


APLICAÇÃO DO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL
NA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

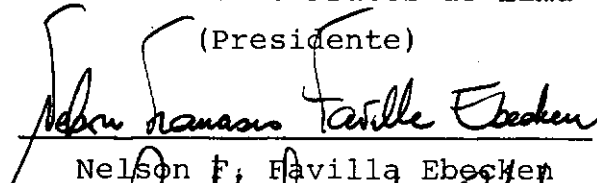
Joaquim Eduardo Mota

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

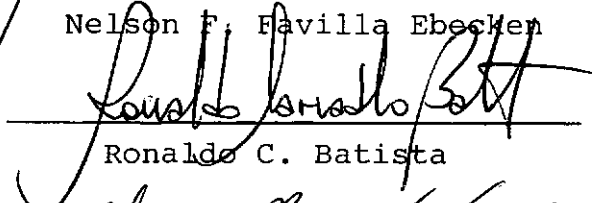
Aprovada por:



Edison Castro Prates de Lima
(Presidente)



Nelson F. Favilla Ebecken



Ronaldo C. Batista



Álvaro Maia da Costa

RIO DE JANEIRO, RJ-BRASIL

DEZEMBRO DE 1986

MOTA, JOAQUIM EDUARDO

Aplicação do Método da Superposição Modal
na Análise Estática Não Linear de Estruturas
(Rio de Janeiro), 1986.

viii, 105 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.),
Engenharia Civil, 1986.

Tese - Universidade Federal do Rio de Ja -
neiro, COPPE.

1. Análise Estática Não Linear de Estruturas
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Edison Castro Prates de Lima, pela sugestão do tema deste trabalho e orientação prestada durante o seu desenvolvimento.

Aos demais professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, pelos valiosos ensinamentos transmitidos durante o curso de pós-graduação.

À CAPES/PICD, pelo auxílio financeiro.

Aos meus pais e aos meus amigos, pelo estímulo e apoio sempre encontrados.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

APLICAÇÃO DO MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL
NA ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Joaquim Eduardo Mota

Dezembro de 1986

Orientador: Edison Castro Prates de Lima

Programa: Engenharia Civil

O método da superposição modal tem sido utilizado como um procedimento eficiente para análise estática não linear geométrica de estruturas esbeltas com comportamento pré-crítico fracamente não linear.

Neste trabalho apresenta-se uma extensão deste método, que permite a sua aplicação em outras classes de problemas não lineares, e também a consideração de não linearidade física representada por molas não lineares aplicadas na estrutura.

No caso de problemas que não se enquadram na categoria de fracamente não lineares, a solução modal é corrigida por um processo baseado em atualizações do sistema de coordenadas e no conceito de matriz de rigidez tangente. Para a consideração da não linearidade física, utiliza-se a técnica das pseudo-forças, sendo as equações modais não lineares resultantes resolvidas pelo método iterativo de Newton-Raphson.

O trabalho inclui a dedução das equações de equilíbrio, considerações sobre a implementação computacional do método e a análise de alguns exemplos de aplicação.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

APPLICATION OF THE MODE SUPERPOSITION METHOD IN
NONLINEAR STATIC ANALYSIS OF STRUCTURES

Joaquim Eduardo Mota

December, 1986

Chairman: Edison Castro Prates de Lima

Department: Civil Engineering

The linear buckling mode superposition method has been utilized as an efficient procedure for geometric nonlinear static analysis of thin-type structures with a mild nonlinear pre-buckling behaviour.

This work presents a modal method extension where both geometric and physical nonlinearities are considered.

For problems which the mild nonlinearity condition is not satisfied, the modal solution is corrected by a procedure based on updating of the coordinate system and on tangent stiffness concept.

The physical nonlinearities are represented by nonlinear springs, and the resultant modal nonlinear equation are solved by the pseudo-force technique associated with a Newton-Raphson iteration scheme.

The work includes the derivations of the equilibrium equations, considerations about a software implementation, and analysis of some application examples.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE EQUILÍBRIO	3
II.1 - INTRODUÇÃO	3
II.2 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA	4
II.3 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA DE PEQUENAS ROTAÇÕES .	8
II.4 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - MATRIZES DE RIGIDEZ SECANTE E TANGENTE	11
II.5 - PROBLEMAS COM COMPORTAMENTO PRÉ-CRÍTICO FRACAMENTE NÃO LINEAR	14
II.6 - EXTENSÃO PARA OUTRAS CLASSES DE PROBLEMAS NÃO LINEARES	20
II.7 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS COM VINCULAÇÕES REPRESENTADAS POR MOLAS NÃO LINEARES	23
CAPÍTULO III - MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL	28
III.1 - INTRODUÇÃO	28
III.2 - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO MODAL PARA ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	29
III.3 - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO MODAL PARA ANÁLISE DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA LOCALIZADA - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	33
III.4 - GERAÇÃO DA BASE PARA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS - BASE DE LANZOS-RITZ	38
CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	43
IV.1 - INTRODUÇÃO	43
IV.2 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO MODAL .	43
IV.3 - MATRIZES DE RIGIDEZ SECANTE E TANGENTE PARA ELEMENTOS DE ESTRUTURAS RETICULADAS	48
IV.3.1 - Introdução	48

IV.3.2 - Elementos Reticulados	48
IV.3.3 - Elemento de Treliça Plana	50
IV.3.4 - Elemento de Pórtico Plano	56
IV.3.5 - Elemento de Treliça Espacial	63
IV.3.6 - Elemento de Pórtico Espacial	64
CAPÍTULO V - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	66
V.1 - INTRODUÇÃO	66
V.2 - ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE CONTROLE	66
V.3 - EXEMPLO 1 - VIGA COLUNA	68
V.4 - EXEMPLO 2 - PÓRTICO PLANO	75
V.5 - EXEMPLO 3 - ARCO CIRCULAR	85
V.6 - EXEMPLO 4 - PÓRTICO PLANO	91
V.7 - EXEMPLO 5 - CASCA RETICULADA	96
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	104

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Na análise estrutural pelo método dos elementos finitos, verificamos uma grande diferença, em termos de esforço computacional, entre uma análise estática linear envolvendo fundamentalmente a solução de um sistema de equações lineares, e uma análise não linear utilizando métodos incrementais-iterativos.

Na prática, esta grande diferença tem desestimulado a utilização da análise não linear, sobretudo no desenvolvimento de projetos quando várias hipóteses de carregamento devem ser examinadas.

Constata-se, contudo, que certas classes de problemas não lineares, podem ter uma solução satisfatória, através de métodos alternativos que exigem um esforço computacional não muito superior ao de uma análise linear convencional.

Um exemplo destes métodos alternativos é o apresentado por NAGY (3), para análise estática não linear geométrica de estruturas esbeltas com comportamento pré-crítico fracamente não linear.

Basicamente, o método utiliza uma equação não linear de equilíbrio simplificada, e obtém a resposta pré-crítica da estrutura através de uma transformação de coordenadas, que utiliza como base os modos de flambagem linear da estrutura.

Recentemente, MEDEIROS (5) mostrou que é possível se obter o mesmo nível de precisão da solução dada pelo método modal clássico, utilizando, como alternativa à base modal, um conjunto de vetores gerados por um processo não iterativo baseado no algoritmo de Lanczos. Desta forma, diminuiu-se o custo do método modal, tornando ainda mais atrativa a sua utilização.

Uma outra vantagem do método modal é que ele fornece alguns parâmetros de controle que permitem uma avaliação da qualidade da solução obtida.

Neste trabalho, apresenta-se uma extensão do método modal, que permite a sua aplicação em outras classes de problemas não lineares, e também a consideração de não linearidade física representada por molas não lineares aplicadas na estrutura.

No caso de problemas que não podem ser analisados como fracamente não lineares, a solução modal é corrigida através de um processo baseado em atualizações do sistema de coordenadas e no conceito de matriz de rigidez tangente. Para a consideração de não linearidade física, utiliza-se a técnica das pseudo-forças, sendo as equações modais não lineares resultantes resolvidas pelo método iterativo de Newton-Raphson.

O desenvolvimento das equações de equilíbrio em coordenadas físicas é feito no Capítulo II. O Capítulo III trata da obtenção e solução das equações modais. No Capítulo IV são apresentados os aspectos gerais de uma implementação computacional do método, seguido do desenvolvimento de elementos para estruturas reticuladas. O Capítulo V é reservado para análise de alguns exemplos aplicativos, e o Capítulo VI para as conclusões finais do trabalho.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO LINEARES DE EQUILÍBRIO

II.1 - INTRODUÇÃO

A questão fundamental tratada na análise não linear é a da expressão da condição de equilíbrio de um corpo levando em conta a sua configuração deformada.

O estudo geral deste problema, sem restrições impostas aos deslocamentos e às deformações, é feito na mecânica do contínuo (1).

Neste capítulo, abordaremos apenas os aspectos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Inicialmente serão apresentados os conceitos de referencial Lagrangeano e o de tensores energeticamente conjugados.

Estabelece-se a seguir, o princípio dos trabalhos virtuais em termos dos tensores de Piola-Kirchhoff e de Green-Lagrange.

A partir de considerações sobre a ordem de grandeza dos deslocamentos e deformações, define-se a classe de problemas que iremos resolver.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é então aplicado para discretização do contínuo, obtendo-se a equação matricial não linear de equilíbrio.

Neste ponto, desenvolve-se uma equação simplificada para solução de problemas com comportamento pré-crítico fracamente não linear.

A equação simplificada é examinada quanto a sua utilização em outras classes de problemas.

Por fim, fazemos uma extensão da equação não linear simplificada para consideração de molas não lineares aplicadas na estrutura.

II.2 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA

Considere o movimento de um corpo genérico, definido no sistema cartesiano (x_1, x_2, x_3) de referência, como mostra a figura II.1.

Todas as variáveis, estáticas e cinemáticas, são medidas em relação a este referencial que é mantido fixo.

Um ponto P genérico, no interior do corpo, tem na configuração inicial ($t = 0$) as coordenadas $(^0x_1, ^0x_2, ^0x_3)$; para a configuração deformada ($t = \bar{t}$) as novas coordenadas são dadas por

$$\bar{x}_i = ^0x_i + \bar{u}_i \quad (II.1)$$

onde \bar{u}_i é o deslocamento de P na direção i .

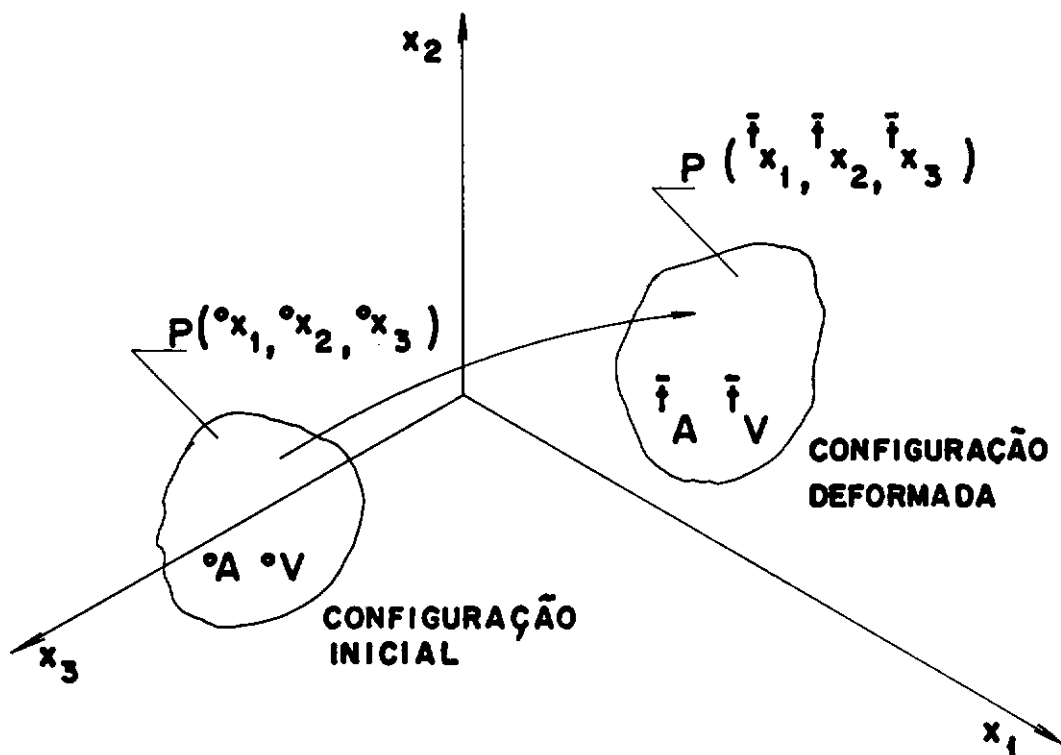


Fig. II.1 - Referencial Lagrangeano

O estudo do movimento é feito portanto acompanhando os deslocamentos de todas as partículas do corpo. Isto caracteriza a descrição Lagrangeana que se contrapõe à Euleriana onde o movimento é estudado em regiões fixas do contínuo denominadas volumes de controle.

A condição de equilíbrio do corpo para a configuração no tempo \bar{t} pode ser expressa pelo princípio dos trabalhos virtuais.

Seja δu_i uma variação virtual das componentes cartesianas do campo de deslocamento da configuração deformada. O trabalho virtual das forças internas é igual ao trabalho virtual das forças externas. Em notação tensorial temos:

$$\int_V \bar{\tau}_{ij} \delta e_{ij} \bar{t}_{dv} = \delta W \quad (\text{II.2})$$

onde

$\bar{\tau}_{ij}$ - componentes cartesianas do tensor de tensões de Cauchy definidas na configuração deformada.

δe_{ij} - variação virtual das componentes cartesianas do tensor de deformações infinitesimais. É dado pela expressão

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \delta u_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial \bar{x}_i} \right] \quad (\text{II.3})$$

δW - trabalho virtual das forças externas. Corresponde à expressão

$$\delta W = \int_V \bar{f}_i^B \delta u_i \bar{t}_{dv} + \int_A \bar{f}_i^A \delta u_i \bar{t}_{dA} \quad (\text{II.4})$$

onde f_i^B e f_i^A são as forças de massa e de superfície que atuam no corpo.

A dificuldade fundamental na aplicação direta da equação (II.2) é que a configuração do corpo em \bar{t} é desconhecida. Esta é, aliás, a principal diferença se compararmos com a análise linear onde não se considera a mudança de configuração devido à hipótese de pequenos deslocamentos.

Outro problema é que as tensões de Cauchy são sempre orientadas pelo referencial fixo (x_1, x_2, x_3) , não acompanhando a partícula. Assim, para uma rotação rígida do corpo, as tensões de Cauchy se modificam sem que tenha havido deformação; cria-se, portanto, uma dificuldade para o estabelecimento

de relações constitutivas.

A forma de contornar estes problemas, causados pela mudança de configuração, é transformar a equação (II.2) em outra equivalente onde a integral seja definida sobre o volume da configuração indeformada.

Dois novos tensores são então definidos. O 2º tensor de tensões de Piola-Kirchhoff e o tensor de deformações de Green-Lagrange.

O 2º tensor de Piola-Kirchhoff se relaciona com o de Cauchy pela expressão

$$t_{S_{ij}} = \frac{o_\rho}{t_\rho} o_{x_{i,m}} t_{mn} o_{x_{j,n}} ; o_{x_{i,m}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_m} \quad (II.5)$$

onde $\frac{o_\rho}{t_\rho}$ representa a razão entre a densidade de massa da configuração inicial e a da configuração deformada.

O tensor de Green-Lagrange é dado por

$$t_{\epsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{o} u_{i,j} + \frac{t}{o} u_{j,i} + \frac{t}{o} u_{k,i} \frac{t}{o} u_{k,j} \right) \quad (II.6)$$

Para grandes deformações, estes tensores têm pouco significado físico. Pode-se demonstrar que eles não se modificam para movimentos rígidos do corpo. A propriedade mais importante destes tensores é que eles são energeticamente conjugados. Isto significa que

$$\bar{t}_{S_{ij}} \delta \bar{t}_{\epsilon_{ij}} = \text{trabalho virtual das forças internas na configuração deformada por unidade de volume indeformado} \quad (II.7)$$

onde

$\delta \bar{\epsilon}_{ij}$ - variação virtual das componentes cartesianas do tensor de deformação de Green-Lagrange

Utilizando (II.7), temos que

$$\int_{O_V} \bar{\epsilon}_{ij} \delta \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_{\bar{\epsilon}_V} \bar{\epsilon}_{ij} \delta \bar{\epsilon}_{ij} dV = \delta W \quad (II.8)$$

Admitindo-se que as forças externas são independentes da deformação, o trabalho virtual por elas realizado pode também ser calculado na configuração indeformada.

$$\delta W = \int_{O_V} \bar{\epsilon}_{fi}^B \delta u_i dV + \int_{O_A} \bar{\epsilon}_{fi}^A \delta u_i dA \quad (II.9)$$

Para o desenvolvimento do MEF é mais conveniente escrever a equação (II.8) em forma matricial como

$$\int_{O_V} \delta \bar{\epsilon}^T \bar{S} dV = \delta W \quad (II.10)$$

onde

$$\bar{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13} \ 2\epsilon_{23}] \quad (II.11)$$

$$\bar{S}^T = [S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{12} \ S_{13} \ S_{23}] \quad (II.12)$$

II.3 - FORMULAÇÃO LAGRANGEANA DE PEQUENAS ROTAÇÕES

Na obtenção da equação (II.10) são utilizados apenas o conceito de meio contínuo e a hipótese de equilíbrio. Nenhuma limitação é imposta aos deslocamentos e deformações. A equação (II.10) é portanto geral, permitindo que se analise todo tipo de não linearidade.

Estabeleceremos agora as hipóteses que definirão a classe de problemas que resolveremos.

Admite-se, em primeiro lugar, que os materiais da estrutura trabalham em regime elástico. A hipótese de pequenas deformações ($\epsilon \ll 1$) é então naturalmente adotada, já que para a maioria dos materiais a hipótese de regime elástico implica que as deformações sejam da ordem de 10^{-3} no máximo.

Uma consequência importante é que nestas condições os tensores de Green-Lagrange e o 2º de Piola-Kirchhoff adquirem significado físico, sendo as suas componentes identificadas com as deformações e tensões de uso na engenharia.

A relação constitutiva (tensão-deformação) é então estabelecida adotando-se a hipótese de proporcionalidade ou lei de Hooke generalizada.

$$\underline{S} = \underline{E} \underline{\epsilon} \quad (\text{II.13})$$

onde \underline{E} é a matriz elástica

$$\underline{E} = \frac{E}{(1+\gamma)(1-2\gamma)} \begin{bmatrix} (1-\gamma) & & & & & \\ \gamma & (1-\gamma) & & & & \\ \gamma & \gamma & (1-\gamma) & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\gamma}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\gamma}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\gamma}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \text{simétrica} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (\text{II.14})$$

sendo

E - Módulo de Elasticidade Longitudinal

γ - Coeficiente de Poisson

Do ponto de vista físico ou de material, o comportamento da estrutura é portanto elástico linear.

A hipótese de pequenas deformações não é todavia suficiente para linearizar as relações deformação-deslocamentos.)

Observando a equação (II.6), a linearidade geométrica só se verifica quando todos os produtos dos gradientes de deslocamentos puderem ser desprezados na presença deste, ou seja

$$u_{k,i} u_{k,j} \ll u_{i,j} \quad (\text{II.15})$$

Demonstra-se na teoria da Elasticidade não Linear (2), que a condição (II.15) (linearidade geométrica) é satisfeita quando o quadrado dos deslocamentos angulares (rotações) forem desprezíveis na presença das deformações (alongamentos relativos e distorções).

Designando as rotações por θ , identificamos então três situações:

a) Rotações "muito pequenas" (θ da ordem de ϵ).

Neste caso θ^2 será desprezível em presença de ϵ (já que para pequenas deformações ($\epsilon \ll 1$) temos $\epsilon^2 \ll \epsilon$) e o problema pode ser analisado pela teoria linear.

Para que a condição de linearidade física não seja violada temos que $\theta \leq 0,001$ rad ou $\theta \leq 0,06^\circ$.

Nesta faixa podemos fazer

$$\theta \approx \sin \theta \approx \text{tg } \theta$$

b) Rotações "pequenas" (θ^2 é da ordem de ϵ)

Os termos não lineares na relação deformação-deslocamentos não podem ser mais desprezados.

Devido ao limite elástico temos $\theta^2 \leq 0,001$

$$\theta \leq 0,03 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \theta \leq 2^{\circ}$$

Ainda se pode fazer $\theta \approx \sin \theta \approx \text{tg } \theta$

Porém devemos considerar $\cos \theta = 1 - \theta^2/2$.

A solução da equação (II.10) adotando esta hipótese, é chamada de teoria simplificada de segunda ordem ou formulação Lagrangeana de pequenas rotações.

c) Rotações "grandes" (A ordem de grandeza de ϵ pode ser estimada por θ^4)

Pelo limite elástico temos $\theta^4 \leq 0,001$

$$\theta \leq 0,18 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \theta \leq 10^{\circ}$$

Corresponde ao caso onde a teoria completa deve ser utilizada, já que grandes deslocamentos são verificados.

Nossa análise não linear geométrica utilizará em tão a hipótese de pequenas rotações. Mais adiante mostraremos que através de uma atualização do referencial Lagrangeano, pode-se usar a teoria simplificada de 2ª ordem para análise de grandes deslocamentos.

II.4 - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS - MATRIZES DE RIGIDEZ SECANTE E TANGENTE

Utilizaremos agora o método dos elementos finitos para discretização da equação (II.10). O contínuo é então dividido em regiões (elementos finitos) onde se definem um determinado número de pontos denominados pontos nodais. Para cada elemento o campo de deslocamento é obtido pela interpolação dos deslocamentos dos pontos nodais. Matricialmente temos

$$\underline{u} = \underline{\phi} \underline{r} \quad \text{(II.16)}$$

onde

- \underline{u} - vetor dos deslocamentos no elemento
- $\underline{\phi}$ - matriz das funções de interpolação
- \underline{r} - vetor dos deslocamentos dos pontos nodais

Usando (II.16), o campo de deformação é dado por

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B}_0 \underline{r} + \underline{B}_1 \underline{r} \quad (\text{II.17})$$

onde \underline{B}_0 é função apenas de $\underline{\phi}$ e representa a parte linear da relação deformação-deslocamento. A matriz \underline{B}_1 é função de $\underline{\phi}$ e \underline{r} e fornece a parcela não linear da deformação.

