidade em forma de diferenças finitas é escrita:

$$\frac{U_{J+1,I} - U_{J,I}}{\Delta X} + \frac{V_{J+1,I+1} - V_{J+1,I}}{\Delta Y} = 0
 \tag{120}$$

Identificam-se imediatamente os coeficientes:

$$\frac{v_{J+1, I+1}}{\Delta Y} \left( \frac{1}{\Delta Y} \right) + \frac{v_{J+1, I}}{\Delta Y} \left( -\frac{1}{\Delta Y} \right) = - \frac{u_{J+1, I} - u_{J, I}}{\Delta X} \quad (121)$$

$\underline{-w_I}$        $\underline{-s_I}$        $\underline{R_I}$

Logo em forma matricial resulta:

$$\begin{vmatrix} s_{I+1} & w_{I+1} & . & . & . & 0 \\ 0 & s_{I+2} & w_{I+2} & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & s_{I+N-1} & w_{I+N-1} & . & . \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_{J+1, I+1} \\ v_{J+1, I+2} \\ . \\ . \\ . \\ v_{J+1, I+N-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{I+1} \\ R_{I+2} \\ . \\ . \\ . \\ R_{I+N-1} \end{vmatrix} \quad (122)$$

com os seguintes componentes:

$$w_I = \Delta Y^{-1}$$

$$s_I = -(\Delta Y)^{-1} \quad (123)$$

$$R_I = -(u_{J+1, I} - u_{J, I}) \cdot (\Delta X)^{-1}$$

APÊNDICE 7CÁLCULO DA EFICIÊNCIA

Definindo a eficiência do sistema como a razão entre o calor total transferido ao fluido, e a quantidade de calor recebida tem-se

$$\eta = q_{T_x} / I_s \quad (124)$$

onde  $q_{T_x}$  é dado ser,

$$q_{T_x} = \rho c_p \int_0^b u (T - T_0) dy \quad (125)$$

para uma particular posição  $x$  no interior do canal. À saída do mesmo,  $x = l$ .

A equação (125) em forma adimensional é escrita

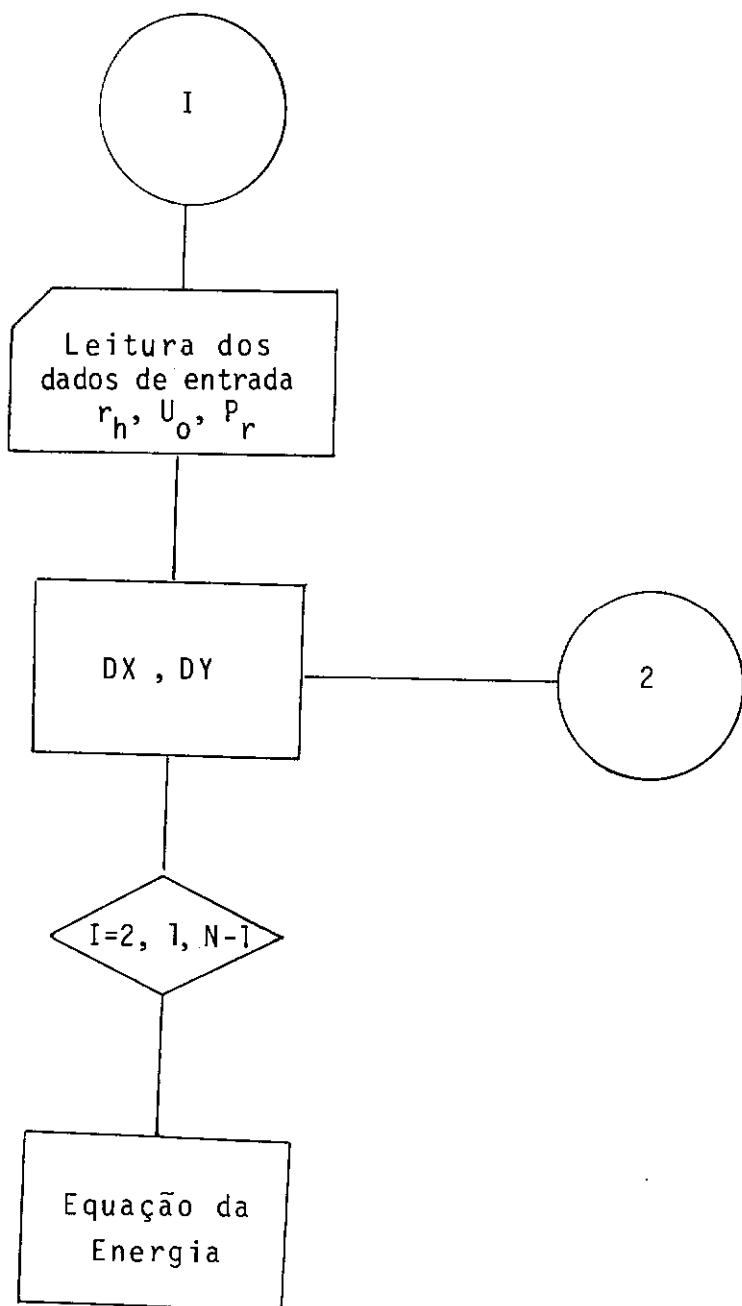
$$Q_{T_x} = \frac{q_{T_x} b}{\rho c_p v l G r (T - T_0)} = \int_0^l u \theta dy \quad (126)$$

