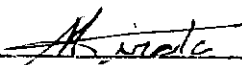


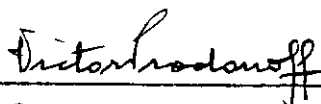
COMPORTAMENTO HIDRODINÂMICO DE
QUEBRA-MARES FLUTUANTES

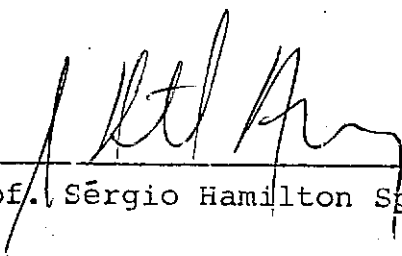
Oswaldo Antunes Pedrosa Junior


TÉSE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:


Prof. Miguel Hiroo Hirata


Prof. Victor Prodönoff


Prof. Sérgio Hamilton Sphaier


Prof. Luiz Carlos Martins

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1980

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Miguel Hiroo Hirata, pela orientação e incentivo ao presente trabalho.

Aos professores do Programa de Engenharia Mecânica, pelos ensinamentos recebidos.

À PETROBRÁS/CENPES e à COPPE/UFRJ, por terem dado a oportunidade de desenvolver este trabalho.

SINOPSE

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de um modelo matemático bidimensional para avaliação do desempenho hidrodinâmico de quebra-mar flutuante rígido, de geometria uniforme, operando sob condições de mar regular.

Na solução do modelo matemático é empregado o método de distribuição de fontes no contorno submerso do corpo.

O trabalho desenvolvido permite determinar os principais parâmetros de interesse na análise do comportamento hidrodinâmico de dispositivos de atenuação de ondas. Assim, podem ser obtidos o coeficiente de transmissão ou a eficiência do quebra-mar flutuante, as cargas hidrodinâmicas atuantes no corpo e os movimentos do dispositivo.

Os resultados obtidos para o coeficiente de transmissão e as amplitudes dos movimentos de um corpo de seção transversal retangular são comparadas com dados experimentais provenientes de testes com modelos reduzidos, tendo sido observada boa correspondência entre ambos.

Também são apresentados resultados teóricos para modelo de quebra-mar tipo catamaran e analisado o problema de frequências irregulares quando se emprega o método de distribuição de fontes.

SUMMARY

In this paper we present a two-dimensional mathematical model to study the performance of a rigid floating break water with uniform geometry and operating under regular wave conditions.

To solve the hydrodynamic problem one distributes sources on the body contour and then formulates an integral equation which is solved numerically.

Our goal is to obtain the most important parameters in the analysis of a wavebreaker, that are the transmission coefficient, the hydrodynamic loads and the motions of the body.

The numerical results for the transmission coefficient and the motions of a body with rectangular cross section were compared with available test data and they showed a good agreement.

The numerical results for a catamaran cross section and the irregular frequency phenomenon are presented too.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....</u>	1
<u>CAPÍTULO II - IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA.....</u>	12
II.1 - Considerações Preliminares.....	12
II.2 - Hipóteses Simplificadoras.....	20
<u>CAPÍTULO III - MODELAÇÃO DO PROBLEMA HIDRODINÂMICO.....</u>	28
III.1 - Formulação do Problema Geral de Valor de Contorno.....	28
III.2 - Linearização do Problema.....	31
III.3 - Problemas Hidrodinâmicos Linearizados.....	34
<u>CAPÍTULO IV - SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO.....</u>	44
IV.1 - Solução do Problema de Difração.....	44
IV.2 - Solução do Problema de Radiação.....	54
<u>CAPÍTULO V - MOVIMENTOS DO CORPO.....</u>	60
V.1 - Força de Inércia.....	60
V.2 - Força de amortecimento.....	63
V.3 - Força de Restauração.....	65

	<u>Pág.</u>
V.4 - Força de Excitação.....	68
V.5 - Equações do Movimento.....	68
<u>CAPÍTULO VI - COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO.....</u>	72
VI.1 - Onda de Difração.....	73
VI.2 - Ondas de Radiação.....	76
VI.3 - Coeficiente de Transmissão Total.....	79
<u>CAPÍTULO VII - FREQUÊNCIA IRREGULAR.....</u>	81
<u>CAPÍTULO VIII - ANÁLISE DOS RESULTADOS.....</u>	86
<u>APÊNDICE.....</u>	123
<u>BIBLIOGRAFIA.....</u>	137

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A utilização de barreiras flutuantes para atenuação de ondas em mares, lagos e rios não é recente. No entanto, somente a partir da Segunda Guerra Mundial foi que o assunto ganhou maior destaque, em virtude do emprego do quebra-mar flutuante, denominado Bombardon, para auxiliar o desembarque de tropas aliadas na costa da Normandia em 1944.

Nos dias de hoje existe um número bastante elevado dos mais diferentes tipos de dispositivos de amortecimento de ondas para atender a diversas finalidades.

O quebra-mar flutuante surgiu como uma opção para a proteção de costas, portos e estruturas marítimas, em condições em que a construção de barreiras fixas torna-se impraticável ou extremamente dispendiosa.

Os quebra-mares convencionais fixos, que se estendem desde o fundo do mar até a superfície, oferecem excelente proteção contra a ação das ondas, porém têm seu emprego limitado a águas rasas. Seu custo cresce acentuadamente com a profundidade.

Por outro lado, os quebra-mares flutuantes constituem dispositivos de grande versatilidade operacional, pois praticamente não possuem nenhuma limitação quanto à profundidade das

águas, são construídos em terra e transportados para o local de utilização, podem ser removidos sem maiores dificuldades de uma locação para outra e apresentam relativa facilidade de instalação.

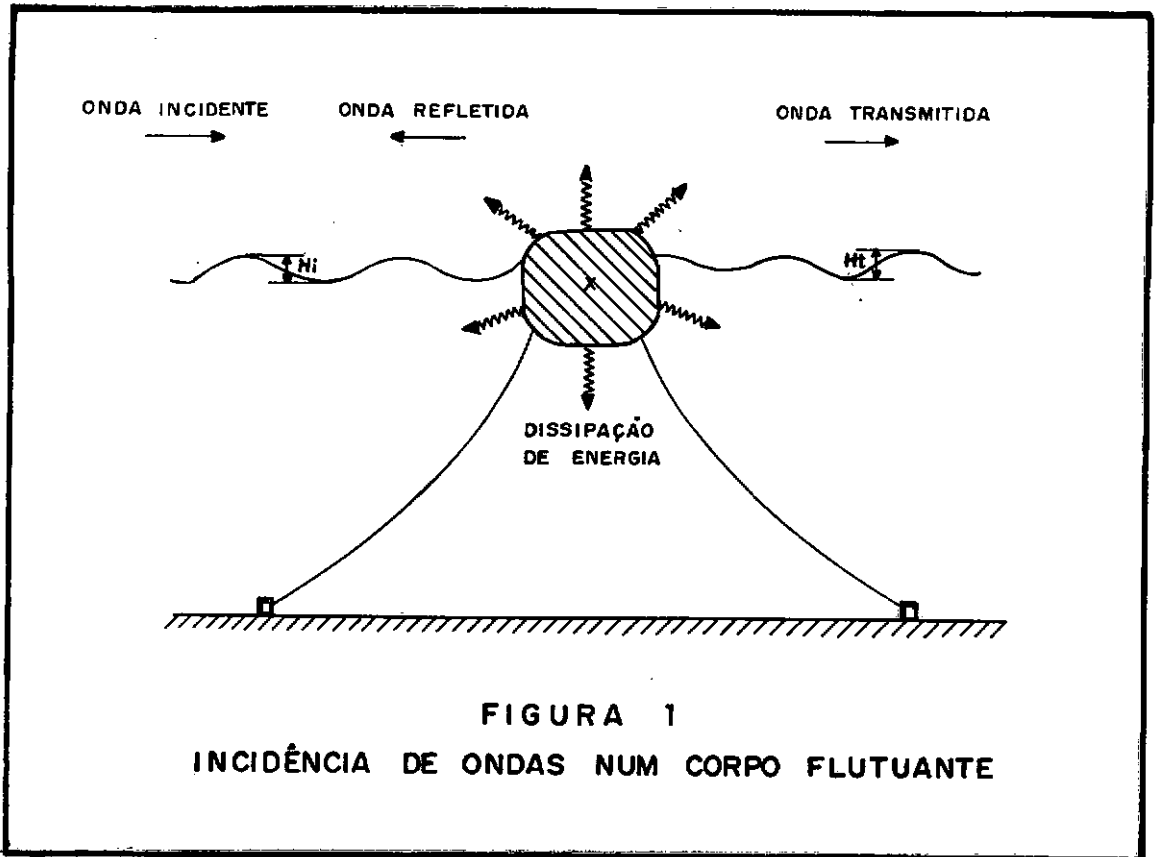
Além disso, não provocam nenhum desequilíbrio ecológico no ambiente marítimo, já que não interferem nas trajetórias de migração de peixes e na circulação natural das águas onde são instalados.

Esses dispositivos são encontrados nos mais diferentes ramos da atividade humana no mar, podendo seu emprego ser destacado para:

- finalidade militar, possibilitando o desembarque seguro de tropas e equipamentos na costa;
- atividade de exploração petrolífera, na proteção de plataformas e navios-sondas de perfuração de petróleo;
- proteção de portos e terminais marítimos;
- construção e instalação de estruturas no mar.

Em linhas gerais, o quebra-mares flutuantes são estruturas rígidas ou flexíveis, parcial ou totalmente submersas, dotadas de sistemas de ancoramento, sujeitas a movimentos oscilatórios de translação e rotação. Sua ação no amortecimento das on

das explica-se basicamente pelo fato de que a energia das ondas se encontra mais fortemente concentrada na região próxima à superfície livre.



Na análise do comportamento hidrodinâmico de um quebra-mar flutuante torna-se necessário conhecer a relação entre a altura da onda transmitida e a altura da onda incidente, denominada coeficiente de transmissão e representada por:

$$C_t = \frac{H_t}{H_i}$$

Também o coeficiente de reflexão das ondas é um parâmetro útil na quantificação das características hidrodinâmicas

de um quebra-mar. É normalmente definido por:

$$C_r = \frac{H_r}{H_i}$$

sendo H_r a altura da onda refletida.

Pelo princípio da conservação da energia, podemos afirmar que:

$$(\text{energia da onda transmitida}) + (\text{energia da onda refletida}) + (\text{energia dissipada}) = (\text{energia da onda incidente}).$$

Como a energia de uma onda é proporcional ao quadrado de sua altura, teremos:

$$\left(\frac{H_t}{H_i}\right)^2 + \left(\frac{H_r}{H_i}\right)^2 + \left(\frac{H_d}{H_i}\right)^2 = 1$$

sendo H_d a altura de uma onda com energia igual à energia dissipada.

O coeficiente de redução de ondas é normalmente de finido por:

$$C_o = 1 - C_t,$$

enquanto que a eficiência de um quebra-mar flutuante é melhor de finida como sendo:

$$E_f = 1 - C_t^2 ,$$

já que essa relação está diretamente associada à atenuação da energia da onda incidente.

Richey e Nece⁽¹⁾ agruparam os modelos de quebra-mares flutuantes existentes de acordo com suas características construtivas. Alguns tipos estão representados na figura a seguir.

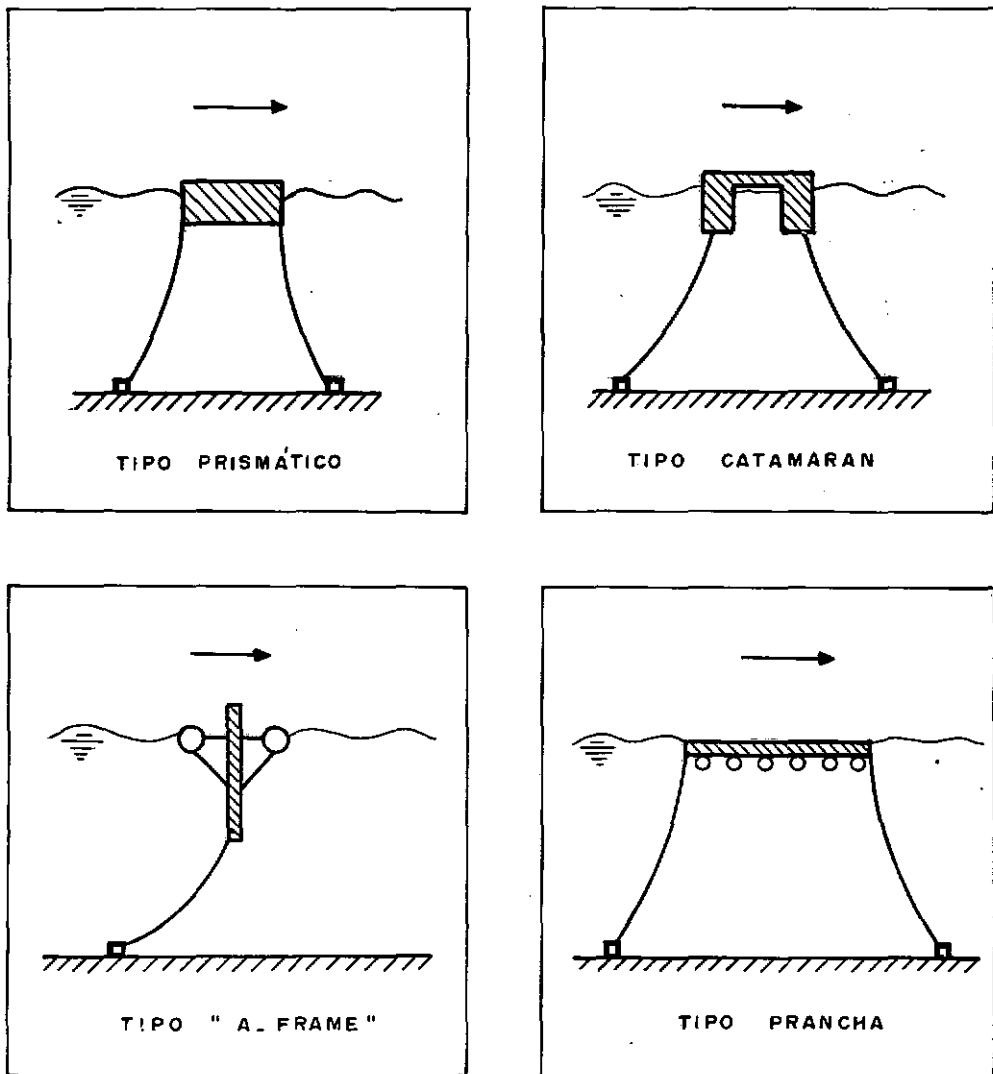


FIGURA 2

TIPOS DE QUEBRA-MARES FLUTUANTES

Os principais mecanismos responsáveis pela atenuação das ondas em quebra-mares flutuantes podem ser considerados como sendo:

- reflexão das ondas incidentes;
- interferência entre as ondas geradas pelos movimentos do corpo e as ondas incidentes;
- transformação do movimento orbital das partículas do meio fluido em turbulência, com consequente dissipação energética;
- dissipação de energia por atrito viscoso.

A influência em maior ou menor grau de qualquer dos mecanismos de amortecimento de ondas expostos depende basicamente dos tipos e das características do quebra-mar.

Uma barreira rígida e fixa promove a atenuação das ondas devido preponderantemente ao efeito de reflexão da onda incidente. Sua eficiência depende fundamentalmente de sua altura abaixo da superfície livre.

Entretanto, para se conseguir manter um corpo flutuante numa posição praticamente fixa, os esforços desenvolvidos no sistema de ancoramento seriam por demais elevados, o que inviabilizaria o projeto.

Sendo assim, um quebra-mar flutuante é projetado prevendo-se que estará sujeito a movimentos oscilatórios de rotação e translação que, por sua vez, geram ondas, podendo reduzir sua eficiência. Procuram-se compatibilizar os efeitos de esforços reduzidos nas amarras do equipamento com os de obtenção de elevada eficiência.

Contudo, sob determinadas condições de incidência de onda, o fenômeno de interferência de ondas pode ser suficientemente influente para que um dispositivo de atenuação sujeito à movimentação apresente maior eficiência que o mesmo dispositivo totalmente fixo.

Bowley⁽²⁾ classificou os dispositivos para atenuação de ondas em sistemas ativos e passivos. Na primeira categoria incluem-se os quebra-mares flutuantes propriamente ditos, em que a onda incidente ativa dinamicamente o corpo e a interferência de ondas soma-se à ação de outros mecanismos no amortecimento das ondas. Os dispositivos passivos são basicamente barreiras refletoras de onda, podendo também dissipar energia pela interação direta entre o sistema e a onda.

Estudando a influência dos movimentos de um quebra-mar flutuante na transmissão, reflexão e dissipação da energia das ondas, Sutko e Haden⁽³⁾ compararam seus resultados de testes em modelos reduzidos com resultados teóricos obtidos para uma onda com energia igual à concentrada na onda que passa por baixo do corpo. Verificaram que, na faixa de frequências testa-

das, os modelos sujeitos a movimentos oscilatórios vertical, de rotação ou ambos combinados e também o corpo fixo apresentam a amplitude da onda transmitida inferior aquela que seria obtida caso toda a energia concentrada na região abaixo do corpo fosse convertida na onda a jusante do quebra-mar.

Esses resultados mostram como o corpo e seus movimentos interferem acentuadamente na transformação da energia das ondas.

Normalmente cada tipo de quebra-mar flutuante põe em destaque, um ou mais dos mecanismos de atenuação de ondas. Assim o tipo "A-Frame", mostrado na figura 2, é fundamentalmente uma barreira refletora, enquanto que os modelos tipo prancha provocam o amortecimento das ondas principalmente pela dissipação de energia por turbulência e atrito viscoso. Já os tipos prismático e catamaram tem sua eficiência ligada diretamente à ação combinada dos mecanismos de interferência e reflexão de ondas.

Do ponto de vista tecnológico, um projeto completo de um quebra-mar flutuante deve levar detalhadamente em consideração os seguintes fatores:

- eficiência - o dispositivo projetado deve ser capaz de reduzir substancialmente a energia das ondas a sua jusante, para as condições de mar onde irá operar;
- ancoramento - o projeto deve prever que as amarras do quebra-

mar não estejam sujeitas a tensões elevadas; o sistema de ancoragem deve atender a rigoroso critério de segurança a fim de garantir o não rompimento das amarras;

- estabilidade - o quebra-mar deve ser um corpo flutuante hidrostaticamente estável sob qualquer condição de incidência de onda estipulada no projeto;
- durabilidade - os materiais para construção de quebra-mares flutuantes devem ser selecionados para permitir que os dispositivos sejam duráveis, resistentes à corrosão e a esforços dinâmicos de ondas;
- mobilidade - um quebra-mar flutuante deve apresentar boas características de mobilidade a fim de que possa ser transportado facilmente de um local para outro, devido às necessidades de serviço;
- instalação - como alguns dispositivos só são usados numa locação durante um intervalo restrito de tempo, os quebra-mares flutuantes devem ser equipamentos de fácil instalação; o grau de dificuldades está evidentemente associado à profundidade do mar e ao sistema de amarração;
- manutenção - por suas próprias características e do local de utilização, os quebra-mares flutuantes não podem exigir manutenção frequente, sendo que alguns tipos são projetados para praticamente não apresentarem necessidade de manutenção.

Do ponto de vista econômico, um projeto de um quebra-mar flutuante deve combinar aspectos de eficiência, durabilidade e mobilidade com questões relativas a custo de material, de construção e de transporte.

Um dos fatores que mais afetam a viabilidade econômica do projeto é o sistema de amarração. Quanto mais complexo maior será o custo do quebra-mar.

Como geralmente são equipamentos de grande comprimento, os quebra-mares são construídos em módulos, justapostos durante o transporte e instalação. Normalmente as partes moduladas estão sujeitas a pequenos movimentos relativos entre si.

Os procedimentos a serem seguidos num projeto de um quebra-mar flutuante aconselham que, num primeiro passo, se proceda à simulação matemática de diferentes tipos de dispositivos, sujeitos a diferentes condições de onda incidente. Com isto poder-se-á ter elementos para selecionar aquelas configurações mais adequadas às necessidades de serviço.

Em seguida parte-se para a avaliação do desempenho dos tipos mais promissores através de testes com modelos reduzidos em tanques de prova.

Somente a partir daí estão asseguradas as bases sólidas para o projeto e construção de um protótipo, a ser testado em condições reais.

A simulação matemática de dispositivos de atenuação de ondas permite basicamente avaliar eficiência, movimentos, cargas de ondas e tensões nas amarras, em amplas faixas de comprimento de onda para mar regular.

Desse modo pode ser analisada teoricamente a influência da forma geométrica da seção transversal do modelo de quebra-mar e também a relação entre a largura e o calado do equipamento.

Um tratamento estatístico adequado fornece resultados para casos reais de mar irregular, a partir de dados obtidos para mar regular.

As soluções matemáticas limitam-se a corpos rígidos de geometria uniforme, o que todavia, compreende a maioria dos modelos de quebra-mares flutuantes existentes.

O presente trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de modelo matemático para avaliação do desempenho de quebra-mar flutuante rígido, de geometria uniforme, operando sob condições de mar regular.

CAPÍTULO II

IDENTIFICAÇÃO DO PROBLEMA

II.1 - CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

As teorias empregadas na análise hidrodinâmica de navios podem ser estendidas ao estudo de quebra-mares flutuantes, dentro de certas limitações.

De uma maneira geral, a simulação matemática aplicada à análise de dispositivos de atenuação de ondas, em mar regular, tem por objetivos básicos a determinação de:

- coeficiente de transmissão ou eficiência do quebra-mar;
- cargas hidrodinâmicas atuantes no corpo;
- movimentos do dispositivo;
- esforços nas amarras.

A análise teórica de corpos flutuantes sujeitos a incidência de ondas regulares (harmônicas e monocromáticas) leva à formulação de um problema não linear de valor de contorno, em três dimensões. Entretanto, problemas dessa natureza mostram-se por demais complexos, não existindo solução analítica completa.

Assim, admitem-se hipóteses simplificadoras bastante procedentes, que permitem o emprego da teoria potencial linearizada na determinação das respostas de frequência para os movimentos harmônicos de translação e rotação e para as forças e momentos hidrodinâmicos, em seis graus de liberdade.

Em linhas gerais, partindo-se do princípio da conservação da massa e de condições de contorno apropriadas, chega-se à formulação de um problema linearizado de valor de contorno para o potencial de velocidade, cuja solução permite conhecer o campo de velocidade. Em seguida, o campo de pressão pode ser obtido com a imediata aplicação do princípio da conservação de energia.

As forças e momentos hidrodinâmicos são determinados pela integração da distribuição de pressão ao longo do contorno submerso do corpo.

As equações do movimento são formuladas através de um balanço adequado entre as forças de inércia, amortecimento, restauração e excitação.

Pela aplicação do princípio da superposição, podemos lidar com dois tipos de problemas independentes, assim denominados:

- problema de radiação - consiste na determinação das forças e momentos hidrodinâmicos atuantes num corpo flutuante em oscila

ção forçada em águas inicialmente paradas e na ausência de ondas incidentes; sua solução leva à obtenção de uma força de origem inercial, devido ao efeito de massa adicional, em fase com a aceleração do corpo, e de uma força de amortecimento devido à perda de energia na geração de ondas, em fase com a velocidade do corpo;

- problema de difração - consiste na determinação das forças e momentos hidrodinâmicos que agem num corpo mantido fixo e sujeito à incidência de ondas; sua solução permite avaliar as forças e momentos de excitação.

Prosseguindo na linha de simplificações, uma solução bidimensional pode ser obtida, restrita a corpos longos, de seção transversal uniforme e sob incidência frontal de ondas. Nesse caso, o corpo estará sujeito a três movimentos apenas, dois de translação (horizontal na direção da onda incidente e vertical) e um de rotação em torno de um eixo horizontal perpendicular à direção de incidência de ondas.

Formulado um conjunto de problemas bidimensionais linearizados e resolvido por métodos apropriados, com o emprego de computadores digitais, os parâmetros de interesse no projeto de quebra-mares flutuantes podem ser determinados, seguindo-se a sequência de cálculo indicada no fluxograma da figura 3.

Existem várias técnicas desenvolvidas pela análise hidrodinâmica de corpos flutuantes para solucionar o problema de

radiação mencionado anteriormente.

Uma técnica de uso bastante consagrado na determinação dos coeficientes de massa adicional e de amortecimento, para seções transversais de navios, consiste em considerar o potencial de velocidade como sendo um somatório infinito de potenciais multipolares, que satisfazem a equação da continuidade e as condições de contorno na superfície livre. Esses potenciais multipolares são multiplicados por coeficientes que são determinados quando se obriga que a série completa satisfaça a condição cinemática de contorno no corpo.

O método de expansão multipolar foi desenvolvido inicialmente por Ursell⁽⁴⁾, aplicando a teoria potencial linearizada bidimensional na solução do problema de um cilindro semi-submerso, oscilando harmonicamente na direção vertical.

Posteriormente, outros autores estenderam o método para corpos de seção transversal não circular, aplicando a técnica da transformação conforme, como pode ser visto em trabalhos de Tasai⁽⁵⁾ e Lopes⁽⁶⁾.

Cabe ressaltar que esse método apresenta limitações quanto à forma geométrica do corpo, não podendo ser empregado para seções transversais tipo catamaran, por exemplo.

Embora a solução obtida seja em duas dimensões, os coeficientes de massa adicional e de amortecimento para todo

o corpo podem ser determinados, aplicando-se a teoria de faixas (strip theory), desenvolvida por Korvin-Kroukovsky⁽⁷⁾, válida para corpos esbeltos.

De acordo com essa teoria, para um corpo alongado, onde a dimensão transversal é pequena comparada com seu comprimento, o fluxo em uma seção transversal é independente do fluxo em qualquer outra seção. Assim, as forças hidrodinâmicas totais são encontradas, integrando-se as forças em cada seção transversal ao longo de todo o comprimento do corpo.

Outra técnica de larga aplicação na solução do problema hidrodinâmico de corpos flutuantes, oscilando na ou sob a superfície livre, consiste em representar o potencial de velocidade por uma distribuição de fontes no contorno submerso do corpo. A densidade da distribuição de fontes é função da posição ao longo do contorno, sendo determinada através de equações integrais, resolvidas numericamente, obtidas pela aplicação da condição cinemática de contorno na superfície do corpo.

Essa técnica foi empregada inicialmente por Frank⁽⁸⁾, que resolveu o problema bidimensional de cilindros horizontais oscilando na superfície livre, em região fluídica infinita.

Posteriormente, Faltinsen⁽⁹⁾ e Garrisson⁽¹⁰⁾ aplicaram o método de distribuição de fontes à solução dos problemas de radiação e difração de ondas, em três dimensões e em águas rasas.

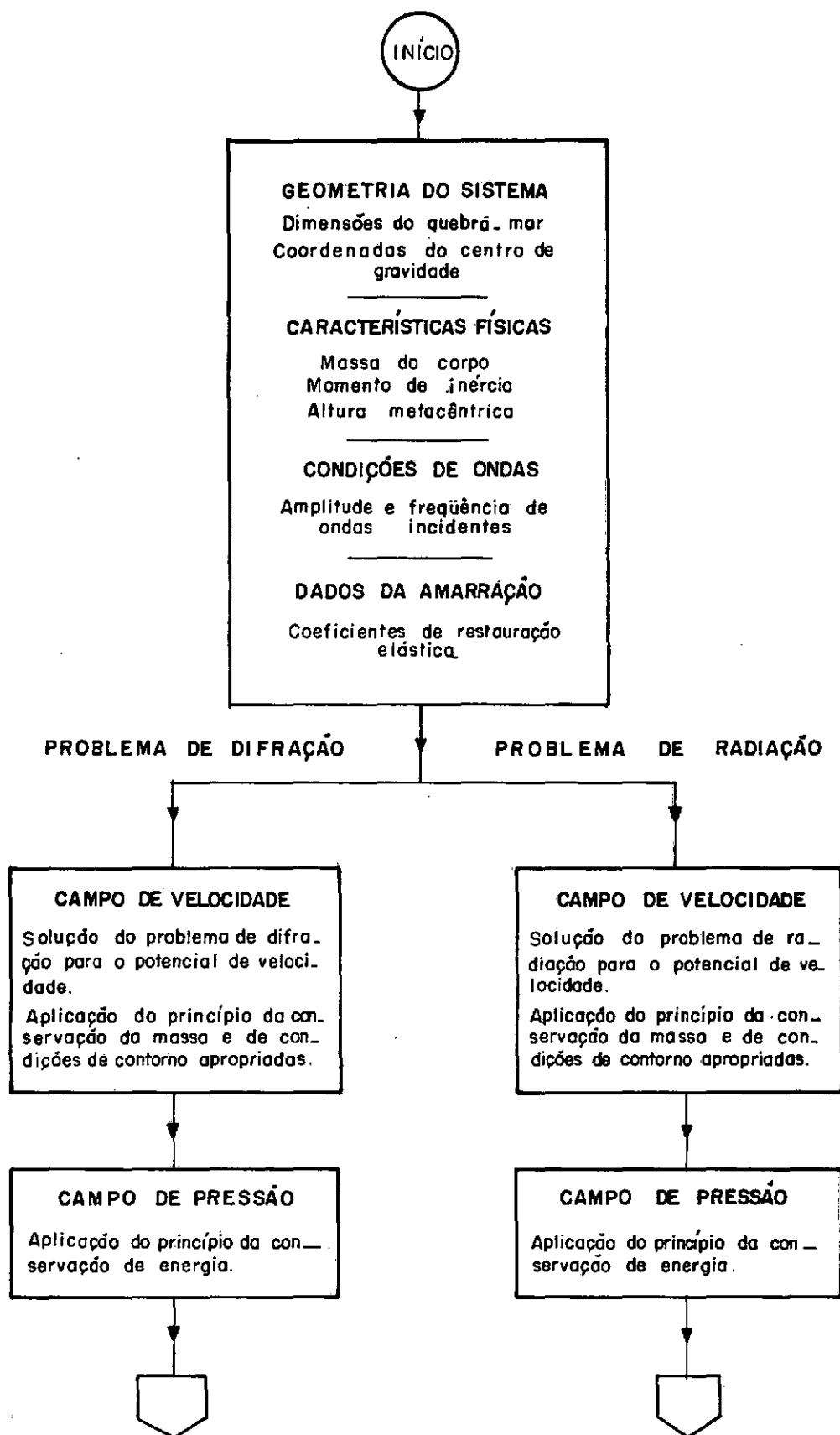
Essa técnica apresenta a grande vantagem de poder ser aplicada praticamente a qualquer forma geométrica de corpo e também predizer a resposta de frequência para os movimentos de corpos, em seis graus de liberdade, sob incidência oblíqua de ondas.

No entanto, esse método falha para um conjunto discreto de frequências de onda, como foi observado por Frank⁽⁸⁾. John⁽¹¹⁾ havia previsto essa falha e provara que essas frequências irregulares ocorreriam quando o problema do potencial de velocidade, aplicado à região interior ao contorno submerso do corpo, apresentasse soluções de auto-valores.

Faltinsen⁽¹²⁾ aplicou o método desenvolvido por Frank (Frank Close-Fit Method) na obtenção dos coeficientes de massa adicional e de amortecimento para diferentes seções de navios, normalmente encontradas na arquitetura naval, dando ênfase à determinação das faixas de frequência onde o problema de frequências irregulares se manifesta.

Em geral, essas frequências irregulares ocorrem fora da faixa normal de interesse no projeto de navios e demais estruturas marítimas flutuantes.

Como os quebra-mares flutuantes podem apresentar geometria inadequada à aplicação do método de expansão multipolar, empregaremos o método de distribuição de fontes na solução de nosso problema.



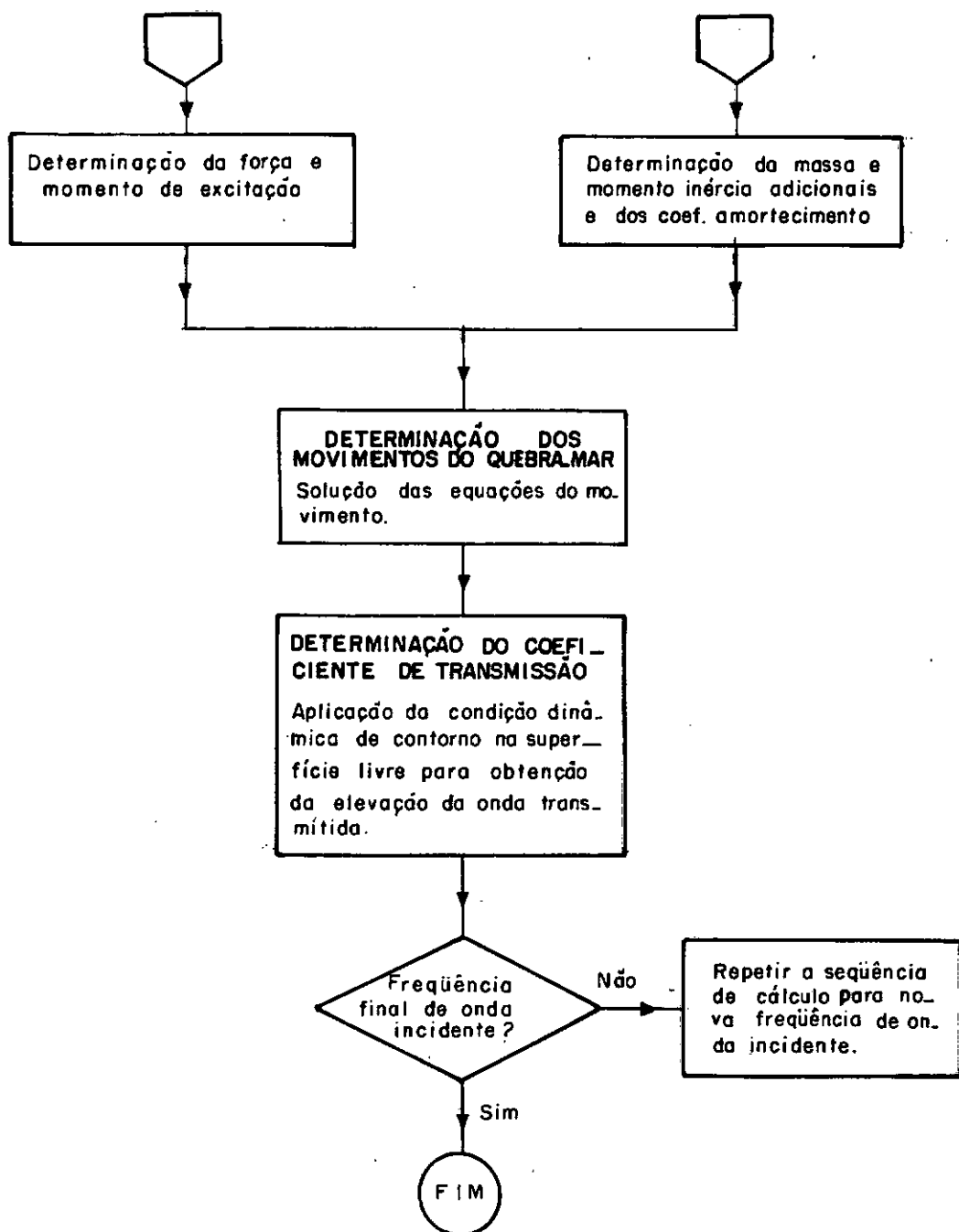


FIGURA 3
FLUXOGRAMA GERAL

II.2 - HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS

De uma maneira geral, o modelo geométrico para o problema em questão pode ser representado como expresso na figura 4, em que se observa a incidência oblíqua de ondas num corpo flutuante, sujeito a movimentos em seis graus de liberdade.

