

DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS  
DAS ESTRUTURAS ATRAVÉS DE SUBESTRUTURAÇÃO  
E REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE

Larrey Cysne

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS  
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A  
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA  
CIVIL.

APROVADA POR:

*H. L. Soriano*

---

PROF. HUMBERTO LIMA SORIANO  
PRESIDENTE

*Tercio Pacitti*

---

PROF. TERCIO PACITTI

*Ronaldo Carvalho Batista*

---

PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA

*Fernando L. Lobo B. Carneiro*

---

PROF. FERNANDO L. LOBO B. CARNEIRO

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
MARÇO DE 1986

**CYSNE, LARREY**

Determinação das Características Dinâmicas das Estru\_turas Através de Subestruturação e Redução de Graus de Liberdade ( Rio de Janeiro ) 1986.

VIII, 128 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Características Dinâmicas das Estruturas      2. Sub-  
estruturação e Redução de Graus de Liberdade      I. COPPE/  
UFRJ      II. Título (série).

## OFERECIMENTOS

Aos *meus pais*, cujas virtudes, caráter, honradez cívica e nobreza de princípios serviram de alicerce e exemplo ao caminho que hoje trilho.

Aos *meus irmãos Rochelle e Rommel*, de quem o apoio e estímulo foram para mim uma constante fonte de energia e inspiração.

A *Patrícia*, cujo amor, compreensão e carinho se reúnem numa companheira fiel e amiga.

## AGRADECIMENTOS

Ao *Prof. Humberto Lima Soriano*, meu mestre e amigo, cuja inteligência eu admiro e cujo saber eu respeito. Foi quem me deu a idéia inicial e orientação constante para a realização deste trabalho.

Aos *Professores Tercio Pacitti, Fernando L.Lobo B. Carneiro e Ronaldo Carvalho Batista*, por terem acedido a participar da banca examinadora.

Aos *Sgtos. Hilton e Mattos*, que muito prestimosamente ficaram encarregados da parte gráfica deste trabalho.

A *Denise Loureiro e Marlene Gonçalves* pela boa vontade no trabalho de datilografia.

Enfim, a todos aqueles que involuntariamente omiti e que, de algum modo, contribuíram para tornar realidade este pequeno produto de um grande esforço.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

**DETERMINAÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DINÂMICAS  
DAS ESTRUTURAS ATRAVÉS DE SUBESTRUTURAÇÃO  
E REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE**

**Larrey Cysne**

Março de 1986

Orientador : Prof. Humberto Lima Soriano

Programa : Engenharia Civil

O presente trabalho versa sobre o uso da técnica de subestruturação no cálculo de frequências naturais e modos de vibração. Dois métodos de redução de graus de liberdade, através da subestruturação são apresentados: o de Guyan e o de Craig & Bampton. As acurácias desses métodos são comparadas por meio de exemplos numéricos de estruturas tipo pórtico plano, analisados através de um programa automático, que se encontra em anexo. Estes exemplos evidenciam a grande eficiência do método de Craig & Bampton, permitindo concluir que a sua adequada aplicação conduz a um excelente modelo numérico, de dimensões reduzidas, apropriado à determinação da resposta dinâmica de estruturas, no caso em que nesta se tenha a participação apenas dos primeiros modos de vibração.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the Degree of Master of Science (M.Sc.)

DETERMINATION OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF  
STRUCTURES THROUGH SUBSTRUCTURING AND REDUCTION OF DEGREES OF FREEDOM

**Larrey Cysne**

March, 1986

Chairman : Prof. Humberto Lima Soriano

Department : Civil Engineering

The present thesis deals with substructuring in dynamic analysis of structures. Two methods for reducing degrees of freedom are presented: Guyan method and Craig & Bampton method. Exemple problems of plane frame structures are presented to illustrate and to compare the accuracy of theses methods. The analysis of these structures is done through the computer program annexed at the end of this thesis. These exemple problems show the great efficiency of the Craig & Bampton method, allowing to conclude that its adequate application leads to an excellent numerical model, with small dimensions, suitable for determinating the dynamic response of structures, in the case that its response has the participation of only the first vibrations mode.

# Í N D I C E

## Capítulo I

INTRODUÇÃO.....	1
I.1) Objetivos e Descrição do Presente Trabalho.....	1
I.2) Principais Notações.....	5

## Capítulo II

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DINÂMICO.....	9
II.1) Discretização de Sistemas Contínuos Através do Uso de Coordenadas Generalizadas.....	9
II.2) Equações de Lagrange.....	13
II.3) Aplicação das Equações de Lagrange na Dedução das Equações de Movimento de Sistemas Contínuos.....	16
II.4) Discretização de Sistemas Contínuos Através do Método dos Elementos Finitos.....	28

## Capítulo III

SUBESTRUTURAÇÃO E REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE EM ANÁLISE DINÂMICA.....	32
III.1) Equacionamento Básico.....	32
III.2) Transformação de Coordenadas Segundo Craig & Bampton.....	35
III.3) Transformação de Coordenadas Segundo Guyan.....	43

III.4) Equações de Movimento Utilizando Subestrutura - ção .....	45
---	----

#### Capítulo IV

ANÁLISE E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS EM PÓRTICOS PLANOS .....	54
--	----

#### Capítulo V

CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTU <u>R</u> ROS .....	66
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	68
ANEXO - PROGRAMA AUTOMÁTICO .....	70

## Capítulo - I

### INTRODUÇÃO

#### I.1) Objetivos e Descrição do Presente Trabalho

A análise de uma estrutura pode ser abordada de duas maneiras: por métodos numéricos ou por métodos analíticos. Estes últimos, devido às particularidades dos modelos estruturais, conduzem, normalmente, a equações diferenciais complexas, quase sempre inviáveis de serem resolvidas. A solução numérica, além de considerar de forma mais de perto as peculiaridades da estrutura, tem a grande vantagem de poder ser programada em computadores digitais, através da álgebra matricial, a qual permite uma notação bastante compacta.

Com o avanço da tecnologia, os modelos estruturais foram ficando cada vez mais arrojados, conduzindo, geralmente, a um número muito grande de equações e, consequentemente, exigindo computadores bastante potentes para a sua

resolução. Este fato levou à utilização de técnicas de programação relativamente complexas, para se tirar o máximo partido da esparsidade das matrizes dos sistemas estruturais. São exemplos típicos dessas técnicas o armazenamento e resolução de sistemas de equações por altura efetiva de coluna e ou pela técnica de solução frontal.

Paralelamente, tem-se desenvolvido diversos métodos de redução do número de graus de liberdade de um sistema estrutural, na fase de sua análise. A técnica de subestruturação, já largamente empregada na análise estática, pode também ser muito útil na condensação de graus de liberdade em análise dinâmica. Neste caso, contudo, a elaboração dos programas computacionais correspondentes não é tão imediata como no caso da análise de uma estrutura como um todo, ou seja, não fracionada em subestruturas.

Podem-se enumerar algumas vantagens que fundamentam a importância da técnica de subestruturação, quais sejam:

- 1) Em certos casos, a capacidade do computador não é adequada para a resolução da estrutura como um todo;
- 2) Em determinados modelos estruturais, como é o caso da fuselagem de um avião, existe a necessidade de se fazerem diferentes tipos de análises em partes diversas da estrutura;
- 3) Quando o projeto é muito grande, várias equipes de técnicos são necessárias para o seu desenvolvimento. Cada uma fica responsável por uma parte do modelo estrutural. Através da técnica de subestruturação, é possível acoplar as diversas subestruturas e assim proceder a uma análise da estrutura como um todo; e
- 4) Verifica-se uma grande economia de esforço computacional, quando a subestruturação é utilizada, nos se-

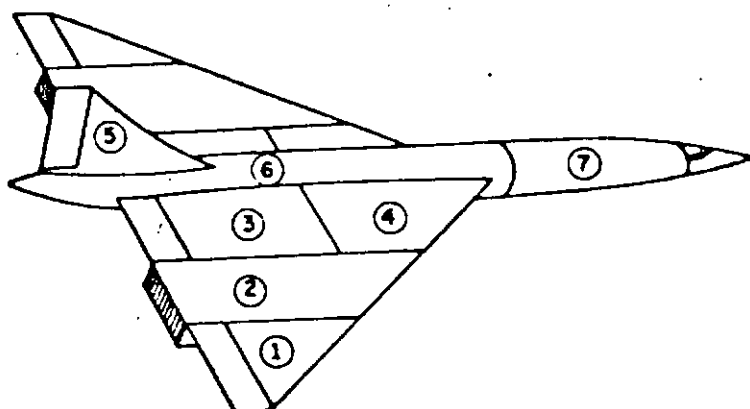


FIGURA I.1

DIVISÃO DO AVIÃO EM VÁRIAS SUBESTRUTURAS.

(FIGURA 3 DA REFERÊNCIA 1)

guintes casos:

- a) Quando a estrutura apresenta partes iguais;
- b) No caso em que a não linearidade física ocorre em partes localizadas da estrutura; e
- c) Quando, em análises sucessivas, tem-se que mudar o projeto estrutural, em partes localizadas.

O presente trabalho versa sobre o uso de sub - estruturação na determinação das características dinâmicas (frequências e modos de vibração) de sistemas estruturais. As aplicações numéricas foram efetuadas em modelos tipo pórtico plano. Com o objetivo de reduzir o esforço computacional na resolução do problema de autovalor  $\underline{K} \underline{\Phi} = \underline{M} \underline{\Phi} \underline{\Lambda}$ , onde  $\underline{K}$  é a matriz de rigidez da estrutura,  $\underline{M}$  a sua matriz de massa,  $\underline{\Lambda}$  a matriz dos seus autovalores (quadrado das frequências), são descritos ao longo deste texto as técnicas desenvolvidas por Guyan e Craig & Bampton. Estas técnicas reduzem as ordens das

matrizes do problema supracitado. Tal objetivo é alcançado através de uma mudança de coordenadas a nível de subestrutura. Esta operação permite obter as matrizes de massa e de rigidez de cada subestrutura bastante reduzidas, quando referidas às novas coordenadas. Como as matrizes do modelo estrutural completo são obtidas por superposição adequada das de suas subestruturas, a redução nas ordens destas implica, obrigatoriamente, na redução das ordens daquelas.

As matrizes referenciadas às novas coordenadas, ditas generalizadas, são obtidas através da pré e pós-multiplicação das matrizes de massa e rigidez das diversas subestruturas (até então em coordenadas físicas) por suas respectivas matrizes de mudança de coordenadas na forma transportada e normalizada. Estas são formadas pelos modos normais de vibração e de restrição de cada subestrutura.

A condensação de graus de liberdade mencionada acima, assim como o uso da técnica de subestruturação na análise de problemas dinâmicos são detalhados no terceiro capítulo deste trabalho, e foi baseado nas referências 2, 6, 10 e 12.

O capítulo dois versa sobre a formulação do problema dinâmico de sistemas contínuos, através de sua discretização por coordenadas generalizadas, e foi fundamentado nas referências 10 e 11.

A análise e a comparação de resultados são feitas no quarto capítulo deste trabalho, através de exemplos numéricos, usando ou não, as técnicas de subestruturação com condensação de graus de liberdade sugeridas por Guyan e Craig & Bampton. Para tal, foi desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN, o qual se encontra em anexo.

## I.2) PRINCIPAIS NOTAÇÕES

As notações utilizadas são sempre definidas na primeira vez que ocorrem ao longo deste texto. A seguir descreve-se o significado das principais notações empregadas.

$\begin{bmatrix} . \end{bmatrix}$  - matriz retangular ou quadrada ( o mesmo é indicado com um til sob o nome da variável).

$\begin{Bmatrix} . \end{Bmatrix}$  - matriz com uma coluna ou vetor ( o mesmo é indicado com um til sob o nome da variável).

$V(x,t)$  - deslocamento de ponto em um modelo estrutural unidimensional (função da coordenada  $x$  e do tempo  $t$ ).

$q_i(t)$  - coordenada generalizada em função do tempo  $t$ .

$n$  - número de graus de liberdade.

$\psi_i(x)$  - função deslocamento em função da coordenada  $x$ .

$T$  - energia cinética do sistema estrutural.

$U$  - energia potencial do sistema estrutural.

$P_i$  - forças generalizadas

$\tilde{W}$  - vetor deslocamento da estrutura que contém as coordenadas generalizadas  $q_i$ .

$\tilde{M}$  - matriz de massa da estrutura.

- $\tilde{K}$  - matriz de rigidez da estrutura.
- $\tilde{P}$  - vetor de forças generalizadas da estrutura.
- $\tilde{C}$  - matriz de amortecimento da estrutura.
- $\phi_i$  - i-ésimo modo de vibração da estrutura.
- $\omega_i$  - i-ésima frequência da estrutura.
- $\tilde{\Phi}$  - matriz dos modos de vibração da estrutura.
- $\tilde{\Lambda}$  - matriz (diagonal) dos quadrados das frequências de uma estrutura.
- $N$  - número de elementos finitos em que uma estrutura foi dividida.
- $\tilde{k}_e$  - matriz de rigidez do e-ésimo elemento finito de uma estrutura.
- $\tilde{m}_e$  - matriz de massa do e-ésimo elemento finito de uma estrutura.
- $\tilde{c}_e$  - matriz de amortecimento do e-ésimo elemento finito de uma estrutura.
- $\tilde{p}_e$  - vetor de carga do e-ésimo elemento finito de uma estrutura.
- $\tilde{A}_s$  - matriz de mudança de coordenadas da subestrutura s.
- $\tilde{B}_s$  - vetor de coordenadas generalizadas da subestrutura s após a mudança de coordenadas.

- $[H]_s$  - matriz dos modos de restrição da subestrutura  $s$ .
- [Ident]- matriz identidade.
- $g_{li}$  - número de graus de liberdade interiores de uma subestrutura.
- $g_{le}$  - número de graus de liberdade exteriores de uma subestrutura.
- $g$  -  $g_{li} + g_{le}$
- $[0]_g$  - matriz nula
- $\tilde{M}_s$  - matriz de massa da subestrutura  $s$ , após a mudança de coordenadas (reduzidas)
- $\tilde{K}_s$  - matriz de rigidez da subestrutura  $s$ , após a mudança de coordenadas (reduzidas)
- $L$  - Lagrangeano da estrutura
- $\underline{\lambda}$  - vetor dos multiplicadores de Lagrange.
- $W$  - trabalho realizado pelas forças externas que atuam numa estrutura.
- $\underline{S}, \underline{D}$  - matrizes de uma estrutura, as quais são compostas por matrizes nulas e de identidade das de suas subestruturas.
- $\underline{R}$  - vetor de coordenadas generalizadas da estrutura após mudança de coordenadas.

$\bar{\tilde{M}}$  - matriz de massa da estrutura após mudança de coordenadas (reduzida).

$\bar{\tilde{K}}$  - matriz de rigidez da estrutura após mudança de coordenadas (reduzida).

Expoentes : T - indica transposição de matriz.

Índices : e - a variável em questão está relacionada com o e-ésimo elemento finito de uma estrutura.

I, E - indicam graus de liberdade interiores e exteriores respectivamente, não vinculados, de uma subestrutura.

s - a variável em questão está referida a subestrutura s. (  $s = \alpha, \varrho$  ).

mr - a variável em questão está relacionada ao modo de restrição mr de uma subestrutura.

## Capítulo - II

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DINÂMICO

#### II.1) Discretização de Sistemas Contínuos Através do Uso de Coordenadas Generalizadas.

A análise dinâmica de uma estrutura, por exemplo a da fig. II.1, complica-se (11) pelo fato de suas forças de inércia serem geradas por derivadas de deslocamentos da estrutura, e estes, por sua vez, dependerem fundamentalmente das mesmas. Este ciclo fechado causa o efeito pode ser solucionado pela formulação do problema através de equações diferenciais. Sendo a massa da viga da fig. II.1 considerada distribuída continuamente ao longo de seu eixo longitudinal, seus deslocamentos e acelerações devem ser calculados em cada ponto deste eixo, para que as forças de inércia correspondentes fiquem completamente definidas. As equações diferenciais supracitadas devem ser parciais, uma vez que a posição ao longo do eixo

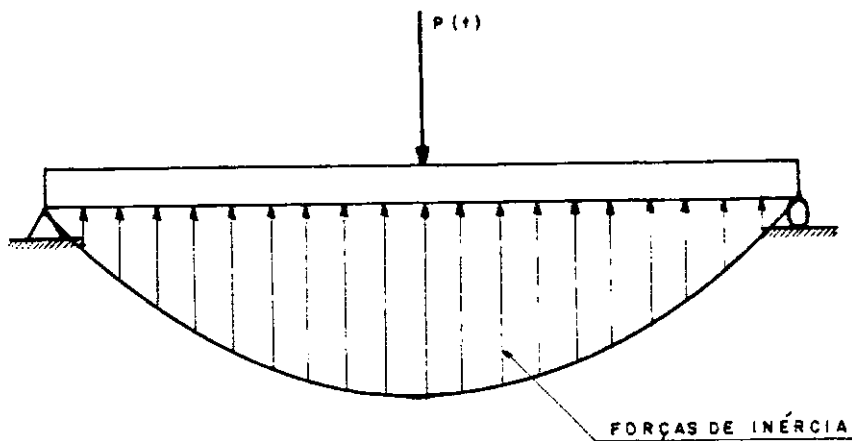


FIGURA II.1

CICLO AÇÃO x REAÇÃO DE UMA SOLICITAÇÃO DINÂMICA

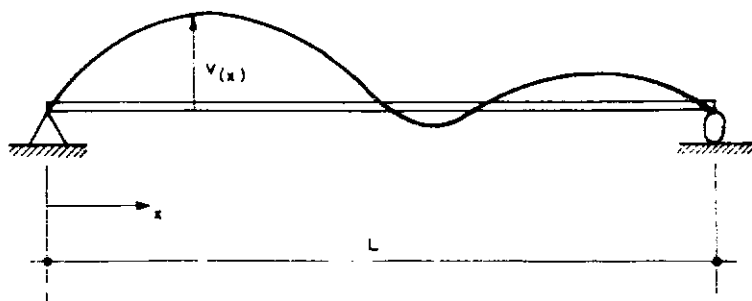
(FIGURA RETIRADA DA REFERÊNCIA 11)

da viga, assim como o tempo são tratadas como variáveis independentes.

A análise de estruturas mais complexas, sob o enfoque acima descrito, é, na maior parte das vezes, impossível de ser executada, matematicamente, de forma explícita. Com o objetivo de se obterem soluções aproximadas de um problema dinâmico, foram desenvolvidos modelos analíticos alternativos. Eles partem de suposições simplificadoras do comportamento da estrutura a ser analisada, objetivando um desenvolvimento matemático mais simples, sem, contudo, muito se afastarem do comportamento dinâmico real da estrutura.

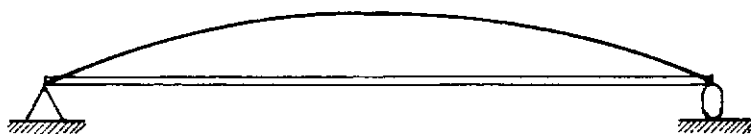
Um deles é a discretização da estrutura através de coordenadas generalizadas. Esse modelo é baseado na suposição de que a deformada de uma estrutura pode ser expressa através de um somatório de uma série de deformadas - padrão.

$V(x)$



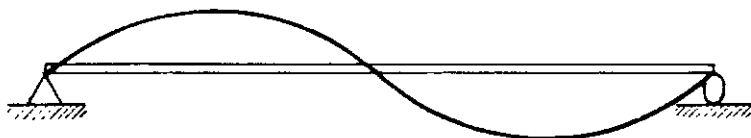
=

$$b_1 \sin \frac{\pi x}{L}$$



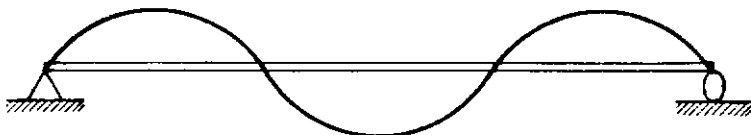
+

$$b_2 \sin \frac{2\pi x}{L}$$



+

$$b_3 \sin \frac{3\pi x}{L}$$



+

⋮

FIGURA II.2

REPRESENTAÇÃO DA DEFORMADA DE UMA ESTRUTURA POR SÉRIE DE SENOS

(FIGURA RETIRADA DA REFERÊNCIA 11)

Um exemplo simples dessa aproximação pode ser visualizado através da fig. II.2, onde a deformada de uma viga simplesmente apoiada é expressa por um somatório de deformadas-padrão em forma de senóides.

$$V(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \sin \frac{i \pi x}{L} \quad (\text{II.1.1})$$

As amplitudes dessas deformadas-padrão serão as coordenadas generalizadas do sistema, e os infinitos graus de liberdade da referida viga serão substituídos pelos infinitos termos da série. A vantagem desse modelo analítico é que, na maior parte das vezes, pode-se obter uma boa aproximação para a deformada real da viga, considerando-se apenas os termos iniciais da série. Desse modo, um sistema estrutural com três graus de liberdade terá sua solução aproximada expressa por uma série de três termos, e assim sucessivamente.

Esta concepção pode ser generalizada, substituindo-se as senóides  $\sin \frac{i \pi x}{L}$ , que foram assumidas como deformadas-padrão, por funções  $\psi_i(x)$ ; desde que sejam compatíveis com as condições geométricas de contorno do sistema estrutural, e que mantenham a continuidade do mesmo, quando deformado. Pode-se, então, escrever a expressão genérica para os deslocamentos de qualquer estrutura unidimensional sob a forma

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) q_i(t) \quad (\text{II.1.2})$$

Para qualquer conjunto de funções deslocamento  $\psi_i(x)$ , a deformada resultante da estrutura dependerá de

$q_i(t)$ , o qual é responsável pela amplitude da deformada no tempo, e que será referido, nesse trabalho, como coordenada generalizada. O número  $n$ , de deformadas-padrão assumido, constitui o número de graus de liberdade considerados nesse tipo de modelo analítico.

Diante do exposto, pode-se, então, partir para a dedução das equações de movimento de um sistema estrutural contínuo.

## II.2) Equações de Lagrange

Uma das maneiras de se obterem as equações de movimento de um sistema estrutural é através das Equações de Lagrange. Estas são obtidas a partir de quantidades de energia cinética e de energia potencial, em substituição aos vetores de força e de deslocamento, como se verifica no emprego das Leis de Newton para este tipo de dedução.

Pelo Princípio de Hamilton, pode-se escrever:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta (T-U) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (II.2.1)$$

onde  $T$  é a energia cinética do sistema estrutural,  $U$  é a sua energia potencial (incluindo a energia de deformação do sistema e a energia potencial das forças externas conservativas que agem sobre o mesmo) e  $\delta W_{nc}$  é o trabalho virtual realizado pelas forças não conservativas que agem neste sistema (incluindo forças de amortecimento e forças externas não consideradas em  $U$ ).

Para a maioria dos sistemas estruturais, pode-se exprimir a sua energia cinética em termos de  $n$  coordena -

das generalizadas  $q_i$ , juntamente com suas primeiras derivadas em relação ao tempo  $\dot{q}_i$ ; e sua energia potencial, apenas em termos de coordenadas generalizadas  $q_i$ . Quando as forças não conservativas agem através de deslocamentos virtuais (causados por um conjunto arbitrário de variações das coordenadas generalizadas) é produzido um trabalho virtual, que pode ser expresso por meio de uma combinação linear dessas variações de coordenadas. Sendo assim:

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (\text{II.2.2.a})$$

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (\text{II.2.2.b})$$

$$\delta W_{nc} = P_1 \delta q_1 + P_2 \delta q_2 + \dots + P_n \delta q_n \quad (\text{II.2.2.c})$$

onde  $P_1, P_2, \dots, P_n$  são chamadas de forças generalizadas.

Substituindo (II.2.2) em (II.2.1), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial q_n} \delta q_n + \right. \\ & + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n - \\ & - \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 - \dots - \frac{\partial U}{\partial q_n} \delta q_n + P_1 \delta q_1 + \\ & \left. + P_2 \delta q_2 + \dots + P_n \delta q_n \right) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.2.3})$$

Fazendo a integração por partes nos termos que contêm  $\int \dot{q}_i$  :

$$\int_a^b x \dot{y} dt = xy \Big|_a^b - \int_a^b \dot{x} y dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i dt = \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} q_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) q_i dt$$

(II.2.4)

Considerando a condição básica para que o princípio de Hamilton seja válido,  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ , tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial U}{\partial q_i} + P_i \right] \delta q_i \right\} dt = 0$$

(II.2.5)

Como  $\delta q_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) são grandezas virtuais independentes, a expressão acima será satisfeita quando:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = P_i$$

(II.2.6)

para  $i = 1, 2, \dots, n$

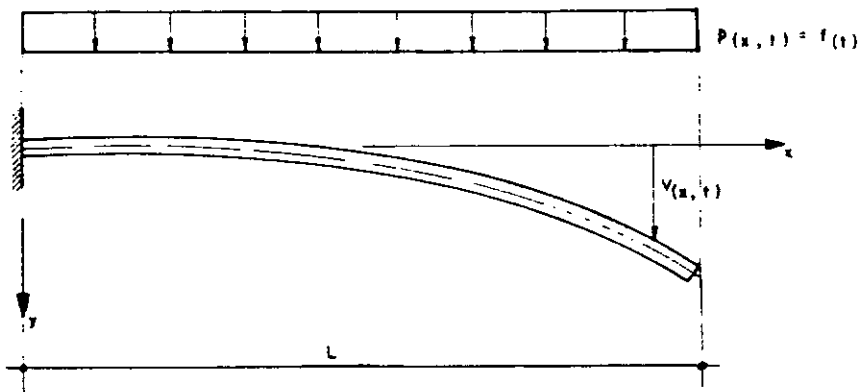


FIGURA II.3

VIGA EM BALANÇO SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO  $p(x, t)$

As equações (II.2.6) são as Equações de Lagrange.

