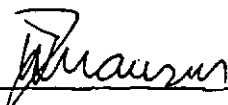


APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS DE  
POTENCIAL QUE ENVOLVEM GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA SUJEITOS  
A CONDIÇÕES DE CONTORNO ARBITRÁRIAS

MIGUEL ANGEL CASTRO CISTERNAS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

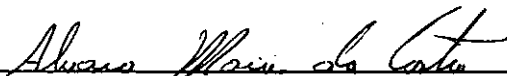
Aprovada por:



WEBE JOÃO MANSUR  
(Presidente)



LUIZ LANDAU



ALVARO MAIA DA COSTA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 1986

CISTERNAS, MIGUEL ANGEL CASTRO

Aplicação do método dos elementos de contorno a problemas de potencial que envolvem geometria axissimétrica sujeitos a condições de contorno arbitrárias (Rio de Janeiro), 1986.

xiii , 132p , 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1986).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Problemas Axissimétricos	2. Condições de Contorno
arbitrárias	3. Elementos de Contorno

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

A meus pais, Mário e Ana.

A meus irmãos, Mário, Verônica e Alessandra.

A minha namorada, Livia Renata.

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor José Claudio de Faria Telles, pela orientação e ensinamentos dispensados.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro, aos professores e funcionários do Programa de Engenharia Civil da COPPE, e em especial ao Professor Luiz Carlos Wrobel.

À Faculdade de Engenharia Civil de Itajubá (FECI), onde obtive os primeiros ensinamentos.

À CAPES pelo apoio financeiro concedido.

Aos colegas da COPPE, pela amizade e colaboração prestada, em especial a Julián Quezada, Eduardo Rizzatti, Emil Sanches Filho, e a "turma" de elementos de contorno, Adolfo Castro, Carlos Loeffler, Fernando Amorim, José Antonio Santiago, Marise Numans, Pedro Sâ, Vânia Karam e Fernando L.B. Ribeiro.

Ao Professor Webe João Mansur, pela atenção prestada na redação final deste trabalho.

À Sueli pelo trabalho de datilografia.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE  
MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO A PROBLEMAS  
DE POTENCIAL QUE ENVOLVEM GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA  
SUJEITOS A CONDIÇÕES DE CONTORNO ARBITRÁRIAS

MIGUEL ANGEL CASTRO CISTERNAS

JULHO DE 1986

Orientador: JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho é apresentada a formulação completa do método dos elementos de contorno para a solução de problemas de potencial na qual corpos axissimétricos são sujeitos a condições de contorno arbitrárias.

Nesta formulação, as variáveis de contorno são desenvolvidas em série de Fourier, em função da coordenada angular. Isto permite que um problema tri-dimensional seja reduzido a uma sequência de problemas uni-dimensionais.

Além da formulação analítica, é apresentada a solução numérica utilizada para a implementação desta formulação.

São apresentados os resultados de cinco aplicações que mostram a precisão do método, quando comparado com soluções obtidas de forma analítica.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL  
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

APPLICATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR POTENTIAL  
PROBLEMS INVOLVING AXISYMMETRIC GEOMETRY AND  
ARBITRARY BOUNDARY CONDITIONS

MIGUEL ANGEL CASTRO CISTERNAS

JULY, 1986

Chairman: JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES

Department: CIVIL ENGINEERING

This work presents a complete boundary element method for the solution of potential problems in which axisymmetric bodies are subjected to arbitrary boundary conditions. In the formulation followed, the boundary variables are developed in Fourier series with respect to the angular coordinate. This permits that a three-dimensional problem be reduced to a sequence of one-dimensional problems.

In addition to the analytical formulation, it is presented the numerical procedure used to implement this formulation.

Results for five applications show the accuracy of the method when compared to analytical solutions.

## NOMENCLATURA

- $\tilde{A}$  = matriz cheia, quadrada de orden  $N$ , formada pelos coeficientes das incógnitas.
- $A_0, \dots, A_{10}$  = valores dos coeficientes do polinômio da integral elíptica completa do primeiro tipo.
- $a$  = raio da esfera.
- $B_0, \dots, B_{10}$  = valores dos coeficientes do polinômio da integral elíptica completa do primeiro tipo.
- $c$  = velocidade de propagação da onda em um meio.
- $C(P)$  = coeficiente que é função do ponto de contorno.
- $EK$  = integral elíptica completa do primeiro tipo.
- $EE$  = integral elíptica completa do segundo tipo.
- $En$  = seqüência de integrais elípticas completas.
- $f$  = função contínua.
- $\tilde{F}$  =  $\left\{ \begin{array}{l} \text{vetor dos termos independentes que inclui a} \\ \text{contribuição dos valores prescritos.} \\ \text{campo vetorial continuamente diferenciável.} \end{array} \right.$
- $FK$  = módulo da integral elíptica.
- $FKL$  = módulo complementar da integral elíptica.
- $\tilde{G}$  = matriz dos coeficientes da solução fundamental.
- $h$  = parâmetro que representa as propriedades de um meio na equação da difusão.
- $\tilde{H}$  = matriz dos coeficientes da derivada da solução fundamental na direção normal.
- $HHn$  = solução fundamental da equação de Laplace, angularmente independente, que é dada em função de integrais elípticas completas.

- HLn = derivada da solução fundamental na direção normal, com relação as coordenadas do ponto campo.
- $\vec{i}$  = vetor unitário.
- i = índice.
- $\vec{I}$  = matriz identidade.
- INF = índice que indica qual o termo da série de Fourier a ser utilizado.
- INDC = índice relativo ao termo em cosseno na série de Fourier.
- INDS = índice relativo ao termo em seno na série de Fourier.
- $\vec{j}$  = vetor unitário.
- j = índice.
- $|\vec{J}|$  = Jacobiano da transformação.
- $\vec{K}$  = vetor unitário.
- K = índice
- K = representa uma função de posição conhecida ou constante na equação de Poisson.
- KODE = código que indica o tipo de condição de contorno dos nós do elemento.
- $\ell$  = comprimento do elemento.
- L = número de pontos de integração.
- m = índice.
- n  $\left\{ \begin{array}{l} \text{índice.} \\ \text{normal.} \end{array} \right.$
- N = número de elementos de contorno.
- $\vec{N}$  = funções de interpolação.
- P = ponto fonte.
- Q = ponto campo.
- $q = \frac{\partial u}{\partial n}$  = derivada do potencial na direção normal.
- $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$  = derivada da solução fundamental na direção normal.



- R = coordenada R dos pontos extremos dos elementos de contorno.
- RR = expressão definida no capítulo III.
- $r(P,Q)$  = distância do ponto fonte até o ponto campo.
- RQ = coordenada R do ponto campo.
- RP = coordenada R do ponto fonte.
- SA,SB = parâmetros do polinômio da integral elíptica completa do 1º tipo.
- SC,SD = parâmetros do polinômio da integral elíptica completa do 2º tipo.
- T = temperatura.
- T' = gradiente de temperatura.
- t = tempo.
- u = potencial.
- U = fluxo uniforme de velocidade no infinito.
- $u^*(P,Q)$  = solução fundamental.
- $\bar{u}$  = função harmônica (função que satisfaz a equação de Laplace)
- $V = \begin{cases} \text{indica } u \text{ ou } q \\ \text{potencial elétrico} \end{cases}$
- VP = valores das condições de contorno prescritas.
- VI = originalmente contém os coeficientes independentes e após a solução conterá os valores das incógnitas do sistema.
- $W_K$  = fator de peso associado ao ponto K.
- $W_M$  = fator de peso associado ao ponto M.
- x = coordenada retangular.
- y = coordenada retangular.
- $\tilde{y}$  = vetor formado pelos valores nodais incógnitos.

- $Z$  = coordenada retangular.  
 $Z_P$  = coordenada  $Z$  do ponto fonte.  
 $Z_Q$  = coordenada  $Z$  do ponto campo.  
 $\alpha$  = cosseno diretor relativo a  $RQ$ .  
 $\beta$  = cosseno diretor relativo a  $ZQ$ .  
 $\delta(P,Q)$  = função generalizada delta de Dirac.  
 $\varepsilon$  = erro de aproximação.  
 $\phi$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{ângulo.} \\ \text{fluxo passando por uma esfera.} \end{array} \right.$   
 $\theta$  = ângulo.  
 $\theta_P$  = ângulo relativo ao ponto fonte.  
 $\theta_Q$  = ângulo relativo ao ponto campo.  
 $\pi$  = 3.141592653589793238462643...  
 $\nabla$  = gradiente.  
 $\nabla^2$  = Laplaciano.  
 $\Gamma$  = superfície do corpo.  
 $\Omega$  = corpo axissimétrico qualquer.  
 $\eta$  = coordenada intrínseca.