Pode-se demonstrar que \underline{B}_1 é linear em \underline{r} ou seja

$$\underline{B}_1(\underline{r}_1) \underline{r}_2 = \underline{B}_1(\underline{r}_2) \underline{r}_1 \quad (\text{II.18})$$

A variação $\delta \underline{\varepsilon}$ é dada então por

$$\delta \underline{\varepsilon} = [\underline{B}_0 + \underline{B}_1(\underline{r})] \delta \underline{r} + \underline{B}_1(\delta \underline{r}) \underline{r} = [\underline{B}_0 + 2\underline{B}_1(\underline{r})] \delta \underline{r} \quad (\text{II.19})$$

Substituindo (II.13), (II.17) e (II.19) em (II.10), temos

$$\int_{OV} [\underline{B}_0 + 2\underline{B}_1(\underline{r})]^T \underline{E} [\underline{B}_0 + \underline{B}_1(\underline{r})] \underline{r} dV = \underline{R} \quad (\text{II.20})$$

onde \underline{R} dado por

$$\underline{R} = \int_{OV} \underline{\phi}^T \underline{\bar{t}}_f^B dV + \int_{OA} \underline{\phi}^T \underline{\bar{t}}_f^A dA \quad (\text{II.21})$$

é o vetor das forças nodais cinematicamente equivalentes no sentido de que elas realizam o mesmo trabalho que as forças \underline{f}_f^B e \underline{f}_f^A para o campo de deslocamento dado por (II.16).

A equação (II.20) é a relação não linear entre as forças nodais e os deslocamentos nodais.

Fazendo

$$\underline{K}_e = \int_{O_V} \underline{B}_O^T \underline{E} \underline{B}_O \, dV \quad \text{MATRIZ DE RIGIDEZ ELÁSTICA LINEAR} \quad (\text{II.22})$$

$$\underline{K}_g = \underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) + \underline{K}_g(\Delta \underline{\sigma}) = 2 \int_{O_V} \underline{B}_1^T \underline{E} \underline{B}_O \, dV + 2 \int_{O_V} \underline{B}_1^T \underline{E} \underline{B}_1 \, dV \quad \text{MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA} \quad (\text{II.23})$$

$$\underline{K}_l = \int_{O_V} \underline{B}_O^T \underline{E} \underline{B}_1 \, dV \quad (\text{II.24})$$

a equação (II.20) pode ser escrita como

$$[\underline{K}_e + \underline{K}_g + \underline{K}_l] \underline{r} = \underline{K}_s \underline{r} = \underline{R} \quad (\text{II.25})$$

onde \underline{K}_s é a matriz de rigidez secante relacionando forças e deslocamentos levando em conta a configuração deformada.

Diferenciando a equação (II.25) em relação a \underline{r} obtemos

$$\frac{\partial \underline{R}}{\partial \underline{r}} = \underline{K}_s + \frac{\partial \underline{K}_s}{\partial \underline{r}} \underline{r} = \underline{K}_e + \underline{K}_g + \Delta \underline{K}_e = \underline{K}_t \quad (\text{II.26})$$

onde

$$\Delta \underline{K}_e = 4 \int_{O_V} \underline{B}_1^T \underline{E} \underline{B}_1 \, dV + 2 \int_{O_V} \underline{B}_O^T \underline{E} \underline{B}_1 + \underline{B}_1^T \underline{E} \underline{B}_O \, dV \quad (\text{II.27})$$

A soma \underline{K}_t é a matriz de rigidez tangente e representa a taxa instantânea de variação das forças internas em relação a uma variação dos deslocamentos.

II.5 - PROBLEMAS COM COMPORTAMENTO PRÉ-CRÍTICO FRACAMENTE NÃO LINEAR

Para a solução da equação não linear de equilíbrio (II.25) podem ser empregados os métodos incrementais-iterativos de uso já tradicional na análise não linear.

O elevado esforço computacional verificado nas implementações destes métodos clássicos levou ao desenvolvimento de processos mais eficientes e adaptados às condições específicas da classe de problema a ser resolvida.

Um exemplo destes métodos intermediários é o apresentado por NAGY (3) para a solução de problemas com comportamento pré-crítico fracamente não linear.

Neste caso, o método desenvolve uma equação de equilíbrio particular, correspondendo a uma simplificação em (II.25), e utiliza como incôgnita o desvio da solução linear do problema.

A grande vantagem do método é que a equação obtida admite uma solução simples não incremental-iterativa para uma família de carregamento do tipo λR .

Um outro aspecto importante é a constatação de que grande parte dos problemas não lineares, situados na categoria de pequenas rotações, também satisfazem as condições de comportamento pré-crítico fracamente não linear, e portanto, têm uma solução satisfatória pela equação simplificada.

Neste item apresentaremos a conceituação de problema com comportamento pré-crítico fracamente não linear seguida

do desenvolvimento da equação não linear de equilíbrio simplificada para análise desta classe de problemas.

II.5.1 - Flambagem Linear

Admitamos que exista uma família de carregamento do tipo λR_1 que lineariza a equação (II.25) para uma faixa de valores de λ de nosso interesse.

Isto significa que os termos não lineares em (II.25) podem ser neste caso desprezados, ou seja

$$\lambda R_1 = K_e \lambda r_1 \gg [\lambda K_g(\sigma_{1L}) + K_\ell(\lambda r_1)] \lambda r_1 \quad (\text{II.28})$$

$$\sigma_{1L} = E B_o r_1 \quad (\text{II.29})$$

Como a equação (II.25) é não linear, verificaremos a possibilidade de existência de uma outra solução para o carregamento λR_1 .

Considera-se então que a nova solução seja do tipo

$$\bar{r} = \lambda r_1 + \Delta r \quad (\text{II.30})$$

onde Δr é uma perturbação infinitesimal da solução linear.

Substituindo (II.30) em (II.25) e desprezando os termos de ordem superior em Δr obtemos

$$[K_e + \lambda K_g(\sigma_{1L})] \Delta r = 0 \quad (\text{II.31})$$

De (II.31), fica claro que as soluções diferentes de λr_1 só podem existir se

$$\det [K_e + \lambda K_g(\sigma_{1L})] = 0 \quad (\text{II.32})$$

O anulamento do determinante em (II.32) só é verificado para valores discretos de λ correspondentes aos autovalores do problema

$$K_e \underline{X} = -K_g(\sigma_{1L}) \underline{X} \underline{\Lambda} \quad (\text{II.33})$$

Para uma estrutura com n graus de liberdade, temos que $\underline{\Lambda}$ é uma matriz diagonal composta dos n autovalores de (II.33) e \underline{X} é uma matriz $n \times n$ formada pelos autovetores correspondentes.

A interpretação desta solução é que a estrutura responderá linearmente para o intervalo $0 \leq \lambda < \lambda_1$. Em $\lambda = \lambda_1$ a curva força-deslocamento sofre uma bifurcação admitindo também a solução do tipo

$$\underline{\bar{r}} = \lambda r_1 + \epsilon \underline{X}_1 \quad (\text{II.34})$$

onde ϵ é um parâmetro indeterminado.

O ponto de bifurcação é denominado também de ponto crítico ou ponto de flambagem e pode corresponder a uma situação de equilíbrio instável da estrutura.

Os valores λ_1 são os fatores que determinam as cargas críticas e os vetores \underline{X}_1 são os correspondentes modos de flambagem.

Devido ao comportamento pré-crítico linear da es-

trutura, este problema é conhecido como flambagem linear.

II.5.2 - Comportamento Pré-Crítico Fracamente Não Linear

A flambagem linear é uma situação ideal que na prática dificilmente ocorre devido à existência de pequenas imperfeições na geometria inicial da estrutura ou nas cargas aplicadas. Estas perturbações causam um afastamento da solução linear antes de λ atingir o valor crítico λ_1 .

Este afastamento da solução linear depende do grau das imperfeições na estrutura e da sensibilidade desta com relação a estas imperfeições. Diz-se então que a estrutura apresenta um comportamento pré-crítico fracamente não linear.

Consideremos agora que a estrutura seja submetida a um carregamento λ_R , próximo de λ_{R1} , podendo ser escrito como

$$\lambda_R = \lambda_{R1} + \lambda \Delta_R \quad (\text{II.35})$$

Devemos entender que λ_R é o carregamento real da estrutura e λ_{R1} é um carregamento ideal, próximo de λ_R , e que satisfaz as condições do problema de flambagem linear.

Admite-se como em (II.30) que a solução para o carregamento λ_R seja do tipo

$$\underline{r} = \lambda_{R1} \underline{r}_1 + \Delta \underline{r} \quad (\text{II.36})$$

com $\Delta \underline{r}$ pequeno quando comparado com $\lambda_{R1} \underline{r}_1$.

Após a substituição de (II.36) em (II.25) e desprezando os termos de ordem superior em $\Delta \underline{r}$, obtemos

$$[\underline{K}_e + \lambda \underline{K}_g(\sigma_{1L})] \Delta \underline{r} = \lambda \Delta \underline{R} \quad (\text{II.37})$$

De (II.36) temos que

$$\Delta \underline{r} = \underline{r} - \lambda \underline{r}_1 \quad (\text{II.38})$$

Por outro lado, podemos também escrever a solução não linear como

$$\underline{r} = \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D \quad (\text{II.39})$$

onde $\lambda \underline{r}_L$ é a solução linear para o carregamento $\lambda \underline{R}$ e \underline{r}_D é o afastamento desta solução devido à não linearidade geométrica.

Substituindo (II.39) em (II.38) temos que

$$\Delta \underline{r} = \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D - \lambda \underline{r}_1 \quad (\text{II.40})$$

Desenvolvendo (II.37) utilizando o valor de $\Delta \underline{r}$ dado por (II.40), obtemos

$$\underline{K}_e(\lambda \underline{r}_L - \lambda \underline{r}_1) + \underline{K}_e \underline{r}_D + \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_D - \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_1 = \lambda \Delta \underline{R} \quad (\text{II.41})$$

De (II.35) podemos escrever

$$\lambda \Delta \underline{R} = \lambda \underline{R} - \lambda \underline{R}_1 = \underline{K}_e \lambda \underline{r}_L - \underline{K}_e \lambda \underline{r}_1 = \underline{K}_e (\lambda \underline{r}_L - \lambda \underline{r}_1) \quad (\text{II.42})$$

Além disto, como $\lambda \underline{R}_1$ satisfaz as condições do problema de flambagem linear, o termo $\lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_1$ pode ser desprezado em presença de $\lambda \underline{K}_e \underline{r}_1$.

$$\lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_1 \ll \lambda \underline{K}_e \underline{r}_1 \quad (\text{II.43})$$

Levando em conta (II.42) e (II.43), a equação (II.41) simplifica-se para

$$\underline{K}_e \underline{r}_D + \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\sigma_{1L}) \underline{r}_D = \underline{0} \quad (\text{II.44})$$

O único problema para utilização da equação (II.44) é que não conhecemos o carregamento λR_1 e portanto a matriz $\underline{K}_g(\sigma_{1L})$ não pode ser obtida. Este fato pode ser contornado considerando que devido à proximidade de λR e λR_1 temos que $\sigma_{1L} \approx \sigma_L = \frac{EB}{L} r_L$ e, desta forma, podemos substituir $\underline{K}_g(\sigma_{1L})$ por $\underline{K}_g(\sigma_L)$.

A equação de equilíbrio simplificada para problemas fracamente não lineares corresponde então a

$$\underline{K}_e \underline{r}_D + \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_D = \underline{0} \quad (\text{II.45})$$

Esta equação será válida para o intervalo $\lambda_{1-} < \lambda < \lambda_{1+}$ onde λ_{1-} e λ_{1+} são os primeiros autovalores negativo e positivo, respectivamente, do problema de autovalor (II.33). Se os autovalores forem todos positivos, o intervalo de validade da equação (II.45) será $(-\infty, \lambda_{1+})$; em caso contrário, para autovalores negativos, teremos $(\lambda_{1-}, +\infty)$.

Devemos enfatizar que a equação (II.45) é apenas uma aproximação da equação não linear completa (II.25) e é válida somente para problemas com comportamento pré-crítico fracamente não linear.

Mais tarde estabeleceremos um parâmetro de controle obtido através de normas especiais dos vetores $\lambda \underline{r}_1$ e $\Delta \underline{r}$ que nos permitirá avaliar a qualidade da solução fornecida pela equação (II.45).

II.6 - EXTENSÃO PARA OUTRAS CLASSES DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

No item anterior vimos que a equação (II.45) pode ser utilizada no lugar da equação (II.25) nos casos de problemas com comportamento pré-crítico fracamente não linear.

Para problemas que não estão próximos de uma situação de flambagem linear, a solução fornecida pela equação (II.45) deve ser vista apenas como uma solução intermediária entre a solução linear e a não linear exata.

De fato, considerando apenas os dois primeiros termos em (II.25), obtemos a equação intermediária

$$[K_e + K_g(\sigma)] \underline{r} = \underline{R} \quad (\text{II.46})$$

Como nos desenvolvimentos anteriores, a solução \underline{r} para o carregamento λR será dada por

$$\underline{r} = \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D \quad (\text{II.47})$$

onde $\lambda \underline{r}_L$ é a resposta linear para o carregamento λR ; ou seja

$$K_e \lambda \underline{r}_L = \lambda \underline{R} \quad (\text{II.48})$$

Substituindo (II.47) em (II.46), obtemos a equação

$$K_e (\lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D) + K_g(\lambda \sigma_L) (\lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D) + K_g(\Delta \sigma) (\lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D) = \lambda \underline{R} \quad (\text{II.49})$$

onde

$$\lambda \sigma_L = E B_0 \lambda \underline{r}_L \quad (\text{II.50})$$

$$\Delta \sigma = E B_1 (\lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D) + E B_0 \underline{r}_D \quad (\text{II.51})$$

Observando a equação (II.49), podemos identificar

duas situações particulares.

Suponhamos, em primeiro lugar, que tenhamos a validade de

$$||\underline{K}_g(\Delta\sigma)(\lambda\underline{r}_L + \underline{r}_D)|| \ll ||\underline{K}_g(\lambda\sigma_L)(\lambda\underline{r}_L + \underline{r}_D)|| \ll ||\underline{K}_e(\lambda\underline{r}_L + \underline{r}_D)|| \quad (\text{II.52})$$

para o intervalo de λ de nosso interesse.

A notação adotada em (II.52) significa que cada elemento do vetor do lado esquerdo é desprezível quando comparado com o elemento correspondente do vetor do lado direito.

Levando em conta (II.48) e (II.52), temos que a equação (II.49) resume-se a

$$\underline{K}_e \underline{r}_D = \underline{0} \quad (\text{II.53})$$

ou seja, $\underline{r}_D = \underline{0}$, indicando que a resposta linear é satisfatória.

Uma segunda situação corresponde à consideração apenas da primeira parte da desigualdade (II.52), o que nos leva a

$$||\underline{K}_g(\Delta\sigma)(\lambda\underline{r}_L + \underline{r}_D)|| \ll ||\underline{K}_g(\lambda\sigma_L)(\lambda\underline{r}_L + \underline{r}_D)|| \quad (\text{II.54})$$

Neste caso, a equação (II.49) simplifica-se para

$$\underline{K}_e \underline{r}_D + \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_D = \underline{0} \quad (\text{II.55})$$

que é idêntica à equação (II.45) obtida para problemas fracamente não lineares.

À medida que a condição (II.54) vai deixando de ser cumprida, a solução dada pela equação (II.55) vai se afastando da solução não linear exata, fornecendo portanto, como já havi-

amos adiantado, uma solução intermediária.

Esta solução intermediária se constitui uma opção interessante sobretudo para análise de problemas, como os de e levado número de graus de liberdade e sujeito a várias combinações de carregamento, onde a análise não linear convencional é normalmente rejeitada, a nível de projeto, devido ao seu elevado custo.

A utilização da equação (II.55), nestas circunstâncias, deve então ser entendida como uma substituição da análise linear.

Ainda para estes casos, pode-se obter uma correção da solução dada por (II.55) através de atualizações de referencial.

Considere, por exemplo, que se deseja fazer uma atualização de referencial em $\lambda = \lambda_p$.

Com os deslocamentos \underline{r}_p , obtidos para o nível λ_p , obtém-se então a matriz de rigidez tangente \underline{K}_t^1 dada por (II.26).

As coordenadas nodais são então atualizadas para a nova configuração da estrutura.

Calcula-se a solução linear

$$\underline{K}_t^1 \underline{r}_L = \underline{R} \quad (II.56)$$

e com \underline{r}_L obtemos a matriz $\underline{K}_g^1(\sigma_L)$.

A equação que fornecerá os deslocamentos a partir de \underline{r}_p será dada então por

$$\underline{K}_t^1 \underline{r}_D + \bar{\lambda}^2 \underline{K}_g^1(\sigma_L) \underline{r}_L + \bar{\lambda} \underline{K}_g^1(\sigma_L) \underline{r}_D = 0 \quad (II.57)$$

onde

$$\bar{\lambda} = \lambda - \lambda_p \quad (II.58)$$

Os deslocamentos totais correspondem então a

$$\underline{r} = \underline{r}_p + \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D \quad (\text{II.59})$$

Dos itens (II.5) e (II.6) podemos concluir que a análise estrutural utilizando a equação (II.55) se apresenta como um procedimento alternativo à análise linear, incorporando as seguintes vantagens:

- Para os casos de comportamento pré-crítico fracamente não linear, a solução dada é uma aproximação bastante satisfatória da solução não linear completa.
- Nos demais problemas, a equação (II.55) oferece uma solução melhor que a linear, podendo-se obter uma estimativa da solução não linear. Obtém-se assim, uma análise intermediária entre a linear e a não linear exata, com um custo muito inferior ao desta última.

II.7 - ANÁLISE DE ESTRUTURAS COM VINCULAÇÕES REPRESENTADAS POR MOLAS NÃO LINEARES

Neste item estabeleceremos uma extensão da equação (II.55) que permite incluir os efeitos de molas não lineares ligadas na estrutura.

A nova equação será desenvolvida usando a técnica das pseudo-forças.

Apresentaremos, inicialmente, a aplicação do método das pseudo-forças em um problema com um grau de liberdade.

Considere o problema da determinação do deslocamento sofrido por uma mola M representada na figura II.2 quando

a mesma é solicitada por uma força R

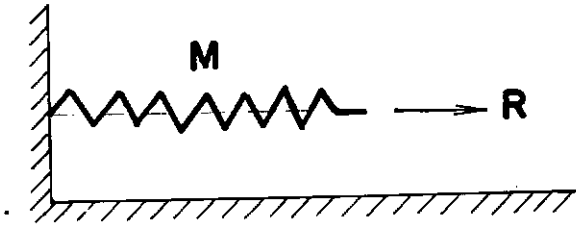


Figura II.2 - Mola Não Linear

A relação força-deslocamento de M é dada pela função $F(r)$ não linear em r .

A equação de equilíbrio é, portanto

$$F(r) = R \quad (\text{II.60})$$

Supondo que a mola tivesse uma rigidez constante de valor K , a curva força-deslocamento corresponde à reta $F=Kr$.

Na figura II.3 são apresentadas as curvas supondo comportamento linear e não linear.

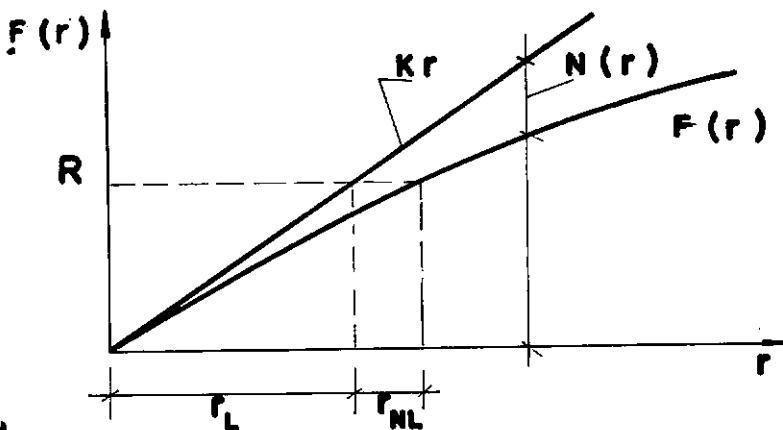


Figura II.3 - Curvas Força - Deslocamento

Seja então $N(r)$ a função que fornece a diferença entre as duas curvas. Temos então

$$N(r) = Kr - F(r) \quad (\text{II.61})$$

Obtendo $F(r)$ em (II.61) e substituindo em (II.60), obtemos

$$Kr = R + N(r) \quad (\text{II.62})$$

A idéia é tratar a mola como se ela tivesse uma rigidez fixa e a força externa como uma função do deslocamento.

A força $N(r)$ fictícia é denominada de pseudo-força.

Dentro do espírito da equação (II.55), vamos considerar que a solução linear r_L dada por

$$r_L = \frac{R}{K} \quad (\text{II.63})$$

tenha sido determinada.

Substituindo r em (II.62) por $r_L + r_{NL}$ temos

$$Kr_{NL} = N(r) \quad (\text{II.64})$$

que é uma equação em termos do desvio da solução linear.

A aplicação do procedimento acima na formulação matricial nos leva à equação

$$\underline{K}_e \underline{r}_D + \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_D = \underline{N}(\underline{r}) \quad (\text{II.65})$$

onde as matrizes \underline{K}_e e \underline{K}_g são obtidas supondo rigidez constante para as molas não lineares ligadas na estrutura. O vetor $\underline{N}(\underline{r})$ é o vetor das pseudo-forças.

