UMA FORMALIZAÇÃO DA MECÂNICA ANALÍTICA DOS SISTEMAS DE CORPOS RÍGIDOS

Pius Paravidino de Macedo Soares

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

Luiz Carlos Martins
(Presidente)

Eliana Rocha Henriques de Brito

Miguel Hiroo Hirata

Moyses Zindeluk

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1980

SOARES, PIUS PARAVIDINO DE MACEDO

Uma Formalização da Mecânica Analítica dos Sistemas de Corpos Rígidos [Rio de Janeiro] 1980.

V, 35p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia Mecânica, 1980)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

1. Mecânica Analítica I.COPPE-UFRJ II.Título(série).

RESUMO

As equações de Lagrange para o movimento dos sistemas de corpos rígidos são obtidas diretamente a partir das leis do movimento de um corpo rígido, sem se estudar inicialmente os sistemas com número finito de partículas. Neste processo, deixa-se claro o status de lei da evolução do momento cinético para o desenvolvimento da teoria.

Obtém-se a equação de Euler para o movimento de um corpo rígido com um ponto fixo a partir das equações de Lagrange, sem que para isto sejam utilizados os ângulos de Euler. E se fornece uma prova elementar da descrição do campo de velocidades de um corpo rígido movendo-se com um ponto fixo.

ABSTRACT

The Lagrange's equations for systems of rigid bodies are obtained directly from the laws of motion for a rigid body, without the preliminary study of systems with a finite number of particles. In doing so, the role of the evolution law for the angular momentum is made clear for the development of the theory.

We obtain Euler's equation for a rigid body with a fixed point from Lagrange's equations, without using Euler's angles. And an elementary proof for the velocity field of a rigid body moving with a fixed point is presented.

ÍNDICE

I. INTRODUÇÃO

Há os que preferem obter as equações de Lagrange partindo-se das leis de Newton. Para isto, estuda-se inicialmente sistemas com um número finito de partículas e se extrapola o resultado obtido para o caso de sistemas de corpos rígidos vinculados. Embora se tenha como certa a validade das equações assim obtidas, este procedimento é matematicamente incorreto. O contínuo rígido não é o "limite" de um grande número de partículas que se move preservando distâncias mútuas. E no âmago da questão está o status da lei de evolução do momento cinético. Desenvolvemos as equações de Lagrange a partir das leis de Newton do movimento de um corpo rígido, mas não resolvemos nenhum problema específico dentro desta formulação. Deixamos para o leitor a formulação dos modelos e neles a distinção entre forças ativas e de vínculo.

O tratamento tensorial moderno usado no trabalho e a matematização dos conceitos despe a mecânica a seu esqueleto. Isto traz a vantagem de se enfatizar as hipóteses básicas, descobertas ao longo de 300 anos por gigantes do pensamento científico, embora tendo o presente trabalho a aparência de um simples exercício em álgebra e análise. E, se usamos o termo proposição para o enunciado das implicações provadas, isto se deve ao fato de que eles estavam certos: as equações de Lagrange podem ser obtidas a partir das equações do movimento de um corpo rígido. E apenas arranhamos a implicação inversa.

É evidente que não contamos toda a história aqui. Particularmente pode causar espanto a ausência de termos como holonômico e graus de liberdade. Mas isto decorre da abordagem escolhida para a definição de coordenadas generalizadas. E "deslocamentos virtuais" só aparecem ao final do trabalho.

Como nosso objetivo era colocar as equações de Lagrange dentro de um esquema matematicamente mais cuidado, paramos aí.

II. CORPO E MOVIMENTO

Definição: Um corpo é um par $(\mathcal{B}, m)$ onde:

(i) $\mathcal{B}$ é identificado com uma coleção finita $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N\}$ de regiões regulares* e fechadas, disjuntas**, do espaço euclidiano $\mathcal{E}$, tridimensional, chamada de configuração de referência. Cada $\mathcal{B}_i$ é dito uma componente do corpo.

(ii) m é uma medida em $\mathcal{B}$, com densidade $\rho > 0$. Chamamos

$$m(\mathcal{B}_i) = \int_{\mathcal{B}_i} \rho \, dV$$

de massa de $\mathcal{B}_i$.

Definição: Uma parte P de $\mathcal{B}$ é um subconjunto (não vazio) de $\mathcal{B}$ e

$$m(P) = \int_P \rho \, dV$$

é a massa de P.

Aos pontos $p \in \mathcal{B}_i$ chamamos pontos materiais.

Seja I ($I \neq \emptyset$) um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Aqui, denominamos I de intervalo de tempo e os pontos $t \in I$ são os instantes.

Definição: Um movimento x de $(\mathcal{B}, m)$ é uma função de classe C^2, $x : \left\{\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}_i\right\} \times I \to \mathcal{E}$ tal que $x(\cdot,t)$ é injetiva nas componentes de $\mathcal{B}$***. O ponto $x(p,t)$ é chamado posição de p no instante t e escrevemos $\mathcal{B}_t = x(\mathcal{B},t)$ para a região do espaço ocupada pelo corpo $\mathcal{B}$ no instante t.

---

* - Por regular entende-se que a fronteira $\partial\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{B}_i$ é suave por partes e admite uma orientação dada pela normal n a $\partial\mathcal{B}_i$.

** - Duas regiões A e C são disjuntas ou separadas se $A \cap C = \emptyset$.

*** - Por conveniência notaremos $\left\{\bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{B}_i\right\}$ também por $\mathcal{B}$, e o contexto deixará claro quando também notarmos por P a união dos elementos de P.

Definição: Chamamos

$$\dot{x}(p,t) = \frac{d}{dt} x(p,t), \text{ e}$$

$$\ddot{x}(p,t) = \frac{d^2}{dt^2} x(p,t)$$

de velocidade e aceleração de p no instante t, respectivamente.

Utilizaremos a notação clássica $\dot{A}$ para denotar a derivada em relação ao tempo da função A:

$$\dot{A} = \frac{d}{dt} A.$$

Definição: Chamamos de quantidade de movimento da parte $\mathcal{P}$ no movimento x ao vetor

$$\ell(\mathcal{P},t) = \int_{\mathcal{P}} \dot{x}(p,t) \rho \, dV$$

e chamamos de quantidade de movimento angular da parte $\mathcal{P}$, em relação a $y \in \mathcal{E}$, no movimento x, ao vetor

$$h_y(\mathcal{P},t) = \int_{\mathcal{P}} (x(p,t) - y) \wedge \dot{x}(p,t) \rho \, dV. \; *$$

Vemos imediatamente que

$$\dot{\ell}(\mathcal{P},t) = \int_{\mathcal{P}} \ddot{x}(p,t) \rho \, dV, \text{ e}$$

$$\dot{h}_y(\mathcal{P},t) = \int_{\mathcal{P}} (x(p,t) - y) \wedge \ddot{x}(p,t) \rho \, dV.$$

Proposição 1 (transporte da quantidade de movimento angular). Para todo z, $y \in \mathcal{E}$,

$$h_z(\mathcal{P},t) = h_y(\mathcal{P},t) + (y - z) \wedge \ell(\mathcal{P},t).$$

prova

$$h_z(\mathcal{P},t) - h_y(\mathcal{P},t) = \int_{\mathcal{P}} (-z + y) \wedge \dot{x}(p,t) \rho \, dV = $$

$$= (y - z) \wedge \ell(\mathcal{P},t). \blacksquare$$

---

* - Assumimos que em $\mathcal{V}$ foi escolhida uma orientação e usamos o símbolo $\wedge$ como a notação do produto vetorial.

<u>Definição</u>: O <u>centro de massa</u> da parte P no instante t, no movimento x, é o ponto $c(t) \in E$, tal que

$$c(t) - y = \frac{1}{m(P)} \int_P (x(p,t) - y) \rho \, dV.$$

Observe que $c(t)$ está bem definido pois independe de $y \in E$:

$$c(t) - z = y + \frac{1}{m(P)} \int_P (x(p,t) - y) \rho \, dV - z =$$

$$= \frac{1}{m(P)} \int_P (x(p,t) - z) \rho \, dV.$$

Note também que $c(t)$ é de classe C^2.

<u>Proposição 2.</u>

$$\ell(P,t) = m(P)\dot{c}(t).$$

<u>prova</u>

$$\dot{c}(t) = \frac{1}{m(P)} \int_P \dot{x}(p,t) \rho \, dV = \frac{1}{m(P)} \ell(P,t). \blacksquare$$

Entende-se por movimento de P em relação ao seu centro de massa à função $x_c(p,t)$ dada por seus valores

$$x_c(p,t) = x(p,t) - c(t)$$

para $(p,t) \in P \times I$. Quer dizer, $x_c(p,t)$ é o vetor posição de p, visto de um referencial que se translada em E com origem em $c(t)$. Observe que x_c toma valores em V, o espaço das translações de E.