O sistema de eixos coordenados x_1, x_2, x_3 é tal que os eixos x_1 e x_2 situam-se no plano do nível médio das águas e o eixo vertical x_3 passa pelo centro de gravidade do corpo.

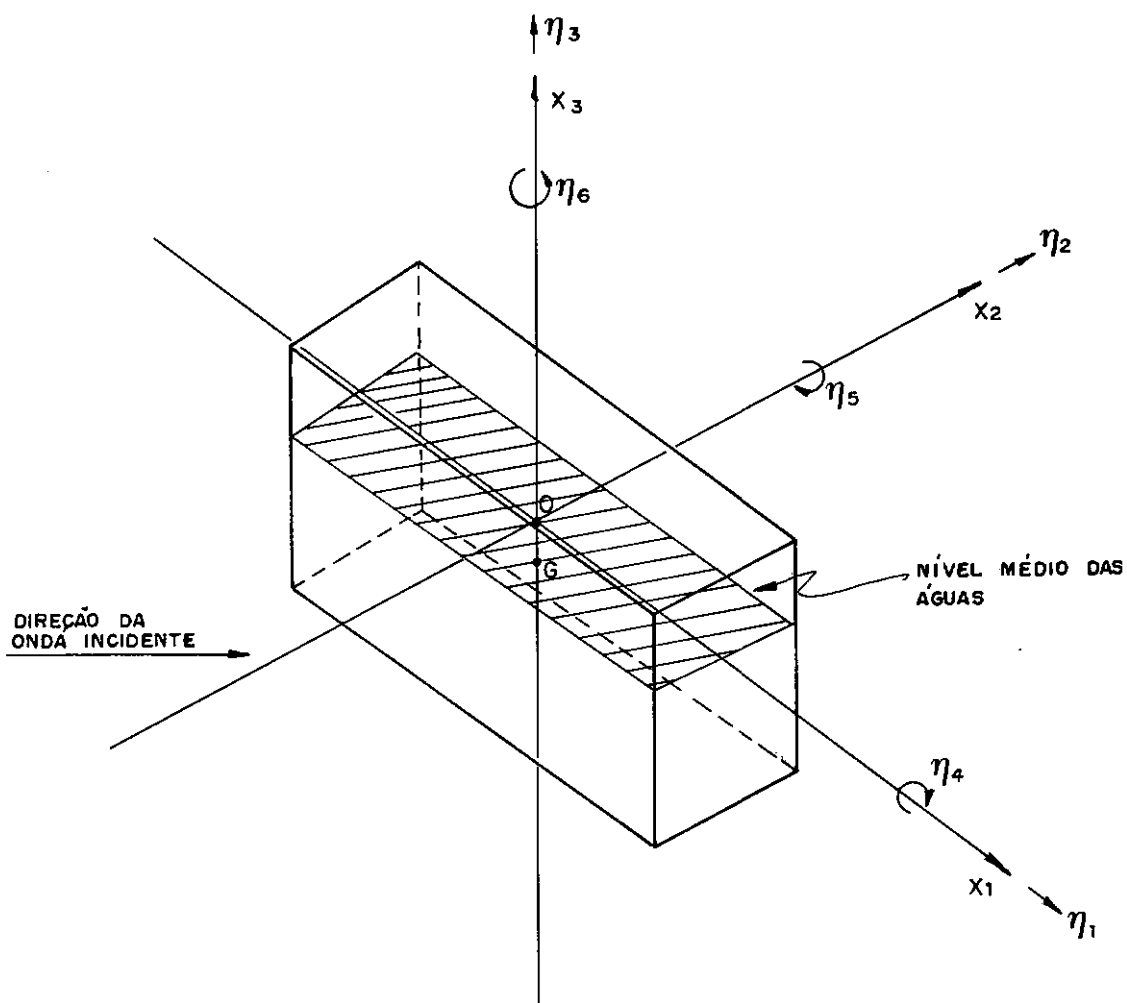
Para maior simplicidade, o corpo foi representado por um paralelepípedo retangular, porém sua geometria pode ser qualquer.

Entretanto, como mencionado anteriormente, podemos promover simplificações adequadas a fim de trabalhar com um problema menos complexo, ao qual possa ser aplicada a teoria potencial linearizada.

Sendo assim, passaremos a descrever o conjunto de hipóteses simplificadoras necessárias à modelação matemática de nosso problema. São elas:

a) Mar regular

As ondas incidentes e transmitidas são tratadas como ondas harmônicas e monocromáticas.



O - Origem do sistema coordenado

G - Centro de gravidade do corpo

- η_1 - movimento de translação na direção x_1
- η_2 - movimento de translação na direção x_2
- η_3 - movimento de translação na direção x_3
- η_4 - movimento de rotação em torno de x_1
- η_5 - movimento de rotação em torno de x_2
- η_6 - movimento de rotação em torno de x_3

FIGURA 4
SISTEMA DE EIXOS COORDENADOS

Embora as condições reais do mar sejam bastante diferentes dessas considerações, podemos simular um mar irregular através de resultados de mar regular, utilizando tratamento estatístico adequado.

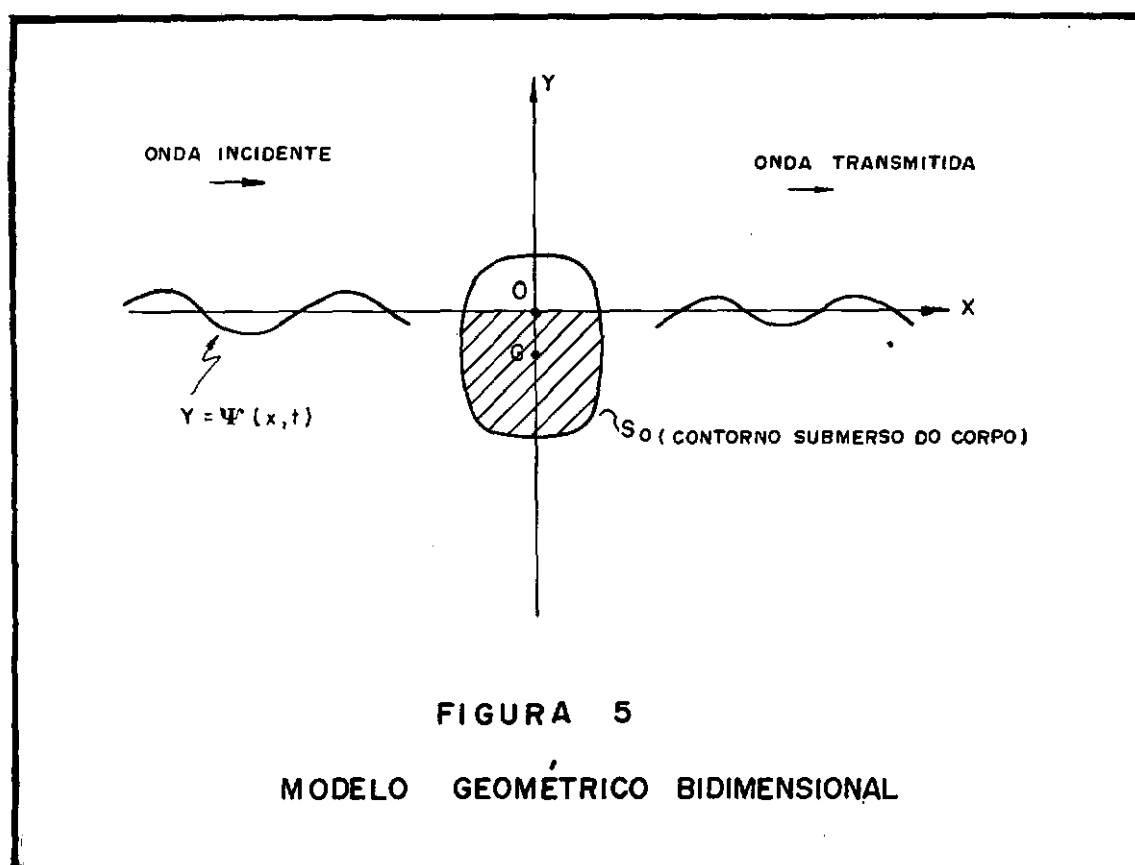
b) Sistema bidimensional

A fim de possibilitar a formulação de problemas de valor de contorno em duas dimensões, estaremos lidando com as seguintes condições:

- corpo longo;
- seção transversal uniforme;
- incidência de ondas frontal ao corpo.

Essas condições permitem-nos considerar que o escoamento numa seção transversal é independente do escoamento em qualquer outra seção, excetuando as regiões próximas às extremidades.

Nesses termos, podemos adotar um modelo bidimensional, conforme mostrado na figura 5.



c) Fluído sem viscosidade

Sabe-se que os efeitos de viscosidade de um fluído, escoando sobre ou ao redor de um corpo, se concentram numa região muito próxima à superfície do corpo, denominada camada limite hidrodinâmica. Normalmente, o desenvolvimento dessa camada, em regime turbulento, resulta no fenômeno de separação da camada limite e na formação de uma região de escoamento completamente irregular, à jusante do corpo, denominada esteira viscosa.

Surgem, portanto, pressões localizadas e reações no corpo, de natureza completamente diferente das pressões e forças hidrodinâmicas calculadas sem levar em conta a influência viscosa.

Entretanto, interessa-nos saber quais são os limites que nos permitem negligenciar os efeitos de viscosidade.

Verificou-se experimentalmente que a influência da viscosidade s \tilde{o} se manifesta efetivamente nas cargas de ondas atuantes num corpo flutuante, quando sua dimensão característica transversal \acute{e} pequena, comparada com a largura do movimento orbital das partículas do fluído.

Para corpos de seção circular, de diâmetro d , um critério prático para negligenciar os efeitos de viscosidade pode ser

$$H/d \leq 1 ,$$

sendo H a altura da onda incidente.

Como os quebra-mares flutuantes são estruturas de dimensões elevadas, a influência de viscosidade pode ser desprezada, sem acarretar qualquer erro sensível.

d) Fluído incompressível, isotérmico e homog neo

Admitindo-se a incompressibilidade, temperatura uniforme e homogeneidade do fluído, o que se mostra perfeitamente válido nas condições de nosso problema, a equação da continuidade expressa que:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0$$

onde $\underline{v} = u \underline{i} + v \underline{j}$ é o vetor velocidade e u e v suas respectivas componentes horizontal e vertical.

e) Escoamento irrotacional

Estabelecendo-se que não há rotação das partículas do fluido em torno de seus próprios eixos, o escoamento é denominado irrotacional e o campo de velocidade pode ser representado pelo gradiente de uma função potencial. Teremos, então

$$\underline{v} = \nabla \phi$$

sendo ϕ o potencial de velocidade.

$$\text{Logo: } u = \frac{\partial}{\partial x} \phi \text{ e } v = \frac{\partial}{\partial y} \phi$$

Sendo assim, a equação da continuidade, que representa o princípio da conservação da massa, se transforma em:

$$\nabla^2 \phi = 0 .$$

O princípio da conservação da energia será representado matematicamente pela equação de Bernoulli, expressa na forma:

$$\frac{p}{\rho} + gy + \phi_t + \frac{1}{2} |\phi_x^2 + \phi_y^2| = f(t)$$

f) Ondas de pequena amplitude

Como objetivamos adotar a teoria potencial linearizada na solução de nosso problema, devemos lidar com ondas gravitacionais de pequena amplitude, a fim de que os efeitos não lineares possam ser desprezados.

Essa hipótese simplificadora mostra-se bastante razoável, visto que, na realidade, as condições de mar apresentam normalmente ondas em que sua altura é muito pequena, quando comparada com seu comprimento de onda.

g) Águas profundas

Em águas profundas, e para ondas regulares, a trajetória de uma partícula do meio fluídico é uma circunferência, cujo raio decresce exponencialmente com a profundidade e é igual à amplitude da onda na superfície livre.

Para profundidades h superiores à metade do comprimento de onda λ , os raios das trajetórias das partículas são muito pequenos. Assim, a condição para que possamos assumir uma região como sendo de águas profundas, é:

$$h/\lambda > 0,5 .$$

Essa hipótese cobre a maior parte dos casos de interesse em projetos de quebra-mares flutuantes, principalmente

quando se trata de seu emprego em atividade de exploração petrolífera no mar.

CAPÍTULO III

MODELAÇÃO DO PROBLEMA HIDRODINÂMICO

Pretendemos, a partir da formulação do problema geral de valor de contorno de um corpo flutuante, sujeito à ação de ondas regulares, e adotando as hipóteses simplificadoras mencionadas anteriormente, estabelecer um conjunto de problemas bidimensionais linearizados, que serão resolvidos por técnicas analítico-numéricas apropriadas.

III.1 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA GERAL DE VALOR DE CONTORNO

Vamos estabelecer o problema de valor de contorno para o potencial de velocidade $\phi(x, y, t)$ através da equação da continuidade e de apropriadas condições de contorno.

a) Continuidade do meio fluídico

Num escoamento irrotacional e para fluido incompressível, o princípio da conservação da massa é representado matematicamente por:

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ na região fluídica.}$$

b) Condição de contorno cinemática na superfície livre

Para que uma partícula de fluido se mantenha na su

superfície livre é necessário que a componente de sua velocidade, normal à superfície, seja nula.

Matematicamente podemos expressar essa condição por:

$$\frac{D}{Dt} [y - \psi(x, t)] = 0 \text{ na superfície livre, ou em } y = \psi(x, t), \text{ onde}$$

de $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\nabla\phi \cdot \nabla)$ é a derivada substantiva.

Desenvolvendo, teremos:

$$\psi_t + \phi_x \psi_x - \phi_y = 0 \text{ em } y = \psi.$$

c) Condição de contorno dinâmica na superfície livre

Na superfície livre a pressão é constante e igual à pressão atmosférica.

Aplicando o princípio da conservação da energia para um ponto qualquer na superfície livre e para outro, ao longe (no infinito), situado na superfície livre das águas paradas, teremos, pela utilização da equação de Bernoulli:

$$g\psi + \phi_t + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) = 0 \text{ em } y = \psi.$$

d) Condição de contorno cinemática no corpo

Na superfície submersa do corpo, a velocidade das partículas do fluido, numa direção normal à superfície, deve ser igual à componente normal da velocidade do corpo.

Assim:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V_n \text{ em } S_o$$

e) Condição de contorno do fundo

A velocidade das partículas do meio fluídico diminui à medida que a profundidade aumenta.

Assim, no fundo, teremos:

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty .$$

f) Condições laterais de contorno

À medida que nos afastamos lateralmente do corpo, o movimento do fluido ocorre na forma de ondas progressivas regulares.

III.2 - LINEARIZAÇÃO DO PROBLEMA

Como se observa, nosso problema geral apresenta condições de contorno não lineares. Entretanto, nossas hipóteses anteriores permitem chegar a sua linearização.

Para isso aplicaremos o método de perturbação⁽¹³⁾, através do qual procuraremos identificar nosso problema linearizado com a primeira aproximação de um procedimento perturbatório.

Essa técnica é passível de ser aplicada desde que identifiquemos um parâmetro pequeno em íntima relação com o fenômeno físico. Em nosso caso, esse parâmetro pode ser associado ao fato de que a altura da onda é pequena quando comparada com seu comprimento e também que as amplitudes dos movimentos oscilatórios do corpo são pequenas em relação à largura do corpo.

Desse modo, consideremos um parâmetro ϵ que fisicamente representa a medida da perturbação do escoamento do fluido. Podemos dizer que ϵ é da ordem de grandeza da relação entre a altura H e o comprimento de onda λ e também da relação entre a amplitude dos movimentos de oscilação $\bar{\eta}$ e a largura B do corpo. Então:

$$\epsilon = O\left(\frac{H}{\lambda}\right) \text{ e } \epsilon = O\left(\frac{\bar{\eta}}{B}\right) .$$

Em seguida, assumimos que o potencial de velocidade e a elevação da onda possam ser expandidos em séries assintó-

ticas, da forma:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x, y, t, \varepsilon), \quad \Phi_{n+1} = O(\Phi_n) \text{ para } x, y, t \text{ fixos e } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x, t, \varepsilon), \quad \Psi_{n+1} = O(\Psi_n) \text{ para } x, t \text{ fixos e } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Introduzindo essas expansões no problema de valor de contorno e, após uma análise de ordem de grandeza, chegamos à primeira aproximação:

$$\nabla^2 \Phi_1 = 0 \text{ na região fluídica;}$$

$$\Psi_{1t} - \Phi_{1y} = 0 \text{ em } y = \Psi_1;$$

$$g\Psi_1 + \Phi_{1t} = 0 \text{ em } y = \Psi_1;$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi_1 = V_n \text{ em } S_0;$$

$$|\nabla \Phi_1| \rightarrow 0 \text{ qdo. } y \rightarrow -\infty;$$

condição de radiação apropriada.

Substituindo nosso problema geral de valor de contorno pela primeira aproximação do esquema de perturbação estamos cometendo um erro de ordem de grandeza de ε^2 .

Embora linearizado, o problema não se encontra formulado numa forma conveniente, visto que as condições de contorno na superfície livre apresentam explicitamente a função ψ e sua derivada, que não conhecemos a priori, e também devem ser satisfeitas nessa posição.

Sendo assim, promovemos primeiramente a transferência das condições de contorno para a posição média ($y = 0$), assumindo que o potencial de velocidade ϕ é uma função analítica nas vizinhanças do nível médio das águas e, portanto, pode ser expandido em série de Taylor. O erro cometido é da ordem de grandeza de ε^2 .

Em seguida, combinando as condições do contorno cinemática e dinâmica na superfície livre, chegamos a uma única expressão sem que apareça a função ψ .

Finalmente, temos nosso problema linearizado e numa forma conveniente para ser resolvido:

$$\nabla^2 \phi = 0 \text{ na região fluídica;}$$

$$\phi_y + \frac{1}{g} \phi_{tt} = 0 \text{ em } y = 0;$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = V_n \text{ em } S_0;$$

$$|\nabla \phi| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty;$$

condição de radiação apropriada.

Como vamos resolver apenas a aproximação de primeira ordem, usaremos a notação ϕ no lugar de ϕ_1 .

O campo de pressão hidrodinâmica pode ser obtido aplicando a equação de Bernoulli. Sob a forma linearizada, a pressão hidrodinâmica será dada por:

$$p = - \rho \frac{\partial}{\partial t} \phi .$$

Pela condição de contorno dinâmica na superfície livre, podemos determinar a elevação da onda, sob a forma linearizada, que resulta em:

$$\psi(x, t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \phi \Big|_{y=0}$$

III.3 - PROBLEMAS HIDRODINÂMICOS LINEARIZADOS

Assumimos que o potencial de velocidade para o nosso problema, na forma complexa, possa ser escrito como:

$$\phi(z, t) = \phi^*(z) \cdot e^{-i\omega t},$$

sendo $z = x + iy$ e 'i' a unidade imaginária.

Como resultado da linearização, podemos superpor soluções. Logo Φ pode ser tomado como:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \sum_{k=1}^3 \Phi_{3k}$$

sendo Φ_1 = potencial da onda incidente;

Φ_2 = potencial de difração;

Φ_{3k} = potencial de radiação.

Na verdade estamos considerando dois tipos de problemas separadamente, a fim de que possamos avaliar as forças hidrodinâmicas atuantes no corpo. São eles:

a) Problema de difração

Corresponde à determinação das forças e momentos de excitação, ou seja, as forças e momentos hidrodinâmicos que atuam num corpo, mantido fixo, e sujeito à ação das ondas incidentes.

Esse problema pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\nabla^2 (\Phi_1 + \Phi_2) = 0 \text{ na região fluídica;}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 + \Phi_2) - v(\Phi_1 + \Phi_2) = 0 \text{ em } y = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_1 + \phi_2) = 0 \text{ em } S_0;$$

$$|\nabla(\phi_1 + \phi_2)| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi_1 + \phi_2) + \frac{w}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) \right] = 0;$$

sendo que $v = \frac{w^2}{g}$, denominado número de onda.

A última condição de contorno refere-se à condição de radiação de Sommerfeld.

A condição de contorno na superfície livre pode ser escrita como apresentado acima devido à forma harmônica do potencial de velocidade.

A solução do problema de difração exige que se conheça primeiramente a solução para o potencial da onda incidente.

Assim, devemos resolver o problema em ϕ_1 , que pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \text{ na região fluídica;}$$

$$\phi_{1y} - v\phi_1 = 0 \text{ em } y = 0;$$

$$|\nabla\phi_1| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\phi_{1x} + \frac{w}{g} \phi_{1t} \right) = 0 .$$

Conhecido ϕ_1 , teremos o potencial de difração a partir da solução do seguinte problema de valor de contorno:

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \text{ na região fluídica;}$$

$$\phi_{2y} - v \phi_2 = 0 \text{ em } y = 0;$$

$$\phi_{2y} = - \phi_{1n} \text{ em } S_0;$$

$$|\nabla \phi_2| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\phi_{2x} + \frac{w}{g} \phi_{2t} \right) = 0 .$$

A equação da superfície livre pode ser obtida por:

$$\psi_1 = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 \Big|_{y=0} .$$

A distribuição de pressão hidrodinâmica p_D , para o problema de difração, é dada por:

$$p_D = - \rho \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) .$$

A força e o momento de excitação serão calculados através da apropriada integração da pressão hidrodinâmica ao lon

go do contorno submerso do corpo. Logo:

$$\underline{F}_D = - \int_{S_O} p \underline{n} d_s = \rho \int_{S_O} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) \underline{n} ds,$$

$$\underline{M}_D = - \int_{S_O} p (\underline{n} \times \underline{r}) ds,$$

sendo $\underline{n} = (n_1, n_2)$ o vetor normal à superfície do corpo, n_1 e n_2 os cossenos diretores da normal, e $\underline{r} = (x, y)$ é o vetor posição.

A força de excitação pode ser definida como:

$$\underline{F}_D = \underline{F}_{D_1} + \underline{F}_{D_2},$$

$$\text{onde } \underline{F}_{D_1} = \rho \int_{S_O} \frac{\partial}{\partial t} \phi_1 \underline{n} ds \text{ e } \underline{F}_{D_2} = \rho \int_{S_O} \frac{\partial}{\partial t} \phi_2 \underline{n} ds.$$

A primeira parcela é conhecida como força de Froude-Kriloff e representa a força causada pela onda incidente, admitindo-se que a presença do corpo não tem influência alguma na distribuição de velocidade na região fluídica.

Teremos que as componentes horizontal e vertical da força de excitação serão:

$$F_{D_1} = \rho \int_{S_O} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) n_1 ds,$$

$$F_{D_2} = \rho \int_{S_O} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) n_2 ds,$$

A intensidade do momento de excitação será:

$$F_{D_3} = \rho \int_{S_0} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) \cdot (y n_1 - x n_2) ds.$$

A deformação da superfície livre, correspondente à incidência de onda no corpo fixo, pode ser obtida através de:

$$\psi_2 = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (\phi_1 + \phi_2) \Big|_{y=0}.$$

b) Problema de radiação

Como já mencionado anteriormente, consiste na determinação das forças e momentos hidrodinâmicos que agem num corpo flutuante sujeito à oscilação forçada em águas inicialmente paradas, na ausência de ondas incidentes. Teremos, como solução, uma força ou momento de origem inercial, em fase com a aceleração do corpo, relacionada com a energia cinética das partículas do meio fluídico, aceleradas pelo movimento do corpo flutuante.

Por sua origem inercial, essa força é igual ao produto de uma grandeza de massa, denominada massa adicional, pela aceleração linear do corpo. Analogamente, o momento seria igual ao produto de um momento de inércia adicional pela aceleração angular do corpo.

Ainda como solução do problema de radiação, teremos uma força ou momento de amortecimento devido à perda de

energia na geração de ondas, em fase com a velocidade do corpo.

Assim, para cada movimento do corpo, teremos forças e momentos devido ao efeito de massa adicional e devido ao amortecimento na geração de ondas.

Teremos, então, a seguinte formulação para o problema de radiação:

$$\nabla^2 \Phi_{3k} = 0 \text{ na região fluídica;}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \Phi_{3k} - v \Phi_{3k} = 0 \text{ em } y = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi_{3k} = V_n \text{ em } S_0;$$

$$|\nabla \Phi_{3k}| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \Phi_{3k} + \frac{w}{g} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{3k} \right] = 0; \quad k = 1, 2, 3.$$

Vemos, portanto, que os potenciais Φ_{3k} dependem dos deslocamentos η_k do corpo, já que $V_n = \dot{\eta}_k n_k$.

O movimento do corpo na direção k pode ser escrito, na forma complexa: $\eta_k = \bar{\eta}_k e^{-i(\omega t + \delta_k)}$, sendo $\bar{\eta}_k$ a sua amplitude e δ_k o ângulo de fase com relação à onda incidente.

A fim de formular um problema para os potenciais de radiação que independam dos movimentos do corpo, já que não são conhecidos a priori, façamos:

$$\phi_{3k}(z, t) = \dot{\eta}_k \phi_{3k}^*(z), \quad k = 1, 2, 3.$$

O potencial ϕ_{3k}^* representa fisicamente o campo de velocidade das partículas do fluido ao redor de um corpo oscilando com velocidade unitária.

Se definirmos $\phi_{3k}(z, t) = -i\omega e^{-i\omega t} \phi_{3k}^*(z)$, teremos que $\phi_{3k}(z, t) = \bar{\eta}_k e^{-i\delta_k} \phi_{3k}(z, t)$.

Substituindo essa última expressão nas equações do problema de valor de contorno anterior, teremos um novo problema inteiramente independente dos deslocamentos do corpo. Logo:

$$\nabla^2 \phi_{3k} = 0 \text{ na região fluídica ;}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi_{3k} - v \phi_{3k} = 0 \text{ em } y = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \phi_{3k} = i\omega e^{-i\omega t} n_k \text{ em } S_0;$$

$$|\nabla \phi_{3k}| \rightarrow 0 \text{ quando } y \rightarrow -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \phi_{3k} + \frac{w}{g} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{3k} \right] = 0$$

Resolvido o problema acima, o potencial de radiação poderá ser obtida através de:

$$\phi_R = \sum_{k=1}^3 \dot{\eta}_k \phi_{3k}^*$$

O campo de pressão hidrodinâmica surge da aplicação da equação de Bernoulli, resultando em:

$$p_R = - \rho \frac{\partial}{\partial t} \phi_R = - \rho \sum_{k=1}^3 \ddot{\eta}_k \phi_{3k}^* .$$

A intensidade da força ou momento hidrodinâmico, por unidade de comprimento do corpo, na direção j , resulta de integração da distribuição de pressão ao longo do contorno submerso do corpo. Logo:

$$F_{Rj} = - \int_{S_O} p_R n_j ds, \quad j = 1, 2, 3 ;$$

$$F_{Rj} = \rho \sum_{k=1}^3 \ddot{\eta}_k \int_{S_O} \phi_{3k}^* n_j ds.$$

Relembrando que essa força é composta de uma parcela de origem inercial, em fase com a aceleração do corpo, e outra de amortecimento, em fase com a velocidade do corpo, podemos escrever:

$$F_{Rj} = - \sum_{k=1}^3 (a_{jk} \ddot{\eta}_k + b_{jk} \dot{\eta}_k) ,$$

sendo a_{jk} = massa ou momento de inércia adicional na direção j devido ao movimento na direção k ;

b_{jk} = coeficiente de amortecimento na direção j devido ao movimento na direção k .

Comparando as duas expressões acima e sabendo-se que $\dot{\eta}_k = -i\omega\eta_k$ e $\ddot{\eta}_k = -\omega^2\eta_k$, teremos:

$$-\rho\omega^2 \sum_{k=1}^3 \int_{S_0} \phi_{3k}^* n_j ds = \sum_{k=1}^3 (w^2 a_{jk} + iwb_{jk})$$

Logo:

$$a_{jk} = -\rho \int_{S_0} \text{Re}(\phi_{3k}^*) n_j ds \quad e$$

$$b_{jk} = -\rho \omega \int_{S_0} \text{Im}(\phi_{3k}^*) n_j ds ,$$

sendo $\phi_{3k}^* = \text{Re}(\phi_{3k}^*) + i \text{Im}(\phi_{3k}^*)$.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Como promovemos a superposição de soluções, devemos obter respostas independentes para os problemas linearizados apresentados anteriormente.

Empregaremos o método de distribuição de fontes unitárias no contorno submerso do corpo para resolver os problemas de difração e radiação.

IV.1 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO

O potencial de velocidade da onda incidente, em águas profundas, pode ser obtido pela solução de seu problema de valor de contorno apresentado anteriormente, através do emprego do método de separação de variáveis, resultando em:

$$\phi_1 = \frac{g \bar{\psi}_1}{w} e^{vy} e^{-i(wt-vx)} \quad \text{ou}$$

$$\phi_1 = \frac{g \bar{\psi}_1}{w} e^{v(y+ix)} e^{-iwt}$$

onde $\bar{\psi}_1$ é a amplitude da onda incidente.

Conhecido ϕ_1 , devemos obter ϕ_2 empregando o método de distribuição de fontes no contorno submerso, que resulta na aplicação da função de Green.

IV.1.1 - Aplicação do Método de Distribuição de Fontes

De acordo com Wehausen e Laitone⁽¹⁴⁾ o potencial de velocidade complexo de uma fonte de intensidade unitária, localizada num ponto ζ , excitada harmonicamente num campo de ondas gravitacionais, em águas profundas, será:

$$f(z, \zeta, t) = \frac{1}{2\pi} \left[\log(z-\zeta) - \log(z-\bar{\zeta}) + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] \cdot \quad (*)$$

$$\cdot \cos wt - e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \cdot \sin wt,$$

sendo $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\lambda$.

O potencial f satisfaz a equação da continuidade e as condições de contorno do problema de valor de contorno para o potencial de difração, exceto a condição cinemática no corpo.

Assim podemos representar o potencial de difração por:

$$\phi_2(z, t) = \int_{S_0} Q(s) \cdot f(z, \zeta, t) \cdot ds$$

sendo $Q(s)$ uma função complexa da posição ao longo do contorno, representando a densidade da fonte.

Como esse potencial é da forma:

$$(*) \int = \text{valor principal da integral.}$$

$$\phi_2(z, t) = \phi_2^*(z) e^{-i\omega t}$$

$$\text{teremos que: } \phi_2(z, t) = \int_{S_0} Q(s) \cdot f^*(z, \zeta) \cdot e^{-i\omega t} ds,$$

$$\text{sendo } f(z, \zeta, t) = f^*(z, \zeta) \cdot e^{-i\omega t}.$$

Seja:

$$G_1(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi} \left[\log(z-\zeta) - \log(z-\bar{\zeta}) + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] e$$

$$G_2(z, \zeta) = -e^{-iv(z-\bar{\zeta})}$$

Logo:

$$f^*(z, \zeta) e^{-i\omega t} = G_1 \cos \omega t + G_2 \sin \omega t \quad e$$

$$f^*(z, \zeta) = \operatorname{Re}(G_1) + i \operatorname{Re}(G_2).$$

Aplicando a expressão de ϕ_2 à condição de contorno na superfície do corpo, teremos:

$$\underline{n} \cdot \nabla \left\{ \int_{S_0} Q(s) f^*(z, \zeta) e^{-i\omega t} ds \right\} = - \underline{n} \cdot \nabla \phi_1.$$

Objetivamos resolver essa equação para obter a densidade de fonte $Q(s)$, o que nos permitirá ter ϕ_2 em definitivo.

Assim, considerando apenas a parte real da equação acima, teremos:

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \nabla \left\{ \operatorname{Re} \int_{S_0} [\operatorname{Re}(Q) + i \operatorname{Im}(Q)] \cdot [\operatorname{Re}(G_1) + i \operatorname{Re}(G_2)] (\cos wt - i \operatorname{sen} wt) ds \right\} = \\ = - \underline{n} \cdot \nabla \left\{ \operatorname{Re} \left[\frac{g \bar{\Psi}_1}{w} e^{vy} e^{-i(wt - vx)} \right] \right\} \end{aligned}$$

Resolvendo, obtemos o par de equações integrais:

$$\underline{n} \cdot \nabla \int_{S_0} [\operatorname{Re}(Q) \cdot \operatorname{Re}(G_1) - \operatorname{Im}(Q) \cdot \operatorname{Re}(G_2)] ds = - \underline{n} \cdot \nabla \left(\frac{g \bar{\Psi}_1}{w} e^{vy} \cos vx \right)$$

$$\underline{n} \cdot \nabla \int_{S_0} [\operatorname{Re}(Q) \operatorname{Re}(G_2) + \operatorname{Im}(Q) \operatorname{Re}(G_1)] ds = - \underline{n} \cdot \nabla \left(\frac{g \bar{\Psi}_1}{w} e^{vy} \operatorname{sen} vx \right)$$

Esse sistema de equações integrais terá que ser resolvido por meio de uma técnica analítico-numérica.