O desvio \underline{r}_D é dado agora pela soma da parcela \underline{r}_{D1} devido à não linearidade geométrica com a parcela \underline{r}_{D2} devido às molas não lineares.

Fazendo então

$$\underline{r}_D = \underline{r}_{D1} + \underline{r}_{D2} \quad (\text{II.66})$$

e substituindo em (II.65), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\underline{K}_e \underline{r}_{D1} + \lambda^2 \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_L + \lambda \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_{D1} = 0 \quad (\text{II.67})$$

$$\underline{K}_e \underline{r}_{D2} + \lambda \underline{K}_g(\sigma_L) \underline{r}_{D2} = \underline{N}(\underline{r}) \quad (\text{II.68})$$

Obtidas as parcelas \underline{r}_{D1} e \underline{r}_{D2} , o deslocamento final será dado por

$$\underline{r} = \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_{D1} + \underline{r}_{D2} \quad (\text{II.69})$$

O tipo de mola que consideraremos em nossas análises apresenta uma curva força-deslocamento dada por trechos lineares.

Na figura II.4 ilustra-se o caso de uma mola não linear genérica.

Os valores K_i são os coeficientes angulares ou de rigidez da mola para cada trecho.

Admite-se também que a relação força-deslocamento seja ímpar, significando que

$$F(-r) = -F(r) \quad (\text{II.70})$$

Na utilização do método das pseudo-forças tomaremos a rigidez constante K sempre maior que K_i , ou seja

$$K > K_i > 0 \quad (\text{II.71})$$

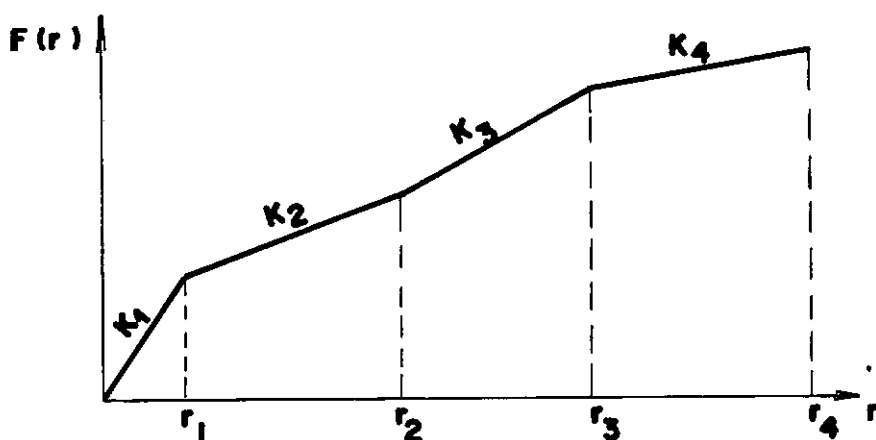


Figura II.4 - Curva Força-Deslocamento

A curva representando as pseudo-forças para a mola genérica da figura II.5 será então

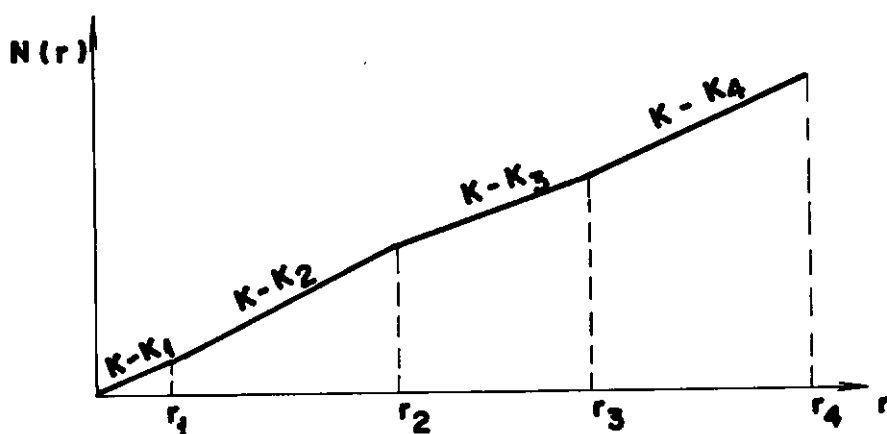


Figura II.5 - Pseudo-Força

CAPÍTULO III

MÉTODO DA SUPERPOSIÇÃO MODAL

III.1 - INTRODUÇÃO

As equações para análise não linear (II.67) e (II.68), desenvolvidas no capítulo anterior, são definidas no espaço \mathbf{R}^n utilizando a sua base canônica.

Teoricamente qualquer outra base \mathbf{R}^n pode também ser utilizada para representação destas equações.

Baseado neste princípio, o Método da Superposição Modal (MSM) efetua uma transformação de coordenadas representando as equações (II.67) e (II.68) em uma nova base formada pelos autovetores de problema (II.33), ou seja, os modos de flambagem da estrutura.

Veremos, neste capítulo, que esta mudança é particularmente eficiente, no sentido de que apenas poucos vetores da nova base serão necessários para uma boa representação da solução.

Como alternativa à base modal, faremos uso da base Lanczos-Ritz que é uma aproximação da base modal obtida por um processo não iterativo e que permite a seleção dos vetores ou modos de flambagem mais significativos para o cálculo da solução.

III.2 - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO MODAL PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Representando os vetores \underline{r}_L e \underline{r}_D da equação (II.45) na base modal, temos que

$$\underline{r}_L = \underline{X} \underline{\alpha} \quad \text{e} \quad (III.1)$$

$$\underline{r}_D = \underline{X} \underline{\beta} \quad (III.2)$$

onde $\underline{\alpha}$ e $\underline{\beta}$ são os vetores contendo respectivamente as coordenadas de \underline{r}_L e \underline{r}_D na base modal.

A resposta não linear \underline{r} pode ser escrita então como

$$\underline{r} = \lambda \underline{r}_L + \underline{r}_D = \underline{X} \lambda \underline{\alpha} + \underline{X} \underline{\beta} = \underline{X} (\lambda \underline{\alpha} + \underline{\beta}) = \underline{X} \underline{\gamma} \quad (III.3)$$

Substituindo (III.1) e (III.2) em (II.45) e pré-multiplicando toda equação por \underline{X}^T , obtemos

$$\underline{X}^T \underline{K}_e \underline{X} \underline{\beta} + \lambda^2 \underline{X}^T \underline{K}_g (\underline{\sigma}_L) \underline{X} \underline{\alpha} + \lambda \underline{X}^T \underline{K}_g (\underline{\sigma}_L) \underline{X} \underline{\beta} = \underline{0} \quad (III.4)$$

Pelas propriedades dos autovetores, temos que

$$\underline{X}^T \underline{K}_e \underline{X} = \underline{I} \quad \text{e} \quad (III.5)$$

$$\underline{X}^T \underline{K}_g (\underline{\sigma}_L) \underline{X} = -\underline{\Lambda}^{-1} \quad (III.6)$$

e a equação (III.4) transforma-se em

$$\underline{I} \underline{\beta} - \lambda^2 \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\alpha} - \lambda \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\beta} = \underline{0} \quad (III.7)$$

Resolvendo para $\underline{\beta}$ encontramos

$$\underline{\beta} = (\underline{I} - \lambda \underline{\Lambda}^{-1})^{-1} \lambda^2 \underline{\Lambda}^{-1} \underline{\alpha} \quad (III.8)$$

ou

$$\beta_i = \frac{(\lambda/\lambda_i)}{(1-\lambda/\lambda_i)} \lambda \alpha_i \quad (\text{III.9})$$

As coordenadas da resposta não linear na base modal correspondem então a

$$\gamma_i = \lambda \alpha_i + \beta_i = \lambda \alpha_i + \frac{(\lambda/\lambda_i)}{(1-\lambda/\lambda_i)} \lambda \alpha_i \quad (\text{III.10})$$

Observando a equação (III.10), concluímos que para valores de (λ/λ_i) muito menores que a unidade ($\frac{\lambda}{\lambda_i} \ll 1$) temos que $\lambda \alpha_i \gg \beta_i$, e portanto, a contribuição do autovetor \underline{X}_i para a representação da parcela não linear \underline{r}_D pode ser desprezada.

Como os autovalores λ_i estão em ordem crescente, só precisaremos dos p primeiros autovetores se considerarmos que $\frac{\lambda}{\lambda_i} \ll 1$ para $i > p$.

Para os problemas usuais, os autovalores λ_i estão suficientemente afastados para que na prática se tenha $p \ll n$.

Na obtenção da resposta não linear \underline{r} , o método utiliza então a expressão

$$\underline{r} = \lambda \underline{r}_L + \sum_{i=1}^p \beta_i \underline{X}_i \quad (\text{III.11})$$

Para se avaliar o grau de não linearidade do problema, devemos comparar os vetores $\underline{\Delta r}$ e $\lambda \underline{r}_L$ através de uma norma conveniente definida no espaço \underline{R}^n .

A norma adotada será a raiz quadrada da energia armazenada na estrutura supondo que os deslocamentos $\underline{\Delta r}$ e $\lambda \underline{r}_L$ são soluções lineares.

Assim teremos

$$||\Delta \underline{r}|| = \left[\frac{1}{2} \Delta \underline{r}^T \underline{K}_e \Delta \underline{r} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad (\text{III.13})$$

$$||\lambda \underline{r}_1|| = \lambda \left[\frac{1}{2} \underline{r}_1^T \underline{K}_e \underline{r}_1 \right]^{1/2} \quad (\text{III.13})$$

Explicitaremos agora os vetores $\Delta \underline{r}$ e $\lambda \underline{r}_1$ em termos de suas coordenadas na base modal.

Designando por \underline{X}_p a submatriz de \underline{X} que considera somente os primeiros p vetores e \underline{X}_{n-p} , a submatriz complementar formada pelos $n-p$ vetores restantes, podemos escrever

$$\underline{r}_1 = \underline{X}_{n-p} \underline{\alpha}_{n-p} \quad \text{e} \quad (\text{III.14})$$

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}_D + \lambda \underline{r}_2 = \underline{X}_p (\underline{\beta}_p + \lambda \underline{\alpha}_p) \quad (\text{III.15})$$

com

$$\underline{\alpha}_p^T = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p] \quad , \quad (\text{III.16})$$

$$\underline{\alpha}_{n-p}^T = [\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_n] \quad \text{e} \quad (\text{III.17})$$

$$\underline{\beta}_p^T = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p] \quad (\text{III.18})$$

Calculando as normas de $\Delta \underline{r}$ e $\lambda \underline{r}_1$, temos então

$$||\Delta \underline{r}|| = \left[\frac{1}{2} (\underline{\beta}_p + \lambda \underline{\alpha}_p)^T \underline{X}_p^T \underline{K}_e \underline{X}_p (\underline{\beta}_p + \lambda \underline{\alpha}_p) \right]^{1/2} = \lambda \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{1-\lambda/\lambda_i} \right)^2 \alpha_i^2 \right]^{1/2} \dots \quad (\text{III.19})$$

$$||\lambda \underline{r}_1|| = \lambda \left[\frac{1}{2} \underline{\alpha}_{n-p}^T \underline{X}_{n-p}^T \underline{K}_e \underline{X}_{n-p} \underline{\alpha}_{n-p} \right]^{1/2} = \lambda \left[\frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^n \alpha_i^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.20})$$

A condição para comportamento pré-crítico fracamente não linear é dada então por

$$\left[\sum_{i=1}^p \left(\frac{1}{1-\lambda/\lambda_i} \right)^2 \alpha_i^2 \right]^{1/2} << \left[\sum_{i=p+1}^n \alpha_i^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.21})$$

NAGY (3) propõe em seu trabalho uma forma simplificada para análise da condição (III.21), verificando a sua validade para $\lambda \rightarrow 0$.

Como estamos interessados em um controle mais rigoroso da solução, utilizaremos diretamente a condição (III.21) e calcularemos a relação $\frac{||\Delta r||}{||\lambda r_1||}$ para λ assumindo os valores $0,1 \lambda_1, 0,2 \lambda_1, \dots, 0,9 \lambda_1$.

O lado esquerda da equação (III.21) pode ser obtido, já que os valores de α_i para $i \leq p$ são calculados por

$$\alpha_i = \tilde{x}_i^T R \quad (\text{III.22})$$

O lado direito de (III.21) corresponde a $\sqrt{2} ||\tilde{r}_1||$ e será obtido pela expressão

$$\sqrt{2} ||\tilde{r}_1|| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{||\tilde{r}_L||^2 - ||\tilde{r}_2||^2} \quad (\text{III.23})$$

com

$$||\tilde{r}_L||^2 = \frac{1}{2} R^T \tilde{r}_L \quad e \quad (\text{III.24})$$

$$||\tilde{r}_2||^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \alpha_i^2 \quad (\text{III.25})$$

Os valores de $\frac{||\Delta r||}{||\lambda r_1||}$ servem para avaliar, dentro do intervalo de validade λ , até onde é possível manter a hipótese de comportamento fracamente não linear.

III.3 - FORMULAÇÃO DA EQUAÇÃO MODAL PARA ANÁLISE DA NÃO LINEARIDADE FÍSICA LOCALIZADA - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Projetaremos agora a equação (II.68) na base modal $\underline{\tilde{X}}$.

Seja então $\underline{\phi}$ o vetor que contém as coordenadas modais de \underline{r}_{D2} .

Substituindo \underline{r}_{D2} em (II.68) e pré-multiplicando toda a equação por $\underline{\tilde{X}}^T$, obtemos

$$\underline{\tilde{I}} \underline{\phi} - \lambda \underline{\tilde{\Lambda}}^{-1} \underline{\phi} = \underline{\tilde{X}}^T \underline{N}(\underline{r}) \quad (\text{III.26})$$

Diferentemente do caso da equação modal para análise não linear geométrica, não podemos agora garantir que apenas os p primeiros modos de flambagem sejam suficientes para uma boa representação de (II.68) na base modal.

É possível que outros modos de flambagem associados a autovalores superiores a λ_p sejam necessários para que a solução obtida com a base truncada seja satisfatória.

A questão da seleção dos modos de flambagem importantes para a solução de (II.68) será discutida no item seguinte.

Vamos considerar, por enquanto, que se tenha selecionado q modos de flambagem, não necessariamente os q primeiros, mas os suficientes para uma boa representação da solução \underline{r}_{D2} .

Agrupando estes vetores na matriz $\underline{\tilde{X}}$ ($n \times q$) e representando a equação (II.68) nesta base, teremos

$$\bar{\phi} - \lambda \bar{\Lambda}^{-1} \bar{\phi} = \bar{\psi}(\underline{r}) \quad (\text{III.27})$$

onde

$$\underline{r}_{D2} = \bar{\underline{X}} \bar{\underline{\phi}} \quad , \quad (\text{III.28})$$

$$\bar{\underline{X}} \underline{K}_q(\sigma_L) \bar{\underline{X}} = -\bar{\underline{\Lambda}}^{-1} \quad \text{e} \quad (\text{III.29})$$

$$\bar{\underline{X}}^T \underline{N}(\underline{r}) = \bar{\underline{\psi}}(\underline{r}) \quad (\text{III.30})$$

A expressão (III.27) representa o conjunto de q equações

$$\left(\frac{\bar{\lambda}_i^{-\lambda}}{\bar{\lambda}_i} \right) \bar{\phi}_i = \bar{\psi}_i(\underline{r}) \quad i=1,q \quad (\text{III.31})$$

A solução dessas equações não lineares será obtida através do método iterativo de Newton-Raphson.

Neste método, a solução é obtida pela determinação do "zero" das funções f_i dadas por

$$f_i = \bar{\psi}_i(\underline{r}) - \left(\frac{\bar{\lambda}_i^{-\lambda}}{\bar{\lambda}_i} \right) \bar{\phi}_i \quad i=1,q \quad (\text{III.32})$$

Expandindo as funções f_i em série de Taylor e re-
tendo apenas os termos da primeira ordem, obtemos

$$f_i(\bar{\underline{\phi}} + \Delta \bar{\underline{\phi}}) = f_i(\bar{\underline{\phi}}) + \frac{\partial f_i(\bar{\underline{\phi}})}{\partial \bar{\phi}_j} \Delta \bar{\phi}_j \quad \begin{matrix} i=1,q \\ j=1,q \end{matrix} \quad (\text{III.33})$$

Supondo que $\bar{\underline{\phi}} + \Delta \bar{\underline{\phi}} = \bar{\underline{\phi}}^*$ e que $\bar{\underline{\phi}}^*$ anula as funções f_i , podemos escrever que

$$f_i(\bar{\underline{\phi}}) = - \frac{\partial f_i(\bar{\underline{\phi}})}{\partial \bar{\phi}_j} \Delta \bar{\phi}_j \quad (\text{III.34})$$

Seja então $\bar{\phi}^0$ uma aproximação inicial para $\bar{\phi}^*$.

Utilizando (III.34) e substituindo $\bar{\phi}$ por $\bar{\phi}^0$, podemos calcular $\Delta\bar{\phi}$ e assim obteremos

$$\bar{\phi}^1 = \bar{\phi}^0 + \Delta\bar{\phi} \quad (\text{III.35})$$

que é uma melhor aproximação para $\bar{\phi}^*$.

O método de Newton-Raphson utilizará então a expressão recursiva

$$-\left. \frac{\partial f_i(\bar{\phi})}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}^{n-1}} \Delta\bar{\phi}_j^n = f_i(\bar{\phi}^{n-1}) \quad \begin{matrix} i=1,q \\ j=1,q \end{matrix} \quad (\text{III.36})$$

com

$$\bar{\phi}^n = \bar{\phi}^{n-1} + \Delta\bar{\phi}^n \quad \text{e} \quad (\text{III.37})$$

$$\bar{\phi}^0 = 0 \quad (\text{III.38})$$

O lado esquerdo de (III.36) é calculado diferenciando a equação (III.32). Temos então que

$$-\left. \frac{\partial f_i(\bar{\phi})}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\bar{\phi}=\bar{\phi}^{n-1}} \Delta\bar{\phi}_j^n = \left(K_{ij} - \left. \frac{\partial \bar{\psi}_i(\underline{r})}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}} \right) \Delta\bar{\phi}_j^n \quad \dots (\text{III.39})$$

onde

$$K_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \frac{\bar{\lambda}_i - \lambda}{\bar{\lambda}_i} & \text{se } i=j \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

O termo $\left. \frac{\partial \bar{\psi}_i(\underline{r})}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}}$ pode ser dado por

$$\left. \frac{\partial \bar{\psi}_i(\underline{r})}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}} = \frac{\partial \bar{\psi}_i(\underline{r})}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial \bar{\phi}_j} \Big|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}} \quad \begin{matrix} i=1,q \\ j=1,q \end{matrix} \quad (\text{III.41})$$

Como

$$r_k = \lambda r_{Lk} + r_{Dlk} + \bar{\phi}_i \bar{x}_{ki} \quad (\text{III.42})$$

temos que

$$\frac{\partial r_k}{\partial \bar{\phi}_j} = \bar{x}_{kj} \quad (\text{III.43})$$

Utilizando (III.30), podemos escrever

$$\left. \frac{\partial \bar{\psi}_i(\underline{r})}{\partial r_k} \right|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}} = \bar{x}_i^T \frac{\partial N(\underline{r})}{\partial r_k} \Big|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}} = \bar{x}_{ki} \bar{K}_k \quad (\text{III.44})$$

onde \bar{K}_k é o valor da tangente à curva $[N(r_k) \cdot r_k]$ no ponto $r_k = r_k^{n-1}$.

É claro que \bar{K}_k só existe para os valores de k correspondentes aos graus de liberdade com molas não lineares.

Substituindo (III.43) e (III.44) em (III.41), obtemos

$$\left. \frac{\partial \bar{\psi}_i(\underline{r})}{\partial \bar{\phi}_j} \right|_{\underline{r}=\underline{r}^{n-1}} = \bar{K}_k \bar{x}_{ki} \bar{x}_{kj} \quad (\text{III.45})$$

Escrevendo a expressão recursiva (III.36) em forma matricial, temos

$$[\underline{K} + \underline{K}^*(\bar{\phi}^{n-1})] \Delta \bar{\phi}^n = \underline{f}(\bar{\phi}^{n-1}) \quad (\text{III.46})$$

onde \underline{K} é uma matriz diagonal (qxq) cujos elementos são dados pela expressão (III.40).

A matriz \underline{K}^* é completa (qxq) e é função do vetor $\bar{\phi}$.

De (III.45) vemos que a matriz \tilde{K}^* corresponde à expressão

$$\tilde{K}^*(\phi) = - \tilde{X}^T \tilde{K} \tilde{X} \quad (\text{III.47})$$

onde \tilde{K} é uma matriz diagonal (nxn) cujos termos dependem de ϕ e correspondem aos valores de \tilde{K}_k definidos anteriormente.

O processo iterativo só será interrompido quando os valores de f_i ($i=1,q$) estiverem suficientemente próximos de zero, ou seja, dentro de uma tolerância pré-estabelecida.

O tipo de convergência do método de Newton-Raphson para o caso da equação (III.46) pode ser visualizado pela análise do problema da mola não linear M do item (II.7).

Tomando como aproximação inicial a resposta linear da mola, teremos então a seguinte representação gráfica para o processo iterativo.

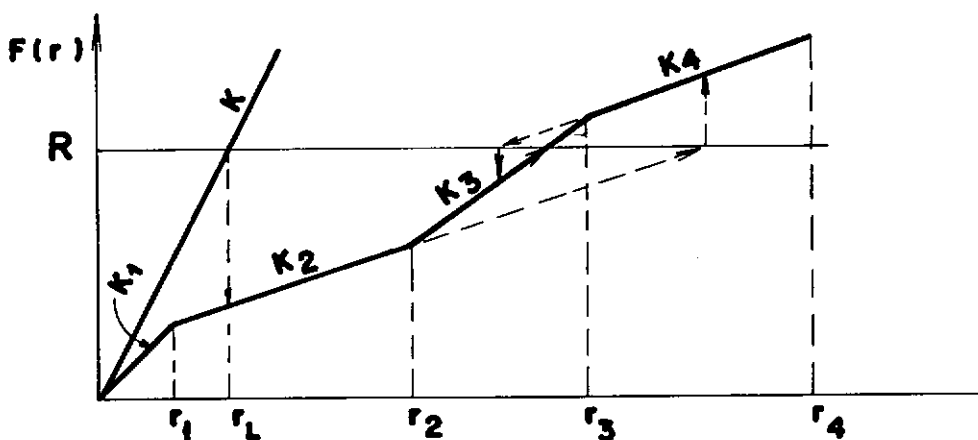


Figura III.1 - Esquema de Iteração do MNR- Sistema com 1 grau de liberdade

III.4 - GERAÇÃO DA BASE PARA TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS - BASE DE LANCZOS-RITZ

A utilização do Método de Superposição Modal nos leva sempre a duas questões fundamentais.