De modo geral, se $r(t)$ é uma curva C^2 em E, o movimento de p em relação a r é dado por

$$x_r(p,t) = x(p,t) - r(t).$$

Definimos então a <u>quantidade de movimento relativa</u> por

$$\ell_r(P,t) = \int_P \dot{x}_r(p,t) \rho \, dV = \ell(P,t) - m(P)\dot{r}(t),$$

e a <u>quantidade de movimento angular relativa</u> por

$$h_r(P,t) = \int_P x_r(p,t) \wedge \dot{x}_r(p,t) \rho \, dV.$$

Observe que, para todo $t \in I$,

$$\ell_r(P,t) = 0 \Leftrightarrow r(t) = c(t) + u_o.$$

Proposição 3.

$$\dot{h}_r(P,t) = \int_P x_r(p,t) \wedge \ddot{x}(p,t)\,\rho\, dV - (c(t) - r(t)) \wedge m(P)\ddot{r}(t).$$

prova

$$\dot{h}_r(P,t) = \int_P x_r(p,t) \wedge \ddot{x}(p,t)\,\rho\, dV - \int_P x_r(p,t) \wedge \ddot{r}(t)\,\rho\, dV =$$

$$= \int_P x_r(p,t) \wedge \ddot{x}(p,t)\,\rho\, dV - (c(t) - r(t)) \wedge m(P)\ddot{r}(t).$$

■

É importante observar que, em um instante $t = t_1$, o vetor $\int_P x_r(p,t_1) \wedge \ddot{x}(p,t_1)\,\rho\, dV$ coincide com $h_y(P,t_1)$ para o ponto de E, $y = r(t_1)$. Também em um instante t, $(c(t) - r(t)) \wedge m(P)\ddot{r}(t) = 0$ se $\ddot{r}(t)$ e $(c(t) - r(t))$ são colineares ou se um deles é nulo. Desta forma, se para $t = t_1$, $\ddot{r}(t_1) = 0$ ou $c(t_1) = r(t_1)$ ou então se $\ddot{r}(t_1)$ passa pelo centro de massa da parte P, podemos concluir que

$$\dot{h}_r(P,t)\Big|_{t=t_1} = \frac{d}{dt}\, h_{r(t_1)}(P,t)\Big|_{t=t_1}.$$

Definição: A energia cinética K de P em um movimento x é definida por

$$K(P,t) = \int_P \frac{1}{2}\,\dot{x}(p,t) \cdot \dot{x}(p,t)\,\rho\, dV,$$

e a energia cinética em relação ao centro de massa K_c de P em um movimento x é definida por

$$K_c(P,t) = \int_P \frac{1}{2}\,\dot{x}_c(p,t) \cdot \dot{x}_c(p,t)\,\rho\, dV.$$

Proposição 4. (Teorema de König).

Para toda parte P de B e movimento x,

$$K(P,t) = K_c(P,t) + \frac{1}{2}\, m(P)\dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t).$$

<u>prova</u>

$$K_c(P,t) = \int_P \frac{1}{2}\, \dot{x}(p,t) \cdot \dot{x}(p,t)\, \rho\, dV - \int_P \dot{x}(p,t) \cdot \dot{c}(p,t)\, \rho\, dV +$$

$$+ \int_P \frac{1}{2}\, \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t)\, \rho\, dV =$$

$$= K(P,t) - m(P)\, \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) + \frac{1}{2}\, m(P)\, \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t) =$$

$$= K(P,t) - \frac{1}{2}\, m(P)\, \dot{c}(t) \cdot \dot{c}(t). \blacksquare$$

III. SISTEMA DE FORÇAS

Seja $\mathcal{B}$ um corpo: $\mathcal{B} = \left\{ \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N \right\}$. Vamos modelar as ações exercidas em cada parte P pelo complemento de P em $\mathcal{B}$. É conveniente juntarmos formalmente a $\mathcal{B}$ um elemento $\mathcal{B}^e$ que chamaremos de exterior de $\mathcal{B}$. Logo, nesta seção, é conveniente introduzirmos o conjunto $\mathcal{B}^{\&} = \left\{ \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_N, \mathcal{B}^e \right\}$ e manteremos a denominação partes para os subconjuntos não vazios de $\mathcal{B}$.

Vamos lidar com funções vetoriais F cujo valor $F(A,C)$ em pares (A,C) exprimem a ação de C sobre A. Dada uma parte P, definimos P^e(P exterior) como o complemento de P em $\mathcal{B}^{\&}$. O domínio de F será o conjunto $\mathcal{U}$ dos pares $(A,C), A \subset \mathcal{B}, C \subset \mathcal{B}^{\&}$, tais que:

(i) A e C são disjuntos;

(ii) A é uma parte;

(iii) C é uma parte ou o exterior de uma.

Assumimos que F tem a propriedade da biaditividade:

$$F(A, C \cup D) = F(A,C) + F(A,D), \text{ quando } C \cap D = \emptyset;$$
$$F(A \cup D, C) = F(A,C) + F(D,C), \text{ quando } A \cap D = \emptyset.$$

Quando F é biaditiva dizemos que F é uma interação.

Proposição 5.

Seja F uma interação. Se A e C são partes separadas, então

$$F(A,A^e) + F(C,C^e) - F(A \cup C, (A \cup C)^e) = F(A,C) + F(C,A).$$

prova. Como

$$F(A,A^e) = F(A,C) + F(A,(A \cup C)^e) \text{ e}$$
$$F(C,C^e) = F(C,A) + F(C,(C \cup A)^e),$$

a tese segue imediatamente. ∎

Definição: Uma interação F é dita equilibrada quando

$$F(A,C) = - F(C,A)$$

para todas as partes disjuntas A,C de $\mathcal{B}$.

Dada uma interação F podemos definir uma função vetorial $\mathcal{Q}$ que associa para cada parte P o vetor $F(P,P^e)$:

$\mathcal{Q}(P) = F(P,P^e)$.

$\mathcal{Q}$ é dita <u>aditiva</u> quando $\mathcal{Q}(A \cup C) = \mathcal{Q}(A) + \mathcal{Q}(C)$ para A e C disjuntas. Uma consequência imediata da proposição 5 é:

$\mathcal{Q}$ é aditiva $\Longleftrightarrow$ F é equilibrada.

<u>Definição</u>: Escolha $y \in E$. Um <u>sistema de forças</u> (baseado em y) para B em um movimento x, durante o intervalo de tempo I, é uma família $\left\{ F_t^y, M_t^y \right\}$, com F_t^y e M_t^y interações tais que

$$F_t^y(P,P^e) = \dot{\ell}(P,t) \text{ , e}$$

$$M_t^y(P,P^e) = \dot{h}_y(P,t).$$

As equações acima são denominadas <u>equações de balanço</u> e são as leis que regem o movimento newtoniano. Observando os segundos membros das equações, vemos que F_t^y e M_t^y são interações equilibradas.

Interpretamos $F_t^y(P,P^e)$ como a <u>resultante</u> geral das forças externas à parte P e $M_t^y(P,P^e)$ como o <u>momento resultante</u> das forças externas à parte P em relação a y.

Observe que, se $\left\{ F_t^y , M_t^y \right\}$ é um sistema de forças para B em um movimento x e se definimos

$$F_t^y = F_t^z \quad \text{e} \quad M_t^y = M_t^z + (y - z) \wedge F_t^y,$$

vemos imediatamente que F_t^z e M_t^z são interações equilibradas e, como pela proposição 1: $h_z = h_y + (y - z) \wedge \ell$, vemos que $\left\{ F_t^z, M_t^z \right\}$ é um sistema de forças baseado em z para o mesmo movimento x.

Seja $r(t)$ uma curva C^2 em E e $\left\{ F_t^y , M_t^y \right\}$ um sistema de forças para B em um movimento x. Para cada instante t definimos:

$$F_t^r(A,C) = \begin{cases} F_t^y(A,C) & \text{, se } C \subset B. \\ F_t^y(A,C) - m(A)\ddot{r}(t) & \text{, se } B^e \in C. \end{cases}$$

$$M_t^r(A,C) = \begin{cases} M_t^y(A,C) + (y - r(t)) \wedge F_t^y(A,C) & \text{, se } C \subset B. \\ M_t^y(A,C) + (y - r(t)) \wedge F_t^y(A,C) - \\ -\int_A (x(p,t) - r(t)) \wedge \ddot{r}(t)\, \rho \, dV & \text{, se } B^e \in C. \end{cases}$$

É fácil verificar que, para cada instante t, $\left\{ F_t^r , M_t^r \right\}$ são interações equilibradas e, como por hipótese,

$$F_t^y(P,P^e) = \dot{\ell}(P,t) \quad \text{e} \quad M_t^y(P,P^e) = \dot{h}_y(P,t),$$

e

$$\dot{\ell}_r(P,t) = \dot{\ell}(P,t) - m(P)\ddot{r}(t),$$

$$\dot{h}_r(P,t) = \int_P (x(p,t) - r(t)) \wedge \ddot{x}(p,t)\,\rho\, dV - \int_P (x(p,t) - r(t)) \wedge \ddot{r}(p,t)\,\rho\, dV,$$

concluimos imediatamente que:

$$\dot{\ell}_r(P,t) = F_t^r(P,P^e) \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned}\dot{h}_r(P,t) &= \int_P (x(p,t) - y) \wedge \ddot{x}(p,t)\,\rho\, dV + \\ &+ \int_P (y - r(t)) \wedge \ddot{x}(p,t)\,\rho\, dV - \\ &- \int_P (x(p,t) - r(t)) \wedge \ddot{r}(t)\,\rho\, dV = \\ &= M_t^y(P,P^e) + (y - r(t)) \wedge F_t^y(P,P^e) - \\ &- \int_P (x(p,t) - r(t)) \wedge \ddot{r}(t)\,\rho\, dV = \\ &= M_t^r(P,P^e).\end{aligned}$$