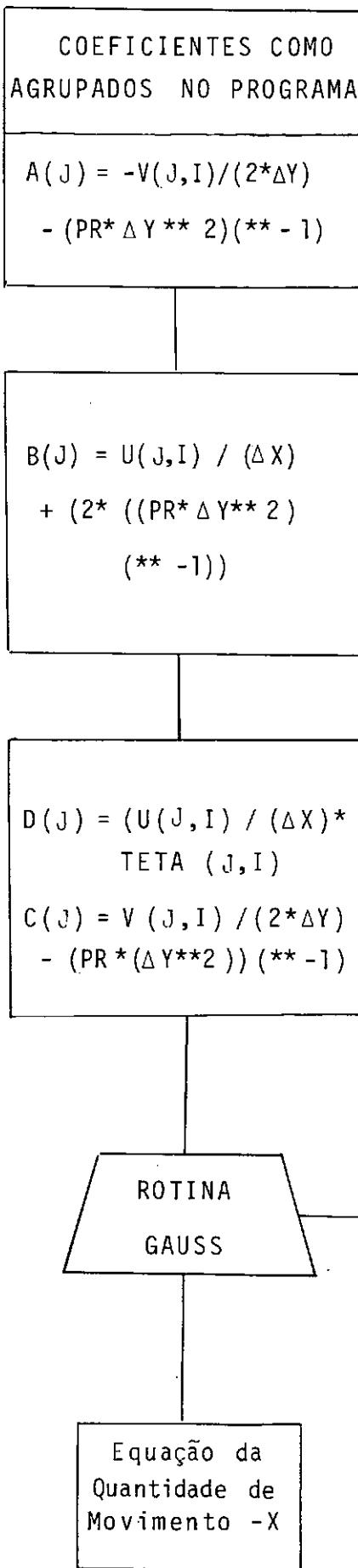
Logo, pode-se verificar que ter-se-ão eficiências maiores conforme se tenha gradientes de temperaturas maiores à saída do canal, e tais situações ocorrem quando altas vazões são impostas à entrada do canal.