IV.1.2 - Solução Analítico-Numérica

Estaremos considerando o corpo simétrico em relação ao eixo y . Assim, tomemos $N+1$ pontos no contorno submerso, situados num dos lados simétricos do corpo, conforme indica a figura 6.

Esses pontos definirão N segmentos, cujos pontos médios $z_i = (x_i, y_i)$ terão as seguintes coordenadas:

$$x_i = (\xi_i + \xi_{i+1})/2 \text{ e } y_i = (\lambda_i + \lambda_{i+1})/2 .$$

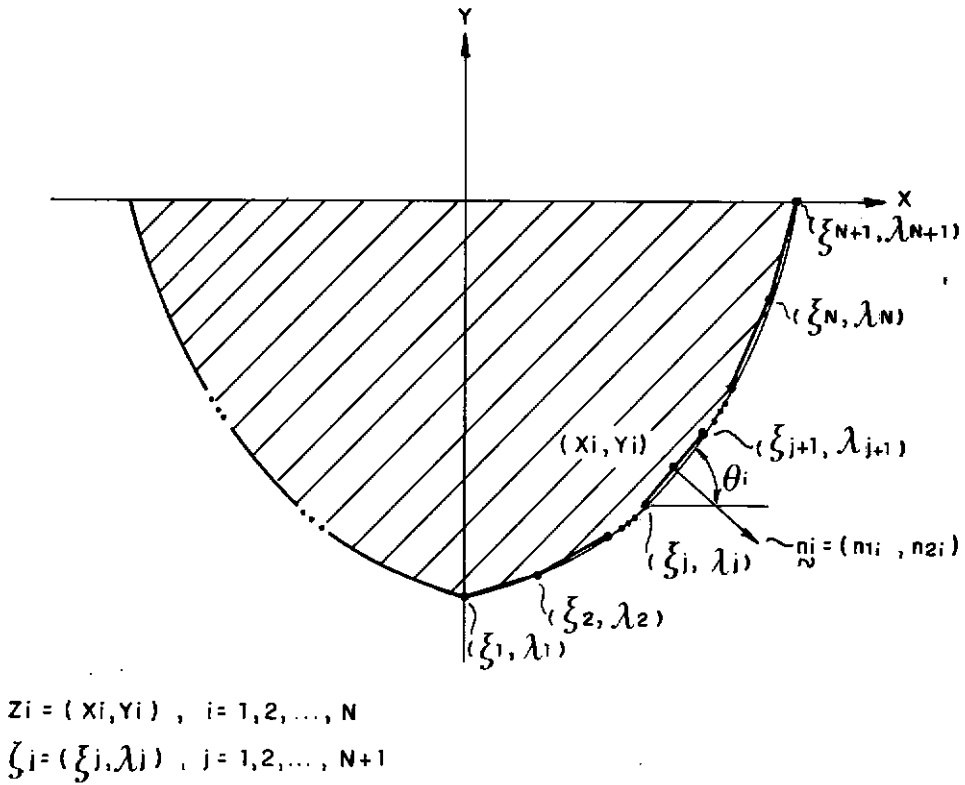


FIGURA 6
PONTOS DO CONTORNO SUBMERSO DO CORPO

O comprimento de cada segmento será dado por:

$$s_i = \sqrt{(\xi_{i+1} - \xi_i)^2 + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2}$$

e o ângulo que esse segmento faz com o eixo x será igual a:

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} .$$

Os cossenos diretores da normal ao segmento serão dados por:

$$n_{1_i} = \sin \theta_i \text{ e } n_{2_i} = -\cos \theta_i .$$

A cada ponto $z_j = (\xi_j, \lambda_j)$ e a cada segmento s_j correspondem as suas imagens $z_{-j} = (-\xi_j, \lambda_j)$ e s_{-j} no contorno submerso do quadrante esquerdo, respectivamente.

Assumiremos que a intensidade da densidade de fonte $Q(s)$ permanecerá constante ao longo de cada segmento, porém variando de segmento para segmento.

Façamos:

$$Q_j = \operatorname{Re}[Q(s_j)]$$

$$Q_{N+j} = \operatorname{Im}[Q(s_j)]$$

$$Q_{-j} = \operatorname{Re}[Q(s_{-j})]$$

$$Q_{-N-j} = \operatorname{Im}[Q(s_{-j})], \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Com isso o sistema anterior de equações integrais, aplicado no ponto $z_i = (x_i, y_i)$, se transforma em:

$$\begin{aligned} & n_i \cdot \nabla \left\{ \sum_{j=1}^N Q_j \operatorname{Re} \int_{s_j} G_1(z, \zeta) ds - \sum_{j=1}^N Q_{N+j} \operatorname{Re} \int_{s_j} G_2(z, \zeta) ds + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^N Q_{-j} \operatorname{Re} \int_{s_{-j}} G_1(z, \zeta) ds - \sum_{j=1}^N Q_{-N-j} \operatorname{Re} \int_{s_{-j}} G_2(z, \zeta) ds \right\} \Big|_{z_i} = \\ & = - n_i \cdot \nabla \left(\frac{g \bar{\psi}_1}{w} e^{vy} \cos vx \right) \Big|_{z_i} e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tilde{n}_i \cdot \nabla \left\{ \sum_{j=1}^N Q_j \operatorname{Re} \int_{s_j} G_2(z, \zeta) ds + \sum_{j=1}^N Q_{N+j} \operatorname{Re} \int_{s_j} G_1(z, \zeta) ds + \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^N Q_{-j} \operatorname{Re} \int_{s_{-j}} G_2(z, \zeta) ds + \sum_{j=1}^N Q_{-N-j} \operatorname{Re} \int_{s_{-j}} G_1(z, \zeta) ds \right\} \Big|_{z_i} = \\
& = - \tilde{n}_i \cdot \nabla \left(\frac{g \bar{\Psi}_1}{w} e^{vY} \operatorname{sen} vx \right) \Big|_{z_i}
\end{aligned}$$

Seja:

$$\begin{aligned}
I_{ij} &= \operatorname{Re} \{ \tilde{n}_i \cdot \nabla \left[\int_{s_j} G_1(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z_i} \} \quad e \\
J_{ij} &= \operatorname{Re} \{ \tilde{n}_i \cdot \nabla \left[\int_{s_j} G_2(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z_i} \} .
\end{aligned}$$

Logo, teremos que:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N (Q_j I_{ij} - Q_{N+j} J_{ij} + Q_{-j} I_{i-j} - Q_{-N-j} J_{i-j}) = \\
& = \frac{g \bar{\Psi}_1^v}{w} : e^{vY_i} (n_{1_i} \operatorname{sen} vx_i - n_{2_i} \operatorname{cos} vx_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N (Q_j J_{ij} + Q_{N+j} I_{ij} + Q_{-j} I_{i-j} + Q_{-N-j} I_{i-j}) = \\
& = - \frac{g \bar{\Psi}_1^v}{w} e^{vY_i} (n_{1_i} \operatorname{cos} vx_i + n_{2_i} \operatorname{sen} vx_i),
\end{aligned}$$

$$i = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N.$$

Desse modo conseguimos obter um sistema de $4N$ equações algébricas lineares, que pode ser facilmente resolvido pelo método de triangularização de Gauss, empregando computação digital, para fornecer as intensidades das densidades de fonte nos segmentos em que foi dividido o contorno submerso do corpo.

As expressões para o cálculo de I_{ij} e J_{ij} encontram-se no Apêndice.

Conforme definido anteriormente, o potencial de velocidade num ponto $z_i = (x_i, y_i)$ poderá ser obtido por:

$$\phi_2(z_i, t) = \left\{ \int_{S_0} [\operatorname{Re}(Q) + i \operatorname{Im}(Q)] [\operatorname{Re}(G_1) + i \operatorname{Re}(G_2)] (\cos \omega t - i \sin \omega t) ds \right\} \Big|_{z=z_i}$$

Como estamos admitindo que a densidade de fonte $Q(s)$ permanece constante em cada segmento, acarretando a consequente transformação da integral ao longo do contorno submerso num somatório, e definindo:

$$K_{ij} = \operatorname{Re} \left[\int_{S_j} G_1(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z=z_i},$$

$$L_{ij} = \operatorname{Re} \left[\int_{S_j} G_2(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z=z_i},$$

teremos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\phi_2(z_i, t)] &= \sum_{j=1}^N (Q_j K_{ij} - Q_{N+j} L_{ij} + Q_{-j} K_{i-j} - Q_{-N-j} L_{i-j}) \cos \omega t + \\ &+ \sum_{j=1}^N (Q_j L_{ij} + Q_{N+j} K_{ij} + Q_{-j} L_{i-j} + Q_{-N-j} K_{i-j}) \sin \omega t \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\phi_2(z_i, t)] &= \sum_{j=1}^N (Q_j L_{ij} + Q_{N+j} K_{ij} + Q_{-j} L_{i-j} + Q_{-N-j} K_{i-j}) \cos \omega t - \\ &- \sum_{j=1}^N (Q_j K_{ij} - Q_{N+j} L_{ij} + Q_{-j} K_{i-j} - Q_{-N-j} L_{i-j}) \sin \omega t . \end{aligned}$$

Então, as partes real e imaginária do potencial de velocidade $\phi_2^*(z_i)$ serão:

$$\operatorname{Re}(\phi_2^*) = \sum_{j=1}^N (Q_j K_{ij} - Q_{N+j} L_{ij} + Q_{-j} K_{i-j} - Q_{-N-j} L_{i-j}) \quad e$$

$$\operatorname{Im}(\phi_2^*) = \sum_{j=1}^N (Q_j L_{ij} + Q_{N+j} K_{ij} + Q_{-j} L_{i-j} + Q_{-N-j} K_{i-j}) .$$

O desenvolvimento das expressões para o cálculo de K_{ij} e L_{ij} encontra-se no Apêndice.

Como visto na modelação do problema de difração, a força de excitação é obtida através da integração da pressão hidrodinâmica ao longo do contorno submerso do corpo. Pela simplificação efetuada, teremos que essa pressão é constante em cada segmento. Logo, a integração pode ser substituída por um somatório e assim teremos:

$$F_D = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N [(\phi_{1_i} n_i + \phi_{1_{-i}} n_{-i}) + (\phi_{2_i} n_i + \phi_{2_{-i}} n_{-i})] s_i.$$

A primeira parcela entre parêntesis refere-se à força de Froude-Kriloff e a segunda à força devido ao potencial de difração.

A componente horizontal da força de excitação será:

$$F_{D_1} = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N [(\phi_{1_i} - \phi_{1_{-i}}) + (\phi_{2_i} - \phi_{2_{-i}})] n_{1_i} s_i.$$

A componente vertical será dada por:

$$F_{D_2} = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N [(\phi_{1_i} + \phi_{1_{-i}}) + (\phi_{2_i} + \phi_{2_{-i}})] n_{2_i} s_i.$$

A intensidade do momento de excitação será obtida por:

$$F_{D_3} = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N [(\phi_{1_i} - \phi_{1_{-i}}) + (\phi_{2_i} - \phi_{2_{-i}})] (y_i n_{1_i} - x_i n_{2_i}) s_i.$$

Vamos considerar a força e o momento de excitação na forma:

$$F_{D_1} = E_1 e^{-i\omega t}, \quad F_{D_2} = E_2 e^{-i\omega t} \quad \text{e} \quad F_{D_3} = E_3 e^{-i\omega t}.$$

Logo, teremos:

$$E_1 = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N \left[\frac{g\bar{\Psi}_1}{w} (e^{iv\bar{z}_i} - e^{-ivz_i}) + (\phi_{2_i}^* - \phi_{2_{-i}}^*) \right] n_{1_i} s_i,$$

$$E_2 = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N \left[\frac{g\bar{\Psi}_1}{w} (e^{iv\bar{z}_i} + e^{-ivz_i}) + (\phi_{2_i}^* + \phi_{2_{-i}}^*) \right] n_{2_i} x_i,$$

$$E_3 = -i\omega\rho \sum_{i=1}^N \left[\frac{g\bar{\Psi}_1}{w} (e^{iv\bar{z}_i} - e^{-ivz_i}) + (\phi_{2_i}^* - \phi_{2_{-i}}^*) \right] (y_i n_{1_i} - x_i n_{2_i}) s_i,$$

$$\text{Re}(E_1) = \rho w \sum_{i=1}^N \left[\frac{2g\bar{\Psi}_1}{w} e^{vy_i} \text{sen} vx_i + \text{Im}(\phi_{2_i}^*) - \text{Im}(\phi_{2_{-i}}^*) \right] n_{1_i} s_i,$$

$$\text{Im}(E_1) = -\rho w \sum_{i=1}^N [\text{Re}(\phi_{2_i}^*) - \text{Re}(\phi_{2_{-i}}^*)] n_{1_i} s_i,$$

$$\text{Re}(E_2) = \rho w \sum_{i=1}^N [\text{Im}(\phi_{2_i}^*) + \text{Im}(\phi_{2_{-i}}^*)] n_{2_i} s_i,$$

$$\text{Im}(E_2) = -\rho w \sum_{i=1}^N \left[\frac{2g\bar{\Psi}_1}{w} e^{vy_i} \cos vx_i + \text{Re}(\phi_{2_i}^*) + \text{Re}(\phi_{2_{-i}}^*) \right] n_{2_i} s_i,$$

$$\text{Re}(E_3) = \rho w \sum_{i=1}^N \left[\frac{2g\bar{\Psi}_1}{w} e^{vy_i} \text{sen} vx_i + \text{Im}(\phi_{2_i}^*) - \text{Im}(\phi_{2_{-i}}^*) \right] (y_i n_{1_i} - x_i n_{2_i}) s_i,$$

$$\text{Im}(E_3) = -\rho w \sum_{i=1}^N [\text{Re}(\phi_{2_i}^*) - \text{Re}(\phi_{2_{-i}}^*)] (y_i n_{1_i} - x_i n_{2_i}) s_i.$$

IV.2 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE RADIAÇÃO

Formulamos anteriormente um problema de valor de contorno para os potenciais de radiação ϕ_{3k} , inteiramente inde-

pendentes dos movimentos do corpo. Sua solução será obtida de maneira análoga a do problema de difração, empregando o método de distribuição de fontes no contorno submerso do corpo.

A partir daí estaremos aptos a determinar as massas e momentos de inércia adicionais e os coeficientes de amortecimento.

IV.2.1 - Aplicação do Método de Distribuição de Fontes

Analogamente o potencial de velocidade de uma fonte puntiforme unitária, $f(z, \zeta, t)$, também satisfaz as condições de contorno do problema em ϕ_{3k} , excetuando-se a condição cinemática no corpo.

Desse modo, os potenciais ϕ_{3k} poderão ser representados por:

$$\phi_{3k}(z, t) = \int_{s_0} Q^{(k)}(s) \cdot f(z, \zeta, t) \cdot ds, \\ k = 1, 2, 3,$$

sendo $Q^{(k)}(s)$ a densidade da distribuição de fontes correspondente a cada movimento do corpo.

Aplicando essa expressão à condição de contorno na superfície do corpo, teremos:

$$\tilde{n} \cdot \nabla \left\{ \int_{s_0} Q^{(k)}(s) \cdot f^*(z, \zeta) \cdot e^{-i\omega t} \cdot ds \right\} = i\omega e^{i\omega t} n_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Para $k = 3$, correspondente ao movimento de rotação do corpo, temos que $n_3 = y n_1 - x n_2$.

Considerando apenas a parte real da equação anterior, chegamos ao seguinte par de equações integrais:

$$\underline{n} \cdot \nabla \int_{S_0} [\operatorname{Re}(Q^{(k)}) \cdot \operatorname{Re}(G_1) - \operatorname{Im}(Q^{(k)}) \cdot \operatorname{Re}(G_2)] ds = 0,$$

$$\underline{n} \cdot \nabla \int_{S_0} [\operatorname{Re}(Q^{(k)}) \cdot \operatorname{Re}(G_2) + \operatorname{Im}(Q^{(k)}) \cdot \operatorname{Re}(G_1)] ds = -\omega n_k.$$

IV.2.2 - Solução Analítico-Numérica

Como considerado no problema de difração, as intensidades das densidades de fonte $Q^{(k)}(s)$ são admitidas constantes ao longo de cada segmento definido no contorno submerso do corpo.

Desse modo, o par de equações integrais se transforma em equações algébricas que devem ser resolvidas para fornecer os valores das densidades de fonte em cada segmento.

Devido à simetria do corpo e das linhas de potencial de radiação, podemos trabalhar apenas com um dos lados simétricos do contorno, o que simplifica os cálculos.

Levando em consideração esse aspecto e procedendo de maneira análoga ao problema de difração, chegamos a um siste-

ma de $2N$ equações algébricas lineares, assim expressas:

$$\sum_{j=1}^N Q_j^{(k)} [I_{ij} + (-1)^{k+1} I_{i-j}] - \sum_{j=1}^N Q_{N+j}^{(k)} [J_{ij} + (-1)^{k+1} J_{i-j}] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^N Q_j^{(k)} [J_{ij} + (-1)^{k+1} J_{i-j}] + \sum_{j=1}^N Q_{N+j}^{(k)} [I_{ij} + (-1)^{k+1} I_{i-j}] = -wn_{k_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, N; k = 1, 2, 3.$$

Para os movimentos horizontal e de rotação, $k = 1$ e $k = 3$ respectivamente, as densidades de fonte em um ponto e na sua imagem são iguais. Para o movimento vertical, $k = 2$, essas densidades são simétricas.

Conhecidas as intensidades das densidades de fontes para cada segmento do corpo, podemos obter o potencial ϕ_{3k} num ponto $z_i = (x_i, y_i)$.

Assim teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[\phi_{3k}(z_i, t)] &= \sum_{j=1}^N \{ Q_j^{(k)} [K_{ij} + (-1)^{k+1} K_{i-j}] - Q_{N+j}^{(k)} [L_{ij} + (-1)^{k+1} L_{i-j}] \} \cos \omega t \\ &+ \sum_{j=1}^N \{ Q_j^{(k)} [L_{ij} + (-1)^{k+1} L_{i-j}] + Q_{N+j}^{(k)} [K_{ij} + (-1)^{k+1} K_{i-j}] \} \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}[\phi_{3k}(z_i, t)] &= \sum_{j=1}^N \{ Q_j^{(k)} [L_{ij} + (-1)^{k+1} L_{i-j}] + Q_{N+j}^{(k)} [K_{ij} + (-1)^{k+1} K_{i-j}] \} \cos \omega t \\ &- \sum_{j=1}^N \{ Q_j^{(k)} [K_{ij} + (-1)^{k+1} K_{i-j}] - Q_{N+j}^{(k)} [L_{ij} + (-1)^{k+1} L_{i-j}] \} \sin \omega t \end{aligned}$$

sendo $Q_j^{(k)} = \text{Re}[Q^{(k)}(s_j)]$ e $Q_{N+j}^{(k)} = \text{Im}[Q^{(k)}(s_j)]$.

Na modelação do problema de radiação definimos o potencial de velocidade $\phi_{3k}^*(z_i)$ em função de ϕ_{3k} , ou seja:

$$\phi_{3k}^*(z_i) = \frac{1}{w} i e^{i\omega t} \phi_{3k}(z_i, t).$$

Então, teremos:

$$\text{Re}(\phi_{3k_i}^*) = -\frac{1}{w} \sum_{j=1}^N \{Q_j^{(k)} [L_{ij} + (-1)^{k+1} L_{i-j}] + Q_{N+j}^{(k)} [K_{ij} + (-1)^{k+1} K_{i-j}]\}$$

e

$$\text{Im}(\phi_{3k_i}^*) = \frac{1}{w} \sum_{j=1}^N \{Q_j^{(k)} [K_{ij} + (-1)^{k+1} K_{i-j}] - Q_{N+j}^{(k)} [L_{ij} + (-1)^{k+1} L_{i-j}]\}$$

Podemos agora determinar as massas adicionais e os coeficientes de amortecimento, já que foram definidos respectivamente por:

$$a_{jk} = -\rho \int_{S_0} \text{Re}(\phi_{3k}^*) n_j \, ds \quad e$$

$$b_{jk} = -\rho w \int_{S_0} \text{Im}(\phi_{3k}^*) n_j \, ds, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Pela simplificação efetuada teremos que o potencial ϕ_{3k}^* é constante em cada segmento. Logo, as integrações nas expressões acima podem ser substituídas por somatórios, o que acarreta:

$$a_{jk} = -2\rho \sum_{i=1}^N \operatorname{Re}(\phi_{3k_i}^*) n_{j_i} s_i \quad e$$

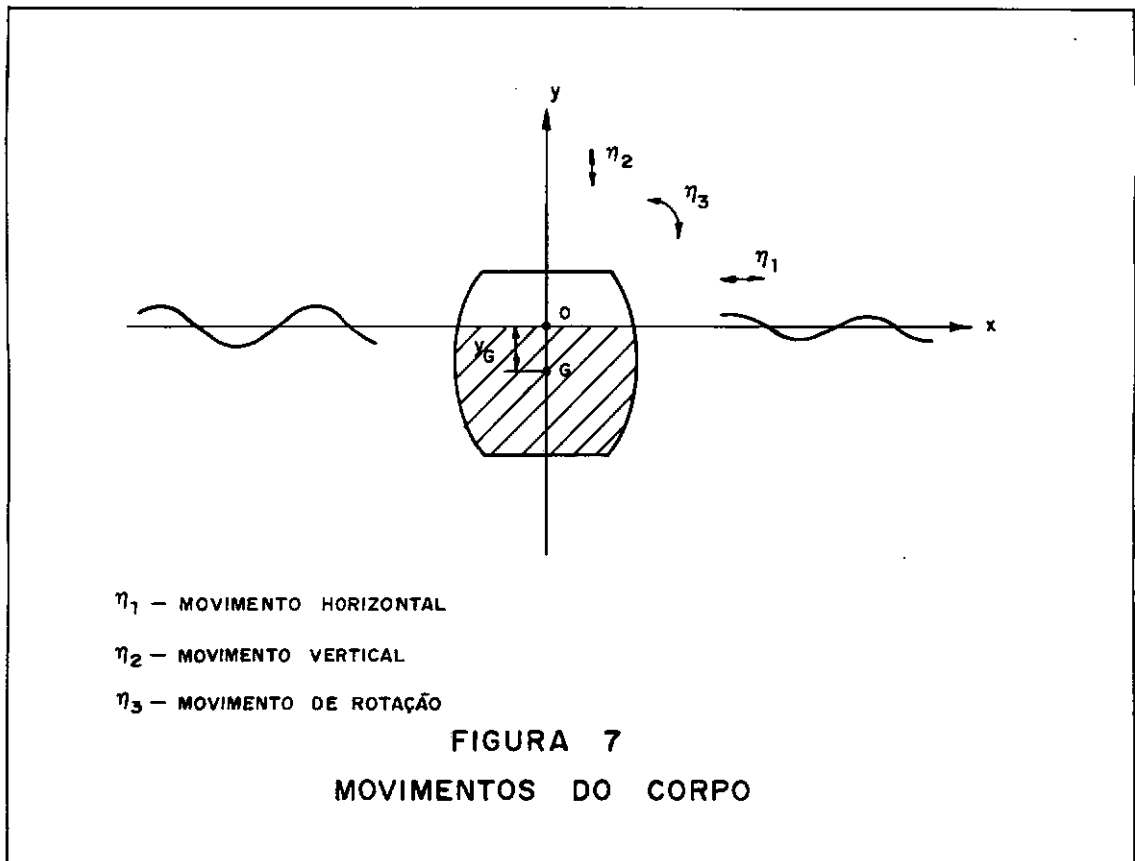
$$b_{jk} = -2\rho\omega \sum_{i=1}^N \operatorname{Im}(\phi_{3k_i}^*) n_{j_i} s_i .$$

As expressões das massas adicionais e dos coeficientes de amortecimento vêm multiplicadas por dois devido à simetria do corpo, uma vez que a integração deve ser feita ao longo de todo o contorno submerso, ou seja, os dois lados simétricos devem ser levados em consideração.

CAPÍTULO V

MOVIMENTOS DO CORPO

Como estamos lidando com um sistema bidimensional, a ação da onda incidente provocará no corpo movimentos em três direções, conforme indicado na figura 7.



Admitiremos a validade do princípio da independência dos movimentos, acoplados em planos distintos. Logo, o movimento η_2 no plano vertical não tem influência nos movimentos η_1 e η_3 que ocorrem no plano horizontal.

Para estabelecer as equações do movimento com três graus de liberdade, precisamos conhecer as forças que atuam no corpo. Em geral, essas forças são do tipo:

- forças de inércia;
- forças de amortecimento;
- forças de restauração;
- forças de excitação.

V.1 - FORÇA DE INÉRCIA

A força que age no corpo devido ao movimento acelerado deste é denominada força de inércia. É constituída basicamente de dois termos:

- massa ou momento de inércia do corpo;
- massa ou momento de inércia adicional.

Assim, a força inercial será o resultado do produto da massa ou momento pela aceleração linear ou angular do corpo, respectivamente.

Como os movimentos horizontal e de rotação estão acoplados, teremos que a componente horizontal da força de inércia será:

$$F_{I_1} = (M + a_{11}) \ddot{\eta}_1 + (a_{13} - M \cdot y_G) \ddot{\eta}_3 \quad (*)$$

$$(*) \quad \ddot{\eta}_i = \frac{d^2}{dt^2} \eta_i$$

onde:

M é a massa do corpo;

a_{11} a massa adicional na direção horizontal devido ao movimento na mesma direção;

a_{13} o momento estático adicional na direção horizontal devido ao movimento de rotação.

Para aplicar as equações do movimento devem ser consideradas as forças e os momentos em relação ao centro de gravidade do corpo. Os momentos adicionais foram avaliados em relação a um sistema de coordenadas cujos eixos encontram-se no plano da superfície livre em águas paradas. Logo, devem ser incluídos termos relativos à transformação dos momentos tomados em relação a eixos passando pelo centro de gravidade. Daí a inclusão do último termo na equação acima.

A componente vertical da força de inércia está relacionada apenas com o deslocamento do corpo na direção vertical, já que esse movimento independe dos demais. Teremos, então:

$$F_{I_2} = (M + a_{22}) \ddot{\eta}_2,$$

onde a_{22} é a massa adicional na direção vertical devido ao movimento na mesma direção.

Analogamente à componente horizontal, o momento da força de inércia será:

$$F_{I_3} = (a_{31} - M y_G) \ddot{\eta}_1 + (I + a_{33}) \ddot{\eta}_3, \quad (*)$$

onde I é o momento de inércia do corpo em relação à origem;

a_{31} o momento estático adicional em torno de um eixo normal ao plano xy , passando pela origem, devido ao movimento horizontal;

a_{33} o momento de inércia adicional em relação a esse mesmo eixo, devido ao movimento de rotação.

As massas e momentos de inércia adicionais são obtidos pela solução do problema de radiação, conforme apresentado no capítulo precedente.

V.2 - FORÇA DE AMORTECIMENTO

A perda de energia na geração de ondas provocadas pelos movimentos do corpo resulta em seu amortecimento. Surge assim uma força de amortecimento, em fase com a velocidade do corpo.

O amortecimento viscoso não é levado em conta em face de que os efeitos de viscosidade em corpos de dimensões elevadas é negligenciável, como comentado nas hipóteses simplificadoras.

Então, a componente horizontal da força de amortecimento é o resultado da ação combinada dos dois movimentos aco-

$$(*) \quad a_{31} = a_{13}$$

plados η_1 e η_3 , cuja expressão será dada por:

$$F_{a_1} = b_{11} \dot{\eta}_1 + b_{13} \dot{\eta}_3, \quad (*)$$

onde b_{11} é o coeficiente de amortecimento na direção horizontal devido ao movimento na mesma direção;

b_{13} o coeficiente de amortecimento na direção horizontal devido ao movimento de rotação.

Somente o deslocamento na direção vertical tem influência na componente vertical da força de amortecimento, representada por:

$$F_{a_2} = b_{22} \dot{\eta}_2,$$

sendo b_{22} o coeficiente de amortecimento na direção vertical devido ao movimento na mesma direção.

O momento da força de amortecimento é obtido da forma análoga à componente horizontal. Logo:

$$F_{a_3} = b_{31} \dot{\eta}_1 + b_{33} \dot{\eta}_3, \quad (**)$$

onde b_{31} é o coeficiente de amortecimento relativo à rotação do corpo, devido ao movimento horizontal;

$$(*) \quad \dot{\eta} = \frac{d}{dt} \eta.$$

$$(**) \quad b_{31} = b_{13}.$$

b_{33} o coeficiente de amortecimento relativo ao movimento de rotação.

A solução do problema de radiação também fornece os coeficientes de amortecimento, como mostrado no capítulo anterior.

V.3 - FORÇA DE RESTAURAÇÃO

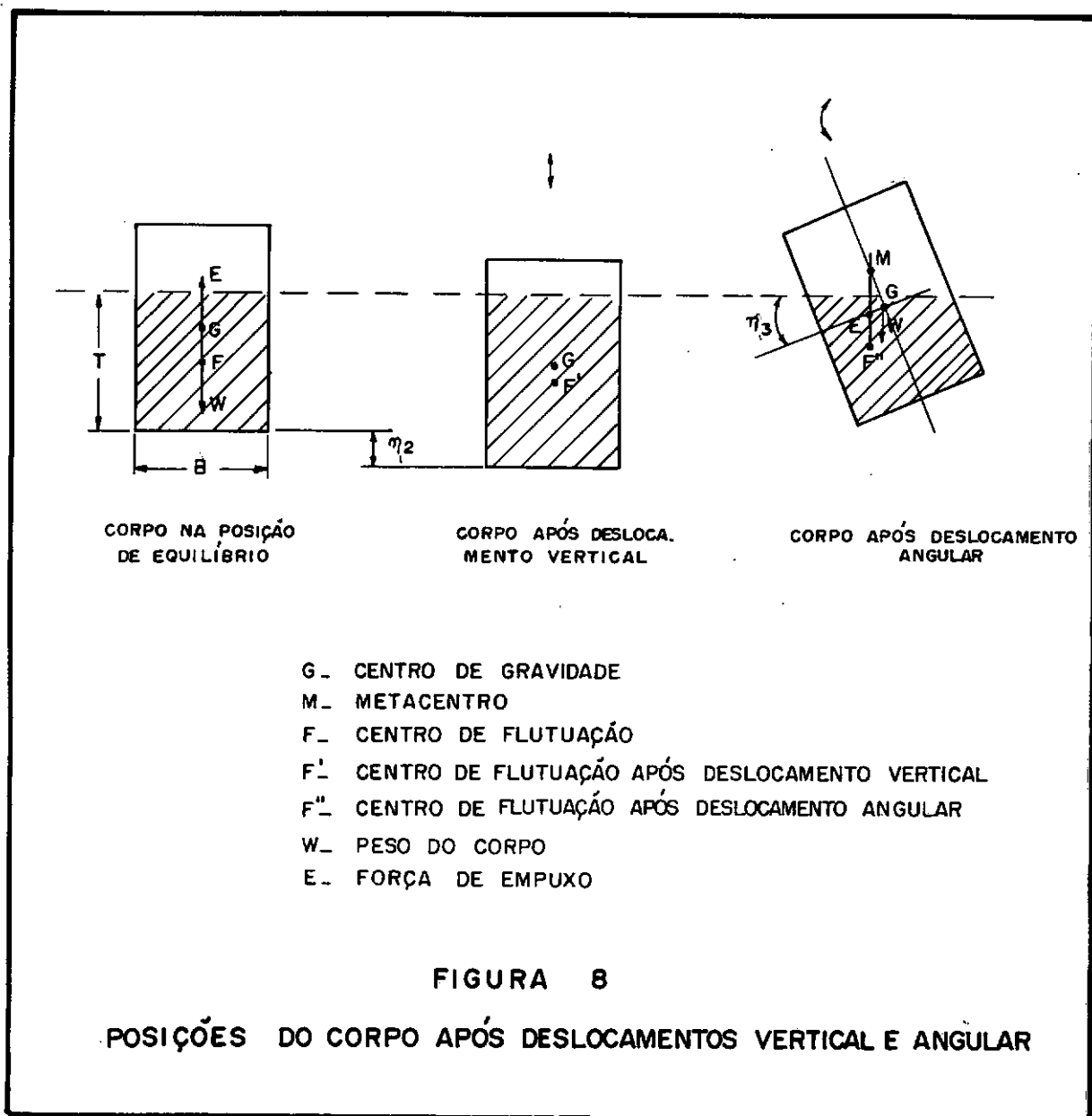
Para um corpo flutuante, as forças de restauração são de duas naturezas:

- forças hidrostáticas resultantes da variação do empuxo devido ao deslocamento do corpo de sua posição de equilíbrio estático;
- forças devido ao sistema de amarração do corpo.

Essas forças encontram-se em fase com o movimento do corpo, logo são o resultado do produto de um coeficiente por seu deslocamento.

No caso das forças hidrostáticas, vemos que apenas os movimentos vertical e de rotação são responsáveis pela variação do empuxo.

Como pode ser visto na figura 8, a variação da força de empuxo por unidade de comprimento do corpo, devido ao deslocamento vertical η_2 , será dada por: $\rho g B \eta_2$.