Podemos interpretar este resultado da seguinte forma: as leis do movimento são válidas para um sistema de referência que se move em translação em relação ao "sistema inercial", desde que se acrescente à ação do exterior sobre P uma ação fictícia equipolente na origem do sistema móvel a

$$\left\{ - m(P)\ddot{r}(t), \; -\int_P (x(p,t) - r(t)) \wedge \ddot{r}(t)\,\rho\, dV \right\}.$$

Quando r(t) coincide com a posição c(t) do centro de massa da parte , teremos

$$\dot{\ell}_c(P,t) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{h}_c(P,t) = M_t^y(P,P^e) + (y - c(t)) \wedge F_t^y(P,P^e),$$

de modo que podemos interpretar este resultado dizendo que as leis do movimento são válidas em relação ao centro de massa no seguinte sentido: a resultante das forças externas é igual ao produto $m(P)\ddot{c}(t)$ e o momento das forças externas em relação ao centro de massa é igual à derivada da quantidade de movimento angular relativa.

IV. MOVIMENTO RÍGIDO

Definição: Uma transformação $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ é dita ortogonal se ela preserva o produto interno:

$$Qu \cdot Qv = u \cdot v, \qquad \text{para todo } u,v \in \mathcal{V}$$

Proposição 6.
A condição necessária e suficiente para que $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ seja ortogonal é que

$$QQ^T = Q^TQ = 1,$$

ou, equivalentemente, se

$$Q^T = Q^{-1},$$

onde 1 é a identidade.

prova

$$Qu \cdot Qv = u \cdot Q^TQv,$$

logo, $Q^TQ = 1$. Então, $Q^T = Q^{-1}$. A volta é imediata.∎

Seja x um movimento de $\mathcal{B}$ num intervalo I e seja $t_o \in I$.

Definição: O movimento x é dito rígido para uma parte P se existir uma família $Q(t)$ de transformações ortogonais de classe C^2 tal que:

$$x(p,t) = x(q,t) + Q(t)(x(p,t_o) - x(q,t_o)),$$

para todo $p,q \in P$.

Observe que

$$|x(p,t) - x(q,t)| = |x(p,t_o) - x(q,t_o)| = \text{constante},$$

i.e., no movimento rígido as distânticas são preservadas*:

Proposição 7 (representação das velocidades).
Se x é um movimento rígido para a parte P, então

$$\dot{x}(p,t) = \dot{x}(q,t) + \dot{Q}(t)Q^T(t)(x(p,t) - x(q,t)).$$

---

* - A demonstração de que a recíproca é verdadeira é bem conhecida.

prova

$$\dot{x}(p,t) = \dot{x}(q,t) + \dot{Q}(t)(x(p,t_o) - x(q,t_o)) =$$
$$= \dot{x}(q,t) + \dot{Q}(t)Q^T(t)Q(t)(x(p,t_o) - x(q,t_o)) =$$
$$= \dot{x}(q,t) + \dot{Q}(t)Q^T(t)(x(p,t) - x(q,t)).\blacksquare$$

Proposição 8.

A transformação $\dot{Q}(t)Q^T(t)$ é antissimétrica:

$$\dot{Q}(t)Q^T(t) + (\dot{Q}(t)Q^T(t))^T = 0.$$

prova. De $Q(t)Q^T(t) = 1$ vem

$$\dot{Q}(t)Q^T(t) + Q(t)\dot{Q}^T(t) = 0,$$

e, como

$$Q(t)\dot{Q}^T(t) = (Q^T(t))^T(\dot{Q}(t))^T = (\dot{Q}(t)Q^T(t))^T,$$

tem-se a tese.$\blacksquare$

Prova-se que paracada transformação antissimétrica $W : V \longrightarrow V$ corresponde um único vetor $w \in V$ tal que $Wv = w \wedge v$, para todo $v \in V$. Segundo uma base ortonormal orientada positivamente tem-se que:

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \\ -B & A & 0 \end{bmatrix} \iff w = Ai + Bj + Ck$$

Desta forma, podemos representar as velocidades em um movimento rígido x para P por:

$$\dot{x}(p,t) = \dot{x}(q,t) + w(t) \wedge (x(p,t) - x(q,t)),$$

para todo $p,q \in P$. O vetor $w(t)$ é denominado velocidade angular da parte P no movimento rígido x. Tomando a derivada em relação ao tempo da equação acima, obtemos:

$$\ddot{x}(p,t) = \ddot{x}(q,t) + \dot{w}(t) \wedge (x(p,t) - x(q,t)) +$$
$$+ w(t) \wedge (\dot{x}(p,t) - \dot{x}(q,t)) =$$
$$= \ddot{x}(q,t) + \dot{w}(t) \wedge (x(p,t) - x(q,t)) +$$
$$+ w(t) \wedge (w(t) \wedge (x(p,t) - x(q,t))),$$

que é uma representação útil das acelerações em um movimento rígido x. O vetor $\dot{w}(t)$ é chamado aceleração angular da parte P no movimento rígido x.

V. TENSOR DE INÉRCIA. EQUAÇÕES DE EULER.

Definição: Chamamos de tensor a toda transformação linear de V em V. O produto tensorial $a \otimes b$ de dois vetores $a, b \in V$ é o tensor que associa a cada vetor $v \in V$ o vetor $(b.v)a$:

$$(a \otimes b)v = (b.v)a.$$

Observe que $(a \otimes b)^T = (b \otimes a)$.

Definição: Define-se o tensor de inércia I^r da parte P em relação a uma curva $r(t)$, C^2 em E, em um movimento x por:

$$I^r(P,t) = \left(\int_P x_r(p,t).x_r(p,t)\rho\, dV\right) 1 - \int_P x_r(p,t) \otimes x_r(p,t)\, \rho\, dV.$$

Aqui, 1 é o tensor unidade.

Proposição 9. (teorema dos eixos paralelos).
Se $c(t)$ é o centro de massa da parte P no movimento x, então

$$I^r(P,t) = I^c(P,t) + m(P)(c(t) - r(t))^2 1 -$$
$$- m(P)(c(t) - r(t)) \otimes (c(t) - r(t)).$$

prova

$$I^r(P,t) - I^c(P,t) = \left(\int_P (x_r(p,t)^2 - x_c(p,t)^2)\, \rho\, dV\right) 1$$
$$- \int_P (x_r(p,t) \otimes x_r(p,t) - x_c(p,t) \otimes x_c(p,t))\, \rho\, dV.$$

Como

$$x_r(p,t) = c(t) - r(t) + x_c(p,t),$$

concluimos que

$$x_r(p,t)^2 = (c(t) - r(t))^2 + (x(p,t) - c(t))^2 +$$
$$+ 2(c(t) - r(t)) \,.\, x_c(p,t).$$

Assim,

$$\int_P x_r(p,t)^2 \rho\, dV = \int_P (x(p,t) - c(t))^2 \rho\, dV + m(P)(c(t) - r(t))^2,$$

pois

$$\int_P x_c(p,t)\, \rho\, dV = 0.$$

Por outro lado,

$$x_r(p,t) \otimes x_r(p,t) = x_c(p,t) \otimes x_c(p,t) + (c(t) - r(t)) \otimes (c(t) - r(t)) +$$
$$+ (c(t) - r(t)) \otimes x_c(p,t) + x_c(p,t) \otimes (c(t) - r(t))$$

E, concluimos que

$$\int_P x_r(p,t)\otimes x_r(p,t)\,\rho\,dV = \int_P x_c(p,t)\otimes x_c(p,t)\,\rho\,dV +$$

$$+\ m(P)(c(t) - r(t))\otimes(c(t) - r(t)). \blacksquare$$

Da própria definição vemos que o tensor de inércia é simétrico e de classe C^2 e, de acordo com o teorema espectral , para cada instante t, I pode ser escrito da forma:

$$I^r(P,t) = \sum_i I_i^r(P,t)\ e_i(t)\otimes e_i(t),$$

onde $\{e_i(t)\}$ é uma base ortonormal formada pelos autovetores de $I^r(P,t)$ e os escalares $I_i^r(P,t)$ são os autovalores de $I^r(P,t)$ no instante t. Os eixos segundo a base $\{e_i(t)\}$ são chamados de eixos principais de inércia e os escalares $I_i^r(P,t)$ são chamados de momentos principais de inércia.