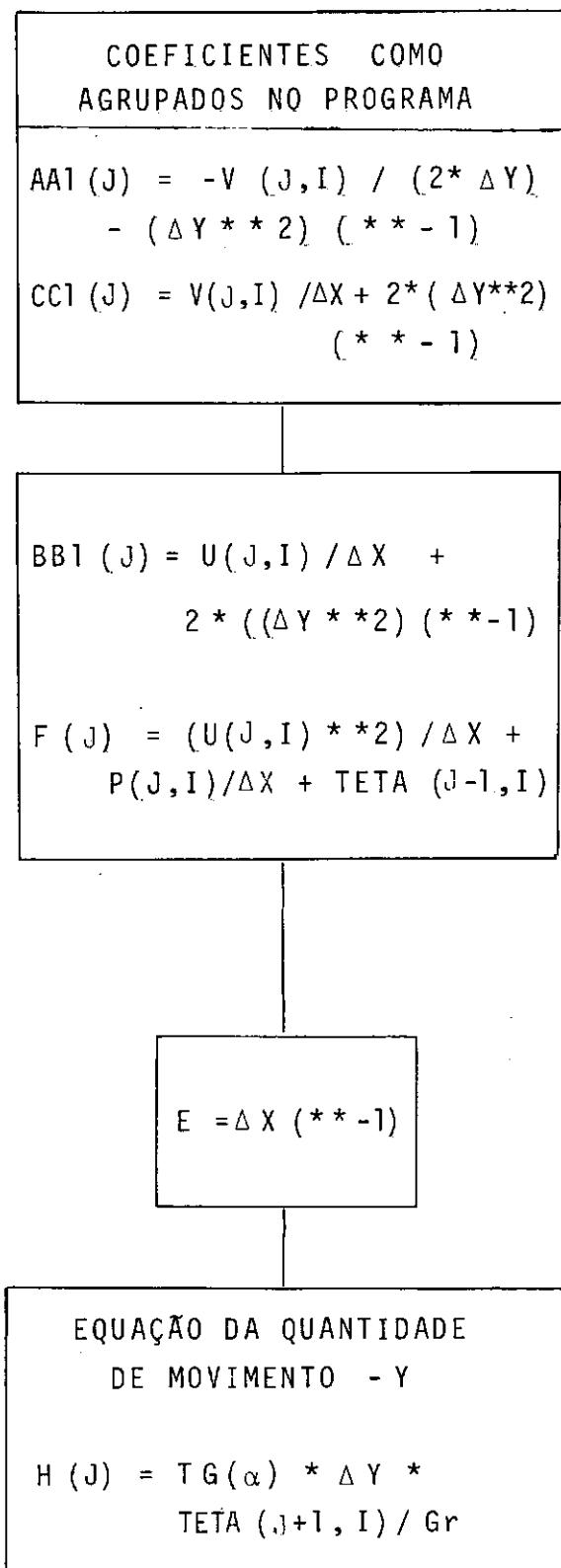
APÊNDICE 8FLUXOGRAMA E LISTAGEM

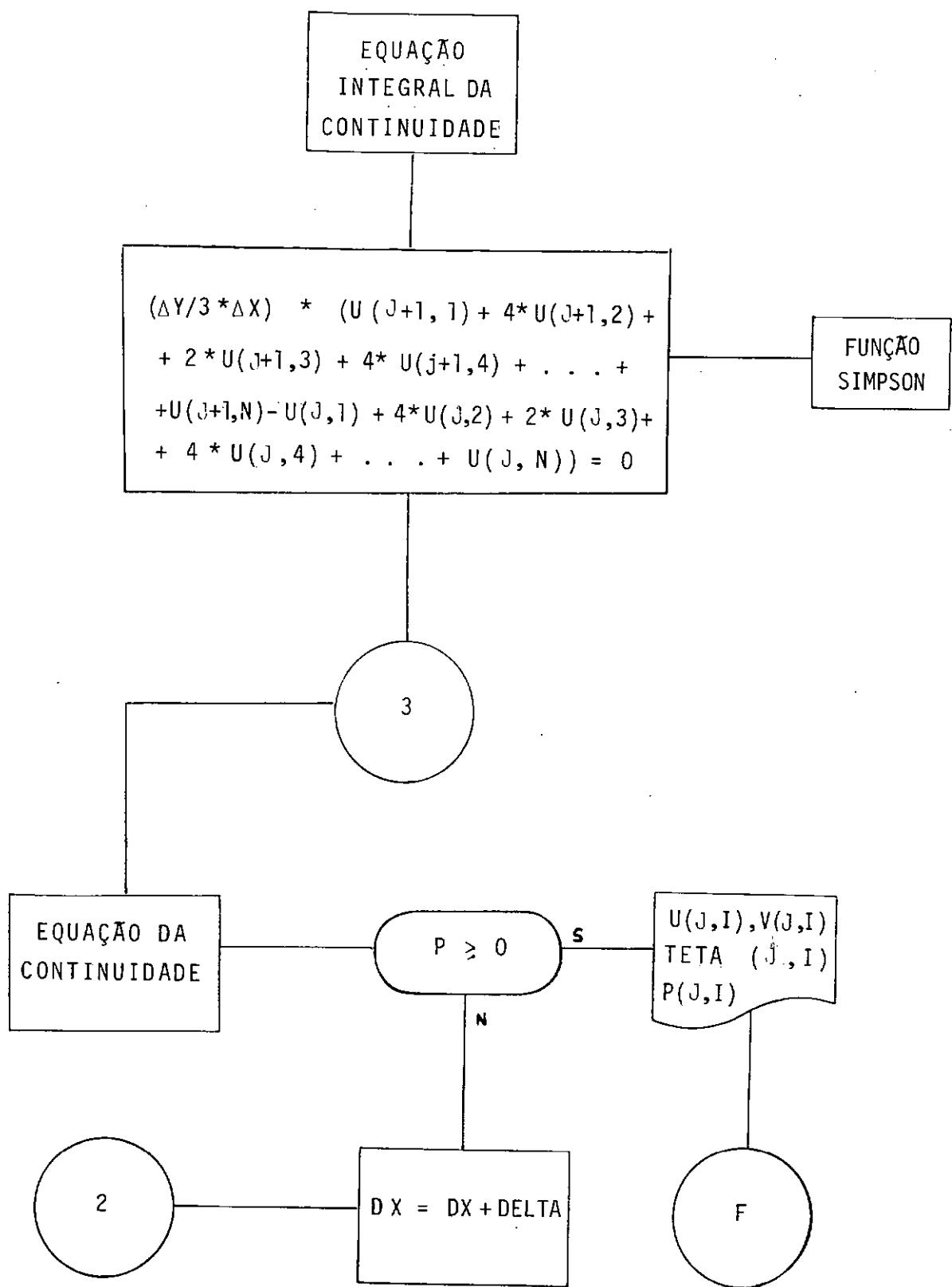
APÊNDICE 8FLUXOGRAMA E LISTAGEM

Segue-se o algoritmo báscio do método numérico de diferenças finitas utilizado.









```

*****  

FUNCTION SIMPSO(N,U,TETA,DELTAY)
IMPLICIT REAL *B(A-H,0-Z)
DIMENSION U(100),TETA(100)
N=N/2
N=N/2
IF(N-.J)11,12,11
12 WRITE(6,7)
7 FORMAT('III E' PAR E' PARA SIMPSON 1/3 E IMPAR')
GO TO 20
11 SIMPSU=0.0
N=N-1
DO 72 T=2,N,2
72 SIMPSU=SIMPSU+0.0+00*U(1)*TETA(1)+2.0+00*U(1+1)*TETA(I+1)
SIMPSU=(SIMPSU+U(1)*TETA(1)-U(N)*TETA(N))*DELTAY/3.0+00
26 RETURN
END
SUBROUTINE HAT(N,L,C,v,1J)
IMPLICIT REAL *B(A-H,0-Z)
DIMENSION C(200,200),v(200)
T1=1
DO 3 K=1,N
IF(.N.L).N)GO TO 4
KP1=K+1
M=N
LL=(L-1)/2+K
DO 11 J=KP1,LL
IF(I.GT.N)GO TO 12
IF(VAUSLC(I,1)).GT.0.0D0(C(M,1))M=I
11 CONTINUE
12 IF(.N.JF.K)T1=-T1
T=C(M,1)
C(M,1)=C(K,1)
C(K,1)=T
IF(T.EQ.0.0D0)GO TO 4
DO 25 I=KP1,LL
IF(I.GT.N)GO TO 22
C(I,1)=-C(I,1)/I
25 CONTINUE
22 DO 44 J=2,L
T=C(M,J)
C(M,J)=C(K,J)
C(K,J)=T
IF(T.EQ.0.0D0)GO TO 44
DO 38 I=KP1,LL
IF(I.GT.N)GO TO 44
C(I,J)=C(I,J)+C(I,1)*T
38 CONTINUE
44 CONTINUE
T=B(M)
B(M)=B(K)
B(K)=T
IF(T.EQ.0.0D0)GO TO 39
DO 31 I=KP1,LL

```

```

*****  

10 TF(1..G,T,N)GO TO 89  

  R(I)=C(I)+C(T,1)*T  

91 CONTINUE  

39 LL1=L-1  

  DO 93 I=KPI,LL1  

    TF(1..G,T,N)GO TO 4  

  DO 94 J=1,LL1  

    JP1=J+1  

    C(T,J)=C(1,JP1)  

94 CONTINUE  

  C(I,L)=0.0+00  

93 CONTINUE  

4 TF(C(N,1)=0.0+00)S,1,5  

1 T1=0  

  WRITE(6,99)K  

99 FORMAT(//,4X,'K=',TS)  

  GO TO 106  

3 CONTINUE  

  DO 101 K=1,N  