Com relação ao deslocamento angular, vemos na figura 8 que o momento restaurador do equilíbrio do corpo será: $W \cdot \overline{MG} \cdot \sin \eta_3$, sendo \overline{MG} a altura metacêntrica.

Para oscilações de pequena amplitude podemos tomar $\sin \eta_3 \sim \eta_3$. Lembrando-se que o empuxo é igual ao peso do corpo, teremos que o momento hidrostático devido ao movimento de rotação será:

$$\rho g B T \cdot \overline{MG} \cdot \eta_3 ,$$

sendo B a largura do corpo e T a sua altura submersa.

Como estamos considerando movimentos de pequena amplitude, podemos admitir que as tensões nas amarras do corpo são proporcionais aos deslocamentos. Logo, as forças restauradoras devido ao sistema de ancoragem serão iguais ao produto de constantes elásticas do cabo de amarração pelos deslocamentos.

Qualquer configuração de ancoragem do corpo pode ser substituída por um sistema equivalente com um único ponto de ancoramento, situado na origem do sistema de eixos coordenados.

Finalmente, podemos representar a componente horizontal da força de restauração por:

$$F_{r_1} = K_{e_1} \eta_1,$$

sendo K_{e_1} = constante elástica do sistema de amarração relativa ao movimento horizontal.

Por sua vez a componente vertical será:

$$F_{r_2} = (c_2 + K_{e_2}) \eta_2,$$

onde o coeficiente hidrostático c_2 é dado por $c_2 = \rho g B$ e K_{e_2} é a constante elástica da amarra relativa ao movimento vertical.

O momento de restauração é o resultado de:

$$F_{r_3} = (c_3 + K_{e_3}) \eta_3 ,$$

sendo o coeficiente hidrostático c_3 igual a $\rho g BT.\overline{MG}$ e K_{e_3} a constante elástica do sistema de amarras relativa ao movimento de rotação.

V.4 - FORÇA DE EXCITAÇÃO

O corpo é excitado harmonicamente pela ação da onda incidente.

As forças e momento de excitação são obtidos através da solução do problema de difração, como apresentado no capítulo precedente.

V.5 - EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Conhecidas as forças atuantes no corpo, as equações do movimento, sob a forma matricial, podem ser estabelecidas da seguinte maneira:

$$|\alpha_{ij}| \{\ddot{\eta}_i\} + |\beta_{ij}| \{\dot{\eta}_i\} + |\gamma_{ij}| \{\eta_i\} = \{F_{D_i}\}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

A matriz das forças inerciais é dada por:

$$|\alpha_{ij}| = \begin{vmatrix} M - a_{11} & 0 & a_{13} - My_G \\ 0 & M + a_{22} & 0 \\ a_{31} - My_G & 0 & I + a_{33} \end{vmatrix}$$

A matriz das forças de amortecimento resulta em:

$$|\beta_{ij}| = \begin{vmatrix} b_{11} & 0 & b_{13} \\ 0 & b_{22} & 0 \\ b_{31} & 0 & b_{33} \end{vmatrix}$$

Teremos que a matriz das forças de restauração será:

$$|\gamma_{ij}| = \begin{vmatrix} K_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & c_2 + K_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & c_3 + K_{e3} \end{vmatrix}$$

O vetor complexo das forças de excitação é representado por:

$$\{F_{D_i}\} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} e^{-i\omega t}.$$

O deslocamento do corpo pode ser definido por:

$$\eta_i = \bar{\eta}_i e^{-i(\omega t + \delta_i)}, \quad i = 1, 2, 3,$$

onde $\bar{\eta}_i$ é a amplitude do movimento,

δ_i o ângulo de fase.

Desse modo temos que $\dot{\eta}_i = -i\omega \eta_i$ e $\ddot{\eta}_i = -\omega^2 \eta_i$.

Sendo assim, a equação matricial se transforma em:

$$[-\omega^2 \alpha_{ij} - i\omega \beta_{ij} + \gamma_{ij}] \{\bar{\eta}_i e^{-i\delta_i}\} = \{E_i\}.$$

Separando as partes real e imaginária da equação acima, chegamos a:

$$[-\omega^2 \alpha_{ij} + \gamma_{ij}] \{\bar{\eta}_i \cos \delta_i\} - [\omega \beta_{ij}] \{\bar{\eta}_i \sin \delta_i\} = \{\text{Re}(E_i)\} \quad \text{e}$$

$$[-\omega^2 \alpha_{ij} + \gamma_{ij}] \{\bar{\eta}_i \sin \delta_i\} + [\omega \beta_{ij}] \{\bar{\eta}_i \cos \delta_i\} = -\{\text{Im}(E_i)\}.$$

Façamos $r_i = \bar{\eta}_i \cos \delta_i$ e $r_{i+3} = \bar{\eta}_i \sin \delta_i$, $i =$

1, 2, 3.

Logo, o par de equações acima se transforma num sistema de equações algébricas lineares, cujas incógnitas são r_i .

Após sua solução, podemos obter a amplitude de cada movimento através de:

$$\bar{n}_i = \sqrt{r_i^2 + r_{i+3}^2} ,$$

e o seu defasamento por:

$$\delta_i = \tan^{-1} \frac{r_{i+3}}{r_i} .$$

CAPÍTULO VI

COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO

O parâmetro mais importante na análise do desempenho de dispositivos de atenuação de ondas é o seu coeficiente de transmissão, ou seja, a relação entre a altura da onda transmitida e a altura da onda incidente.

Para a sua determinação necessitamos primeiramente obter uma expressão para a deformação da superfície livre devido à presença do corpo. Como apresentado na formulação geral do problema linearizado, a elevação da onda pode ser obtida da condição de contorno dinâmica na superfície livre, isto é:

$$\Psi(x, t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\Phi) \Big|_{y=0}.$$

Devido à superposição de soluções, teremos:

$$\Psi(x, t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\Phi_1 + \Phi_2) \Big|_{y=0} - \frac{1}{g} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial t} \text{Re}(\dot{\eta}_k \Phi_{3k}^*) \Big|_{y=0}$$

Podemos estabelecer que a deformação da superfície livre é o resultado da ação de ondas de difração, devido à incidência de ondas num corpo fixo, e de ondas de radiação, provenientes da oscilação forçada de um corpo flutuante em águas inicialmente paradas. Assim, teremos:

$$\Psi(x,t) = \Psi_2(x,t) + \sum_{k=1}^3 \Psi_{3k}(x,t) ,$$

onde Ψ_2 é a elevação da onda de difração e

Ψ_{3k} a elevação da onda de radiação provocada pelo movimento na direção k .

VI.1 - ONDA DE DIFRAÇÃO

Conforme estabelecido, temos que:

$$\Psi_2(x,t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\phi_1 + \phi_2) \Big|_{y=0} \quad \text{ou}$$

$$\Psi_2(x,t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\phi_1) \Big|_{y=0} - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\phi_2^* \cdot e^{-i\omega t}) \Big|_{y=0} .$$

O primeiro termo dessa expressão é a elevação da onda incidente, ou seja:

$$\Psi_1(x,t) = \bar{\Psi}_1 \operatorname{sen}(\omega t - vx) .$$

Logo, teremos:

$$\Psi_2(x,t) = \Psi_1(x,t) + \frac{W}{g} [\operatorname{Re}(\phi_2^*) \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{Im}(\phi_2^*) \cos \omega t] \Big|_{y=0} .$$

As partes real e imaginária do potencial de velocidade ϕ_2^* foram determinadas pela solução do problema de difração, no capítulo IV, em função das densidades de fonte e dos parâmetros K_{ij} e L_{ij} .

A elevação da onda transmitida deve ser determinada num ponto afastado do corpo. Nessas condições, isto é, para valores elevados de x_i e para $y_i = 0$, expressões para os termos K_{ij} e L_{ij} foram obtidas, conforme apresentado no Apêndice, resultando em:

$$K_{ij} = \frac{1}{v} \sin \theta_j [e^{v\lambda_j+1} \operatorname{sen} v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \operatorname{sen} v(x_i - \xi_j)] + \\ + \frac{1}{v} \cos \theta_j [e^{v\lambda_j+1} \cos v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \cos v(x_i - \xi_j)] .$$

$$L_{ij} = - \frac{1}{v} \sin \theta_j [e^{v\lambda_j+1} \cos v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \cos v(x_i - \xi_j)] + \\ + \frac{1}{v} \cos \theta_j [e^{v\lambda_j+1} \operatorname{sen} v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \operatorname{sen} v(x_i - \xi_j)] .$$

As expressões para K_{i-j} e L_{i-j} são facilmente obtidas devido às relações existentes entre um ponto do contorno submerso e sua imagem, isto é, $\xi_{-j} = -\xi_j$, $\lambda_{-j} = \lambda_j$ e $\theta_{-j} = \theta_j$.

Levando essas expressões nas fórmulas de $\operatorname{Re}(\phi_{2i}^*)$ e $\operatorname{Im}(\phi_{2i}^*)$, apresentadas no capítulo IV, substituindo x_i por x , e fazendo:

$$\begin{aligned}
 U_2 = & \sum_{j=1}^N \{ (Q_j - Q_{-j}) [(e^{v\lambda j+1} \cos v \xi_{j+1} - e^{v\lambda j} \cos v \xi_j) \sin \theta_j + \\
 & + (e^{v\lambda j+1} \sin v \xi_{j+1} - e^{v\lambda j} \sin v \xi_j) \cos \theta_j] - (Q_{N+j} + Q_{-N-j}) \cdot \\
 & \cdot [(e^{v\lambda j+1} \cos v \xi_{j+1} - e^{v\lambda j} \cos v \xi_j) \cos \theta_j - (e^{v\lambda j+1} \sin v \xi_{j+1} - \\
 & - e^{v\lambda j} \sin v \xi_j) \sin \theta_j] \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \sum_{j=1}^N \{ (Q_j + Q_{-j}) [(e^{v\lambda j+1} \cos v \xi_{j+1} - e^{v\lambda j} \cos v \xi_j) \cos \theta_j - \\
 & - (e^{v\lambda j+1} \sin v \xi_{j+1} - e^{v\lambda j} \sin v \xi_j) \sin \theta_j] + (Q_{N+j} - Q_{-N-j}) \cdot \\
 & \cdot [(e^{v\lambda j+1} \cos v \xi_{j+1} - e^{v\lambda j} \cos v \xi_j) \sin \theta_j + (e^{v\lambda j+1} \sin v \xi_{j+1} - \\
 & - e^{v\lambda j} \sin v \xi_j) \cos \theta_j] \} ,
 \end{aligned}$$

teremos finalmente que:

$$\operatorname{Re}(\phi_2^*) = \frac{1}{v} (U_2 \sin v x + V_2 \cos v x) \quad e$$

$$\operatorname{Im}(\phi_2^*) = \frac{1}{v} (V_2 \sin v x - U_2 \cos v x) .$$

Desse modo, a elevação da onda de difração será:

$$\psi_2(x,t) = \psi_1(x,t) + \frac{1}{w} [(U_2 \operatorname{sen} vx + V_2 \operatorname{cos} vx) \operatorname{sen} wt - \\ - (V_2 \operatorname{sen} vx - U_2 \operatorname{cos} vx) \operatorname{cos} wt].$$

Vamos definir: $\psi_2(x,t) = \bar{\psi}_2 \operatorname{sen}(wt - vx + \Delta_2)$, sendo $\bar{\psi}_2$ a amplitude da onda de difração e Δ_2 o ângulo de fase em relação à onda incidente.

Comparando essa expressão de ψ_2 com a anterior, concluimos que:

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{w} \sqrt{(w\bar{\psi}_1 + V_2)^2 + U_2^2} \quad e$$

$$\Delta_2 = \tan^{-1} \frac{U_2}{w\bar{\psi}_1 + V_2}.$$

Então, o coeficiente de transmissão para o corpo fixo será:

$$C_{t2} = \frac{\bar{\psi}_2}{\bar{\psi}_1} = \sqrt{\left(1 + \frac{V_2}{w\bar{\psi}_1}\right)^2 + \left(\frac{U_2}{w\bar{\psi}_1}\right)^2}.$$

VI.2 - ONDAS DE RADIAÇÃO

Admitindo que o corpo flutuante está sujeito a movimentos harmônicos η_k , a deformação da superfície livre poderá ser obtida através de:

$$\psi_{3k}(x,t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}(\eta_k \phi_{3k}^*) \Big|_{y=0}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Lembrando-se que $\eta_k = \bar{\eta}_k e^{-i(wt+\delta_k)}$, teremos:

$$\psi_{3k}(x,t) = v \bar{\eta}_k \left[\operatorname{Re}(\phi_{3k}^*) \cos(wt+\delta_k) + \operatorname{Im}(\phi_{3k}^*) \operatorname{sen}(wt+\delta_k) \right] \Big|_{y=0}.$$

O potencial de velocidade ϕ_{3k}^* foi obtido através da solução do problema de radiação, no capítulo IV.

Seguindo procedimento análogo ao anterior, vamos determinar a elevação da onda de radiação num ponto qualquer afastado do corpo.

Sendo assim, substituindo nas fórmulas de $\operatorname{Re}(\phi_{3k}^*)$ e $\operatorname{Im}(\phi_{3k}^*)$, apresentadas no capítulo IV, as expressões dos termos K_{ij} , K_{i-j} , L_{ij} e L_{i-j} , avaliados para valores elevados de $x_i = x$ e para $y_i = 0$, chegamos a:

$$\operatorname{Re}(\phi_{3k}^*) = \frac{1}{wv} (V_{3k} \cos vx - U_{3k} \operatorname{sen} vx),$$

$$\operatorname{Im}(\phi_{3k}^*) = \frac{1}{wv} (V_{3k} \operatorname{sen} vx + U_{3k} \cos vx),$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 U_{3k} = & \sum_{j=1}^N \{ [1+(-1)^{k+1}] Q_j^{(k)} [(e^{v\lambda_{j+1}} \cos v\xi_{j+1} - e^{v\lambda_j} \cos v\xi_j) \cos \theta_j - \\
 & - (e^{v\lambda_{j+1}} \sin v\xi_{j+1} - e^{v\lambda_j} \sin v\xi_j) \sin \theta_j] + [1-(-1)^{k+1}] \cdot Q_{N+j}^{(k)} \\
 & \cdot [(e^{v\lambda_{j+1}} \cos v\xi_{j+1} - e^{v\lambda_j} \cos v\xi_j) \sin \theta_j + (e^{v\lambda_{j+1}} \sin v\xi_{j+1} - \\
 & - e^{v\lambda_j} \sin v\xi_j) \cos \theta_j] \} ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{3k} = & \sum_{j=1}^N \{ [1-(-1)^{k+1}] Q_j^{(k)} [(e^{v\lambda_{j+1}} \cos v\xi_{j+1} - e^{v\lambda_j} \cos v\xi_j) \sin \theta_j + \\
 & + (e^{v\lambda_{j+1}} \sin v\xi_{j+1} - e^{v\lambda_j} \sin v\xi_j) \cos \theta_j] - [1+(-1)^{k+1}] \cdot Q_{N+j}^{(k)} \cdot \\
 & \cdot [(e^{v\lambda_{j+1}} \cos v\xi_{j+1} - e^{v\lambda_j} \cos v\xi_j) \cos \theta_j - (e^{v\lambda_{j+1}} \sin v\xi_{j+1} - \\
 & - e^{v\lambda_j} \sin v\xi_j) \sin \theta_j] \} .
 \end{aligned}$$

Desse modo, a elevação da onda de radiação será:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{3k}(x, t) = & \frac{\bar{\eta}_k}{w} [(V_{3k} \cos vx - U_{3k} \sin vx) \cdot \cos(wt + \delta_k) + \\
 & + (V_{3k} \sin vx + U_{3k} \cos vx) \cdot \sin(wt + \delta_k)] .
 \end{aligned}$$

$$\text{Façamos } \Psi_{3k}(x, t) = \bar{\Psi}_{3k} \sin(wt - vx + \Delta_{3k}),$$

onde $\bar{\Psi}_{3k}$ é a amplitude da onda de radiação e

Δ_{3k} o ângulo de fase em relação à onda incidente.

Comparando as expressões de Ψ_{3k} , teremos que:

$$\bar{\Psi}_{3k} = \frac{\bar{\eta}_k}{w} \sqrt{U_{3k}^2 + V_{3k}^2} ,$$

$$\Delta_{3k} = \tan^{-1} \frac{U_{3k} \sin \delta_k + V_{3k} \cos \delta_k}{U_{3k} \cos \delta_k - V_{3k} \sin \delta_k} .$$

Assim, os coeficientes de transmissão relativos às ondas de radiação serão:

$$C_{t_{3k}} = \frac{\bar{\Psi}_{3k}}{\bar{\Psi}_1} = \frac{\bar{\eta}_k}{w \bar{\Psi}_1} \sqrt{U_{3k}^2 + V_{3k}^2} .$$

VI.3 - COEFICIENTE DE TRANSMISSÃO TOTAL

Conhecidas as elevações das ondas de difração e radiação, podemos determinar a onda transmitida total por intermédio de:

$$\Psi(x,t) = \bar{\Psi}_2 \sin(wt - vx + \Delta_2) + \sum_{k=1}^3 \bar{\Psi}_{3k} \sin(wt - vx + \Delta_{3k}) .$$

Podemos definir:

$$\Psi(x,t) = \bar{\Psi} \sin(wt - vx + \Delta) .$$

Comparando as duas expressões acima, concluimos que a amplitude da onda transmitida será:

$$\bar{\Psi} = \sqrt{(\bar{\Psi}_2 \sin \Delta_2 + \sum_{k=1}^3 \bar{\Psi}_{3k} \sin \Delta_{3k})^2 + (\bar{\Psi}_2 \cos \Delta_2 + \sum_{k=1}^3 \bar{\Psi}_{3k} \cos \Delta_{3k})^2}.$$

Seu defasamento será dado por:

$$\Delta = \tan^{-1} \frac{\bar{\Psi}_2 \sin \Delta_2 + \sum_{k=1}^3 \bar{\Psi}_{3k} \sin \Delta_{3k}}{\bar{\Psi}_2 \cos \Delta_2 + \sum_{k=1}^3 \bar{\Psi}_{3k} \cos \Delta_{3k}}$$

Estamos agora em condições de analisar o desempenho hidrodinâmico do dispositivo quebra-obdas através da determinação do seu coeficiente de transmissão total, dado por:

$$C_t = \frac{\bar{\Psi}}{\bar{\Psi}_1}.$$

CAPÍTULO VII

FREQUÊNCIA IRREGULAR

O método de distribuição de fontes no contorno submerso do corpo falha para um conjunto discreto de frequências de onda, denominadas frequências irregulares.

John⁽¹¹⁾ verificou que, para certas frequências, o problema de valor de contorno para o potencial de velocidade na região exterior a um corpo oscilando na presença de superfície livre não poderia ser resolvido pelo método da equação integral quando o problema hipotético do potencial de velocidade aplicado à região interior ao contorno submerso apresentasse soluções de auto-valores.

Esse problema, como ilustrado na figura 9, pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\nabla^2 \psi = 0 \text{ na região interior;}$$

$$\psi_y - v\psi = 0 \text{ na superfície livre estendida à parte interna do corpo;}$$

$$\psi = 0 \text{ no contorno submerso.}$$

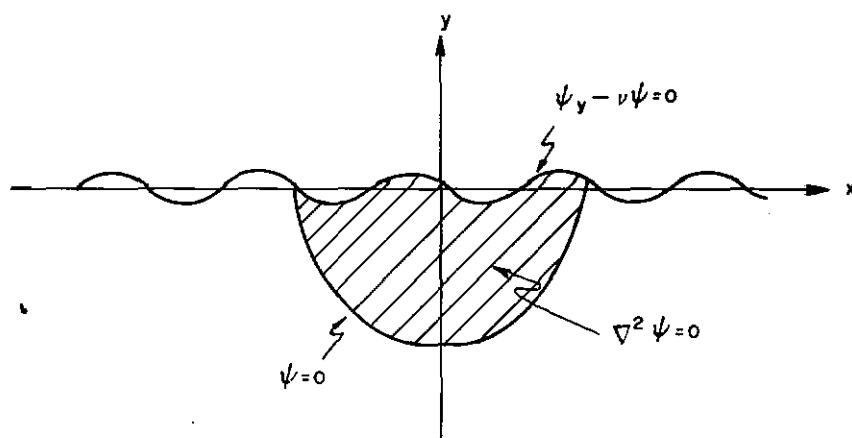


FIGURA 9

POTENCIAL DE VELOCIDADE NA REGIÃO
INTERIOR AO CONTORNO SUBMERSO

No caso de seções retangulares de largura B e profundidade T , o problema indicado na figura 10 pode ser facilmente resolvido pelo método de separação de variáveis. Obtêm-se assim um conjunto de frequências irregulares, expressas por:

$$w_n = \sqrt{\frac{n\pi g}{B} \coth(n\pi \frac{T}{B})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, a primeira frequência irregular que ocorre e o número de onda correspondente são dados respectivamente por:

$$w_1 = \sqrt{\frac{\pi g}{B} \coth(\frac{\pi T}{B})} \quad e$$

$$v_1 = \frac{\pi}{B} \coth(\frac{\pi T}{B}) \quad .$$

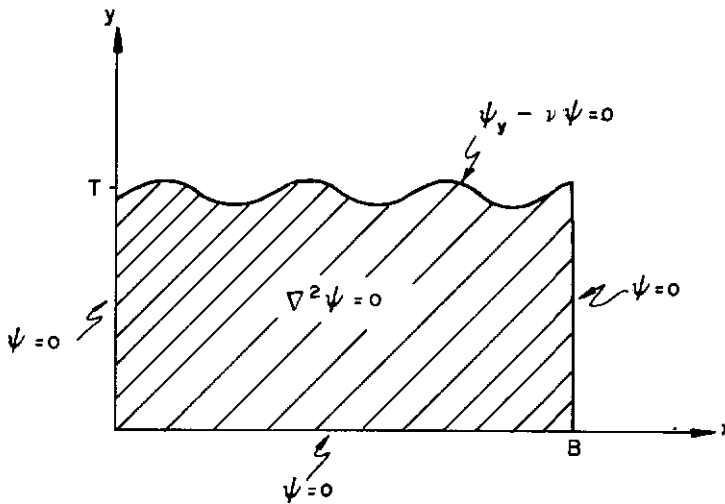


FIGURA 10

POTENCIAL DE VELOCIDADE NA REGIÃO INTERIOR
DE UM CORPO DE SEÇÃO RETANGULAR

Quando estamos lidando com o potencial de radiação na região exterior ao corpo, verificamos que, para cada frequência irregular, o sistema de equações lineares que leva à determinação das intensidades das densidades de fonte torna-se indeterminado. Decorre daí a impossibilidade de resolver o problema quando as frequências são anormais.

Como obtivemos uma solução analítico-numérica para o problema de radiação, a influência da frequência irregular não se manifesta em um único ponto e sim numa faixa em torno dessa frequência. Quanto maior o número de pontos do contorno submerso, menor será essa faixa.

Teoricamente, se esse número de pontos tendesse para o infinito, o que corresponderia à solução analítica pura, para valores de frequência de onda iguais às frequências irregulares não haveria solução do problema.

Para seções geométricas complexas, a solução do problema de valor de contorno na região interior ao corpo não pode ser facilmente encontrada. Sendo assim, a detecção das frequências anormais por essa via é contra-indicada.

Faltinsen⁽¹²⁾ mostra que um bom método para obter essas frequências consiste em realizar um estudo do determinante do sistema de equações algébricas lineares preparado para a determinação das densidades de fonte. Próximo das frequências irregulares esse determinante torna-se muito pequeno, indicando assim o intervalo onde o problema se manifesta.

Como o método de distribuição de fontes é bastante útil na resolução dos problemas hidrodinâmicos e sua grande limitação reside nessa irregularidade para determinadas frequências, estudos foram desenvolvidos com a finalidade de se obter uma técnica que evitasse a presente dificuldade.

Ogilvie⁽¹⁵⁾ apresenta um procedimento para remover a dificuldade criada pela anormalidade de frequência. Basicamente consiste em modificar a solução do problema na região interior através da inclusão de uma fonte na origem, o que acarreta uma alteração na função de Green.

Entretanto, o enfoque desse problema não faz parte do escopo do presente trabalho.

A ocorrência de frequências irregulares também surge na solução do problema de difração através da aplicação do método de equações-integrais, como pode ser comprovado por Murphy⁽¹⁶⁾.

CAPÍTULO VIII

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Foi preparado um programa de computador para fornecer resultados que permitam a análise do desempenho hidrodinâmico de dispositivos de atenuação de ondas, baseado no algoritmo desenvolvido nos capítulos precedentes.

Foram selecionados os quebra-mares flutuantes tipo prismático e tipo catamaran para análise dos resultados obtidos, como indicados na figura 11.

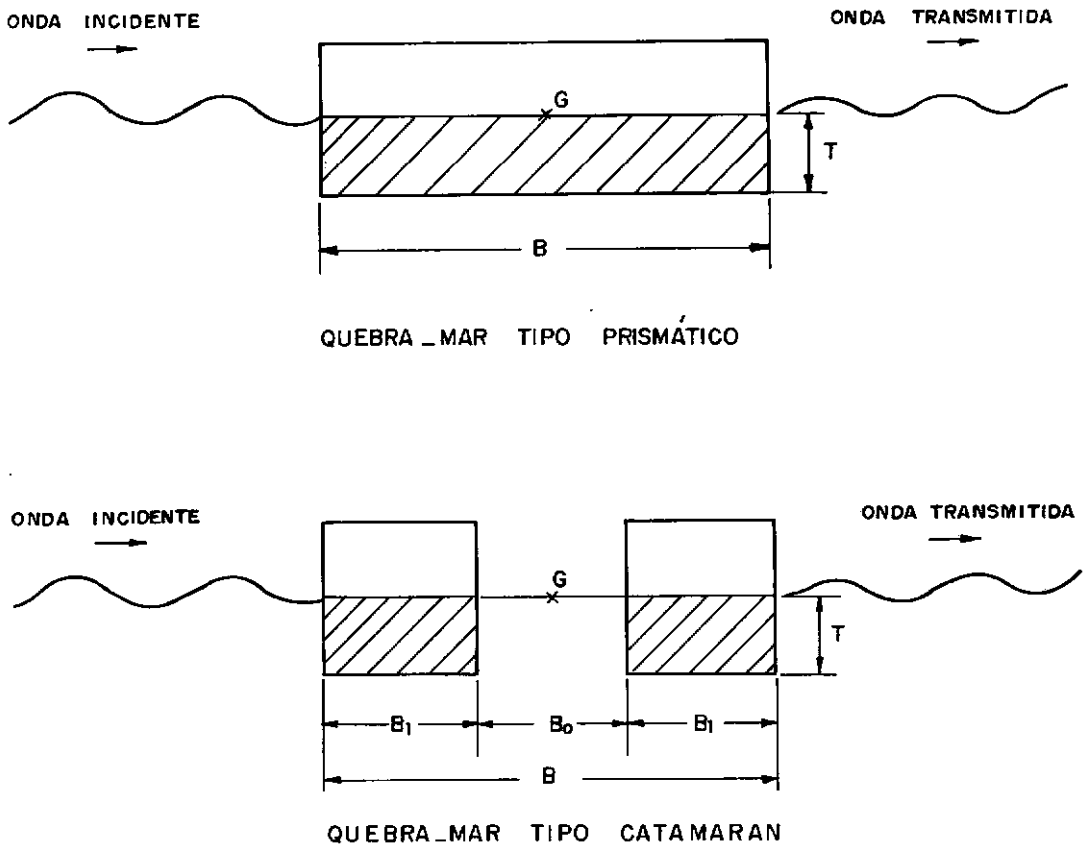


FIGURA 11

MODELOS SELECIONADOS DE QUEBRA_MARES FLUTUANTES

As características físicas e geométricas dos modelos selecionados estão apresentadas na tabela I.

	SÍMBOLO	UNIDADE	VALORES	
			PRISMÁTICO	CATAMARAN
Largura total	B	m	1,00	1,00
Distância entre módulos	B_0	m	-	0,34
Largura do módulo	B_1	m	-	0,33
Profundidade submersa	T	m	0,20	0,20
Altura metacêntrica	\overline{MG}	m	0,15	0,13
Massa	M	kg/m	200	200
Momento de inércia	I	kg.m ² /m	25	30

TABELA I: Dados dos Modelos de Quebra-Mares Flutuantes

Para o quebra-mar prismático, os resultados de cálculo foram comparados com dados de medição com modelos reduzidos, apresentados por Inoue⁽¹⁷⁾⁽¹⁸⁾, tendo sido observada boa correspondência entre ambos, como será mostrada a seguir.

As respostas de frequência para as massas adicionais, coeficientes de amortecimento, forças de excitação, movimentos e coeficientes de transmissão serão apresentadas nas figuras seguintes em termos de coeficientes adimensionalizados, cujas fórmulas encontram-se na Tabela II.

Os resultados apresentados nas figuras 12 a 22 foram obtidos para o modelo prismático, para frequências adimensionais inferiores a 1. Nessa faixa as frequências irregulares não ocorrem.

As figuras 12 e 13 mostram respectivamente a variação dos coeficientes de massa e momento de inércia adicionais com a frequência.

GRANDEZA		FÓRMULA
Massa adicional	Mov. horizontal	$C_{m_1} = \frac{a_{11}}{\rho BT}$
	Mov. vertical	$C_{m_2} = \frac{a_{22}}{\rho BT}$
Momento de inércia adicional		$C_{m_3} = \frac{a_{33}}{\rho B^3 T}$
Coeficiente de amortecimento	Mov. horizontal	$C_{a_1} = \frac{b_{11}}{\rho BT} \sqrt{\frac{B}{g}}$
	Mov. vertical	$C_{a_2} = \frac{b_{22}}{\rho BT} \sqrt{\frac{B}{g}}$
	Mov. rotação	$C_{a_3} = \frac{b_{33}}{\rho B^3 T} \sqrt{\frac{B}{g}}$
Força de excitação	Direção horizontal	$C_{e_1} = \frac{ F_{D1} }{\rho g BT}$
	Direção vertical	$C_{e_2} = \frac{ F_{D2} }{\rho g BT}$
Momento de excitação		$C_{e_3} = \frac{ F_{D3} }{\rho g B^3 T}$

continua...

continuação

GRANDEZA		FÓRMULA
Coeficiente de transmissão	Corpo fixo	$C_{t_2} = \bar{\psi}_2 / \bar{\psi}_1$
	Mov. Horizontal	$C_{t_{31}} = \bar{\psi}_{31} / \bar{\psi}_1$
	Mov. Vertical	$C_{t_{32}} = \bar{\psi}_{32} / \bar{\psi}_1$
	Mov. rotação	$C_{t_{33}} = \bar{\psi}_{33} / \bar{\psi}_1$
	Total	$C_t = \bar{\psi} / \bar{\psi}_1$
Movimentos	Horizontal	$C_1 = \bar{\eta}_1 / \bar{\psi}_1$
	Vertical	$C_2 = \bar{\eta}_2 / \bar{\psi}_1$
	Rotação	$C_3 = \bar{\eta}_3 / \bar{\psi}_1$

TABELA II: Fórmulas dos Coeficientes Adimensionais

Nas figuras 14 e 15 temos as curvas dos coeficientes de amortecimento. Para baixas frequências observamos que o amortecimento devido ao movimento vertical é bem mais efetivo que o amortecimento provocado pelo movimento horizontal. Entretanto, enquanto o primeiro decresce acentuadamente, o segundo tem comportamento contrário. Numa frequência adimensional em torno de 0,24 eles se igualam e a partir daí há uma inversão de efeitos, com a predominância do amortecimento devido à geração de ondas causadas pela oscilação do corpo na direção horizontal.

O decréscimo das forças e momento de excitação com o aumento da frequência pode ser visto nas figuras 16 e 17.

Os resultados teóricos para as amplitudes dos movimentos horizontal, vertical e de rotação são apresentados nas figuras 18, 19 e 20, juntamente com os dados experimentais obtidos por Inoue^{(17) (18)} através de testes com modelos reduzidos. Observa-se que os valores calculados indicam uma boa concordância com os dados de medições na faixa de frequência analisada.

A curva do movimento vertical mostra uma ligeira ressonância numa frequência adimensional próxima de 0,4.

Na figura 21 temos os resultados de cálculo dos coeficientes de transmissão das ondas de difração e radiação, tomadas separadamente, enquanto que, na figura 22, encontra-se a curva do coeficiente de transmissão total do modelo.

Pode ser observada a boa correspondência entre os resultados teóricos e os dados obtidos pelos trabalhos experimentais de Inoue, citados anteriormente.

Uma análise mais pormenorizada dessas duas últimas figuras permite concluir que:

- Para baixas frequências a atenuação de ondas é pequena. Nessas condições os efeitos das ondas de radiação devido aos movimentos horizontal e vertical tendem a se cancelar por causa do de

fasamento existente entre elas. Por outro lado a amplitude da onda de difração é relativamente elevada, constituindo-se portanto na principal responsável pela transmissão total do corpo.

- À medida que a frequência aumenta, a onda transmitida após a incidência de ondas no corpo fixo diminui de amplitude, melhorando as condições de atenuação.
- A onda de radiação devido ao movimento de rotação tem pouca influência na transmissão do quebra-mar. Sua amplitude é bastante baixa em todo o intervalo de frequência analisado.
- A curva da onda de radiação provocada pelo movimento vertical cresce rapidamente, atingindo um máximo em torno da frequência adimensional de 0,4. Isto é explicado pela ressonância observada para esse movimento em torno da frequência citada. A partir desse ponto o decréscimo da curva é acentuado.
- A curva da onda de radiação devido ao movimento horizontal também cresce com a frequência, porém de forma mais suave.
- Na frequência adimensional de 0,48 o quebra-mar encontra-se nas condições ótimas de atenuação de ondas, isto é, ocorre a minimização do coeficiente de transmissão total. É o resultado de efeitos contrários provocados pelas ondas de difração e de radiação devido ao movimento horizontal, de um lado, e pela onda de radiação provocada pelo movimento vertical do outro.