Considere $v \in V$. O valor de $I^r(P,t)v \cdot v$ é dado por

$$I^r(P,t)v \cdot v = \int_P (x_r(p,t)^2\ v^2 - (x_r(p,t).v)^2)\,\rho\,dV,$$

e, como a integral é feita em um volume, $I^r(P,t)v \cdot v > 0$, para todo $v \in V$ e $t \in I$. Isto mostra que o tensor de inércia é definido positivo. E, podemos concluir que os momentos principais de inércia serão sempre positivos: $I_i^r(P,t) > 0$, $(i = 1,2,3)$.

Para as tres proposições que seguem, considere x um movimento rígido para uma parte P, com t_o um instante escolhido em I e $q \in P$. Ponha $r(t) = x(q,t)$. Assim,

$$x_r(p,t) = Q(t)x_r(p,t_o).$$

Proposição 10.

$$I^r(P,t) = Q(t)I^r(P,t_o)Q^T(t).$$

prova

$$I^r(P,t) = (\int_P (Q(t)x_r(p,t_o) \cdot Q(t)x_r(p,t_o))\ \rho\,dV)\,1$$

$$- \int_P Q(t)x_r(p,t_o)\otimes Q(t)x_r(p,t_o)\,\rho\,dV.$$

Mas, para qualquer $u \in V$,

$$Qu.Qu\,1 = u^2\,1 = Qu^2\,1Q^T,$$

e,

$$Qu \boxtimes Qu = Q(u \boxtimes Qu) = Q((u \boxtimes Qu)^T)^T = Q(u \boxtimes u)^T Q^T = Qu \boxtimes u Q^T,$$

e agora a tese segue imediatamente. ■

Proposição 11.
Seja $\{e_i(t_o)\}$ uma base ortonormal em V tal que

$$I^r(P,t_o) = \sum_i I_i^r(P,t_o)\ e_i(t_o) \boxtimes e_i(t_o),$$

e defina

$$e_i(t) = Q(t) e_i(t_o).$$

Então,

$$I^r(P,t) = \sum_i I_i^r(P,t_o)\ e_i(t) \boxtimes e_i(t).$$

prova

$$I^r(P,t) = Q(t) I^r(P,t_o) Q^T(t) =$$

$$= \sum_i I_i^r(P,t_o) Q(t) e_i(t_o) \boxtimes e_i(t_o) Q^T(t) =$$

$$= \sum_i I_i^r(P,t_o) Q(t) e_i(t_o) \boxtimes Q(t) e_i(t_o) =$$

$$= \sum_i I_i^r(P,t_o) e_i(t) \boxtimes e_i(t). \ ■$$

Interpreta-se o resultado acima dizendo-se que os eixos principais de inércia acompanham o movimento rígido da parte.

Proposição 12. (representação do momento angular).

$$h_r(P,t) = I^r(P,t) w(t).$$

prova

$$I^r(P,t) w(t) = \int_P x_r(p,t)^2 w(t)\, \rho\, dV -$$

$$- \int_P (x_r(p,t) \cdot w(t)) x_r(p,t)\, \rho\, dV.$$

Mas, como para quaisquer 3 vetores a,b e c $\in V$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a.c)b - (a.b)c,$$

concluimos que

$$I^r(P,t) w(t) = \int_P x_r(p,t) \wedge (w(t) \wedge x_r(p,t))\, \rho\, dV =$$

$$= \int_P x_r(p,t) \wedge \dot{x}_r(p,t)\, \rho\, dV. \blacksquare$$

É evidente que se o movimento de P é rígido, seu centro de massa move-se como se rigidamente ligado à parte. Então se pode tomar $r(t) = c(t)$ na proposição acima. Quando $r(t) = c(t)$ ou $\dot{r}(t) = 0$, se tomarmos $y \in E$ tal que, no instante t, $y = r(t)$, então

$$h_y(P,t) = I^y(P,t)w(t)$$

naquele instante.

Proposição 13. (representação da energia cinética). Considere $r(t)$ coincidindo com o centro de massa da parte P em um movimento rígido x com velocidade angular $w(t)$. Então

$$K_c(P,t) = \frac{1}{2}\, I^c(P,t)w(t)\, .\, w(t).$$

prova. Como

$$I^c(P,t)w(t) = \int_P x_c(p,t) \wedge \dot{x}_c(p,t)\, \rho\, dV,$$

então

$$\begin{aligned} I^c(P,t)w(t)\, .\, w(t) &= \int_P x_c(p,t) \wedge \dot{x}_c(p,t)\, .\, w(t)\, \rho\, dV = \\ &= \int_P \dot{x}_c(p,t)\, .\, (w(t) \wedge x_c(p,t))\, \rho\, dV = \\ &= \int_P \dot{x}_c(p,t)\, .\, \dot{x}_c(p,t)\, \rho\, dV = 2\, K_c(P,t). \blacksquare \end{aligned}$$

Das proposições 4 e 13 resulta:

$$K(P,t) = \frac{1}{2}\left(I^c(P,t)w(t)\, .\, w(t) + m(P)\dot{c}(t)^2 \right).$$

Proposição 14. (equações de Euler do movimento rígido). Seja x um movimento rígido para uma parte P e $q \in P$. Ponha $r(t) = x(q,t)$. Então,

$$M_t^r(P,P^e) = I^r(P,t)\dot{w}(t) - I^r(P,t)w(t) \wedge w(t).$$

E, se tomamos para base de V a tríade $\{e_i(t)\}$ como definida na proposição 11,

$$M_1^r(P,P^e) = I_1^r(P)\dot{w}_1(t) - (I_2^r(P) - I_3^r(P))w_2(t)w_3(t) \ ;$$

$$M_2^r(P,P^e) = I_2^r(P)\dot{w}_2(t) - (I_3^r(P) - I_1^r(P))w_3(t)w_1(t) \ ;$$

$$M_3^r(P,P^e) = I_3^r(P)\dot{w}_3(t) - (I_1^r(P) - I_2^r(P))w_1(t)w_2(t) \ ;$$

onde $M_i^r(P,P^e) = M_t^r(P,P^e) \cdot e_i(t)$, $w_i(t) = w(t) \cdot e_i(t)$ e $I_i^r(P)$ são os momentos principais de inércia, para $r(t)$.

<u>prova</u>

$$M_t^r(P,P^e) = \hbar_r(P,t) = (I^r(P,t)w(t))^{\cdot} =$$

$$= I^r(P,t)\dot{w}(t) + \dot{I}^r(P,t)w(t).$$

E,

$$\dot{I}^r(P,t)w(t) = (Q(t)I^r(P,t_o)Q^T(t))^{\cdot}w(t) =$$

$$=(\dot{Q}(t)I^r(P,t_o)Q^T(t) + Q(t)I^r(P,t_o)\dot{Q}^T(t))w(t) =$$

$$= \dot{Q}(t)Q^T(t)(Q(t)I^r(P,t_o)Q^T(t))w(t) +$$

$$+ Q(t)I^r(P,t_o)\dot{Q}^T(t)Q(t)Q^T(t)w(t) =$$

$$= w(t) \wedge I^r(P,t)w(t) -$$

$$- (Q(t)I^r(P,t_o)Q^T(t))\dot{Q}(t)Q^T(t)w(t) =$$

$$= w(t) \wedge I^r(P,t)w(t) - I^r(P,t)(w(t) \wedge w(t)) =$$

$$= - I^r(P,t)w(t) \wedge w(t). \blacksquare$$

VI. POTÊNCIA. TRABALHO.

Definição: A potência P para uma parte $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$ em um movimento x é definida por

$$P(\mathcal{P},t) = \frac{d}{dt} K(\mathcal{P},t),$$

e o trabalho exercido sobre $\mathcal{P}$ em um intervalo de tempo $[t_o,t_1]$ é definido por

$$W_{[t_o,t_1]}(\mathcal{P}) = \int_{t_o}^{t_1} P(\mathcal{P},t)dt.$$

De imediato observamos que

$$W_{[t_o,t_1]}(\mathcal{P}) = K(\mathcal{P},t_1) - K(\mathcal{P},t_o),$$

ou seja, o trabalho exercido sobre $\mathcal{P}$ é igual à variação de sua energia cinética.

Seja x: $\mathcal{B}\times I \longrightarrow \mathcal{E}$ um movimento tal que x: $\mathcal{B}_i \times I \longrightarrow \mathcal{E}$ é rígido. Escolha $p_i \in \mathcal{B}_i$ e ponha $x(p_i,t) = y_i(t)$. Chamaremos p_i de ponto base de $\mathcal{B}_i$ no movimento x. Então,

$$P(\mathcal{B}_i,t) = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{B}_i} \frac{1}{2}\, \dot{x}(p,t)^2 \rho\, dV = \int_{\mathcal{B}_i} \ddot{x}(p,t).\dot{x}(p,t)\,\rho\, dV =$$

$$= \int_{\mathcal{B}_i} \ddot{x}(p,t).\dot{y}_i(t)\,\rho\, dV +$$

$$+ \int_{\mathcal{B}_i} (x(p,t) - y_i(t)) \wedge \ddot{x}(p,t)\ .\ w_i(t)\,\rho\, dV =$$

$$= F_t^{y_i}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i^e)\ .\ \dot{y}_i(t) + M_t^{y_i}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i^e)\ .\ w_i(t),$$

onde $\left\{F_t^{y_i}, M_t^{y_i}\right\}$ é o sistema de forças baseado no ponto $y_i \in \mathcal{E}$ que p_i ocupa no instante t.