## ÍNDICE

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO .....	01
CAPÍTULO II	- PROBLEMAS DE CAMPO E SUA SOLUÇÃO PELO MEC .....	04
	II.1 - Teoria de Campo .....	04
	II.2 - Métodos de Resolução da Equação de Laplace .....	07
	II.3 - Classificação das Soluções .....	07
	II.4 - Solução Fundamental .....	12
	II.5 - Equação Integral .....	14
	II.6 - O Método dos Elementos de Contor- no .....	19
CAPÍTULO III	- APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CON- TORNO .....	27
	III.1 - Introdução .....	27
	III.2 - Formulação Analítica .....	29
	III.3 - Transformação das Integrais Elíp- ticas .....	36
CAPÍTULO IV	- IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA .....	49
	IV.1 - Solução Numérica .....	49
	IV.2 - Cálculo dos Elementos da Matriz $G$ .....	52
	IV.3 - Cálculo dos Elementos da Matriz $H$ .....	64
CAPÍTULO V	- IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....	69
	V.1 - Resumo do Programa Computacional. ....	69
	V.2 - Fluxograma .....	72
	V.3 - Manual de Entrada de Dados .....	76

CAPÍTULO VI	- APLICAÇÕES .....	82
CAPÍTULO VII	- CONCLUSÕES .....	107
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....		112
APÊNDICES		
APÊNDICE A .....		117
APÊNDICE B .....		118
APÊNDICE C .....		119
APÊNDICE D .....		123
APÊNDICE E .....		125
APÊNDICE F .....		128
APÊNDICE G .....		130

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Na procura de novas técnicas numéricas para a solução de problemas de engenharia, o método dos elementos de contorno (MEC) vem se consolidando como uma alternativa eficiente.

Apesar do MEC ser um método de aplicação menos geral que o método dos elementos finitos (MEF), tem-se mostrado um método mais eficiente para certos tipos de problemas, especialmente em problemas de elasticidade que envolvem concentração de tensões. O MEC é também bastante recomendado para a solução de problemas que envolvem domínios infinitos ou semi-infinitos, tais como aplicações em hidráulica, mecânica dos solos, interação fluido-estrutura, solo-estrutura e outros.

O objetivo deste trabalho é aplicar o MEC a problemas de potencial que envolvam geometria axissimétrica sujeita a condições de contorno arbitrárias. Nesta formulação incluem-se problemas de fluxo transversal sobre corpos axissimétricos com aplicações na indústria aeroespacial, bem como todas as aplicações que a teoria de campo possa abranger.

A representação matemática dos problemas é feita pela equação de Laplace e o contorno é discretizado, utilizando-se elementos com variação constante.

Neste trabalho é apresentada a formulação completa para este tipo de problema.

Um programa elaborado em linguagem Fortran foi desenvolvido para os computadores Bourroughs B-6700 e B-6800 do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

A seguir comenta-se sucintamente os principais autores que têm trabalhado neste tipo de pesquisa.

Um importante trabalho neste assunto foi desenvolvido por L. Wilson [ <sup>1</sup> ] que em 1965 publicou um artigo no qual utilizava o MEF no cálculo de tensões e deslocamentos para sólidos elásticos de revolução sujeitos a cargas axissimétricas ou não-axissimétricas, isto é, cargas arbitrárias.

Nesse trabalho, Wilson inclui o estudo de estruturas complexas considerando as propriedades dos materiais anisotrópicos e fazendo uso de princípios de energia; equações de equilíbrio são formadas para a estrutura completa.

Para o caso de cargas arbitrárias, os deslocamentos  $u_r$ ,  $u_z$  e  $u_\theta$  de cada nó são expandidos em série de Fourier e admitindo as propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas, a análise é dividida em uma soma de análises bi-dimensionais. Este trabalho pode ser considerado como a primeira publicação que trata de corpos de revolução sujeitos a cargas arbitrárias.

Em 1967, Hess e Smith [ <sup>2</sup> ], utilizando o MEC, desenvolveram um trabalho para obter a solução de problemas de fluxo de potencial sobre corpos arbitrários com condições de contorno ti-

po Neumann utilizando o método indireto para o cálculo do potencial e da velocidade.

M. Mayr [ <sup>3</sup> ], em 1976, desenvolve uma formulação para tratar problemas de elasticidade axissimétrica utilizando o MEC. Nesse mesmo trabalho ele faz a extensão para condições de contorno arbitrárias, seguindo o mesmo caminho utilizado por Wilson com a utilização do MEF.

Em 1979, F.J. Rizzo e D.J. Shippy [ <sup>4</sup> ] fornecem os elementos necessários para a obtenção da solução pelo MEC para problemas de potencial e elasticidade para corpos axissimétricos com condições de contorno arbitrárias.

Já em 1980, M. Mayr e outros [ <sup>5</sup> ] publicam um procedimento semi-analítico para o estudo de corpos elásticos axissimétricos sujeitos a condições de contorno arbitrárias, com a utilização do MEC.

Nesse mesmo ano Shippy, Rizzo e Nigan [ <sup>6</sup> ] desenvolvem uma formulação completa para problemas de elasticidade onde resultados numéricos para alguns exemplos estão incluídos. Paralelamente, Shippy, Rizzo e Gupta [ <sup>7</sup> ] fazem o mesmo desenvolvimento para problemas governados pela equação de Laplace.

No final deste trabalho, são apresentados exemplos ilustrativos resolvidos que mostram a eficiência do MEC quando aplicado a problemas de potencial que envolvam geometria axissimétrica sujeita a condições de contorno arbitrárias.

## CAPÍTULO II

### PROBLEMAS DE CAMPO E SUA APLICAÇÃO PELO MEC

#### II.1 TEORIA DE CAMPO

A teoria matemática que recebe o nome de teoria de campo é aquela que usualmente é utilizada na pesquisa de métodos que predigam fenômenos naturais.

Assim, imaginando uma região de um espaço  $V$ , na qual cada ponto é associado a um ou mais números que representam uma quantidade física, estes números podem ser especificados como temperatura, pressão, densidade e intensidade de campo elétrico, entre outros.

A totalidade destes valores para cada tipo de quantidade física, constitui um campo físico, que por conseguinte são chamados de: campo térmico, campo gravitacional e campo elétrico.

Na teoria de campo, os problemas envolvem em um determinado meio ou domínio, redes de fluxo, que são malhas compostas por linhas de fluxo (linhas tangentes em cada instante e em cada ponto ao vetor de velocidade nesse ponto) e linhas equipotenciais que, em um meio isótropo e em regime permanente (ou seja, a-quele cujas características em cada ponto não variam com o tem-po), são ortogonais entre si.

A extensa área de aplicações da teoria de campo pode ser inferida da seguinte lista:



a. movimento de fluidos

cálculo de fluxo sobre aerofólios e outras obstruções, infiltração de fluidos através de um meio poroso.

b. condução de calor

determinação da distribuição de temperatura em sólidos em geral.

c. elasticidade

engenharia estrutural e problemas de vibração.

d. difusão

cálculo do aquecimento e esfriamento de metais, têmpera de vidros e a difusão de fluidos.

e. ondas acústicas

projeto de alto falantes e microfones.

f. ondas eletromagnéticas

cálculo da propagação de ondas e antenas.

g. eletrodinâmica

determinação da resistência de condutores com forma irregular.

h. eletroestática

projeto de tubos de vácuo, microscópios de elétrons, osciloscópios de raios catódicos e tubos de televisão.

## i. magnetostática

cálculo de geradores e motores

## j. alta-voltagem

projeto de transformadores densos de alta-tensão, voltímetros eletro-estáticos e geradores de Van de Graaf.

Na teoria de campo, muitas aplicações físicas são unificadas pelo fato de poderem ser expressas em equações diferenciais parciais que contêm o Laplaciano. Assim, temos:

$$\text{- Equação de Laplace, } \nabla^2 U = 0 \quad (\text{II.1})$$

$$\text{- Equação de Poisson, } \nabla^2 U = -K \quad (\text{II.2})$$

$$\text{- Equação da Difusão, } \nabla^2 U = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} \quad (\text{II.3})$$

$$\text{- Equação da Onda, } \nabla^2 U = \frac{1}{C^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (\text{II.4})$$

onde U é o potencial.

Em problemas de eletricidade, U é o potencial elétrico; em problemas de magnetismo, U é o potencial magnético; em problemas térmicos, U é a temperatura.

Na equação de Poisson, K representa uma função de posição conhecida ou constante. Os símbolos  $h^2$  e  $C^2$  são parâmetros que representam as propriedades do meio.