### II.3) Aplicação das Equações de Lagrange na Dedução das Equações de Movimento de Sistemas Contínuos

Seja o exemplo da fig. II.3. Baseado no modelo analítico desenvolvido na primeira parte deste capítulo (item II.1), pode-se aproximar a deformada da estrutura por (II.1.2).

Como a expressão da energia potencial de deformação segundo Bernoulli-Euler (equação II.3.2) contém  $V''(x, t)$  (derivada segunda de  $V$  em relação a  $x$ ), as funções  $\psi_i(x)$  devem ser contínuas e ter suas primeiras derivadas em relação a  $x$  contínuas. Além disso,  $\psi_i(x)$  devem ser linearmente independentes e satisfazer às seguintes condições de contorno do do sistema estrutural em questão:

$$\psi_i(0) = \psi_i'(0) = 0$$

desde que  $V(0,t) = V'(0,t) = 0$  para qualquer  $t$ .

As expressões das energias cinética e de deformação, segundo Bernoulli-Euler, para a referida viga, podem ser escritas da seguinte maneira:

Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) (\dot{V})^2 dx \quad (\text{II.3.1})$$

Energia Potencial  
de Deformação:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) (V'')^2 dx \quad (\text{II.3.2})$$

onde  $\rho(x)$  é a massa por unidade de volume,  $A(x)$  é a área da seção transversal,  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $I(x)$  o momento de inércia em relação ao eixo  $z$ .

Substituindo (II.1.2) em (II.3.1), tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \dot{q}_i(t) \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \dot{q}_j(t) dx$$

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) A(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_i(x) \psi_j(x) \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) dx$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \quad (\text{II.3.3})$$

onde

$$m_{ij} = \int_0^L \rho(x) A(x) \psi_j(x) \psi_i(x) dx \quad (\text{II.3.4})$$

Procedendo-se da mesma maneira para com a expressão (II.3.2):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) \sum_{i=1}^n \psi_i''(x) q_i(t) \sum_{j=1}^n \psi_j''(x) q_j(t) dx$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E I(x) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_i''(x) \psi_j''(x) q_i(t) q_j(t) dx$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i(t) q_j(t) \quad (\text{II.3.5})$$

onde

$$k_{ij} = \int_0^L E I(x) \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \quad (\text{II.3.6})$$

Escrevendo as expressões (II.3.3) e (II.3.5) sob a notação matricial, tem-se respectivamente:

$$\underline{T} = \frac{1}{2} \dot{\underline{\Psi}}^T \underline{M} \dot{\underline{\Psi}} \quad (\text{II.3.7})$$

$$U = \frac{1}{2} \underline{\Psi}^T \underline{K} \underline{\Psi} \quad (\text{II.3.8})$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V}} &= \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} & \dot{\underline{\underline{V}}} &= \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} & \underline{\underline{M}} &= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} & \underline{\underline{K}} &= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ & & \ddots & \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \\ (II.3.9) & & (II.3.9.a) & & (II.3.10) & & (II.3.11) \end{aligned}$$

Se o sistema estrutural estiver sujeito a forças externas, como é o caso do exemplo da fig. II.3, suas correspondentes forças generalizadas serão determinadas através do emprego de trabalho virtual:

$$\delta W = \int_0^L p(x,t) \delta v(x,t) dx = \sum_{i=1}^n p_i(t) \delta q_i(t) \quad (II.3.12)$$

por (II.1.2):

$$\delta v(x,t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \delta q_i(t) \quad (II.3.13)$$

Combinando (II.3.12) com (II.3.13), tem-se:

$$\int_0^L p(x,t) \sum_{i=1}^n \psi_i(x) \delta q_i(t) dx = \sum_{i=1}^n p_i(t) \delta q_i(t)$$

$$\text{logo, } p_i(t) = \int_0^L p(x,t) \psi_i(x) dx \quad (\text{II.3.14})$$

Substituindo (II.3.3) e (II.3.5) na Equação de Lagrange (II.2.6), tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_i(t) \dot{q}_j(t) \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} q_i(t) q_j(t) \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i(t) \quad (\text{II.3.15})$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ij} [\dot{q}_j(t)]^2 \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n m_{ij} [\dot{q}_j(t)]^2 \right) \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n k_{ij} [q_j(t)]^2 \right) \right] = p_i(t)$$

$$(\text{II.3.16})$$

para  $i=1,2,\dots,n$

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^n m_{ij} \dot{q}_j(t) \right] + \left[ \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) \right] = p_i(t) \quad (\text{II.3.17})$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = p_i(t) \quad (\text{II.3.18})$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$

Passando (II.3.18) para a forma matricial, obtêm-se a expressão que traduz o movimento de um sistema estrutural não amortecido, submetido a um carregamento  $p(x,t)$ .

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{V}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{P}} \quad (\text{II.3.19})$$

Sendo  $\underline{\underline{M}}$  a matriz de massa da estrutura definida por (II.3.10),  $\underline{\underline{K}}$  a sua matriz de rigidez definida por (II.3.11),  $\underline{\underline{V}}$  o vetor deslocamento em coordenadas generalizadas, definido por (II.3.9) e  $\underline{\underline{P}}$  o vetor das forças generalizadas definido por:

$$\underline{\underline{P}} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (\text{II.3.20})$$

em que o termo genérico é dado por (II.3.14).

Com o objetivo de melhor esclarecimento, resolve-se a seguir o exemplo da fig. II.3, baseando-se nas expressões até aqui deduzidas.

Assumindo  $n=2$ , duas funções que atendem às condições de contorno do problema anterior são:

$$\psi_1(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

e

$$\psi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

Neste caso, por (II.1.2) tem-se:

$$v(x,t) = \left(\frac{x}{L}\right)^2 q_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right)^3 q_2(t)$$

Por (II.3.4) , pode-se calcular os coeficientes da matriz de massa da estrutura:

$$m_{11} = \rho(x) A(x) \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^2 dx = \rho(x) A(x) \frac{L}{5}$$

(II.3.21.a)

$$m_{12} = m_{21} = \rho(x) A(x) \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 dx = \rho(x) A(x) \frac{L}{6}$$

(II.3.21.b)

$$m_{22} = \rho(x) A(x) \int_0^L \left(\frac{x}{L}\right)^3 \left(\frac{x}{L}\right)^3 dx = \rho(x) A(x) \frac{L}{7}$$

(II.3.21.c)

E por (II.3.6), os da matriz de rigidez:

$$k_{11} = E I(x) \int_0^L \frac{2}{L^2} \frac{2}{L^2} dx = E I(x) \frac{4}{L^3} \quad (\text{II.3.22.a})$$

$$k_{12} = k_{21} = E I(x) \int_0^L \frac{2}{L^2} \frac{6x}{L^3} dx = E I(x) \frac{6}{L^3} \quad (\text{II.3.22.b})$$

$$k_{22} = E I(x) \int_0^L \frac{6x}{L^3} \frac{6x}{L^3} dx = E I(x) \frac{12}{L^3} \quad (\text{II.3.22.c})$$

As forças generalizadas são obtidas por (II.3.14):

$$p_1(t) = \int_0^L f(t) \left( \frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{L f(t)}{3} \quad (\text{II.3.23.a})$$

$$p_2(t) = \int_0^L f(t) \left( \frac{x}{L} \right)^3 dx = \frac{L f(t)}{4} \quad (\text{II.3.23.b})$$

Substituindo (II.3.21), (II.3.22) e (II.3.23) em (II.3.19) pode-se, finalmente, obter a equação de movimento da estrutura da fig. II.3 em coordenadas generalizadas:

$$\rho_{AL} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} =$$

$$= L \begin{bmatrix} \frac{f(t)}{3} \\ \frac{f(t)}{4} \end{bmatrix}$$

Supondo  $\rho = 1$

$A = 0,5$

$L = 420$

$E = 300.000.000$

$I = 1,2348$

$f(t) = 0$  ( caso de vibrações livres)

em um mesmo sistema de unidades , tem-se:

$$\begin{bmatrix} 42 & 35 \\ 35 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{V}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{0}} \quad (a)$$

A solução do sistema de equações é:

$$\underline{\underline{V}} = \sum_i \underline{\underline{e}}_i e^{[V^T \omega_i t]} \quad (b)$$

$i=1,2$

onde  $\phi_i$  e  $\omega_i$  são os i-ésimos autovetor e frequência, respectivamente, da estrutura em questão.

Derivando (b) e substituindo em (a), obtêm-se:

$$- \underset{\sim}{M} \omega_i^2 \phi_i e^{[V^{-1} \omega_i t]} + \underset{\sim}{K} \phi_i e^{[V^{-1} \omega_i t]} = 0 \quad (c)$$

$$i = 1, 2$$

$$\left[ -\underset{\sim}{M} \omega_i^2 \phi_i + \underset{\sim}{K} \phi_i \right] e^{[V^{-1} \omega_i t]} = 0 \quad (d)$$

$$i = 1, 2$$

$$\underset{\sim}{K} \phi_i = \underset{\sim}{M} \omega_i^2 \phi_i \quad (e)$$

$$i = 1, 2$$

Ou ainda

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\Phi} = \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\Phi} \underset{\sim}{\Lambda} \quad (f)$$

onde

$$\underset{\sim}{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 \end{bmatrix} \quad e \quad \underset{\sim}{\Lambda} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

No caso do exemplo em questão, o problema de autovalor referido na equação (f) fica:

$$\begin{bmatrix} 42 & 35 \\ 35 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo-o, obtêm-se

$$w_1 = 0,381$$

$$w_2 = 7,681$$

Os valores exatos das duas primeiras frequências do exemplo em questão são

$$w_1 = 0,384$$

$$w_2 = 2,444$$

Comparando os resultados obtidos, chega-se à conclusão que as funções  $\psi_1(x)$  e  $\psi_2(x)$  escolhidas representam bem apenas o primeiro modo de vibração da estrutura.

Se o sistema estrutural estiver submetido a um amortecimento viscoso, é possível escrever as forças generalizadas correspondentes a esse tipo de amortecimento da seguinte forma:

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) \quad (\text{II.3.24})$$

onde

$$c_{ij} = \int_0^L c(x) \psi_i(x) \psi_j(x) dx \quad \text{e} \quad c(x) \text{ de}$$

finido como um parâmetro de amortecimento, próprio da estrutura em questão.

Desse modo, as forças generalizadas do sistema estrutural passam a ser expressas da seguinte forma:

$$p_i(t) = \int_0^L p(x,t) \psi_i(x) dx - g_i(t) \quad \text{onde o 1º termo representa a}$$

ação do carregamento  $p(x,t)$  referente a  $i$ -ésima coordenada generalizada, e  $g_i(t)$  é definido por (II.3.24) e reproduz o amortecimento viscoso da estrutura segundo a esta mesma coordenada generalizada.

Diante do exposto, a equação (II.3.18) toma a seguinte forma:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) = \int_0^L p(x,t) \psi_i(x) dx - g_i(t) \quad (\text{II.3.25})$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$

Substituindo (II.3.24) em (II.3.25), obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) &= \int_0^L p(x,t) \psi_i(x) dx - \\ - \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) &\quad (\text{II.3.26}) \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j(t) + \sum_{j=1}^n k_{ij} q_j(t) &= \int_0^L p(x,t) \\ \psi_i(x) dx &\quad (\text{II.3.27}) \end{aligned}$$

para  $i = 1, 2, \dots, n$

Passando (II.3.27) para a forma matricial, obtém-se a expressão que traduz o movimento de um sistema estrutural amortecido submetido a um carregamento  $p(x,t)$ :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{\underline{V}}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{V}}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{V}} = \underline{\underline{P}} \quad (\text{II.3.28})$$

onde  $\underline{\underline{C}}$  é a matriz de amortecimento da estrutura dada por:

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ & & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (\text{II.3.29})$$

#### II.4) Discretização de Sistemas Contínuos Através do Método dos Elementos Finitos.

Até o momento, os campos de deslocamentos dos sistemas contínuos estão sendo aproximados sob a forma

$$V(x,t) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x) q_i(t)$$

onde a combinação linear das  $n$  funções  $\psi_i(x)$  descrevem a deformada da estrutura como um todo, a cada instante.

À medida que as estruturas vão ficando mais complexas, a escolha de  $\psi_i(x)$  vai se tornando cada vez mais difícil, chegando, até mesmo, a ser impossível para sistemas estruturais com uma geometria complicada.

Outra dificuldade seria a de automatizar esses tipos de cálculo através do computador, tendo em vista a variação de  $\psi_i(x)$  para cada nova geometria de estrutura.

Uma maneira de superar tais obstáculos é através do método dos elementos finitos.

Este método consiste em exprimir a deformada de toda a estrutura em termos de deslocamentos de alguns de seus pontos. Com este objetivo, a estrutura é assumida como sendo dividida em um determinado número de elementos discretos (elementos finitos), os quais são interconectados somente por um número finito de pontos, os chamados nodais, cujos deslocamentos representam as coordenadas generalizadas da estrutura. No caso da figura II.4 a viga foi dividida em 4 elementos finitos, cada um com dois pontos nodais, perfazendo um total de 5 nós. A deformada da estrutura pode, então, ser expressa através de (II.1.2), em termos das coordenadas supracitadas  $q_i(t)$  e de um grupo de deformadas padrão  $\psi_i(x)$ . Neste caso estas são chamadas funções de interpolação, porque definem a deformada de cada parte da estrutura compreendida, no caso, entre dois nós.

No exemplo da figura II.4(b) e (c) são mostradas as funções de interpolação associadas a dois graus de liberdade do nó 3: deslocamento vertical e rotação, respectivamente. Estas funções podem ser quaisquer, desde que sejam contínuas, tenham suas primeiras derivadas contínuas e que satisfaçam às condições geométricas de contorno.

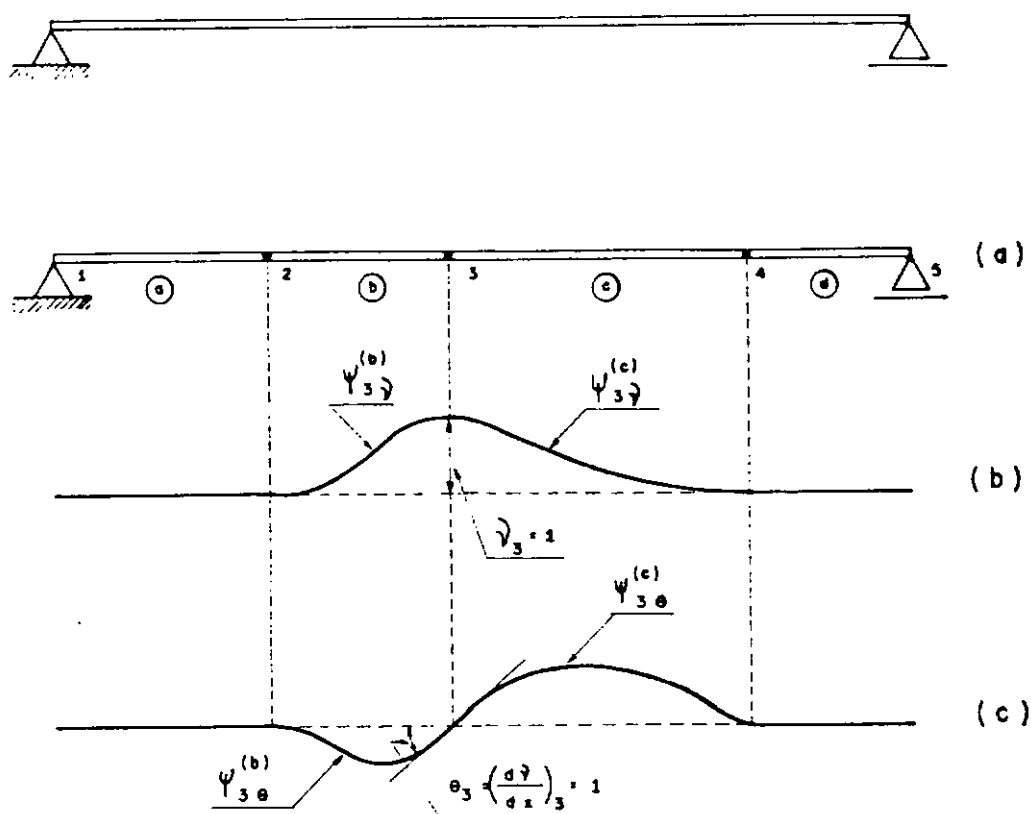


FIGURA II.4

# VIGA BI-APOIADA DISCRETIZADA EM ELEMENTOS FINITOS

(FIGURA RETIRADA DA REFERÊNCIA 11)

Diante do exposto, pode-se então concluir que as coordenadas usadas no método dos elementos finitos são uma forma especial de coordenadas generalizadas, e que as funções de interpolação deste método, nada mais são, do que as deformadas padrão  $\psi_i(x)$ , mencionadas nos itens anteriores deste capítulo, com as seguintes características:

- representam deslocamentos, não mais de toda a estrutura, e sim de uma parte da mesma - de um elemento finito;
- são compatíveis com os deslocamentos nodais do elemento em questão.

Escolhidas as coordenadas generalizadas e as funções de interpolação de cada elemento finito, pode-se então escrever

$$v_e(x,t) = \sum_{i=1}^n \psi_{ie}(x) q_{ie}(t)$$

$$e = 1, 2, \dots, N$$

Onde  $e$  representa o elemento finito em questão e  $N$  o número total de elementos em que a estrutura foi dividida.

Seguindo o mesmo raciocínio do item II.3 deste capítulo, pode-se obter por (II.3.10), (II.3.11) e (II.3.20) as matrizes de massa  $\underline{m}_e$ , de rigidez  $\underline{k}_e$  e vetor de carga  $\underline{p}_e$  respectivamente de cada elemento finito da estrutura. Fazendo uso de um dos processos descritos na referência (8), é possível montar as matrizes de massa  $\underline{M}$ , de rigidez  $\underline{K}$  e o vetor de carga  $\underline{P}$  da estrutura como um todo, a partir da superposição adequada de  $\underline{m}_e$ ,  $\underline{k}_e$  e  $\underline{p}_e$  de cada um de seus elementos ( $e=1, 2, \dots, N$ ). Como, na maior parte das vezes, as características de amortecimento de um elemento  $e$  ( $\underline{c}_e$ ) são de difícil determinação, a matriz de amortecimento da estrutura como um todo é obtida através de combinações dos termos de  $\underline{M}$  e  $\underline{K}$ .

Diante do exposto, a equação (II.3.28) fica completamente determinada.

### Capítulo - III

#### SUBESTRUTURAÇÃO E REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE EM ANÁLISE DINÂMICA.

##### III.1) Equacionamento Básico

No capítulo anterior, foi comentado o uso do método dos elementos finitos na discretização de estruturas solicitadas dinamicamente. Este método viabilizou a automação desses tipos de cálculo, através do uso do computador, fazendo com que a análise de estruturas mais arrojadas tornasse possível de ser executada.

À medida que as estruturas vão ficando mais complexas, a sua discretização em elementos finitos vai gerando, cada vez mais, um número maior de graus de liberdade, podendo chegar ao caso de ser impraticável a sua análise dinâmica, baseada nas equações de movimento do sistema estrutural como um todo.

Outro grande obstáculo a ser enfrentado no projeto de estruturas mais complexas (caso de estruturas aeronáuticas), é que, normalmente, suas partes são projetadas e produzidas por organizações diferentes. Este fato dificulta a montagem de um modelo em elementos finitos, para toda a estrutura, de uma maneira oportuna.

Por estas e por outras razões, já mencionadas no primeiro capítulo deste trabalho, foram desenvolvidos métodos que permitem, para a maioria dos casos de carregamento, a divisão da estrutura em subestruturas, a fim de realisar suas análises individuais. Foram também desenvolvidas técnicas de síntese modal, a nível de subestrutura, objetivando uma redução do sistema de equações, no caso da estrutura ser analisada como um todo.

No presente trabalho, só serão abordadas as técnicas sugeridas por Guyan e Craig & Bampton, devido às suas simplicidades, bons resultados e facilidades de implementação numérica.

Com o objetivo de facilitar a compreensão do processo de subestruturação com redução de graus de liberdade, será desenvolvida a sua teoria baseada num exemplo de modelo estrutural não amortecido, submetido a vibrações livres e que seja dividido apenas em duas subestruturas.

SUBESTRUTURA  $\alpha$

SUBESTRUTURA  $\beta$

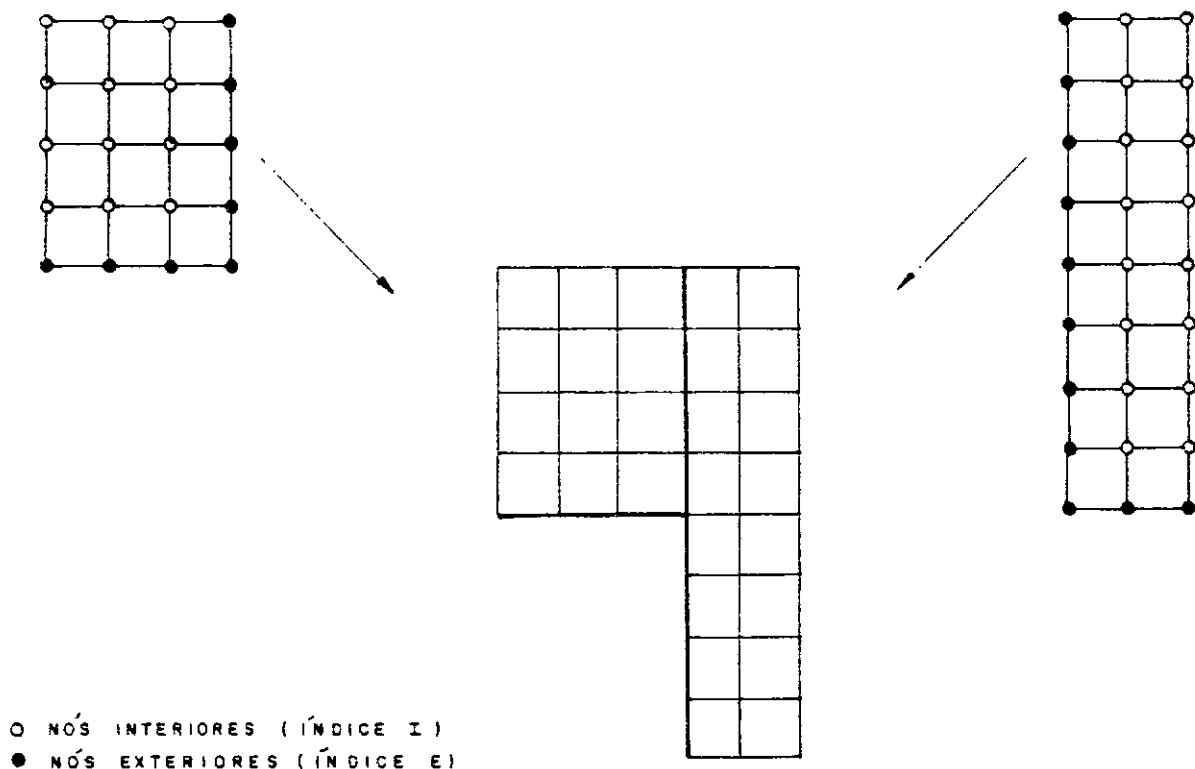


FIGURA III.1

SISTEMA ESTRUTURAL FORMADO A PARTIR DE DUAS SUBESTRUTURAS

Seja a estrutura da figura III.1. Podem-se distinguir dois tipos de pontos nodais para cada subestrutura: os interiores e os exteriores. Denomina-se nó interior aquele que não se liga diretamente a nenhuma outra subestrutura e nem a condições geométricas de contorno da estrutura como um todo. Nó exterior é aquele que faz parte do sistema estrutural de uma determinada subestrutura, mas que não atende às condições anteriores.

Diante do exposto, tendo-se como base a discretização de sistemas estruturais pelo método dos elementos finitos, pode-se, então, escrever para cada subestrutura, a equação (II.3.19), agrupando em submatrizes os graus de liberdade (coord. generalizadas) relativos a nós de mesmo tipo:

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_{II} & \tilde{M}_{IE} \\ \tilde{M}_{IE}^T & \tilde{M}_{EE} \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} \ddot{\tilde{V}}_I \\ \ddot{\tilde{V}}_E \end{bmatrix}_s + \begin{bmatrix} \tilde{K}_{II} & \tilde{K}_{IE} \\ \tilde{K}_{IE}^T & \tilde{K}_{EE} \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} \tilde{V}_I \\ \tilde{V}_E \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} \tilde{P}_I \\ \tilde{P}_E \end{bmatrix}_s \quad (III.1.1)$$

$s = \alpha, \beta$

O índice I representa os graus de liberdade interiores, o E , os de fronteira (exteriores) e o s, a que subestrutura a equação está referida.

Com o objetivo de se reduzir as ordens das matrizes de massa e de rigidez da equação (III.1.1) ou seja, a nível de cada subestrutura, as técnicas de Guyan e de Craig & Bampton podem ser postas com a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_s &= A_s \tilde{B}_s \\ s &= \alpha, \beta \end{aligned} \quad (III.1.2)$$

sendo  $A_s$  a matriz de mudança de coordenadas da subestrutura s e  $\tilde{B}_s$  o vetor de suas novas coordenadas, as generalizadas.

### III.2) Transformação de Coordenadas Segundo Craig & Bampton. (2 e 6)

De acordo com Craig & Bampton, a matriz  $A_s$  da equação (III.1.2) é definida da seguinte forma:

$$A_s = \begin{bmatrix} [\Phi]_{II} & [H]_{IE} \\ [O]_{EI} & [Ident]_{EE} \end{bmatrix}_s \quad (III.2.1)$$

onde  $[\text{Ident}]_{EE_s}$  é a matriz identidade,  $[\Phi]_{II_s}$  é a matriz dos autovetores da subestrutura em questão, (considerando os nós exteriores fixados) definida por (III.2.2), e  $[H]_{IE_s}$  a dos seus modos de restrição.

$$[\Phi]_{II_s} = \left[ \{\Phi\}_{gli,1} \quad \{\Phi\}_{gli,2} \quad \cdots \quad \{\Phi\}_{gli,gli} \right]_s \quad (\text{III.2.2})$$

$gli = n^\circ$  de graus de liberdade interiores da subestrutura  $s$ .