Considere um conjunto finito de famílias $\left\{f_j(t),\ x_j(t)\right\}$ $(j = 1, \ldots, g)$ onde $f_j(t) \in \mathcal{V}$ e $x_j(t) \in \mathcal{E}$, com as seguintes propriedades:

(i) $F_t^{y_i}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i^e) = \sum_{j=1}^{g} f_j(t)$;

(ii) $M_t^{y_i}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i^e) = \sum_{j=1}^{g} (x_j(t) - y_i(t)) \wedge f_j(t)$;

(iii) para cada instante t, $x_j(t) \in x(\mathcal{B}_i,t)$ $(j = 1, \dots, g)$.

Dizemos neste caso que $\{f_j(t), x_j(t)\}$ é equipolente a $\{F_t^{y_i}, M_t^{y_i}\}$ em $\mathcal{B}_i$ no movimento x. Retornando à equação da potência:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B}_i,t) &= (\sum_{j=1}^{g} f_j(t)).\dot{y}_i(t) + (\sum_{j=1}^{g} (x_j(t)-y_i(t))\wedge f_j(t)).w_i(t) = \\ &= (\sum_{j=1}^{g} f_j(t)).\dot{y}_i(t) + \sum_{j=1}^{g} (f_j(t).w_i(t)\wedge(x_j(t)-y_i(t))) = \\ &= \sum_{j=1}^{g} f_j(t).(\dot{y}_i(t) + w_i(t)\wedge(x_j(t) - y_i(t))), \end{aligned}$$

isto é, para o sistema de forças equipolente, a potência pode ser calculada simplesmente fazendo-se o produto escalar de cada $f_j(t)$ pela velocidade do ponto do corpo que ocupa a posição $x_j(t)$ naquele instante.

A formulação apresentada até aqui resolve completamente o problema de, conhecido o movimento, determinar o sistema de forças (externas) que o suporta (no sentido de se satisfazerem as leis do movimento). O problema inverso, envolvendo a solução de equações diferenciais, já não é tão simples. E, em muitos casos, não é completamente conhecido o sistema de forças, mas sim uma restrição (levada ao modelo por meio de considerações de ordem física) à classe de movimentos onde se procura a solução do problema. Nesta hora, a simplicidade da redução das ações sobre uma parte a um único ponto já não é conveniente. Não vamos nos aprofundar por hora na análise das chamadas forças de vinculação, considerando apenas dois casos: considere duas componentes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ e um movimento x de $\mathcal{B}$ que seja rígido para todas as suas componentes. Suponha que, para cada instante t, exista um ponto $z(t) \in \mathcal{E}$ que pertença a $x(\mathcal{A},t) \cap x(\mathcal{C},t)$ e tal que a ação sobre $\mathcal{A}$ devida a $\mathcal{C}$ é $F_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(t)$ quando reduzida a z(t). Segue imediatamente que $F_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(t)$ (reduzida a z(t)) vale $- F_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(t)$. Então, a contribuição de $F_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(t)$ para $P(\mathcal{A},t)$ vale $F_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(t).v_{\mathcal{A}}(z(t))$, onde $v_{\mathcal{A}}(z(t))$ é a velocidade do ponto de $\mathcal{A}$ que ocupa a posição z(t) naquele instante. Analogamente, $F_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(t).v_{\mathcal{C}}(z(t))$ é a contribuição de $F_{\mathcal{C},\mathcal{A}}(t)$ para $P(\mathcal{C},t)$. Mas é claro que $P(\mathcal{A}\cup\mathcal{C},t) = P(\mathcal{A},t) + P(\mathcal{C},t)$ pela aditividade da energia cinética e a contribuição da "força de vínculo" $F_{\mathcal{A},\mathcal{C}}(t)$ para a potência $P(\mathcal{A}\cup\mathcal{C},t)$ será nula se:

(i) $v_C(z(t)) = v_A(z(t))$ (materialmente realizado por uma rótula lisa);

(ii) $(v_C(z(t)) - v_A(z(t))).F_{C,A}(t) = 0$ (materialmente realizado por duas superfícies lisas, em contato, deslizando uma sobre a outra, sem atrito).

VII. COORDENADAS GENERALIZADAS. EQUAÇÕES DE LAGRANGE.

Seja um corpo $\mathcal{B} = \left\{ \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N \right\}$ e $x: \mathcal{B}x\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ um movimento tal que $x: \mathcal{B}_i x\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ $(i = 1, \dots, N)$ é rígido. Então, se p_i é o ponto base escolhido em $\mathcal{B}_i$ e se pomos $x(p_i, t) = y_i(t)$, temos que:

$$x(p,t) = y_i(t) + Q_i'(t)(x(p,t_o) - y_i(t_o)),$$

para todo $p \in \mathcal{B}_i$. Ou ainda,

$$x(p,t) = y_i(t) + Q_i(t)(p - p_i).$$

Assim, o movimento é completamente descrito pelas famílias $\left\{ y_i(t), Q_i(t) \right\}$ $(i = 1, \dots, N)$, onde $y_i(t) \in \mathcal{E}$ e $Q_i(t)$ é ortogonal $(Q_i(t) \in \text{Orth})$.

Um sistema de vínculos para $\mathcal{B}$ é uma função de classe C^2, $h: \mathcal{G}x\mathcal{I} \longrightarrow (\mathcal{E}x\text{Orth})^N$, onde $\mathcal{G}$ é um aberto em $\mathcal{R}^M$. Os pontos de $\mathcal{G}$, $q = (q_1, \dots, q_M)$ são chamados <u>coordenadas generalizadas</u> e um movimento x de $\mathcal{B}$ satisfaz aos vínculos se existe uma curva $q(t) = (q_1(t), \dots, q_M(t))$ em $\mathcal{G}$, com $t \in \mathcal{I}$, tal que

$$\pi^i(h(q_1(t), \dots, q_M(t), t)) = (y_i(t), Q_i(t)),$$

onde $\pi^i.h$ é a i-ésima componente de h.

Se a cada ponto (q,t) de $\mathcal{G}x\mathcal{I}$ pomos $\pi^i.h(q,t) = (y_i(q,t), Q_i(q,t))$, então a <u>configuração</u> de $\mathcal{B}$ é definida por :

$$p \longmapsto y_i(q,t) + Q_i(q,t)(p - p_i),$$

para $p \in \mathcal{B}_i$. Notaremos o valor de tal aplicação em p por $x(p,q,t)$. Assim, um movimento x satisfaz aos vínculos se existe uma curva $q(t)$ tal que $x(p,t) = x(p,q(t),t)$, para todo $p \in \mathcal{B}$ e $t \in \mathcal{I}$.

Então, para cada $p \in \mathcal{B}$ definimos uma aplicação de $\mathcal{G}x\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{E}$ dada pelos valores de $x(p,q,t)$. É conveniente introduzirmos uma nova função $\dot{x}$ de $\mathcal{G}x\mathcal{R}^M x\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{V}$ dada pela regra

$$\dot{x}(p,q,\dot{q},t) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t} + \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t} \right)(p - p_i)$$

onde $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_M)$ é um vetor qualquer de $\mathcal{R}^M$. Observe que, se x é um movimento que satisfaz aos vínculos, então:

$$\dot{x}(p,q(t),\dot{q}(t),t) = \frac{d}{dt} x(p,t).$$

Uma vez que $x(p,q,t) = y_i(q,t) + Q_i(q,t)(p - p_i)$, é conveniente reescrevermos a expressão acima como

$$\dot{x}(p,q,\dot{q},t) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t} + $$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t}\right) Q_i^T (x(p,q,t) - y_i(q,t)),$$

ou ainda,

$$\dot{x}(p,q,\dot{q},t) = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial y_i}{\partial t} + $$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} Q_i^T \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t} Q_i^T\right)(x(p,q,t) - y_i(q,t)).$$

Como

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} Q_i^T + \frac{\partial Q_i}{\partial t} Q_i^T$$

é antissimétrico, convencionaremos chamá-lo de <u>velocidade angular generalizada</u> do elemento $\mathcal{B}_i$, e podemos representar o segundo membro da direita por:

$$\left(\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} Q_i^T \dot{q}_k + \frac{\partial Q_i}{\partial t} Q_i^T\right)(x(p,q,t) - y_i(q,t)) =$$
$$= w_i(q,\dot{q},t) \wedge (x(p,q,t) - y_i(q,t)).$$

<u>Definição</u>: A função $K_i: G \times \mathbb{R}^M \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$K_i(q,\dot{q},t) = \int_{\mathcal{B}_i} \frac{1}{2} \dot{x}(p,q,\dot{q},t)^2 \rho \, dV$$

é a <u>energia cinética generalizada</u> de $\mathcal{B}_i$ e,

$$K(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} K_i(q,\dot{q},t)$$

é a <u>energia cinética generalizada</u> de $\mathcal{B}$.

É evidente que a cada curva $q(t)$ corresponde um movimento de $\mathcal{B}$ suportado por determinado sistema de forças.