Chamamos  $\nabla^2 U$  ao operador de Laplace ou Laplaciano de uma função  $U$ , que em coordenadas retangulares assume a seguinte forma:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{II.5})$$

os problemas de campo na sua forma mais simples de apresentação são governados pela equação de Laplace.

## II.2 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE

Podemos resolver a equação de Laplace de diferentes maneiras.

Em geral, a solução mais satisfatória é a solução matemática exata. Infelizmente, poucos são os casos em que é possível obter uma solução exata para problemas que se apresentam na prática, o que nos leva a recorrer a outros métodos como a solução gráfica, solução experimental ou aos métodos numéricos.

No presente trabalho, recorreremos somente aos métodos numéricos, sendo que o método a ser utilizado é o método dos elementos de contorno (MEC).

## II.3 CLASSIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES

É vantajoso classificar a equação de Laplace de acordo com o número de variáveis independentes.

Como tratamos com um espaço tridimensional (3-D), em geral o potencial é uma função das três variáveis, isto é:

$$U = U(x_1, x_2, x_3)$$

onde  $x_1, x_2$  e  $x_3$  são três números que especificam um ponto no espaço. Eles representam as coordenadas retangulares  $x, y, z$  ou alguma forma de coordenadas curvilíneas.

Em muitos casos, a simetria permite que o potencial possa ser expresso em termos de duas ou mesmo uma variável.

Tais casos são freqüentemente chamados de problemas bi dimensionais (2-D) e unidimensionais (1-D), indiferentemente ao fato que eles formam um espaço tridimensional. Entretanto, temos que distinguir um campo cilíndrico de um campo axissimétrico. Um campo cilíndrico é definido como um campo no qual os con tornos são cilindros que se formam ao deslocarmos a base paralelamente a si mesma segundo uma direção perpendicular.

Um campo axissimétrico é definido como um campo no qual o contorno tem simetria com respeito a um eixo.

No campo cilíndrico, o potencial é independente da dis tância ao longo do cilindro e no campo axissimétrico, o potencial é independente do ângulo circunferencial em relação ao eixo. Em ambos casos,  $U$  é uma função de duas variáveis, mas suas soluções são completamente diferentes.

Assim, temos a seguinte classificação das soluções para a equação de Laplace:

Tipo (3-D) - caso geral,  $U = U(x_1, x_2, x_3)$

Tipo (2-D) - caso campo cilíndrico, com potencial independente da distância ao longo do cilindro,  $U = U(x_1, x_2)$

Tipo (2-D) - caso axissimétrico, com potencial independente do ângulo circunferencial em relação ao eixo,  
 $U = U(x_1, x_2)$

Tipo (1-D) - caso campo cilíndrico no qual o potencial é função de uma variável,  $U = U(x_i)$  onde  $i=1, 2$  ou  $3$

Tipo (1-D) - caso axissimétrico, no qual o potencial é função de uma variável,  $U = U(x_i)$

O tipo (2-D) - caso campo cilíndrico, inclui todas as configurações nas quais o comprimento é infinito na direção  $x_3$ , com  $U$  independente de  $x_3$ . Como exemplo, consideremos um campo eletrostático sobre um condutor cilíndrico de comprimento infinito e seção transversal uniforme (Fig. II.1.a). Qualquer seção paralela ao plano  $x_1$ - $x_2$  será idêntica às demais, de tal maneira que precisamos representar somente o plano da Fig. (II.1.b).

Um outro exemplo do tipo (2-D) - caso campo cilíndrico, é um cilindro finito sem fluxo nos extremos e com  $U$  independentemente de  $x_3$ . Nestas condições podemos obter problemas de

campos elétricos e campos térmicos com isolamento perfeito no ex tremo das superfícies (Fig. II.1.c).

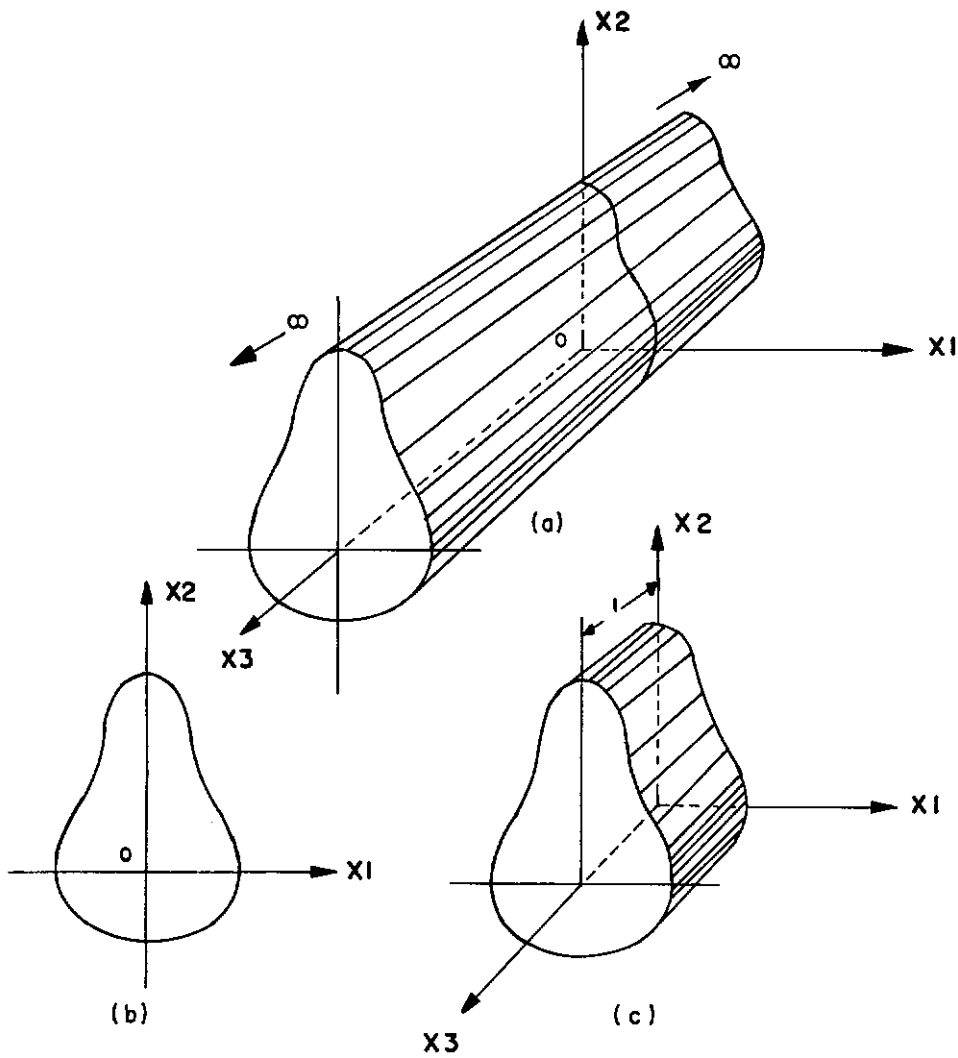


FIG. II-1 - a, b, c - CAMPOS CILÍNDRICOS

O tipo (2-D) - caso campo axissimétrico, é aplicado a configurações que possuem simetria com respeito ao eixo, e uma distribuição de potencial que é também simétrica com respeito a este eixo.

A Fig. (II.2) nos mostra um corpo tendo simetria axial. Se o potencial do corpo é independente do ângulo com respeito ao eixo de simetria, todas as seções contendo os eixos são idênticas.

De fato, uma seção através da Figura (II.2) é a mesma que a seção da Fig. (II.1.b). Contudo, o campo de distribuições é diferente nos dois casos:

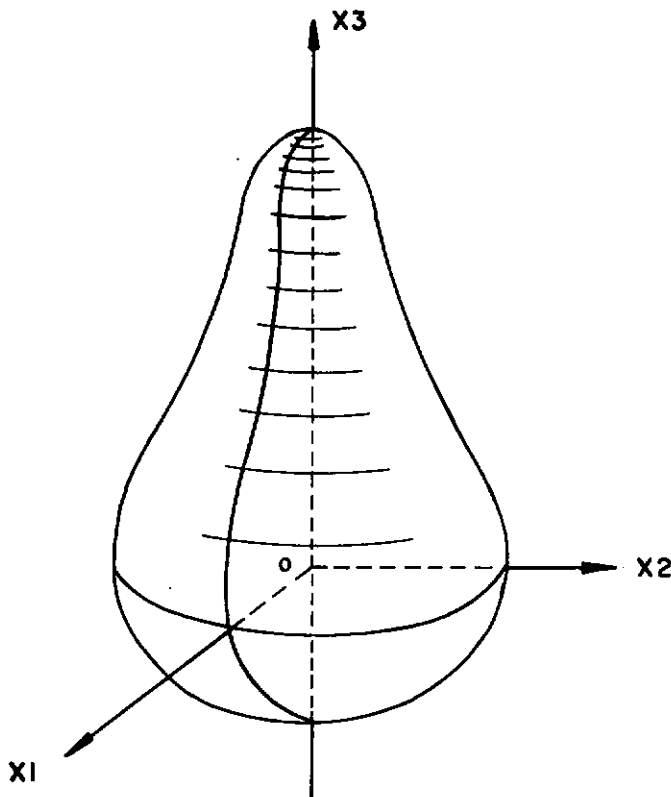


FIG. II-2 - CAMPO AXISSIMÉTRICO

## II.4 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Obtemos uma solução que satisfaz a equação de Laplace, assumindo que uma fonte concentrada age num ponto P. Neste caso a equação que governa o problema é:

$$\nabla^2 u^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (\text{II.6})$$

onde

$u^*(P, Q)$  é a solução fundamental que representa o potencial em Q para uma fonte unitária em P.