Os autovetores da subestrutura  $s$  são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\left[ \tilde{K}_{II} - \tilde{\Lambda}_{II} \quad \tilde{M}_{II} \right]_s [\Phi]_{II_s} = 0 \quad (\text{III.2.3})$$

sendo  $\tilde{K}_{II_s}$  e  $\tilde{M}_{II_s}$  as matrizes de rigidez e massa da subestrutura  $s$ , relativas, apenas, aos seus graus de liberdade interiores.  $\tilde{\Lambda}_{II_s}$  é a matriz diagonal dos autovalores da subestrutura  $s$ , assim definida:

$$\tilde{\Lambda}_{II_s} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_{gli}^2 \end{bmatrix}_{II_s} \quad (\text{III.2.3})$$

$gli = n^\circ$  de graus de liberdade interiores da subestrutura  $s$

A matriz dos autovetores, ou dos modos normais de vibração definida por (III.2.2) e obtida por (III.2.3), normalizada em relação a matriz de massa, permite escrever:

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \end{bmatrix}_{II_S} \tilde{M}_{II_S} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}_{II_S} = \begin{bmatrix} \text{Ident} \end{bmatrix}_{II_S} \quad (III.2.4)$$

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \end{bmatrix}_{II_S} \tilde{K}_{II_S} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}_{II_S} = \Delta_{II_S} \quad (III.2.5)$$

Os modos de restrição da subestrutura em questão são definidos como sendo as deformadas estáticas dos graus de liberdade interiores do subsistema, devido ao deslocamento unitário de cada um de seus graus de liberdade exteriores, mantendo os restantes fixos. Podem ser obtidos, portanto, como respostas a deslocamentos unitários, na fronteira, sem forças restritivas nos nós interiores. Assim:

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}_{II} & \tilde{K}_{IE} \\ \tilde{K}_{IE}^T & \tilde{K}_{EE} \end{bmatrix}_S \begin{bmatrix} \tilde{V}_I \\ \tilde{V}_E \end{bmatrix}_S = \begin{bmatrix} Q \\ \tilde{P}_E \end{bmatrix}_S \quad (III.2.6)$$

Fazendo a multiplicação da primeira linha, tem-se:

$$\tilde{K}_{II_S} \tilde{V}_I + \tilde{K}_{IE_S} \tilde{V}_E = Q \quad (III.2.7)$$

Ou ainda:

$$\underline{V}_{I_S} = -\underline{K}_{II_S}^{-1} \underline{K}_{IE_S} \underline{V}_{E_S} \quad (\text{III.2.8})$$

Pela própria definição, para cada modo de restrição, tem-se um deslocamento unitário na direção de um grau de liberdade exterior, permanecendo os demais nós de fronteira indeslocáveis (vide fig. III.3). Desse modo, obtém-se por (III.2.8) um vetor  $\underline{V}_{I_S}$  para cada vetor  $\underline{V}_{E_S}$ ; ou seja, um modo de restrição da subestrutura para cada  $\underline{V}_{E_S}$ .

$$\left\langle \underline{V}_{E_S} \right\rangle_{mr=1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_s \quad (\text{III.2.9.a})$$

$$\left\langle \underline{V}_{E_S} \right\rangle_{mr=2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_s \quad (\text{III.2.9.b})$$

$$\left\langle \underline{V}_{E_S} \right\rangle_{mr=gle} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_s \quad (\text{III.2.9.c})$$

mr = nº do modo de restrição

gle = nº de graus de liberdade exteriores da subestrutura em questão.

$$\left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr} = - \tilde{K}_{II_S}^{-1} K_{IE_S} \left\{ \begin{bmatrix} V_E \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr} \quad (\text{III.2.10})$$

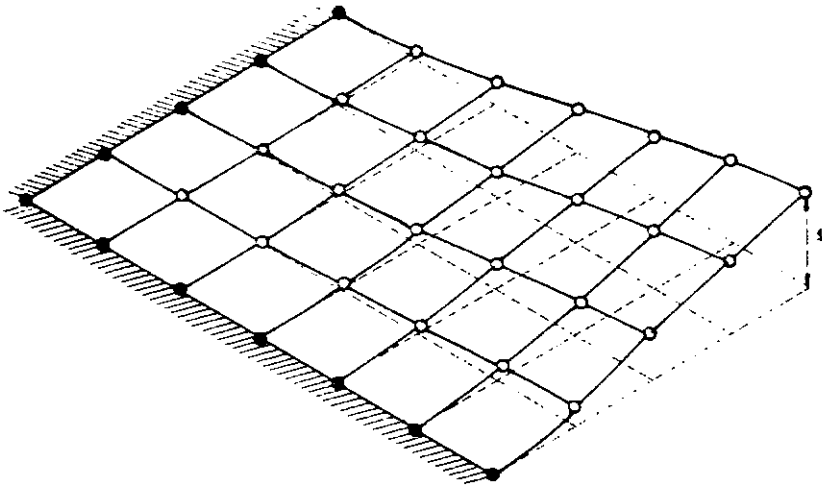
para  $mr = 1, 2, \dots, gle$

Reunido os vetores  $\left\{ \begin{bmatrix} V_E \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr}$  e  $\left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr}$  em matrizes distintas, obtêm-se (III.2.10) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=1} & \left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=2} & \dots & \left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=gle} \end{bmatrix} = - \tilde{K}_{II_S}^{-1} K_{IE_S} \begin{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} V_E \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=1} \\ \left\{ \begin{bmatrix} V_E \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=2} & \dots & \left\{ \begin{bmatrix} V_E \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=gle} \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.11})$$

Substituindo (III.2.9) em (III.2.11), chega-se a :

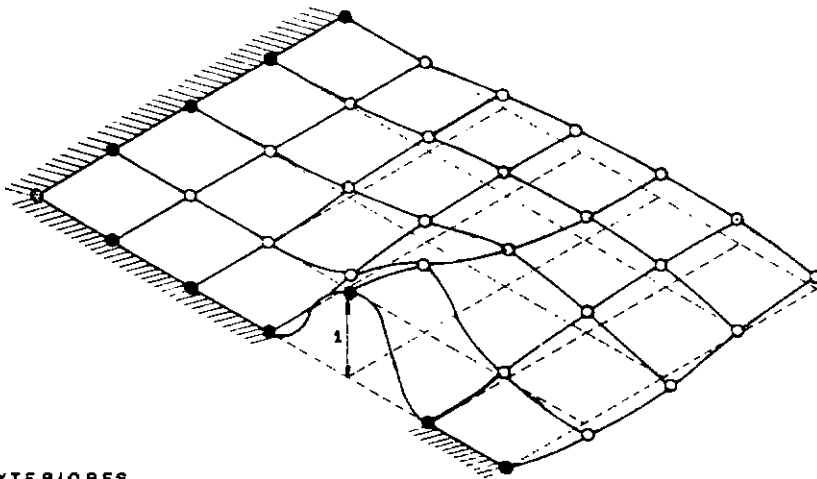
$$\begin{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=1} & \left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=2} & \dots & \left\{ \begin{bmatrix} V_I \\ S \end{bmatrix} \right\}_{mr=gle} \end{bmatrix} = - \tilde{K}_{II_S}^{-1} K_{IE_S} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.2.12})$$



● NÓS EXTERIORES  
○ NÓS INTERIORES

FIGURA III. 2  
UM MODO NORMAL DE VIBRAÇÃO DE UMA DETERMINADA SUBESTRUTURA

(FIGURA COPIADA DA REFERÊNCIA 6)



● NÓS EXTERIORES  
○ NÓS INTERIORES

FIGURA III. 3  
UM MODO DE RESTRIÇÃO DE UMA DETERMINADA SUBESTRUTURA

(FIGURA COPIADA DA REFERÊNCIA 6)

Observando-se (III.2.12), conclui-se que a terceira matriz do segundo membro é uma matriz identidade e, portanto, pode ser retirada do produto. Dessa forma, chega-se à expressão dos modos de restrição da subestrutura  $s$ , assim definida :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{IE_s} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}_s \end{bmatrix}_{mr=1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}_s \end{bmatrix}_{mr=2} \dots \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}_s \end{bmatrix}_{mr=gle} = \\ &= - \tilde{K}_{II_s}^{-1} \tilde{K}_{IE_s} \end{aligned} \quad (III.2.13)$$

As figuras III.2 e III.3 dão uma melhor visão do que sejam modos normais de vibração e de restrição de uma subestrutura.

Diante do exposto, a transformação de coordenadas dada por (III.1.2) pode assim ser escrita:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V \\ \tilde{V} \end{bmatrix}_s &= \begin{bmatrix} V_I \\ V_E \end{bmatrix}_s = \tilde{A}_s \tilde{B}_s = \tilde{A}_s \begin{bmatrix} B_I \\ B_E \end{bmatrix}_s \end{aligned} \quad (III.2.14)$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_I \\ V_E \end{bmatrix}_s &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}_{II} & \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{IE} \\ \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}_{EI} & \begin{bmatrix} Ident \end{bmatrix}_{EE} \end{bmatrix}_s \begin{bmatrix} B_I \\ B_E \end{bmatrix}_s \end{aligned} \quad (III.2.15)$$

Por (III.2.15), obtém-se:

$$\underline{V}_{I_S} = \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}_{II_S} \underline{B}_{I_S} + \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{IE_S} \underline{B}_{E_S} \quad (\text{III.2.16})$$

e

$$\underline{V}_{E_S} = \underline{B}_{E_S} \quad (\text{III.2.17})$$

As matrizes de massa e de rigidez nas novas coordenadas são dadas por:

$$\underline{\bar{M}}_S = \underline{A}_S^T \underline{M}_S \underline{A}_S = \begin{bmatrix} \underline{\bar{M}}_{II} & \underline{\bar{M}}_{IE} \\ \underline{\bar{M}}_{EI} & \underline{\bar{M}}_{EE} \end{bmatrix}_S \quad (\text{III.2.18})$$

e

$$\underline{\bar{K}}_S = \underline{A}_S^T \underline{K}_S \underline{A}_S = \begin{bmatrix} \underline{\bar{K}}_{II} & Q \\ Q & \underline{\bar{K}}_{EE} \end{bmatrix}_S \quad (\text{III.2.19})$$

Onde as submatrizes  $\underline{\bar{M}}_{II_S}$  e  $\underline{\bar{K}}_{II_S}$  são obviamente diagonais, e da das por (III.2.4) e (III.2.5). Quanto às restantes são obti - das por:

$$\underline{\bar{M}}_{EE_S} = \underline{M}_{EE_S} + \underline{M}_{EI_S} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{IE_S} + \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{IE_S}^T (\underline{M}_{II_S} \begin{bmatrix} H \end{bmatrix}_{IE_S} + \underline{M}_{IE_S}) \quad (\text{III.2.20})$$

$$\bar{\tilde{K}}_{EE_S} = \tilde{K}_{EE_S} + \tilde{K}_{EI_S} [H]_{IE_S} \quad (\text{III.2.21})$$

$$\bar{\tilde{M}}_{IE_S} = \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}_{II_S}^T \left( \tilde{M}_{II_S} [H]_{IE_S} + \tilde{M}_{IE_S} \right) \quad (\text{III.2.22})$$

Na concepção de subestruturação até aqui desenvolvida, nenhuma aproximação foi introduzida, relativamente à redução de graus de liberdade. Pretendendo-se, no entanto, atingir tal objetivo, a matriz de transformação de coordenadas, dada por (III.2.1), deve ser montada com apenas alguns dos primeiros modos normais de vibração da subestrutura em questão. Este fato implicará na redução das ordens das matrizes de massa e de rigidez da subestrutura, quando referidas às novas coordenadas.

### III.3) Transformação de Coordenadas Segundo Guyan (12)

De acordo com Guyan, a matriz  $\underline{A}_S$  da equação (III.1.2) é definida da seguinte forma:

$$\underline{A}_S = \begin{bmatrix} [H]_{IE} \\ [\text{Ident}]_{EE} \end{bmatrix}_S \quad (\text{III.3.1})$$

onde  $[\text{Ident}]_{EE_S}$  é a matriz identidade e  $[H]_{IE_S}$  a dos modos de restrição da subestrutura  $s$ , já definida em (III.2.13).

Diante do exposto, pode-se concluir que a matriz de mudança de coordenadas sugerida por Guyan, é um caso particular da proposta por Craig & Bampton, sem levar em consideração os modos normais de vibração das subestruturas. Desse modo, ao se aplicar a transformação de coordenadas proposta por Guyan, sempre serão reduzidos todos os graus de liberdades interiores, não havendo, portanto, a possibilidade de se optar pela redução de apenas alguns deles, como é possível na transformação de coordenadas sugerida por Craig & Bampton.

Assim, as expressões (III.2.18) e (III.2.19) tomam, respectivamente, as seguintes formas:

$$\bar{\underline{M}}_S = \underline{A}_S^T \underline{M}_S \underline{A}_S = \bar{\underline{M}}_{EE_S} \quad (\text{III.3.2})$$

$$\bar{\underline{K}}_S = \underline{A}_S^T \underline{K}_S \underline{A}_S = \bar{\underline{K}}_{EE_S} \quad (\text{III.3.3})$$

onde,

$$\begin{aligned} \bar{\underline{M}}_{EE_S} &= [\underline{H}]_{IE_S}^T \underline{M}_{II_S} [\underline{H}]_{IE_S} + \underline{M}_{IE_S}^T [\underline{H}]_{IE_S} + [\underline{H}]_{IE_S}^T \underline{M}_{IE_S} \\ &+ \underline{M}_{EE_S} \end{aligned} \quad (\text{III.3.4})$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\underline{K}}_{EE_S} &= [\underline{H}]_{IE_S}^T \underline{K}_{II_S} [\underline{H}]_{IE_S} + \underline{K}_{IE_S}^T [\underline{H}]_{IE_S} + [\underline{H}]_{IE_S}^T \underline{K}_{IE_S} \\ &+ \underline{K}_{EE_S} \end{aligned} \quad (\text{III.3.5})$$

É importante notar que o significado físico das coordenadas generalizadas referentes aos graus de liberdade exteriores é mantido tanto na condensação sugerida por Craig & Bampton, quanto na de Guyan, e o seu número não é reduzido. Isto pode constituir uma limitação, no caso de subestruturas com um grande número de nós de conexão (exteriores).

#### III.4) Equações de Movimento Utilizando Subestruturação

Voltando ao exemplo da fig. III.1, os deslocamentos na interface das duas subestruturas têm que ser iguais, portanto (10):

$$\tilde{V}_{E_{\alpha}} = \tilde{V}_{E_{\theta}} \quad (\text{III.4.1})$$

E as forças geradas na mesma região são relacionadas pela seguinte expressão:

$$\tilde{P}_{E_{\alpha}} + P_{E_{\theta}} = 0 \quad (\text{III.4.2})$$

As Energias Cinética e Potencial da estrutura são obtidas pela soma das correspondentes de cada subestrutura. Desse modo, por (II.3.7), (II.3.8) e (III.1.2) pode-se escrever:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\tilde{B}}^T \tilde{M} \dot{\tilde{B}} = \frac{1}{2} \dot{\tilde{B}}_{\alpha}^T \tilde{M}_{\alpha} \dot{\tilde{B}}_{\alpha} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{B}}_{\theta}^T \tilde{M}_{\theta} \dot{\tilde{B}}_{\theta} \quad (\text{III.4.3.})$$

$$U = \frac{1}{2} \tilde{B}^T \tilde{K} \tilde{B} = \frac{1}{2} \tilde{B}_{\alpha}^T \tilde{K}_{\alpha} \tilde{B}_{\alpha} + \frac{1}{2} \tilde{B}_{\theta}^T \tilde{K}_{\theta} \tilde{B}_{\theta} \quad (\text{III.4.4})$$

onde

$$\tilde{M}_{\alpha} = A_{\alpha}^T M_{\alpha} A_{\alpha} \quad (\text{III.4.5})$$

$$\bar{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{e}}}^T \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{e}}} \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{e}}} \quad (\text{III.4.6})$$

$$\bar{\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} = \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{\alpha}}}^T \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{\alpha}}} \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{\alpha}}} \quad (\text{III.4.7})$$

$$\bar{\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{e}}} = \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{e}}}^T \underline{\underline{K}}_{\underline{\underline{e}}} \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{e}}} \quad (\text{III.4.8})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{e}}} &= \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{\alpha}}} \\ \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{e}}} \end{bmatrix} \quad \dot{\underline{\underline{B}}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} \\ \dot{\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{e}}} \end{bmatrix} \quad \text{onde } \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{\alpha}}} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1g} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{\alpha}}} \quad \underline{\underline{B}}_{\underline{\underline{e}}} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ \vdots \\ B_{1g} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{e}}} \quad \dot{\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} = \begin{bmatrix} \dot{B}_{11} \\ \dot{B}_{12} \\ \vdots \\ \dot{B}_{1g} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{\alpha}}} \\ \dot{\underline{\underline{B}}}_{\underline{\underline{e}}} &= \begin{bmatrix} \dot{B}_{11} \\ \dot{B}_{12} \\ \vdots \\ \dot{B}_{1g} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{e}}} \end{aligned} \quad (\text{III.4.9})$$

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{e}}} &= \begin{bmatrix} \bar{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} & \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}} & \bar{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{e}}} \end{bmatrix} \quad \text{onde } \bar{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \dots & \bar{M}_{1g} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \dots & \bar{M}_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{M}_{g1} & \bar{M}_{g2} & \dots & \bar{M}_{gg} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{\alpha}}} \quad \text{e} \\ \bar{\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{e}}} &= \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \dots & \bar{M}_{1g} \\ \bar{M}_{21} & \bar{M}_{22} & \dots & \bar{M}_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{M}_{g1} & \bar{M}_{g2} & \dots & \bar{M}_{gg} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{e}}} \end{aligned} \quad (\text{III.4.10})$$

$$\bar{\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{e}}} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} & \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}} & \bar{\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{e}}} \end{bmatrix} \quad \text{onde } \bar{\underline{\underline{K}}}_{\underline{\underline{\alpha}}} = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \dots & \bar{K}_{1g} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \dots & \bar{K}_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_{g1} & \bar{K}_{g2} & \dots & \bar{K}_{gg} \end{bmatrix}_{\underline{\underline{\alpha}}} \quad \text{e}$$

$$\tilde{K}_e = \begin{bmatrix} \bar{K}_{11} & \bar{K}_{12} & \dots & \bar{K}_{1g} \\ \bar{K}_{21} & \bar{K}_{22} & \dots & \bar{K}_{2g} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{K}_{g1} & \bar{K}_{g2} & \dots & \bar{K}_{gg} \end{bmatrix}_e \quad (\text{III.4.11})$$

$g = n^\circ$  de graus de liberdade da subestrutura após a transformação de coord.

Substituindo (III.2.1) em (III.12) e aplicando a transformação, recém obtida em (III.4.1), pode-se escrever a equação de restrição (III.4.1) em termos das coordenadas generalizadas  $\underline{B}$ .

$$[ [O]_{EI} \quad [Ident]_{EE} ]_\alpha \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_E \end{bmatrix}_\alpha = [ [O]_{EI} \quad [Ident]_{EE} ]_e \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_E \end{bmatrix}_e \quad (\text{III.4.12})$$

Ou ainda:

$$\underline{D} \cdot \underline{B} = \underline{Q} \quad (\text{III.4.13})$$

onde

$$\underline{D} = [ [O]_{EI_\alpha} \quad [Ident]_{EE_\alpha} \quad [O]_{EI_e} \quad -[Ident]_{EE_e} ] \quad (\text{III.4.14})$$

e  $\underline{B}$  é definido por (III.4.9), contendo

$$\underline{B}_\alpha = \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_E \end{bmatrix}_\alpha \quad \text{e} \quad \underline{B}_e = \begin{bmatrix} \underline{B}_I \\ \underline{B}_E \end{bmatrix}_e$$

O Lagrangeano da estrutura como um todo pode assim ser definido:

$$L = T - U + \underline{Q}^T \underline{D} \underline{B} \quad (\text{III.4.15})$$

onde T e U são as Energias Cinética e Potencial da estrutura, obtidas por (III.4.3) e (III.4.4) respectivamente;  $\underline{Q}$  é o vetor dos multiplicadores de Lagrange,  $\underline{D}$  é a matriz definida por (III.4.14) e  $\underline{B}$  é o vetor deslocamento referido às novas coordenadas generalizadas.

Com base em (III.4.15) pode-se então, escrever o sistema de equações de movimento da estrutura, aplicando as equações de Lagrange, já definidas em (II.2.6):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{z}}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial \underline{z}_s} = \underline{P}_s \quad (\text{III.4.16})$$

onde  $\underline{z}_s$  pode ser  $\underline{B}_s$  ou  $\underline{Q}_s$  e  $\underline{P}_s$  são as forças generalizadas.

No caso de vibrações livres, as únicas forças da estrutura são as geradas na interface das subestruturas, definidas em (III.4.2). O trabalho originado, por uma variação de deslocamento  $\delta$  nesta região, pode ser escrito como se segue:

$$\delta W = (\delta \underline{V}_{E_\alpha})^T \underline{P}_{E_\alpha} + (\delta \underline{V}_{E_e})^T \underline{P}_{E_e} \quad (\text{III.4.17})$$

Por (III.4.1) pode-se escrever (III.4.17) da seguinte forma:

$$\delta W = (\delta \underline{V}_{E_\alpha})^T (\underline{P}_{E_\alpha} + \underline{P}_{E_e}) \quad (\text{III.4.18})$$

Substituindo (III.4.2) em (III.4.18), tem-se

$$\delta W = 0$$

$$\text{como } \delta W = 0 \implies \underline{P}_S = \underline{0} \quad (\text{III.4.19})$$

Substituindo (III.4.3) e (III.4.4) em (III.4.15) e passando para notação indicial, tem-se:

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \bar{M}_{ij} \dot{B}_i \dot{B}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g \bar{K}_{ij} B_i B_j + \\ & + \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g D_{ij} \sigma_i B_j \end{aligned} \quad (\text{III.4.20})$$

Mas:

$$\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g D_{ij} \sigma_i B_j = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^g D_{ji} \sigma_j B_i \quad (\text{III.4.21})$$

Fazendo a substituição de (III.4.19), (III.4.20) e (III.4.21) em (III.4.16), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{B}} \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \bar{M}_{ij} (\dot{B}_j)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \bar{K}_{ij} (B_j)^2 + \sum_{j=1}^g D_{ij} \sigma_j B_i \right] \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial B} \left[ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \bar{M}_{ij} (\dot{B}_j)^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \bar{K}_{ij} (B_j)^2 + \sum_{j=1}^g D_{ji} \sigma_j B_i \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4.22})$$

$$i=1,2,\dots,g$$

ou ainda

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{j=1}^g \bar{M}_{ij} \dot{B}_j \right] + \sum_{j=1}^g \bar{K}_{ij} B_j - \sum_{j=1}^g D_{ji} \sigma_j = 0$$

$i = 1, 2, \dots, g$  (III.4.23)

Fazendo a derivada em relação ao tempo de (III.4.23), tem-se

$$\sum_{j=1}^g \bar{M}_{ij} \ddot{B}_j + \sum_{j=1}^g \bar{K}_{ij} B_j - \sum_{j=1}^g D_{ji} \sigma_j = 0$$

$i = 1, 2, \dots, g$  (III.4.24)

Escrevendo (III.4.24) na forma matricial, ob - têm-se:

$$\bar{M} \ddot{B} + \bar{K} B = D^T \sigma$$

(III.4.25)

que juntamente com (III.4.13) formam o sistema de equações de movimento da estrutura.

Por (III.4.12), tem-se:

$$\underline{B}_{E_e} = [\text{Ident}]_{EE_e}^{-1} \left\{ [0]_{EI_\alpha} \underline{B}_{I_\alpha} + [\text{Ident}]_{EE_\alpha} \underline{B}_{E_\alpha} - [0]_{EI_e} \underline{B}_{I_e} \right\}$$

ou

$$\underline{B}_{E_e} = 0 \underline{B}_{I_\alpha} + [\text{Ident}]_{EE_\alpha} \underline{B}_{E_\alpha} - 0 \underline{B}_{I_e}$$

onde  $\underline{B}_{E_e}$  está em função de  $\underline{B}_{I_\alpha}$ ,  $\underline{B}_{E_\alpha}$  e  $\underline{B}_{I_e}$ .