A primeira é a escolha do algoritmo para a geração da base de transformação de coordenadas; e a segunda é a determinação do número de vetores necessários para esta nova base.

Os primeiros trabalhos, que tratavam da análise não linear geométrica pelo MSM, utilizavam uma base formada pelos p primeiros modos de flambagem, calculados de forma exata, através de métodos como o da iteração inversa e o da iteração por subespaço.

Devido ao caráter iterativo destes métodos, a etapa de geração da base modal, ou seja, o cálculo dos modos de flambagem, sempre exigiu um grande esforço computacional, penalizando assim o método modal.

MEDEIROS (5) apresentou em seu trabalho a utilização de uma base alternativa à base modal.

A nova base, denominada de Lanczos-Ritz, é uma aproximação da base modal e é obtida por um processo não iterativo.

Basicamente, o procedimento utiliza a análise de Rayleigh-Ritz com os vetores de Ritz gerados pelo algoritmo de Lanczos.

Seja, por exemplo, a geração de m vetores de Lanczos-Ritz.

Inicialmente, adota-se um vetor \underline{y}_p , que será tomado como vetor de partida para a geração da sequência de Krilov que é dada por

$$[\underline{y}_p, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)) \underline{y}_p, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g(\underline{\sigma}_L))^2 \underline{y}_p, \dots, (\underline{K}_e^{-1} \underline{K}_g(\underline{\sigma}_L))^m \underline{y}_p] \dots \text{ (III.48)}$$

Os vetores são obtidos sequencialmente e são \underline{K}_e - ortogonalizados em relação aos precedentes através da técnica de Gram-Schmidt.

O conjunto de vetores obtidos são chamados de vetores de Lanczos e são armazenados na matriz $\bar{\underline{Y}}$.

Procura-se então, agora, a melhor aproximação possível para os m primeiros modos de flambagem dentro do subespaço gerado pelos vetores de Lanczos.

Este procedimento é uma análise de Rayleigh-Ritz e se inicia pela projeção das matrizes \underline{K}_e e $-\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)$ na base de Lanczos.

$$\bar{\underline{K}}_e = \bar{\underline{Y}}^T \underline{K}_e \bar{\underline{Y}} = \underline{I} \quad \text{ (III.49)}$$

$$\bar{\underline{K}}_g(\underline{\sigma}_L) = \bar{\underline{Y}}^T [-\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)] \bar{\underline{Y}} \quad \text{ (III.50)}$$

Com as novas matrizes de ordem $(p \times p)$, resolve-se o problema de autovalor e autovetor

$$\bar{\underline{K}}_e \underline{Z} = \bar{\underline{K}}_g(\underline{\sigma}_L) \underline{Z} \underline{\Lambda}^* \quad \text{ (III.51)}$$

Os autovalores encontrados são aproximações para os autovalores do problema original, e a base

$$\underline{X}^* = \bar{\underline{Y}} \underline{Z} \quad \text{ (III.52)}$$

conterá aproximações para os m primeiros modos de flambagem.

O aspecto mais importante do método de Lanczos-Ritz é seu caráter seletivo.

Os vetores gerados são aproximações dos modos de flambagem que não são ortogonais a y_p .

Isto significa que se tomarmos r_{D1} como vetor de partida, teremos que o subespaço gerado pela base de Lanczos-Ritz é uma aproximação do subespaço gerado pelo modos de flambagem com maior fator de participação no cálculo da parcela não linear r_{D1} .

Para a solução dos problemas com não linearidade geométrica e com molas não lineares serão geradas duas bases do tipo Lanczos-Ritz.

A base para o cálculo da parcela devido à não linearidade geométrica será gerada tomando como vetor de partida uma aproximação de r_{D1} , que será a solução linear r_L .

É claro que a proximidade de r_{D1} e r_L é com relação às suas direções em R^n e não devido às suas magnitudes.

Para esta base, serão calculados p vetores, conforme já vimos no item (III.2).

Para o cálculo da parcela r_{D2} devido à não linearidade de física, será gerada uma base de Lanczos-Ritz com um vetor de partida que corresponde à solução linear da estrutura para um carregamento constituído por cargas unitárias nos graus de liberdade onde existem molas não lineares.

Designando por \underline{f} o vetor de carga definido acima e por \underline{v}_p o vetor de partida, temos então que

$$\underline{K}_e \underline{v}_p = \underline{f} \quad (\text{III.53})$$

A avaliação da qualidade desta base pode ser feita pelo cálculo dos fatores de participação de cada vetor na representação de \underline{f} .

Os fatores de participação são obtidos pela expressão

$$h_i = \frac{\underline{f}^T \underline{\bar{X}}_i^{*T} \underline{f} \underline{K}_e \underline{\bar{X}}_i^*}{\underline{f}^T \underline{f}} \quad (\text{III.54})$$

A soma destes fatores deve garantir que pelo menos 90% de \underline{f} possa ser representado pela base.

Para implementação da geração da base de Lanczos-Ritz podemos empregar o seguinte esquema:

1. Para obtenção do primeiro vetor $\underline{\bar{y}}_1$, temos

\underline{y}_p - Vetor de Partida

$\underline{\bar{y}}_1 = \frac{1}{\beta_1} \underline{y}_p$ - Normalização

$$\beta_1 = (\underline{y}_p^T \underline{K}_e \underline{y}_p)^{1/2}$$

2. Para obtenção dos demais vetores de Lanczos.

$i=2, \dots, m$

$\underline{K}_e \underline{y}_i^* = -\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) \underline{\bar{y}}_{i-1}$ - Calcula-se \underline{y}_i^* .

$\underline{c}_j = \underline{\bar{y}}_j^T \underline{K}_e \underline{y}_i^*$ - Calcula-se para $j=1, \dots, i-1$

$$\underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L)_{j(i-1)} = c_j$$

- Montagem de $\underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L)$.

$$y_i^{**} = y_i^* - \sum c_j \bar{y}_j$$

- Ortogonalização

$$\bar{y}_i = \frac{1}{\beta_i} y_i^{**}$$

- Normalização

$$\beta_i = (y_i^{**} \underline{\underline{K}}_e y_i^{**})^{1/2}$$

3. Análise de Rayleigh-Ritz ou $\underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L)$ - Ortogonalização
 $j=1, \dots, m$

$$\underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L)_{jm} = \bar{y}_j [-\underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L)] \bar{y}_m$$

- Montagem da última coluna de $\underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L)$

$$\underline{\underline{K}}_{e\sim} \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{K}}_g(\underline{\underline{\sigma}}_L) \underline{\underline{Z}} \Lambda^*$$

- Problema de autovalor e autovetor de ordem (mxm). Solução pelo método de Jacobi.

$$\underline{\underline{X}}^* = \underline{\underline{Y}} \underline{\underline{Z}}$$

- Cálculo final dos vetores de Lanczos-Ritz

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos inicialmente os passos gerais para uma implementação computacional da análise não linear pelo método modal.

Será feito, em seguida, o desenvolvimento das matrizes de rigidez secante e tangente para os elementos de estruturas reticuladas.

IV.2 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO MÉTODO MODAL

As principais etapas a serem programadas para uma implementação computacional do método modal correspondem a:

- (1) Montagem da matriz de rigidez elástica linear \underline{K}_e e do vetor de carga \underline{R} .
- (2) Introdução dos dados relativos às molas não lineares e ajuste na matriz \underline{K}_e para utilização da técnica das pseudo-forças.
- (3) Fatoração da matriz \underline{K}_e e cálculo da resposta linear \underline{r}_L .
- (4) Montagem da matriz de rigidez geométrica $\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)$.
- (5) Geração da base de Lanczos-Ritz (\underline{X}^*), para análise não linear geométrica.

- (6) Verificação do grau de não linearidade geométrica através do cálculo das normas $||\lambda \underline{r}_1||$ e $||\Delta \underline{r}||$, conforme o item (III.2).
- (7) Geração da base de Lanczos-Ritz ($\bar{\underline{X}}^*$), para análise não linear física, de acordo com o item (III.4).
- (8) Cálculo dos fatores de participação de ($\bar{\underline{X}}^*$) na representação do vetor de carga \underline{f} .
- (9) Cálculo da parcela \underline{r}_{D1} , conforme a equação (III.11).
- (10) Cálculo da parcela \underline{r}_{D2} utilizando o método de Newton-Raphson, segundo o desenvolvimento feito no item (III.3).
- (11) Cálculo de Esforços e Impressão de Resultados.
- (12) Atualização de Referencial
 - . Cálculo da matriz de rigidez tangente
 - . Atualização de Coordenadas Nodais

Uma vez desenvolvidas, as etapas acima permitem que se efetue as seguintes análises:

- ANÁLISE ESTÁTICA LINEAR

Etapas (1), (3), (11).

- FLAMBAGEM LINEAR

Etapas: (1), (3), (4), (5).

- ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Etapas: (1), (3), (4), (5), (6), (9), (11), (12).

- ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR FÍSICA E GEOMÉTRICA

Etapas: (1), ..., (12).

A etapa (12), Atualização de Referencial, como já foi dito no item (II.7), constitui uma opção para os casos em que se deseja uma correção para a solução não linear fornecida pela equação simplificada (II.45), desenvolvida em relação à configuração inicial.

O ponto principal do esquema de atualização é o cálculo da matriz de rigidez inicial \underline{K}_t para a nova configuração.

Em nossa implementação foram utilizadas duas formulações.

Em uma primeira formulação, que chamamos do tipo A, a matriz \underline{K}_t é calculada pela expressão (II.26).

Como será visto no item seguinte, adotaremos a hipótese de pequenas rotações (teoria simplificada de 2ª ordem) para o desenvolvimento das parcelas da matriz de rigidez tangente. Como consequência, será feita uma atualização de coordenadas nodais de forma que entre duas atualizações consecutivas de referencial, possa ser considerada válida a hipótese de pequenas rotações.

Seja então a atualização de referencial para uma estrutura na configuração deformada i .

1. Recupera-se a matriz de rigidez tangente tomada na última atualização \underline{K}_t^{i-1} . As coordenadas nodais são ainda as da configuração $i-1$.

Caso seja a primeira atualização ($i=1$), teremos:

$$\underline{K}_t^{i-1} = \underline{K}_t^0 = \underline{K}_e \quad (\text{IV.1})$$

e as coordenadas nodais são as fornecidas inicialmente.

2. Com os deslocamentos entre a configuração i e a $i-1$, ou seja, Δu_i , calculam-se as outras duas parcelas da matriz de rigidez tangente:

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma})^i \quad \text{e} \quad \Delta \underline{K}_e^i \quad (\text{IV.2})$$

Temos então que para a configuração i , a matriz de rigidez inicial será dada por:

$$\underline{K}_t^i = \underline{K}_t^{i-1} + \underline{K}_g(\underline{\sigma})^i + \Delta \underline{K}_e^i \quad (\text{IV.3})$$

3. Resolve-se então o problema linear

$$\underline{K}_t^i \underline{r}_L^i = \underline{R} \quad (\text{IV.4})$$

4. Atualizam-se as coordenadas nodais para a configuração i .
5. Com as novas coordenadas e com a solução linear, calcula-se a matriz de rigidez geométrica $\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)^i$ que será utilizada para a solução do novo problema de autovalor que fornecerá as cargas críticas e os modos de flambagem para a estrutura deformada.

$$\underline{K}_t^i \underline{X} = -\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)^i \underline{X} \quad \underline{\Lambda} \quad (\text{IV.5})$$

Será então gerada uma nova base de Lanczos-Ritz com a aproximações dos modos de flambagem do problema (IV.5) que será utilizada para o desacoplamento da equação (II.57).

A segunda formulação, do tipo B, difere da primeira no cálculo da matriz de rigidez tangente, e segue o seguinte esquema:

1. Com as coordenadas nodais ainda na configuração $i-1$, e com os deslocamentos incrementais Δu^i , calcula-se a matriz $K_g(\sigma_L)^i$, com $\sigma_L = E B_O \Delta u^i$. Esta matriz é adicionada à soma acumulada

$$\underline{S} = \sum_{j=1}^{i-1} K_g(\sigma_L)^j \quad (IV.6)$$

obtendo-se, portanto:

$$\underline{K}_g^i = K_g(\sigma_L)^i + \underline{S} \quad (IV.7)$$

2. Atualizam-se as coordenadas nodais para a configuração i . Com as novas coordenadas, calcula-se a matriz de rigidez elástica linear K_e^i . A matriz de rigidez inicial para a atualização i será dada pela soma

$$\underline{K}_t^i = \underline{K}_e^i + \underline{K}_g^i \quad (IV.8)$$

Os demais itens são idênticos aos apresentados para a formulação tipo A.

Em nossa implementação, os esforços nos elementos são obtidos através da equação (II.25). Utilizam-se, portanto, os deslocamentos totais com as matrizes calculadas em relação ao referencial inicial.

IV.3 - MATRIZES DE RIGIDEZ SECANTE E TANGENTE PARA ELEMENTOS DE ESTRUTURAS RETICULADAS

IV.3.1 - Introdução

Utilizando as hipóteses da teoria simplificada de 2ª ordem, serão explicitadas, neste item, as matrizes de rigidez secante e tangente para elementos de estruturas reticuladas.

Examinam-se, em primeiro lugar, os elementos de treliça e de pórtico definidos no plano. Em seguida, os resultados são estendidos para o caso tridimensional.

IV.3.2 - Elementos Reticulados

Os elementos reticulados são utilizados na discretização de estruturas constituídas de barras. Na figura IV.1 vemos um elemento reticulado genérico, determinado pelos pontos nodais A e B, e os sistemas de referência (X,Y,Z) da estrutura e (x,y,z) do elemento.

As barras representadas por estes elementos são de eixo reto na direção x e seção transversal constante de área A. Os eixos y e z são os eixos principais de inércia, sendo I_y e I_z os momentos de inércia a eles referidos.

A única componente de deformação que será considerada nestes elementos é a na direção x, ou seja, ϵ_{xx} . Como consequência, a matriz elástica \underline{E} reduz-se ao módulo de elasticidade E do material.

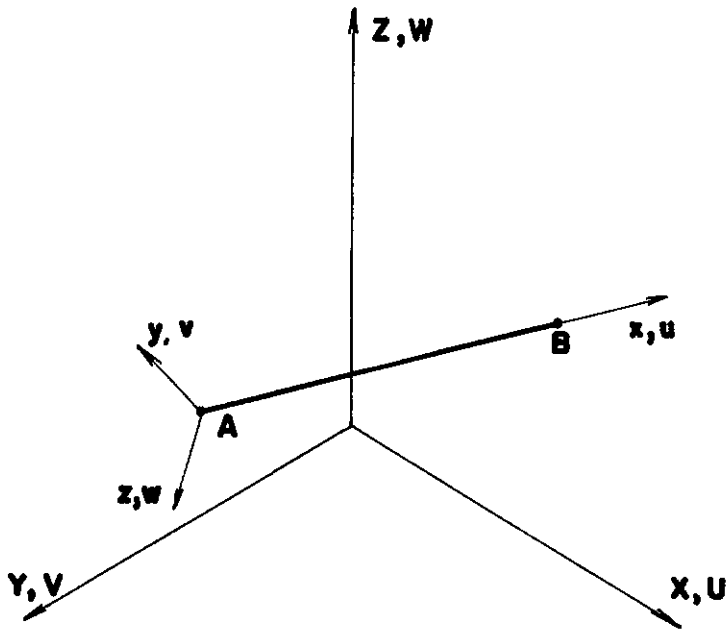


Figura IV.1 - Elemento Reticulado Genérico

Para cada elemento seguiremos o seguinte procedimento:

- define-se o campo de deslocamento
- estabelece-se a relação campo de deslocamento - deslocamentos nodais através da matriz de interpolação
- obtêm-se as matrizes \underline{B}_0 e \underline{B}_1 que fornecem a relação deformação - deslocamentos
- calculam-se as parcelas da matriz de rigidez secante utilizando as expressões da formulação Lagrangeana e escreve-se a relação não linear forças nodais - deslocamentos nodais
- deriva-se a relação forças nodais - deslocamentos nodais obtendo-se as parcelas da matriz de rigidez tangente.

Todas as matrizes e operações serão referidas ao sistema local (x, y, z) .

IV.3.3 - Elemento de Treliça Plana

Este elemento se desloca no plano xy sem sofrer flexão, como é apresentado na figura IV.2.

As funções de interpolação são lineares e a relação campo de deslocamento - deslocamentos nodais é dada por

$$\underline{\tilde{u}} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \underline{\phi} \underline{\tilde{r}} = \begin{bmatrix} \frac{l-x}{l} & 0 & \frac{x}{l} & 0 \\ 0 & \frac{l-x}{l} & 0 & \frac{x}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

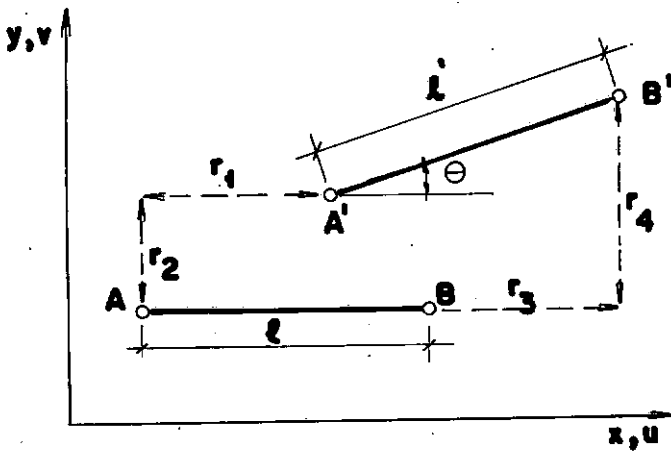


Figura IV.2 - Elemento de Treliça Plana

Pela teoria não linear completa, a componente ϵ_{xx} da deformação seria

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.10})$$

Considerando a hipótese de pequenas deformações, o termo $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ pode ser desprezado na presença de $\frac{\partial u}{\partial x}$.

As parcelas linear e não linear da deformação correspondem então a ϵ_0 e ϵ_1 com

$$\epsilon_0 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e \quad (IV.11)$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (IV.12)$$

As matrizes B_0 e B_1 são obtidas de forma a satisfazerem as relações

$$\epsilon_0 = B_0 r \quad e \quad (IV.13)$$

$$\epsilon_1 = B_1 r \quad (IV.14)$$

Usando (IV.9), (IV.11) e (IV.12), obtemos

$$B_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad (IV.15)$$

$$B_1 = \frac{1}{2\ell^2} \begin{bmatrix} 0 & (r_2 - r_4) & 0 & (r_4 - r_2) \end{bmatrix} \quad (IV.16)$$

Devido à pequena rotação, temos que

$$\theta \approx \tan \theta \approx \frac{r_4 - r_2}{\ell} \quad (IV.17)$$

e a matriz B_1 pode ser reescrita como

$$B_1 = \frac{1}{2\ell} \begin{bmatrix} 0 & -\theta & 0 & \theta \end{bmatrix} \quad (IV.18)$$

Substituindo (IV.15) em (IV.13) e (IV.18) em (IV.14), obtemos

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\ell} (r_3 - r_1) \quad e \quad (IV.19)$$

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \theta^2 \quad (\text{IV.20})$$

A matriz de rigidez elástica é obtida pela solução de

$$\underline{K}_e = EA \int_0^\ell \underline{B}_0^T \underline{B}_0 dx \quad (\text{IV.21})$$

cujo resultado nos fornece

$$\underline{K}_e = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [-1 \ 0 \ 1 \ 0] = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

As parcelas $\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)$ e $\underline{K}_g(\Delta\sigma)$ da matriz de rigidez geométrica são dadas por

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) = 2EA \int_0^\ell \underline{B}_1^T \underline{B}_0 dx \quad e \quad (\text{IV.23})$$

$$\underline{K}_g(\Delta\sigma) = 2EA \int_0^\ell \underline{B}_1^T \underline{B}_1 dx \quad (\text{IV.24})$$

Efetuada as integrações e os produtos matriciais, temos

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & \theta & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad (\text{IV.25})$$

$$\underline{K}_g(\Delta\sigma) = \frac{EA}{2\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \theta^2 & 0 & -\theta^2 \\ \text{simétrica} & & 0 & 0 \\ & & & \theta^2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

Observando que

$$\frac{\theta r_1}{\ell} - \frac{\theta r_3}{\ell} = -\theta \epsilon_0 = \frac{\epsilon_0}{\ell} (r_2 - r_4) \quad (\text{IV.27})$$

a parcela linear $\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L)$ pode ser substituída por

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \varepsilon_0 & 0 & -\varepsilon_0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{simétrico} & & & \varepsilon_0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

Somando (IV.26) e (IV.28), obtemos a matriz de rigidez geométrica

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}) = \frac{EA(\varepsilon_0 + \frac{\theta^2}{2})}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ \text{simétrico} & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

De (IV.19) e (IV.20) temos que a força normal N que atua na barra é

$$N = EA(\varepsilon_0 + \varepsilon_1) = EA(\varepsilon_0 + \frac{\theta^2}{2}) \quad (\text{IV.30})$$

Substituindo (IV.30) em (IV.29), obtemos

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}) = \frac{N}{\ell} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ \text{simétrico} & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} = N \bar{K}_g \quad (\text{IV.31})$$

onde \bar{K}_g é denominada a parte intrínseca da matriz de rigidez geométrica, igualando-se a esta quando $N=1$.