$\delta(P, Q)$  é a função generalizada delta de Dirac.

A solução fundamental desta equação para um meio isotrópico tri-dimensional (3-D) é

$$u^* = \frac{1}{4 \pi r} \quad (\text{II.7})$$

onde  $r = r(P, Q)$  é a distância do ponto fonte (P) até o ponto campo (Q).

Neste trabalho utilizaremos  $r(P, Q)$  em coordenadas cilíndricas, assim, definimos o sistema de coordenadas cilíndricas na (Fig. II.3).



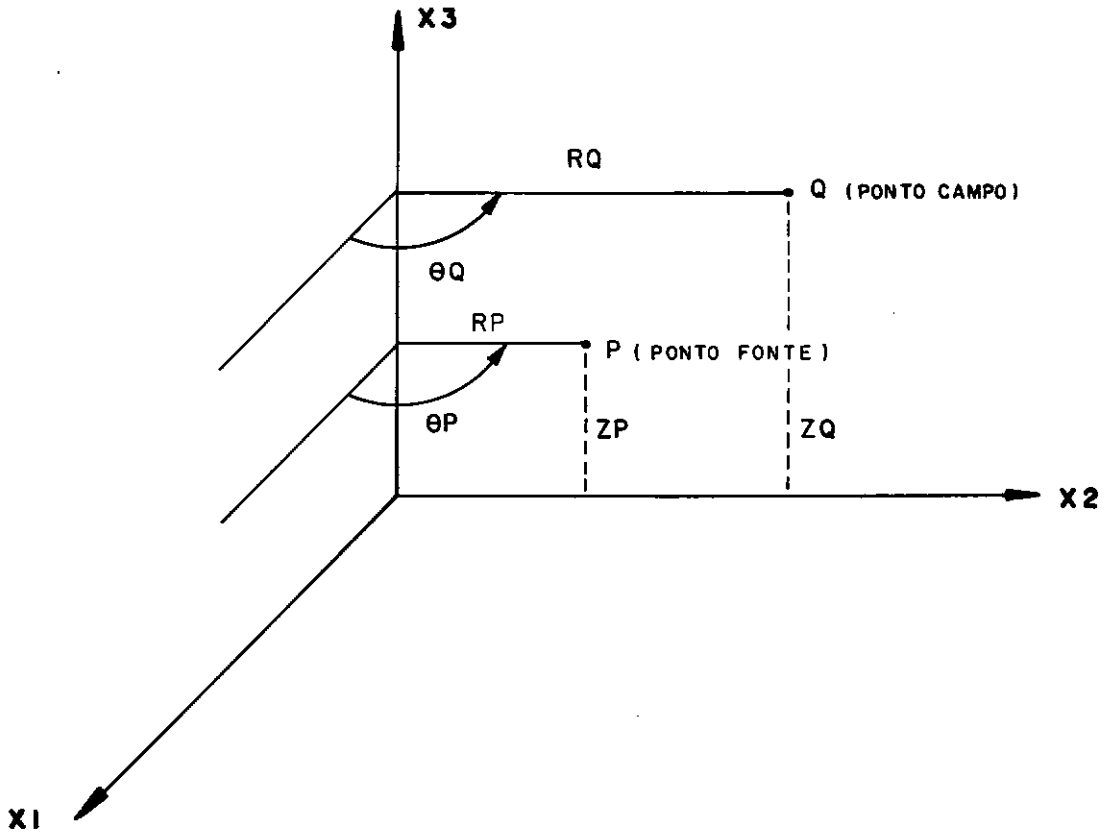


FIG. II-3 - DEFINIÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

em Coordenadas Retangulares

$$r(P,Q) = [ (x_1(Q) - x_1(P))^2 + (x_2(Q) - x_2(P))^2 + (x_3(Q) - x_3(P))^2 ]^{1/2} \quad (II.8)$$

em Coordenadas Cilíndricas

$$r(P,Q) = [ RP^2 + RQ^2 - 2RP \cdot RQ \cos(\theta_Q - \theta_P) + (Z_Q - Z_P)^2 ]^{1/2} \quad (II.9)$$

(\*1)

(\*1) Ver Apêndice A

## II.5 EQUAÇÃO INTEGRAL

A seguir, será apresentada a equação de Laplace, escrita em forma integral. Para tanto, vejamos alguns conceitos básicos que nos levam a tal forma.

Primeiramente, vamos recordar o teorema do divergente, também conhecido na literatura como teorema de Gauss.

Seja  $\Omega$  uma região do espaço tridimensional (3-D) cujo bordo  $\Gamma$  é uma superfície fechada e diferenciável por partes. Seja, também,  $\vec{F}$  um campo vetorial continuamente diferenciável, definido em  $\Omega$  e no seu bordo. Então, se  $\vec{n}$  designa a normal unitária exterior a  $\Omega$ ,

$$\int_{\Omega} (\text{div } \vec{F}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\Gamma \quad (\text{II.10})$$

$$\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \quad \text{onde} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{k}$$

Logo:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\Gamma \quad (\text{II.11})$$

Em particular, se  $u$  e  $u^*$  forem funções escalares duas vezes continuamente diferenciáveis em  $\Omega$  e no seu bordo, e se fi-

zermos

$$\tilde{F} = u (\tilde{\nabla} u^*) = u \left( \frac{\partial u^*}{\partial x_1} \tilde{i} + \frac{\partial u^*}{\partial x_2} \tilde{j} + \frac{\partial u^*}{\partial x_3} \tilde{k} \right),$$

vemos que

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{F} = u (\nabla^2 u^*) + (\tilde{\nabla} u) \cdot (\tilde{\nabla} u^*)$$

e que em (II.11) se torna

$$\int_{\Omega} [u(\nabla^2 u^*) + (\tilde{\nabla} u) \cdot (\tilde{\nabla} u^*)] d\Omega = \int_{\Gamma} [u(\tilde{\nabla} u^*) \cdot \tilde{n}] d\Gamma \quad (\text{II.12})$$

que é conhecida como a primeira identidade de Green.

A segunda identidade de Green é obtida subtraindo de (II.12) uma identidade que corresponde à troca de  $u$  por  $u^*$  nela mesma.

Logo,

$$\int_{\Omega} [u(\nabla^2 u^*) - u^*(\nabla^2 u)] d\Omega = \int_{\Gamma} [u(\tilde{\nabla} u^*) - u^*(\tilde{\nabla} u)] \cdot \tilde{n} d\Gamma$$

a qual escrevemos da seguinte forma

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 u^* - u^* \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (\text{II.13})$$

que é conhecida como a segunda identidade de Green

Toma-se agora a equação (II.6)

$$\nabla^2 u^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0$$

onde  $\delta(P, Q)$  representa uma fonte de intensidade unitária. Define-se a função generalizada delta de Dirac como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(P, Q) = 0 \quad , \quad P \neq Q \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(P, Q) \, d\ell(Q) = \int_{P-\Delta}^{P+\Delta} \delta(P, Q) \, d\ell(Q) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.14})$$

com a seguinte propriedade,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(Q) \delta(P, Q) \, dv(Q) = \int_{P-\Delta}^{P+\Delta} f(Q) \delta(P, Q) \, dv(Q) = f(P) \quad (\text{II.15})$$

onde  $f(Q)$  é uma função contínua.