Usando esta última equação, é fácil obter a seguinte expressão para as coordenadas generalizadas  $\underline{B}$  :

$$\underline{B} \begin{bmatrix} \underline{B}_\alpha \\ \underline{B}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{I_\alpha} \\ \underline{B}_{E_\alpha} \\ \underline{B}_{I_e} \\ \underline{B}_{E_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\text{Ident}]_{II_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & [\text{Ident}]_{EE_e} & 0 \\ 0 & 0 & [\text{Ident}]_{II_e} \\ 0 & [\text{Ident}]_{EE_\alpha} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{B}_{I_\alpha} \\ \underline{B}_{E_\alpha} \\ \underline{B}_{I_e} \end{bmatrix}$$

(III.4.27)

ou ainda:

$$\underline{B} = \underline{S} \underline{R} \quad (\text{III.4.28})$$

onde

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} [\text{Ident}]_{II_\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & [\text{Ident}]_{EE_e} & 0 \\ 0 & 0 & [\text{Ident}]_{II_e} \\ 0 & [\text{Ident}]_{EE_\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

(III.4.29a)

e

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} \underline{B}_{I_\alpha} \\ \underline{B}_{E_\alpha} \\ \underline{B}_{I_e} \end{bmatrix}$$

(III.4.29b)

Por (III.4.29a) e (III.4.14), chega-se à conclusão que

$$\underline{\ddot{D}} \quad \underline{\ddot{S}} = \underline{\ddot{Q}} \quad (\text{III.4.30})$$

Derivando (III.4.28) duas vezes em relação ao tempo, obtém-se:

$$\underline{\ddot{B}} = \underline{\ddot{S}} \quad \underline{\ddot{R}} \quad (\text{III.4.31})$$

Substituindo (III.4.31) em (III.4.25), tem-se:

$$\underline{\ddot{M}} \quad \underline{\ddot{S}} \quad \underline{\ddot{R}} + \underline{\ddot{K}} \quad \underline{\ddot{S}} \quad \underline{\ddot{R}} = \underline{\ddot{D}}^T \underline{\ddot{Q}} \quad (\text{III.4.32})$$

Pré-multiplicando ambos os membros da equação acima por  $\underline{\ddot{S}}^T$ , obtém-se:

$$\underline{\ddot{S}}^T \underline{\ddot{M}} \underline{\ddot{S}} \underline{\ddot{R}} + \underline{\ddot{S}}^T \underline{\ddot{K}} \underline{\ddot{S}} \underline{\ddot{R}} = \underline{\ddot{S}}^T \underline{\ddot{D}}^T \underline{\ddot{Q}} \quad (\text{III.4.33})$$

ou ainda

$$\underline{\ddot{\overline{M}}} \underline{\ddot{R}} + \underline{\ddot{\overline{K}}} \underline{\ddot{R}} = \underline{\ddot{Q}} \quad (\text{III.4.34})$$

onde:

$$\underline{\ddot{\overline{M}}} = \underline{\ddot{S}}^T \underline{\ddot{M}} \underline{\ddot{S}} \quad (\text{III.4.35})$$

$$\underline{\ddot{\overline{K}}} = \underline{\ddot{S}}^T \underline{\ddot{K}} \underline{\ddot{S}} \quad (\text{III.4.36})$$

e

$$\underline{s}^T \underline{D}^T \underline{q} = (\underline{D} \underline{s})^T \underline{q} = 0 \text{ por (III.4.30)}$$

O sistema de equações (III.4.34) traduz o movimento da estrutura como um todo submetida a vibrações livres.

As expressões até aqui deduzidas permitem, portanto, que se combinem as vantagens do uso da subestruturação com as decorrentes de uma transformação de coordenadas, que possibilita uma redução substancial do número de graus de liberdade a considerar e, conseqüentemente, uma economia relevante de operações a serem efetuadas pelo computador.

## Capítulo IV

### ANÁLISE E COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

Com o objetivo de comparar a eficiência dos métodos de redução de graus de liberdade, ao nível de subestruturas, preconizados por Craig & Bampton e por Guyan, foram analisadas três estruturas tipo pórtico plano, através do programa automático, que se encontra em anexo. Para cada uma delas, foram calculadas as frequências e os modos de vibração, usando ou não, as técnicas supracitadas. Foi suposto como exatos os resultados obtidos sem o uso de subestruturação e serviram de base para o cálculo das acurácias dos dois métodos de condensação em estudo. O cálculo das frequências e dos modos de vibração das subestruturas ou da estrutura como um todo foi feito através da iteração por subespaços e do método de Jacobi.

1º Exemplo:

Seja a viga bi-engastada da fig.IV.1, a qual é constituída por 14 nós e 13 barras. Uma das maneiras de se reduzir seus graus de liberdade é dividi-la em três subestruturas e condensar os nós interiores das mesmas.

A fig. IV.2 mostra a viga em questão dividida em três subestruturas e a fig. IV.3, a mesma viga, após a redução dos nós interiores. Como a estrutura analisada é do tipo pórtico plano, pode-se notar pela fig. IV.2 uma redução de 9,12 e 9 graus de liberdade nas subestruturas 1, 2 e 3 respectivamente, no caso do método de Guyan ser aplicado. Empregando o método de Craig & Bampton, o número de graus de liberdade a ser reduzido é igual ao somatório dos nós interiores das diversas subestruturas multiplicado por três (pórtico plano) e subtraído do número total de modos de vibração, de todas as subestruturas, utilizados na montagem de suas respectivas matrizes de mudança de coordenadas. Desse modo, no caso de ser usado 4,6 e 4 modos de vibração na montagem das matrizes de mudança de coordenadas das subestruturas 1, 2 e 3 respectivamente (vide quadro 1), o número de graus de liberdade reduzidos é igual a  $(3 + 4 + 3) \times 3 - (4 + 6 + 4) = 16$ . No caso de ser usado 3,5 e 3 modos, o número total de graus de liberdade reduzidos é  $(3 + 4 + 3) \times 3 - (3 + 5 + 3) = 19$ .

O quadro 1 fornece os resultados das oito primeiras frequências da estrutura em questão. A primeira linha, de título "sem subestruturação", dá as frequências da viga calculada sem o uso de subestruturação. Esses resultados foram tomados como mais exatos e serviram de base para o cálculo das acurácias dos métodos de redução de graus de liberdade abordados neste trabalho.

Fazendo uma análise dos resultados, chega-se à conclusão que a redução de Craig & Bampton fornece melhores

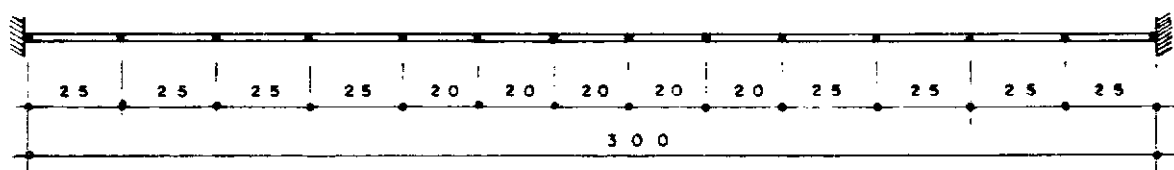
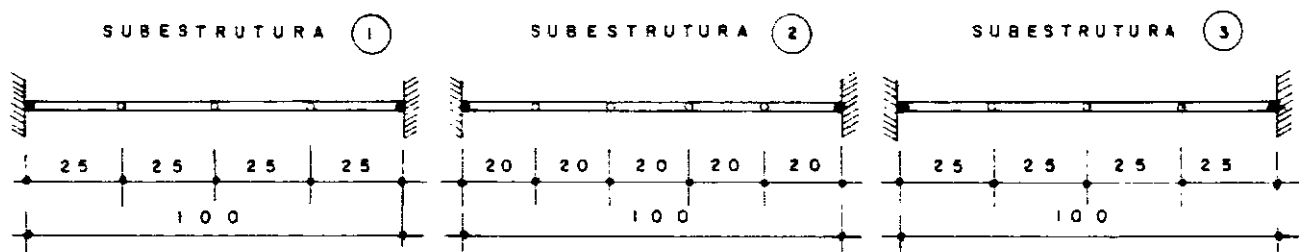


FIGURA IV.1 - VIGA BI-ENGASTADA CONSTITUÍDA POR 14 NÓS E 13 BARRAS.



◦ - NÓS INTERIORES  
• - NÓS EXTERIORES

FIGURA IV.2 - DIVISÃO DA VIGA DA FIGURA IV.1 EM TRÊS SUBESTRUTURAS.

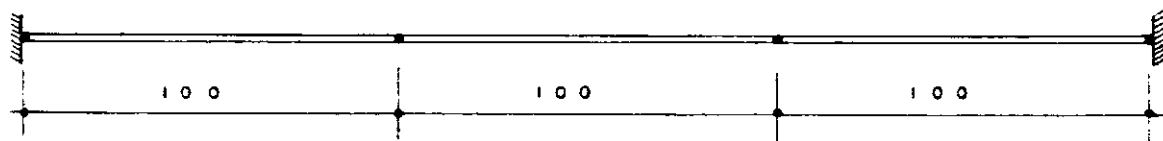


FIGURA IV.3 - VIGA DA FIGURA IV.1 APÓS REDUÇÃO DOS NÓS INTERIORES.

QUADRO I : COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS REFERENTES À ESTRUTURA  
DA FIGURA IV.1, USANDO OS MÉTODOS DE CRAIG & BAMPTON  
E DE GUYAN.

FREQÜÊNCIAS (HZ) MÉTODO DE REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
SEM SUBESTRUTU- RAÇÃO (EXATO)	Nº MODOS	135,45713	369,57846	713,37281	765,46267	1155,44343	1543,83377	1684,98720	2290,42892
	ACURÁCIA	—	—	—	—	—	—	—	—
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 4, 6, 4	135,45828	369,63225	713,48678	765,50479	1155,99605	1544,37409	1689,08319	2299,35312
	ACURÁCIA	0,0008 %	0,0146 %	0,0159 %	0,0055 %	0,0478 %	0,0350 %	0,2430 %	0,3896 %
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 3, 5, 3	135,45828	369,63225	713,48678	766,07006	1155,99605	1548,30049	1689,08319	2299,35312
	ACURÁCIA	0,0008 %	0,0146 %	0,0159 %	0,0793 %	0,0478 %	0,2893 %	0,2430 %	0,3896 %
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 1, 2, 1	135,46666	370,22733	714,47086	778,79298	1177,01957	—	—	—
	ACURÁCIA	0,0070 %	0,1756 %	0,1539 %	1,3495 %	1,8673 %	—	—	—
GUYAN	Nº MODOS * 0, 0, 0	136,00840	376,68275	859,92924	—	—	—	—	—
	ACURÁCIA	0,4070 %	1,9223 %	20,5442 %	—	—	—	—	—

\* - Nº DE MODOS DE VIBRAÇÃO (AUTOVETORES) USADOS NA MONTAGEM DA MATRIZ DE  
MUDANÇA DE COORDENADAS DE CADA SUBESTRUTURA.

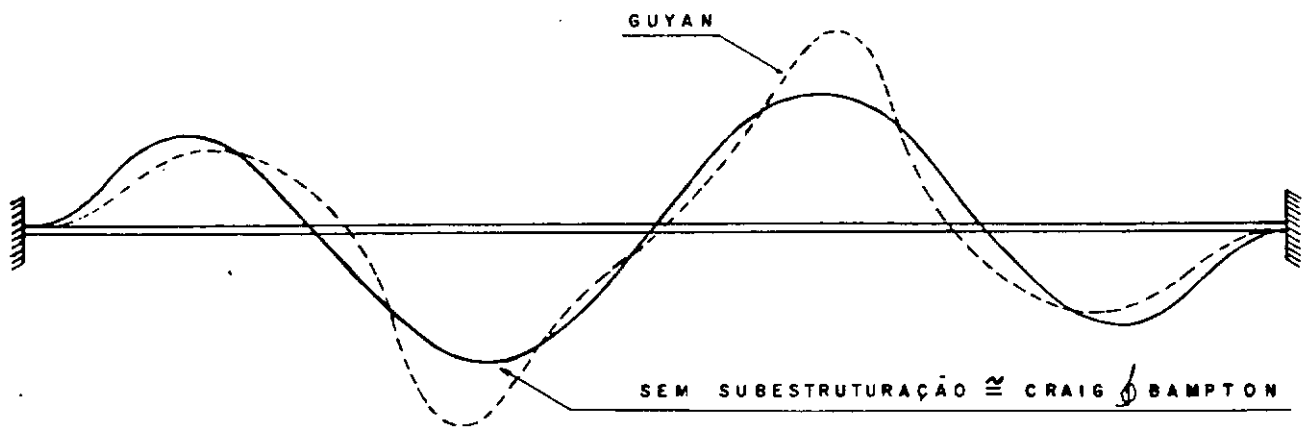


FIGURA IV-4 - COMPARAÇÃO DO TERCEIRO MODO DE VIBRAÇÃO (AXIAL) DA VIGA BI-ENGASTADA DO 1º EXEMPLO, OBTIDOS POR CRAIG & BAMPTON, GUYAN E SEM O USO DE SUBESTRUTURAÇÃO.

resultados que a redução de Guyan, e que aqueles são tão mais precisos quanto maior for o número de modos de vibração (auto vetores) usados na montagem da matriz de mudança de coordenadas de cada subestrutura.

Verifica-se que a redução de Guyan, apresenta uma discrepância de 20,54% na terceira frequência de vibração da estrutura. Fazendo uma comparação do terceiro modo de vibração calculado por Guyan, por Craig & Bampton e sem o uso de subestruturação, conclui-se que o método de Guyan, no caso deste exemplo, já fornece o terceiro modo um pouco distorcido em relação ao exato, não acontecendo o mesmo com o método de Craig & Bampton (vide fig. IV.4).

## 2º Exemplo:

A segunda estrutura analisada é constituída por um pórtico plano engastado na base. Com o objetivo de empregar os métodos de Craig & Bampton e de Guyan, a estrutura foi dividida em duas subestruturas. No caso da aplicação da técnica de Guyan, foram reduzidos 12 nós ( $12 \times 3 = 36$  graus de liberdade) da subestrutura 1 e 4 nós ( $4 \times 3 = 12$  graus de liberdade) da subestrutura 2 (vide fig. IV.6). Empregando o método preconizado por Craig & Bampton, como já foi explicado no exemplo anterior, o número de graus de liberdade a ser reduzido depende do número de modos de vibração de cada subestrutura, usados na montagem de suas respectivas matrizes de mudança de coordenadas. Sendo assim, de acordo com o quadro 2, quando são empregados 24 e 6 modos de vibração na montagem das matrizes de mudança de coordenadas das subestruturas 1 e 2 respectivamente, consegue-se uma redução de  $(12 + 4) \times 3 - (24 + 6) = 18$  graus de liberdade. No caso do uso de 15 e 6 modos, tem-se uma redução de  $(12 + 4) \times 3 - (15 + 6) = 27$  graus de liberdade. E relativamente ao último exemplo do quadro 2,

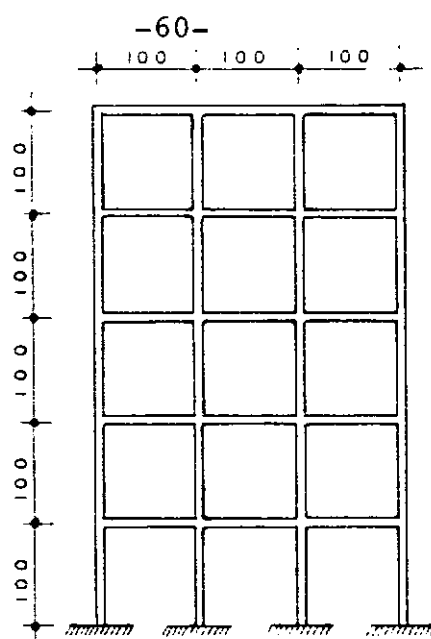


FIGURA IV.5 - PÓRTICO PLANO ENGASTADO NA BASE.

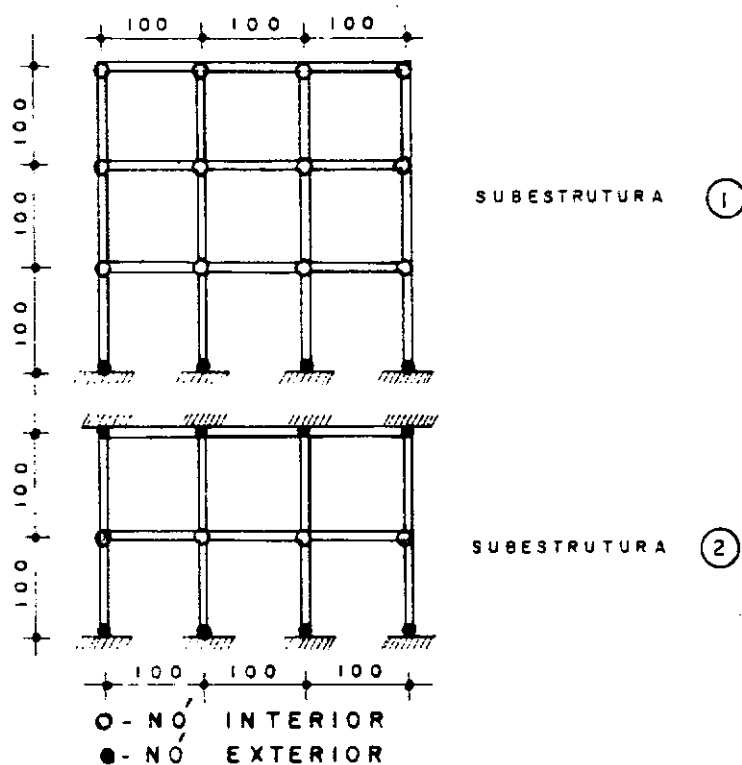


FIGURA IV.6 - DIVISÃO DO PÓRTICO DA FIGURA IV.5 EM DUAS SUBESTRUTURAS.

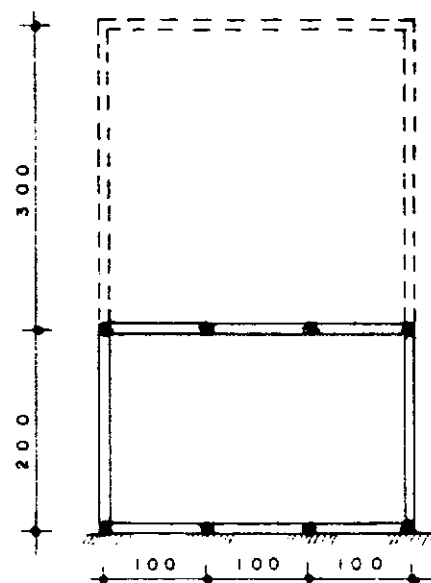


FIGURA IV.7 - PÓRTICO DA FIGURA IV.5 APOS A REDUÇÃO DOS NÓS INTERIORES.

QUADRO 2 : COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS REFERENTES À ESTRUTURA DA FIGURA IV-5, USANDO OS MÉTODOS DE CRAIG & BAMPTON E DE GUYAN.

FREQÜÊNCIAS (HZ) MÉTODO DE REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
SEM SUBESTRUTURAÇÃO	Nº MODOS	27,98284	88,16319	161,50469	163,75720	199,51557	241,48077	261,42811	307,59345
	ACURÁCIA	—	—	—	—	—	—	—	—
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 24,6	27,98287	88,16658	161,51394	163,76777	199,57869	241,50833	261,64659	307,75646
	ACURÁCIA	0,00011 %	0,00385 %	0,00573 %	0,00645 %	0,03164 %	0,01141 %	0,08357 %	0,05300 %
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 15,6	27,98288	88,16849	161,51491	163,77963	199,62142	241,54174	261,79671	307,82107
	ACURÁCIA	0,00014 %	0,00601 %	0,00633 %	0,01370 %	0,05305 %	0,02525 %	0,14099 %	0,07400 %
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 5,3	27,98289	88,17070	161,51873	164,21802	199,97035	241,55207	308,01110	329,27999
	ACURÁCIA	0,00018 %	0,00852 %	0,00869 %	0,28140 %	0,22794 %	0,02953 %	17,81866 %	7,05039 %
GUYAN	Nº MODOS * 0,0	28,370409	90,82397	168,23319	204,96484	275,08871	298,15901	362,87356	495,95698
	ACURÁCIA	1,38502 %	2,67774 %	4,16613 %	25,16386 %	37,87832 %	23,47112 %	38,80454 %	61,23782 %

\* - Nº DE MODOS DE VIBRAÇÃO (AUTOVETORES) USADOS NA MONTAGEM DA MATRIZ DE MUDANÇA DE COORDENADAS DE CADA SUBESTRUTURA.

quando se emprega 5 e 3 modos na mudança de coordenadas das subestruturas 1 e 2 respectivamente, consegue-se uma redução de  $(12 + 4) \times 3 - (5 + 3) = 40$  graus de liberdade. Foram calculadas também as frequências e os modos de vibração sem o uso de subestruturação (considerados como exatos), para análise da acurácia dos dois métodos em estudo.

Comparando os resultados, tidos como exatos, com os calculados pelos métodos de Guyan e Craig & Bampton, confirma-se, mais uma vez, a superioridade deste último em relação ao primeiro (vide quadro 2). Nota-se também, que a acurácia do método de Craig & Bampton melhora com o aumento do número de modos de vibração usados na montagem das matrizes de mudança de coordenadas das subestruturas.

### 3º Exemplo:

Este exemplo constitui-se de um pórtico engastado na base. Objetivando a redução de graus de liberdade, dividiu-se a estrutura em três subestruturas e reduziu-se os nós interiores de cada uma delas (vide fig. IV.8, IV.9 e IV.10).

O quadro 3 fornece os resultados obtidos usando as duas técnicas de redução de graus de liberdade, através da subestruturação, abordadas neste trabalho.

Fazendo uma análise comparativa, pode-se notar que o método de Guyan apresentou uma discrepância de 20,8% já na primeira frequência de vibração. Verifica-se também que o

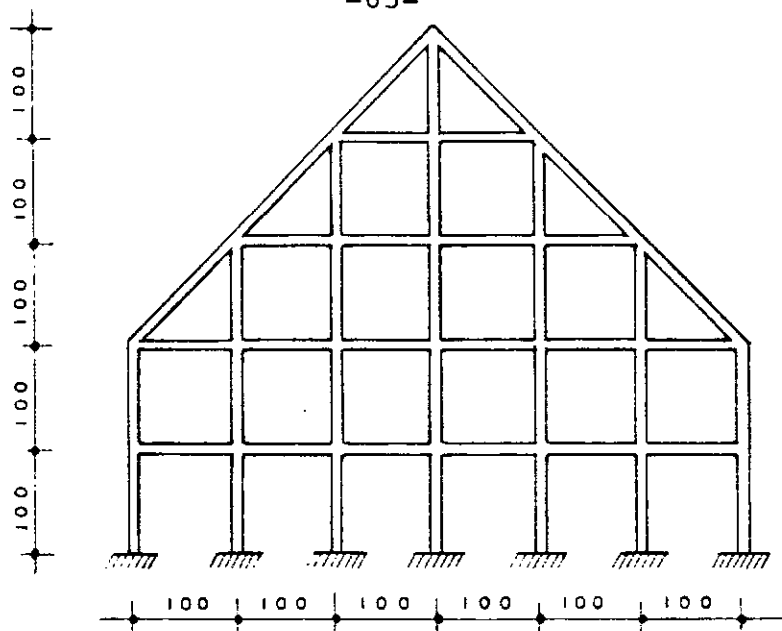
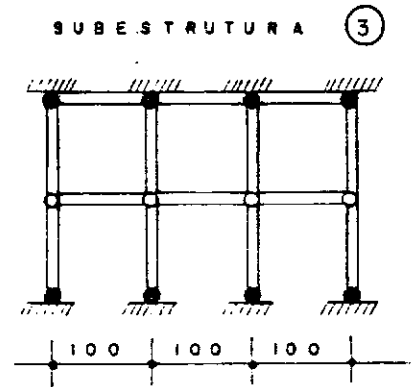
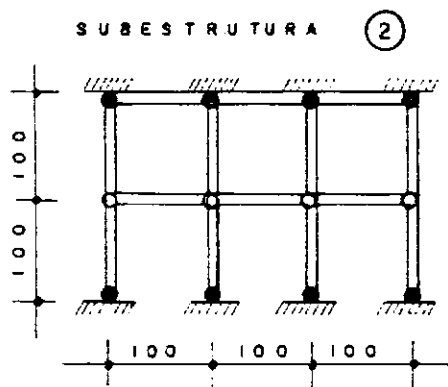
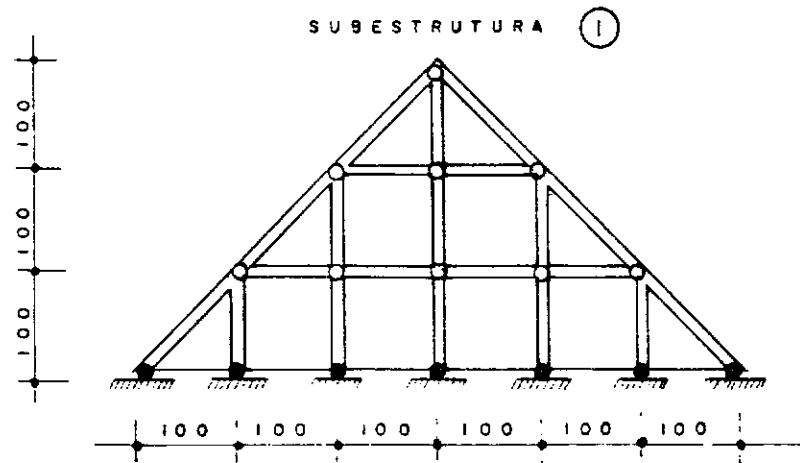


FIGURA IV-8 - PÓRTICO PLANO ENGASTADO NA BASE.



○ - NÓ INTERIOR

● - NÓ EXTERIOR

FIGURA IV-9 - DIVISÃO DO PÓRTICO DA FIGURA IV-8 EM TRÊS SUBESTRUTURAS.

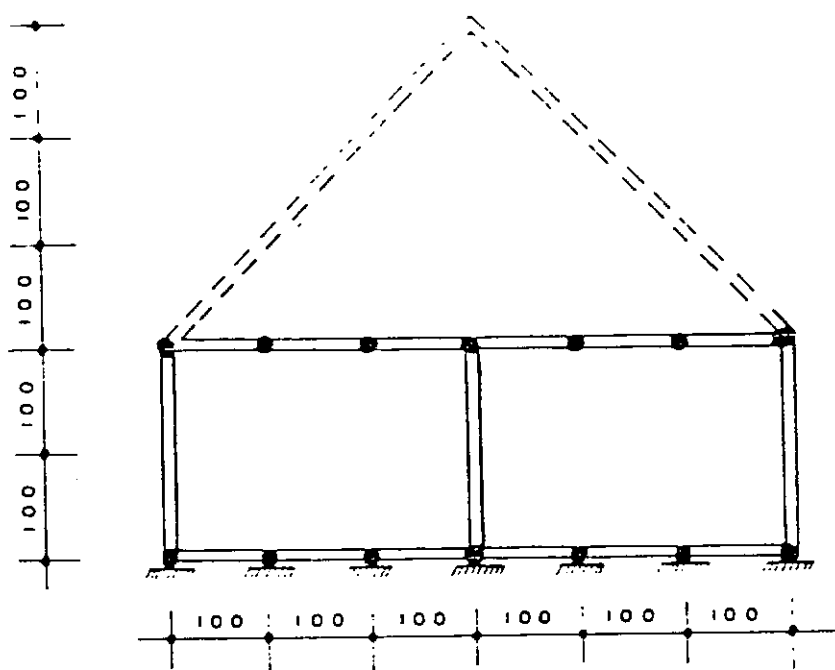


FIGURA IV-10 - PÓRTICO DA FIGURA IV-8 APÓS A  
REDUÇÃO DOS NÓS INTERIORES .

metodo de Craig & Bampton fornece resultados razoaveis, quando são usados 3,2 e 2 autovetores nas matrizes de mudança de coordenadas das subestruturas 1,2 e 3 respectivamente. O aumento do número de modos de vibração (autovetores) utilizados na montagem destas matrizes não contribui, neste caso, para a melhoria da precisão do método. Este comportamento deve-se ao fato de que os modos adicionais correspondentes ao aumento do número de autovetores usados na mudança de coordenadas das subestruturas, não contribuem para os primeiros modos de vibração da estrutura como um todo. Como nas suas determinações são feitas aproximações inerentes ao método e às operações em ponto flutuante, os resultados em vez de melhorarem, tendem a piorar.