    NK1=N+1-K  

  DO 102 J=1,LL1  

    TF(J,F..K)GO TO 103  

    NK1=NK1+1  

    JP1=J+1  

    P(N,K1)=C(NK1)+C(NK1,JP1)*B(NKJ)  

102 CONTINUE  

103 B(NK1)=C(NK1)/C(NK1,1)  

101 CONTINUE  

100 RETURN  

END  

SUBROUTINE CALC(N3,NNIM,C,I3)
IMPLICIT REAL *8(A-Z)
DIMENSION C(200,200)
INTEGER N3
INTEGER H,NATA,13(130)
INTEGER KPI,T,J,K,M
N=N3
TS(N)=1
DO 1 K=1,N
  IF(K.EQ.0)GO TO 6
  KPI=K+1
  M=K
  DO 2 I=KPI,N
    TF(DAUS(C(T,N)).GT.DAUS(C(M,K)))M=T
2 CONTINUE
  JS(K)=A
  IF(A.NE.K)JS(N)=I3(N)
  T=C(M,K)
  C(M,K)=C(K,K)
  C(K,K)=T
  IF(T.EQ.0.0+00)GO TO 6
  DO 3 I=KPI,N
    C(I,K)=-C(I,K)/T
3 CONTINUE
*****
```

```

3 CONTINUE
DO 5 J=KP1,N
T=C(I,J)
C(M,J)=C(K,J)
C(K,J)=T
IF (T.EQ.0.0+0.001G0) TO 5
DO 4 I=KP1,N
C(I,J)=C(I,J)+C(I,K)*T
4 CONTINUE
5 CONTINUE
6 C(K,K)=1.0D+00
1 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE GAUSS(N3,NNIM,C,B,I3)
IMPLICIT REAL *8(A-Z)
DIMENSION C(200,200),B(200)
INTEGER NS
INTEGER N,NNIM,I3(150)
INTEGER K0,KKB,NM1,KP1,I,K,M
N=NS
T=B(I,1)GO TO 77
N=I+1
DO 31 K=1,N-1
KP1=K+1
M=T/S(K)
T=R(I)
R(I)=B(I)
R(K)=T
DO 7 I=KP1,N
R(I)=B(I)+C(I,K)*T
7 CONTINUE
31 CONTINUE
DO 81 K0=1,NM1
K=N-K0
K=K+K+1
B(K)=B(K)/C(K,K)
T=-B(K)
DO 4 I=1,K
B(I)=B(I)+C(I,K)*T
4 CONTINUE
81 CONTINUE
77 B(1)=B(1)/C(1,1)
RETURN
END

IMPLICIT REAL *8(A-H,O-Z)
DIMENSION U(100),V(100),P(100),TETA(100),A(100),BG(100),CC(100)
DIMENSION C(200,200),B(200),T3(200),H(100),D(100),F(100)
INTEGER N1,N
***** PARAMETROS DE ENTRADA DO PROBLEMA CONVECTIVO *****
C
RH=U,D=0.0
*****
```

```

PR=0.7 U+0
GR1=0.1U+0
ANGULO=3.14159D+00/3.0+00
PU=0.00+00
PQ=0.05+00