A função  $u$  satisfaz a equação de Laplace, logo aplicando a segunda identidade de Green, vem:

$$\int_{\Omega} [u(Q) \nabla^2 u^*(P, Q) - u^*(P, Q) \nabla^2 u(Q)] \, d\Omega(Q) = \int_{\Gamma} \left[ u(Q) \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n(Q)} - u^*(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n(Q)} \right] \, d\Gamma(Q)$$

$$\int_{\Omega} [u(Q) (-\delta(P, Q)) - 0] \, d\Omega(Q) = \int_{\Gamma} \left[ u(Q) \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n(Q)} - u^*(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n(Q)} \right] \, d\Gamma(Q)$$

Assim, se  $P \in \Omega$ ,

$$u(P) = \int_{\Gamma} \left[ u^*(P, Q) \frac{\partial u(Q)}{\partial n(Q)} - \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n(Q)} u(Q) \right] d\Gamma(Q)$$

façamos

$$q(Q) = \frac{\partial u(Q)}{\partial n(Q)} \quad \text{e} \quad q^*(P, Q) = \frac{\partial u^*(P, Q)}{\partial n(Q)}$$

Desta forma, a equação de Laplace, escrita como uma equação integral, fica:

$$u(P) = \int_{\Gamma} [u^*(P, Q) q(Q) - q^*(P, Q) u(Q)] d\Gamma(Q) \quad (\text{II.16})$$

que é conhecida como a terceira identidade de Green. Onde  $P$  é um ponto interno da região e  $Q$  é um ponto do contorno.

Entretanto, a equação (II.16) modifica-se se  $P$  é um ponto pertencente a um trecho suave do contorno para [8]:

$$\frac{1}{2} u(P) = \int_{\Gamma} [u^*(P, Q) q(Q) - q^*(P, Q) u(Q)] d\Gamma(Q) \quad (\text{II.17})$$

Portanto, generalizando-se conforme a posição do ponto fonte  $P$ , a equação integral da equação de Laplace pode ser escrita da seguinte forma:

$$C(P) \, u(P) = \int_{\Gamma} [u^* \, q - q^* \, u] \, d\Gamma \quad (\text{II.18})$$

onde o  $C(P)$  assume os seguintes valores:

$C(P) = 1$  se  $P$  é ponto interno

$C(P) = 1/2$  se  $P$  é ponto de contorno suave

$C(P) = 0$  se  $P$  é ponto externo

Quando  $P$  é um ponto de contorno não suave,  $C(P)$  depen  
de dos ângulos dos planos tangentes ao contorno em  $P$ . Por exem-  
plo, no caso 2-D [17]

$$C(P) = \frac{\pi + \alpha_1 - \alpha_2}{2\pi}$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  estão indicados na  
figura (II.4)

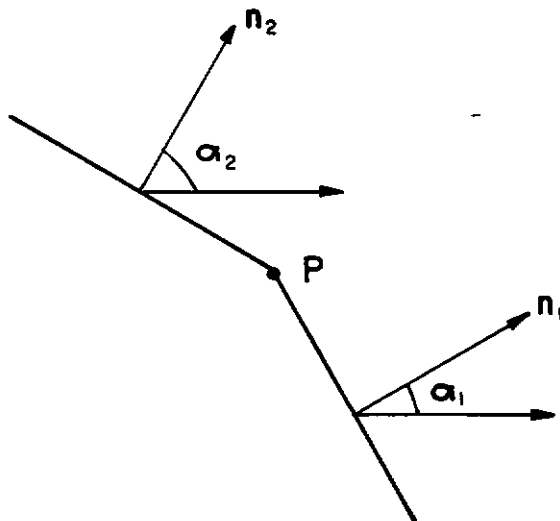


FIG. II-4 - CONTO RNO NÃ O SUAVE 2 - D

## II.6 O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

No presente trabalho, a equação integral (II.18) é resolvida numericamente ao invés de se tentar soluções analíticas. Que são possíveis apenas para algumas geometrias e condições de contorno particulares. Temos, portanto, a seguinte equação para resolver:

$$C(P) u(P) = \int_{\Gamma} [u^* q - q^* u] d\Gamma$$

O método utilizado, como anunciado anteriormente, é o método dos elementos de contorno. Neste método, o contorno  $\Gamma$  é discretizado em uma série de elementos sobre os quais o potencial ( $u$ ) e sua derivada na direção normal ( $q$ ) variam conforme suas funções de interpolação. A geometria destes elementos pode ser aproximada usando elementos de contornos em linha reta, parabólica, arcos circulares ou qualquer superfície conhecida como for desejado, de maneira a melhor representar um determinado tipo de problema.

Usando-se um método de colocação, a equação discretizada é aplicada a um número particular de nós, pertencentes aos elementos onde os valores do potencial e de sua derivada na direção normal estão associados.

As integrais sobre cada elemento são resolvidas numericamente, em geral, usando a quadratura de graus.

Prescrevendo-se as condições de contorno do problema ( $u$  ou  $q$ ), um sistema linear de equações algébricas é obtido. A solução deste sistema de equações, o qual pode ser efetuado usando-se métodos diretos ou iterativos, permite a obtenção das incógnitas do problema.

Trata-se, portanto, de uma formulação do tipo misto, onde resultados para potencial e derivada do potencial na direção normal são obtidos em todos os pontos nodais, com o mesmo grau de precisão.

Cabe observar que embora trabalhemos apenas com incógnitas ao longo do contorno, resultados em qualquer ponto do interior podem ser obtidos posteriormente, a partir dos valores prescritos e calculados no contorno. Neste trabalho vamos abordar apenas problemas com geometria axissimétrica.

Se as condições de contorno são também axissimétricas, a dimensão do espaço é reduzida em uma unidade. E, neste caso, trabalha-se com corpos de geometria bidimensional.

Entretanto, se as condições de contorno não são axissimétricas, isto é, arbitrárias, a dimensão do espaço continua tridimensional. No entanto, com uma adequada utilização das séries de Fourier, como será visto no Capítulo III, é possível novamente reduzir a dimensão do corpo em uma unidade e assim, também trabalhar com corpos de geometria bi-dimensional.



Na identidade (II.18), portanto, o contorno é dividido em uma série de elementos bi-dimensionais. Os pontos onde os valores incôgnitos são considerados são chamados nós e como neste trabalho estamos utilizando elementos com variação constante, são tomados no meio de cada elemento, conforme a Figura (II.5).

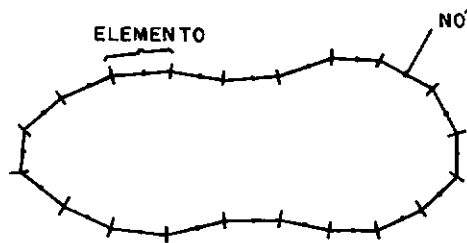


FIG. II-5 - ELEMENTO CONSTANTE

O contorno é discretizado em  $N$  elementos e os valores de  $u$  e  $q$  são tomados constantes sobre cada elemento, sendo que em cada elemento, o valor de um ou outro, isto é,  $u$  ou  $q$  é conhecido.

Escrevemos a equação (II.18), como:

$$C_i u_i + \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma \quad (\text{II.19})$$

Neste trabalho, como foi visto,  $u^*$  é tomado para o caso (3-D), isto é

$$u^* = \frac{1}{4\pi r}$$

e toma-se P como o ponto i sobre o qual a solução fundamental é aplicada, isto é,  $u(P) = u_i$  (similar consideração é feita para o coeficiente  $C(P)$ ).

Discretiza-se, então, a equação (II.19) como se segue:

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma \quad (\text{II.20})$$

Quando utiliza-se elementos constantes, o contorno é sempre suave. Como consequência, o coeficiente  $C_i$  é identicamente igual a  $1/2$  [8]. Observe-se que  $\Gamma_j$  é o comprimento do elemento j e assim a equação (II.20) representa em forma discreta a relação entre o nó i, na qual a solução fundamental é aplicada e todos os j elementos sobre o contorno, inclusive aquele em que  $i=j$  (Fig. II.6).

Os valores de u e q dentro dos elementos são constantes e conseqüentemente podem ser colocados fora das integrais na equação (II.20):

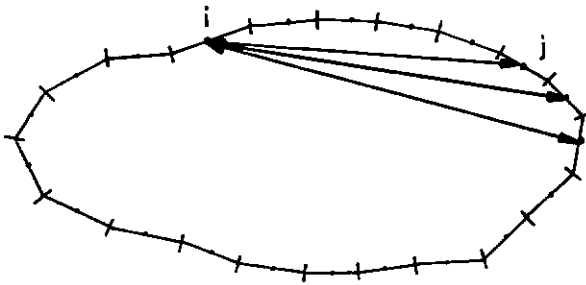


FIG. II-6- RELAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO NÓ DE CONTORNO  $i$  E OS ELEMENTOS DE CONTORNO

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \right] u_j = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \right] q_j \quad (\text{II.21})$$

As integrais  $\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma$  relacionam o nó  $i$  com o elemento  $j$  e serão chamadas de  $\hat{H}_{ij}$ . Similarmente as integrais da forma  $\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma$  serão chamadas de  $G_{ij}$ . Estas integrais são aqui calculadas numericamente.