QUADRO 3: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS REFERENTES À ESTRUTURA  
DA FIGURA IV-8 USANDO OS MÉTODOS DE CRAIG & BAMPTON  
E DE GUYAN.

FREQUÊNCIAS (HZ) MÉTODO DE REDUÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE		1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º
SEM SUBESTRUTU- RAÇÃO	Nº MODOS	41,86519	152,94306	184,76999	210,53232	219,96211	273,89791	301,46552	302,66423
	ACURÁCIA	—	—	—	—	—	—	—	—
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 15, 6, 6	41,57710	148,65574	188,32858	203,28498	204,81955	223,70085	280,02626	289,67104
	ACURÁCIA	0,6881 %	2,8032 %	1,9259 %	3,4423 %	6,8841 %	18,3269 %	7,1116 %	4,2929 %
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 9, 4, 4	41,57751	148,66859	188,46036	203,47779	204,87236	223,77390	280,99083	289,84713
	ACURÁCIA	0,6871 %	2,7948 %	1,9972 %	3,3508 %	6,8601 %	18,3002 %	6,79172 %	4,2347 %
CRAIG & BAMPTON	Nº MODOS * 3, 2, 2	41,58026	148,86007	189,70435	205,63033	214,68174	230,89369	298,27519	298,92149
	ACURÁCIA	0,6805 %	2,6696 %	2,6705 %	2,3283 %	2,4005 %	15,7008 %	1,0583 %	1,2366 %
GUYAN	Nº MODOS * 0, 0, 0	50,57464	213,29972	228,93858	256,06219	339,97972	356,91380	379,47645	466,23929
	ACURÁCIA	20,8035 %	39,4634 %	22,8222 %	21,6260 %	54,5628 %	30,3090 %	25,8772 %	54,0450 %

\* - Nº DE MODOS DE VIBRAÇÃO (AUTOVETORES) USADOS NA MONTAGEM DA MATRIZ DE  
MUDANÇA DE COORDENADAS DE CADA SUBESTRUTURA.

## Capítulo V

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

- 1) Entre outras, a principal razão da utilização da técnica de subestruturação em um programa automático decorrerá de um balanço entre os benefícios em tempo de computação nas análises que se pretende realizar e o esforço de programação que seja necessário para o conseguir.
- 2) A adequada aplicação do Método de Craig & Bampton conduz a um excelente modelo numérico de dimensões reduzidas, apropriado à determinação da resposta dinâmica de estruturas, no caso em que nesta resposta se tenha a participação apenas dos primeiros modos de vibração.
- 3) As primeiras frequências de vibração livre não amortecida de uma estrutura, calculadas adequadamente pelos métodos de Craig & Bampton e de Guyan, aproximam-se bastante dos valores exatos para a maioria das estruturas.
- 4) Os resultados obtidos pelo método de Craig & Bampton são mais precisos que os determinados pelo método de Guyan.

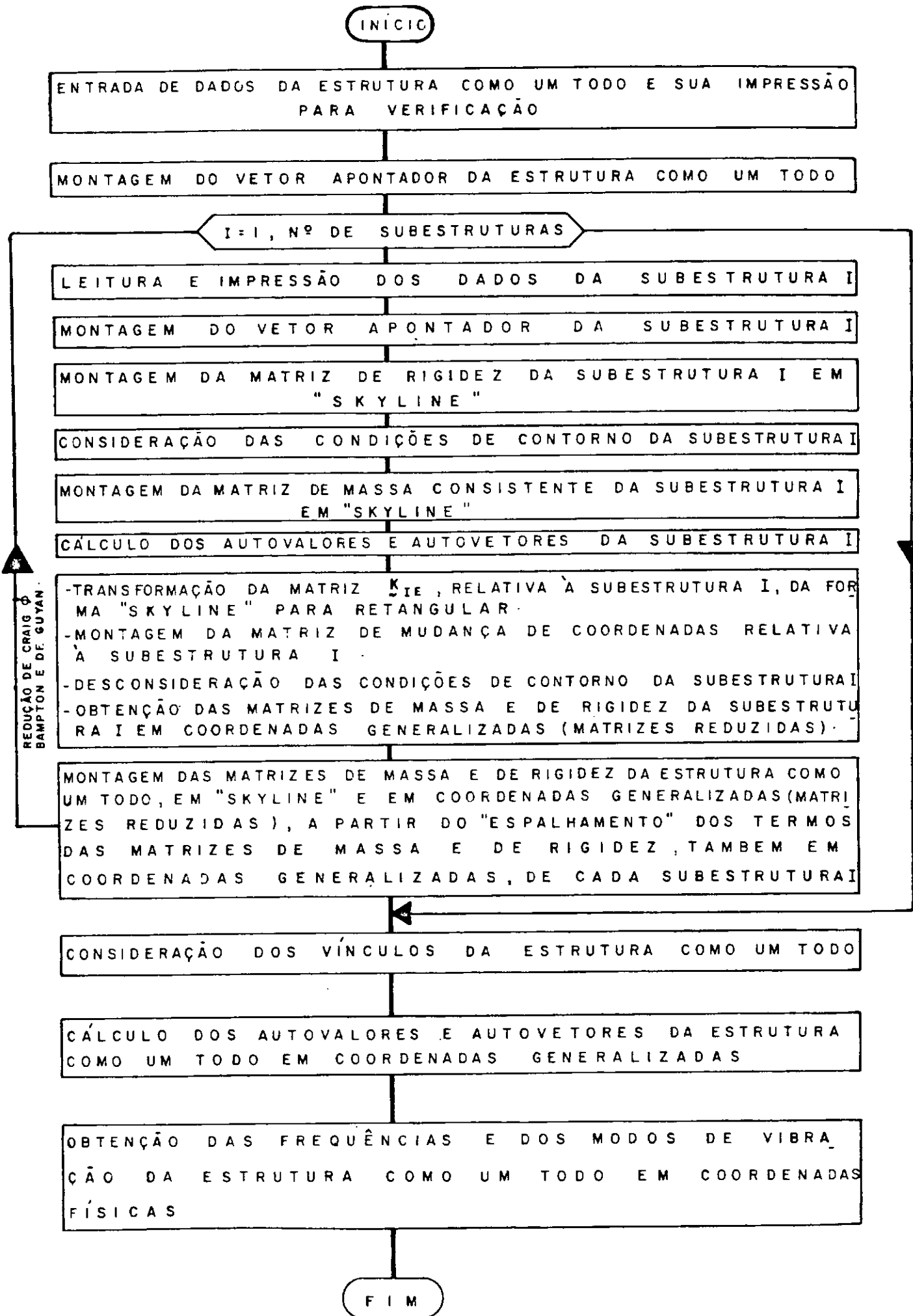
- 5) O método de Guyan exige um menor esforço computacional que o método de Craig & Bampton, por este necessitar do cálculo de alguns modos de vibração de cada subestrutura para a montagem de suas matrizes de mudança de coordenadas.
- 6) A precisão do método de Craig & Bampton aumenta com o acréscimo do número de autovetores usados na montagem da matriz de mudança de coordenadas de cada subestrutura, se estes contribuírem efetivamente para os modos de vibração da estrutura como um todo que se queira calcular. Este facto concorre para majorar o esforço computacional na análise de estruturas pelo método em questão.
- 7) A continuação deste estudo poderia ser feito através de:
  - 7.1) Emprego das técnicas de condensação abordadas neste trabalho em outros tipos de estruturas tais como grelha, treliça plana, treliça espacial e pórtico espacial.
  - 7.2) Análise de estruturas submetidas a vibrações forçadas, empregando subestruturação e redução de graus de liberdade.
  - 7.3) Emprego da técnica de subestruturação em estruturas divididas em mais de um nível de subestruturas.
  - 7.4) Em certos casos, como no cálculo de estruturas "off-shore", existe o interesse na determinação de alguns modos de vibração da estrutura que não fazem parte dos primeiros modos. Uma maneira de obtê-los, usando a técnica de subestruturação com redução de graus de liberdade, seria utilizando a transformação de coordenadas preconizada por Craig & Bampton com a seguinte alteração: ao invés da matriz  $[ \Phi ]_{II}$  conter os primeiros autovetores da subestrutura  $s$ , ela seria formada por um conjunto de vetores linearmente independentes, por exemplo os de Ritz.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ( 1 ) PRZEMIENIECKI, J.S. - "Matrix Structural Analysis of Substructures", AIAA Journal, Vol. 1, Nº 1, 1963.
- ( 2 ) SORIANO, H.L. - "Subestruturação com Integração Directa das Equações de Movimento da Dinâmica Estrutural", Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1981.
- ( 3 ) GRAIG, R.R. Jr. and CHANG, C.J. - "Substructure Coupling for Dynamic Analysis and Testing", University of Texas at Austin, Austin, 1977.
- ( 4 ) FURUIKE, T. - "Computerized Multiple Level Substructuring Analysis", Computers & Structures, Vol. 2, pp. 1063-1073, Pergamon Press Ltd, 1978.
- ( 5 ) BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1976.
- ( 6 ) CRAIG, R.R. Jr. and BAMPTON, M.C.C. - "Coupling of Substructures for Dynamic Analysis", AIAA Journal, Vol. 6, nº 7, July, 1968.
- ( 7 ) PRZEMIENIECKI, J.S. - "Theory of Matrix Structural Analysis", Macgraw - Hill, New York, 1968.

- ( 8 ) SORIANO, H.L. - "Sistemas de Equações Algébricas Lineares em Problemas Estruturais", Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, 1981.
- ( 9 ) NOOR, A.K. - Kamel, H.A. and Fultan, R.E. - "Substructuring Techniques - Status and Projections" , Computers & Structures, Vol. 8, p.p. 621-632, Pergamon Press Ltd, 1978.
- (10 ) CRAIG, R.R.Jr. - "Structural Dynamics - An Introduction to Computer Methods", John Wiley & Sons, New York , 1981.
- (11 ) CLOUGH, R.W. and PENZIEN, J. - "Dynamics of Structures", McGraw Hill, 1975.
- (12 ) GUYAN, R.J. - "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", AIAA Journal, Vol. 3, Nº 2 - February, 1965.
- (13 ) SORIANO, H.L. - "Reduction of Degrees of Freedom at Substructural Level in Dynamic", University of Southampton, Southampton, 1982.

ANEXO - PROGRAMA AUTOMÁTICO



## 2) Apresentação das Rotinas que Integram o Programa.

### 2.1 ) Programa Principal

Compõe-se de:

- a) Entrada e impressão de dados da estrutura.
- b) Montagem do vetor apontador da estrutura.
- c) Leitura e impressão de dados de cada subestrutura.
- d) Montagem do vetor apontador de cada subes-  
trutura.
- e) Chamada da subrotina RIGSKY.
- f) Consideração das condições de contorno de  
cada subestrutura.
- g) Chamada da subrotina MASSKY.
- h) Chamada da subrotina SSPACE.
- i) Chamada da subrotina TSIESR.
- j) Chamada da subrotina CHPERF.
- l) Chamada da subrotina MOCRAG ou MOGUYA.
- m) Desconsideração das condições de contorno  
de cada subestrutura.
- n) Chamada da subrotina MUTIVE.
- o) Montagem das matrizes reduzidas de massa e  
rigidez da estrutura.
- p) Consideração dos vínculos existentes da es  
trutura.
- q) Chamada da subrotina SSPACE.
- r) Transformação de coordenadas generalizadas  
para físicas.

### 2.2 ) Subrotina RIGSKY

Faz a montagem da matriz de rigidez de cada subestrutura, usando a técnica de armazenamento em "Skyline".

### 2.3 ) Subrotina MASSKY

Faz a montagem da matriz de massa consistente de cada subestrutura, usando a técnica de armazenamento em "Skyline".

### 2.4 ) Subrotina SSPACE

Calcula os primeiros autovalores e autovetores, usando iterações por subespaço. Ela é composta por quatro subrotinas:

#### a) Subrotina DECOMP:

Fatora a matriz de rigidez de cada subestrutura:

$$\underline{K} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^t$$

onde  $\underline{L}$  é uma matriz triangular inferior e  $\underline{D}$  é uma matriz diagonal.

#### b) Subrotina REDBAK

Faz a redução e a retro substituição dos vetores de iteração.

#### c) Subrotina MULT

Faz a multiplicação de  $\underline{B}$  por  $\underline{R}$  armazenando o resultado em  $\underline{T}$ .

#### d) Subrotina JACOBI

Resolve o problema de autovalor e autovetor, usando a técnica de iteração generalizada de Jacobi.

## 2.5 ) Subrotina TSIESR

Modifica a técnica de armazenamento da matriz  $\tilde{K}_{IE}$  de cada subestrutura. Passa de "Skyline" para retangular.

## 2.6 ) Subrotina CHPERF

Obtém o valor de  $\tilde{F}_{II}$  resolvendo o sistema:

$\tilde{K}_{II} * \tilde{F}_{II} = -\tilde{K}_{IE}$ , onde  $\tilde{K}_{II}$  é armazenado em "Skyline" e  $\tilde{F}_{II}$  e  $-\tilde{K}_{IE}$  são matrizes retangulares.

## 2.7 ) Subrotina MOCRAG

Faz a montagem da matriz, segundo Craig, que viabiliza a mudança de coordenadas de físicas para generalizadas.

## 2.8 ) Subrotina MOGUYA

Faz a montagem da matriz segundo Guyan, a qual viabiliza a mudança de coordenadas de físicas para generalizadas.

## 2.9 ) Subrotina MUTIVE

Faz a multiplicação de uma matriz armazenada em "Skyline" por uma retangular:  $\tilde{R}_{ET} = \tilde{B} * \tilde{Y}$ , onde  $\tilde{B}$  é a matriz armazenada em "Skyline",  $\tilde{Y}$  é a matriz retangular e  $\tilde{R}_{ET}$  é a matriz solução retangularizada.

### 3 ) Manual do Programa

#### 3.1 ) Sinopse

Este programa destina-se ao cálculo de vibrações livres não amortecidas em estruturas tipo pórtico plano, formadas por barras de eixo reto e seção transversal constante.

Na análise estrutural, pode ser usada a técnica de subestruturação em apenas um nível, quando, na entrada de dados, o número de subestruturas (NSUB) for superior a um.

Quando existem mais de uma subestrutura, este programa faz uso da redução de graus de liberdade, a nível de cada subestrutura, segundo os processos desenvolvidos por Craig & Bampton ou Guyan.

Para o cálculo dos autovalores e autovetores é utilizado o método de iteração por subespaço juntamente com o de Jacobi, onde o armazenamento das matrizes de massa consistente e de rigidez é feito por altura efetiva de coluna "Skyline".

Para a introdução das condições de contorno, seja a nível de subestrutura ou da estrutura como um todo, é usada a técnica de se colocar um número muito grande na diagonal da matriz de rigidez, correspondente à direção de deslocamento restringida.

Na versão atual, este programa pode resolver estruturas com até 29 nós e 44 barras, podendo-se aumentar ou diminuir este número alterando-se adequadamente os "dimensions".

Não há limitação para o número de subestruturas a que uma estrutura estará subdividida, desde que esteja de acordo com os dimensionamentos de vetores e matrizes.

### 3.2) Ficha

3.2.1) O objetivo do programa é a análise de vibrações livres não amortecidas em pórticos planos rígidos usando subestruturação e redução de graus de liberdade.

3.2.2) Autor:

. Larrey Cysne

3.2.3) Data de implantação:

. novembro/85

3.2.4) Linguagem

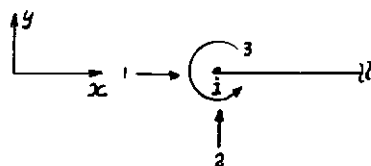
. FORTRAN

3.2.5) Computador:

. IBM 370/4341 com 2 mega bytes de memória e 1 unidade de disco 3330

### 3.3) Características.

A) Sentidos Positivos em um nó i:



B) Todas as barras de uma subestrutura devem ter o mesmo Módulo de Elasticidade (E).

C) Tanto a numeração da estrutura como as das subestruturas devem começar pelos nós interiores.

D) As frequências calculadas são fornecidas em Hz.

### 3.4 ) Entrada de Dados

Não serão dadas explicações sobre as variáveis neste manual.

Os dados devem ter coerência na unidade.

#### 3.4.1.) Título (6 cartões)

- Obra: 50 espaços alfanuméricos ( 1 cartão)
- Cliente: 50 espaços alfanuméricos (1 cartão)
- Unidades: . comprimento: 10 espaços alfanuméricos (1 cartão)  
  . Mód. Elasticidade: 10 espaços alfanuméricos (1 cartão)  
  . Frequência: 10 espaços alfanuméricos (1 cartão)  
  . Dens. Específica: 10 espaços alfanuméricos (1 cartão)

#### 3.4.2 ) Dados sobre a estrutura: (1 cartão)

NSUB = número de subestruturas.

NNT = número total de nós da estrutura ( 0 1º nó de cada subestrut

tura engloba todos os graus de liberdade interiores). Então :  
NNT = número de nós exteriores de cada subestrutura após o acoplamento + número de subestruturas (no caso da Redução de Graig). NNT = número de nós exteriores de cada subestrutura após o acoplamento ( no caso da Redução de Guyan).

NROOTF = número de autovalores e autovetores desejados para a estrutura.

NMAX = número máximo de barras dentro as subestruturas.

MXNJ = número máximo de nós dentro as subestruturas

MINI = número mínimo de nós interiores dentro as subestruturas.

MNROOT = número máximo de autovalores dentro as subestruturas.

NRED = variável que indica se não será usada subestruturação ou caso contrário, se será usada redução de Craig ou de Guyan: NRED = 0 não subestruturação

NRED = 1      Red.    de  
Guyan

NRED = 2      Red.    de  
Graig

[Format  $\rightarrow$  (8I5)]

### 3.4.3) Constantes e "Chaves" do Programa ( 1 Cartão)

RTOL = tolerância para convergência no  
cálculo dos autovalores.

NITEM= número máximo de iterações por  
subespaço permitida - usado no  
cálculo dos autovalores e auto-  
vetores.

IFPR = "Chave" de imprimir ou não os  
autovalores e autovetores an-  
tes de ter atingido a convergên-  
cia. Se IFPR = 0 , não imprime.  
Se IFPR = 1 , imprime.

[Format  $\rightarrow$  (E 10.2, 2I5)]

### 3.4.4) NNSUB (I)      (1 cartão)

Vetor que armazena o nº de nós de cada  
subestrutura desacoplada, após a redu-  
ção de Craig ou de Guyan. Cada termo  
do vetor será igual ao número de nós  
exteriores da subestrutura I + 1 (redu-  
ção de Craig) ou igual ao número de  
nós exteriores da subestrutura I (redu-

ção de Guyan).

[Format  $\rightarrow$  ( 5 I 5 )]

3.4.5.) NDNT (I,J) (1 cartão)

Matriz de incidência da estrutura como um todo após redução e acoplamento das subestruturas.  $I \rightarrow$  linha = nº da subestrutura;  $J \rightarrow$  coluna = nº dos nós da subestrutura I. Os dados são colocados num mesmo cartão seguindo a ordem das subestruturas.

[Format  $\rightarrow$  (10I5)]

3.4.6.) Alguns dados ( 1 cartão )

NJA = número de nós da estrutura como um todo que tenha pelo menos um apoio.

KH = 3 \* ( O somatório do nº de nós de cada subestrutura, considerando-as não acopladas e não reduzidas).

[Format  $\rightarrow$  (2I5)]

3.4.7 ) Consideração das condições de contorno da estrutura ( NJA Cartões )

I = nº do nó

IENT1 = direção x	}	$S_e = 0 \rightarrow$ livre
IENT2 = direção y		
IENT3 = rotação		

$S_e = 1 \rightarrow$  restringida

[Format  $\rightarrow$  (4 I 5)]

3.4.8) Dados sobre as Subestruturas (NSUB cartões)

I = número do primeiro nó de cada subestrutura, na numeração global da estrutura, após redução e acoplamento das diversas subestruturas.

NROOT = número de autovalores e autovetores desejados para cada subestrutura e que serão utilizados na redução de Craig

[Format  $\rightarrow$  ( 2 I 5)]

3.4.9) Dados sobre as Subestruturas: (1 cartão)

N = número de barras da subestrutura  
NJ = número de nós da subestrutura  
NI = número de nós interiores da subestrutura  
NROOT = número de autovalores e autovetores desejados para a subestrutura  
E = Módulo de Elasticidade da subestrutura.

[Format  $\rightarrow$  (4I5, E 10.2)]

3.4.10) Coordenadas e Restrições dos Nós das Subestruturas: (NJ cartões)

K = número do nó da subestrutura

X(K) = coordenada x do nó K

Y(K) = coordenada y do nó K

IRL(K) = restrição do nó K. Se IRL(K) = 1, está restringido → nó exterior da subestrutura. Se IRL(K) = 0, nó livre → nó interior da subestrutura.

[Format → (I5, 2F10.3, I5)]

3.4.11) Características das Barras das Subestruturas: (N cartões)

I = número da barra

NDN(I,1) = nó inicial da barra I

NDN(I,2) = nó final da barra I

AX(I) = área da seção transversal da barra I

IZ(I) = momento de inércia da barra I

RO(I) = peso específico da barra I

OBS: 1) Os itens (3.4.9) a (3.4.11) devem ser repetidos na ordem apresentada tantas vezes quantas forem as Subestruturas.