```

### FIXACAO DAS VARIAVEIS

DELTA X MUITO PEQUENO NA ENTRADA DO CANAL

J1=0

DELTAX=1.0+00/(2.0+00\*\*6)

DELTAY=1.0+00/16.0+00

DDELTA=19.0+00/(2.0+00\*\*10)

GR=GR1\*OCOS(ANGULO\*(3.14150+00/180.0+00))

X1=0.

J=0

J2=0

J3=2

T2=0

N1=1.0+00/DELTAY+1.0+00

N2=N1-1

N3=N1+2

N4=N3-3

N5=N3-2

N6=N3-1

N7=N2/2

N8=N7+1

N9=N7+2

N10=N7+3

N11=N1+4

N12=N1-2

GRASH1=-1.0+00/DELTAY

GRASH2=DTAN(ANGULO\*(3.14150+00/180.0+00))/(GR\*GRASH1)

GRASH3=UPASH1\*GRASH1

N=N1

### CONDICOES DE ENTRADA NO CANAL

DO 1 I=1,N

U(I)=0.0

V(I)=0.0+00

P(I)=P0

1 TETA(I)=0.0+00

SUMA=0.0+00

DO 2 J=1,N2,2

2 SOMA=SUMA+4.0+00\*U(I)+2.0+00\*U(I+1)

SUMA=SUMA+U(I)-U(N)

SSOMA=SUMA\*(DELTAY/3.0+00)

WRITE(6,3) SSOMA

3 FORMAT(1,4X,'SSOMA',D13.6)

X=0.0+00

WRITE(6,5) X,J

WRITE(6,6)

DO 7 I=1,N

WRITE(6,8) I,U(I),V(I),P(I),TETA(I)

\*\*\*\*\*

۱۰۷

```

7 CONTINUE
4 F=1.0+0.0*DFLTAX
COMPUTACAO DOS ELEMENTOS DAS MATRIZES PARA A SOLUCAO DE U,P,TETA
10 DO 4 K=2,N2
A1=V(K)*GRASH1/2.0+0.0
B1=U(K)*F
C(K,1)=A1-GRASH3/PR
C(K,2)=B1+(2.0+0.0*GRASH3/PR)
C(K,3)=-A1-GRASH3/PR
TETA(K)=B1*TETA(K)
A(K)=A1-GRASH3
B0(K)=B1+2.0+0.0*GRASH3
CC(K)=-A1-GRASH3
F(K)=B1*U(K)+P(K)*F
9 CONTINUE
TETA(1)=0.0+0.0
TETA(N)=1.0+0.0
C(1,1)=1.0+0.0
C(1,2)=-1.0+0.0
C(1,3)=0.0+0.0
C(N,1)=0.0+0.0
C(N,2)=1.0+0.0
C(N,3)=0.0+0.0
CALL MAT(.1,3,C,TETA,T1)
*****CALCULO PARA A TEMPERATURA
11 IF(IIT-0)11,12,11
12 WRITE(6,15)
13 F=1.0+0.0*IITERANTE DE C NULO PARA A SOLUCAO DAS TEMPERATU
.A5')
GO TO 14
14 DO 15 K=2,N2
F(K)=F(K)+TETA(K)
H(K)=GRASH2*TETA(K)
15 CONTINUE
H(1)=GRASH2*TETA(1)
MONTAGEM DAS MATRIZES
DO 16 I=1,N3
DO 17 JJ=1,N3
17 C(I,JJ)=0.0+0.0
16 CONTINUE
C(1,1)=1.0+0.0
C(2,1)=1.0+0.0
DO 18 JJ=3,N4,4
C(2,JJ)=4.0+0.0
18 C(2,JJ+2)=2.0+0.0
C(2,N6)=1.0+0.0
KK=2
K=1
DO 19 I=3,N4,2
C(I,I-2)=A(KK)
C(I,I)=B(B(KK))
C(I,I+1)=E