- A partir do ponto mínimo a influência da transmissão do corpo fixo e do movimento vertical diminui acentuadamente. Assim, a transmissão é devida quase que exclusivamente ao movimento horizontal.

As observações feitas à luz das figuras 21 e 22 mostram a grande influência do mecanismo de interferência de ondas geradas pelos movimentos do corpo flutuante na atenuação da onda transmitida total.

Os cálculos foram efetuados sem considerar a influência do sistema de ancoragem do quebra-mar, ou seja, foram negligenciadas as forças devido às tensões nas amarras.

Adee e Martin⁽¹⁹⁾ também realizaram estudos teóricos do modelo de quebra-mar prismático, tendo sido tiradas conclusões semelhantes às do presente trabalho.

A fim de verificar a ocorrência de frequências irregulares foram obtidas as respostas para as grandezas em estudo na faixa de frequência adimensional de 1 a 3, conforme pode ser observado nas figuras 23 a 33.

Aplicando a fórmula apresentada no capítulo VII temos que a primeira frequência irregular corresponde a uma frequência adimensional de 1,13, o que pode ser visto nas figuras 23 e 25 para os respectivos coeficientes de massa adicional e de amortecimento relativos ao movimento vertical.

Para os movimentos acoplados, horizontal e de rotação, as frequências irregulares ocorrem em pontos diferentes daqueles obtidos para o movimento vertical. Nesse caso, a primeira frequência anormal está próxima de 1,40, como pode ser visto nas figuras 23 a 26.

A explicação para essa diferença reside no fato de que os determinantes dos sistemas de equações para a determinação das densidades de fonte tendem para zero em valores diferentes de frequência.

Nas figuras 27 e 28 podemos ver a ocorrência da irregularidade para as forças e momento de excitação. As frequências anormais surgem nos mesmos intervalos anteriores porque os determinantes do problema de difração também tendem para zero nos mesmos pontos.

Observa-se nas figuras 29 a 31 que as amplitudes dos movimentos refletem claramente a irregularidade de frequência.

Na figura 32 podemos ver a influência das frequências anormais nos coeficientes de transmissão. A mesma constatação pode ser feita na figura 33.

Entretanto, é interessante notar que o fenômeno de anormalidade de frequência não impede a análise do desempenho hidrodinâmico do quebra-mar visto que a tendência da curva do coe-

ficiente de transmissão total pode ser facilmente acompanhada na figura 33.

Nas figuras 34 a 44 encontramos os resultados teóricos para o modelo de quebra-mar flutuante tipo catamaran, na faixa de frequência adimensional de 0,5 a 1,5.

Os coeficientes de massa e momento de inércia adicional podem ser vistos nas figuras 34 e 35. As curvas são bastante diferentes daquelas obtidas para o modelo prismático, inclusive tendo sido determinados coeficientes negativos.

A mesma observação pode ser estendida para os coeficientes de amortecimento, apresentados nas figuras 36 e 37.

Esse comportamento aparentemente anômalo dos coeficientes de massa adicional e de amortecimento pode ser explicado devido à interação hidrodinâmica entre os dois módulos do catamaran, como foi observado por Nordenstron, Faltinsen e Pedersen⁽²⁰⁾.

Nas figuras 38 e 39 temos a variação das forças e momento de excitação com a frequência, apresentando também respostas bastante diversas das obtidas para o modelo prismático.

As amplitudes dos movimentos podem ser vistas nas figuras 40 a 42. A curva referente ao movimento vertical apresenta uma ligeira semelhança com os resultados do modelo prismático.

Verifica-se que as amplitudes dos movimentos sofrem um acentuado decréscimo e a partir de determinada frequência há uma reversão de seu comportamento. Nesses pontos de inflexão os deslocamentos praticamente se anulam. Para os movimentos horizontal e vertical ocorrem numa frequência adimensional em torno de 1,04 e no caso do movimento de rotação a uma frequência de 0,88.

Na figura 43 temos os coeficientes de transmissão devido ao corpo fixo e aos movimentos.

Salientamos as características bastante similares das curvas da onda de difração e da onda de radiação devido ao movimento vertical. A partir de uma frequência adimensional em torno de 1 a sua influência na transmissão total praticamente não se faz sentir.

A onda transmitida devido ao movimento horizontal se comporta de forma semelhante ao próprio movimento, como pode ser observado nas figuras 40 e 43.

Quanto à onda de radiação provocada pelo movimento de rotação, vemos que seu efeito na transmissão total não é pequeno, como no caso do modelo prismático. Baixas amplitudes só se verificam no intervalo de frequência adimensional compreendido entre 0,85 e 1,25.

A curva do coeficiente de transmissão total, apresentada na figura 44, tem um aspecto semelhante a sua congênere do modelo prismático, porém com aclives e declives menos acentuados.

As condições ótimas de atenuação de ondas do modelo catamaran são encontradas na frequência adimensional de 1,04. São explicadas pela ausência dos movimentos horizontal e vertical nessa frequência e também porque, nessa mesma frequência, as ondas de difração e de radiação devido ao movimento de rotação praticamente não influem na transmissão total.

Infelizmente não dispomos de dados experimentais para o modelo catamaran para poder afirmar a validade de aplicação da teoria desenvolvida em quebra-mares desse tipo. Entretanto, os bons resultados obtidos com o modelo prismático nos encorajam a aplicar a teoria a outros tipos de dispositivos rígidos de atenuação de ondas.

Comparando os dois modelos testados, verificamos a conveniência de empregar quebra-mares tipo catamaran para frequências mais altas. Também a seu favor temos que o intervalo de frequências em torno do ponto mínimo, associado a baixos coeficientes de transmissão, é mais amplo do que para o modelo prismático.

Em síntese, concluímos que a simulação matemática do comportamento hidrodinâmico de modelos de quebra-mares flu-

tuantes, empregando o método de distribuição de fontes na solução do problema, se constitui em ferramenta bastante útil e válida na análise do desempenho e no projeto de dispositivos rígidos de atenuação de ondas.

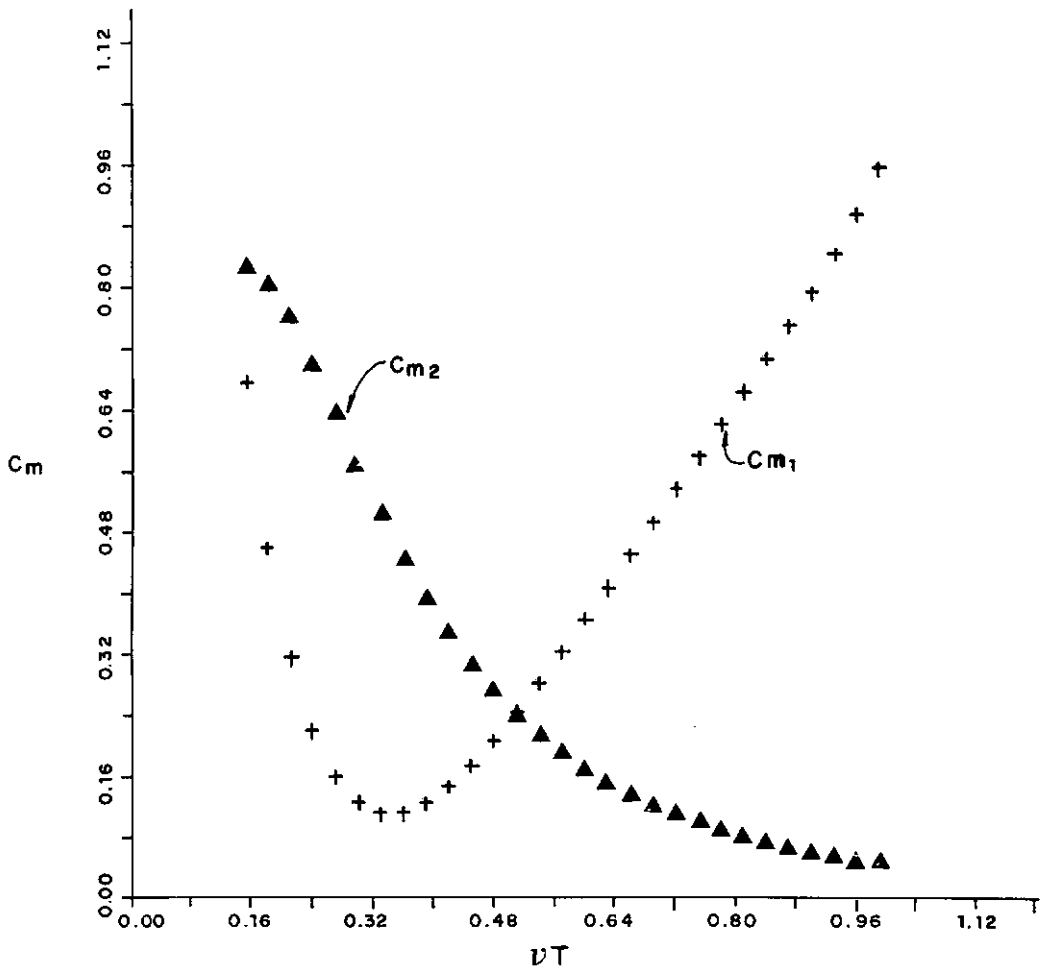


Figura 12
Coef. Massa Adicional - Modelo Prismático

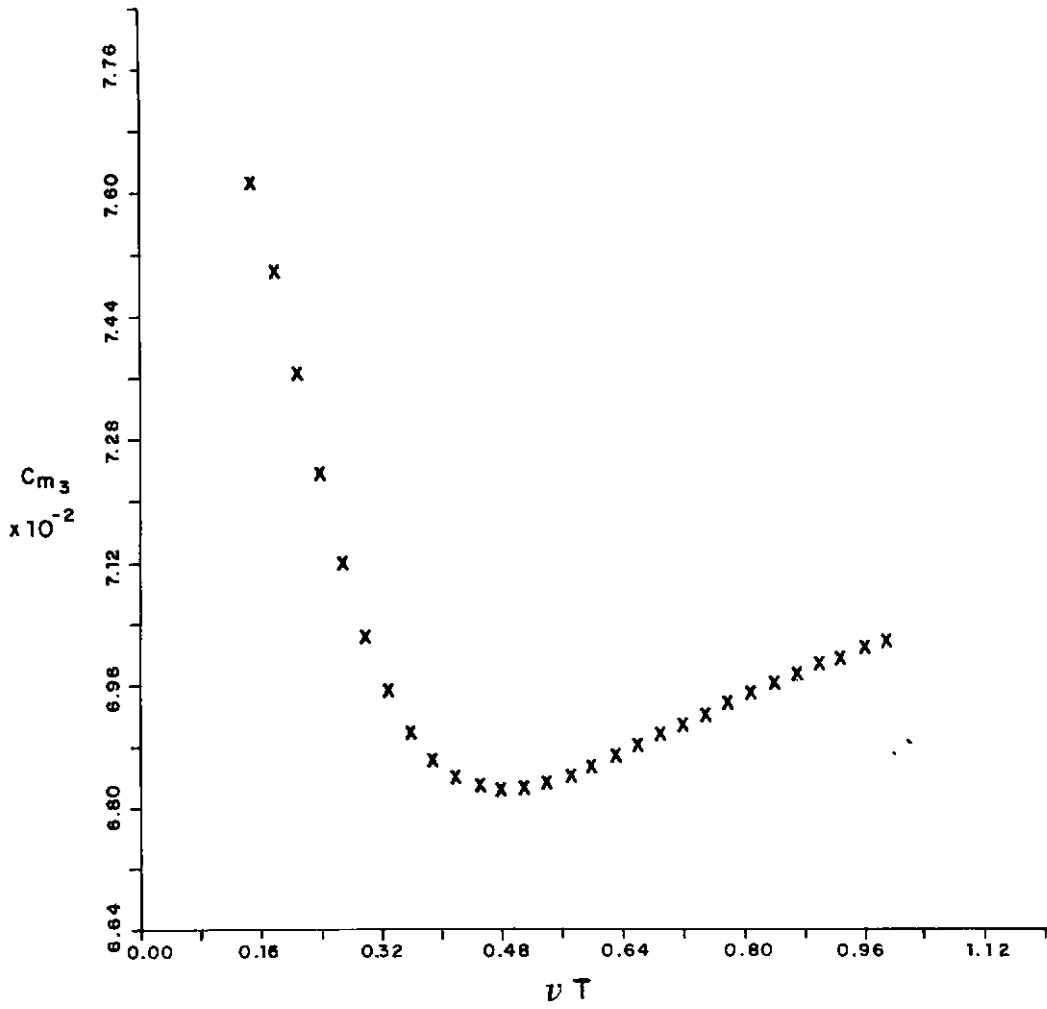


Figura 13

Coef. Momento Inercia Adicional - Modelo Prismático

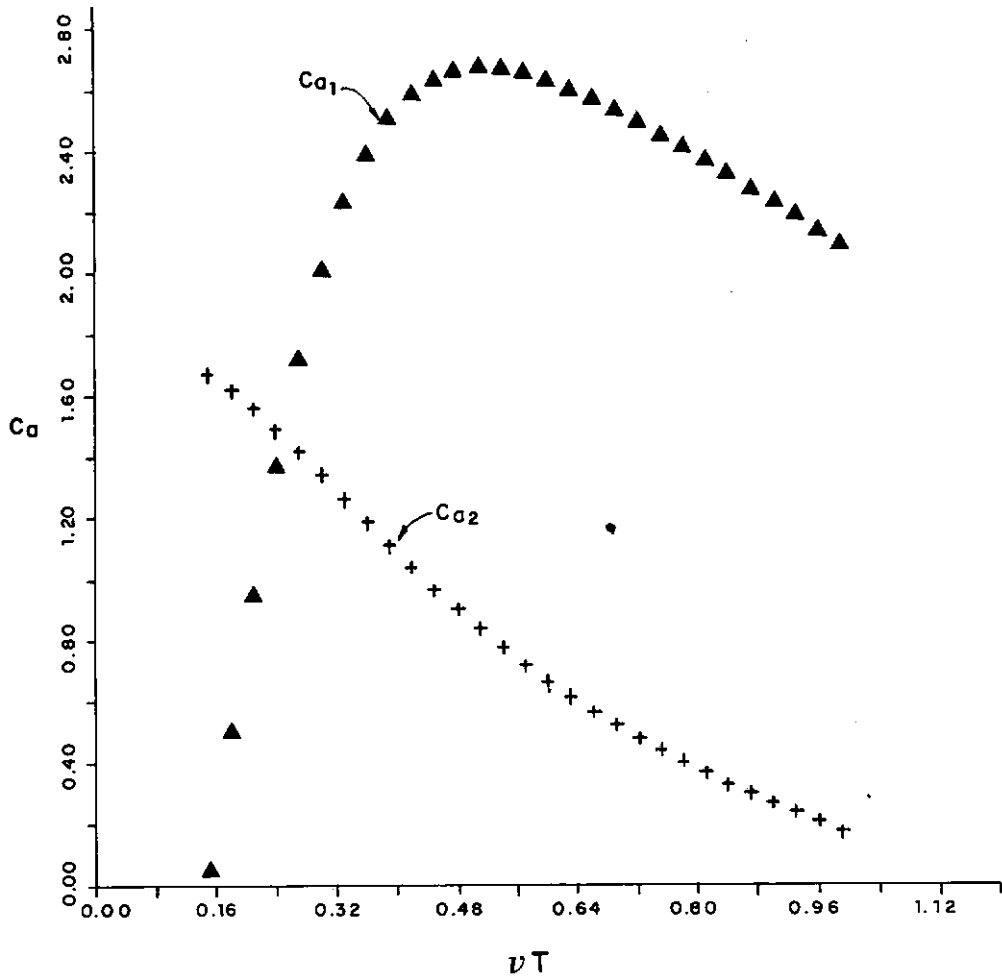


Figura 14
Coef. Amortecimento - Modelo Prismático

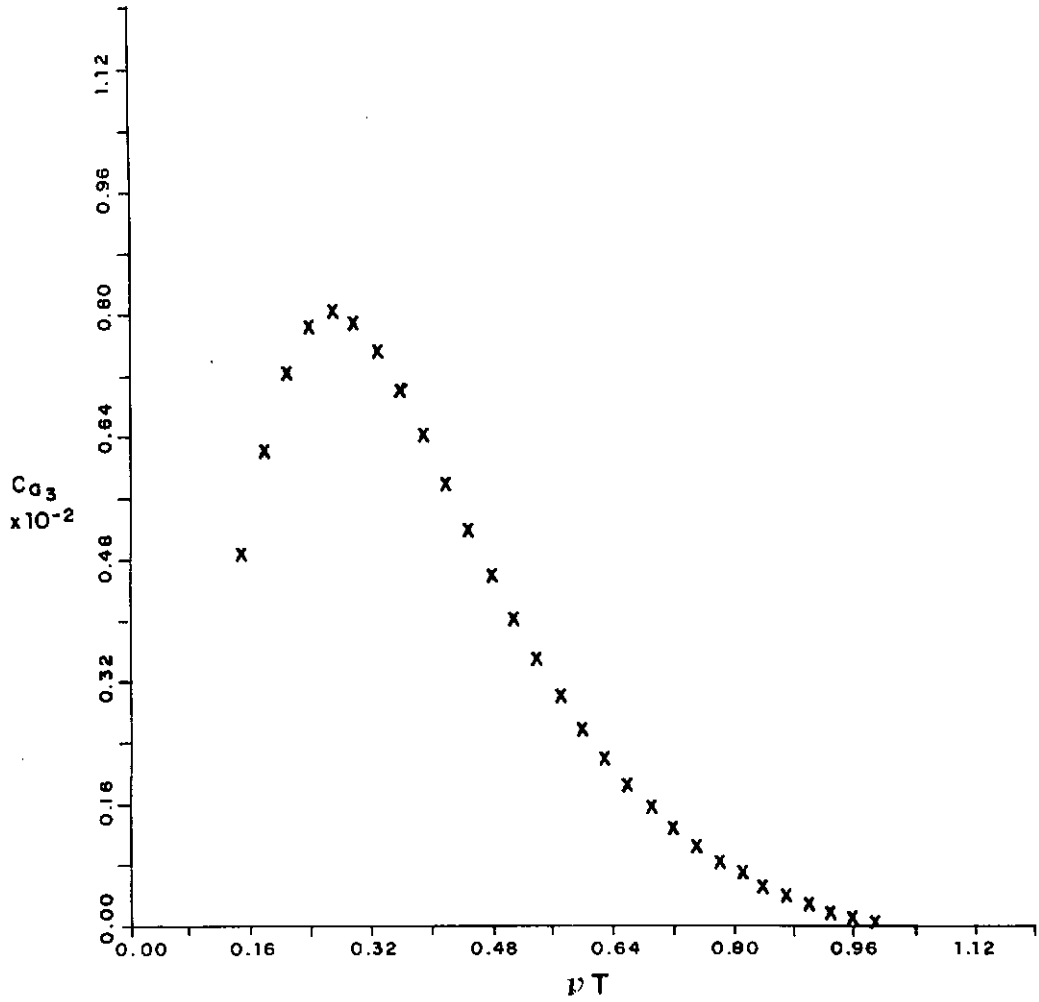


Figura 15
Coef. Amortecimento Devido ao Movimento Rotação -
Modelo Prismático

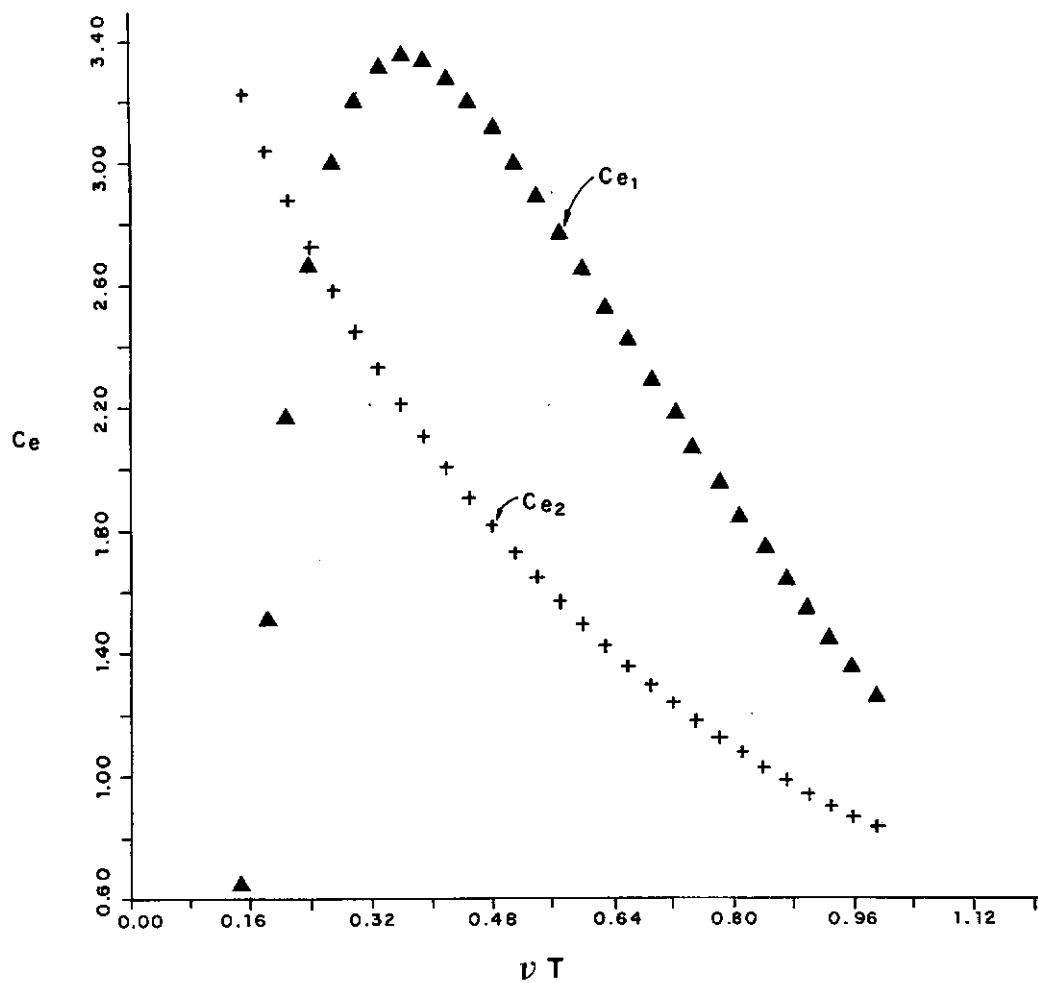


Figura 16
Força de Excitação — Modelo Prismático

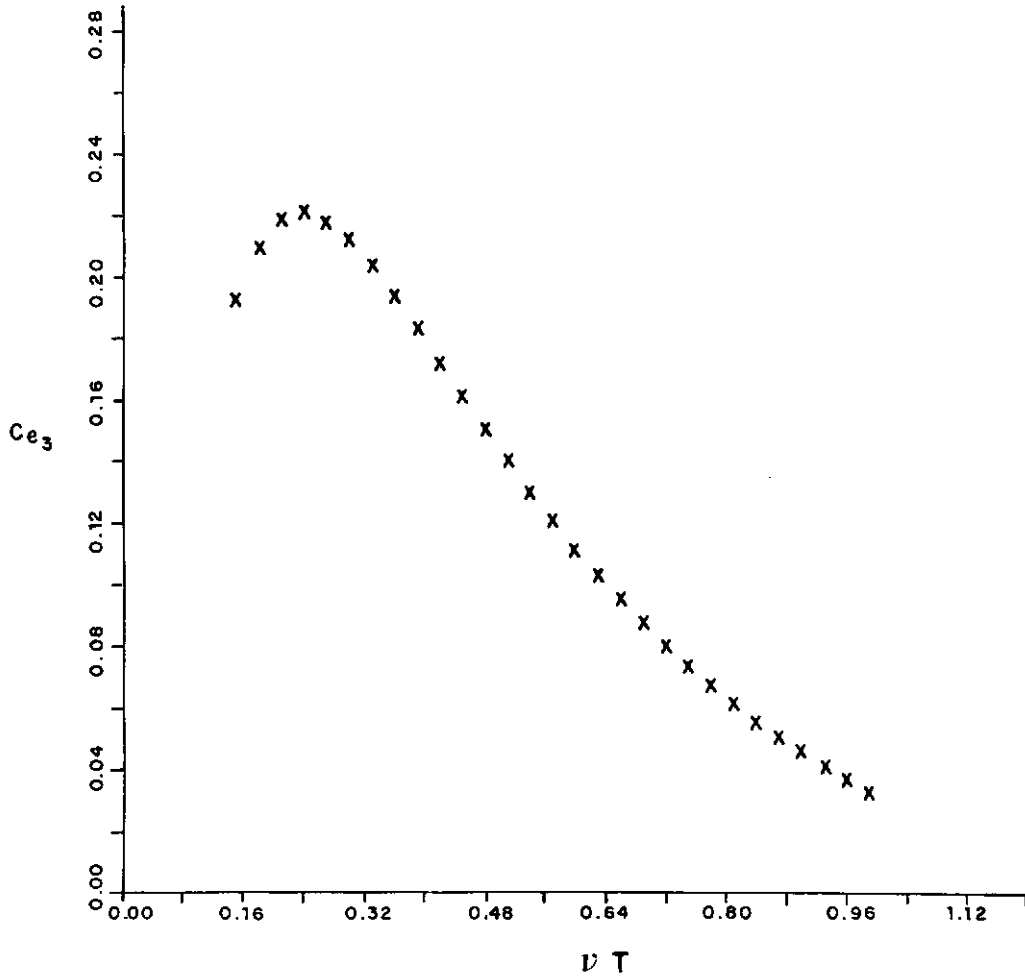
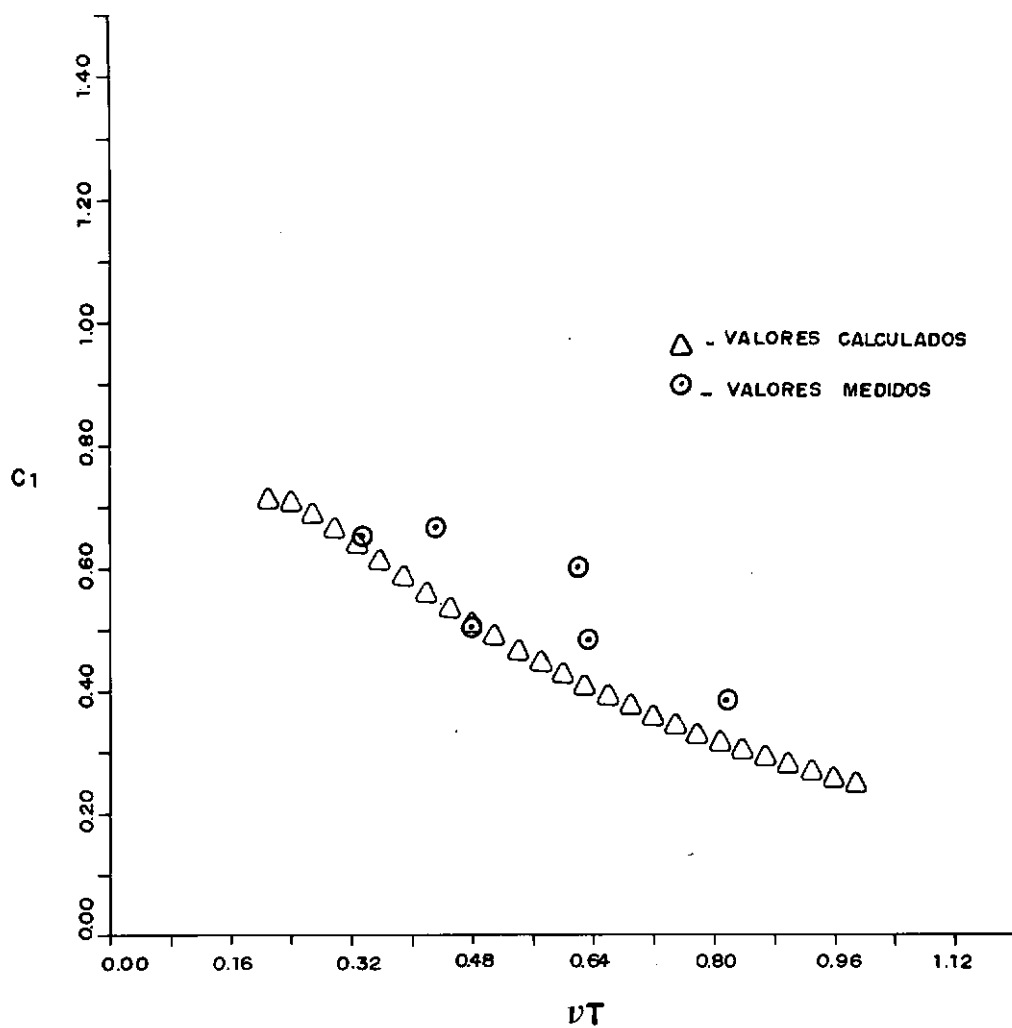