2) Caso o usuário não queira usar subestruturação, o programa interpreta como se toda a estrutura

formasse apenas uma subestrutura. E os seguintes itens de entrada de dados são necessários:

(3.4.1)

(3.4.2)        com NSUB = 1

(3.4.3)

(3.4.4)

(3.4.9)    ]

(3.4.10)    ]

(3.4.11)    ]

apenas 1 vez

CCARJ DIRENG1 11/27/85 19:30:58 G.M.T. WAS THE ORIGIN

DEST: 000C FILE: 6964 NAME: DYNAMIC FORTRAN DIST: C9DIRENG RECS: 00001803 PRINT DATE: 11/27/85 19:

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
CHARACTER*50 OBRA
```

```
CHARACTER*50 CLIENT
```

```
CHARACTER*10 UNITS1
```

```
CHARACTER*10 UNITS2
```

```
CHARACTER*10 UNITS3
```

```
CHARACTER*10 UNITS4
```

```
C
```

```
C
```

```
C=====
```

```
C.....SEM SUBESTRUTURACAO==> PORTICO NOVO
```

```
C=====
```

```
C      DIMENSION X(30),Y(30),AX(47),IZ(47),RO(47),L(47),
```

```
C      *IRL(30),SM(6,6),SMR(6,6),SMD(6,6),IPOS(91),SB(5400),MAM(6,6),
```

```
C      *MAMR(6,6),MAMD(6,6),MB(5400),EIGV(18),TT(90),W(90),AR(171)
```

```
C      *,BR(171),VEC(18,18),D(18),RTOLV(18),BUP(18),BLO(18),BUPC(18),
```

```
C      *JK(100),UNITS(4),IDENT(1,1)
```

```
C      *,SBR(1,1),MBR(1,1),NNSUB(1),NDNT(1,1),NDESNO(1),NGL(1),IPOST
```

```
C      *(1),SF(1),MF(1),IREST(1,1),A(1),INOX(1,1),AUTOVE(1,1),RSUB(1,1),
```

```
C      *ILIN(1),ICOL(1)
```

```
C=====
```

```
C....DIMENSION PORTICO NOVO COM 3 SUBEST CUJOS NRROT = 20,12 E 12
```

```
C      0 NRROT = 10(CRAIG E GUYAN)
```

```
C=====
```

```
C      DIMENSION X(16),Y(16),AX(27),IZ(27),RO(27),L(27)
```

```
C      1,IRL(16),SM(6,6),SMR(6,6),SMD(6,6),IPOS(49),SB(
```

```
C      21536),MAM(6,6),MAMR(6,6),MAMD(6,6),MB(1536),EIGV
```

```
C      3(28),TT(95),W(95),AR(406),BR(406),VEC(28,28),D(28),RTOLV(28),
```

```
C      4BUP(28),BLO(28),BUPC(28),IDENT(62,62),
```

```
C      5SBR(42,42),MBR(42,42),NNSUB(3),NDNT
```

```
C      6(3,11),NDESNO(20),NGL(20),IPOST(96),SF(6080),MF(6080),IREST
```

```
C      7(20,3),JK(42),A(2016),UNITS(4),INOX(3,11),AUTOVE(120,10),RSUB(42,
```

```
C      810),ILIN(3),ICOL(3)
```

```
C=====
```

```
C
```

```
COMMON/UM/NDN(47,2),RR(47,3,3)
```

```
COMMON/DOIS/F(95,62)
```

```
COMMON/TRES/CRAIG(3,95,62),CRAIGT(3,62,95),RET(95,62)
```

```
COMMON/QUATRO/GUYAN(3,95,62),GUYANT(3,62,95)
COMMON/CINCO/R(95,28)
DOUBLE PRECISION IZ,L,MAM,MAMR,MAMD,MBR,IDENT,MB,MF
```

```
IINN=5
IOUT=6
```

```
C - TITULOS
```

```
WRITE(IOUT,300)
300 FORMAT(1H1,///,10X,85('*'),/,10X,'*',83X,'*',/10X,'*',10X,
1'C.O.P.P.E. - U.F.R.J. - PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL -1',
2'985',15X,'*',/10X,'*',83X,'*',/10X,'*',10X,'PROGRAMA ',
3'PARA ANALISE DE VIBRACOES LIVRES EM PORTICOS',13X,
4'*/,/10X,'*',10X,'PLANOS COM SUBESTRUTURACAO E REDUCAO DE',
5' GRAUS DE LIBERDADE',13X,'*',/10X,'*',83X,'*',/10X,'*',83X,'*',
6/10X,'*',10X,'AUTOR :', ' LARREY CYSNE',48X,'*',/10X,'*',83X,
7 '*/,/10X,'*',83X,'*',/10X,'*',10X,'ORIENTA',
8'DOR :', ' PROF. HUMBERTO LIMA SORIANO',33X,'*',/10X,'*',83X,'*',
9/10X,85('*'))
```

```
READ(IINN,310)OBRA,CLIENT,UNITS1,UNITS2,UNITS3,UNITS4
310 FORMAT(1A50,/,1A50,/,1A10,/,1A10,/,1A10,/,1A10)
```

```
WRITE(IOUT,320)OBRA,CLIENT,UNITS1,UNITS2,UNITS3,UNITS4
320 FORMAT(///,10X,85('*'),/,10X,'*',83X,'*',/10X,'*',10X,
1'OBRA :',1A50,17X,'*',/10X,'*',83X,'*',/10X,'*',10X,
2'CLIENTE :',1A50,14X,'*',/10X,'*',83X,'*',/10X,'*',
310X,'UNIDADES :',5X,'COMPRIMENTO :',1A10,35X,'*',/10X,
4'*/,25X,'MOD.ELASTIC. :',1A10,34X,'*',/10X,'*',25X,
5 'ACOES :',1A10,34X,'*',/10X,'*',25X,
6 'DENS.ESPECIF. :',1A10,34X,'*',/10X,'*',
783X,'*',/10X,85('*'))
NSTIF=15
READ(IINN,10)NSUB,NNT,NROOTF,NMAX,MXNJ,MINI,MNROOT,NRED
10 FORMAT(8I5)
IF(NSUB.NE.1) GO TO 315
```

```
      WRITE(IOUT,311)
311  FORMAT(1H1,////////,18X,40('*')),/,18X,'* NAO ESTA SENDO USADA SUBESTR
      *UTURACAO *',/,18X,40('*'))
      GO TO 330
315  CONTINUE
      IF(NRED.EQ.1)GO TO 510
      IF(NRED.NE.2)GO TO 513
      WRITE(IOUT,512)
512  FORMAT(1H1,////////,18X,39('*')),/,18X,'* ESTA SENDO USADA A REDUCAO D
      *E CRAIG *',/,18X,39('*'))
      GO TO 517
510  WRITE(IOUT,511)
511  FORMAT(1H1,////////,18X,39('*')),/,18X,'* ESTA SENDO USADA A REDUCAO D
      *E GUYAN *',/,18X,39('*'))
      GO TO 517
513  WRITE(IOUT,514)
514  FORMAT(////////,20X,'DEFINA O TIPO DE REDUCAO:',/,46X,'SE NRED=1 => .
      *GUYAN',/,46X,'SE NRED=2 => CRAIG')
      STOP
517  CONTINUE
      WRITE(IOUT,16)
      16  FORMAT('1',////////,24X,'DADOS      DA      ESTRUTURA')
      WRITE(IOUT,54)
      54  FORMAT(' ',23X,26('*'))
      WRITE (IOUT,17)
      17  FORMAT(////////,1X,'N. DE SUBESTRUT.',3X,'N. TOTAL DE NOS',3X,'N. DE'
      *' AUTOVET. DA ESTRUT.')
      WRITE(IOUT,18)NSUB,NNT,NROOTF
      18  FORMAT(//,5X,I2,16X,I3,23X,I2)
330  CONTINUE
      READ(IINN,20)RTOL,NITEM,IFPR
      20  FORMAT(E10.2,2I5)
      WRITE(IOUT,19)
      19  FORMAT(////////,1X,'TOLER. P/ CONVERG.',3X,'N. MAX. DE ITER.',3X
      *, 'IMP. DAS ITERACOES')
      WRITE(IOUT,31)RTOL,NITEM,IFPR
      31  FORMAT(//,4X,E10.2,15X,I2,19X,I1)
      READ(IINN,30)(NNSUB(I),I=1,NSUB)
```

```
30 FORMAT(5I5)
   WRITE(IOUT,32)
32 FORMAT(//////,15X,'N. DA SUBESTRUTURA',3X,'N. DE NOS')
   DO 23 IDD=1,NSUB
23 WRITE(IOUT,24) IDD,NNSUB(IDD)
24 FORMAT(//,25X,I2,12X,I3)
   IF(NSUB.EQ.1)GO TO 227
   READ(IINN,40)((NDNT(I,J),J=1,NNSUB(I)),I=1,NSUB)
40 FORMAT(10I5)
   WRITE(IOUT,26)
26 FORMAT(//////,15X,'INCIDENCIA DOS NOS DA ESTRUTURA')
   WRITE(IOUT,29)
29 FORMAT(///,10X,'N. DA SUBESTRUT.',10X,'NOS DE INCIDENCIA')
   DO 27 I=1,NSUB
27 WRITE(IOUT,28) I,(NDNT(I,J),J=1,NNSUB(I))
28 FORMAT(///,16X,I1,20X,4(10I3,/,30X))
```

C - CONSIDERACAO DOS APOIOS DA ESTRUTURA (ENTRADA DE DADOS)

```
   DO 25 I=1,NNT
   DO 25 J=1,3
25 IREST(I,J)=0
   READ(IINN,60)NJA,KH
60 FORMAT(2I5)
   DO 35 K=1,NJA
   READ(IINN,70)I, IEST1, IEST2, IEST3
70 FORMAT(4I5)
   IREST(I,1)=IEST1
   IREST(I,2)=IEST2
   IREST(I,3)=IEST3
35 CONTINUE
   WRITE(IOUT,49)
49 FORMAT(//////,20X,'APOIOS DA ESTRUTURA')
   WRITE(IOUT,33)
33 FORMAT(///,12X,'NO',5X,'DESL. X',5X,'DESL. Y',5X,'ROT. Z')
   DO 41 I=1,NNT
41 WRITE(IOUT,42) I,(IREST(I,J),J=1,3)
42 FORMAT(//,12X,I2,8X,I1,11X,I1,10X,I1)
```

```
      DO 45 I=1,NNT
45  NDESNO(I)=3
      IF(NRED.EQ.1)GO TO 551
      DO 5 J=1,NSUB
      READ(IINN,50)I,NROOT
      5  NDESNO(I)=NROOT
551  CONTINUE
      50  FORMAT(2I5)
      WRITE(IOUT,51)
      51  FORMAT(' ',///,10X,'N. DO NO',15X,'N. DE DESL./NO')
      DO 53 I=1,NNT
      53  WRITE(IOUT,52) I,NDESNO(I)
      52  FORMAT(' ',///,14X,I2,27X,I2)
      DO 998 I=1,NNT
998  NGL(I)=0
      NGL(I)=NDESNO(I)
      DO 15 I=2,NNT
      15  NGL(I)=NGL(I-1)+NDESNO(I)
```

C  
C  
C

- MONTAGEM DO VETOR APONTADOR DA ESTRUTURA

```
      LH=0
      DO 999 I=1,NGL(NNT)
999  IPOST(I)=0
      DO 77 I=1,NSUB
      DO 77 J=1,NNSUB(I)
      77  INOX(I,J)=NDNT(I,J)
      DO 78 I=1,NSUB
      DO 78 J=1,NNSUB(I)-1
      IF(INOX(I,J+1).LT.INOX(I,1))INOX(I,1)=INOX(I,J+1)
      78  CONTINUE
      DO 55 I=1,NSUB
      IF(INOX(I,1).EQ.1)GO TO 76
      IOX=INOX(I,1)
      LH=NGL(IOX-1)
      76  CONTINUE
      DO 55 J=1,NNSUB(I)
      MW=NDNT(I,J)
```

```
DO 55 K=1,NDESNO(MW)
  IF((J.EQ.1).AND.(I.EQ.1))GO TO 56
  M=NGL(MW-1)+K
  GO TO 57
56 M=K
57 IDIF=M-LH
  IF(IPOST(M).GE.IDIF)GO TO 55
  IPOST(M)=IDIF
55 CONTINUE
DO 75 IC=2,NGL(NNT)
  75 IPOST(IC)=IPOST(IC-1)+IPOST(IC)
321 CONTINUE
```

C

C - LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS SOBRE AS SUBESTRUTURAS

C

C.....ZERAGEM DE SF E MF.....

```
  NNN=NGL(NNT)
  NN1=NNN+1
  MMM=IPOST(NNN)
DO 227 LI=1,MMM
  SF(LI)=0.
  MF(LI)=0.
227 CONTINUE
  IFSS=0
```

C.....

```
  KALO=0
DO 265 IP=1,NSUB
  READ(IINN,80)N,NJ,NI,NROOT,E
80 FORMAT(4I5,E10.2)
  IF(NRED.EQ.1)GO TO 571
  NDS=3*(NNSUB(IP)-1)+NROOT
  GO TO 572
571 NDS=3*(NNSUB(IP))
572 CONTINUE
  INI=3*NI
  ILIN(IP)=3*NJ
  KALO=KALO+ILIN(IP)
  ILHA=3*(NJ-NI)
```

```
ICOL(IP)=3*(NJ-NI)+NRROOT
NNM=ILIN(IP)+1
ITAM=ILIN(IP)*ICOL(IP)
MXN=3*MXNJ
MIC=3*(MXNJ-MINI)+MNROOT
WRITE(IOUT,58)
58 FORMAT('1',17X,'DADOS DAS SUBESTRUTURAS',/,18X,28('*'))
WRITE(IOUT,90)IP
90 FORMAT(////,20X,'DADOS DA SUBESTRUTURA',2X,I2)
WRITE(IOUT,100)
100 FORMAT(///,1X,'N. DE BARRAS',2X,'N. DE NOS',2X,'N. DE NOS INT.',2X
*, 'N. DE AUTOVET.',2X,'MOD. DE ELAST. ')
WRITE(IOUT,110)N,NJ,NI,NROOT,E
110 FORMAT(/,3X,I5,7X,I5,7X,I5,8X,I5,18X,E9.2)
ID1=2*NRROOT
ID2=NRROOT+8
IF(ID1-ID2)12,11,11
11 NC=ID2
GO TO 13
12 NC=ID1
13 NNC=NC*(NC+1)/2
WRITE(IOUT,120)IP
120 FORMAT(////,17X,'COORDENADAS DOS NOS DA SUBESTRUTURA',2X,I2)
WRITE(IOUT,130)
130 FORMAT(///,20X,'NO',4X,'COORD X',4X,'COORD Y',4X,'RESTRICAO')
DO 85 J=1,NJ
READ(IINN,140)K,X(K),Y(K),IRL(K)
140 FORMAT(I5,2F10.3,I5)
85 WRITE(IOUT,150)K,X(K),Y(K),IRL(K)
150 FORMAT('0',17X,I3,5X,F6.2,5X,F6.2,8X,I2)
WRITE(IOUT,160)IP
160 FORMAT(////,15X,'INFORMACOES SOBRE AS BARRAS DA SUBESTRUTURA',I2)
WRITE(IOUT,170)
170 FORMAT(///,1X,'BARRA',3X,'NO INIC.',3X,'NO FIN.',3X,'AREA',3X,
*, 'MOM. INERC.',3X,'COMPRIM.',3X,'PESO ESPECIF. ')
DO 95 I=1,ILIN(IP)
95 IPOS(I)=0
DO 105 IJ=1,N
```

```
      READ(IINN,180)I,NDN(I,1),NDN(I,2),AX(I),IZ(I),RO(I)
180  FORMAT(3I5,3F15.3)
      XCL=X(NDN(I,2))-X(NDN(I,1))
      YCL=Y(NDN(I,2))-Y(NDN(I,1))
      L(I)=DSQRT(XCL**2+YCL**2)
      CX=XCL/L(I)
      CY=YCL/L(I)
      WRITE(IOUT,200)I,NDN(I,1),NDN(I,2),AX(I),IZ(I),L(I),RO(I)
200  FORMAT(/,1X,I3,6X,I3,8X,I3,3X,E8.2,1X,E9.2,6X,F6.2,5X,E9.3)
      RR(I,1,1)=CX
      RR(I,2,1)=-CY
      RR(I,3,1)=0.
      RR(I,1,2)=CY
      RR(I,2,2)=CX
      RR(I,3,2)=0.
      RR(I,1,3)=0.
      RR(I,2,3)=0.
      RR(I,3,3)=1.
```

C  
C - MONTAGEM DO VETOR APONTADOR DE CADA SUBESTRUTURA  
C

```
      LI=3*(NDN(I,1)-1)+1
      DO 135 J=1,2
      DO 135 K=1,3
      ML=3*(NDN(I,J)-1)+K
      IDIF=ML-LI+1
      IF(IPOS(ML).GE.IDIF)GO TO 135
      IPOS(ML)=IDIF
135  CONTINUE
105  CONTINUE
      DO 125 IC=2,ILIN(IP)
125  IPOS(IC)=IPOS(IC-1)+IPOS(IC)
C
      KPT=ILIN(IP)
      DO 144 I=1,IPOS(KPT)
144  SB(I)=0.
      DO 145 I=1,N
      CALL RIGSKY(I,E,AX,L,IZ,IPOS,SB,N,IPOS(KPT),JK,KPT,IP)
```

145 CONTINUE

C  
C  
C

- CONSIDERACOES DAS CONDICICOES DE CONTOURNO DE CADA SUBESTRUTURA

```
DO 155 IH=1,NJ
  IF( IRL(IH).NE.1)GO TO 155
  I11=IPOS(3*IH-2)
  I22=IPOS(3*IH-1)
  I33=IPOS(3*IH)
  SB(I11)=SB(I11)*10.**15
  SB(I22)=SB(I22)*10.**15
  SB(I33)=SB(I33)*10.**15
```

155 CONTINUE

C

```
DO 175 I=1,IPOS(KPT)
175 MB(I)=0.
DO 185 I=1,N
  CALL MASSKY(I,RO,AX,L,IZ,IPOS,MB,N,IPOS(KPT),JK,KPT,IP)
```

185 CONTINUE

```
NWK=IPOS(KPT)
IF(NSUB.EQ.1)MNROOT=NRROOT
IF(NSUB.EQ.1) GO TO 325
IF(MXN.GT.NGL(NNT))GO TO 91
NSTP=NGL(NNT)
GO TO 92
```

91 NSTP=MXN

92 CONTINUE

325 CONTINUE

```
LD1=2*MNROOT
LD2=MNROOT+8
IF(LD1-LD2)93,94,94
```

93 LNC=LD1

GO TO 96

94 LNC=LD2

96 CONTINUE

```
IF(NSUB.EQ.1)NSTP=ILIN(IP)
IF(NSUB.EQ.1)GO TO 505
ID1=2*NRROOTF
```

```
      ID2=NR00TF+8
      IF(ID1.GE.ID2)GO TO 295
      KNC=ID1
      GO TO 305
295 KNC=ID2
305 KNNC=KNC*(KNC+1)/2
      IF(LNC.LT.KNC)LNC=KNC
505 CONTINUE
      IF(NRED.EQ.1)GO TO 522
      CALL SSSPACE(SB,MB,IP0S,EIGV,TT,W,AR,BR,VEC,D,RTOLV,BUF,BLG,BUPC,
      *ILIN(IP),NNM,NWK,NWK,NROOT,RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,NSTIF,IOUT,
      *NSTP,LNC,IP)
      IF(NSUB.EQ.1)GO TO 326
      GO TO 550
522 WRITE (NSTIF)SB
      CLOSE(NSTIF)
550 CONTINUE
```

C  
C - REDUCAO DE CRAIG OU DE GUYAN  
C

```
      CALL TSIESR(SB,IP0S,INI,ILHA,NWK,ILIN(IP),IP)
      CALL CHPERF(SB,IP0S,NWK,INI,ILHA,IOUT,NSTIF)
      IF(NRED.NE.1)GO TO 524
      CALL MOGUYA(ILIN(IP),ILHA,IP,INI,NSTP,MIC,NSUB)
      GO TO 525
524 CONTINUE
      CALL MOCRAG(NJ,NI,NROOT,ILHA,INI,ILIN(IP),ICOL(IP),IDENT,NSTP,MIC,
      *LNC,IP,NSUB)
525 CONTINUE
```

C  
C - DESCONSIDERACAO DAS CONDICAOES DE CONTORNO DE CADA SUBESTRUTURA  
C

```
      DO 101 IH=1,NJ
      IF(IRL(IH).NE.1)GO TO 101
      I11=IP0S(3*IH-2)
      I22=IP0S(3*IH-1)
      I33=IP0S(3*IH)
      SB(I11)=SB(I11)/(10.**15)
```

```
      SB(I22)=SB(I22)/(10.**15)
      SB(I33)=SB(I33)/(10.**15)
101  CONTINUE
      IF(NRED.EQ.1) GO TO 526
      CALL MUTIVE(IPOS,SB,CRAIG,ILIN(IP),ICOL(IP),ITAM,NWK,A,NSTP,
      *MIC,IP,NSUB)
      DO 195 I=1,ICOL(IP)
      DO 195 J=1,ICOL(IP)
195  SBR(I,J)=0.
      DO 205 I=1,ICOL(IP)
      DO 205 K=1,ICOL(IP)
      DO 205 J=1,ILIN(IP)
205  SBR(I,K)=SBR(I,K)+CRAIGT(IP,I,J)*RET(J,K)
      CALL MUTIVE(IPOS,MB,CRAIG,ILIN(IP),ICOL(IP),ITAM,NWK,A,NSTP,
      *MIC,IP,NSUB)
      DO 215 I=1,ICOL(IP)
      DO 215 J=1,ICOL(IP)
215  MBR(I,J)=0.
      DO 225 I=1,ICOL(IP)
      DO 225 K=1,ICOL(IP)
      DO 225 J=1,ILIN(IP)
225  MBR(I,K)=MBR(I,K)+CRAIGT(IP,I,J)*RET(J,K)
      GO TO 531
526  CALL MUTIVE(IPOS,SB,GUYAN,ILIN(IP),ICOL(IP),ITAM,NWK,A,NSTP,
      *MIC,IP,NSUB)
      DO 527 I=1,ICOL(IP)
      DO 527 J=1,ICOL(IP)
527  SBR(I,J)=0.
      DO 528 I=1,ICOL(IP)
      DO 528 K=1,ICOL(IP)
      DO 528 J=1,ILIN(IP)
528  SBR(I,K)=SBR(I,K)+GUYANT(IP,I,J)*RET(J,K)
      CALL MUTIVE(IPOS,MB,GUYAN,ILIN(IP),ICOL(IP),ITAM,NWK,A,NSTP,
      *MIC,IP,NSUB)
      DO 529 I=1,ICOL(IP)
      DO 529 J=1,ICOL(IP)
529  MBR(I,J)=0.
      DO 530 I=1,ICOL(IP)
```

```
      DO 530 K=1,ICOL(IP)
      DO 530 J=1,ILIN(IP)
530 MBR(I,K)=MBR(I,K)+GUYANT(IP,I,J)*RET(J,K)
531 CONTINUE
```

C  
C - MONTAGEM DAS MATRIZES REDUZIDAS DE MASSA E RIGIDEZ DA ESTRUTURA  
C

```
      IC=0
      DO 235 J=1,NNSUB(IP)
      MW=NDNT(IP,J)
      DO 235 K=1,NDESNO(MW)
      IC=IC+1
      IF((IP.EQ.1).AND.(J.EQ.1)) GO TO 74
      M=NGL(MW-1)+K
      GO TO 59
74 M=K
59 JK(IC)=M
235 CONTINUE
      DO 245 J=1,NDS
      DO 245 K=1,NDS
      JKA=JK(K)
      NCO=JKA-JK(J)+1
      IF(NCO.LE.0)GO TO 245
      LH=IPOST(JKA)+JK(J)-JKA
      SF(LH)=SF(LH)+SBR(J,K)
      MF(LH)=MF(LH)+MBR(J,K)
245 CONTINUE
265 CONTINUE
```

C  
C - CONSIDERACAO DOS APOIOS EXISTENTES NA ESTRUTURA  
C

```
      DO 275 I=1,NNT
      DO 275 J=1,3
      IF(IREST(I,J).NE.1)GO TO 275
      KU=NGL(I-1)+J
      K11=IPOST(KU)
      SF(K11)=SF(K11)*10.**15
275 CONTINUE
```

1001 FORMAT('0',/,10E11.3)

CALL SSPACE(SF,MF,IPOST,EIGV,TT,W,AR,BR,VEC,D,RTOLV,BUP,  
\*ELO,BUPC,NNN,NNI,MMM,MMM,NROOTF,RTOL,KNC,KNNC,NITEM,IFSS,  
\*IFPR,NSTIF,IOUT,NSTP,LNC,IP)

TRANSFORMACAO DE COORDENADAS GENERALIZADAS PARA FISICAS

DO 502 I=1,KALO  
DO 502 J=1,NROOTF  
502 AUTOVE(I,J)=0.  
DO 420 ID=1,NROOTF  
IY=0  
DO 420 IP=1,NSUB  
LHA=0  
IF(ID.EQ.1)GO TO 442  
DO 441 J=1,ICOL(IP)  
441 RSUB(J,ID-1)=0.  
442 CONTINUE  
DO 450 J=1,NNSUB(IP)  
IW=NDNT(IP,J)  
DO 450 K=1,NDESNO(IW)  
IF((J.EQ.1).AND.(IP.EQ.1)) GO TO 440  
M=NGL(IW-1)+K  
GO TO 460  
440 M=K  
460 LHA=LHA+1  
450 RSUB(LHA,ID)=R(M,ID)  
IF(NRED.NE.1)GO TO 535  
DO 536 I=1,ILIN(IP)  
IY=IY+1  
DO 536 J=1,ICOL(IP)  
536 AUTOVE(IY,ID)=AUTOVE(IY,ID)+GUYAN(IP,I,J)\*RSUB(J,ID)  
GO TO 420  
535 CONTINUE  
DO 420 I=1,ILIN(IP)  
IY=IY+1  
DO 420 J=1,ICOL(IP)

```
AUTOVE(IY,ID)=AUTOVE(IY,ID)+CRAIG(IP,I,J)*RSUB(J,ID)
420 CONTINUE
326 CONTINUE
  IF(NSUB.EQ.1) NROOTF=NROOT
  DO 470 I=1,NROOTF
470  EIGV(I)=DSQRT(EIGV(I))/(2*3.141592654)
    WRITE(IOUT,480)
480  FORMAT('1',////////,20X,'FREQUENCIAS PROPRIAS CALCULADAS')
    WRITE(IOUT,490)(EIGV(I),I=1,NROOTF)
490  FORMAT(1H0,/,5F15.5)
    WRITE(IOUT,495)
495  FORMAT(1X,////////,30X,'CONFIGURACAO DOS MODOS PROPRIOS')
    WRITE(IOUT,496)
496  FORMAT(1X,///,4X,'DESL X',6X,'DESL Y',7X,'ROT Z',10X,'DESL X'
  *,6X,'DESL Y',7X,'ROT Z',10X,'DESL X',6X,'DESL Y',7X,'ROT Z')
    IF(NSUB.EQ.1) GO TO 499
    DO 497 J=1,NROOTF
497  WRITE(IOUT,498)(AUTOVE(K,J),K=1,IY)
498  FORMAT(/,(3(1X,1PE11.4),4X,3(1X,1PE11.4),4X,3(1X,1PE11.4)))
    IF(NSUB.NE.1) GO TO 501
499  DO 500 J=1,NROOTF
500  WRITE(IOUT,498)(R(K,J),K=1,NSTP)
501  CONTINUE
    STOP
    END

C - .....
C   SUBROUTINE RIGSKY(I,E,AX,L,IZ,IPOS,SB,N,KMB,JK,KPT,IP)
C
C - FAZ A MONTAGEM DA MATRIZ DE RIGIDEZ DE CADA SUBESTRUTURA USANDO
C   SKYLINE
C - .....
C - PARAMETROS:
C - I=NUMERO DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - E=MODULO DE ELASTICIDADE DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - AX=AREA DA SECAO TRANSVERSAL DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - L=COMPRIMENTO DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - IZ=MOMENTO DE INERCIA EM RELACAO AO EIXO Z DE CADA MEMBRO DA SUBES
C   TRUTURA IP
```

```
C - RR=MATRIZ QUE CONTEM AS MATRIZES DE ROTACAO DE TODOS OS MEMBROS DA
C   SUBESTRUTURA IP
C - NDN=MATRIZ QUE CONTEM A INCIDENCIA DE TODOS OS MEMBROS DA SUBESTRU
C   TURA IP
C - IPOS=VETOR APONTADOR DA SUBESTRUTURA IP
C - SB=VETOR DE ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZDA SUBESTRUTURA IP
C   EM SKYLINE
C - N=NUMERO DE MEMBROS DA SUBESTRUTURA IP
C - KMB=IPOS(ILIN(IP))=NUMERO DE TERMOS DO VETOR SB DA SUBESTRUTURA IP
C - JK=VETOR DE TRABALHO
C - KPT=ILIN(IP)=NUMERO TOTAL DE DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA IP
C - IP=NUMERO DA SUBESTRUTURA
C - .....
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  DIMENSION SM(6,6),SMR(6,6),SMD(6,6),SB(
    *KMB),AX(N),L(N),IZ(N),IPOS(KPT),JK(6)
  COMMON/UM/NDN(47,2),RR(47,3,3)
  DOUBLE PRECISION L,IZ
  DO 10 J=1,6
  DO 10 K=1,6
10 SM(J,K)=0.
  SM(1,1)=E*AX(I)/L(I)
  SM(2,2)=12.*E*IZ(I)/L(I)**3
  SM(3,3)=4.*E*IZ(I)/L(I)
  SM(4,4)=SM(1,1)
  SM(5,5)=SM(2,2)
  SM(6,6)=SM(3,3)
  SM(3,2)=6.*E*IZ(I)/L(I)**2
  SM(4,1)=-E*AX(I)/L(I)
  SM(5,2)=-SM(2,2)
  SM(5,3)=-SM(3,2)
  SM(6,2)=SM(3,2)
  SM(6,3)=2.*E*IZ(I)/L(I)
  SM(6,5)=-SM(3,2)
  DO 20 J=1,6
  DO 20 K=1,J
20 SM(K,J)=SM(J,K)
  DO 30 J=1,6
```