```

$r(t, i+2) = c(c(k))$   
 $r(t+1, i-1) = 1.0 + 00$   
 $r(t+1, i+1) = -1.0 + 00$   
 $u(t) = r(t, k)$   
 $s(t+1) = u(k)$   
 $k = k + 1$   
 $k_n = n_k + 1$

19 CONTINUE

C SOLUCAO PARA U E P

$c(n_0, n_5) = 1.0 + 00$   
 $c(n_0, n_3) = -1.0 + 00$   
 $c(n_3, n_6) = 1.0 + 00$   
 $b(1) = 0.0 + 00$   
 $b(2) = s0ha$   
 $b(n_5) = h(n_2)$   
 $b(n_5) = 0.0 + 00$   
 DO 530 I=1, N6, 2  
 $u(k) = b(I)$   
 $p(k) = b(I+1)$   
 $k = k + 1$

330 CONTINUE

CALL CALC(N3, N3, C, I3)

IF(I3(N3)-0)20, 21, 20

21 WRITE(6, 221)

22 FORMAT(//, 4X, 'DETERMINANTE DE C NULO NA SOLUCAO DE U E P')

RU TO 1,

20 CALL GAUSS(N3, N3, C, D, I3)

C SOLUCAO PARA A COMPONENTE RADIAL DA VELOCIDADE  
 NESTE CASO - FORMA IMPLICITA

$c(1, 1) = 1.0 + 00$   
 $c(1, 2) = 0.0 + 00$   
 $c(1, 3) = 0.0 + 00$   
 $c(n, 1) = 0.0 + 00$   
 $c(n, 2) = 1.0 + 00$   
 $c(n, 3) = 0.0 + 00$   
 DO 23 I=2, N6  
 $c(I, 1) = 3.0 + 00$   
 $c(I, 2) = -4.0 + 00$

23 C(I, 3) = 1.0 + 00

DO 24 I=N9, N2

 $c(I, 1) = -1.0 + 00$  $c(I, 2) = 4.0 + 00$ 

24 C(I, 3) = -3.0 + 00

 $s(I) = 0.0 + 00$ 

F=FUELTA/Y/DELTA X

 $v(1) = 0.0 + 00$  $v(n) = 0.0 + 00$ 

K=1

DO 25 I=1, N12, 2

 $v(k+1) = \text{EE} * (s(I+2) + s(I) - v(k+1) - u(k))$ 

25 K=K+1

```

***** K=110
    DO 26 I=N11,N6,2
    V(K-1)=EE*(B(I-2)+BLI)+U(K-1)-U(K)
26  K=K+1
    CALL MAT(N,3,C,V,IT)
    IF (IT=0) 27,28,27
28  WRITE(6,24)
29  FORMAT(//,4X,'DETERMINANTE DE C NULO NA SOLUCAO DE V')
    GO TO 14
37  V(1)=U,U+00
    SEPARACAO DOS VALORES DE U E P DO VETOR B
    K=1
    U(1)=U,U+00
    TESTES PARA FIM DE EXECUCAO DO PROGRAMA
    J=J+1
    IF (P(1)) 30,31,31
    F1' DO CANAL CASO A PRESSAO SEJA MAIOR OU IGUAL A ZERO
31  I2=1
    WRITE(6,32)P(1)
32  FORMAT(//,4X,'FIM DO CANAL ATINGIDO P(1)',013.6)
    GO TO 35
    F1' DO CANAL CASO TETA DE 1 IGUAL A 1
30  IF (TETA(1)=1) 34,35,35
35  I2=1
    WRITE(6,36)TETA(1)
36  FORMAT(//,4X,'FIM DO CANAL ATINGIDO TETA(1)',013.6)
    GO TO 33
34  IF (J+1=3) 37,38,33
37  X=X+DELTA_X
    DELTA_X=DELTA_X+P*DELTA
    GO TO 4
38  H1=SIMPSON(N,U,TETA,DELTA_Y)
    J2=1
    X1=-H1+E*PR
    X=X+DELTA_X
    GO TO 10
33  H2=SIMPSON(N,U,TETA,DELTA_Y)
    X=X+DELTA_X
    X1=X1+H2*E*PR
    J3=J3+2
    WRITE(6,5)X,J
5   FORMAT(//,4X,'X',013.6,4X,'J',15)
    IF (I2.E..1) GO TO 40
    IF (J.E..2) GO TO 40
    IF (J1.E..0) GO TO 39
40  WRITE(6,6)
6   FORMAT(//,8X,'I',7X,'U(I)',11X,'V(I)',11X,'P(I)',9X,'TETA(I)')
    DO 41 I=1,N
    WRITE(6,8)I,U(I),V(I),P(I),TETA(I)
8   FORMAT(//,4X,15,2X,013.6,2X,013.6,2X,013.6,2X,013.6)
41  CONTINUE
39  IF (I2-1) 42,43,43
42  WRITE(6,44)X1