Figura 17
Momento de Excitação – Modelo Prismático

**Figura 18****Amplitude do Mov. Horizontal - Modelo Prismático**

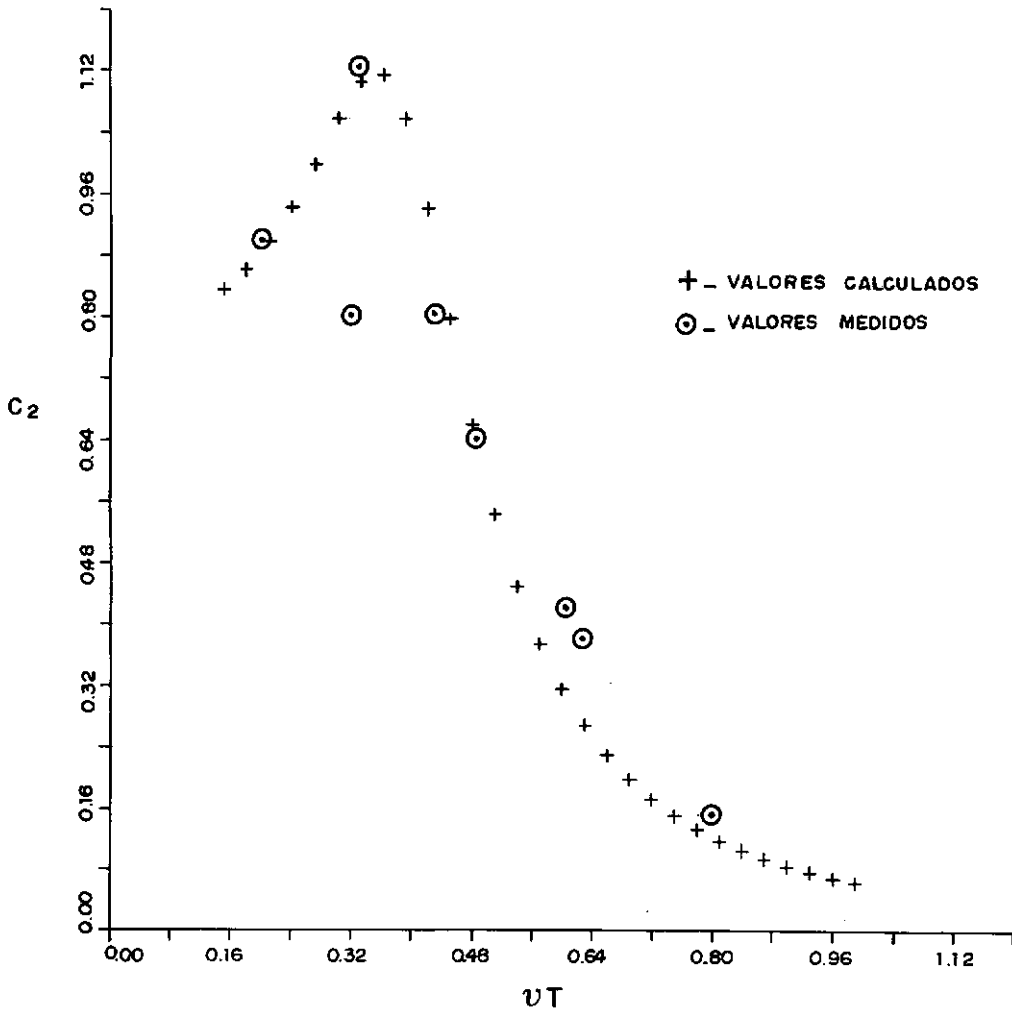


Figura 19

Amplitude Mov. Vertical - Modelo Prismático

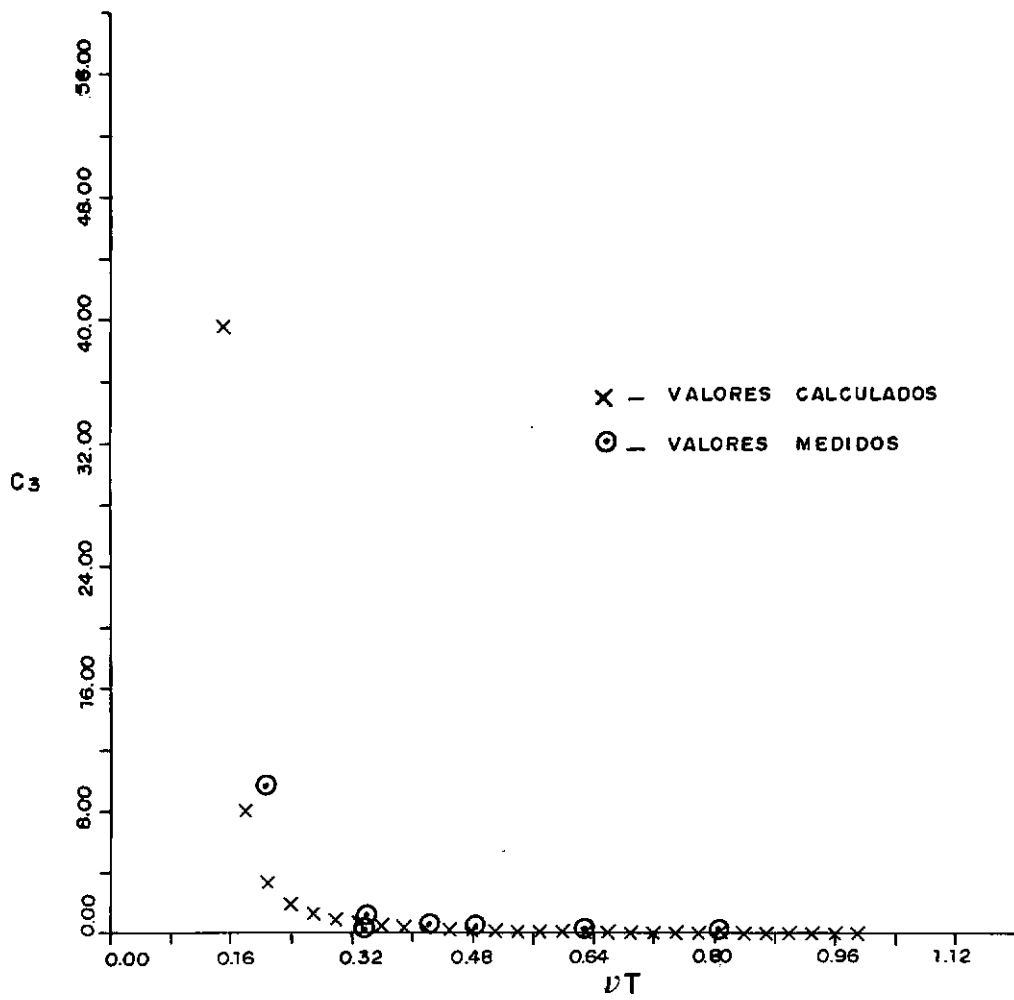


Figura 20

Amplitude Mov. Rotação - Modelo Prismático

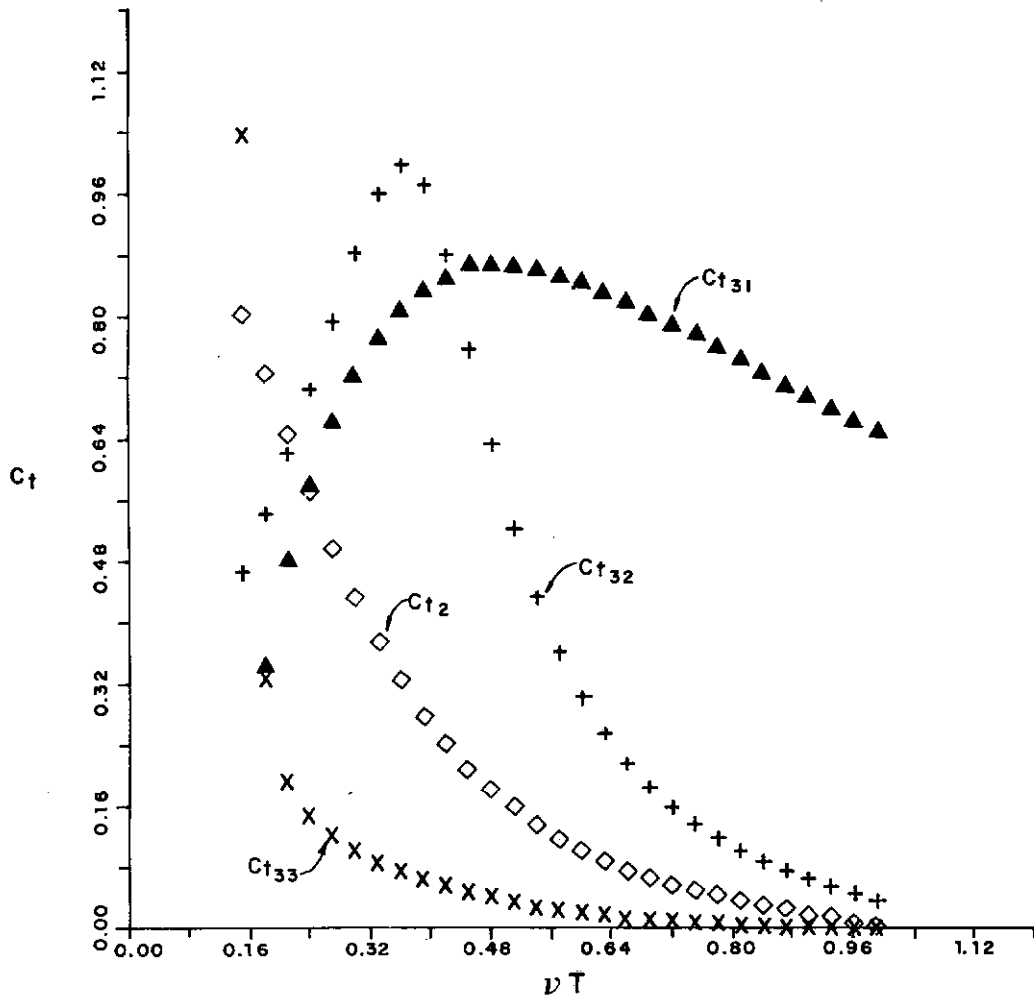


Figura 21
Coeficiente de Transmissão - Modelo Prismático

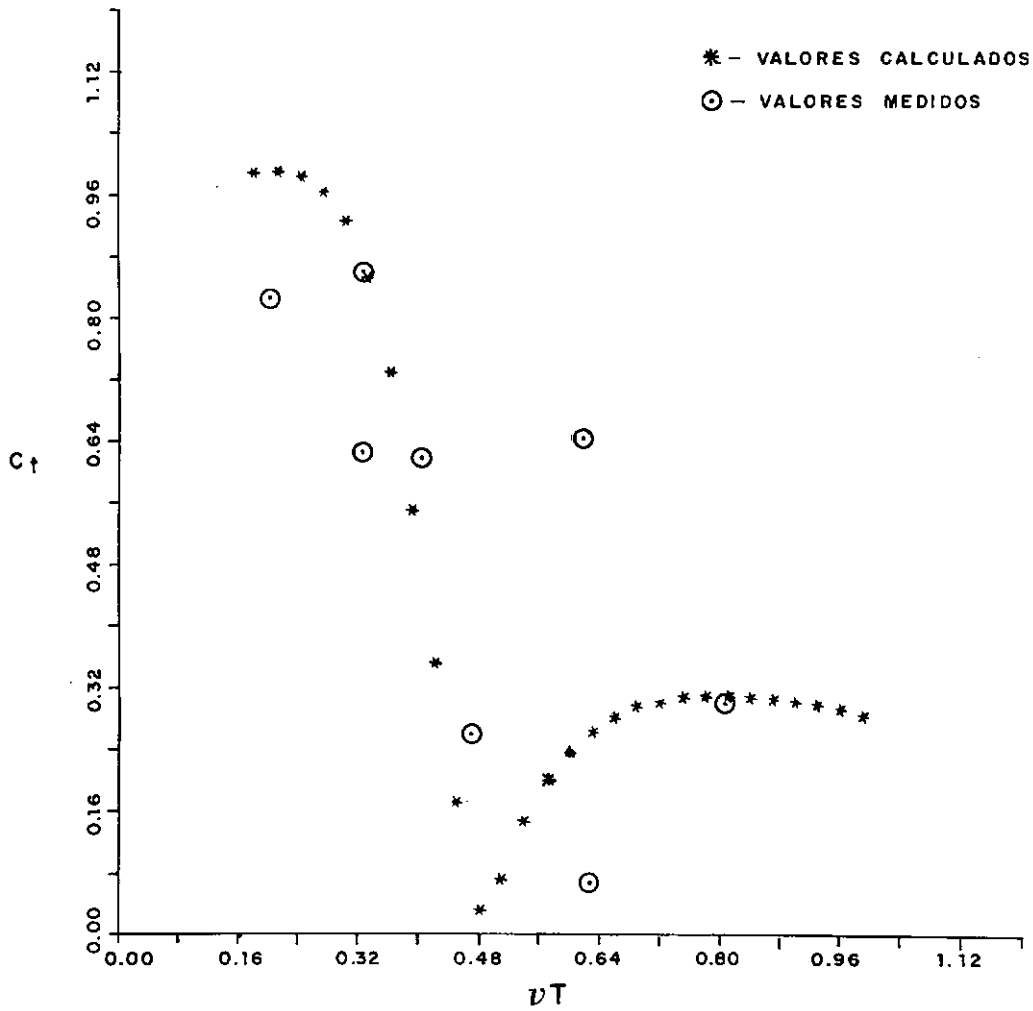


Figura 22
Coeficiente Transmissão Total - Modelo Prismático

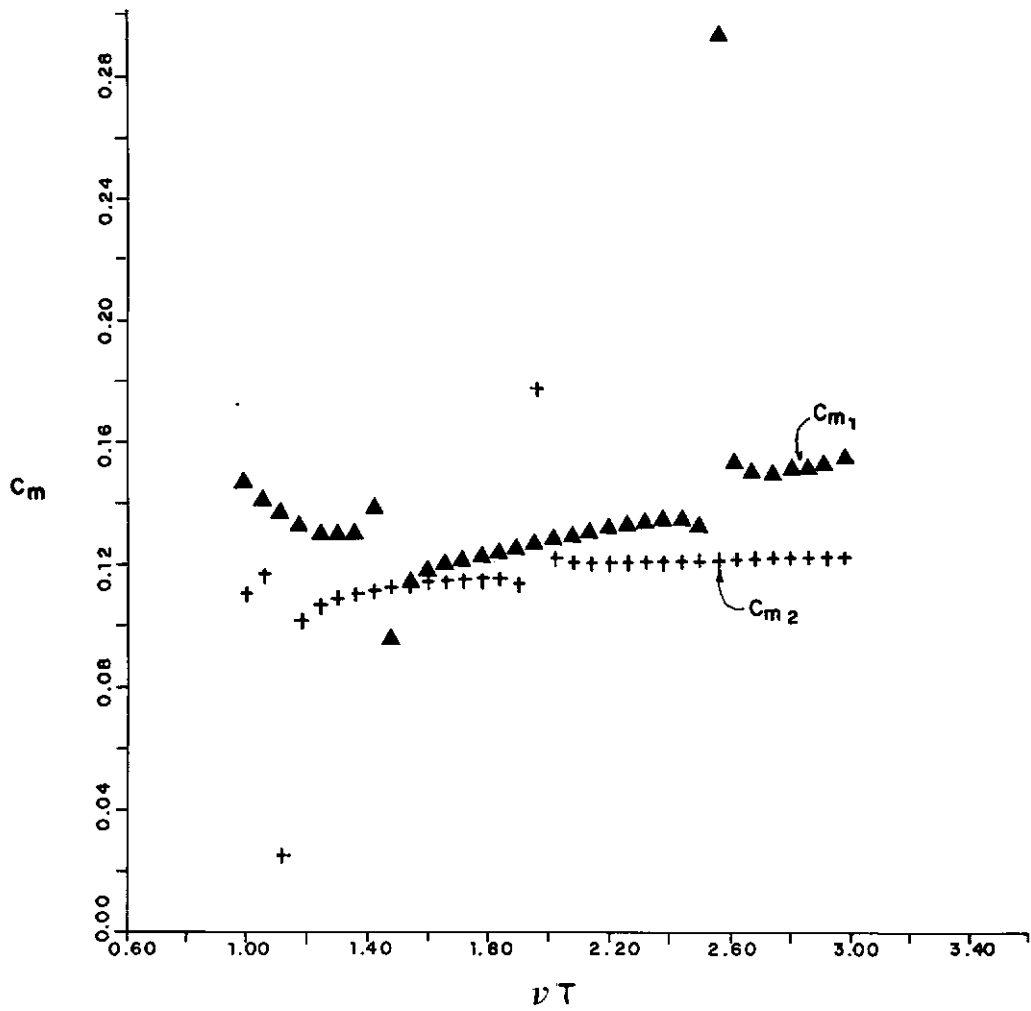


Figura 23
Coef. Massa Adicional — Frequência Irregular

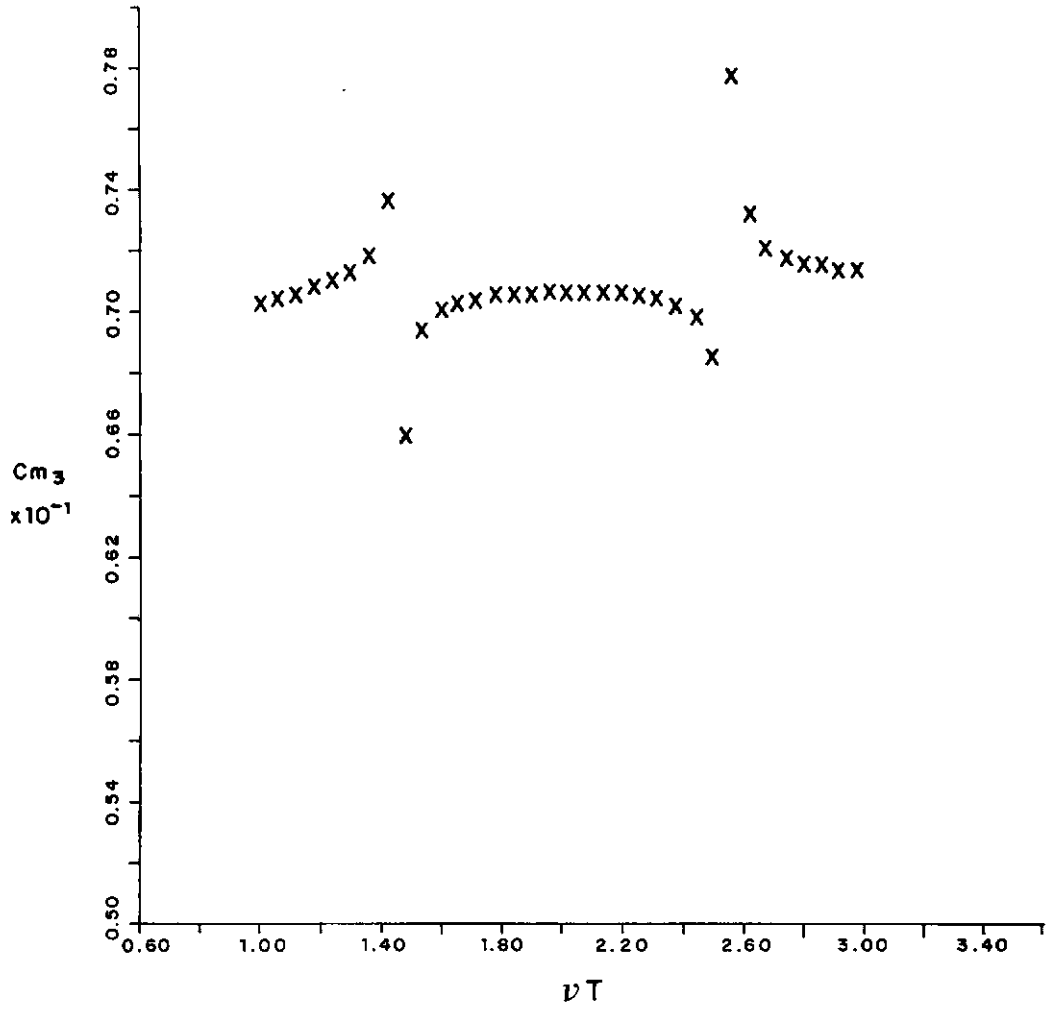


Figura 24

Coef. Momento Inércia Adicional - Freq. Irregular

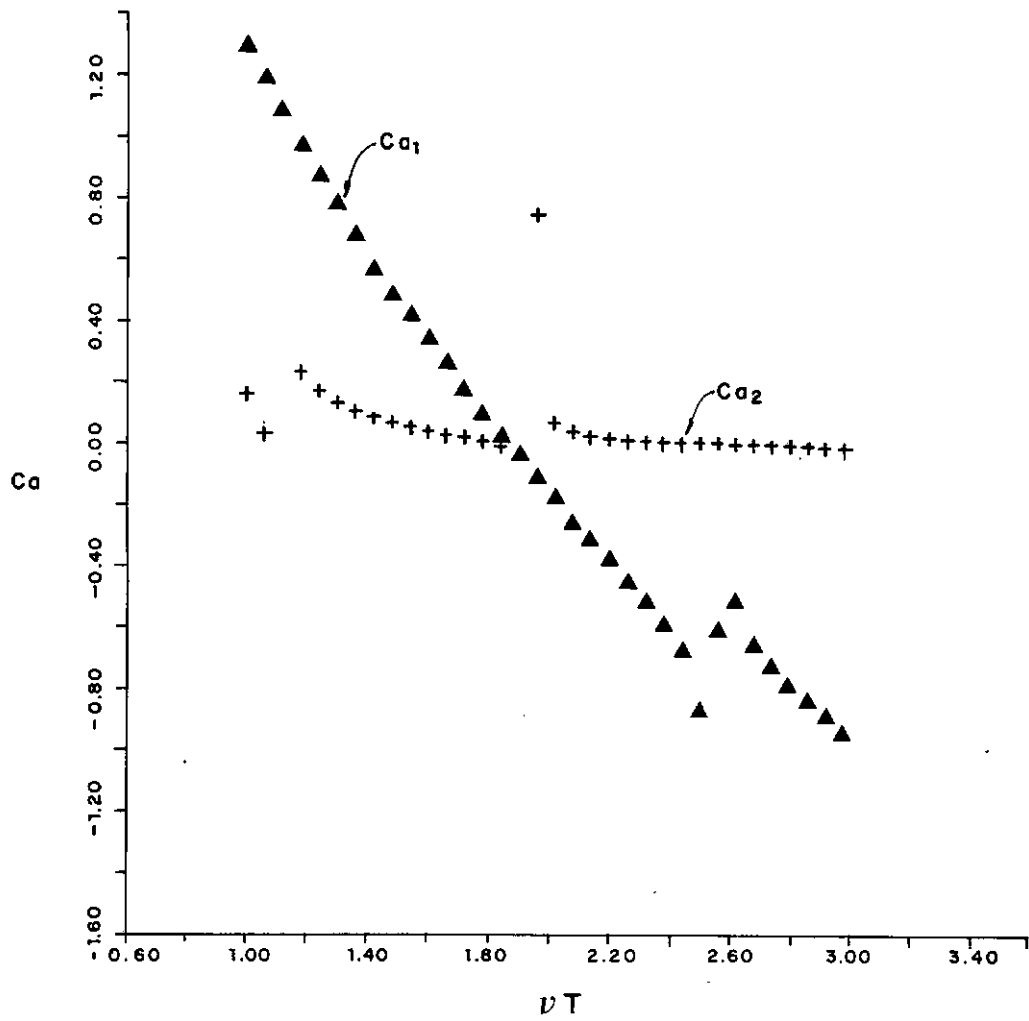


Figura 25
Coef. Amortecimento - Frequência Irregular

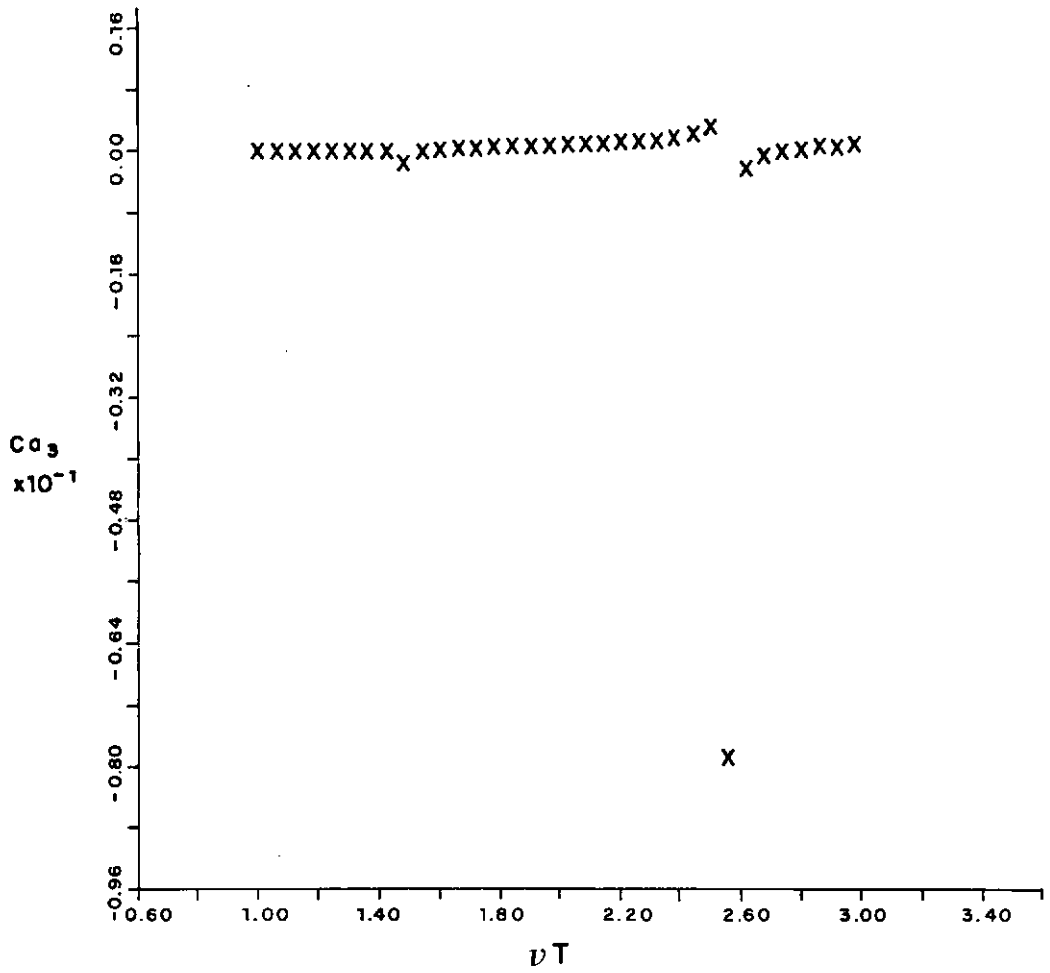


Figura 26

Coef. Amortecimento Devido ao Mov. Rotação
Frequência Irregular

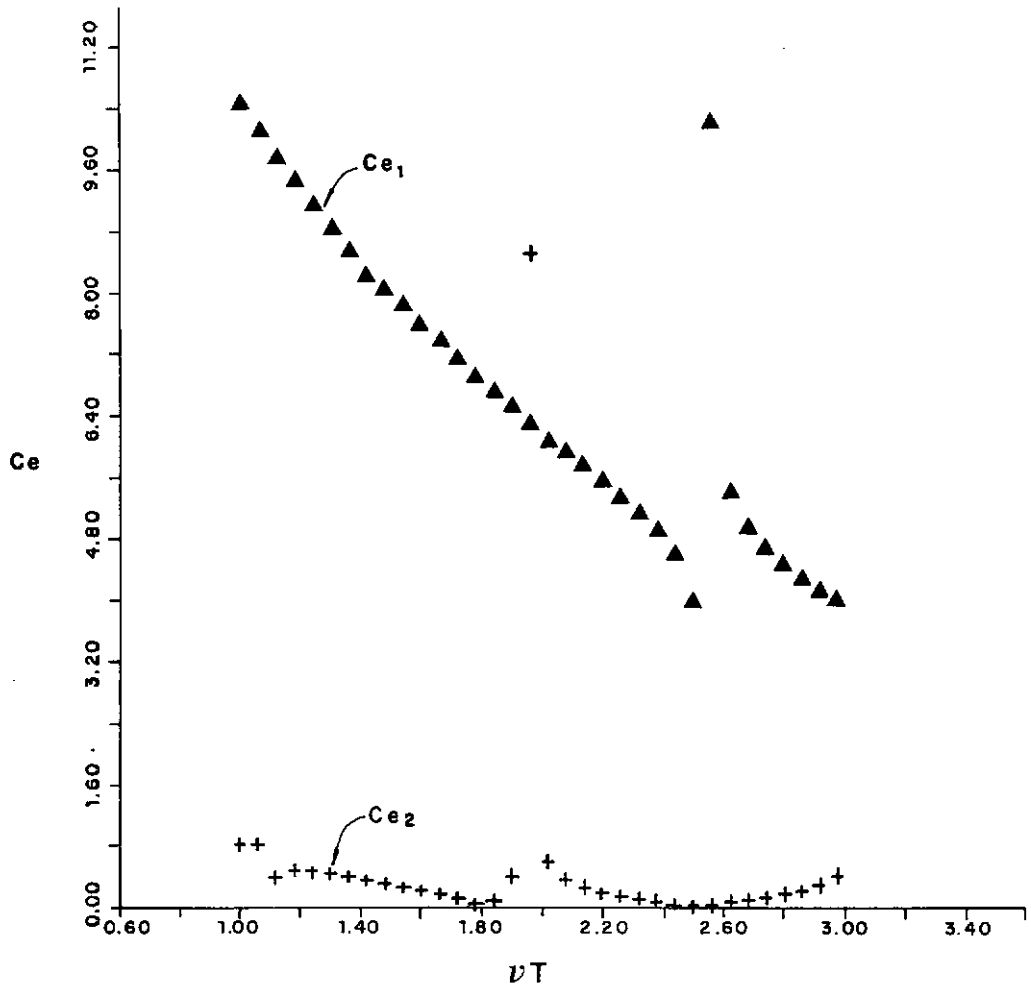


Figura 27
Força de Excitação - Freq. Irregular

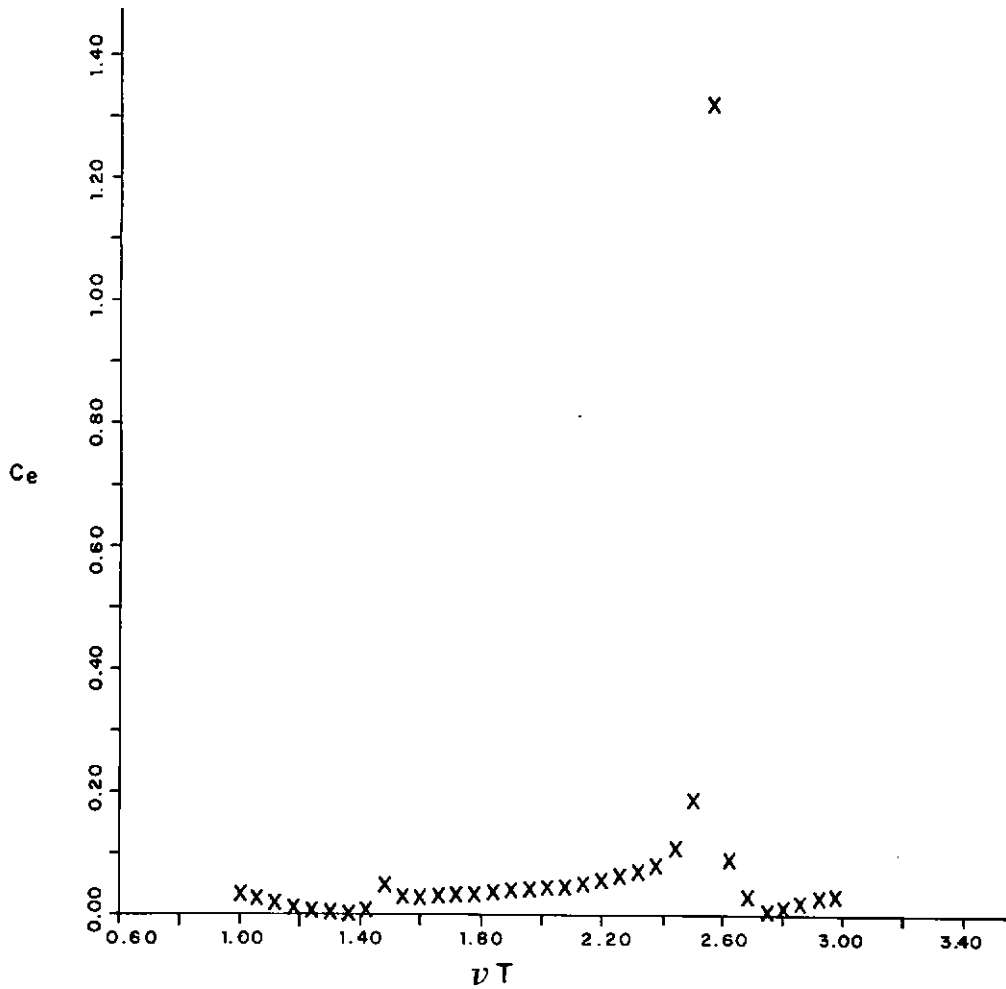


Figura 28

Momento de Excitação - Freq. Irregular

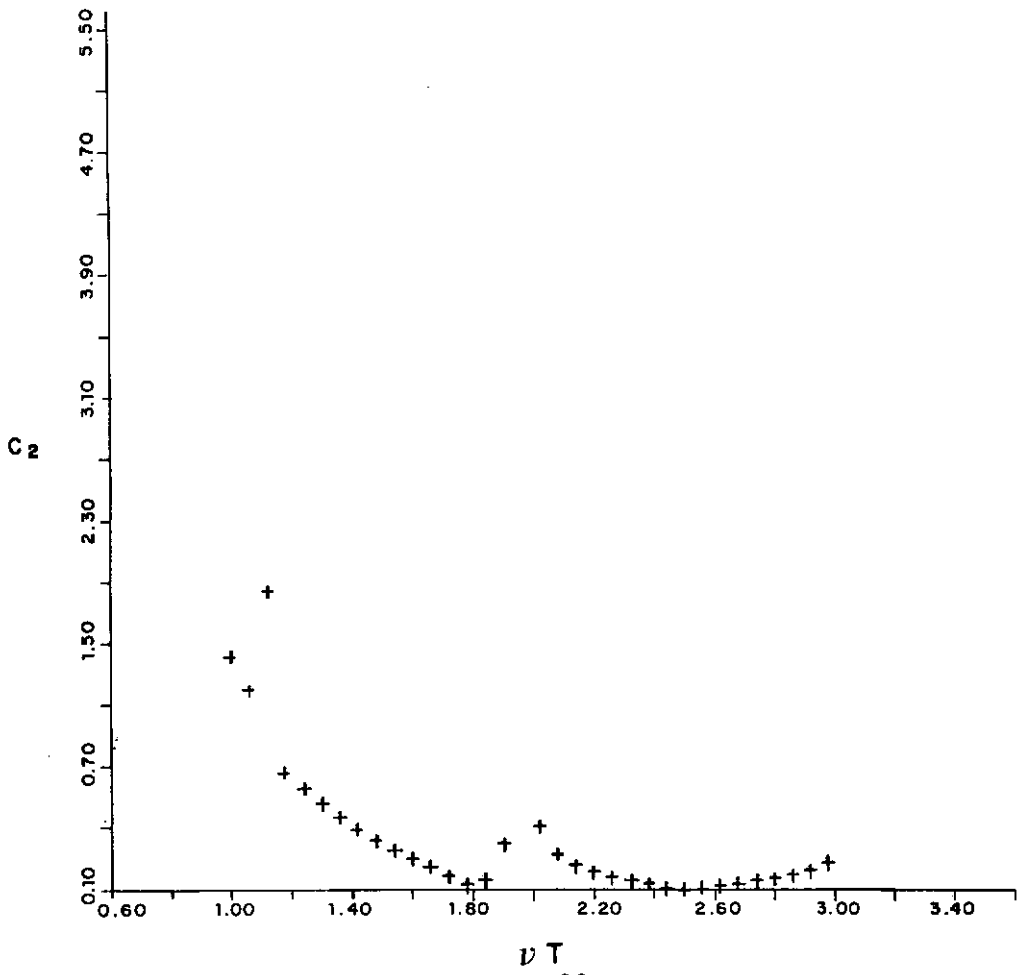


Figura-29

Amplitude Mov. Vertical - Frequência Irregular

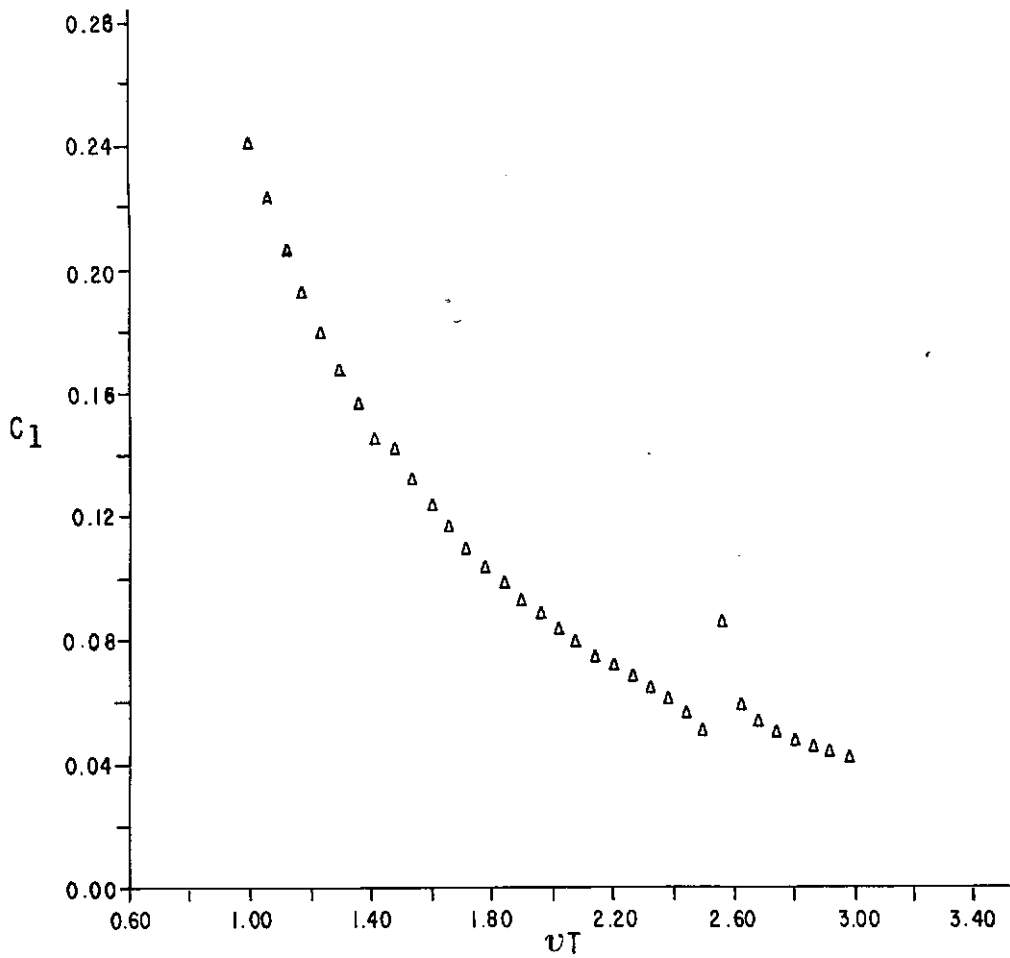


FIG.30 - AMPLITUDE MOV. HORIZONTAL - FREQ. IRREGULAR

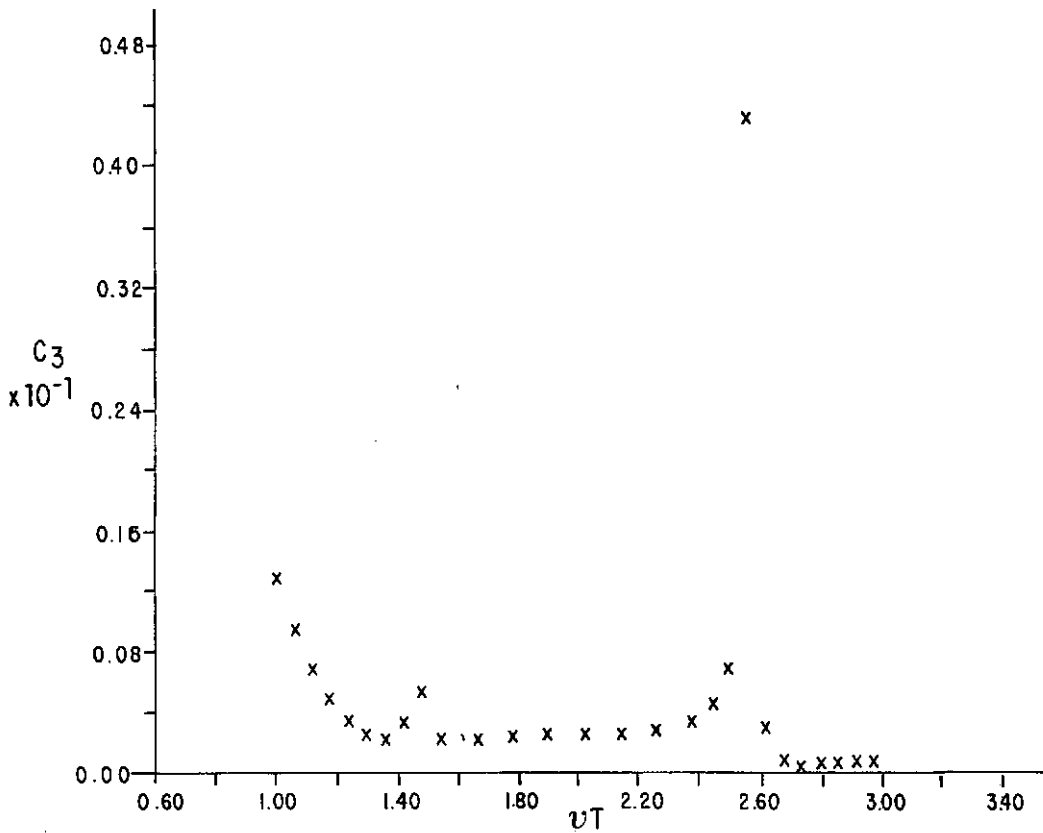


FIG.31 - AMPLITUDE MOV. ROTAÇÃO - FREQ. IRREGULAR

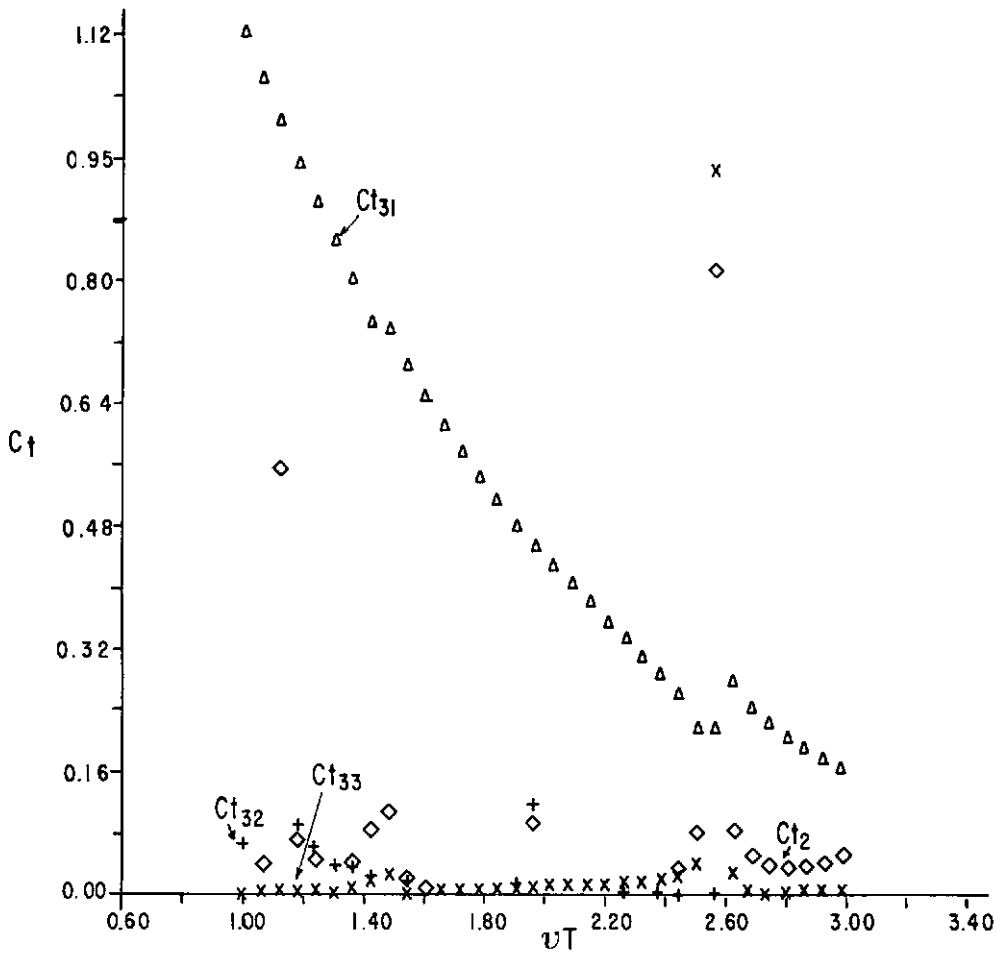


FIG. 32 - COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO - FREQ. IRREGULAR