```
DO 30 K=1,6
30 SMR(J,K)=0.
DO 40 IS=1,3
DO 40 J=1,3
DO 40 K=1,3
SMR(IS,J)=SMR(IS,J)+SM(IS,K)*RR(I,K,J)
SMR(IS+3,J)=SMR(IS+3,J)+SM(IS+3,K)*RR(I,K,J)
SMR(IS,J+3)=SMR(IS,J+3)+SM(IS,K+3)*RR(I,K,J)
SMR(IS+3,J+3)=SMR(IS+3,J+3)+SM(IS+3,K+3)*RR(I,K,J)
40 CONTINUE
DO 50 J=1,6
DO 50 K=1,6
50 SMD(K,J)=0.
DO 60 IS=1,3
DO 60 J=1,3
DO 60 K=1,3
SMD(IS,J)=SMD(IS,J)+RR(I,K,IS)*SMR(K,J)
SMD(IS+3,J)=SMD(IS+3,J)+RR(I,K,IS)*SMR(K+3,J)
SMD(IS,J+3)=SMD(IS,J+3)+RR(I,K,IS)*SMR(K,J+3)
SMD(IS+3,J+3)=SMD(IS+3,J+3)+RR(I,K,IS)*SMR(K+3,J+3)
60 CONTINUE
IC=0
DO 70 J=1,2
DO 70 K=1,3
IC=IC+1
M=3*(NDN(I,J)-1)+K
JK(IC)=M
70 CONTINUE
DO 80 J=1,6
DO 80 K=1,6
JKA=JK(K)
NCO=JKA-JK(J)+1
IF(NCO.LE.0)GO TO 80
LI=IFOS(JKA)+JK(J)-JKA
SB(LI)=SB(LI)+SMD(J,K)
80 CONTINUE
RETURN
END
```

```
C - .....
C   SUBROUTINE MASSKY(I,RO,AX,L,IZ,IPOS,MB,N,KMB,JK,KPT,IP)
C
C - FAZ A MONTAGEM DA MATRIZ DE MASSA DE CADA SUBESTRUTURA USANDO
C   SKYLINE
C - .....
C - PARAMETROS:
C - I=NUMERO DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - RO=DENSIDADE ESPECIFICA DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - AX=AREA DA SECAO TRANSVERSAL DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - L=COMPRIMENTO DE CADA MEMBRO DA SUBESTRUTURA IP
C - IZ=MOMENTO DE INERCIA EM RELACAO AO EIXO Z DE CADA MEMBRO DA SUBES
C   TRUTURA IP
C - RR=MATRIZ QUE CONTEM AS MATRIZES DE ROTACAO DE TODOS OS MEMBROS DA
C   SUBESTRUTURA IP
C - NDN=MATRIZ QUE CONTEM A INCIDENCIA DE TODOS OS MEMBROS DA SUBESTRU
C   TURA IP
C - IPOS=VETOR APONTADOR DA SUBESTRUTURA IP
C - MB=VETOR DE ARMAZENAGEM DA MATRIZ DE MASSA DA SUBESTRUTURA IP
C   EM SKYLINE
C - N=NUMERO DE MEMBROS DA SUBESTRUTURA IP
C - KMB=IPOS(ILIN(IP))=NUMERO DE TERMOS DO VETOR SB DA SUBESTRUTURA IP
C - JK=VETOR DE TRABALHO
C - KPT=ILIN(IP)=NUMERO TOTAL DE DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA IP
C - IP=NUMERO DA SUBESTRUTURA
C - .....
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION MAM(6,6),RO(N),AX(N),L(N),IZ(N),MAMR(6,6),
C *MAMD(6,6),IPOS(KPT),MB(KMB),JK(6)
C   COMMON/UM/NDN(47,2),RR(47,3,3)
C   DOUBLE PRECISION MB,L,IZ,MAM,MAMR,MAMD
C   DO 10 J=1,6
C   DO 10 K=1,6
10  MAM(J,K)=0.
C   MAM(1,1)=RO(I)*AX(I)*L(I)/3.
C   MAM(2,2)=RO(I)*AX(I)*L(I)*(13./35.+(6.*IZ(I))/(5.*AX(I)*
C *L(I)*L(I)))
C   MAM(3,3)=RO(I)*AX(I)*L(I)*(L(I)*L(I)/105.+(2.*IZ(I))/(15.
```

```
**AX(I))
  MAM(4,4)=MAM(1,1)
  MAM(5,5)=MAM(2,2)
  MAM(6,6)=MAM(3,3)
  MAM(3,2)=RO(I)*AX(I)*L(I)*((11.*L(I))/210.+IZ(I)/(10.*AX
*(I)*L(I)))
  MAM(4,1)=RO(I)*AX(I)*L(I)/6.
  MAM(5,2)=RO(I)*AX(I)*L(I)*(9./70.-(6.*IZ(I))/(5.*AX(I)*
*L(I)*L(I)))
  MAM(5,3)=RO(I)*AX(I)*L(I)*((13.*L(I))/420.-IZ(I)/(10.*
*AX(I)*L(I)))
  MAM(6,2)=-MAM(5,3)
  MAM(6,3)=-RO(I)*AX(I)*L(I)*(L(I)*L(I)/140.+IZ(I)/(30.*AX
*(I)))
  MAM(6,5)=-MAM(3,2)
  DO 20 J=1,6
  DO 20 K=1,J
20  MAM(K,J)=MAM(J,K)
  DO 30 J=1,6
  DO 30 K=1,6
30  MAMR(J,K)=0.
  DO 40 IS=1,3
  DO 40 J=1,3
  DO 40 K=1,3
  MAMR(IS,J)=MAMR(IS,J)+MAM(IS,K)*RR(I,K,J)
  MAMR(IS+3,J)=MAMR(IS+3,J)+MAM(IS+3,K)*RR(I,K,J)
  MAMR(IS,J+3)=MAMR(IS,J+3)+MAM(IS,K+3)*RR(I,K,J)
  MAMR(IS+3,J+3)=MAMR(IS+3,J+3)+MAM(IS+3,K+3)*RR(I,K,J)
40  CONTINUE
  DO 50 J=1,6
  DO 50 K=1,6
50  MAMD(J,K)=0.
  DO 60 IS=1,3
  DO 60 J=1,3
  DO 60 K=1,3
  MAMD(IS,J)=MAMD(IS,J)+RR(I,K,IS)*MAMR(K,J)
  MAMD(IS+3,J)=MAMD(IS+3,J)+RR(I,K,IS)*MAMR(K+3,J)
  MAMD(IS,J+3)=MAMD(IS,J+3)+RR(I,K,IS)*MAMR(K,J+3)
```

```
      MAMD(I3+3,J+3)=MAMD(I3+3,J+3)+RR(I,K,I3)*MAMR(K+3,J+3)
60  CONTINUE
      IC=0
      DO 70 J=1,2
      DO 70 K=1,3
      IC=IC+1
      ML=3*(NDN(I,J)-1)+K
      JK(IC)=ML
70  CONTINUE
      DO 80 J=1,6
      DO 80 K=1,6
      JKA=JK(K)
      NCO=JKA-JK(J)+1
      IF(NCO.LE.0)GO TO 80
      LI=IPDS(JKA)+JK(J)-JKA
      MB(LI)=MB(LI)+MAMD(J,K)
80  CONTINUE
      RETURN
      END
C  -  ::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
      SUBROUTINE SSPACE (A,B,MAXA,EIGV,TT,W,AR,BR,VEC,D,RTOLV,BUP,BLO,
*BUPC,NN,NM,NWK,NWM,NROOT,RTOL,NC,NNC,NITEM,IFSS,IFPR,NSTIF,IOUT,
$NSTP,LNC,IF)
C
C  -  CALCULA OS PRIMEIROS AUTOVALORES E AUTOVECTORES USANDO ITERACOES
C  -  POR SUBESPACO
C  -  ::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
C  -  PARAMETROS:
C  -  A=VETOR DE ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DE RIGIDEZ POSITIVA DEFINIDA EM
C  -  SKYLINE
C  -  B=VETOR DE ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DE MASSA EM SKYLINE
C  -  MAXA=VETOR APONTADOR DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ - NUMERACAO
C  -  DO TOPO ATE A DIAGONAL
C  -  R=MATRIZ DE ARMAZENAMENTO DOS AUTOVECTORES CALCULADOS
C  -  EIGV=VETOR DE ARMAZENAMENTO DOS AUTOVALORES CALCULADOS
C  -  TT,W,AR,BR,VEC,D,RTOLV,BUP,BLO,BUPC,=VETORES DE TRABALHO
C  -  NN=3*NJ=ORDEN DA MATRIZ DE MASSA OU DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA
C  -  NM=NN+1
```

```
C - NWK=IPOS(3*NJ)=NUMERO DE ELEMENTOS ABAIXO DO SKYLINE DA MATRIZ DE
C   RIGIDEZ
C - NWM=IPOS(3*NJ)=NUMERO DE ELEMENTOS ABAIXO DO SKYLINE DA MATRIZ DE
C   MASSA
C - NROOT=NUMERO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES A SEREM CALCULADOS
C - RTOL=TOLERANCIA PARA CONVERGENCIA DOS AUTOVETORES
C - NC=NUMERO DE VETORES DE ITERACOES A SER USADO(NORMALMENTE E O MENO
C   R VALOR ENTRE: 2*NROOT E NROOT+8)
C - NNC=NC*(NC+1)/2=VARIABEL DE DIMENSIONAMENTO DOS VETORES AR E BR
C - NITEM=NUMERO MAXIMO DE ITERACOES POR SUBESPACO PERMITIDO PARA ATIN
C   GIR A CONVERGENCIA
C - IFSS=CHAVE DA CHECAGEM DA SEQUENCIA DE STURM. SE IFSS=1 - CHECA ;
C   SE IFSS=0 - NAO CHECA
C - IFPR=CHAVE DA IMPRESSAO DE ITERACOES INTERMEDIARIAS ANTES DA CON-
C   VERGENCIA. SE IFPR=0 - NAO IMPRIME ; SE IFPR=1 - IMPRIME
C - NSTIF=NUMERO DO ARQUIVO PARA A GRAVACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C - IOUT=NUMERO EQUIVALENTE A IMPRESSORA
C - NSTP=MAIOR VALOR ENTRE: (1) NGL(NNT) = NUMERO DE GRAUS DE LIBERDA-
C   DE DA ESTRUTURA ACOPLADA; (2) MAIOR NUMERO DE GRAUS DE LIBER-
C   DADE TOTAL DENTRE AS SUBESTRUTURAS
C - LNC=MAIOR VALOR ENTRE: (1) 2*(MAIOR NUMERO DE AUTOVETOR DESEJADO
C   POR SUBESTRUTURA OU DA ESTRUTURA COMO UM TODO); (2) 8+(MAIOR
C   NUMERO DE AUTOVETORDESEJADO POR SUBESTRUTURA OU DA ESTRUTURA
C   COMO UM TODO)
C - ::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION A(NWK),B(NWM),TT(NN),W(NN),EIGV(NC),
C 1         D(NC),VEC(LNC,LNC),AR(NNC),BR(NNC),RTOLV(NC),BUP(NC),
C 2         BLO(NC),BUFC(NC)
C   COMMON/CINCO/R(95,28)
C   INTEGER MAXA(NM)
C
C   SET TOLERANCE FOR JACOBI ITERATION
C   TOLJ=0.00000000000001
C
C   ZERAGEM DOS VETORES E MATRIZES QUE NAO SEJAM PARAMETROS DE ENTRADA
C   DA SUBROTINA SSPACE - O IBM NAO ZERA OS VETORES AO SER INICIALIZADO
C
```

```
      DO 891 IPZ=1,NC
      EIGV(IPZ)=0.
      D(IPZ)=0.
      RTOLV(IPZ)=0.
      BUP(IPZ)=0.
      BLD(IPZ)=0.
891  BUPC(IPZ)=0.
      DO 892 IPZ=1,NN
      TT(IPZ)=0.
892  W(IPZ)=0.
      DO 893 IPZ=1,NNC
      AR(IPZ)=0.
893  BR(IPZ)=0.
      DO 894 IPZ=1,NSTP
      DO 894 IPX=1,LNC
894  R(IPZ,IPX)=0.
      DO 895 IPZ=1,LNC
      DO 895 IPX=1,LNC
895  VEC(IPZ,IPX)=0.
```

C  
C  
C  
INITIALIZATION

```
      ICONV=0
      NSCH=0
      NSMAX=12
      N1=NC+1
      NC1=NC-1
      WRITE (NSTIF) A
      CLOSE(NSTIF)
      DO 60 I=1,NC
60  D(I)=0.
```

C  
C  
C  
ESTABLISH STARTING ITERATION VECTORS

```
      ND=NN/NC
      IF(NWM.GT.NN) GO TO 4
      J=0
      DO 2 I=1,NN
```

```
      II=MAXA(I)
      R(I,1)=B(I)
      IF (B(I).GT.0) J=J+1
2    W(I)=B(I)/A(II)
      IF (NC.LE.J) GO TO 16
      WRITE (IOUT,1007)
      STOP
4    DO 10 I=1,NN
      II=MAXA(I)
      R(I,1)=B(II)
10   W(I)=B(II)/A(II)
16   DO 20 J=2,NC
      DO 20 I=1,NN
20   R(I,J)=0.
```

```
C
      L=NN-ND
      DO 30 J=2,NC
      RT=0.
      DO 40 I=1,L
      IF (W(I).LT.RT) GO TO 40
      RT=W(I)
      IJ=I
40   CONTINUE
      DO 50 I=L,NN
      IF (W(I).LE.RT) GO TO 50
      RT=W(I)
      IJ=I
50   CONTINUE
      TT(J)=FLOAT(IJ)
      W(IJ)=0.
      L=L-ND
30   R(IJ,J)=1.
```

```
C
      WRITE (IOUT,1008)
      WRITE (IOUT,1002) (TT(J),J=2,NC)
```

```
C
      FACTORIZE MATRIX A INTO (L)*(D)*(L(T))
C
```

ISH=0

CALL DECOMP (A,MAXA,NN,ISH,IOUT)

C  
C  
C

- - - S T A R T O F I T E R A T I O N L O O P

NITE=0

100 NITE=NITE+1

IF (IFFR.EQ.0) GO TO 90

WRITE (IOUT,1010) NITE

C  
C  
C

CALCULATE THE PROJECTIONS OF A AND B

90 IJ=0

DO 110 J=1,NC

DO 120 K=1,NN

120 TT(K)=R(K,J)

CALL REDBAK (A,TT,MAXA,NN)

DO 130 I=J,NC

ART=0.

DO 140 K=1,NN

140 ART=ART+R(K,I)\*TT(K)

IJ=IJ+1

130 AR(IJ)=ART

DO 150 K=1,NN

150 R(K,J)=TT(K)

110 CONTINUE

IJ=0

DO 160 J=1,NC

CALL MULT (TT,B,R(1,J),MAXA,NN,NWM)

DO 180 I=J,NC

BRT=0.

DO 190 K=1,NN

190 BRT=BRT+R(K,I)\*TT(K)

IJ=IJ+1

180 BR(IJ)=BRT

IF (ICONV.GT.0) GO TO 160

DO 200 K=1,NN

200 R(K,J)=TT(K)

160 CONTINUE

C SOLVE FOR EIGENSYSTEM OF SUBSPACE OPERATORS

C IF (IFPR.EQ.0) GO TO 320

C IND=1

210 WRITE (IOUT,1020)

C II=1

C DO 300 I=1,NC

C ITEMF=II+NC-I

C WRITE(IOUT,1005) (AR(J),J=II,ITEMF)

300 II=II+N1-I

C WRITE (IOUT,1030)

C II=1

C DO 310 I=1,NC

C ITEMF=II+NC-I

C WRITE (IOUT,1005) (BR(J),J=II,ITEMF)

310 II=II+N1-I

C IF (IND.EQ.2) GO TO 350

C 320 CALL JACOBI (AR,BR,VEC,EIGV,W,NC,NNC,TOLJ,NSMAX,IFPR,IOUT,LNC)

C IF (IFPR.EQ.0) GO TO 350

C WRITE (IOUT,1040)

C IND=2

C GO TO 210

C ARRANGE EIGENVALUES IN ASCENDING ORDER

C 350 IS=0

C II=1

C DO 360 I=1,NC1

C ITEMF=II+N1-I

C IF (EIGV(I+1).GE.EIGV(I)) GO TO 360

C IS=IS+1

C EIGVT=EIGV(I+1)

C EIGV(I+1)=EIGV(I)

C EIGV(I)=EIGVT

```
BT=BR(ITEMP)
BR(ITEMP)=BR(II)
BR(II)=BT
DO 370 K=1,NC
RT=VEC(K,I+1)
VEC(K,I+1)=VEC(K,I)
370 VEC(K,I)=RT
360 II=ITEMP
IF (IS.GT.0) GO TO 350
IF (IFPR.EQ.0) GO TO 375
WRITE (IOUT,1035)
WRITE (IOUT,1006) (EIGV(I),I=1,NC)

C
C CALCULATE B TIMES APPROXIMATE EIGENVECTORS (ICONV.EQ.0)
C OR FINAL EIGENVECTOR APPROXIMATIONS (ICONV.GT.0)
C
375 DO 420 I=1,NN
DO 422 J=1,NC
422 TT(J)=R(I,J)
DO 424 K=1,NC
RT=0.
DO 430 L=1,NC
430 RT=RT+TT(L)*VEC(L,K)
424 R(I,K)=RT
420 CONTINUE
IF (ICONV.GT.0) GO TO 500

C
C CHECK FOR CONVERGENCE OF EIGENVALUES
C
DO 380 I=1,NC
DIF=DABS(EIGV(I)-D(I))
380 RTOLV(I)=DIF/EIGV(I)
IF (IFPR.EQ.0) GO TO 385
WRITE (IOUT,1050)
WRITE (IOUT,1005) (RTOLV(I),I=1,NC)

C
385 DO 390 I=1,NROOT
IF (RTOLV(I).GT.RTOL) GO TO 400
```

```
390 CONTINUE
    WRITE (IOUT,1060) RTOL
    ICONV=1
    GO TO 100
400 IF (NITE.LT.NITEM) GO TO 410
    WRITE (IOUT,1070)
    ICONV=2
    IFSS=0
    GO TO 100

C
410 DO 440 I=1,NC
440 D(I)=EIGV(I)
    GO TO 100

C
C - - - E N D   O F   I T E R A T I O N   L O O P
C
500 WRITE (IOUT,1100)
    WRITE (IOUT,1006) (EIGV(I),I=1,NROOT)
    WRITE(IOUT,1110)
    WRITE (IOUT,496)
496 FORMAT(1X,///,4X,'DESL X',6X,'DESL Y',7X,'ROT Z',10X,'DESL X'
*,6X,'DESL Y',7X,'ROT Z',10X,'DESL X',6X,'DESL Y',7X,'ROT Z')
    DO 530 J=1,NROOT
530 WRITE (IOUT,498) (R(K,J),K=1,NN)
498 FORMAT(//,(3(1X,1PE11.4),4X,3(1X,1PE11.4),4X,3(1X,1PE11.4)))
    READ(NSTIF)A
    CLOSE(NSTIF)
700 RETURN

C
1002 FORMAT (1H0,10F10.0)
1005 FORMAT(4(1H ,3(1X,1PE11.4),4X,3(1X,1PE11.4),/),///)
1006 FORMAT (1H0,6E22.14)
1007 FORMAT (///63H STOP , NC IS LARGER THAN THE NUMBER OF MASS DEGREES
10F FREEDOM )
1008 FORMAT ( ///,' GRAUS DE LIBERDADE EXCITADOS PELOS VETORES UNITAR',
1'IOS INICIAIS DE ITERACAO')
1010 FORMAT (1H1,32HI T E R A T I O N   N U M B E R ,I4)
1020 FORMAT (20H0PROJECTION OF A (MATRIX AR) )
```

```

1030 FORMAT (28H0PROJECTION OF B (MATRIX BR) )
1035 FORMAT (30H0EIGENVALUES OF AR-LAMBDA*BR )
1040 FORMAT (40H0AR AND BR AFTER JACOBI DIAGONALIZATION )
1050 FORMAT (43H0RELATIVE TOLERANCE REACHED ON EIGENVALUES )
1060 FORMAT (///,33H CONVERG.ATINGIDA P/ TOLERANCIA ,E10.4)
1070 FORMAT (1H1,51H*** NO CONVERGENCE IN MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS
      1      ,9HPERMITTED/35H WE ACCEPT CURRENT ITERATION VALUES/
      2      42H THE STURM SEQUENCE CHECK IS NOT PERFORMED)
1100 FORMAT (///,31H OS AUTOVALORES CALCULADOS SAO )
1110 FORMAT (//, 32H OS AUTOVETORES CALCULADOS SAO )

```

```

C      END
      SUBROUTINE DECOMP (A,MAXA,NN,ISH,IOUT)

```

```

C. * * * * *
C.
C.   P R O G R A M

```

```

C.   TO CALCULATE (L)*(D)*(L)(T) FACTORIZATION OF
C.   STIFFNESS MATRIX
C. * * * * *

```

```

C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(1),MAXA(1)
      IF (NN.EQ.1) RETURN

```

```

C      DO 200 N=1,NN
      IF(N.NE.1)GO TO 101
      KNIP=MAXA(N)
      KN=1
      KL=2
      KU=1
      GO TO 102
101  CONTINUE
      KNIP=MAXA(N)
      KLIP=MAXA(N-1)+1
      KUIP=MAXA(N)-1
      KN=MAXA(N-1)+1
      KL=KN+1

```

```
      KU=MAXA(N)
102 CONTINUE
      KH=KU-KL
      IF (KH) 304,240,210
210  K=N-KH
      IC=0
      KLT=KU
      KLTIP=KLIP
      DO 260 J=1,KH
      IC=IC+1
      KLT=KLT-1
      KIIP=MAXA(K)
      KLTIP=KLTIP+1
      KI=MAXA(K-1)+1
      ND=MAXA(K)-KI
      IF (ND) 260,260,270
270  KK=MIN0(IC,ND)
      C=0.
      DO 280 L=1,KK
280  C=C+A(KIIP-L)*A(KLTIP-L)
      A(KLTIP)=A(KLTIP)-C
260  K=K+1
240  K=N
      B=0.
      DO 300 KKAUX=-KUIF,-KLIF,1
      KK=IABS(KKAUX)
      K=K-1
      KI=MAXA(K)
      C=A(KK)/A(KI)
      IF (DABS(C).LT.1.E07) GO TO 290
      WRITE (IOUT,2010) N,C
      STOP
290  B=B+C*A(KK)
300  A(KK)=C
      A(KNIP)=A(KNIP)-B
304  IF(A(KNIP)) 310,310,200
310  IF (ISH.EQ.0) GO TO 320
      IF(A(KNIP).EQ.0.) A(KNIP)=-1.E-16
```

```
GO TO 200
320 WRITE (IDUT,2000) N,A(KNIP)
STOP
200 CONTINUE

C
RETURN
2000 FORMAT(/ /4BH STOP - STIFFNESS MATRIX NOT POSITIVE DEFINITE ,//
1      32H NONPOSITIVE PIVOT FOR EQUATION ,I4, //
2      10H PIVOT = ,E20.12 )
2010 FORMAT (/ /,47H STOP - STURM SEQUENCE CHECK FAILED BECAUSE OF ,
135H MULTIPLIER GROWTH FOR COLUMN NUMBER,I4, //12H MULTIPLIER=,E20.8)
END
SUBROUTINE REDBAK (A,V,MAXA,NN)
```

```
C. * * * * *
C.
C.   P R O G R A M
C.   TO REDUCE AND BACK-SUBSTITUTE ITERATION VECTORS
C.
C. * * * * *
C.   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C.   DIMENSION A(1),V(1),MAXA(1)
```

```
C
DO 400 N=2,NN
KL=MAXA(N-1)+1
KU=MAXA(N)-1
IF (KU-KL) 400,410,410
410 K=N
C=0.
DO 420 KKAUX=-KU,-KL,1
KK=IABS(KKAUX)
K=K-1
420 C=C+A(KK)*V(K)
V(N)=V(N)-C
400 CONTINUE
```

```
C
DO 480 N=1,NN
K=MAXA(N)
480 V(N)=V(N)/A(K)
```

```
IF (NN.EQ.1) RETURN
N=NN
DO 500 L=2,NN
KL=MAXA(N-1)+1
KU=MAXA(N)-1
IF (KU-KL) 500,510,510
```

```
510 K=N
DO 520 KKAUX=-KU,-KL,1
KK=IABS(KKAUX)
K=K-1
520 V(K)=V(K)-A(KK)*V(N)
500 N=N-1
```

```
C
RETURN
END
SUBROUTINE MULT (TT,B,RR,MAXA,NN,NWM)
```

```
C. * * * * *
C. *
C. P R O G R A M
C. TO EVALUATE PRODUCT OF B TIMES RR AND STORE RESULT IN TT
C. *
C. * * * * *
```

```
C
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DIMENSION TT(1),B(1),RR(1),MAXA(1)
```