```

```
44 FORMAT(//,4X,'X1=',D13.6)
      DELTAX=DELTAX+DDELTA
      J2=0
      GO TO 4
43 IF(J2.EQ.1)WRITE(6,44)X1
      Y1=H2*KPR/X
      WRITE(6,45)X1
48 FORMAT(//,4X,'X1=',D13.6)
      SUMA=0.
      DO 49 I=2,N2,2
49 SUMA=SUMA+4.D+00*U(I)+2.D+00*U(I+1)
      SUMA=SUMA+U(1)-U(N)
      SSUMA=SUMA*DELTAY/3.D+00
      WRITE(6,50)SSUMA
      WRITE(6,51)H2
50 FORMAT(//,4X,'FINAL',D13.6)
      WRITE(6,51)H2
51 FORMAT(//,4X,'H',D13.6)
14 STOP
END
```

### NOMENCLATURA

$b$	- largura do coletor
$c_p$	- capacidade específica de calor do fluido
$g$	- constante de gravitação
$\bar{h}_{ar}$	- coeficiente médio de transferência de calor para o ar
$K$	- condutividade térmica do fluido
$\ell$	- comprimento do coletor
$p_0$	- pressão hidrostática ambiente
$p^*$	- pressão induzida do fluido
$q_p$	- fluxo de calor convectivo da placa para o fluido
$q_{rv \neq p}$	- fluxo de calor radiativo entre o vidro e placa metálica
$q_v$	- fluxo de calor convectivo do vidro para o fluido
$r_b$	- razão entre as dimensões do coletor, definido como $b/\ell$
$r_H$	- razão entre os fluxos convectivos das placas para o fluido, definido como $q_v / q_p$
$u$	- componente axial da velocidade do fluido
$u_0$	- velocidade uniforme de entrada no canal
$v$	- componente transversal da velocidade do fluido
$A_{v,p}$	- área das paredes

B	- distância adimensional entre as paredes
$E_{\lambda v}$ , $E_{\lambda p}$	- potências emissivas das paredes, vidro e placa metálica, por faixa monocromática
Gr	- número de Grashof
$I_s$	- nível de insolação
L	- altura adimensional do coletor
Nr	- número de Radiação
Pr	- número de Prandtl
P	- pressão adimensional induzida
$Q_r$	- fluxo de calor radiativo do vidro para meio ambiente
$Q_v$	- fluxo de calor convectivo do vidro para o meio ambiente
Ra	- número de Rayleigh, definido como Pr. Gr
T	- temperatura do fluido
$T_0$	- temperatura ambiente
U	- componente adimensional axial da velocidade
V	- componente adimensional transversal da velocidade
$\alpha$	- ângulo de inclinação
$\alpha_{\lambda v}$ , $\alpha_{\lambda p}$	- absorтивidades monocromáticas para as placas de vidro e metal, respectivamente

- $\beta$  - coeficiente de expansividade do fluido
- $\epsilon_{\lambda v}, \epsilon_{\lambda p}$  - emissividades monocromáticas para as placas de vidro e metal, respectivamente
- $\theta$  - temperatura adimensional
- $\mu$  - viscosidade do fluido
- $\nu$  - difusividade molecular do fluido, definida como  $\mu/\kappa$
- $\rho$  - densidade do fluido
- $\sigma$  - constante de Stefan - Boltzmann
- $\sigma_x, \sigma_y$  - tensões normais às direções x e y respectivamente
- $\tau_{yx}, \tau_{xy}$  - tensões de cisalhamento
- $\Delta x, \Delta y$  - intervalos finitos nas coordenadas x e y, respectivamente
- $e$  - energia interna específica por unidade de massa
- $\theta_M$  - temperatura máxima
- $q_{T_x}$  - fluxo de calor total transferido ao fluido na posição X
- $Q_{T_x}$  - fluxo de calor total adimensional transferido ao fluido na posição X