A última parcela da matriz de rigidez secante corresponde a

$$\underline{K}_\ell = EA \int_0^\ell \underline{B}_0^T \underline{B}_1 \, dx \quad (\text{IV.32})$$

cujo resultado nos leva a

$$\underline{\underline{K}}_{\ell} = \frac{EA\theta}{2\ell} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.33})$$

Alternativamente o termo $\underline{\underline{K}}_{\ell} \underline{\underline{r}}$ na relação forças nodais - deslocamentos nodais pode ser substituído por

$$\underline{\underline{K}}_{\ell} \underline{\underline{r}} = \frac{EA\theta^2}{2} \underline{\underline{m}} \quad (\text{IV.34})$$

onde

$$\underline{\underline{m}} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.35})$$

A relação força-deslocamento, para o elemento de treliça plana é dada por

$$\underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{e}}} \underline{\underline{r}} + N \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{r}} + \frac{EA\theta^2}{2} \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{R}} \quad (\text{IV.36})$$

Derivando (IV.36), obtemos

$$d\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{t}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{r}}) d\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{e}}} d\underline{\underline{r}} + N \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{g}}} d\underline{\underline{r}} + \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{r}} dN + EA \underline{\underline{m}} \theta d\theta \quad (\text{IV.37})$$

A parcela $\Delta \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{e}}}$ da matriz de rigidez tangente, neste caso, pode ser obtida da expressão

$$\Delta \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{e}}} d\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{g}}} \underline{\underline{r}} dN + EA \underline{\underline{m}} \theta d\theta \quad (\text{IV.38})$$

Fazendo

$$\underline{\underline{n}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

podemos construir as seguintes relações

$$\frac{1}{\ell} \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}^T = \underline{\underline{K}}_g \quad (\text{IV.40})$$

$$\theta = \frac{1}{\ell} \underline{\underline{n}}^T \underline{\underline{r}} \quad (\text{IV.41})$$

$$d\theta = \frac{1}{\ell} \underline{\underline{n}}^T d\underline{\underline{r}} \quad (\text{IV.42})$$

$$\varepsilon_o = \frac{1}{\ell} \underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{r}} \quad (\text{IV.43})$$

$$d\varepsilon_o = \frac{1}{\ell} \underline{\underline{m}}^T d\underline{\underline{r}} \quad (\text{IV.44})$$

$$d\varepsilon_1 = \theta d\theta = \frac{1}{\ell^2} \underline{\underline{n}}^T \underline{\underline{r}} \underline{\underline{n}}^T d\underline{\underline{r}} \quad (\text{IV.45})$$

O termo dN , levando em conta (IV.40)-(IV.45), será

$$dN = \frac{EA}{\ell} \underline{\underline{m}}^T d\underline{\underline{r}} + \frac{EA}{\ell^2} \underline{\underline{n}}^T \underline{\underline{r}} \underline{\underline{n}}^T d\underline{\underline{r}} \quad (\text{IV.46})$$

Substituindo (IV.41) e (IV.46) em (IV.38), obtemos

$$\underline{\underline{\Delta K}}_e = \frac{EA}{\ell} [\underline{\underline{K}}_g \underline{\underline{r}} (\underline{\underline{m}}^T + \underline{\underline{r}}^T \frac{1}{\ell} \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}^T) + \underline{\underline{m}} \underline{\underline{r}}^T \frac{1}{\ell} \underline{\underline{n}} \underline{\underline{n}}^T] \quad (\text{IV.47})$$

ou devido a (IV.40)

$$\underline{\underline{\Delta K}}_e = \frac{EA}{\ell} [\underline{\underline{K}}_g \underline{\underline{r}} \underline{\underline{m}}^T + \underline{\underline{m}} \underline{\underline{r}}^T \underline{\underline{K}}_g + \underline{\underline{K}}_g \underline{\underline{r}} \underline{\underline{r}}^T \underline{\underline{K}}_g] \quad (\text{IV.48})$$

que é uma expressão para $\underline{\underline{\Delta K}}_e$ somente em função de $\underline{\underline{K}}_g$, $\underline{\underline{m}}$ e $\underline{\underline{r}}$.

As duas primeiras matrizes em (IV.48) são a transposta uma da outra e ao se somarem conservam a simetria do conjunto.

A característica mais importante de (IV.48) é a sua generalidade para elementos reticulados como mostra VENÂNCIO (8).

Este fato será observado a seguir quando discutiremos o elemento pórtico plano.

IV.3.4 - Elemento de Pórtico Plano

O elemento de pórtico plano representa uma barra submetida à flexão no plano xy . As funções de interpolação são obtidas através da equação diferencial da teoria de vigas onde as condições de contorno são os deslocamentos nodais.

Na figura IV.3 temos a representação dos deslocamentos nodais considerados.

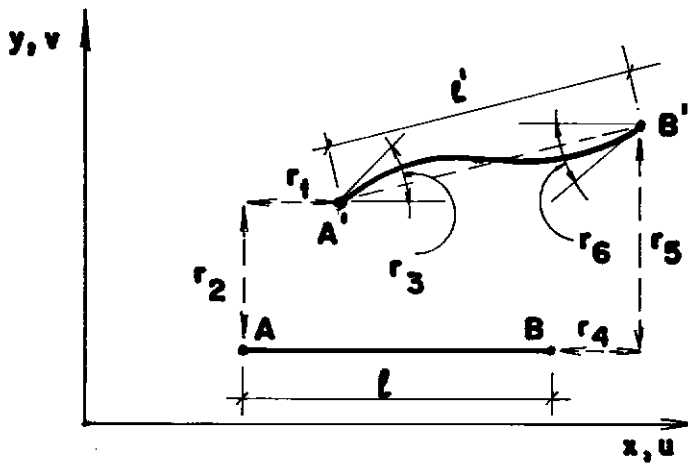


Figura IV.3 - Elemento de Pórtico Plano

O campo de deslocamento é estabelecido pela relação

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \tilde{\phi} \tilde{r} \quad (\text{IV.49})$$

com

$$\phi = \begin{bmatrix} 1-h_1 & -yh_{2,x} & -yh_{3,x} & h_1 & -yh_{4,x} & -yh_{5,x} \\ 0 & h_2 & h_3 & 0 & h_4 & h_5 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.50})$$

e

$$h_1 = \frac{x}{\ell} ; \quad h_2 = 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3} ; \quad h_3 = x - \frac{2x^2}{\ell} + \frac{x^3}{\ell^2}$$

$$h_4 = \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3} ; \quad h_5 = \frac{x^3}{\ell^2} - \frac{x^2}{\ell} ; \quad h_{i,x} = \frac{dh_i}{dx}$$

Devido à flexão, o deslocamento u não é mais constante para uma seção transversal, como se observa na 1ª linha da matriz de interpolação. Adota-se uma variação linear em y , com consequência da hipótese de seção plana da teoria de vigas.

Definindo u_0 como o valor de u para $y=0$, temos que

$$u = u_0 - y \frac{dv}{dx} \quad (\text{IV.52})$$

e a deformação ε será dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{IV.53})$$

WEN (9) observa que o desenvolvimento deste elemento utilizando (IV.53) nos leva a valores excessivamente altos para rigidez não linear. Este fato o motivou a formular a hipótese de que a parcela $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2$ deveria ser substituída pela sua média dada por $\frac{1}{2\ell} \int_0^\ell \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx$.

Sobre esta questão, VENÂNCIO (8) considera não haver hipótese adicional nenhuma ao se tomar o valor médio. A substituição

tuição decorre de um ajuste em (IV.53) para satisfazer a condição prioritária de equilíbrio da barra. De fato, a força normal N sendo constante em toda a barra obriga que a deformação causada por esta também seja constante.

Temos então

$$\varepsilon = \frac{\partial u_O}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{IV.54})$$

A parcela linear ε_O será dividida em duas partes, uma devido à flexão ε_{OF} e outra ε_{ON} causada pela força normal.

$$\varepsilon_{ON} = \frac{\partial u_O}{\partial x} \quad (\text{IV.55})$$

$$\varepsilon_{OF} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{IV.56})$$

Substituindo o campo de deslocamento em (IV.54), podemos escrever

$$\varepsilon_{ON} = \underline{B}_{ON} \underline{r} = \frac{1}{\ell} \underline{m}^T \underline{r} \quad ; \quad (\text{IV.57})$$

$$\varepsilon_{OF} = \underline{B}_{OF} \underline{r} \quad \text{e} \quad (\text{IV.58})$$

$$\underline{\varepsilon}_1 = \underline{B}_1 \underline{r} = \frac{1}{2\ell} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g \underline{r} \quad (\text{IV.59})$$

onde

$$\underline{m} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad (\text{IV.60})$$

$$\underline{B}_{ON} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\ell} & 0 & 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

$$\underline{B}_{OF} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 & g_2 & 0 & -g_1 & g_3 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.62})$$

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{6y}{\ell^2} (1-2h_1) \\ g_2 &= \frac{2y}{\ell} (2-3h_1) \\ g_3 &= \frac{2y}{\ell} (1-3h_1) \end{aligned} \quad (\text{IV.63})$$

$$\underline{B}_1 = \frac{1}{2\ell} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g \quad (\text{IV.64})$$

$$\underline{\bar{K}}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ & & \frac{2\ell}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{\ell}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & & \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ & & & & & \frac{2\ell}{15} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.65})$$

A matriz de rigidez elástica corresponde ao cálculo de

$$\underline{K}_e = \int_V \underline{B}_O^T \underline{E} \underline{B}_O \, dV \quad (\text{IV.66})$$

com

$$\underline{B}_O = \underline{B}_{ON} + \underline{B}_{OF} \quad (\text{IV.67})$$

A solução de (IV.68) nos leva a

$$\underline{K}_e = \underline{K}_{eN} + \underline{K}_{eF} \quad (\text{IV.68})$$

com

$$\underline{K}_{eN} = \int_V \underline{B}_{ON}^T E \underline{B}_{ON} dV \quad e \quad (IV.69)$$

$$\underline{K}_{eF} = \int_V \underline{B}_{OF}^T E \underline{B}_{OF} dV \quad (IV.70)$$

$$\underline{K}_{eF} = EI_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & 0 & -\frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ & & \frac{4}{\ell} & 0 & -\frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ & & & & & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \quad (IV.71)$$

$$\underline{K}_{eN} = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{simétrica} & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (IV.72)$$

O eixo z sendo baricêntrico, acarreta o anulamento das outras parcelas de (IV.68), já que neste caso temos

$$\int_A y dA = 0 \quad (IV.73)$$

Obteremos agora a matriz de rigidez geométrica substituindo as matrizes \underline{B}_0 e \underline{B}_1 em (II.23).

Calculando o termo $\underline{K}_g(\sigma_L)\underline{r}$, temos

$$\underline{K}_g(\sigma_L)\underline{r} = \int_V \frac{1}{\ell} \bar{\underline{K}}_g \underline{r} E \underline{B}_{ON} \underline{r} dV = EA \epsilon_{ON} \bar{\underline{K}}_g \underline{r} \quad (IV.74)$$

que nos leva a

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) = EA\epsilon_{ON}\underline{K}_g \quad (\text{IV.75})$$

ou

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}_L) = N_O \bar{\underline{K}}_g \quad (\text{IV.76})$$

fazendo

$$N_O = EA\epsilon_{ON} \quad (\text{IV.77})$$

O termo não linear $\underline{K}_g(\Delta\sigma)\underline{r}$ é dado por

$$\underline{K}_g(\Delta\sigma)\underline{r} = \int_V \frac{1}{\ell} \bar{\underline{K}}_g \underline{r} E \frac{1}{2\ell} \underline{r}^T \bar{\underline{K}}_g \underline{r} dV = EA\epsilon_1 \bar{\underline{K}}_g \underline{r} \quad (\text{IV.78})$$

e portanto

$$\underline{K}_g(\Delta\sigma) = EA\epsilon_1 \bar{\underline{K}}_g \quad (\text{IV.79})$$

ou

$$\underline{K}_g(\Delta\sigma) = N_1 \bar{\underline{K}}_g \quad (\text{IV.80})$$

fazendo

$$N_1 = EA\epsilon_1 \quad (\text{IV.81})$$

Somando (IV.78) e (IV.80), temos que

$$\underline{K}_g(\underline{\sigma}) = N \bar{\underline{K}}_g \quad (\text{IV.82})$$

com

$$N = N_O + N_1 \quad (\text{IV.83})$$

Finalmente, o termo $\underline{K}_\ell \underline{r}$ corresponde a

$$\underline{K}_\ell \underline{r} = \int_V \underline{B}_{ON}^T E \underline{B}_1 \underline{r} dV = \int_V \underline{B}_{ON}^T E \frac{1}{2\ell} \underline{r}^T \bar{\underline{K}}_g \underline{r} dV = EA\epsilon_1 = N_1 \quad \dots (\text{IV.84})$$

Observando que o termo $K_{eN} \underline{r}$ pode ser feito igual a N_{Om} , temos que a relação força-deslocamento para o elemento de pórtico é dada por

$$\underline{K}_{eF} \underline{r} + N \underline{\bar{K}}_g \underline{r} + N \underline{m} = \underline{R} \quad (\text{IV.85})$$

Derivando (IV.85), temos

$$d\underline{R} = \underline{K}_t d\underline{r} = \underline{K}_{eF} d\underline{r} + N \underline{\bar{K}}_g d\underline{r} + \underline{m} dN + \underline{\bar{K}}_g \underline{r} dN \quad (\text{IV.86})$$

Usando (IV.57), (IV.59), (IV.74), (IV.81) e (IV.83), temos

$$dN = \frac{EA}{\ell} [\underline{m}^T d\underline{r} + \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g d\underline{r}] \quad (\text{IV.87})$$

Substituindo (IV.87) em (IV.86), obtemos

$$\underline{K}_t = \underline{K}_{eF} + N \underline{\bar{K}}_g + \frac{EA}{\ell} [\underline{m} \underline{m}^T + \underline{m} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g + \underline{\bar{K}}_g \underline{r} \underline{m}^T + \underline{\bar{K}}_g \underline{r} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g] \quad (\text{IV.88})$$

Observando que

$$\frac{EA}{\ell} \underline{m} \underline{m}^T = K_{eN} \quad (\text{IV.89})$$

temos que a matriz de rigidez tangente é dada por

$$\underline{K}_t = K_{eF} + K_{eN} + N \underline{\bar{K}}_g + \frac{EA}{\ell} [\underline{\bar{K}}_g \underline{r} \underline{m}^T + \underline{m} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g + \underline{\bar{K}}_g \underline{r} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g] \quad (\text{IV.90})$$

A parcela ΔK_e corresponde, neste caso a

$$\Delta K_e = \frac{EA}{\ell} [\underline{\bar{K}}_g \underline{r} \underline{m}^T + \underline{m} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g + \underline{\bar{K}}_g \underline{r} \underline{r}^T \underline{\bar{K}}_g] \quad (\text{IV.91})$$

que é idêntica à expressão obtida em (IV.48), comprovando a sua generalidade para elementos reticulados tratados pela teoria sim

plificada de 2ª ordem.

IV.3.5 - Elemento de Treliça Espacial

Este elemento constitui uma extensão do elemento de treliça plana. Acrescenta-se um deslocamento transversal na direção do eixo z em cada um dos nós.

Dois ângulos θ_1 e θ_2 são então definidos como

$$\theta_1 = \frac{r_5 - r_2}{\ell} \quad \text{e} \quad \theta_2 = \frac{r_6 - r_3}{\ell} \quad (\text{IV.92})$$

Teremos agora as deformações dadas por

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\ell}(r_4 - r_1) \quad \text{e} \quad \epsilon_1 = \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_2^2) \quad (\text{IV.93})$$

Isto nos leva, através de um desenvolvimento análogo ao feito no item (IV.3.3), às seguintes matrizes

$$\bar{K}_e = \frac{EA}{\ell} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.94})$$

$$\bar{K}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell & 0 \\ & & 1/\ell & 0 & 0 & -1/\ell \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{simétrica} & & & & 1/\ell & 0 \\ & & & & & 1/\ell \end{bmatrix} \quad (\text{IV.95})$$

As expressões (IV.30) e (IV.48) são idênticas, se considerarmos :

$$\theta^2 = \theta_1^2 + \theta_2^2 \quad (\text{IV.98})$$

$$\underline{m}^T = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \quad (\text{IV.99})$$

IV.3.6 - Elemento de Pórtico Espacial

Considerando o elemento de pórtico espacial como uma extensão do elemento de pórtico plano, teremos então que a deformação será dada por

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (\text{IV.98})$$

Levando em conta a torção, as matrizes para o elemento de pórtico espacial serão

$$K_e = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & b & 0 & 0 & 0 & g & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & g \\ & & c & 0 & -h & 0 & 0 & 0 & -c & 0 & -h & 0 \\ & & & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 \\ & & & & e & 0 & 0 & 0 & h & 0 & i & 0 \\ & & & & & f & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & j \\ & & & & & & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & b & 0 & 0 & 0 & -g \\ & & & & & & & & c & 0 & h & 0 \\ & & & & & & & & & d & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & e & 0 \\ & & & & & & & & & & & f \end{bmatrix} \quad (\text{IV.99})$$

simétrica

com

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{EA}{\ell} & f &= \frac{4EI_z}{\ell} \\
 b &= \frac{12EI_z}{\ell^3} & g &= \frac{6EI_z}{\ell^2} \\
 c &= \frac{12EI_y}{\ell^3} & h &= \frac{6EI_y}{\ell^2} \\
 d &= \frac{GI_x}{\ell} & i &= \frac{2EI_y}{\ell} \\
 e &= \frac{4EI_y}{\ell} & j &= \frac{2EI_z}{\ell}
 \end{aligned} \tag{IV.100}$$

$$\bar{K}_g = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & a & 0 & 0 & 0 & d & 0 & -a & 0 & 0 & 0 & d \\
 & & a & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & -d & 0 \\
 & & & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & c & 0 & 0 & 0 & d & 0 & e & 0 \\
 & & & & & c & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & e \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & a & 0 & 0 & 0 & -d \\
 & & & & & & & & a & 0 & d & 0 \\
 & & & & & & & & & -b & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & c & 0 \\
 & & & & & & & & & & & c
 \end{bmatrix} \tag{IV.101}$$

simétrica

com

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{6}{5\ell} & d &= \frac{1}{10} \\
 b &= \frac{I_x}{\ell A} & e &= -\frac{\ell}{30} \\
 c &= \frac{2\ell}{15}
 \end{aligned} \tag{IV.102}$$

A matriz $\Delta \bar{K}_e$ pode ser obtida substituindo (IV.101) em (IV.91), fazendo

$$\underline{m}^T = [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{IV.103}$$

CAPÍTULO V

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de problemas não lineares onde o método modal foi utilizado. Os resultados são comparados com os obtidos por outros métodos de análise não linear, principalmente com método iterativo de Newton-Raphson (M.N.R.).

Procura-se também interpretar os parâmetros de controle do método modal, e utilizá-los para a definição de uma estratégia a ser seguida na solução de cada problema.

V.2 - ANÁLISE DOS PARÂMETROS DE CONTROLE

Diante de um problema a ser resolvido pelo método modal, recomenda-se que seja feita, inicialmente, uma análise com pelo menos quatro vetores de Lanczos-Ritz. Isto significa tomar para uma primeira análise $p \geq 4$.

Deve-se observar o afastamento entre as cargas críticas e os valores de α para cada vetor.

Admitindo-se que se deseje efetuar uma análise até o nível $\lambda = \lambda^*$, a condição para que o número de vetores da base seja satisfatório é dada, de acordo com o item III.2, pela condição:

$$\left| \frac{\lambda^*}{\lambda_{p+1}} \right| \ll 1 \quad (V.2.1)$$

Pode-se adotar, por exemplo

$$\left| \frac{\lambda^*}{\lambda_p} \right| < 0,01 . \quad (V.2.2)$$

Mesmo nos casos onde a condição (V.2.2) seja satisfeita, deve-se examinar também os valores de α .

Quando os α_i , $i=1,p$, tiverem valores em módulo não muito afastados, temos uma situação onde todos os vetores têm uma boa participação na resposta. Neste caso, por segurança, pode-se aumentar o número de vetores para verificar se existem ainda outros modos com boa participação que não foram incluídos na primeira análise.

No caso de alguns vetores possuírem α com valores muito inferiores aos demais, significa que estes vetores, embora satisfazendo a condição (V.2.2), têm baixa participação na res-posta. Pode-se então, nesta situação, reduzir o número de vetores.

A análise da qualidade da solução e do comportamento da estrutura é feita através da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$. A prática tem demonstrado que os valores obtidos são em muitos casos bastante conservadores. Considera-se que um valor até 1,0 representa uma situação onde a solução modal é satisfatória. A partir deste valor deve-se corrigir a solução modal e a atualização de referencial é indicada. Elevados valores da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$ denunciam uma flambagem não linear.

No caso da presença de molas não lineares, deve-se ainda observar os fatores de participação definidos no capítulo anterior.

V.3 - EXEMPLO 1 - VIGA COLUNA

Como primeiro exemplo analisa-se a viga coluna simplesmente apoiada representada na figura (V.3.1). A viga é discretizada por quatro elementos de pórtico plano e é submetida a três situações de carregamento.

Estes casos foram estudados por MEDEIROS (5), porém sem molas não lineares. Foi verificada então uma acentuada concordância entre a solução modal e a solução analítica obtida pela teoria da viga coluna exposta em TIMOSHENKO (10).