```
C
IF (NWM.GT.NN) GO TO 20
DO 10 I=1,NN
10 TT(I)=B(I)*RR(I)
RETURN
```

```
C
20 DO 40 I=1,NN
40 TT(I)=0.
DO 100 I=1,NN
IF(I.EQ.1) GO TO 50
KL=MAXA(I-1)+1
KU=MAXA(I)
GO TO 60
```

```
50 CONTINUE
   KL=1
   KU=1
60 CONTINUE
   II=I+1
   CC=RR(I)
   DO 100 KKAUX =-KU,-KL,1
      KK=IABS(KKAUX)
      II=II-1
100  TT(II)=TT(II)+B(KK)*CC
      IF (NN.EQ.1) RETURN
      DO 200 I=2,NN
         KL=MAXA(I-1)+1
         KU=MAXA(I)-1
         IF (KU-KL) 200,210,210
210  II=I
      AA=0.
      DO 220 KKAUX=-KU,-KL,1
         KK=IABS(KKAUX)
         II=II-1
220  AA=AA+B(KK)*RR(II)
      TT(I)=TT(I)+AA
200 CONTINUE

C      RETURN
C      END
C      SUBROUTINE JACOBI (A,B,X,EIGV,D,N,NWA,RTOL,NSMAX,IFPR,IOUT,LNC)
C. . . . .
C. . . . .
C.   P R O G R A M
C.   TO SOLVE THE GENERALIZED EIGENPROBLEM USING THE
C.   GENERALIZED JACOBI ITERATION
C. . . . .
C.   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C.   DIMENSION A(NWA),B(NWA),X(LNC,LNC),EIGV(N),D(N)
C
C   INITIALIZE EIGENVALUE AND EIGENVECTOR MATRICES
C
```

```
      N1=N+1
      II=1
      DO 10 I=1,N
      IF (A(II).GT.0. .AND. B(II).GT.0.) GO TO 4
      WRITE (IOUT,2020) II,A(II),B(II)
      STOP
4     D(I)=A(II)/B(II)
      EIGV(I)=D(I)
10    II=II+N1-I
      DO 30 I=1,N
      DO 20 J=1,N
20    X(I,J)=0.
30    X(I,I)=1.
      IF (N.EQ.1) RETURN

C
C      INITIALIZE SWEEP COUNTER AND BEGIN ITERATION
C
      NSWEEP=0
      NR=N-1
40    NSWEEP=NSWEEP+1
      IF (IFPR.EQ.1) WRITE (IOUT,2000) NSWEEP

C
C      CHECK IF PRESENT OFF-DIAGONAL ELEMENT IS LARGE ENOUGH TO REQUIRE
C      ZEROING
      EPS=(.01**NSWEEP)**2
      DO 210 J=1,NR
      JP1=J+1
      JM1=J-1
      LJK=JM1*N-JM1*J/2
      JJ=LJK+J
      DO 210 K=JP1,N
      KP1=K+1
      KM1=K-1
      JK=LJK+K
      KK=KM1*N-KM1*K/2+K
      EPTOLA=(A(JK)*A(JK))/(A(JJ)*A(KK))
      EPTOLB=(B(JK)*B(JK))/(B(JJ)*B(KK))
      IF ((EPTOLA.LT.EPS).AND.(EPTOLB.LT.EPS)) GO TO 210
```

```
C
C      IF ZEROING IS REQUIRED, CALCULATE THE ROTATION MATRIX ELEMENTS CA
C      AND CG
      AKK=A(KK)*B(JK)-B(KK)*A(JK)
      AJJ=A(JJ)*B(JK)-B(JJ)*A(JK)
      AB=A(JJ)*B(KK)-A(KK)*B(JJ)
      CHECK=(AB*AB+4.*AKK*AJJ)/4.
      IF (CHECK) 50,60,60
50  WRITE (IOUT,2020)
      STOP
60  SQCH=DSQRT(CHECK)
      D1=AB/2.+SQCH
      D2=AB/2.-SQCH
      DEN=D1
      IF (DABS(D2).GT.DABS(D1))DEN=D2
      IF (DEN) 80,70,80
70  CA=0.
      CG=-A(JK)/A(KK)
      GO TO 90
80  CA=AKK/DEN
      CG=-AJJ/DEN

C
C      PERFORM THE GENERALIZED ROTATION TO ZERO THE PRESENT OFF-DIAGONAL
C      ELEMENT
90  IF (N-2) 100,190,100
100 IF (JM1-1) 130,110,110
110 DO 120 I=1, JM1
      IM1=I-1
      IJ=IM1*N-IM1*I/2+J
      IK=IM1*N-IM1*I/2+K
      AJ=A(IJ)
      BJ=B(IJ)
      AK=A(IK)
      BK=B(IK)
      A(IJ)=AJ+CG*AK
      B(IJ)=BJ+CG*BK
      A(IK)=AK+CA*AJ
120 B(IK)=BK+CA*BJ
```

```
130 IF (KP1-N) 140,140,160
140 LJI=JM1*N-JM1*J/2
    LKI=KM1*N-KM1*K/2
    DO 150 I=KP1,N
        JI=LJI+I
        KI=LKI+I
        AJ=A(JI)
        BJ=B(JI)
        AK=A(KI)
        BK=B(KI)
        A(JI)=AJ+CG*AK
        B(JI)=BJ+CG*BK
        A(KI)=AK+CA*AJ
150 B(KI)=BK+CA*BJ
160 IF (JP1-KM1) 170,170,190
170 LJI=JM1*N-JM1*J/2
    DO 180 I=JP1,KM1
        JI=LJI+I
        IM1=I-1
        IK=IM1*N-IM1*I/2+K
        AJ=A(JI)
        BJ=B(JI)
        AK=A(IK)
        BK=B(IK)
        A(JI)=AJ+CG*AK
        B(JI)=BJ+CG*BK
        A(IK)=AK+CA*AJ
180 B(IK)=BK+CA*BJ
190 AK=A(KK)
    BK=B(KK)
    A(KK)=AK+2.*CA*A(JK)+CA*CA*A(JJ)
    B(KK)=BK+2.*CA*B(JK)+CA*CA*B(JJ)
    A(JJ)=A(JJ)+2.*CG*A(JK)+CG*CG*AK
    B(JJ)=B(JJ)+2.*CG*B(JK)+CG*CG*BK
    A(JK)=0.
    B(JK)=0.
```

C  
C UPDATE THE EIGENVECTOR MATRIX AFTER EACH ROTATION

```
C
      DO 200 I=1,N
      XJ=X(I,J)
      XK=X(I,K)
      X(I,J)=XJ+CG*XK
200  X(I,K)=XK+CA*XJ
210  CONTINUE

C
C      UPDATE THE EIGENVALUES AFTER EACH SWEEP
C
      II=1
      DO 220 I=1,N
      IF (A(II).GT.0. .AND. B(II).GT.0.) GO TO 215
      WRITE (IOUT,2020) II,A(II),B(II)
      STOP
215  EIGV(I)=A(II)/B(II)
220  II=II+N1-I
      IF (IFPR.EQ.0) GO TO 230
      WRITE (IOUT,2030)
      WRITE (IOUT,2040) (EIGV(I),I=1,N)

C
C      CHECK FOR CONVERGENCE
C
230  DO 240 I=1,N
      TOL=RTOL*D(I)
      DIF=DABS(EIGV(I)-D(I))
      IF (DIF.GT.TOL) GO TO 280
240  CONTINUE

C
C      CHECK ALL OFF-DIAGONAL ELEMENTS TO SEE IF ANOTHER SWEEP IS REQUIRED
C
      EPS=RTOL**2
      DO 250 J=1,NR
      JM1=J-1
      JP1=J+1
      LJK=JM1*N-JM1*J/2
      JJ=LJK+J
      DO 250 K=JP1,N
```

```
      KM1=K-1
      JK=LJK+K
      KK=KM1*N-KM1*K/2+K
      EPSA=(A(JK)*A(JK))/(A(JJ)*A(KK))
      EPSB=(B(JK)*B(JK))/(B(JJ)*B(KK))
      IF ((EPSA.LT.EPS).AND.(EPSB.LT.EPS)) GO TO 250
      GO TO 200
```

```
250 CONTINUE
```

C  
C  
C

```
      FILL OUT BOTTOM TRIANGLE OF RESULTANT MATRICES AND SCALE EIGENVECTORS
```

```
255 II=1
      DO 275 I=1,N
      BB=DSQRT(B(II))
      DO 270 K=1,N
270  X(K,I)=X(K,I)/BB
275  II=II+N1-I
      RETURN
```

C  
C  
C

```
      UPDATE  D  MATRIX AND START NEW SWEEP, IF ALLOWED
```

```
280 DO 290 I=1,N
290  D(I)=EIGV(I)
      IF (NSWEEP.LT.NSMAX) GO TO 40
      GO TO 255
2000 FORMAT(27H0SWEEP NUMBER IN *JACOBI* = ,I4)
2010 FORMAT(1H0,6E20.12)
2020 FORMAT (25H0*** ERROR SOLUTION STOP /
      1      31H MATRICES NOT POSITIVE DEFINITE /
      2 4H II=,I4,6H A(II)=,E20.12,6H B(II)=,E20.12)
2030 FORMAT(36H0CURRENT EIGENVALUES IN *JACOBI* ARE,/)
      END
```

C - .....  
 SUBROUTINE TSIESR (A,IPOS,N,JC,KW,ILIN,IP)  
C  
C - TRANSFORMA SIE DE SKYLINE EM RETANGULAR  
C - .....  
C - PARAMETROS:

```
C - A=VETOR QUE CONTEM TODA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA IP ,
C   INCLUSIVE A MATRIZ SIE
C - IPOS=VETOR APONTADOR DA MATRIZ A
C - N=3*NI=NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE INTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - JC=3*(NJ-NI)=NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE EXTERNOS DA SUBESTRUTURA
C   IF
C - F=MATRIZ SIE RETANGULARIZADA
C - KW=IPOS(ILIN(IP))=NUMERO DE TERMOS DO VETOR A DA SUBESTRUTURA IP
C - ILIN=NUMERO TOTAL DE DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA IP
C - IP=NUMERO DA SUBESTRUTURA
C - .....
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(KW),IPOS(ILIN)
      COMMON/DOIS/F(95,62)
      DO 50 I=1,N
      DO 50 J=1,JC
50  F(I,J)=0.
      DO 80 J=1,JC
      IA=N+J
      IB=N+J-1
      NTC=IPOS(IA)-IPOS(IB)-J
      IF(NTC.LE.0) GO TO 80
      NZC=N-NTC
      I=NZC+1
      DO 80 K=I,N
      L=IPOS(IA)+K-J-N
      F(K,J)=A(L)
80  CONTINUE
      DO 90 I=1,N
      DO 90 J=1,JC
90  F(I,J)=-F(I,J)
      RETURN
      END
C - .....
      SUBROUTINE CHPERF(A,IPOS,NWK,N,JC,NI,NSTIF)
C
C - OBTEN O VALOR DE FII RESOLVENDO O SISTEMA SII*FII=-SIE
C - .....
```

```
C - PARAMETROS:
C - A=VETOR QUE CONTEM TODA A MATRIZ DE RIGIDEZ DA SUBESTRUTURA IP ,
C   INCLUSIVE A MATRIZ SIE
C - IPOS=VETOR APONTADOR DA MATRIZ A
C - F=ENTRADA:-SIE; SAIDA: FII
C - NWK=IPOS(ILIN(IP))=NUMERO DE ELEMENTOS DO VETOR A DA SUBESTRUTURA
C   IP
C - N=3*NI=NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE INTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - JC=3*(NJ-NI)=NUMERO DE GRAUS DE LIBERDADE EXTERNOS DA SUBESTRUTURA
C   IP
C - NI=NUMERO EQUIVALENTE A IMPRESSORA
C - NSTIF=NUMERO DO ARQUIVO PARA A GRAVACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ
C - NRED=TIPO DE REDUCAO. SE CRAIG => NRED=2
C   SE GUYAN => NRED=1
C - .....
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   DIMENSION A(NWK),IPOS(N)
C   COMMON/DOIS/F(95,62)
C   VMIN=0.1E-20
C
C - FASE DE TRIANGULARIZACAO
C
C - TESTE DE MATRIZ POSITIVA DEFINIDA
C   IF(A(1).GE.VMIN) GO TO 3
C 4 WRITE(NI,2)
C 2 FORMAT(' SUBROTINA NAO ADEQUADA PARA A RESOLUCAO DO'
C   *'SISTEMA DE EQUACOES',/, ' MATRIZ DOS COEFICIENTES NAO'
C   *'POSITIVA DEFINIDA')
C   STOP
C 3 A(1)=DSQRT(A(1))
C   DO 15 J=2,N
C     LJ=IPOS(J)-IPOS(J-1)
C     JPOS=IPOS(J-1)+1
C     INJ=J-LJ+1
C     IF(INJ.EQ.J) GO TO 18
C     A(JPOS)=A(JPOS)/A(IPOS(INJ))
C     DO 14 I=INJ+1,J
C       JPOS=JPOS+1
```

```
      LI=IPOS(I)-IPOS(I-1)
      INI=I-LI+1
      IMAX=INI
      IF(INJ.GT.INI)IMAX=INJ
      IF(IMAX.GT.(I-1)) GO TO 14
      IPOS1=IPOS(I)-I+IMAX-1
      IPOSJ=IPOS(J)-J+IMAX-1
      DO 17 K=IMAX,I-1
      IPOS1=IPOS1+1
      IPOSJ=IPOSJ+1
17  A(JPOS)=A(JPOS)-A(IPOS1)*A(IPOSJ)
      IF(I.EQ.J) GO TO 18
14  A(JPOS)=A(JPOS)/A(IPOS(I))
C - TESTE DE MATRIZ POSITIVA DEFINIDA
18  IF(A(JPOS).LT.VMIN) GO TO 4
15  A(JPOS)=DSQRT(A(JPOS))
C
C - FASE DE SUBSTITUICAO
C
      DO 20 J=1,JC
20  F(1,J)=F(1,J)/A(1)
      DO 25 I=2,N
      LI=IPOS(I)-IPOS(I-1)
      INI=I-LI+1
      DO 25 J=1,JC
      JPOS=IPOS(I-1)
      AUX=F(I,J)
      IF(INI.EQ.I) GO TO 25
      DO 22 K=INI,I-1
      JPOS=JPOS+1
22  AUX=AUX-A(JPOS)*F(K,J)
25  F(I,J)=AUX/A(IPOS(I))
C
C - FASE DE RETROSUBSTITUICAO POR CONTABILIZACAO
C
      DO 40 IA=2,N
      I=N-IA+2
      DO 30 J=1,JC
```

```
30 F(I,J)=F(I,J)/A(IPOS(I))
   LI=IPOS(I)-IPOS(I-1)
   INI=I-LI+1
   IF(INI.EQ.I) GO TO 40
   JPOS=IPOS(I-1)
   DO 35 K=INI,I-1
     JPOS=JPOS+1
   DO 35 J=1,JC
35 F(K,J)=F(K,J)-A(JPOS)*F(I,J)
40 CONTINUE
   DO 45 J=1,JC
45 F(1,J)=F(1,J)/A(1)
   READ(NSTIF)A
   CLOSE(NSTIF)
   RETURN
   END
```

```
C - .....
SUBROUTINE MDCRAG (NJ,NI,NROOT,ILHA,INI,ILIN,
*ICOL,IDENT,NSTP,MIC,LNC,IP,NSUB)
```

```
C
C - MONTA A MATRIZ DE CRAIG E SUA TRANSPOSTA , OU SEJA, MONTA AS MATRI
C - ZES QUE VIABILIZAM A MUDANCA DAS COORDENADAS FISICAS PARA GENERALI
C - ZADAS
C - .....
C - PARAMETROS:
C - R=MATRIZ DOS AUTOVETORES CALCULADOS NA SSPACE
C - F=(1/SII)*(-SIE)==>CALCULADA NA CHPERF
C - NJ=NUMERO TOTAL DE NOS DA SUBESTRUTURA IP
C - NI=NUMERO DE NOS INTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - NROOT=NUMERO DE AUTOVETORES REQUERIDOS DA SUBESTRUTURA IP
C - CRAIG=MATRIZ DA TRANSFORMACAO DE COORDENADAS
C - CRAIGT=MATRIZ TRANSPOSTA DA MATRIZ CRAIG
C - ILHA=3*(NJ-NI)=NUMERO DE DESLOCAMENTOS EXTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - INI=3*NI=NUMERO DE DESLOCAMENTOS INTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - ILIN=3*NJ=NUMERO TOTAL DE DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA IP
C - ICOL=3*(NJ-NI)+NROOT=PARAMETRO DE DIMENSIONAMENTO
C - IDENT=MATRIZ DE IDENTIDADE
C - NSTP=MAIOR VALOR ENTRE: (1) NGL(NNT) = NUMERO DE GRAUS DE LIBERDA--
```

```
C      DE DA ESTRUTURA ACOPLADA; (2) MAIOR NUMERO DE GRAUS DE LIBER-
C      DADE TOTAL DENTRE AS SUBESTRUTURAS
C - MIC=3*(MXNJ-MINI)+MNROOT. ONDE MXNJ=NUMERO MAXIMODE NOS DENTRE AS
C      SUBESTRUTURAS; MINI=NUMERO MINIMO DE NOS INTERNOS DENTRE AS SU-
C      BESTRUTURAS; MNROOT=NUMERO MAXIMO DE AUTOVETORES DENTRE AS SU-
C      BESTRUTURAS
C - LNC=MAIOR VALOR ENTRE: (1) 2*(MAIOR NUMERO DE AUTOVETOR DESEJADO
C      POR SUBESTRUTURA OU DA ESTRUTURA COMO UM TODO); (2) 8+(MAIOR
C      NUMERO DE AUTOVETORDESEJADO POR SUBESTRUTURA OU DA ESTRUTURA
C      COMO UM TODO)
C - IP=NUMERO DA SUBESTRUTURA
C - NSUB=NUMERO DE SUBESTRUTURAS QUE COMPOEM A ESTRUTURA
C - .....
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      DIMENSION IDENT(MIC,MIC)
C      COMMON/DOIS/F(95,62)
C      COMMON/TRES/CRAIG(3,95,62),CRAIGT(3,62,95),RET(95,62)
C      COMMON/CINCO/R(95,28)
C      DOUBLE PRECISION IDENT
C      DO 10 I=1,ILIN
C      DO 10 J=1,ICOL
C      10 CRAIG(IP,I,J)=0.
C
C - MONTAGEM DA MATRIZ DOS AUTOVETORES (R) NA MATRIZ DE CRAIG
C
C      DO 20 I=1,3*NI
C      DO 20 J=1,NROOT
C      20 CRAIG(IP,I,J)=R(I,J)
C
C - MONTAGEM DA MTZ F DENTRO DA MTZ CRAIG
C
C      IK=0
C      LK=0
C      DO 30 I=1,3*NI
C      LK=LK+1
C      DO 35 J=NROOT+1,ICOL
C      IK=IK+1
C      35 CRAIG(IP,I,J)=F(LK,IK)
```

```
30 IK=0
```

```
C  
C - CONSTRUCAO DA MTZ IDENTIDADE
```

```
C  
      IX=3*(NJ-NI)  
      DO 40 I=1,IX  
      DO 40 J=1,IX  
40 IDENT(I,J)=0.  
      DO 50 I=1,IX  
50 IDENT(I,I)=1.  
      IC=0
```

```
C  
C - MONTAGEM DA MTZ IDENT DENTRO DA MTZ CRAIG
```

```
C  
      L=0  
      DO 60 I=3*NI+1,ILIN  
      L=L+1  
      DO 70 J=NROOT+1,ICOL  
      IC=IC+1  
70 CRAIG(IP,I,J)=IDENT(L,IC).  
60 IC=0
```

```
C  
C - MONTAGEM DA MTZ CRAIG TRASPOSTA = CRAIGT
```

```
C  
      DO 80 I=1,ILIN  
      DO 80 J=1,ICOL  
80 CRAIGT(IP,J,I)=CRAIG(IP,I,J)  
      RETURN  
      END
```

```
C - .....  
      SUBROUTINE MOGUYA (ILIN,ILHA,IP,INI,NSTP,MIC,NSUB)
```

```
C  
C - MONTA A MATRIZ DE GUYAN E SUA TRANSPOSTA , OU SEJA, MONTA AS MATRI  
C ZES QUE VIABILIZAM A MUDANCA DAS COORDENADAS FISICAS PARA GENERALI  
C ZADAS
```

```
C - .....  
C - PARAMETROS:
```

```
C - IP=NUMERO DA SUBESTRUTURA
```

```
C - F=(1/SII)*(-SIE) ==> CALCULADA NA CHPERF
C - GUYAN=MATRIZ DA TRANSFORMACAO DE COORDENADAS
C - GUYANT=MATRIZ TRANSPOSTA DA MATRIZ CRAIG
C - ILHA=3*(NJ-NI)=NUMERO DE DESLOCAMENTOS EXTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - INI=3*NI=NUMERO DE DESLOCAMENTOS INTERNOS DA SUBESTRUTURA IP
C - ILIN=3*NJ=NUMERO TOTAL DE DESLOCAMENTOS DA SUBESTRUTURA IP
C - NSTP=MAIOR VALOR ENTRE: (1) NGL(NNT) = NUMERO DE GRAUS DE LIBERDA-
C   DE DA ESTRUTURA ACOPPLADA; (2) MAIOR NUMERO DE GRAUS DE LIBER-
C   DADE TOTAL DENTRE AS SUBESTRUTURAS
C - MIC=3*(MXNJ-MINI)+MNROOT. ONDE MXNJ=NUMERO MAXIMO DE NOS DENTRE AS
C   SUBESTRUTURAS; MINI=NUMERO MINIMO DE NOS INTERNOS DENTRE AS SU-
C   BESTRUTURAS; MNROOT=NUMERO MAXIMO DE AUTOVETORES DENTRE AS SU-
C   BESTRUTURAS
C - NSUB=NUMERO DE SUBESTRUTURAS QUE COMPOEM A ESTRUTURA
C - ::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
C   IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C   COMMON/QUATRO/GUYAN(3,95,62),GUYANT(3,62,95)
C   COMMON/DOIS/F(95,62)
C   DO 10 I=1,ILIN
C   DO 10 J=1,ILHA
C   10 GUYAN(IP,I,J)=0.

C
C - MONTAGEM DA MATRIZ DOS MODOS DE RESTRICAO (F) DENTRO DA MATRIZ DE
C- GUYAN
C   DO 20 I=1,INI
C   DO 20 J=1,ILHA
C   20 GUYAN(IP,I,J)=F(I,J)

C
C - MONTAGEM DE UMA MTZ IDENT DENTRO DA MTZ GUYAN
C
C   K=0
C   J=INI
C   DO 30 I=1,ILHA
C   J=J+1
C   K=K+1
C   30 GUYAN(IP,J,K)=1.

C
C - MONTAGEM DA MTZ GUYAN TRASPOSTA = GUYANT
```

```
C
      DO 80 I=1,ILIN
      DO 80 J=1,ILHA
80   GUYANT(IP,J,I)=GUYAN(IP,I,J)
      RETURN
      END
C - .....
      SUBROUTINE MUTIVE(IPOS,B,Y,N,M,ITAM,KI,A,NSTP,MIC,IP,NSUB)
C
C - FAZ A MULTIPLICACAO DE UMA MATRIZ EM SKYLINE POR UMA RETANGULAR ,
C   (A=B*Y)
C - .....
C - PARAMETROS;
C - IPOS=VETOR APONTADOR DA MATRIZ B (SKYLINE)
C - B=VETOR CONTENDO A MATRIZ EM SKYLINE
C - Y=MATRIZ RETANGULAR
C - N=NUMERO DE LINHAS DA MATRIZ Y
C - M=NUMERO DE COLUNAS DA MATRIZ Y
C - ITAM=VARIÁVEL DE DIMENSIONAMENTO DO VETOR A (ITAM.GE.N*M)
C - KI=IPOS(N)=NUMERO DE ELEMENTOS DO VETOR A
C - RET=VETOR A NA FORMA DE MATRIZ RETANGULAR N X M
C - A=VETOR QUE CONTEM A MATRIZ RETANGULAR RET - COLUNA EM BAIXO DE
C   COLUNA
C - IP=NUMERO DA SUBESTRUTURA
C - NSUB=NUMERO DE SUBESTRUTURAS QUE COMPOEM A ESTRUTURA
C - .....
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION IPOS(N),B(KI),Y(3,95,62),A(ITAM)
      COMMON/TRES/CRAIG(3,95,62),CRAIGT(3,62,95),RET(95,62)
      DO 10 I=1,ITAM
10   A(I)=0.
C   ETAPA A DO PRODUTO
      DO 15 I=2,N
      IAUX=IPOS(I-1)
      LI=IPOS(I)-IAUX
      IF(LI.EQ.1) GO TO 15
      INJ=I-LI
      JPOSI=IAUX+1
```

```
JPOSF=IPOS(I)-1
IJ=I
DO 20 J=1,M
K2=INJ
AUX=A(IJ)
DO 25 K=JPOST,JPOSF
K2=K2+1
25 AUX=AUX+B(K)*Y(IP,K2,J)
A(IJ)=AUX
20 IJ=IJ+N
15 CONTINUE
```

```
C
C ETAPA B DO PRODUTO
DO 30 J=1,M
DO 30 K=1,N
IF(K.NE.1) GO TO 35
I1=(J-1)*N+1
A(I1)=A(I1)+B(1)*Y(IP,1,J)
GO TO 30
35 IAUX=IPOS(K-1)
LK=IPOS(K)-IAUX
ILKI=K-LK+1
ILKF=ILKI+LK-1
JPOS=IAUX
IJ=(J-1)*N+ILKI
AUX=Y(IP,K,J)
DO 40 I=ILKI,ILKF
JPOS=JPOS+1
A(IJ)=A(IJ)+B(JPOS)*AUX
40 IJ=IJ+1
30 CONTINUE
```

```
C - RETANGULARIZACAO DO VETOR A
K=0
DO 50 J=1,M
DO 50 I=1,N
K=K+1
50 RET(I,J)=A(K)
RETURN
```

FILE: DYNAMIC FORTRAN

VM/SP RELEASE 3.1 EXPRESS PUT8404+ SLU306

PAGE 046

END