BIBLIOGRAFIA

- |<sup>1</sup> | GRAINER, W., OTHIER, H. and TWIDELL, J.W.: "Small Scale Solar Crop Driers for Tropical Village Use - Theory and Practical Experience, Solar World Forum" - Proceedings of the ISES Congress, 1981, Brighton, Pergamon Press.
- |<sup>2</sup> | PHILIP, S.: "Energy Environment and Building", Cambridge Urban and Architectural Studies, Cambridge University Press, U.S.A., 1976.
- |<sup>3</sup> | BAHADORI, M. N.: "Passive Cooling Systems in Iranian Architecture", Scientific American, 238 (2), pp. 144-154, 1978
- |<sup>4</sup> | BODOIA, J. R., OSTERLE, J. F.: "The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plats", Trans. ASME, J. Heat Transfer, pp. 40-44, 1962.
- |<sup>5</sup> | AUNG, W., FLETCHER, L. S. and SERNAS, V.: "Developing Laminar Free Convection Between Vertical Flat Plats with Asymmetric Heating", Int. J. Heat & Mass Transfer, Vol. 13, pp. 2293-2306, 1972
- |<sup>6</sup> | DAVIS, L. P., PERONA, J. J.: "Development of Free Convection of a Gas in a Heated Vertical Open Tube", Int. J. Heat & Mass Transfer, Vol. 13, pp. 889-903, 1971.

- |<sup>7</sup> | CARPENTER, J. R., BRIGGS, D. G. and SERNAS, V.: "Combined  
Radiation and Convection in Developing Laminar Free  
Convection Between Vertical Flat Plats with Asymmetric  
Heating", *J. Heat Transfer*, pp. 95-100, 1976.
- |<sup>8</sup> | AKBARI, H., BORGES, T. R.: "Free Convective Laminar Flow  
Within the Trombre Wall Channel", *Solar Energy*, Vol.  
22 - pp. 165-174, 1974.
- |<sup>9</sup> | MACEDO, I.: "An Approximate Analysis of Natural Convection  
Solar Air Heaters", *Proceedings of the Third Brazilian  
Congress of Mechanical Engineering*, pp. 503-512, 1975.
- |<sup>10</sup> | ZAPAROLLI, E. L.: "Convecção Natural entre Placas Pla-  
nas Paralelas", *Tese de Mestrado*, ITA, 1980.
- |<sup>11</sup> | WENDEL, M. W., WHITAKER, S.: "Remarks on the Paper Finite  
Difference Analysis of Plane Poiseuille and Couette  
Flow Developments" by Bodoia, J. R. and Osterle, J.  
F., *Appl. Science Res.*, Section A11, pp. 313-317, 1963.
- |<sup>12</sup> | IRVINE, T. Jr.: "Laminar Flow Forced Convection in  
Ducts", *Advances in Heat Transfer*, pp. 153-164, Academic  
Press, New York, 1978.
- |<sup>13</sup> | KREITH, F.: "Radiation Heat Transfer for Space Craft and

Solar Power Plant Design", Int. Testbook Co., pp. 44-49, 1962.

- |<sup>14</sup>| VON ROSENBERG, D.V.: "Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations", Modern Analytic and Computational Methods in Science and Mathematics № 16, pp. 16-31, 1975.
- |<sup>15</sup>| FABER, E.A.: "Solar Energy its Conversion and Utilization", *Solar Energy*, Vol. 14, pp. 253-252, 1973.
- |<sup>16</sup>| SHAUKATULLAH, H. and GEBHART, B.: "An Experimental Investigation of Natural Convection Flow on an Inclined Surface", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 21, pp.1481-1490, 1978
- |<sup>17</sup>| SCHLICHTING, H.: "Boundary Layer Theory", McGraw-Hill Book Company, New York, 1968
- |<sup>18</sup>| OZISIK, M. N.: "Basic Heat Transfer", McGraw-Hill Book Company, New York, 1977
- |<sup>19</sup>| SIEGEL, R. and HOWELL, J. R.: "Thermal Radiation Heat Transfer", Mc Graw Hill Kogakusha, Japan, pp.122 - 161, 1972
- |<sup>20</sup>| PACITTI, T. and ATKINSON, C.P.: "Programação e Métodos Computacionais", Vol. 2, Livros Técnicos e Científicos

Editora, pg. 566-585, 1976.

|<sup>21</sup> | CARNAHAN B., LUTHER, H. A. and WILKES, J. O.: "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, 1969

|<sup>22</sup> | Categorical Guide to Subroutines and Sample Programs (SSP), IBM Application Programa System /360 Scientific Subroutine Package, Version III, 1972.