Portanto, a equação (II.21) pode ser escrita na forma:

$$\frac{1}{2} u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (\text{II.22})$$

A equação (II.22) pode ser escrita para cada  $n^{\circ} i$  em consideração.

Chamando-se [9]

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{quando } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{quando } i = j \end{cases} \quad (\text{II.23})$$

Temos:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad i=1, N \quad (\text{II.24})$$

que pode ser expressa em forma matricial como:

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{Q}} \quad (\text{II.25})$$

Num certo trecho ao longo do contorno temos condições de contorno do tipo DIRICHLET, isto é, o valor do potencial é conhecido. E em outros trechos temos condições de contorno do tipo Neumann, nos quais é conhecido o valor de  $q$ . Conseqüentemente a equação (II.25) pode ser reordenada de tal forma que do lado esquerdo do sistema coloca-se os valores incógnitos de  $u$  e  $q$  e do lado direito do sistema coloca-se os valores conhecidos. O sistema de equações assim obtido é da seguinte forma:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{F}} \quad (\text{II.26})$$

onde  $\tilde{A}$  é uma matriz cheia, quadrada e de ordem  $N$ ,  $\tilde{y}$  é o vetor formado pelos valores nodais incógnitos do potencial e da derivada do potencial na direção normal e  $\tilde{F}$  é o vetor dos termos independentes que inclui a contribuição dos valores prescritos.

Uma vez que a equação (II.26) é resolvida, todos os valores de contorno do potencial e derivada do potencial na direção normal são conhecidos. Pode-se, então, calcular os valores de  $u$  e  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  em qualquer ponto do interior do corpo usando

$$u_i = \int_{\Gamma} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u q^* d\Gamma \quad (\text{II.27})$$

Esta equação representa a relação entre um ponto interno  $i$  e os valores de  $u$  e  $q$  no contorno (Fig. II.7) e pode ser escrita em forma discretizada como:

$$u_i = \sum_{j=1}^N q_j G_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} \quad (\text{II.28})$$

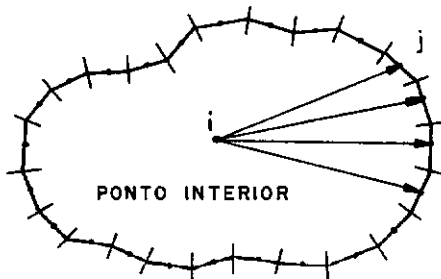


FIG. II-7- RELAÇÃO ENTRE A SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NO PONTO INTERNO  $i$  E OS ELEMENTOS DE CONTOURNO

Os valores dos fluxos internos podem ser calculados pela diferenciação da equação (II.27). Portanto,

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \int_{\Gamma} q \frac{\partial u^*}{\partial x_i} d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial q^*}{\partial x_i} d\Gamma \quad (\text{II.29})$$

onde  $x_i$  são as coordenadas e  $i=1,2$  para o caso bidimensional.

## CAPÍTULO III

### APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

#### III.1 INTRODUÇÃO

Quando um corpo com geometria axissimétrica é sujeito a condições de contorno também axissimétricas, a análise originalmente tridimensional (3-D) torna-se bidimensional (2-D), isto é, o problema é descrito somente na direção radial ( $R$ ) e na direção axial ( $Z$ ).

A aplicação do método dos elementos de contorno (MEC) reduz em uma dimensão a análise do problema. Logo, como tínhamos um problema (2-D), temos agora um problema unidimensional (1-D) isto é, a solução do problema de valores de contorno (PVC) requer referência somente para pontos em um simples contorno de linhas.

Entretanto, se um corpo com geometria axissimétrica é sujeito a condições de contorno não axissimétricas, isto é, arbitrárias. O problema torna-se dependente não somente das direções radial ( $R$ ) e axial ( $Z$ ), mas também da direção angular ( $\theta$ ).

Apesar disso, fazendo uso das propriedades de ortogonalidade das funções harmônicas, especificamente séries de Fourier, e desenvolvendo certas variáveis nesta série em relação à direção angular ( $\theta$ ), a solução do problema pode ser expressa como uma

combinação linear da solução de um número de problemas (2-D) angularmente independentes. Ou seja, resulta em uma seqüência de problemas desacoplados (2-D) angularmente independentes.

Wilson [ <sup>1</sup> ] descreveu um caminho semelhante para problemas de elasticidade em associação com o método dos elementos finitos (MEF).

Chertock [ <sup>10</sup> ] e Mayr [ <sup>3</sup> ] indicaram que tal caminho pode ser utilizado também com o MEC, e Rizzo e Shippy [ <sup>4</sup> ] deram os elementos necessários para a obtenção da solução pelo MEC.

Uma série de Fourier pode ser visualizada (Fig. III.1) como uma função que está definida ao redor de um cilindro.

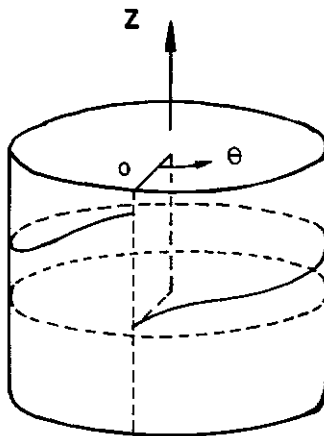


FIG. III-1 - REPRESENTAÇÃO CIRCULAR DE UMA SÉRIE DE FOURIER



Assim, a aplicação do MEC na seqüência de problemas de sacoplados (2-D) proporcionará, como acontece usualmente, uma nova redução na dimensão.

Desta forma, o PVC para corpos axissimétricos sujeitos a condições de contorno arbitrárias, será considerado como uma seqüência de problemas (1-D), envolvendo somente integração de linha.

### III.2 FORMULAÇÃO ANALÍTICA

Considera-se um corpo axissimétrico qualquer  $\Omega$  de superfície  $\Gamma$  (Fig. III.2).

Seja  $P$  um ponto arbitrário em  $\Omega$ ,  $Q$  um ponto arbitrário sobre  $\Gamma$ ,  $r(P,Q)$  a distância entre  $P$  e  $Q$  e  $\bar{\Gamma}$  o contorno gerador. Além disso, seja  $\bar{u}$  uma função harmônica.

A terceira identidade de Green [ Eq. II.16 ] para uma função harmônica  $\bar{u}$  pode ser escrita da seguinte forma [4]:

$$\bar{u}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \bar{u}'(Q) \cdot \frac{1}{r(P,Q)} - \bar{u}(Q) \cdot \left( \frac{1}{r(P,Q)} \right)' \right] d\Gamma(Q) \quad (\text{III.1})$$

onde (') indica derivada na direção da normal externa ao contorno.

A identidade (III.1) é o ponto de partida para o tratamento pelo MEC de problemas de valores de contorno que satisfazem à equação de Laplace. Observe-se que  $\bar{u}$  é definido em  $\Omega$  sob as apropriadas condições de contorno.

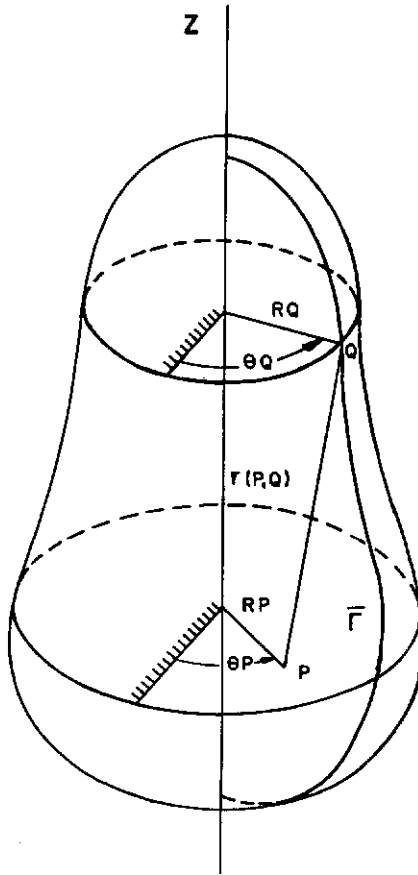


FIG. III-2- DESCRIÇÃO DE COORDENADAS

As funções que aparecem na identidade (III.1) serão desenvolvidas em série de Fourier e será feita uma análise completa com o MEC para cada harmônico da série.

Os resultados finais são obtidos somando aqueles encontrados para cada harmônico no sentido da série de Fourier utilizada.