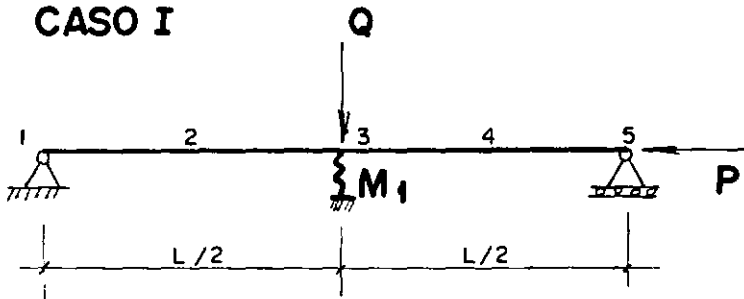
Nosso principal objetivo neste exemplo foi comparar novamente estas duas soluções no caso em que se considera uma mola não linear atuando como apoio intermediário na viga. Variou-se a característica da mola e seu posicionamento na viga.

As relações força-deslocamento das molas também são apresentadas na figura (V.3.1). Temos então a mola M_1 não muito rígida, terminando em um trecho com rigidez constante, e a mola M_2 , mais rígida que a mola M_1 , porém apresentando uma rigidez nula no último trecho. Para a aplicação da técnica das pseudo-forças deve-se escolher uma rigidez constante para cada uma destas molas.

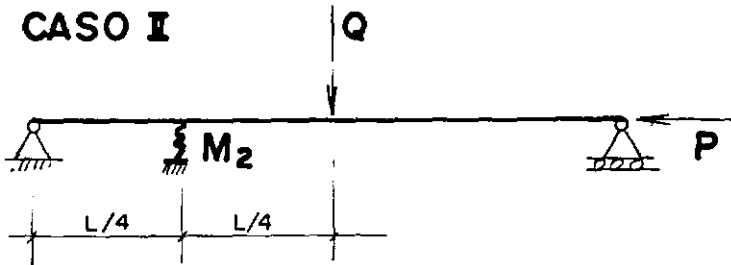
No primeiro caso, considerou-se a mola M_1 como de rigidez constante e igual a 8.000 kgf/cm. Foram encontrados então os seguintes valores críticos de λ e de α , para uma análise com quatro vetores de Lanczos-Ritz.

EXEMPLO - 1 VIGA COLUNA

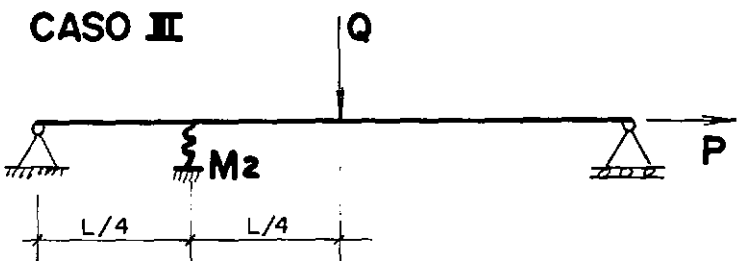
CASO I



CASO II



CASO III



$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

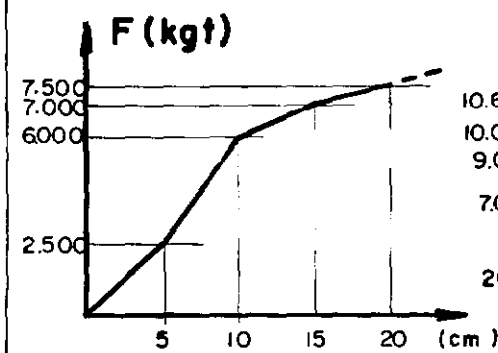
$$I_z = 1958 \text{ cm}^4$$

$$A = 47,3 \text{ cm}^2$$

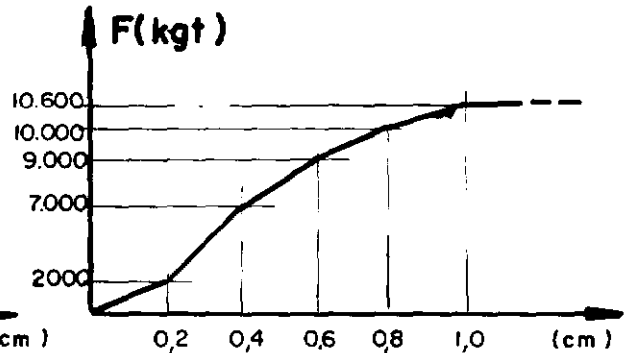
$$L = 400 \text{ cm}$$

$$Q = \lambda \times 10 \text{ kgf}$$

$$P = \lambda \times 100 \text{ kgf}$$



Mola M1



Mola M2

Figura (V.3.1)

VETOR	λ	α
1	0,3184E+04	0,1590E+00
2	0,2367E+05	-0,2103E-01
3	0,8029E+05	0,5836E-02
4	0,1021E+11	0,2007E+00

Tabela (V.3.1) - Valores Críticos de λ
Caso I

Os valores críticos de $\bar{\lambda}$ para os vetores gerados para a não-linearidade física são apresentados na tabela (V.3.2).

VETOR	$\bar{\lambda}$	PARTICIPAÇÃO
1	0,3184E+04	46,5
2	0,2367E+05	38,5
3	0,7924E+05	13,0
4	0,2043E+06	1,9

Tabela (V.3.2)

Observa-se que o número de vetores utilizados já é satisfatório. Para este caso, a base para o tratamento da não linearidade física é praticamente idêntica à utilizada para a análise não linear geométrica. Isto ocorre devido à coincidência nas posições da carga Q e da mola M_1 .

Nos casos II e III considerou-se a mola M_2 com rigidez constante e igual a 25.000 kgf/cm. Nas tabelas (V.3.3) e

(V.3.4) são apresentados os valores críticos de λ e os parâmetros de controle obtidos para o caso II.

VETOR	λ	α
1	0,6595E+04	0,8920E-01
2	0,1855E+05	-0,4558E-01
3	0,3966E+05	0,5750E-02
4	0,7086E+09	0,2007E+00

Tabela (V.3.3)

VETOR	$\bar{\lambda}$	PARTICIPAÇÃO
1	0,6595E+04	-7,1
2	0,1854E+05	17,6
3	0,2764E+05	71,3
4	0,1063E+05	18,2

Tabela (V.3.4)

Neste caso o número de vetores da base também pode ser considerado satisfatório. Devido à mudança de posição da mola, observa-se que não existe mais a coincidência entre os vetores com maior participação na parcela não linear geométrica e os com maior participação na parcela não linear física.

Os valores críticos de λ para o caso III (tiran - te) são os mesmos para o caso II, porém com sinal negativo. Os valores de α e dos fatores de participação também são iguais em módulo.

Tomou-se como referência para os três casos o valor $\lambda_0 = 2.537,66$ que corresponde ao valor crítico de λ considerando a viga sem a mola não linear.

Nas tabelas (V.3.5), (V.3.6) e (V.3.7) são apresentados alguns resultados das três situações analisadas. As análises foram todas feitas com quatro vetores e não se registrou nenhum caso com mais de três iterações.

Devemos ressaltar que devido à técnica das pseudo - forças, as estruturas com molas não lineares têm seus parâmetros de controle obtidos supondo uma rigidez constante para as molas. Este fato deve ser então levado em conta principalmente na previsão da carga de flambagem não linear. As relações $||\Delta \underline{r}||/||\lambda \underline{r}_1||$ devem ser interpretadas ainda com mais cautela.

Os resultados indicam uma flambagem a partir do nível $0,7 \lambda_0$ tanto no caso I como no caso II. Na figura (V.3.2) temos o gráfico da relação força-deslocamento para o caso I.

$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	DESLOCAMENTO VERTI- CAL N° 3 (cm)		MOMENTO FLETOR N° 3 (kgf x m)	
	VG-COL	MODAL	VG COL	MODAL
0,1	0,7739	0,7739	2,347	2,347
0,2	1,7069	1,7069	5,088	5,088
0,3	2,8546	2,8544	8,359	8,359
0,4	4,3015	4,3011	12,366	12,366
0,5	6,0789	6,0778	17,146	17,146
0,6	8,3515	8,3488	23,096	23,094
0,7	12,1457	12,1370	32,910	32,897
0,8	20,4844	20,4560	54,339	54,283
0,9	42,1900	42,0580	109,477	109,190
$\lambda_0 = 2537,66$				

Tabela V.3.5 - Exemplo 1 - Caso 1

$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	DESLOCAMENTO VERTI- CAL N° 2 (cm)		MOMENTO FLETOR N° 3 (kgf x m)	
	VG-COL	MODAL	VG-COL	MODAL
0,1	0,2047	0,2047	1,578	1,578
0,2	0,3171	0,3171	2,955	2,955
0,3	0,4754	0,4754	4,523	4,523
0,4	0,8419	0,8419	6,788	6,788
0,5	2,0361	2,0356	11,724	11,723
0,6	4,0426	4,0406	19,505	19,501
0,7	7,3990	7,3926	32,138	32,122
0,8	14,1365	14,1130	56,909	56,841
0,9	34,4527	34,3080	130,397	129,930
$\lambda_0 = 2537,66$				

Tabela V.3.6 - Exemplo 1 - Caso 2

$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	DESLOCAMENTO VERTICAL NÓ 2 (cm)		MOMENTO FLETOR NÓ 3 (kgf x m)	
	VG-COL	MODAL	VG-COL	MODAL
0,1	0,1921	0,1921	1.485,65	1.485,70
0,2	0,2885	0,2885	2.667,22	2.667,20
0,3	0,3766	0,3766	3.788,75	3.788,80
0,4	0,5128	0,5128	4.996,02	4.996,10
0,5	0,6817	0,6816	6.246,35	6.246,50
0,6	0,8804	0,8803	7.530,34	7.530,70
0,7	1,1079	1,0804	8.843,59	8.779,30
0,8	1,3479	1,2627	10.147,00	9.950,10
0,9	1,5623	1,4300	11.354,00	11.053,00
$\lambda_0 = - 2537,66$				

Tabela V.3.7 - Exemplo 1 - Caso 3

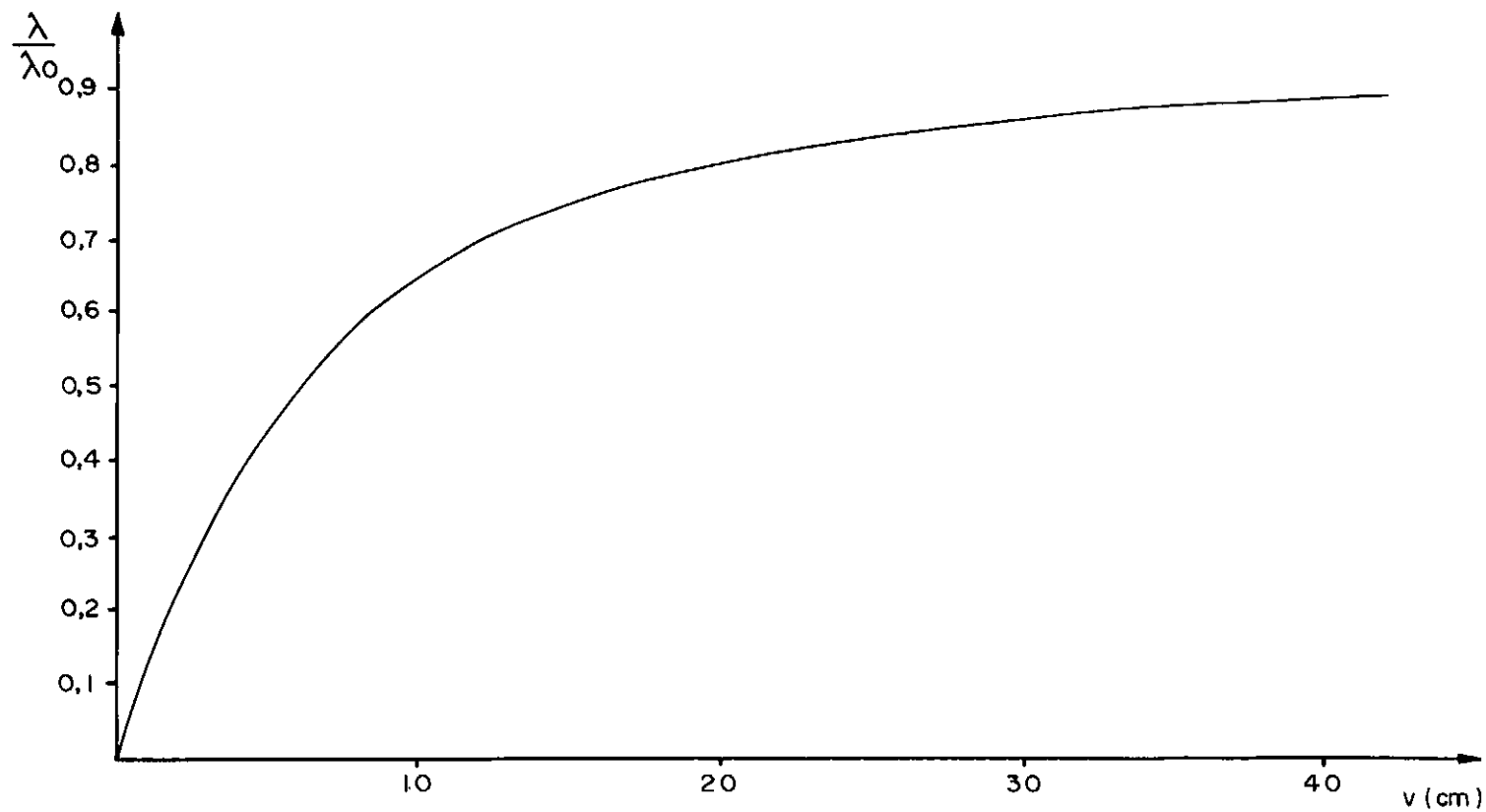


Figura (V.3.2) - Deslocamento vertical n \acute{o} 3 (cm) - Caso I

V.4 - EXEMPLO 2 - PÓRTICO PLANO

Analisa-se agora o pórtico plano representado na figura (V.4.1).

Em um primeiro caso, considera-se apenas a existência de duas molas não lineares restringindo o deslocamento horizontal dos nós 6 e 9.

A análise modal foi feita com quatro vetores de Lanczos-Ritz. A base para análise não linear geométrica forneceu os seguintes parâmetros de controle.

VETOR	λ	α
1	0,1000E+02	0,8802E+00
2	0,1961E+02	-0,3426E+00
3	0,3023E+02	0,1699E+00
4	0,3834E+06	0,1077E+01

Tabela (V.4.1)

Pelo espaçamento entre as cargas críticas e pelos valores de α conclui-se que não se deve reduzir o número de vetores.

Os valores da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$ são apresentados na tabela (V.4.2).

EXEMPLO - 2 PÓRTICO PLANO

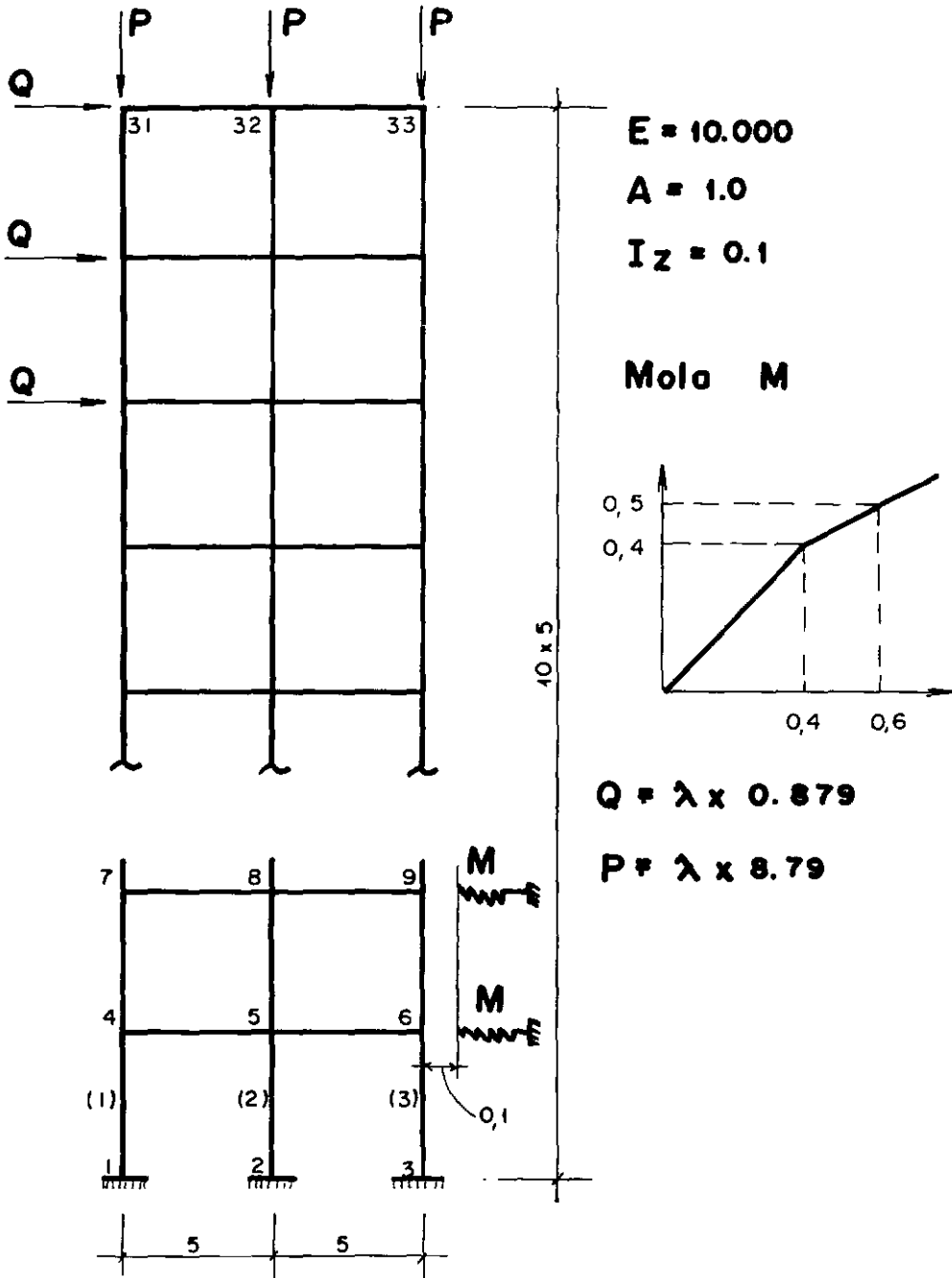


Figura (V.4.1)

λ	$ \Delta \underline{r} / \lambda \underline{r}_1 $
1	0,98
2	1,09
3	1,24
4	1,43
5	1,70
6	2,10
7	2,78
8	4,13
9	8,19

Tabela (V.4.2)

Observa-se que é um problema com significativa não linearidade geométrica com uma flambagem não linear estimada para ocorrer entre os níveis $\lambda=8$ e $\lambda=9$.

Os parâmetros da base para não linearidade física são:

VETOR	$\bar{\lambda}$	PARTICIPAÇÃO (%)
1	0,1001E+02	-1,7
2	0,2170E+02	9,8
3	0,3180E+02	41,0
4	0,1046E+03	50,9

Tabela (V.4.3)

A soma dos fatores de participação apresentados na tabela (V.4.3) indica que a base é satisfatória.

Na tabela (V.4.4) são apresentados o deslocamento horizontal no topo e no nó 9. Estes valores são comparados com os obtidos pelo método de Newton-Raphson (MNR). Na figura (V.4.2) temos a curva representando o deslocamento horizontal no topo para os diversos níveis de λ .

No segundo caso examinado, dobrou-se a carga horizontal Q ($Q = \lambda \times 1,785$), e considerou-se a atuação de dez molas não lineares do tipo M, aplicadas nos cinco primeiros níveis da estrutura, conforme é mostrado na figura (V.4.3).