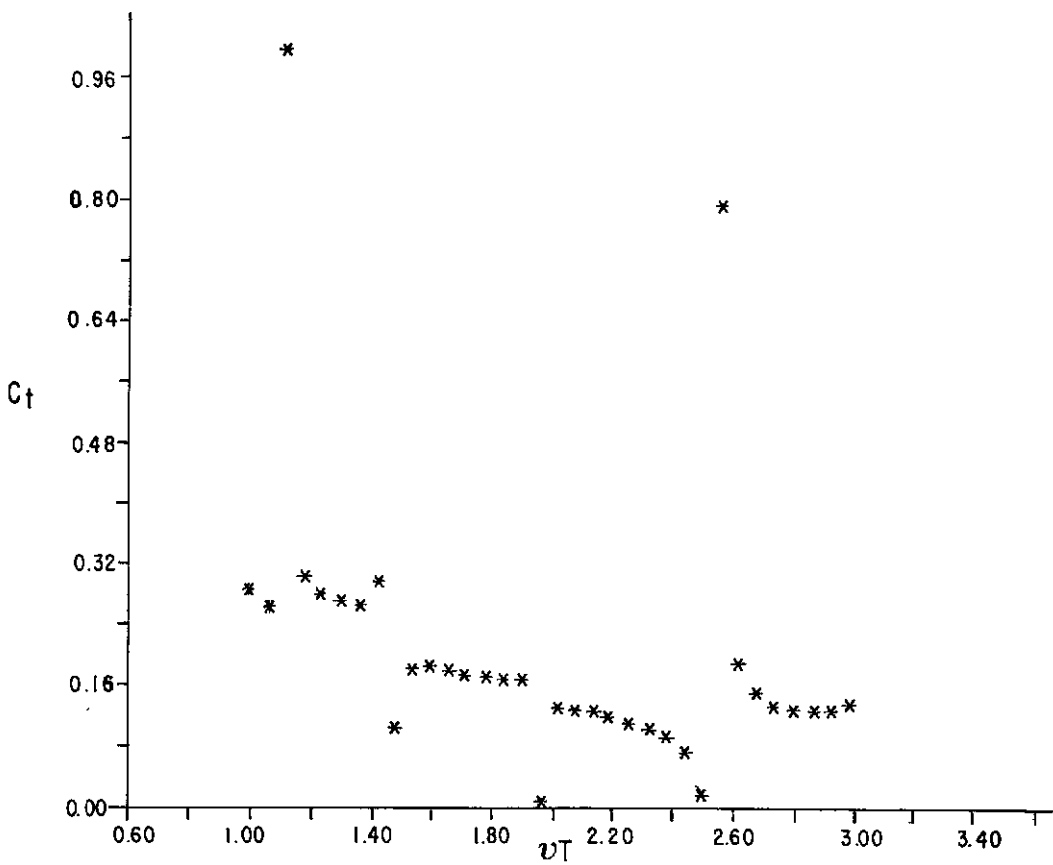


FIG. 33 - TRANSMISSÃO TOTAL - FREQ. IRREGULAR

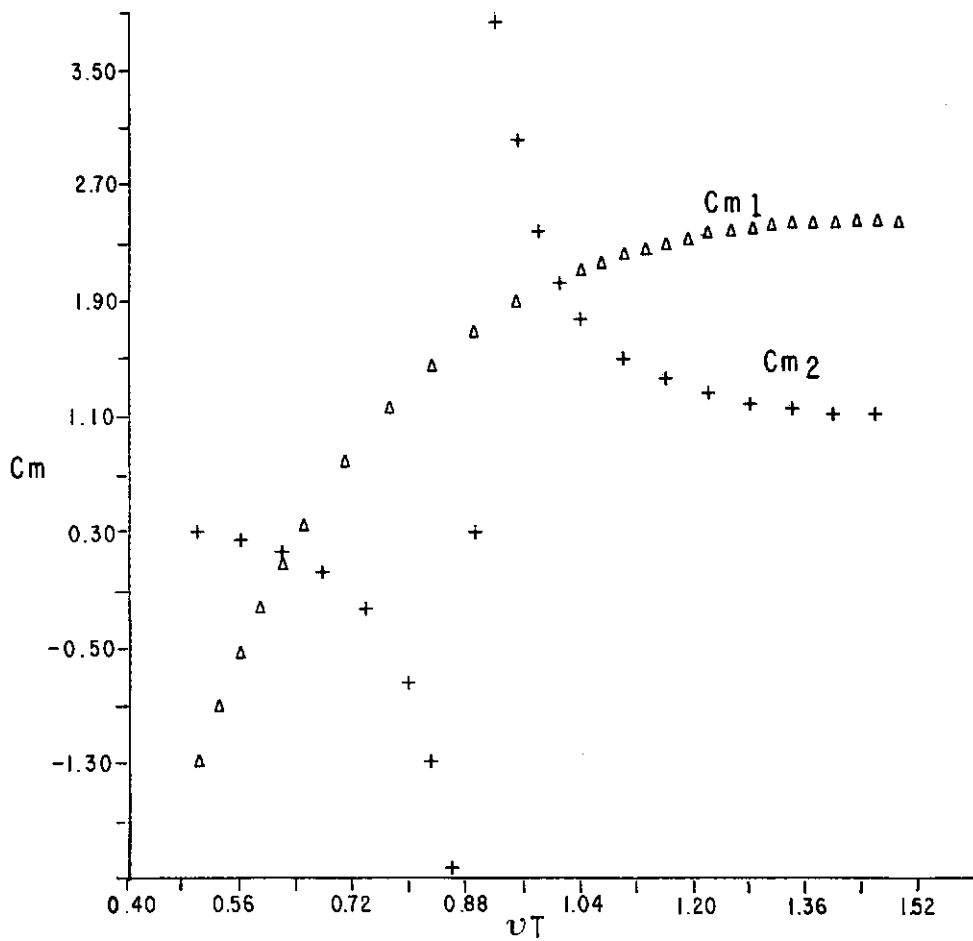


FIG. 34 - COEF. MASSA ADICIONAL - MODELO CATAMARAN

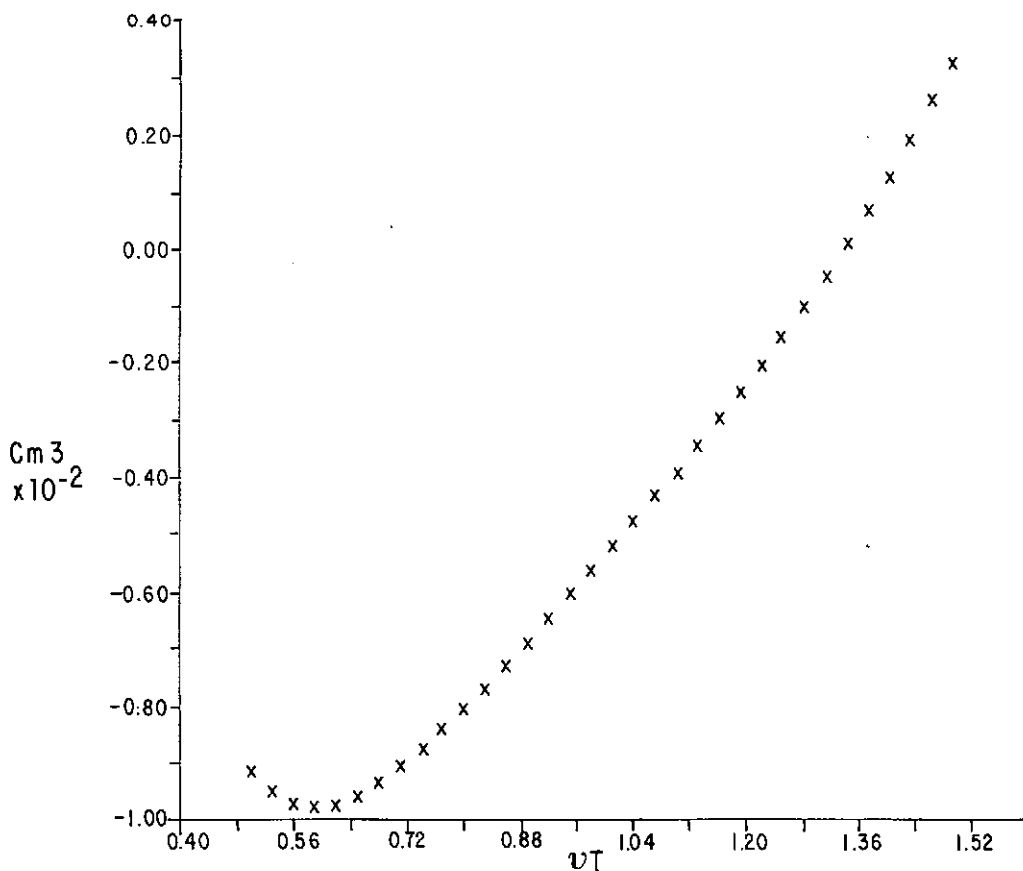


FIG. 35 - MOMENTO INÉRCIA ADICIONAL - MOD. CATAMARAN

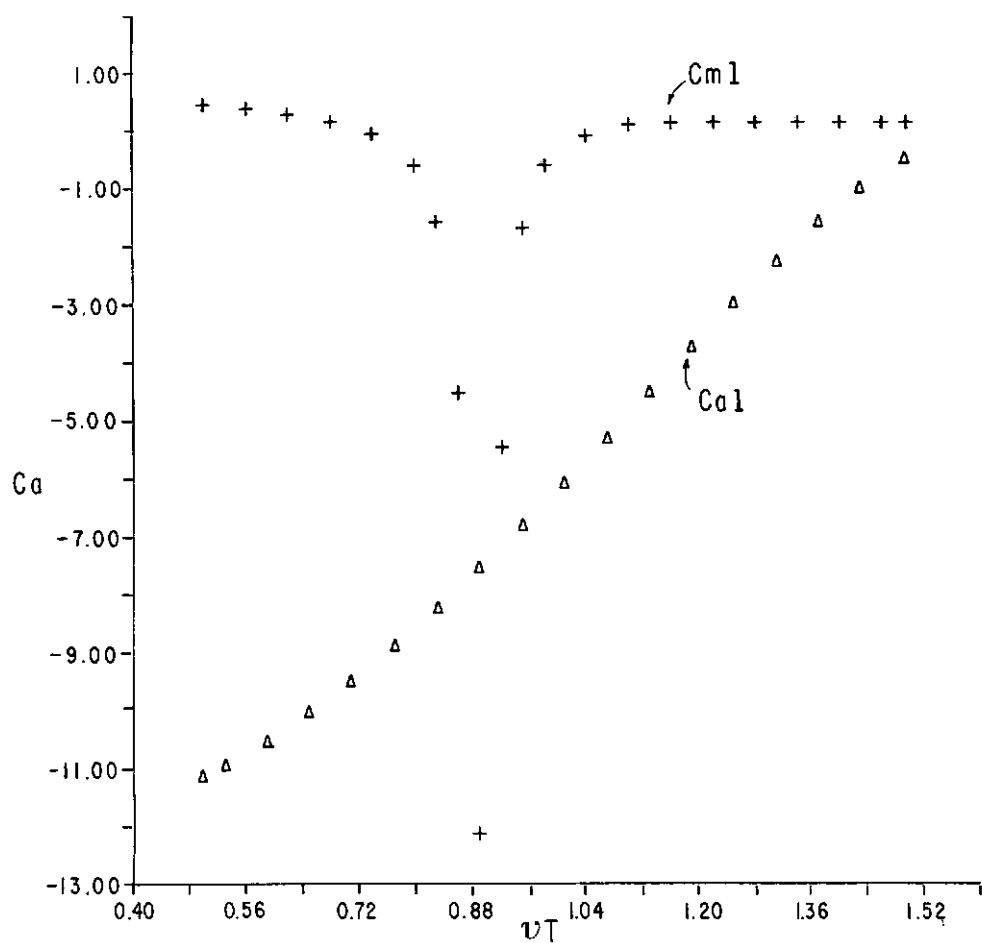


FIG. 36 - AMORTECIMENTO - MODELO CAMARAN

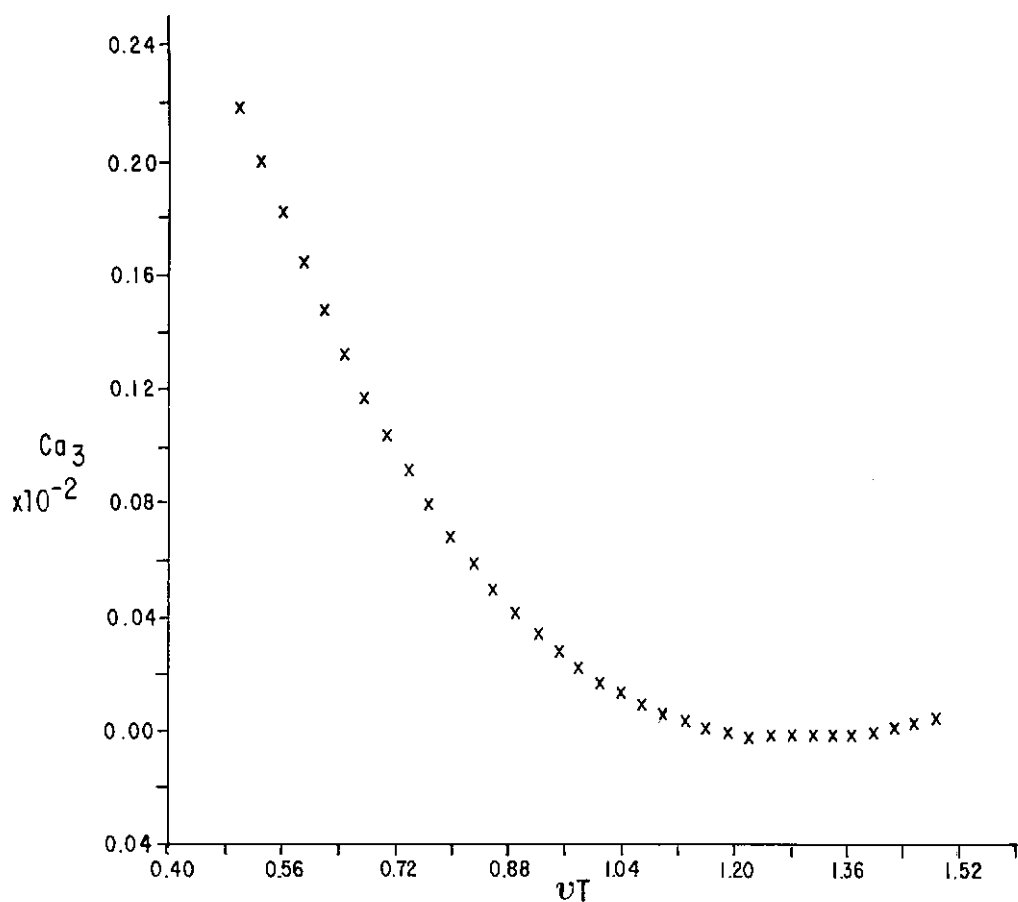


FIG. 37 - AMORTECIMENTO DEVIDO AO MOV. ROTAÇÃO - MOD. CATAMARAN

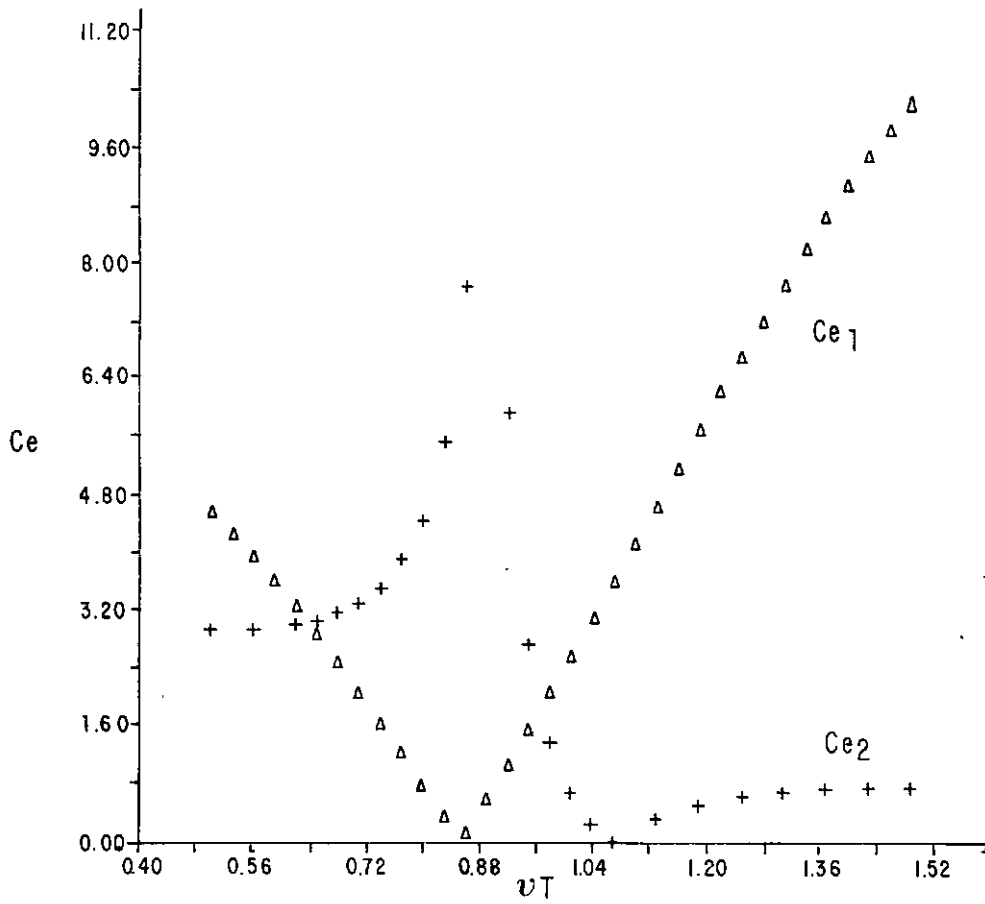


FIG.38 - FORÇA DE EXCITAÇÃO - MOD. CATAMARAN

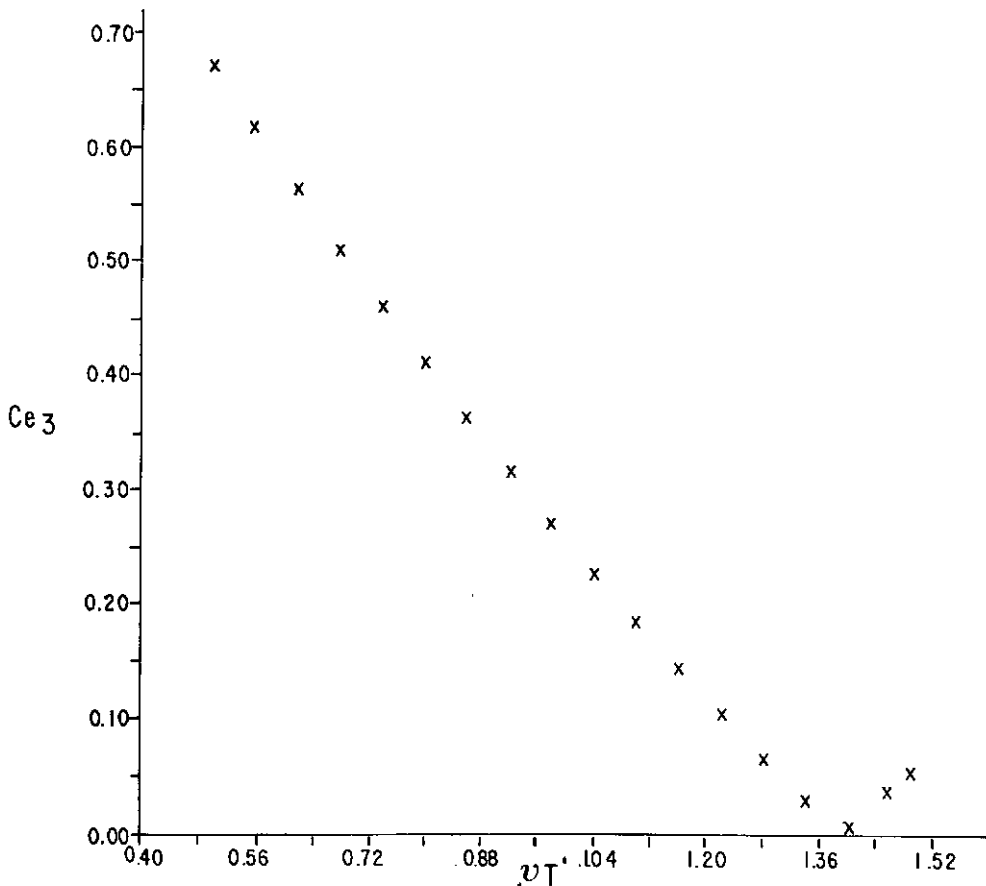


FIG.39 - MOMENTO DE EXCITAÇÃO - MOD. CATAMARAN

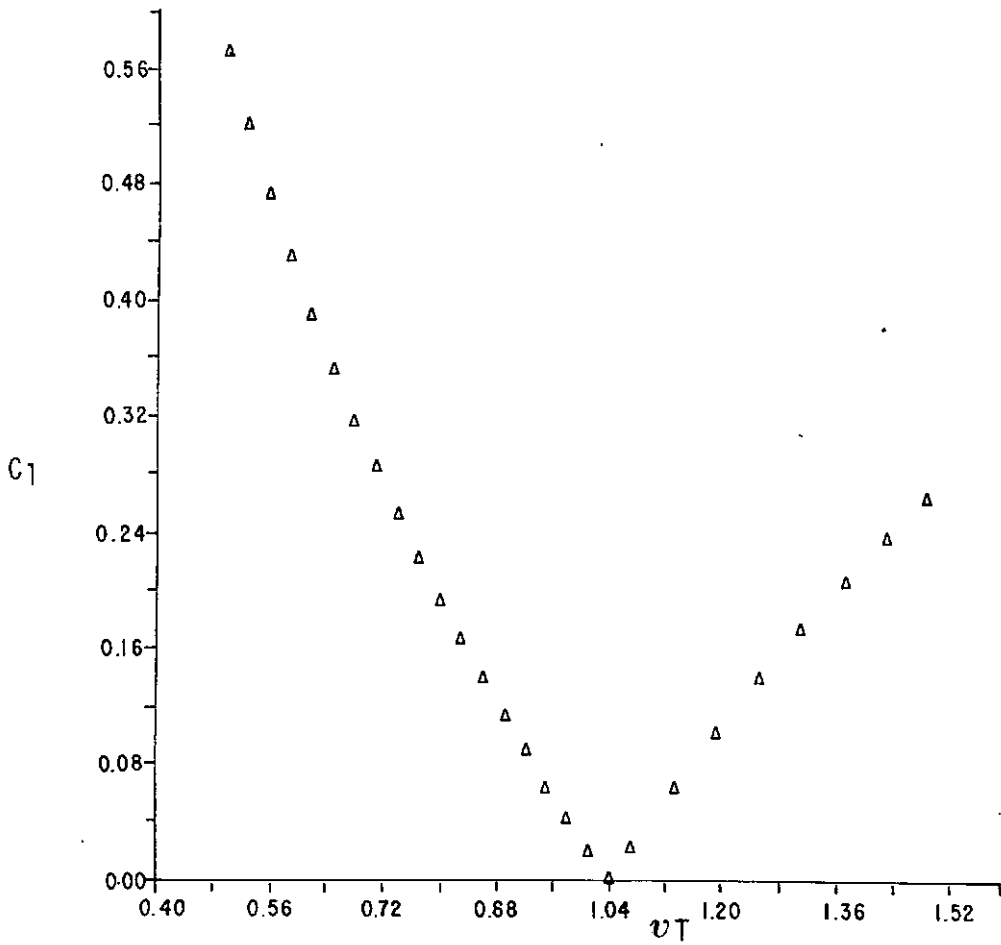


FIG. 40 - AMPLITUDE MOV. HORIZONTAL - MODELO CATAMARAN

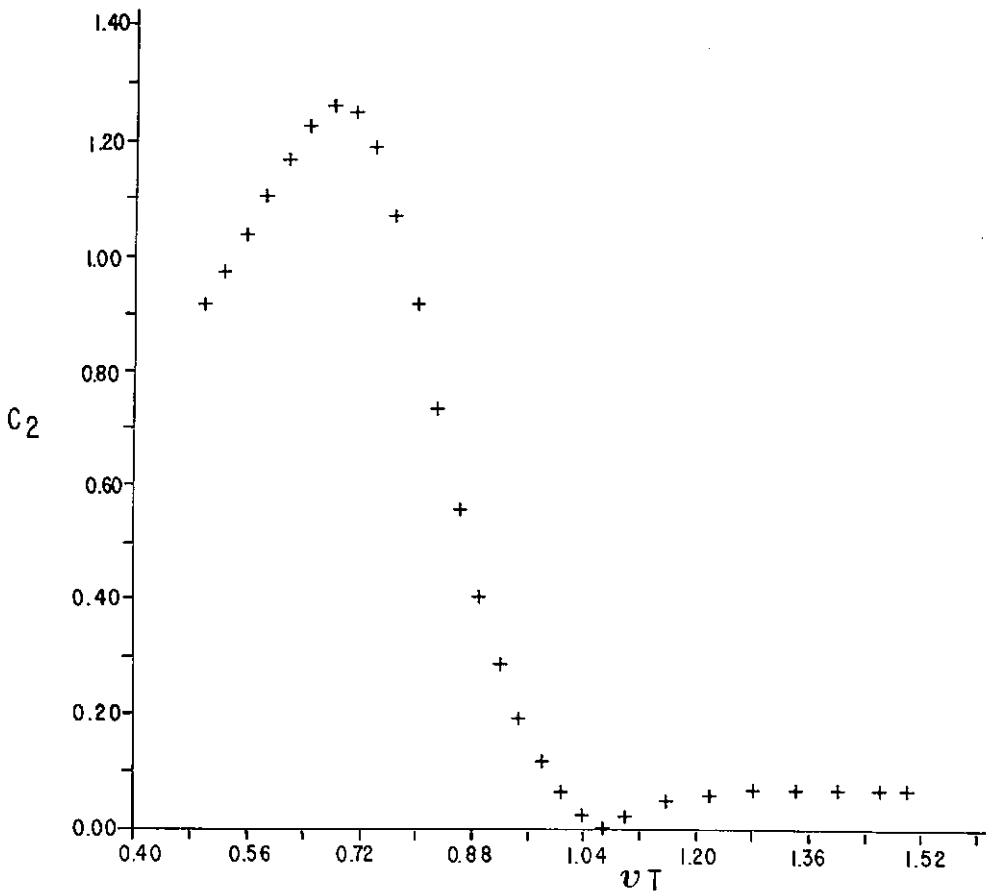


FIG. 41 - AMPLITUDE MOV. VERTICAL - MODELO CATAMARAN

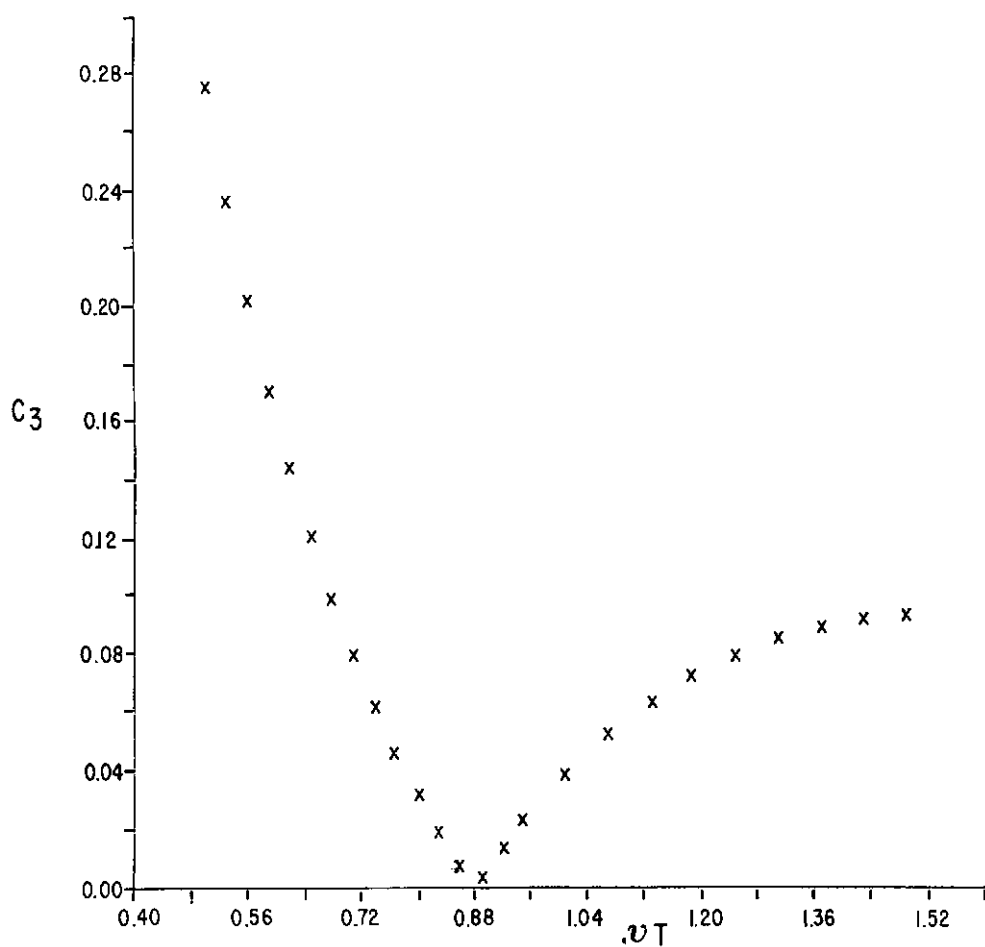


FIG. 42 - AMPLITUDE MOV. ROTAÇÃO - MODELO CATAMARAN

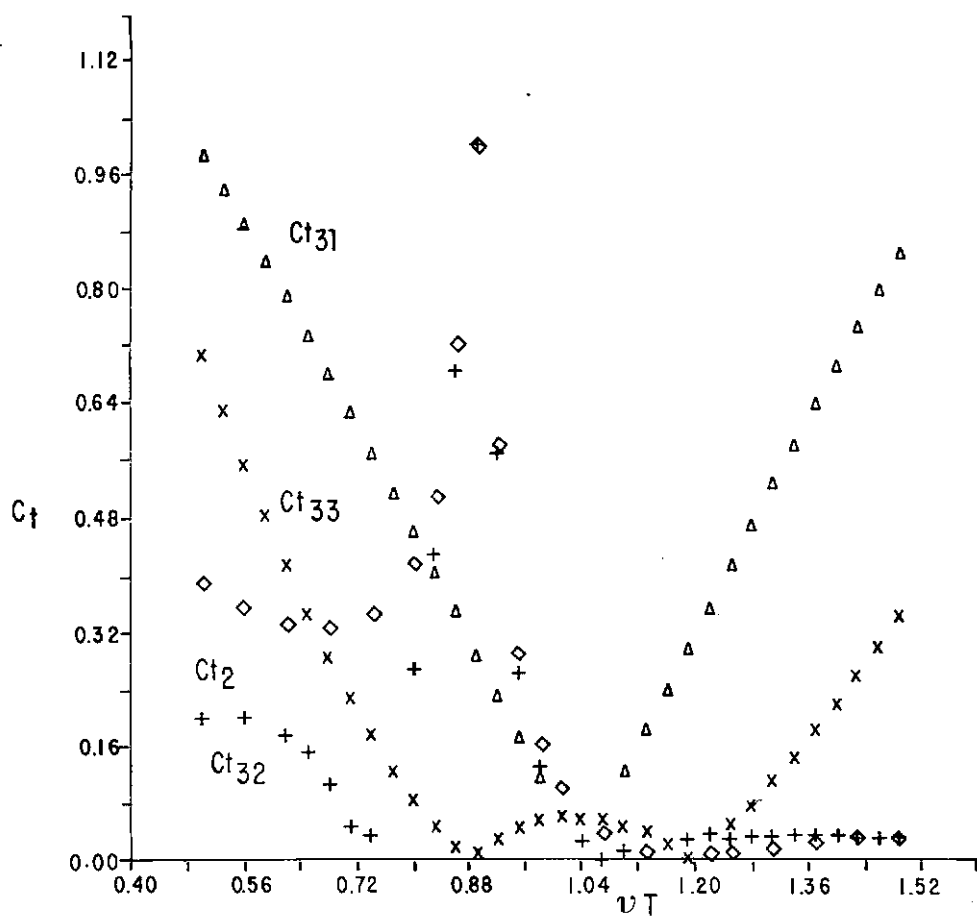


FIG. 43 COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO - MODELO CATAMARAN

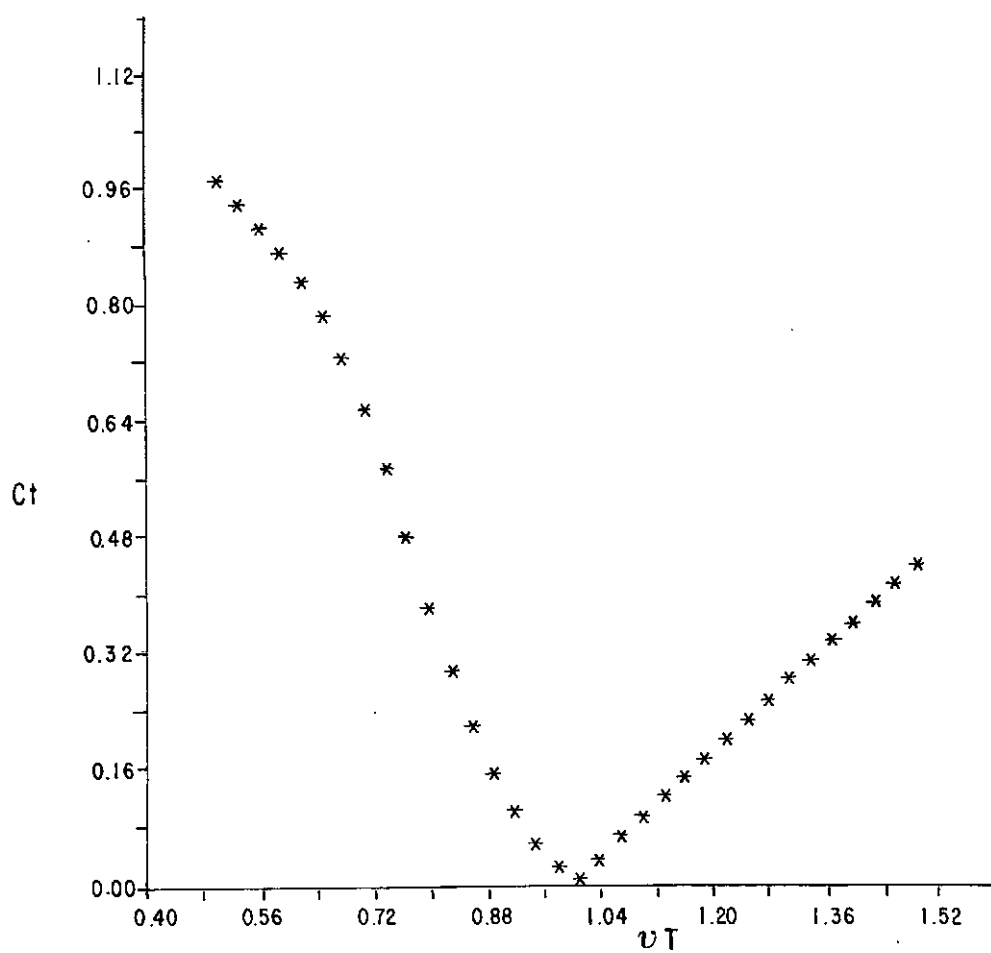


FIG. 44 - TRANSMISSÃO TOTAL - MODELO CATAMARAN

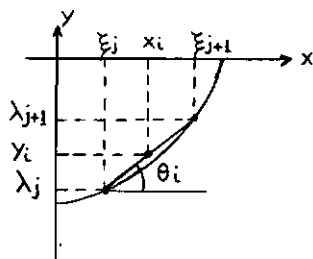
APÊNDICE1. AVALIAÇÃO DE I_{ij}

$$I_{ij} = \operatorname{Re}\{n_i \cdot \nabla \left[\int_{s_j} G_1(z_1, \zeta) ds \right] \Big|_{z_i}\} \text{ ou}$$

$$I_{ij} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\{n_i \cdot \nabla \left[\int_{s_j} \log(z-\zeta) ds - \int_{s_j} \log(z-\bar{\zeta}) ds + 2 \int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk ds \right] \Big|_{z_i}\}$$

$$1.1 - \text{Obtenção de } \operatorname{Re}\{n_i \cdot \nabla \int_{s_j} \log(z-\zeta) ds \Big|_{z_i}\}$$

Temos que: $\zeta = \xi + i\lambda$



$$d\xi = ds \cos \theta$$

$$d\lambda = ds \sin \theta$$

$$\text{Logo: } ds = e^{-i\theta} d\zeta$$

Consideremos a relação:

$$\operatorname{Re}\{ (n_i \cdot \nabla) F(z) \Big|_{z_i} \} = \operatorname{Re}\{ -i e^{i\theta} \frac{d}{dz} F(z) \Big|_{z_i} \}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left\{n_i \cdot \nabla \int_{s_j} \log(z-\zeta) ds \right\} \Big|_{z_i} = \operatorname{Re}\left\{-i e^{i(\theta_i - \theta_j)} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \log(z-\zeta) d\zeta \right\} \Big|_{z_i} = \\
& = \operatorname{Re}\left\{-i e^{i(\theta_i - \theta_j)} [\log(z_i - \zeta_j) - \log(z_i - \zeta_{j+1})]\right\} = \\
& = \operatorname{Re}\left\{[\sin(\theta_i - \theta_j) - i \cos(\theta_i - \theta_j)] \left[\log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2} + i \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_j}{x_i - \xi_j} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \lambda_{j+1})^2} - i \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right]\right\} = \\
& = \sin(\theta_i - \theta_j) \log \sqrt{\frac{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2}{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \lambda_{j+1})^2}} + \cos(\theta_i - \theta_j) \cdot \\
& \quad \left(\tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_j}{x_i - \xi_j} - \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right)
\end{aligned}$$

Para $i = j$ a integral é igual a $-\pi$.

1.2 - Obtenção de $\operatorname{Re}\left\{n_i \cdot \nabla \int_{s_j} \log(z-\bar{\zeta}) ds \right\} \Big|_{z_i}$

Temos que $\bar{\zeta} = \xi - i\lambda$

$$ds = e^{i\theta} d\bar{\zeta}.$$

Então:

$$\operatorname{Re}\left\{n_i \cdot \nabla \int_{s_j} \log(z - \bar{\zeta}) ds \Big|_{z_i}\right\} = \operatorname{Re}\left\{-i e^{i(\theta_i + \theta_j)} \frac{d}{dz} \int_{\bar{\zeta}_j}^{\bar{\zeta}_{j+1}} \log(z - \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \Big|_{z_i}\right\} =$$

$$= \operatorname{Re}\left\{-i e^{i(\theta_i + \theta_j)} [\log(z_i - \bar{\zeta}_j) - \log(z_i - \bar{\zeta}_{j+1})]\right\} =$$

$$= \sin(\theta_i + \theta_j) \log \sqrt{\frac{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \lambda_j)^2}{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \lambda_{j+1})^2}} + \cos(\theta_i + \theta_j) \cdot$$

$$\left(\tan^{-1} \frac{y_i + \lambda_j}{x_i - \xi_j} - \tan^{-1} \frac{y_i + \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right).$$

1.3 - Obtenção do valor principal de $\oint_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk$

Temos que:

$$\oint_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk + i\pi e^{-iv(z-\bar{\zeta})},$$

onde $e^{-iv(z-\bar{\zeta})}$ é o resíduo do integrando no polo $k = v$. O sinal na integral acima significa que a trajetória de integração é o semi-eixo real positivo, excetuando o polo.

Assim:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \int_0^\infty \frac{e^{-i(k-v)(z-\bar{\zeta})}}{-i(k-v)(z-\bar{\zeta})} \cdot i(z-\bar{\zeta}) dk$$

Mudando a variável de integração para $t = i(k-v)(z-\bar{\zeta})$, teremos:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = -e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \int_{-iv(z-\bar{\zeta})}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

A integral na expressão anterior é uma função com plexa, denominada integral exponencial, sendo avaliada pela série:

$$E_1(u) = \int_u^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \log u - \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m u^m}{m \cdot m!},$$

sendo $\gamma = 0,5772\dots$ a constante de Euler.

Então, teremos:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \left\{ \gamma + \log[-iv(z-\bar{\zeta})] + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n [-iv(z-\bar{\zeta})]^n}{n \cdot n!} \right\}$$

Façamos:

$$r = |-iv(z-\bar{\zeta})| = v \sqrt{(y+\lambda)^2 + (x-\xi)^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[-iv(z-\bar{\zeta})]}{\text{Re}[-iv(z-\bar{\zeta})]} = \tan^{-1} \frac{\xi-x}{y+\lambda}$$

Logo:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \left\{ \gamma + \log r + i\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n (\cos n\alpha + i \operatorname{senn} \alpha)}{n \cdot n!} \right\}$$

Voltando ao valor principal da integral inicial,

teremos:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk &= e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \left\{ [\gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \cos n\alpha}{n \cdot n!}] + \right. \\ &\quad \left. + i \left[\pi + \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \operatorname{senn} \alpha}{n \cdot n!} \right] \right\} \end{aligned}$$

Então, concluímos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] &= e^{v(y+\lambda)} \{ \cos v(x-\xi) \cdot [\gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \cos n\alpha}{n \cdot n!}] + \\ &\quad + \operatorname{senn} v(x-\xi) \cdot [\pi + \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \operatorname{senn} \alpha}{n \cdot n!}] \} \\ \operatorname{Im} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] &= e^{v(y+\lambda)} \{ \cos v(x-\xi) \cdot [\pi + \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \operatorname{senn} \alpha}{n \cdot n!}] - \\ &\quad - \operatorname{senn} v(x-\xi) \cdot [\gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n r^n \cos n\alpha}{n \cdot n!}] \} \end{aligned}$$

Para valores elevados do argumento da função integral exponencial devemos usar a seguinte expansão assintótica:

$$E_1(u) \approx \frac{e^{-u}}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{u^n}, \text{ válida quando } |\arg u| < \frac{3\pi}{2}.$$

Como: $-iv(z-\bar{\zeta}) = r e^{i\alpha}$ e

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = -e^{-iv(z-\bar{\zeta})} \{E_1[-iv(z-\bar{\zeta})] - i\pi\}, \text{ teremos:}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk = -\frac{1}{r e^{i\alpha}} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n!}{r^n e^{in\alpha}} + i\pi e^{-iv(z-\bar{\zeta})}.$$

Donde concluimos que:

$$\operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] = \pi e^{v(y+\lambda)} \cdot \operatorname{sen} v(x-\xi) - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n! \cos(n+1)\alpha}{r^{n+1}},$$

$$\operatorname{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] = \pi e^{v(y+\lambda)} \cos v(x-\xi) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n n! \operatorname{sen}(n+1)\alpha}{r^{n+1}}.$$

$$1.4 - \text{Obtenção de } \operatorname{Re} \{ n_i \cdot \nabla \int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk ds \Big|_{z_i} \}$$

Aplicando a relação anterior, teremos:

$$\operatorname{Re} \{ n_i \cdot \nabla \int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk ds \Big|_{z_i} \} = \operatorname{Re} \{ -i e^{i(\theta_i + \theta_j)} \frac{d}{dz} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz}}{v-k} dk \}.$$

$$\int_{\bar{\zeta}_j}^{\bar{\zeta}_{j+1}} e^{ik\bar{\zeta}_j} d\bar{\zeta}_j \Big|_{z_i} \} = \operatorname{Re} \{ e^{i(\theta_i + \theta_j)} \frac{d}{dz} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz} (e^{ik\bar{\zeta}_j} - e^{ik\bar{\zeta}_{j+1}})}{k(v-k)} dk \Big|_{z_i} \} =$$

$$= \operatorname{Re} \{ -i e^{i(\theta_i + \theta_j)} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta}_j)}}{v-k} dk - \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta}_{j+1})}}{v-k} dk \right] \Big|_{z_i} \} =$$

$$= \operatorname{sen}(\theta_i + \theta_j) \{ \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta}_j)}}{v-k} dk \right] - \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta}_{j+1})}}{v-k} dk \right] \} +$$

$$+ \cos(\theta_i + \theta_j) \{ \text{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta}_j)}}{v - k} dk \right] - \text{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i' - \bar{\zeta}_{j+1})}}{v - k} dk \right] \}$$

As expressões para as partes real e imaginária do valor principal da integral do item anterior podem ser usadas para avaliar a expressão acima.

Com os resultados dos itens 1.1, 1.2 e 1.4, podemos facilmente obter I_{ij} .

2. AVALIAÇÃO DE J_{ij}

$$J_{ij} = \text{Re} \{ \underline{n}_i \cdot \nabla \left[\int_{s_j} G_2(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z_i} \} \quad \text{ou}$$

$$J_{ij} = \text{Re} \{ \underline{n}_i \cdot \nabla \left[- \int_{s_j} e^{-iv(z - \bar{\zeta})} ds \right] \Big|_{z_i} \}$$

Teremos então que:

$$J_{ij} = \text{Re} \{ i e^{i(\theta_i + \theta_j)} \frac{d}{dz} \int_{\bar{\zeta}_j}^{\bar{\zeta}_{j+1}} e^{-i(z - \bar{\zeta})} d\bar{\zeta} \Big|_{z_i} \} =$$

$$J_{ij} = \text{Re} \{ i e^{i(\theta_i + \theta_j)} [e^{-iv(z_i - \bar{\zeta}_j)} - e^{-iv(z_i - \bar{\zeta}_{j+1})}] \} =$$

$$J_{ij} = \sin(\theta_i + \theta_j) [e^{v(y_i + \lambda_{j+1})} \cos v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v(y_i + \lambda_j)} \cos v(x_i - \xi_j)] - \\ - \cos(\theta_i + \theta_j) [e^{v(y_i + \lambda_{j+1})} \sin v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v(y_i + \lambda_j)} \sin v(x_i - \xi_j)]$$

3. AVALIAÇÃO DE K_{ij}

$$K_{ij} = \operatorname{Re} \left[\int_{s_j} G_1(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z_i} \quad \text{ou}$$

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \zeta) ds - \int_{s_j} \log(z - \bar{\zeta}) ds + 2 \int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{v - k} dk ds \right] \Big|_{z_i}$$

$$3.1 - \text{Obtenção de } \operatorname{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \zeta) ds \right] \Big|_{z_i}$$

$$\operatorname{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \zeta) ds \right] \Big|_{z_i} = \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta_j} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \log(z_i - \zeta) d\zeta \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \{ e^{-i\theta_j} [(z_i - \zeta_j) \log(z_i - \zeta_j) - (z_i - \zeta_{j+1}) \log(z_i - \zeta_{j+1}) - (z_i - \zeta_j) + (z_i - \zeta_{j+1})] \} =$$

$$= \cos \theta_j [(x_i - \xi_j) \log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2} - (x_i - \xi_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \lambda_{j+1})^2} +$$

$$+ (\xi_j - \xi_{j+1}) - (y_i - \lambda_j) \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_j}{x_i - \xi_j} + (y_i - \lambda_{j+1}) \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}] + \operatorname{sen} \theta_j.$$