O nosso problema aqui consiste no oposto: impomos certas restrições aos sistemas de forças concebíveis para determinado corpo e nosso trabalho consiste em determinar quais os movimentos que são compatíveis com estas restrições. Aqui é conveniente vermos $F_t^{y_i}$ e $M_t^{y_i}$ dados pelas famílias $\{f_j(t),\ x_j(t)\}$ caracterizadas por regras como:

(i) ou nos dão precisamente as f_j como função da configuração $(q_1, \ldots, q_M)$ (e, eventualmente de $t, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_M$),

(ii) ou nos indicam a posição e direção das f_j para cada configuração $(q_1, \ldots, q_M, t)$.

<u>Definição</u>: Selecione uma configuração (q,t). A cada coordenada generalizada q_k corresponde uma força generalizada G_k definida como uma "projeção do sistema de forças nos eixos naturais":

$$G_k = \sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} f_j \cdot \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k}$$

Acidentalmente, tal expressão poderá depender de certos parâmetros, uma vez que nem todas as f_j precisam ser função da configuração.

Suponha agora que tal sistema suporta um movimento dado por $(q(t),t)$. Observe que

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} Q_i^T (x - y_i) = \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial Q_i}{\partial q_k}(p - p_i) = \frac{\partial x}{\partial q_k},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_k} = \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k \partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial q_k \partial t}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k \partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial q_k \partial t}\right)(p - p_i) =$$

$$= \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_k}\ .^*$$

Desta forma podemos escrever:

$$G_k(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} f_j \cdot \frac{\partial \dot{x}_j(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} =$$

---

* - Os argumentos foram omitidos apenas para simplificação das expressões.

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big(\sum_{\mathcal{B}_i} f_j \cdot \frac{\partial \dot{y}_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} +$$

$$+ \sum_{\mathcal{B}_i} f_j \cdot \frac{\partial w_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} \wedge (x_j(q,t) - y_i(q,t)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big(F_t^{y_i}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i^e) \cdot \frac{\partial \dot{y}_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} +$$

$$+ M_t^{y_i}(\mathcal{B}_i,\mathcal{B}_i^e) \cdot \frac{\partial w_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} \Big) .$$

A partir do resultado acima, segue:

$$G_k(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{B}_i} \ddot{x}(p,t)\rho \, dV \cdot \frac{\partial \dot{y}_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{B}_i} (x_j(q,t)-y_i(q,t))\wedge \ddot{x}(p,t)\rho \, dV . \frac{\partial w_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k},$$

que, desenvolvendo fornece

$$G_k(q,\dot{q},t) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathcal{B}_i} \ddot{x}(p,t) \cdot \frac{\partial \dot{x}(p,q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} \rho \, dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}(p,q,\dot{q},t) . \frac{\partial \dot{x}(p,q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} \rho \, dV -$$

$$- \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}(p,q,\dot{q},t) . \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{x}(p,q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} \rho \, dV =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{d}{dt} \frac{\partial K_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K_i(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} \Big) .$$

que são as <u>equações de Lagrange</u> do movimento em coordenadas generalizadas:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} = G_k(q,\dot{q},t), \qquad k = 1, \ldots, M.$$

Este é um sistema de M equações envolvendo os pontos $q = (q_1, \ldots, q_M)$ e suas derivadas. Do ponto de vista prático, toda a dificuldade em escrever tal sistema reside na determinação das G_k. E esta tarefa é simplificada no caso de "vinculação ideal" quando as "forças de vínculo" fornecem uma contribuição nula para a composição das G_k. Nisto reside todo o poder da formulação Lagrangeana. Preferimos não listar os casos clássicos de "vinculação ideal".

Seja $c_i(q,t)$ a posição do centro de massa da componente $\mathcal{B}_i$ de $\mathcal{B}$, no movimento x. Podemos então escrever

$$K_i(q,\dot{q},t) = \frac{1}{2}\left(m(\mathcal{B}_i)\dot{c}_i(q,\dot{q},t)^2 + \right.$$
$$\left. + I^{c_i}(q,t)w_i(q,\dot{q},t) \cdot w_i(q,\dot{q},t)\right),$$

onde $I^{c_i}(q,t)$ é o tensor de inércia de $\mathcal{B}_i$ em relação a seu centro de massa, na configuração (q,t). Então,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K_i}{\partial q_k} = \left(\frac{d}{dt}\left(m\dot{c}_i \cdot \frac{\partial \dot{c}_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - m\dot{c}_i \cdot \frac{\partial \dot{c}_i}{\partial q_k} \right) +$$
$$+ \left(\frac{d}{dt} I^{c_i} w_i \cdot \frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} I^{c_i} w_i \cdot w_i \right) =$$
$$= m\ddot{c}_i \cdot \frac{\partial \dot{c}_i}{\partial \dot{q}_k} + \left(I^{c_i}\dot{w}_i - I^{c_i}w_i \wedge w_i\right) \cdot \frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} +$$
$$+ I^{c_i}w_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} I^{c_i} w_i \cdot w_i .$$

Mas, como $\frac{1}{2} I^{c_i} w_i \cdot w_i = \int_{\mathcal{B}_i} \frac{1}{2} \dot{x}_{c_i}^2 \rho \, dV$, então

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \frac{1}{2} I^{c_i} w_i \cdot w_i = \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}_{c_i} \cdot \frac{\partial \dot{x}_{c_i}}{\partial q_k} \rho \, dV =$$
$$= \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}_{c_i} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \dot{x}_{c_i}}{\partial \dot{q}_k} \rho \, dV =$$
$$= \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}_{c_i} \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(w_i \wedge x_{c_i}\right) \rho \, dV =$$
$$= \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}_{c_i} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} \wedge x_{c_i}\right) \rho \, dV =$$
$$= \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}_{c_i} \cdot \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k}\right) \wedge x_{c_i} \rho \, dV +$$
$$+ \int_{\mathcal{B}_i} \dot{x}_{c_i} \cdot \frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} \wedge \dot{x}_{c_i} \rho \, dV =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot \int_{\mathcal{B}_i} x_{c_i} \wedge \dot{x}_{c_i} \rho \, dV =$$
$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial w_i}{\partial \dot{q}_k} \cdot I^{c_i} w_i .$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K_i(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} = m(B_i)\frac{d^2}{dt^2}c_i(q,t).\frac{\partial \dot{c}_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} +$$

$$+ (I^{c_i}(q,t)\frac{d}{dt}w_i(q,\dot{q},t) - I^{c_i}(q,t)w_i(q,\dot{q},t) \wedge$$

$$\wedge\, w_i(q,\dot{q},t)) . \frac{\partial w_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} .$$

Definimos então:

$$F_i^*(t) = -\, m(B_i)\frac{d^2}{dt^2}c_i(q,t),$$

$$M_i^*(t) = -\, (I^{c_i}(q,t)\frac{d}{dt}w_i(q,\dot{q},t) -$$

$$- I^{c_i}(q,t)w_i(q,\dot{q},t) \wedge w_i(q,\dot{q},t))$$

como a <u>força de inércia</u> e o <u>torque de inércia</u> da componente B_i de B no movimento x, respectivamente, e reescrevemos as equações de Lagrange como:

$$\sum_{i=1}^{N}\Big[\big(F_i^*(t).\frac{\partial \dot{c}_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} + M_i^*(t).\frac{\partial w_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k}\big) +$$

$$+ \big(F_t^{y_i}(B_i,B_i^e).\frac{\partial \dot{y}_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} + M_t^{y_i}(B_i,B_i^e).\frac{\partial w_i(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k}\big)\Big] =$$

$$= 0, \qquad k = 1, \ldots, M.$$

Suponha agora que procuramos uma solução do problema na classe de curvas que satisfaz restrições cinemáticas não integráveis da forma:

$$\sum_{k=1}^{M} a_{ek}(q,t)\dot{q}_k(t) + a_e(q,t) = 0, \qquad e = 1, \ldots, S. \quad (\S)$$

O que se quer modelar é o caso em que as "forças de vínculo" contribuem para cada G_k em geral, mas de tal modo que o "trabalho elementar virtual global" é nulo quando as relações cinemáticas são satisfeitas. Esclarecendo melhor, escrevamos o sistema de forças em B_i pondo $f_j = g_j + h_j$, onde h_j corresponde às "forças reativas". Se q e q' são duas curvas tais que, no instante

t, $q(t) = q'(t)$ e se $\delta q = \dot{q}(t) - \dot{q}'(t)$, então por (§), vemos que δq satisfaz:

$$\sum_{k=1}^{M} a_{ek}(q,t)\,\delta q_k = 0, \qquad e = 1, \ldots, S.$$

A idéia de que o "trabalho elementar virtual global" é nulo se expressa pela seguinte hipótese:

<u>Hipótese</u>: Os S vetores $(a_{e1}, \ldots, a_{eM})$ são independentes e

$$\sum_{k=1}^{M} a_{ek}(q,t)\,\delta q_k = 0 \ (e = 1, \ldots, S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} \sum_{k=1}^{M} h_j \cdot \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k}\,\delta q_k = 0.$$

Mas, esta última expressão pode ser escrita como:

$$\sum_{k=1}^{M} \Big(\sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} h_j \cdot \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} \Big)\,\delta q_k = \sum_{k=1}^{M} Q_k\,\delta q_k.$$

Da hipótese feita concluimos que, se avaliamos Q_k na solução $q(t)$ do problema, então:

$$Q_k(t) = \sum_{e=1}^{S} \lambda_e(t)\,a_{ek}(q,t),$$

com $\lambda_e(t)$ unicamente determinados, e as equações de Lagrange se escrevem:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial K(q,\dot{q},t)}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} (g_j + h_j) \cdot \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} g_j \cdot \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} + Q_k(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{B_i} g_j \cdot \frac{\partial x_j(q,t)}{\partial q_k} + \sum_{e=1}^{S} \lambda_e(t)\,a_{ek}(q,t).$$

Este é um sistema de M equações com M + S incógnitas ... $(q_1, \ldots, q_N, \lambda_1, \ldots, \lambda_S)$, que se resolve levando em consideração as S equações em (§).