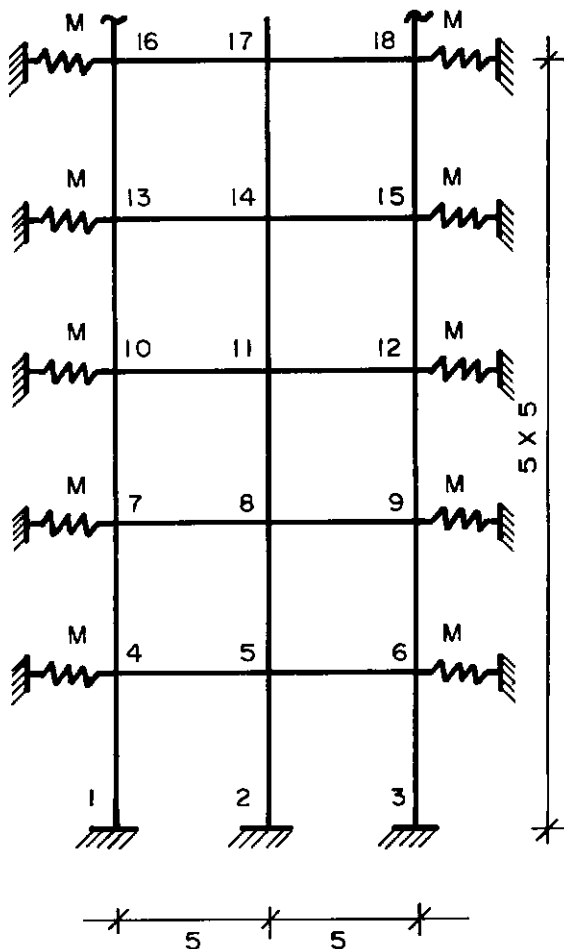


Figura (V.4.3)

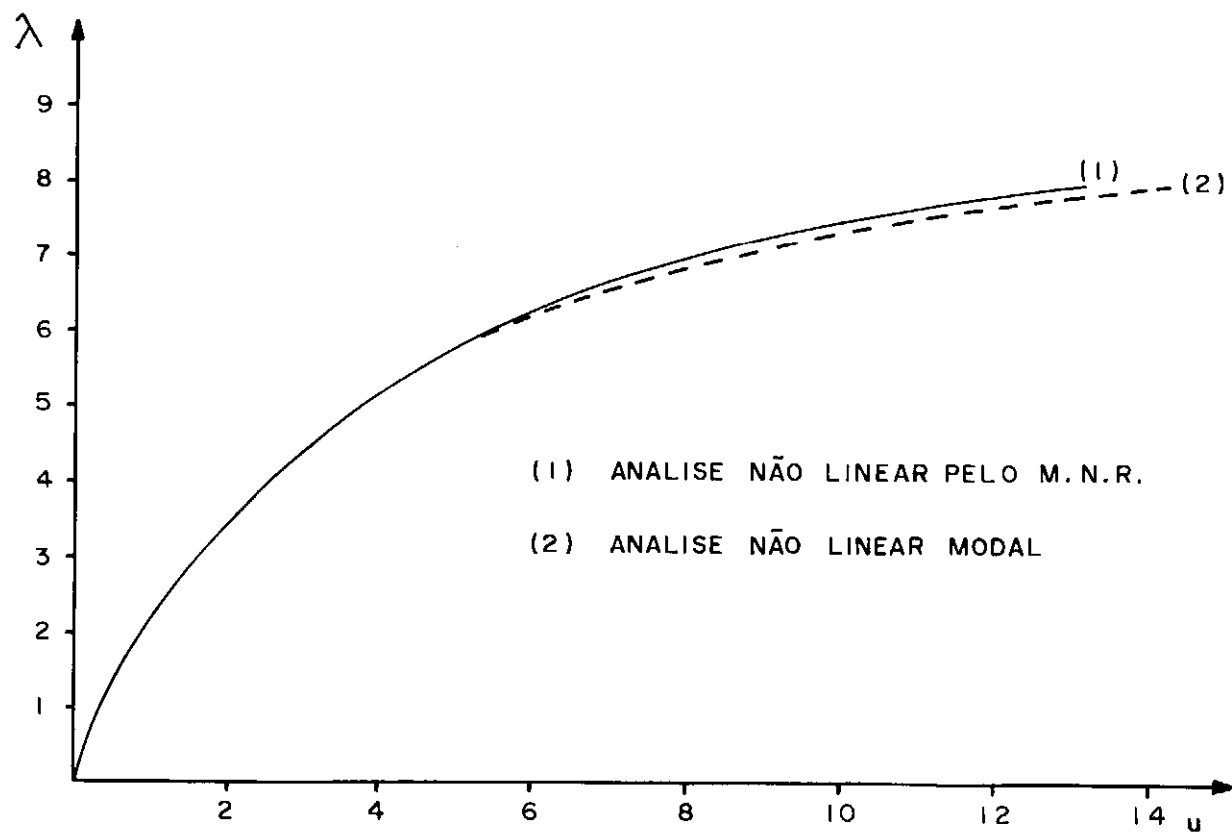


Figura (V.4.2) - Deslocamento Horizontal n 33 - Caso I

λ	DESLOCAMENTO HORIZONTAL NÓ 33		DESLOCAMENTO HORIZONTAL NÓ 9	
	MODAL	M.N.R.	MODAL	M.N.R.
1	0,428	0,427	0,053	0,053
2	0,957	0,953	0,113	0,113
3	1,626	1,616	0,184	0,182
4	2,507	2,483	0,268	0,265
5	3,723	3,670	0,373	0,367
6	5,520	5,400	0,513	0,502
7	8,477	8,165	0,717	0,697
8	14,311	13,165	1,070	1,025
9	31,608	-	2,002	-

Tabela (V.4.4)

Procedeu-se também a uma análise modal com quatro res. A base para análise não linear geométrica forneceu os seguintes parâmetros:

VETOR	λ	α
1	0,1027E+02	0,1639E+01
2	0,2130E+02	-0,6507E+00
3	0,3055E+02	0,4740E+00
4	0,8538E+05	-0,1081E+01

(Tabela (V.4.5))

Os valores da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$ foram para este caso:

λ	$ \Delta \underline{r} / \lambda \underline{r}_1 $
1	1,86
2	2,06
3	2,33
4	2,68
5	3,18
6	3,92
7	5,17
8	7,67
9	15,22

Tabela (V.4.6)

Temos então um problema com um grau de não linearidade superior ao do primeiro caso. Pode-se prever uma flambagem não linear a partir do nível $\lambda = 7$.

A base para o tratamento da não linearidade física forneceu os seguintes parâmetros:

VETOR	$\bar{\lambda}$	PARTICIPAÇÃO (%)
1	0,1027E+02	-6,6
2	0,2276E+02	-3,6
3	0,3183E+02	71,0
4	0,8892E+03	39,0

Tabela (V.4.7)

Como se observa, os quatro vetores são também suficientes para este caso.

Na tabela (V.4.8) são apresentados o deslocamento horizontal no topo e no nó 9 fornecidos pelo método modal e pelo método de Newton-Raphson.

λ	DESLOCAMENTO HORIZONTAL NÓ 33		DESLOCAMENTO HORIZONTAL NÓ 9	
	MODAL	M.N.R.	MODAL	M.N.R.
1	0,774	0,773	0,080	0,079
2	1,743	1,734	0,175	1,173
3	2,986	2,961	0,290	0,286
4	4,614	4,547	0,428	0,419
5	6,843	6,686	0,596	0,581
6	10,099	9,679	0,811	0,785
7	15,353	14,113	1,109	1,061
8	25,396	-	1,593	-
9	52,896	-	2,717	-

Tabela (V.4.8)

Nos dois casos analisados, verifica-se uma boa concordância entre os resultados fornecidos pelo método modal e pelo método de Newton-Raphson para uma faixa de λ dentro da fase pré-crítica.

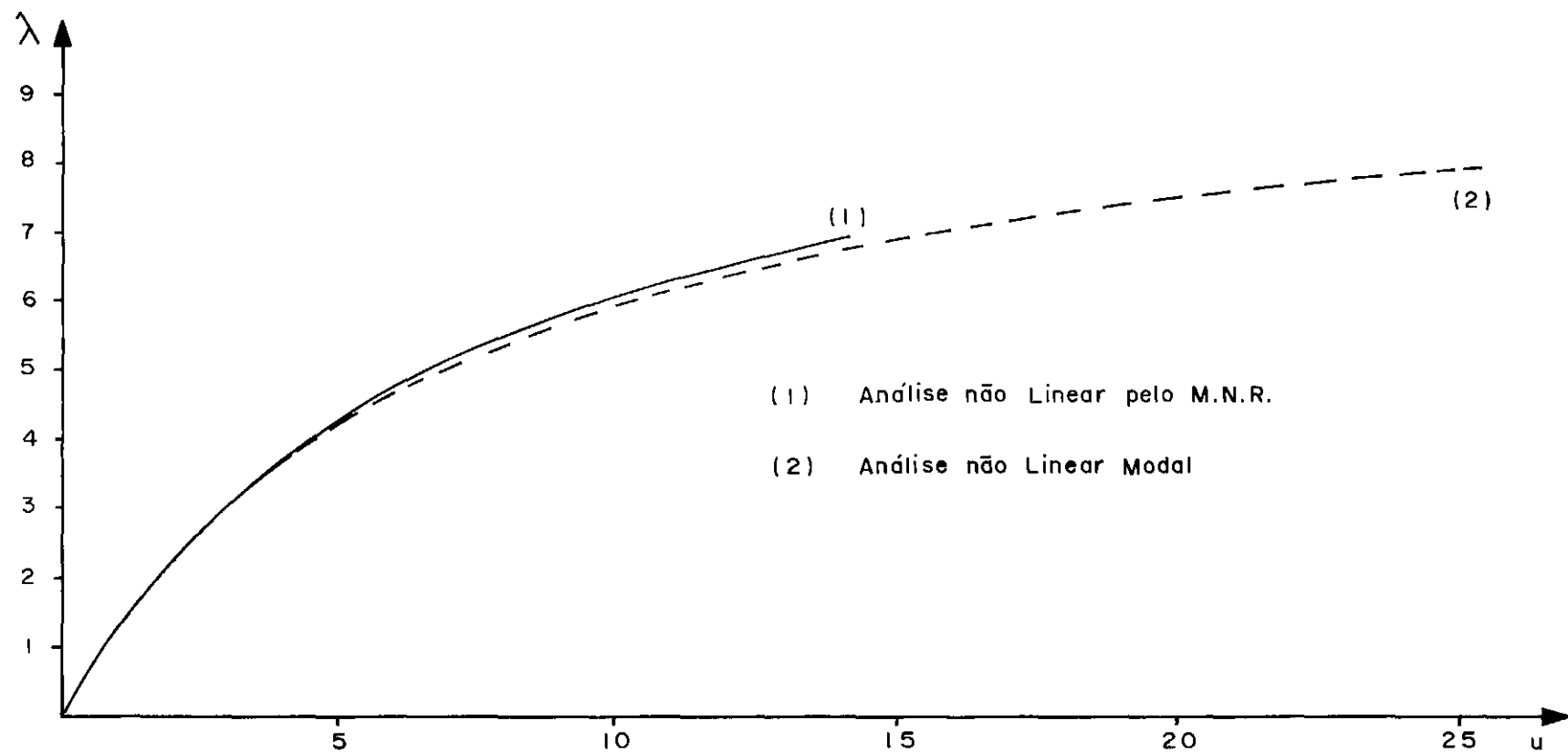


Figura (V.4.4) - Deslocamento Horizontal N^o 33 - Caso II

V.5 - EXEMPLO 3 - ARCO CIRCULAR

O terceiro exemplo é o arco circular representado na figura (V.5.1). A estrutura é discretizada por 80 elementos de pórtico plano e é submetida a um carregamento simétrico com imperfeições nos nós 19, 20 e 21.

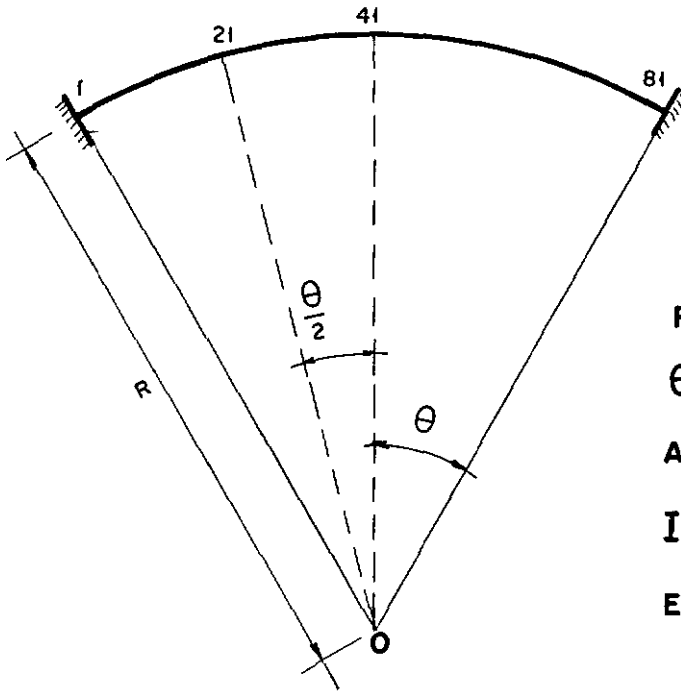
Este tipo de estrutura, quando submetido a um carregamento simétrico, tem seu comportamento governado pelo parâmetro $K = R\theta^2/h$, onde h é a espessura do arco. Para $K > 5,024$ o arco flambará com o modo antissimétrico; em caso contrário, teremos uma flambagem com o modo simétrico. Em ambos os casos, o arco apresenta algum grau de não linearidade antes da carga atingir seu valor crítico. Quanto menor for o valor de K mais severo será o comportamento não linear pré-crítico.

Para o arco analisado temos $K = 40,22$ ($h=6,816$ cm), o que significa uma situação de pequena não linearidade, admitindo-se um carregamento perfeitamente simétrico. No entanto, a imperfeição no carregamento ativa o primeiro modo de flambagem e produz significativos efeitos não lineares para níveis de carga bem abaixo da carga crítica.

Na tabela (V.5.1) são apresentados os valores críticos do parâmetro de carga λ e os seus respectivos α .

Verifica-se que não é aconselhável diminuir o número de vetores neste caso.

EXEMPLO - 3 ARCO CIRCULAR



$$R = 1000 \text{ cm}$$

$$\theta = \pi / 6$$

$$A = 2,056 \text{ cm}^2$$

$$I_z = 7,96 \text{ cm}^4$$

$$E = 10^6 \text{ kgf / cm}^2$$

NOS	Py
2,3,... 18, 22,... 80	- 1,0
19, 21	- 1,5
20	- 2,0

Figura (V.5.1)

VETOR	λ	α
1	0,7707E+01	0,4973E+00
2	0,1262E+02	-0,2226E+00
3	0,2537E+02	0,2471E+00
4	0,5851E+02	-0,2560E+00
5	0,2221E+04	0,1758E+01

Tabela (V.5.1) - Valores críticos de λ

A análise da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$ revelou que a solução pelo método modal sem atualizações é satisfatória até o nível correspondente a 0,6 da primeira carga crítica.

Na tabela (V.5.2) analisa-se o deslocamento vertical do nó 41 para os níveis de carga variando desde 0,1 até 0,9 da carga crítica. As análises modais são feitas com 5 vetores e são comparadas com os resultados obtidos pelo método iterativo de Newton-Raphson. Os níveis onde foram feitas as atualizações são identificados por linhas tracejadas na tabela. O gráfico da figura (V.5.2) ilustra o efeito das atualizações.

Observou-se que as atualizações do tipo A corrigiram a solução modal, porém a do tipo B apresentou melhores resultados aproximando-se mais rapidamente da solução exata.

Na tabela (V.5.3) considera-se os deslocamentos vertical e horizontal do nó 21.

$\frac{\lambda}{\lambda_1}$	TIPO DE ANÁLISE							ERROS (%)				
	LINEAR	(1) MODAL 0-ATLZ	(2) MODAL-A 1-ATLZ	(3) MODAL-B 1-ATLZ	(4) MODAL-B 2-ATLZ	(5) MODAL-B 3-ATLZ	M.N.R.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
0,1	0,085	0,087	0,087	0,087	0,087	0,087	0,087	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,2	0,169	0,179	0,179	0,179	0,179	0,179	0,181	-1,1	-1,1	-1,1	-1,1	-1,1
0,3	0,254	0,278	0,278	0,278	0,278	0,278	0,283	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8	-1,8
0,4	0,338	0,385	0,385	0,385	0,390	0,390	0,396	-2,8	-2,8	-2,8	-1,5	-1,5
0,5	0,423	0,502	0,502	0,502	0,514	0,514	0,528	-4,9	-4,9	-4,9	-2,7	-2,7
0,6	0,507	0,632	0,645	0,658	0,656	0,671	0,691	-8,5	-6,7	-4,8	-5,1	-2,9
0,7	0,592	0,779	0,814	0,849	0,870	0,863	0,925	-16	-12	-8,2	-5,9	-6,7
0,8	0,676	0,949	1,021	1,112	1,180	1,252	1,402	-32	-27	-21	-16	-11
0,9	0,761	1,150	1,305	1,606	1,832	2,180	4,867	-76	-73	-67	-62	-55

Tabela (V.5.2) - Deslocamento vertical n^o 41 (cm)

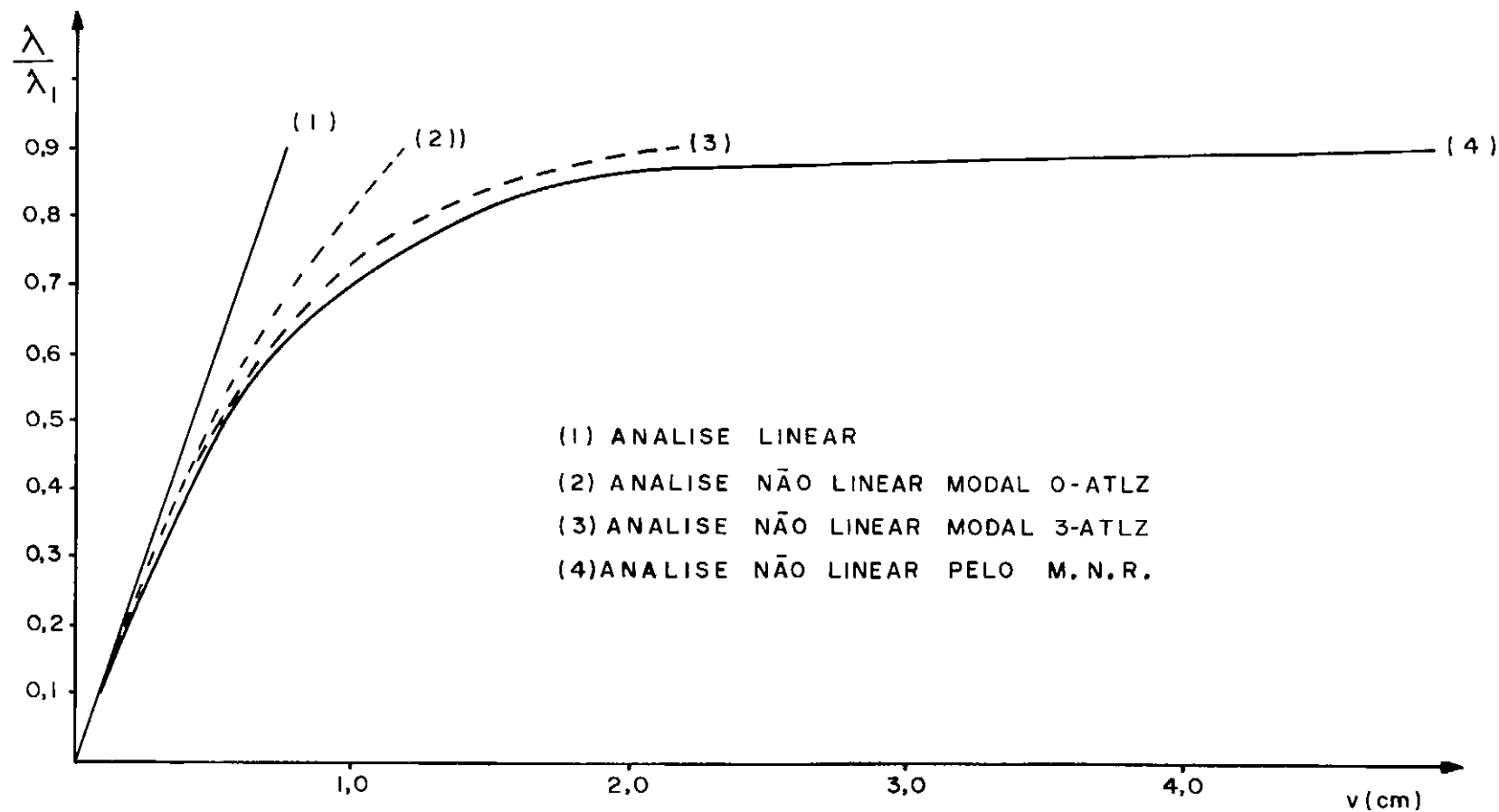


Figura (V.5.2) - Deslocamento vertical nó 41 (cm)

$\frac{\lambda}{\lambda_1}$	DESLOCAMENTO HORIZONTAL (cm)			DESLOCAMENTO VERTICAL (cm)		
	MODAL 0-ATLZ	MODAL 3-ATLZ	M.N.R.	MODAL 0-ATLZ	MODAL 3-ATLZ	M.N.R.
0,1	0,046	0,046	0,046	0,145	0,145	0,145
0,2	0,102	0,102	0,102	0,317	0,317	0,318
0,3	0,173	0,173	0,173	0,526	0,526	0,529
0,4	0,266	0,267	0,267	0,793	0,796	0,800
0,5	0,395	0,396	0,397	1,115	1,160	1,168
0,6	0,587	0,592	0,594	1,672	1,700	1,711
0,7	0,907	0,921	0,926	2,518	2,586	2,621
0,8	1,549	1,610	1,625	4,189	4,446	4,539
0,9	3,494	3,869	4,614	9,168	10,466	13,360

Tabela (V.5.3) - Deslocamentos n^o 21 (cm)

V.6 - EXEMPLO 4 - PÓRTICO PLANO

Examina-se agora a eficácia do processo de atualizações em um caso onde a estrutura tem um comportamento mais rígido do que o apresentado pela análise modal.

A estrutura corresponde ao mesmo pórtico plano analisado no exemplo 2, porém sem as molas não lineares. Trata-se de uma situação de flambagem linear que é perturbada pela presença da carga horizontal Q . LIMA (4) estudou este caso fazendo variar a relação Q/P . Observou-se que para valores inferiores a 0,05 de Q/P , a estrutura apresenta um comportamento pré-crítico moderadamente não linear, sendo desprezível a diferença entre a solução exata e a fornecida pelo método modal sem atualizações.

Nesta análise considera-se a relação $Q/P=0,1$ e utiliza-se o mesmo carregamento apresentado na figura (V.4.1).

A tabela (V.6.1) mostra os valores críticos de λ e seus respectivos α para uma análise com cinco vetores.

VETOR	λ	α
1	0,1000E+02	0,8817E+00
2	0,1939E+02	-0,3319E+00
3	0,2569E+02	0,1698E+00
4	0,3894E+02	-0,8891E-01
5	0,1508E+07	0,1077E+01

Tabela (V.6.1) - Valores críticos de λ

Devido à proximidade entre as cargas críticas e entre os valores de α , todas as análises modais serão feitas com cinco vetores.

Na tabela (V.6.2) são apresentados os valores da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$ para os níveis de carga estudados. Pode-se ter então uma idéia da qualidade da solução modal e do comportamento da estrutura.

λ	$ \Delta \underline{r} / \lambda \underline{r}_1 $
1	0,9832
2	1,0961
3	1,2409
4	1,4335
5	1,7027
6	2,1066
7	2,7808
8	4,1335
9	8,2092

Tabela (V.6.2) - Controle da não linearidade geométrica

Teoricamente podemos confiar na resposta modal até $\lambda=2$; a partir deste valor a solução modal pode não ser uma aproximação satisfatória da solução exata. Observa-se também uma flambagem entre os níveis $\lambda=7$ e $\lambda=9$.

A tabela (V.6.3) apresenta o deslocamento horizontal do nó 33 para as diversas análises efetuadas. Os erros são

obtidos em relação à solução dada pelo método de Newton-Raphson. É feita também uma análise de custos considerando o valor da unidade de serviço computacional (USC) igual a Cz\$1,00.