$$\cdot [(y_i - \lambda_j) \log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2} - (y_i - \lambda_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \lambda_{j+1})^2} +$$

$$+ (\lambda_j - \lambda_{j+1}) + (x_i - \lambda_j) \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_j}{x_i - \xi_j} - (x_i - \lambda_{j+1}) \tan^{-1} \frac{y_i - \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}]$$

3.2 - Obtenção de $\text{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \bar{\zeta}) ds \right] \Big|_{z_i}$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \bar{\zeta}) ds \right] \Big|_{z_i} &= \text{Re} \left[e^{i\theta_j} \int_{\bar{\zeta}_j}^{\bar{\zeta}_{j+1}} \log(z_i - \bar{\zeta}) d\bar{\zeta} \right] = \\ &= \text{Re} \{ e^{i\theta_j} [(z_i - \bar{\zeta}_j) \log(z_i - \bar{\zeta}_j) - (z_i - \bar{\zeta}_{j+1}) \log(z_i - \bar{\zeta}_{j+1}) - (z_i - \bar{\zeta}_{j+1})^* (z_i - \bar{\zeta}_{j+1})] \} = \\ &= \cos \theta_j [(x_i - \xi_j) \log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \lambda_j)^2} - (x_i - \xi_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \lambda_{j+1})^2} \\ &+ (\xi_j - \xi_{j+1}) - (y_i + \lambda_j) \cdot \tan^{-1} \frac{y_i + \lambda_j}{x_i - \xi_j} + (y_i + \lambda_{j+1}) \tan^{-1} \frac{y_i + \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}] - \sin \theta_j \cdot \\ &\cdot [(y_i + \lambda_j) \log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \lambda_j)^2} - (y_i + \lambda_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \lambda_{j+1})^2} \\ &+ (\lambda_{j+1} - \lambda_j) + (x_i - \xi_j) \tan^{-1} \frac{y_i + \lambda_j}{x_i - \xi_j} - (x_i - \xi_{j+1}) \tan^{-1} \frac{y_i + \lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}] \end{aligned}$$

3.3 - Obtenção de $\text{Re} \left[\int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{v - k} dk ds \right] \Big|_{z_i}$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{v - k} dk ds \right] \Big|_{z_i} &= \text{Re} \left[e^{i\theta_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz_i}}{v - k} dk \int_{\bar{\zeta}_j}^{\bar{\zeta}_{j+1}} e^{ik\bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \right] = \\ &= \text{Re} \left[-i e^{i\theta_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz_i} (e^{-ik\bar{\zeta}_{j+1}} - e^{ik\bar{\zeta}_j})}{k(v - k)} dk \right] \end{aligned}$$

Dividindo-se o integrando por v e multiplicando-o

por $v - k + k$, teremos:

$$\operatorname{Re} \left[\int_{S_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk ds \right] \Big|_{z_i} = \operatorname{Re} \left[-i \frac{e^{i\theta_j}}{v} \int_0^\infty \frac{e^{-ikz_i} (e^{ik\bar{\zeta}_{j+1}} - e^{ik\bar{\zeta}_j})}{k(v-k)} \right.$$

$$\left. (v-k+k) dk \right] =$$

$$= \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{e^{i\theta_j}}{v} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_{j+1})}}{k} dk - \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_j)}}{k} dk + \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_{j+1})}}{v-k} dk - \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_j)}}{v-k} dk \right] \right\}.$$

Pode ser provado que: $\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{k} dk = \log(z-\bar{\zeta}).$

Então:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\int_{S_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk ds \right] \Big|_{z_i} &= \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{e^{i\theta_j}}{v} \left[\log(z_i-\bar{\zeta}_{j+1}) - \right. \right. \\ &\quad \left. - \log(z_i-\bar{\zeta}_j) + \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_{j+1})}}{v-k} dk - \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_j)}}{v-k} dk \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{v} \sin \theta_j \left\{ \log \sqrt{\frac{(x_i-\xi_j)^2 + (y_i+\lambda_j)^2}{(x_i-\xi_{j+1})^2 + (y_i+\lambda_{j+1})^2}} + \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_{j+1})}}{v-k} dk \right] - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_j)}}{v-k} dk \right] \right\} + \frac{1}{v} \cos \theta_j \left\{ \tan^{-1} \frac{y_i+\lambda_j}{x_i-\xi_j} - \tan^{-1} \frac{y_i+\lambda_{j+1}}{x_i-\xi_{j+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_{j+1})}}{v-k} dk \right] - \operatorname{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i-\bar{\zeta}_j)}}{v-k} dk \right] \right\} \end{aligned}$$

Na expressão anterior, as partes real e imaginária do valor principal da integral podem ser obtidas através das fórmulas desenvolvidas no item 1.3 desse Apêndice.

Com os resultados dos itens 3.1, 3.2 e 3.3 podemos determinar K_{ij} .

4. AVALIAÇÃO DE L_{ij}

$$L_{ij} = \operatorname{Re} \left[\int_{s_j} G_2(z, \zeta) ds \right] \Big|_{z_i} \quad \text{ou}$$

$$L_{ij} = \operatorname{Re} \left[- \int_{s_j} e^{-iv(z - \bar{\zeta})} ds \right] \Big|_{z_i}$$

$$L_{ij} = \operatorname{Re} \left[- e^{i\theta_j} \int_{\zeta_j}^{\bar{\zeta}_{j+1}} e^{-iv(z_i - \bar{\zeta})} d\bar{\zeta} \right]$$

$$L_{ij} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i e^{i\theta_j}}{v} \left[e^{-iv(z_i - \bar{\zeta}_{j+1})} - e^{-iv(z_i - \bar{\zeta}_j)} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} L_{ij} = & \frac{1}{v} \cos \theta_j \left[e^{v(y_i + \lambda_{j+1})} \cdot \operatorname{senv}(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v(y_i + \lambda_j)} \operatorname{senv}(x_i - \xi_j) \right] - \\ & - \frac{1}{v} \operatorname{sen} \theta_j \left[e^{v(y_i + \lambda_{j+1})} \cos v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v(y_i + \lambda_j)} \cdot \cos v(x_i - \xi_j) \right] \end{aligned}$$

Em pontos de superfície livre, ou seja, para $y_i = 0$, teremos que:

$$L_{ij} = \frac{1}{v} \cos \theta_j [e^{v\lambda_{j+1}} \operatorname{sen} v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \operatorname{sen} v(x_i - \xi_j)] - \\ - \frac{1}{v} \operatorname{sen} \theta_j [e^{v\lambda_{j+1}} \cos v(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \cos v(x_i - \xi_j)]$$

5. AVALIAÇÃO DE K_{ij} EM PONTOS AFASTADOS DO CORPO

Para determinar a elevação da onda transmitida precisamos obter expressões para K_{ij} e L_{ij} em pontos na superfície livre afastados do corpo.

Usando as expressões desenvolvidas no item 3 desse Apêndice, para $y_i = 0$, concluimos que:

$$\operatorname{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \zeta) ds \right] \Big|_{z_i = (x_i, 0)} - \operatorname{Re} \left[\int_{s_j} \log(z - \bar{\zeta}) ds \right] \Big|_{z_i = (x_i, 0)} = 0.$$

Também teremos que:

$$\operatorname{Re} \left[\int_{s_j} \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{v - k} dk ds \right] \Big|_{z_i = (x_i, 0)} = \frac{1}{v} \operatorname{sen} \theta_j \left\{ \log \sqrt{\frac{(x_i - \xi_j)^2 + \lambda_j^2}{(x_i - \xi_{j+1})^2 + \lambda_{j+1}^2}} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta}_{j+1})}}{v - k} dk \right] - \operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta}_j)}}{v - k} dk \right] \right\} + \frac{1}{v} \cos \theta_j.$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left\{ \tan^{-1} \frac{\lambda_j}{x_i - \xi_j} - \tan^{-1} \frac{\lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}} + \operatorname{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\xi}_{j+1})}}{v - k} dk \right] - \right. \\
& \left. - \operatorname{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\xi}_j)}}{v - k} dk \right] \right\}
\end{aligned}$$

Porém, temos que:

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} \left[\log \sqrt{\frac{(x_i - \xi_j)^2 + \lambda_j^2}{(x_i - \xi_{j+1})^2 + \lambda_{j+1}^2}} \right] = 0,$$

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} \left[\tan^{-1} \frac{\lambda_j}{x_i - \xi_j} \right] = 0 \text{ e } \lim_{x_i \rightarrow \infty} \left[\tan^{-1} \frac{\lambda_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}} \right] = 0.$$

No ítem 1.3 desenvolvemos expressões para as partes real e imaginária do valor principal da integral anterior, empregando uma expansão assintótica para a função integral exponencial.

Para $y = 0$ e para valores elevados de x_i , verificamos que:

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \cos(n+1)\alpha}{r^{n+1}} \right] = 0 \text{ e }$$

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \operatorname{sen}(n+1)\alpha}{r^{n+1}} \right] = 0$$

Logo, temos que:

$$\operatorname{Re} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] \Big|_{z=(x,0)} = \pi e^{v\lambda} \operatorname{senv}(x-\xi) \quad e$$

$$\operatorname{Im} \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{v-k} dk \right] \Big|_{z=(x,0)} = \pi e^{v\lambda} \operatorname{cosv}(x-\xi)$$

Assim, aplicando esses resultados na expressão de K_{ij} , concluímos finalmente que:

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \frac{1}{v} \operatorname{sen} \theta_j \left[e^{v\lambda_{j+1}} \operatorname{senv}(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \operatorname{senv}(x_i - \xi_j) \right] + \\ & + \frac{1}{v} \operatorname{cos} \theta_j \left[e^{v\lambda_{j+1}} \operatorname{cosv}(x_i - \xi_{j+1}) - e^{v\lambda_j} \operatorname{cosv}(x_i - \xi_j) \right] \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIA

- (1) RICHEY, E. P. e NECE, R. E. - "Floating Breakwaters - State of the Art" - Proceedings of the Floating Breakwater Conference, Newport, Rhode Island, April 1974.

- (2) BOWLEY, W. W. - "A Wave Barrier Concept" - Proceedings of the Floating Breakwaters Conference, Newport, Rhode Island, April 1974.

- (3) SUTKO, A. A. e HADEN, E. L. - "The Effect of Surge, Heave and Pitch on the Performance of a Floating Breakwater" - Proceedings of the Floating Breakwaters Conference, Newport, Rhode Island, April 1974.

- (4) URSELL, F. - "On the Heaving of Motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid" - Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. II, 1949.

- (5) TASAI, F. - "On the Damping Force and Added Mass of Ships Heaving and Pitching" - Journal of the Society of Naval Architects of Japan - July, 1959.

- (6) LOPES, T. A. P. - "Características Hidrodinâmicas de um Cilindro Oscilando na Superfície Livre" - COPPE/UFRJ - Julho, 1974.

- (7) KORVIN-KROUKOVSKY, B. V. - "Investigation of Ship Motions in Regular Waves" - Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers, Vol. 63, 1955.

- (8) FRANK, W. - "Oscillation of Cylinders in or below the Free Surface of Deep Fluids" - Report of the Naval Ship Research and Development Center, October 1967.

- (9) FALTINSEN, O. M. e MICHELSEN, F. C. - "Motions of Large Structures in Waves at Zero Froude Number" - Marine Vehicles, 1974.

- (10) GARRISON, C. J. - "Hydrodynamic Loading of Large Offshore Structures: Three-Dimensional Source Distribution Methods" - Numerical Methods in Offshore Engineering.

- (11) JOHN, F. - "On the Motion of Floating Bodies II" - Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 3, Interscience Publishers, Inc., New York, 1950.

- (12) FALTINSEN, O. M. - "A Study of the Two-Dimensional Added-Mass and Damping Coefficients by the Frank Close-Fit Method" - Report of Det Norske Veritas, Norway, February, 1969.

- (13) VAN DYKE, M. - "Perturbation Methods in Fluid Mechanics" - Academic Press, 1964.

- (14) WEHAUSEN, J. V. e LAITONE, E. V. - "Surface Waves" - Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

- (15) OGILVIE, T. F. - "Integral-Equation Solutions for Time-Dependent Free-Surface Problems" - Department of Naval Architecture and Marine Engineering, the University of Michigan, Ann Arbor, Michigan.

- (16) MURPHY, J. E. - "Integral Equation Failure in Wave Calculations" - Journal of the Waterway Port Coastal and Ocean Division, Vol. 104, August, 1978.

- (17) INOUE, Y. - "Behavior of Moored Marine Structures in Waves" . IHI Engineering Review, Vol. 10, n° 3, July 1977.

- (18) INOUE, Y. - "Dynamic Behaviors of Multi-Moored Vessels in Beam Seas" - IHI Engineering Review, Vol. 11, n° 1, January 1978.

- (19) ADEE, B. H. e MARTIN, W. - "Theoretical Analysis of Floating Breakwater Performance" - Proceedings of the Floating Breakwater Conference, Newport, Rhode Island, April 1974.

- (20) NORDENSTROM, N., FALTINSEN, O. e PEDERSEN, B. - "Prediction of Wave - Induced Motions on Loads for Catamarans" - Offshore Technology Conference, 1971.