Como um exercício, mostremos que as equações de Euler do movimento rígido podem ser deduzidas a partir das equações de Lagrange. Seja $\mathcal{B}$ um corpo rígido com um ponto fixo $o \in \mathcal{E}$, $\{n_1, n_2, n_3\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e q_1, q_2, q_3 as coordenadas generalizadas. Suponha que

$$\frac{\partial Q}{\partial q_3} n_3 = 0,$$

Ou, equivalentemente,

$$\frac{\partial Q}{\partial q_3} Q^T Q n_3 = 0.$$

Observe que $\frac{\partial Q}{\partial q_3} Q^T$ é antissimétrica e que Qn_3 acompanha o corpo.

Em palavras, estamos supondo que uma das coordenadas generalizadas é um giro em torno de um eixo fixo no corpo. E é evidente que q_3 pode ser sempre ajustado de modo que

$$\frac{\partial Q}{\partial q_3} n_1 = Qn_2 \quad e \quad \frac{\partial Q}{\partial q_3} n_2 = -\,Qn_1.$$

A velocidade angular w de $\mathcal{B}$ será dada então por

$$w = (\dot{Q}Q^T)_{32} Qn_1 + (\dot{Q}Q^T)_{13} Qn_2 + (\dot{Q}Q^T)_{21} Qn_3$$

Assuma que Qn_1, Qn_2 e Qn_3 são os eixos principais de inércia do corpo $\mathcal{B}$. A energia cinética K de $\mathcal{B}$ se escreve:

$$K = \frac{1}{2}(I_1\, w_1^2 + I_2\, w_2^2 + I_3\, w_3^2),$$

onde I_i são os momentos principais de inércia. Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial K}{\partial q_3} = \frac{d}{dt}\left(I_1 w_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial \dot{q}_3} + I_2 w_2 \cdot \frac{\partial w_2}{\partial \dot{q}_3} + I_3 w_3 \cdot \frac{\partial w_3}{\partial \dot{q}_3}\right) -$$
$$- \left(I_1 w_1 \cdot \frac{\partial w_1}{\partial q_3} + I_2 w_2 \cdot \frac{\partial w_2}{\partial q_3} + I_3 w_3 \cdot \frac{\partial w_3}{\partial q_3}\right).$$

Se desenvolvermos as expressões para os w_i:

$$w_1 = (\dot{Q}Q^T)_{32} = ((\dot{Q}Q^T)Qn_2)\cdot Qn_3 = ((\dot{Q}Q^T)^T Qn_3)\cdot Qn_2 =$$
$$= -\,((\dot{Q}Q^T)Qn_3)\cdot Qn_2 = -\,\dot{Q}n_3 \cdot Qn_2 =$$
$$= -\,\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial Q}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)n_3\right)\cdot Qn_2 =$$

$$= -\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_3\right).Qn_2 .$$

$$w_2 = (\dot{Q}Q^T)_{13} = ((\dot{Q}Q^T)Qn_3).Qn_1 = \dot{Q}n_3.Qn_1 =$$

$$=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial Q}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)n_3\right).Qn_1 =$$

$$=\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_3\right).Qn_1 .$$

$$w_3 = (\dot{Q}Q^T)_{21} = ((\dot{Q}Q^T)Qn_1).Qn_2 = \dot{Q}n_1.Qn_2 =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial Q}{\partial q_3}\dot{q}_3\right)n_1\right).Qn_2 =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_1\right).Qn_2 + \dot{q}_3 .$$

Então,

$$\frac{\partial w_1}{\partial \dot{q}_3} = 0;$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \dot{q}_3} = 0;$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial \dot{q}_3} = 1;$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial q_3} = -\left(\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 Q}{\partial q_2 \partial q_3}\dot{q}_2\right)n_3\right).Qn_2 -$$

$$- \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_3\right).\frac{\partial Q}{\partial q_3}n_2 =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_3\right).Qn_1 = w_2 .$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial q_3} = \left(\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 Q}{\partial q_2 \partial q_3}\dot{q}_2\right)n_3\right).Qn_1 +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_3\right).\frac{\partial Q}{\partial q_3}n_1 =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_3\right).Qn_2 = - w_1 .$$

$$\frac{\partial w_3}{\partial q_3} = \left(\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 Q}{\partial q_2 \partial q_3}\dot{q}_2\right)n_1\right).Qn_2 +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_1\right) . \frac{\partial Q}{\partial q_3}n_2 =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_2\right) . Qn_2 +$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}\dot{q}_2\right)n_1\right) . (-Qn_1) =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}Q^T\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}Q^T\dot{q}_2\right)Qn_2\right) . Qn_2 -$$

$$- \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial q_1}Q^T\dot{q}_1 + \frac{\partial Q}{\partial q_2}Q^T\dot{q}_2\right)Qn_1\right) . Qn_1 = 0,$$

pois cada termos da equação de $\frac{\partial w_3}{\partial q_3}$ é componente da diagonal principal de um tensor antissimétrico. Concluimos então que:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial K}{\partial q_3} = I_3\dot{w}_3 - (I_1 - I_2)w_1w_2.$$

A força generalizada para a coordenada q_3 é:

$$G_3 = \sum_{B} f_j . \frac{\partial x_j}{\partial q_3} = \sum_{B} f_j . \frac{\partial r_j}{\partial q_3}$$

onde r_j é o vetor posição de x_j em relação ao ponto fixo $o \in E$ e f_j a força aplicada em $r_j = Qr_j^o$, sendo r_j^o o vetor posição da partícula na configuração inicial. Então,

$$G_3 = \sum_{B} f_j . \frac{\partial Q}{\partial q_3}r_j^o = \sum_{B}\left(\frac{\partial Q}{\partial q_3}(r_{j1}^o n_1 + r_{j2}^o n_2 + r_{j3}^o n_3)\right) . f_j =$$

$$= \sum_{B}(r_{j1}^o Qn_2 - r_{j2}^o Qn_1) . f_j = \sum_{B} r_{j1}^o f_{j2} + r_{j2}^o f_{j1},$$

onde f_{j1} e f_{j2} são as projeções de f_j nos eixos Qn_1 e Qn_2, respectivamente. Como o momento de em relação a $o \in E$ é dado por $M_t^o = \sum_{B} r_j \wedge f_j$, e $M_t^o . Qn_3 = \sum_{B}\left(r_{j1}^o f_{j2} - r_{j2}^o f_{j1}\right)$, temos a equação de Euler para a coordenada q_3:

$$M_3^o = I_3\dot{w}_3 - (I_1 - I_2)w_1w_2.$$

APÊNDICE

1. Introdução

Considere um corpo rígido $\mathcal{B}$ que se move com um ponto fixo $o \in E$, onde E é o espaço euclidiano, tridimensional. A demonstração de que o campo de velocidades dos pontos de $\mathcal{B}$ é dado pela expressão $\dot{p} = w \wedge r_p$, onde r_p é o vetor posição de p em relação a o e w é o vetor velocidade angular, não é satisfatória na maioria dos textos elementares de Mecânica. E, também, a existência de outros pontos de $\mathcal{B}$ que estão instantaneamente parados não é tão óbvia assim.

Kane[2], por exemplo, analisa o problema tomando um triedro direto I,J,K fixo no corpo e, definindo a velocidade angular por:

$$w = (\dot{J}.K)I + (\dot{K}.I)J + (\dot{I}.J)K.$$

Da hipótese de rigidez; I.I = 1 e I.K = 0, conclui-se que

$$\dot{I}.I = 0 \text{ e } \dot{I}.K = - I.\dot{K}.$$

Então,

$$w \wedge I = - (\dot{K}.I)K + (\dot{I}.J)J = (\dot{I}.J)J + (\dot{I}.K)K = \dot{I}\ .$$

Analogamente,

$$w \wedge J = \dot{J} \quad \text{e} \quad w \wedge K = \dot{K}\ .$$

Desta forma, w é determinado pelo conhecimento de $\dot{I}$, $\dot{J}$ e $\dot{K}$ e, é claro que $\dot{p} = w \wedge r_p$, para todo $p \in \mathcal{B}$. Note que tal expressão tão simples (à primeira vista) de w requer o conhecimento das velocidades dos pontos de vetor posição I, J e K.