Conclui-se claramente que as atualizações do tipo A não apresentaram bons resultados para esta situação. As atualizações do tipo B, ao contrário, apresentaram resultados que convergiram para a solução exata com o aumento do número de atualizações.

A análise dos custos ainda apresenta uma vantagem significativa para o método modal, mesmo com atualizações, em comparação com o método iterativo de Newton-Raphson.

O gráfico da figura (V.6.1) apresenta o deslocamento horizontal do nó 33 obtido por algumas das análises efetuadas.

λ	TIPO DE ANÁLISE							ERROS (%)				
	LINEAR	(1) MODAL 0-ATLZ	(2) MODAL-A 1-ATLZ	(3) MODAL-A 2-ATLZ	(4) MODAL-B 1-ATLZ	(5) MODAL-B 2-ATLZ	M.N.R.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	0,390	0,428	0,428	0,428	0,428	0,428	0,427	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
2	0,776	0,957	0,957	0,957	0,957	0,957	0,953	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4
3	1,163	1,629	1,629	<u>1,629</u>	1,629	<u>1,629</u>	1,613	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
4	1,551	2,512	2,512	2,410	2,512	2,490	2,482	1,2	-2,9	2,9	1,2	0,3
5	1,940	3,732	<u>3,732</u>	3,450	<u>3,732</u>	3,690	3,665	1,8	1,8	-5,9	1,8	0,7
6	2,330	5,536	4,612	<u>4,910</u>	5,460	<u>5,440</u>	5,383	2,8	-14	-8,8	1,4	1,1
7	2,720	8,503	5,721	6,080	8,220	8,126	8,102	4,9	-29	-25	1,5	0,3
8	3,100	14,360	7,165	7,640	13,44	13,050	12,296	17	-42	-38	9,3	6,1
9	3,490	31,740	9,121	9,800	27,14	25,090	23,329	36	-61	-58	16	7,5
CUSTO CZ\$		16,32	34,57	51,55	34,52	49,34	192,6					

Tabela (V.6.3) - Deslocamento horizontal n^o 33

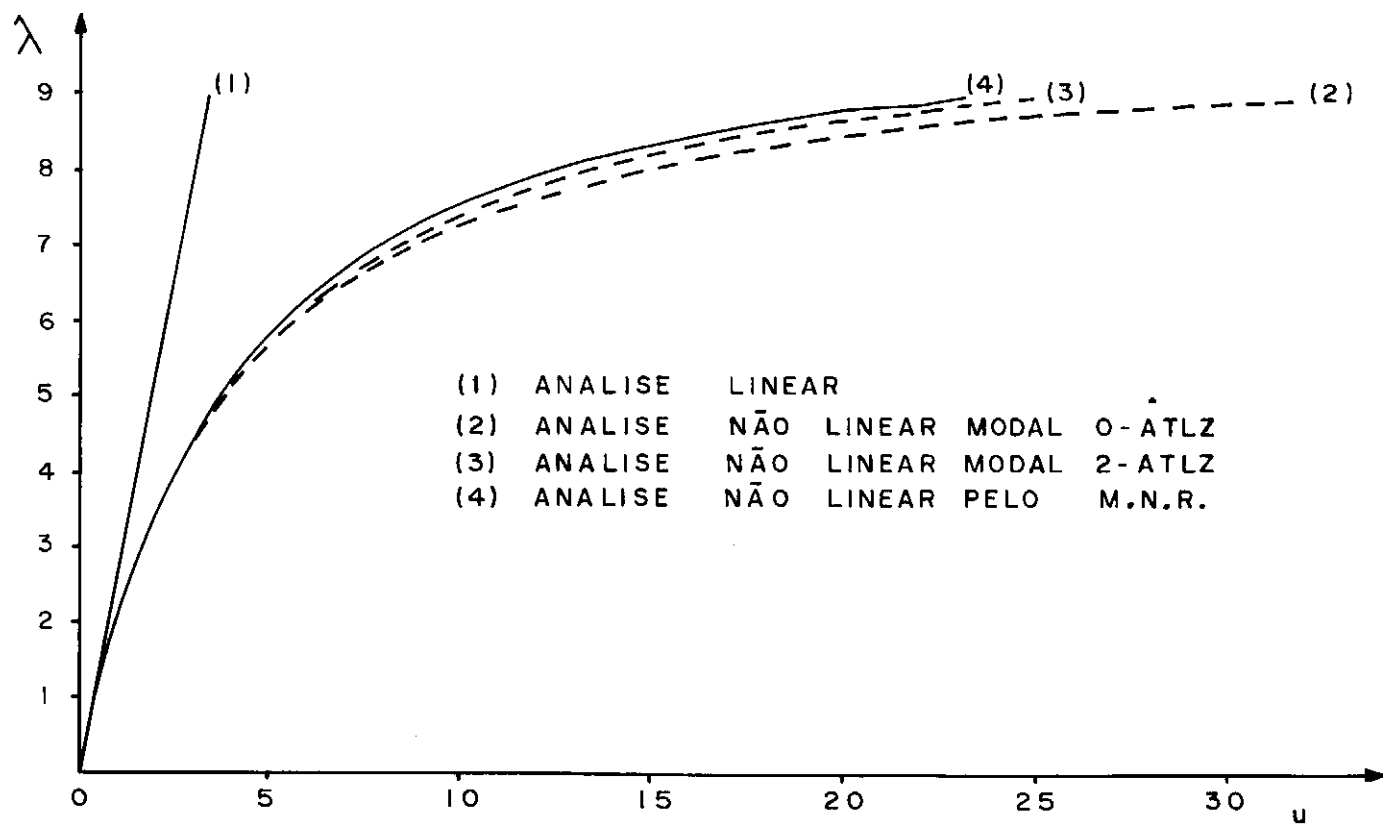


Figura (V.6.1) - Deslocamento Horizontal do nó 33

V.7 - EXEMPLO 5 - CASCA RETICULADA

A casca reticulada representada na figura (V.7.1) foi analisada por RODRIGO (11) através de vários métodos incrementais-iterativos. Trata-se de uma estrutura com comportamento fortemente não linear.

Examina-se o deslocamento vertical do nó 1 durante a aplicação de vinte incrementos de carga.

Inicialmente foi feita uma análise sem atualizações com quatro vetores de Lanczos-Ritz. A tabela (V.7.1) apresenta os valores críticos de λ e os respectivos α .

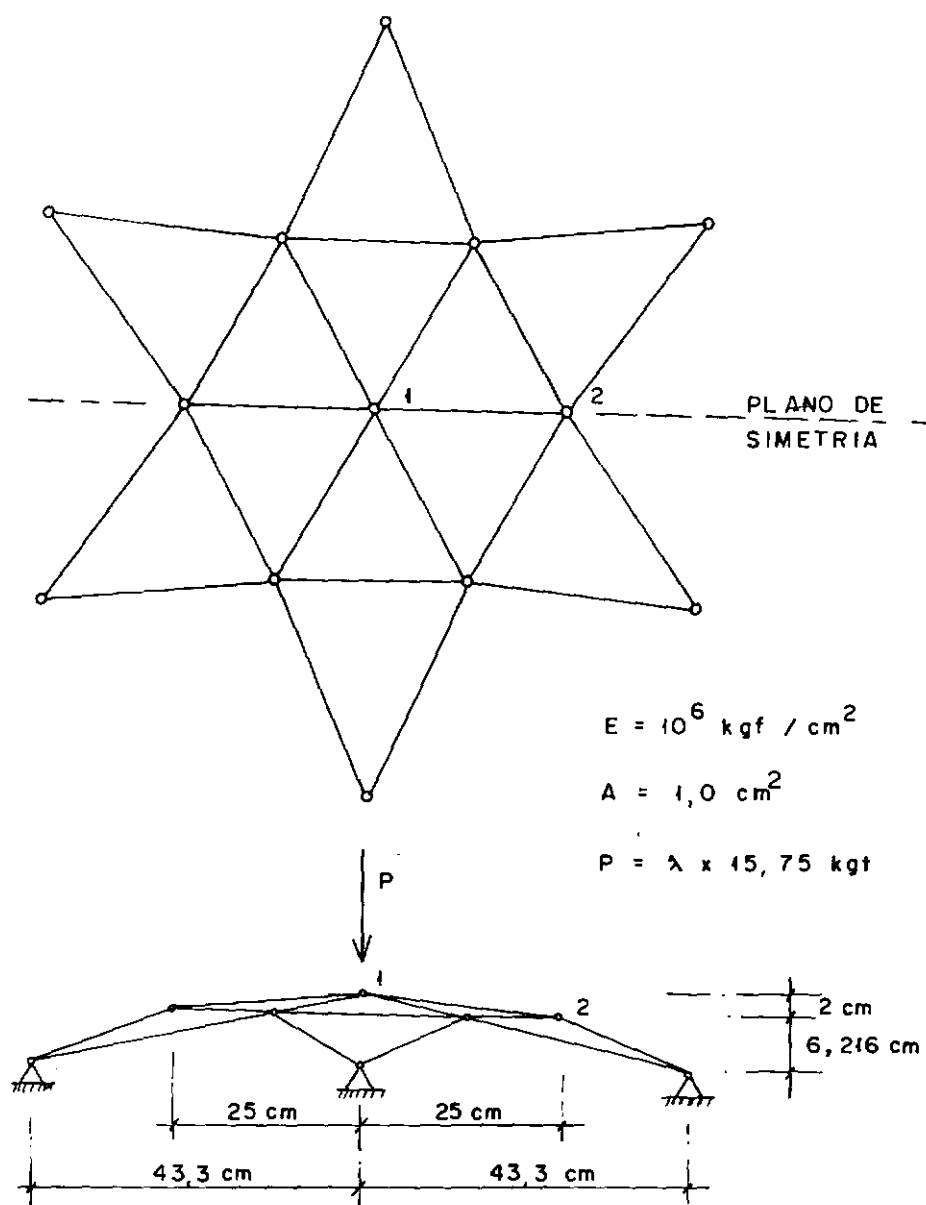
VETOR	λ	α
1	0,9674E+02	0,501E+00
2	-0,4459E+02	-0,469E-02
3	0,8507E+03	-0,399E-01
4	0,3764E+04	-0,168E+00

Tabela (V.7.1) - Valores críticos de λ

O que se pode observar é que o segundo e terceiro vetores, embora com cargas críticas não muito afastadas da primeira, possuem baixos valores para α . Isto indica que a análise pode ser feita com um número ainda menor de vetores. De fato, ao se analisar a estrutura com apenas dois vetores, obtve-se os mesmos resultados da análise com quatro ou mais vetores. Os dois vetores gerados tiveram seus valores de λ aproximando-se de λ_1 e λ_4 da análise com quatro vetores, confir-

EXEMPLO - 5

CASCA RETICULADA



(Figura V.7.1)

mando assim que estes são os vetores de maior participação na resposta. Os valores de λ críticos para a análise com dois vetores são apresentados na tabela (V.7.2).

VETOR	λ	α
1	0,9675E+02	0,501E+00
2	0,3299E+04	-0,173E+00

Tabela (V.7.2) - Valores críticos de λ

Apesar deste poder de seleção do algoritmo de Lanczos-Ritz e dos bons resultados obtidos para este caso com apenas dois vetores, deve-se agir com prudência na escolha do número de vetores. É possível que os deslocamentos de outras partes da estrutura exijam um número maior de vetores para a sua representação.

Os valores da relação $||\Delta \underline{r}|| / ||\lambda \underline{r}_1||$ começaram com 3,2 para o nível 0,1 λ_1 apresentando um salto para valores da ordem de 5,0E+06 a partir do nível 0,4 λ_1 . Isto denuncia o caráter fortemente não linear do problema e uma flambagem por ponto limite entre os níveis 0,2 λ e 0,4 λ_1 . Como o valor máximo de λ será vinte, nossa análise se restringirá até o nível correspondente a 0,21 λ_1 .

A tabela (V.7.3) apresenta os resultados obtidos pelas análises efetuadas. As análises modais são feitas com dois vetores de Lanczos-Ritz. As atualizações apresentaram praticamente os mesmos resultados tanto para o tipo A como para o tipo B. Os erros são calculados em relação ao método de Newton-Raphson (M.N.R.), e para os custos considerou-se que a unidade de servi-

ço computacional (USC) correspondesse ao valor de Cz\$1,00.

No gráfico da figura (V.7.2) pode-se observar a eficácia do processo de atualização para este caso.

λ	LINEAR	(1) MODAL 0-ATLZ	(2) MODAL 2-ATLZ	(3) MODAL 6-ATLZ	(4) MODAL 9-ATLZ	(5) INCRE- MENTAL	MNR	ERRO %				
								(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	0,0357	0,0364	0,0364	0,0364	0,0364	0,0353	0,0359	1,4	1,4	1,4	1,4	-1,7
4	0,0714	0,0741	0,0741	0,0741	0,0741	0,0729	0,0741	0,0	0,0	0,0	0,0	-1,6
6	0,1071	0,1134	0,1134	0,1134	0,1154	0,1131	0,1152	-1,6	-1,6	-1,6	0,2	-1,8
8	0,1427	0,1543	0,1543	0,1543	0,1587	0,1564	0,1597	-3,4	-3,4	-3,4	-0,6	-2,1
10	0,1784	0,1969	0,2025	0,2025	0,2072	0,2038	0,2086	-5,6	-2,9	-2,9	-0,7	-2,3
12	0,2141	0,2413	0,2539	0,2539	0,2611	0,2562	0,2635	-8,4	-3,6	-3,6	-0,9	-2,8
14	0,2498	0,2877	0,3086	0,3142	0,3223	0,3157	0,3266	-12	-5,5	-3,8	-1,3	-3,3
16	0,2855	0,3362	0,3673	0,3804	0,3944	0,3853	0,4028	-16	-8,8	-5,6	-2,1	-4,3
17	0,3033	0,3613	0,4077	0,4222	0,4378	0,4257	0,4490	-19	-9,2	-6,0	-2,5	-5,2
18	0,3212	0,3870	0,4513	0,4703	0,4882	0,4717	0,5044	-23	-11	-6,8	-3,2	-6,5
19	0,3390	0,4133	0,4987	0,5284	0,5503	0,5259	0,5777	-28	-14	-8,5	-4,7	-9,0
20	0,3569	0,4402	0,5504	0,6054	0,6365	0,5936	0,7312	-40	-25	-17	-13	-19
CUSTO		8,69	26,14	54,41	80,45	104,57	202,41					

Tabela (V.7.3) - Deslocamento Vertical do nó 1 (cm)

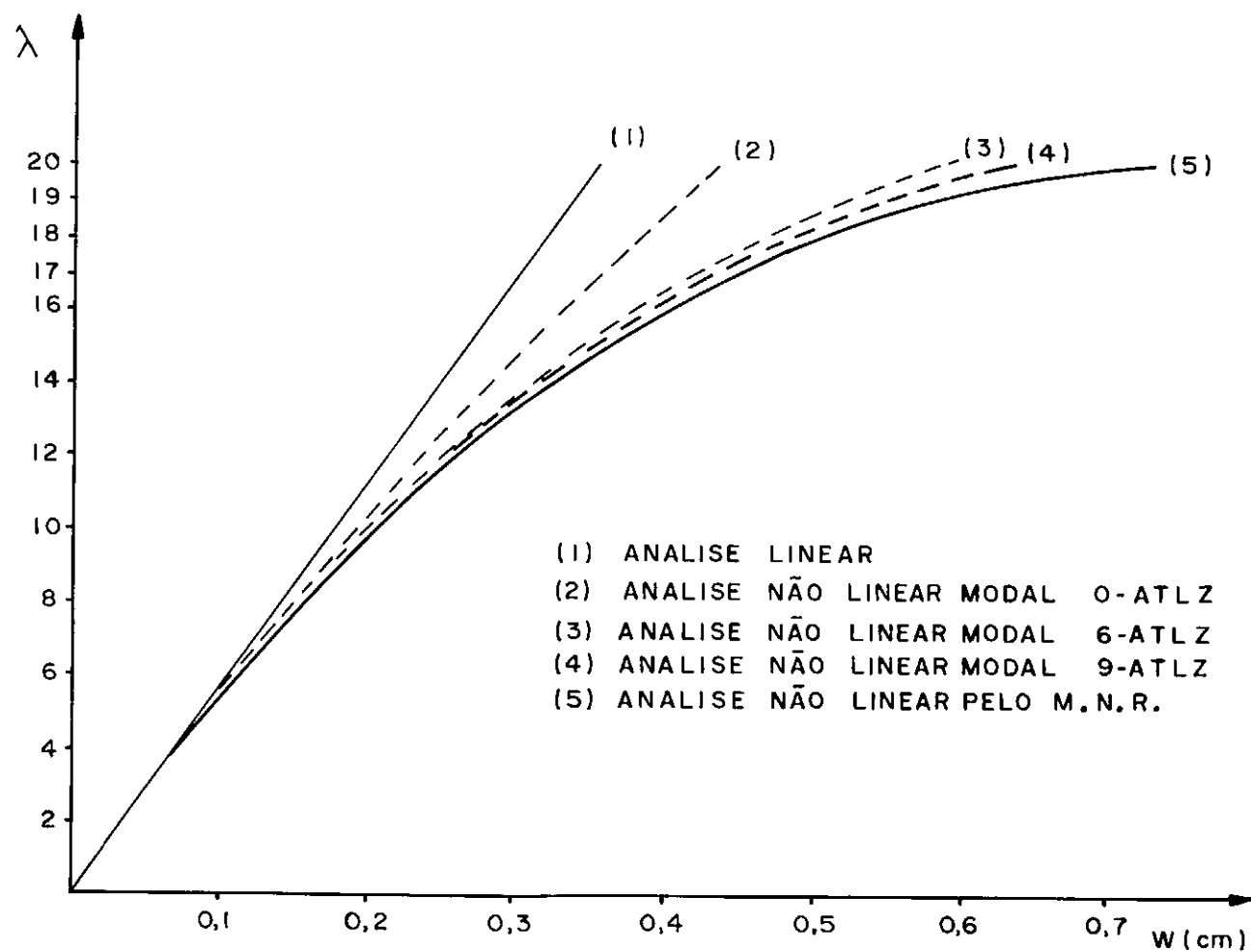


Figura (V.7.2) - Deslocamento vertical do nó 1 (cm)

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Nos exemplos analisados, constatou-se que a extensão do método modal para consideração de molas não lineares aplicadas na estrutura, apresentou resultados plenamente satisfatórios. Embora tenha-se utilizado um processo iterativo para a determinação da parcela do deslocamento devido à não linearidade física, a análise modal com base de Lanczos-Ritz permitiu a diminuição do número de equações, preservando assim o baixo custo da análise que é uma das principais características do método modal.

Molas não lineares são utilizadas na prática principalmente para a representação da interação solo-estrutura; estes problemas têm então agora a possibilidade de também serem analisados pelo método modal.

A técnica empregada para correção da solução modal, através de atualizações de referencial e do cálculo da matriz de rigidez tangente, também mostrou-se eficiente. Desta forma conseguiu-se ampliar a classe de problemas não lineares que podem ser solucionados pelo método modal.

A idéia fundamental é apresentar o método modal como um substituto da análise linear convencional. Com um custo não muito superior ao da análise linear, o método modal é capaz de fornecer, em muitos casos, uma boa aproximação da solução não linear exata. Além disto, o método fornece ao usuário alguns parâmetros de controle que permitem não só obter informações so-

bre o comportamento da estrutura, como também avaliar a qualidade da solução obtida.

Assim sendo, o baixo custo, as informações sobre o comportamento da estrutura, e a solução satisfatória para problemas não lineares de interesse prático, tornam atrativa a utilização do método modal sobretudo na fase de desenvolvimento de um projeto.

Neste trabalho apenas foram analisadas estruturas reticuladas, porém a análise estática não linear de placas e cascas pode também ser efetuada utilizando a formulação do método modal.

Finalmente, considera-se importante que um número maior de exemplos sejam analisados para se adquirir uma maior experiência na aplicação do método modal, procurando definir melhor a fronteira da classe de problemas por ele solucionados e também dar uma interpretação ainda mais completa dos parâmetros de controle.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. MALVERN, L.E., "Foundations of Solid Mechanics", Prentice Hall Inc., 1965.
2. NOVOZHILOV, V.V., "Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity", Graylock Press, Rochester, New York, 1953.
3. NAGY, D.A. e KÖNIG, M., "Geometrically Nonlinear Finite Element Behaviour Using Buckling Mode Superposition", Int. J. of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 447-484, 1979.
4. LIMA, E.C.P., "Análise Estática de Estruturas com Não Linearidade Geométrica pelo Método da Superposição Modal", I Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Trabalho 10, pp. 167-179, 1979.
5. MEDEIROS, S.R.P., "Análise Estática Não Linear Geométrica de Estruturas pelo Método de Superposição Modal com Base Lanczos-Ritz", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1985.
6. STRICKLING, J.A. e HAISLER, W.E., "Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis", Computer and Structures, Vol. 7, pp. 125-136, Pergamon Press, 1977.
7. BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, NJ, 1982.

8. VENÂNCIO FILHO, F. e SOUZA LIMA, V.M., "A Noção de Rigidez Tangente no Estudo da Não Linearidade Geométrica de Estruturas Reticuladas", 5ª Conferência Latino-Americana para Métodos Computacionais em Engenharia, pp. 380-409, Salvador, 1984.
9. WEN, R.K. e RAHIMZADEH, J., "Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Elements", J. of Struct. Eng., ASCE, Vol.109, nº 8, Agosto 1983.
10. TIMOSHENKO, S.P., "Resistência dos Materiais", Livros Técnicos e Científicos Editora, Vol. 2, 1966.
11. CODES, R.A., "Formulações e Métodos de Solução na Análise não Linear de Treliças Espaciais", Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
12. NAGY, D.A.; KÖNIG, M. e STREINER, P., "Buckling Analysis with the ASKA Program System", Int. J. of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 16, pp. 185-212, 1978.
13. ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill Book Company, 1971.