A seguinte expressão fornece o vetor velocidade angular a partir do conhecimento das velocidades de apenas outros dois pontos de $\mathcal{B}$, com vetores posição r_a e r_b:

$$w = \frac{\dot{r}_a \wedge \dot{r}_b}{\dot{r}_a \cdot r_b} .$$

Observe que esta expressão não faz sentido se $\dot{r}_a \cdot r_b = 0$ (ou equivalentemente se $\dot{r}_b \cdot r_a = 0$), o que pode ocorrer mesmo quando r_a e r_b não são linearmente independentes (caso r_a e r_b sejam linearmente dependentes, então $\dot{r}_a \cdot r_b = 0$).

Se r_c é o vetor posição de um ponto c qualquer de $\mathcal{B}$, vemos que, se a expressão de w acima faz sentido, então r_a, r_b e $r_a \wedge r_b$ são uma base de $\mathcal{V}$ e podemos escrever:

$$r_c = c_1 r_a + c_2 r_b + c_3 (r_a \wedge r_b),$$

que derivada em relação ao tempo nos dá $\dot{r}_c$ em função das velocidades de a e b.

Mostraremos neste apêndice que basta o conhecimento da velocidade de dois outros pontos p e q de $\mathcal{B}$, com a única restrição de que r_p e r_q sejam linearmente independentes, para se obter a velocidade angular w (e assim o campo de velocidades de $\mathcal{B}$) via uma expressão que faz sentido sem outra hipótese adicional.

2. Existência de w

Sejam p e q dois pontos de $\mathcal{B}$, com seus vetores posição r_p e r_q linearmente independentes, e suponha que exista $w \in \mathcal{V}$ tal que $\dot{r}_p = w \wedge r_p$ e $\dot{r}_q = w \wedge r_q$. Assim, o vetor posição de qualquer ponto $u \in \mathcal{B}$ pode ser escrito como:

$$r_u = u_1 r_p + u_2 r_q + u_3 (r_p \wedge r_q),$$

com u_1, u_2 e u_3 constantes pela hipótese de rigidez.

A velocidade $\dot{r}_u$ de u será então dada por:

$$\dot{r}_u = u_1 \dot{r}_p + u_2 \dot{r}_q + u_3 (\dot{r}_p \wedge r_q + r_p \wedge \dot{r}_q).$$

Porém,

$$w \wedge r_u = u_1 (w \wedge r_p) + u_2 (w \wedge r_q) + u_3 (w \wedge (r_p \wedge r_q)) =$$

$$= u_1\dot{r}_p + u_2\dot{r}_q + u_3(w \wedge (r_p \wedge r_q)).$$

Uma vez que

$$a \wedge (b \wedge c) = (a.c)b - (a.b)c,$$

concluimos que

$$\begin{aligned} w \wedge (r_p \wedge r_q) &= (w.r_q)r_p - (w.r_p)r_q = \\ &= (w.r_q)r_p - (r_p.r_q)w + (r_p.r_q)w - \\ &\quad - (w.r_p)r_q = \\ &= r_q \wedge (r_p \wedge w) + r_p \wedge (w \wedge r_q) = \\ &= \dot{r}_p \wedge r_q + r_p \wedge \dot{r}_q \,. \end{aligned}$$

Assim, $\dot{r}_u = w \wedge r_u$, para todo $u \in \mathcal{B}$.

Desta forma, o problema da existência da velocidade angular se reduz a demonstrar que sempre é possível determinar w tal que as expressões $\dot{r}_p = w \wedge r_p$ e $\dot{r}_q = w \wedge r_q$ (com r_p e r_q linearmente independentes) sejam corretas para dois pontos p e q de $\mathcal{B}$.

Primeiro, vamos demonstrar que se um corpo rígido $\mathcal{B}$ tem um ponto fixo $o \in E$, então haverá outros pontos de $\mathcal{B}$ instantaneamente parados, utilizando para isto apenas conceitos elementares de cálculo. Assuma que uma esfera S centrada em o está contida em $\mathcal{B}$. Então, pontos diametralmente opostos a e b têm velocidades simétricas: se $r_a = aI$ (o vetor I é fixo no corpo), então $r_b = -aI$ e assim $\dot{r}_a = a\dot{I} = -\dot{r}_b$.

Só não é trivial o caso em que $\dot{r}_a \neq 0$. Considere a circunferência interseção da esfera S com o plano π ortogonal a $\dot{r}_a$ e contendo o. Escolha $J \in \pi$, $J \neq 0$, tal que J seja ortogonal a I. Então J e I fornecem uma base para π. Da hipótese de rigidez, J.J = constante e J.I = 0, conclui-se que

$$\dot{J}.J = 0 \quad \text{e} \quad \dot{J}.I + J.\dot{I} = 0 = \dot{J}.I,$$

pois $\dot{I}$ é perpendicular a π no instante considerado. Desta for ma, se K é um vetor perpendicular a Π (K é paralelo a $\dot{I}$), a velocidade de qualquer ponto $s \in S \cap \Pi$ é dada por $\dot{r}_s = v_s K$. Em particular, para os pontos a e b, temos $v_a = - v_b$ e, por continuidade, v_s se anula em pelo menos dois pontos (diametralmente opostos) da circunferência $S \cap \Pi$.

Assim, escolha w segundo a reta definida por o e pelo ponto $s \in S \cap \Pi$ que tem velocidade nula e tal que $w \wedge r_b = \dot{r}_b$. Tal vetor w satisfaz às condições:

(i) $w \wedge r_s = \dot{r}_s$;

(ii) $w \wedge r_b = \dot{r}_b$;

com r_s e r_b linearmente independentes. E portanto, $\dot{r}_c = w \wedge r_c$, para todo ponto c de $\mathcal{B}$.

3. Uma Fórmula para w

Demonstraremos construtivamente agora como determinar w em função das velocidades de dois pontos p e q de $\mathcal{B}$, cujos vetores posição são linearmente independentes.

Da hipótese de rigidez segue:

$$\dot{r}_p \cdot r_p = \dot{r}_q \cdot r_q = 0,$$

$$\dot{r}_p \cdot r_q + r_p \cdot \dot{r}_q = 0.$$

Escolha um vetor k tal que $k \wedge r_p = \dot{r}_p$. Para todo β real teremos $(k + \beta r_p) \wedge r_p = \dot{r}_p$. Nosso objetivo é determinar β tal que $(k + \beta r_p) \wedge r_q = \dot{r}_q$. Como não é evidente que tal β exista, vamos nos contentar em escolher um β ótimo no sentido de que o quadrado do módulo do vetor $v_\beta = ((k + \beta r_p) \wedge r_q - \dot{r}_q)$ seja mínimo. Derivando-se v_β^2 em relação a β, a condição de mínimo é dada por:

$$((k + \beta r_p) \wedge r_q - \dot{r}_q) \cdot (r_p \wedge r_q) = 0$$

e,

$$\beta = - \frac{(k \wedge r_q - \dot{r}_q) \cdot r_p \wedge r_q}{(r_p \wedge r_q)^2} .$$

Para este valor de β, o valor de v_β é:

$$v_\beta = \left\{ k - \left(\frac{(k \wedge r_q - \dot{r}_q) \cdot r_p \wedge r_q}{(r_p \wedge r_q)^2}\right) r_p \right\} \wedge r_q - \dot{r}_q =$$

$$= (k \wedge r_q - \dot{r}_q) - ((k \wedge r_q - \dot{r}_q) . r_p \wedge r_q) \frac{r_p \wedge r_q}{(r_p \wedge r_q)^2} .$$

Mas a componente de $(k \wedge r_q - \dot{r}_q)$ no plano gerado por r_p e r_q é zero:

$$(k \wedge r_q - \dot{r}_q) \cdot r_q = 0;$$

$$(k \wedge r_q - \dot{r}_q) \cdot r_p = k \wedge r_q . r_p - r_p . \dot{r}_q =$$

$$= - k \wedge r_p . r_q - r_p . \dot{r}_q =$$

$$= - (\dot{r}_p . r_q + r_p . \dot{r}_q) = 0.$$

Concluimos então que $v_\beta = 0$ e w está determinado:

$$w = \left\{ k - \left(\frac{(k \wedge r_q - \dot{r}_q) \cdot (r_p \wedge r_q)}{(r_p \wedge r_q)^2}\right) r_p \right\} .$$

BIBLIOGRAFIA

1 - Goldstein, H. - Classical Mechanics, Reading, Addison--Wesley, 1950.

2 - Kane, T.R. - Dynamics, New York, Holt,Rinehart and Winston Inc., 1968.

3 - Martins, L.C. - Uma Formalização da Mecânica Clássica dos Corpos Rígidos, Tese M.Sc., COPPE-UFRJ, 1970.

4 - Gurtin, M.E. - Modern Continuum Thermodynamics, in Mechanics Today, vol.1, S.Nemat-Nasser eds., 168-213, 1972.