Assim, para o potencial ou a derivada do potencial na direção normal (u e q respectivamente), teremos:

$$V = \frac{V_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [ V_n^C \cos n\theta + V_n^S \text{senn}\theta ] \quad (\text{III.2})$$

onde V é tomado como u ou q.

Desta forma, tem-se então que obter os " $V_s$ " que melhor representem as características de cada problema.

Logo, expandindo-se em série de Fourier as funções de (III.1), vem:

$$\bar{u}(P) = \frac{u_0(RP, ZP)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [ u_n^C(RP, ZP) \cos n\theta_P + u_n^S(RP, ZP) \text{senn}\theta_P ] \quad (\text{III.3})$$

$$\bar{u}(Q) = \frac{u_0(RQ, ZQ)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} [ u_m^C(RQ, ZQ) \cos m\theta_Q + u_m^S(RQ, ZQ) \text{senm}\theta_Q ] \quad (\text{III.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(P, Q)} &= \frac{K_0(RP, ZP; RQ, \theta_Q, ZQ)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [ K_n^C(RP, ZP; RQ, \theta_Q, ZQ) \cos n\theta_P + \\ &\quad + K_n^S(RP, ZP; RQ, \theta_Q, ZQ) \text{sen } n\theta_P ] \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

que serão representadas como se segue:

$$\bar{u}(P) = u_n(RP, ZP) \cdot \psi_n(\theta_P) \quad (\text{III.6})$$

$$\bar{u}(Q) = u_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_m(\theta_Q) \quad (\text{III.7})$$

$$\frac{1}{r(P, Q)} = K_n(RP, ZP; RQ, \theta_Q, ZQ) \cdot \psi_n(\theta_P) \quad (\text{III.8})$$

Onde nestas representações estão implícitos nos índices  $m$  e  $n$  somatórios de zero até infinito.

Substituindo (III.6), (III.7) e (III.8) em (III.1), vem:

$$u_n(RP, ZP) \cdot \psi_n(\theta_P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} [u'_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_m(\theta_Q) \cdot K_n(RP, ZP; RQ, \theta_Q, ZQ) \cdot \psi_n(\theta_P) - \\ - u_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_m(\theta_Q) \cdot K'_n(RP, ZP; RQ, \theta_Q, ZQ) \cdot \psi_n(\theta_P)] \cdot d\Gamma(Q)$$

mas,

$$d\Gamma(Q) = |\tilde{J}| d\theta_Q \cdot d\bar{\Gamma}_Q$$

onde  $|\tilde{J}|$  = Jacobiano da transformação

$$|\tilde{J}| = RQ \quad (*2)$$

Portanto:

\*2 Ver Apêndice B

$$d\Gamma(Q) = RQ \cdot d\theta Q \cdot d\bar{\Gamma}Q$$

Logo, a identidade toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_n(RP, ZP) \cdot \psi_n(\theta P) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{\Gamma}} [u'_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_n(\theta P) \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \psi_m(\theta Q) \cdot K_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q - \\ &- u_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_n(\theta P) \int_{-\pi}^{\pi} \psi_m(\theta Q) \cdot K'_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q] RQ \cdot d\bar{\Gamma}Q \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} u_n(RP, ZP) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{\Gamma}} [u'_m(RQ, ZQ) \int_{-\pi}^{\pi} \psi_m(\theta Q) K_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q - \\ &- u_m(RQ, ZQ) \int_{-\pi}^{\pi} \psi_m(\theta Q) \cdot K'_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q] RQ \cdot d\bar{\Gamma}Q \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

De (III.7), temos:

$$\bar{u}(Q) \cdot \psi_n(\theta Q) = u_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_m(\theta Q) \cdot \psi_n(\theta Q)$$

que fornece:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}(Q) \cdot \psi_n(\theta Q) d\theta Q = \int_{-\pi}^{\pi} u_m(RQ, ZQ) \cdot \psi_m(\theta Q) \cdot \psi_n(\theta Q) d\theta Q$$

sendo que  $\psi_m$  são as funções trigonométricas ( $\text{sen}m\theta, \text{cos}m\theta$ ) e fazendo uso das propriedades das funções ortogonais temos que quando  $m = n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{senn}\theta \cdot \text{cosn}\theta \, d\theta = 0 \quad (\text{III.10})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{senn}\theta \cdot \text{senn}\theta \, d\theta = \pi \quad (\text{III.11})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{cosn}\theta \cdot \text{cosn}\theta \, d\theta = \pi \quad (\text{III.12})$$

Logo, temos:

$$u_n(RQ, ZQ) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}(\theta) \cdot \psi_n(\theta Q) \cdot d\theta Q \quad (\text{III.13})$$

que são os coeficientes da série de Fourier.

Como  $m=n$ , (III.9) toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_n(RP, ZP) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{\Gamma}} [u'_n(RQ, ZQ) \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot K_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q - \\ &- u_n(RQ, ZQ) \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot K'_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q] RQ \cdot d\bar{\Gamma}Q \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Podemos, agora, definir:

$$HH_n = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot K_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q \quad (\text{III.15})$$

$$HL_n = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot K'_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q \quad (\text{III.16})$$

Assim, a identidade (III.14) fica:

$$u_n(RP, ZP) = \frac{1}{4\pi} \int_{\overline{\Gamma}} [u'_n(RQ, ZQ) \cdot HH_n - u_n(RQ, ZQ) \cdot HL_n] \cdot RQ \cdot d\overline{\Gamma}Q \quad (\text{III.17})$$

Logo, pode-se expressar os coeficientes  $u_n^C$  e  $u_n^S$  do interior da série de  $\overline{u}(P)$  em função dos coeficientes das variáveis de contorno  $\overline{u}(Q)$  e  $\overline{u}'(Q)$  como:

$$u_n^C(RP, ZP) = \frac{1}{4\pi} \int_{\overline{\Gamma}} [u_n^{C'}(RQ, ZQ) \cdot HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) - u_n^C(RQ, ZQ) \cdot HL_n(RP, ZP; RQ, ZQ)] \cdot RQ d\overline{\Gamma}Q \quad (\text{III.18})$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

e

$$\begin{aligned}
 u_n^S(RP, ZP) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{T}} u_n^{S'}(RQ, ZQ) \cdot HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) - \\
 &- u_n^S(RQ, ZQ) \cdot HLn(RP, ZP; RQ, ZQ) \cdot RQ \, d\bar{T}Q \quad (III.19)
 \end{aligned}$$

$n=1, 2, 3, \dots, \infty$

### III.3 TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS ELÍPTICAS

Das equações (III.15) e (III.16) temos que:

$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ)$  é a solução fundamental da equação de Laplace, angularmente independente, que é dada em função de integrais elípticas completas generalizadas.

$HLn(RP, ZP; RQ, ZQ)$  é a derivada da solução fundamental ( $HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ)$ ) na direção normal, no ponto campo (Q).

É possível, em alguns casos, expressar estas integrais em função apenas de integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipo, para as quais existem algoritmos eficientes e de grande precisão à disposição.

De (III.15), vem:



$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot K_n(RP, ZP; RQ, \theta Q, ZQ) d\theta Q \quad (\text{III.20})$$

Seja:  $\theta \equiv \theta P - \theta Q$

temos que,  $\psi_n(\theta P) \equiv \psi_n(\theta + \theta Q)$

que torna possível expressar  $\psi_n(\theta P)$  como uma combinação linear de termos na forma  $\psi_n(\theta Q) \cdot \psi_n(\theta)$ .

Entretanto, Hadamar [1] em 1923 mostrou que  $K_n$  é uma combinação linear de termos na forma

$$\psi_n(\theta Q) \cdot E_n(RP, ZP; RQ, ZQ) \quad (\text{III.21})$$

onde

$$E_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi_n(\theta) \cdot d\theta}{r(RP, ZP; RQ, ZQ, \theta)}$$

Logo,

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot \psi_n(\theta Q) \cdot E_n(RP, ZP; RQ, ZQ) d\theta Q$$

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = E_n(RP, ZP; RQ, ZQ) \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(\theta Q) \cdot \psi_n(\theta Q) \cdot d\theta Q$$

Fazendo uso das propriedades de ortogonalidade das funções trigonométricas, temos:

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = E_n(RP, ZP; RQ, ZQ) \cdot \pi$$

Assim,

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi_n(\theta) \cdot d\theta}{r(RP, ZP; RQ, ZQ, \theta)} \quad (III.22)$$

Sabe-se que  $\psi_n(\theta)$  são as funções trigonométricas ( $\text{senn}\theta$ ,  $\text{cosn}\theta$ ). Logo, quando  $\psi_n(\theta) = \text{senn}\theta$  temos que:

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{senn}\theta \cdot d\theta}{r(RP, ZP; RQ, ZQ, \theta)} \quad (III.23)$$

o denominador desta integral é uma função par, enquanto o numerador ( $\text{senn}\theta$ ) é uma função ímpar, logo as integrais que contêm  $\text{senn}\theta$  anulam-se:

Assim, temos que

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{cosn}\theta \cdot d\theta}{r(RP, ZP; RQ, ZQ, \theta)} \quad (III.24)$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

De (III.16), temos que:

$$H\text{Ln}(RP, ZP; RQ, ZQ) = \frac{\partial H\text{Hn}}{\partial n}(RP, ZP; RQ, ZQ)$$

Assim,

$$H\text{Ln}(RP, ZP; RQ, ZQ) = \frac{\partial}{\partial RQ} H\text{Hn}(RP, ZP; RQ, ZQ) \cdot \frac{\partial RQ}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial ZQ} H\text{Hn}(RP, ZP; RQ, ZQ) \cdot \frac{\partial ZQ}{\partial n} \quad (\text{III.25})$$

Lembrando que

$$r(RP, ZP; RQ, ZQ, \theta) = [RP^2 + RQ^2 - 2RP \cdot RQ \cos(\theta_Q - \theta_P) + (ZQ - ZP)^2]^{1/2}$$

e definindo:

EK = integral elíptica completa do primeiro tipo

EE = integral elíptica completa do segundo tipo

sendo

$$EK = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \sin^2 \theta]^{1/2}} \quad e$$

(III.26)

$$EE = \int_0^{\pi/2} [1 - FK^2 \sin^2 \theta]^{1/2} d\theta$$

(III.27)

onde

$$FK^2 = \frac{4 \cdot RP \cdot RQ}{RR^2} ; \quad FKL^2 = 1 - FK^2 ; \quad RR^2 = (RP + RQ)^2 + (ZQ - ZP)^2$$

FK = módulo da integral elíptica

FKL = módulo complementar

temos,

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{[RP^2 + RQ^2 - 2RP \cdot RQ \cos(\theta_Q - \theta_P) + (ZQ - ZP)^2]^{1/2}}$$

ou

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{[RR^2 - 2RP \cdot RQ (1 + \cos(\theta_Q - \theta_P))]^{1/2}}$$

Chamando  $\theta = \theta_Q - \theta_P$

que fornece

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

temos

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{[RR^2 - 4 RP \cdot RQ \cos^2 \frac{\theta}{2}]^{1/2}}$$

Fazendo-se agora

$$\frac{\theta}{2} = \phi \quad \therefore \quad d\theta = 2 d\phi ; \quad p/\theta = \pi \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$p/\theta = -\pi \rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\phi \cdot 2d\phi}{[RR^2 - RR^2 \cdot FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}}$$

Assim,

$$HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2n\phi \cdot d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}}$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (\text{III.28})$$

para  $n=0$ , temos:

$$HH_0 = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.29})$$

e

$$HL_0 = \frac{\partial HH_0}{\partial RQ} \frac{\partial RQ}{\partial n} + \frac{\partial HH_0}{\partial ZQ} \frac{\partial ZQ}{\partial n}$$

$$\begin{aligned}
 \text{HLO} = \frac{4}{\text{RR}^3} \left\{ - [ (\text{RP}+\text{RQ}) \eta_{\text{RQ}} + (\text{ZQ}-\text{ZP}) \eta_{\text{ZQ}} ] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\
 \left. + [ (2\text{RP} - (\text{RP}+\text{RQ}) \text{FK}^2) \eta_{\text{RQ}} - (\text{ZQ}-\text{ZP}) \text{FK}^2 \cdot \eta_{\text{ZQ}} ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \phi \, d\phi}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \phi]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (\text{III.30})
 \end{aligned}$$

(\*3)

p/n=1, temos:

$$\text{HH1} = \frac{4}{\text{RR}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\phi \, d\phi}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{III.31})$$

e

$$\begin{aligned}
 \text{HL1} = \frac{4}{\text{RR}^3} \left\{ - [ (\text{RP}+\text{RQ}) \eta_{\text{RQ}} + (\text{ZQ}-\text{ZP}) \eta_{\text{ZQ}} ] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\phi \, d\phi}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\
 \left. + [ (2\text{RP} - (\text{RP}+\text{RQ}) \text{FK}^2) \eta_{\text{RQ}} - (\text{ZQ}-\text{ZP}) \text{FK}^2 \eta_{\text{ZQ}} ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\phi \cdot \cos^2 \phi \, d\phi}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \right\}
 \end{aligned}$$

(III.32)

(\*4)

P/n=2, temos:

- \*3 Apêndice C
- \*4 Apêndice D

$$HH2 = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad (III.33)$$

e

$$HL2 = \frac{4}{RR^3} \left\{ - [ (RP+RQ) \eta_{RQ} + (ZQ-ZP) \eta_{ZQ} ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + [ (2RP - (RP+RQ) FK^2) \eta_{RQ} - (ZQ-ZP) FK^2 \eta_{ZQ} ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\phi \cdot \cos^2 \phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (III.34)$$

p/n=3, temos:

$$HH3 = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 6\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad (III.35)$$

e

$$HL3 = \frac{4}{RR^3} \left\{ - [ (RP+RQ) \cdot \eta_{RQ} + (ZQ-ZP) \cdot \eta_{ZQ} ] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 6\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + [ (2RP - (RP+RQ) FK^2) \cdot \eta_{RQ} - (ZQ-ZP) \cdot FK^2 \eta_{ZQ} ] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 6\phi \cdot \cos^2 \phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (III.36)$$

p/n=4, temos:

$$HH4 = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 8\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad (III.37)$$

e

$$HL4 = \frac{4}{RR^3} \left\{ - [ (RP+RQ) \cdot \eta RQ + (ZQ-ZP) ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 8\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ \left. + [ (2RP - (RP+RQ)FK^2) \cdot \eta RQ - (ZQ-ZP) \cdot FK^2 \eta ZQ ] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 8\phi \cdot \cos^2 \phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (III.38)$$

p/n=5, temos:

$$HH5 = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 10\phi \, d\phi}{[1 - FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} \quad (III.39)$$

e



$$\begin{aligned}
 HL5 = \frac{4}{RR^3} \left\{ - [ (RP+RQ) \cdot \eta_{RQ} + (ZQ-ZP) ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 10\phi \, d\phi}{[1-FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\
 \left. + [ (2RP - (RP+RQ)FK^2) \cdot \eta_{RQ} - (ZQ-ZP) \cdot FK^2 \cdot \eta_{ZQ} ] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 10\phi \cdot \cos^2 \phi \, d\phi}{[1-FK^2 \cos^2 \phi]^{\frac{3}{2}}} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{III.40}$$

No presente trabalho foi considerado até um máximo de 5 termos na série de Fourier, sendo que é possível ativar quantos termos forem desejados.

O problema agora consiste em como expressar as integrais de  $\theta$  que aparecem nos diferentes termos em função de integrais elípticas do primeiro e segundo tipo.

Esta representação nem sempre é obtida com facilidade.

No fim deste trabalho (\*5) é apresentada uma tabela de integrais elípticas, com intuito de fornecer subsídios para a obtenção das integrais que aparecem nesta formulação.

No trabalho realizado por SHIPPY, RIZZO e GUPTA [7], a transformação das integrais elípticas foi feita utilizando-se fórmulas de recorrência, por eles desenvolvidas, como será visto a seguir:

$$HH_n = \frac{4}{RR} \cdot G_n, \quad n=0,1,2,\dots,\infty
 \tag{III.41}$$

(\*5 Apêndice E)

onde  $RR^2 = (RQ+RP)^2 + (ZQ-ZP)^2$

$$G_0 = C_0 \quad (III.42)$$

$$G_n = (-1)^n \cdot n \cdot \sum_{m=0}^n [2^{2(n-m)}] \cdot \frac{(-1)^m (2n-m-1)!}{m! [2(n-m)]!} \cdot C_{n-m} \quad (III.43)$$

$$n=1, 2, \dots, \infty$$

sendo

$$C_0 = EK \quad (III.44)$$

$$C_1 = [EE - FKL^2 \cdot EK] \cdot \frac{1}{FK^2} \quad (III.45)$$

$$C_n = (2n-2)(2FK^2-1) (C_{n-1} + \frac{(2n-3) \cdot FKL^2 \cdot C_{n-2}}{[(2n-1) \cdot FK^2]}) \quad (III.46)$$

$$n=2, 3, \dots, \infty$$

e  $FK^2 = \frac{4RQ \cdot RP}{RR^2} ; \quad FKL^2 = 1 - FK^2$

e a derivada de  $HH_n$  na direção normal, é dada por:

$$HL_n = \frac{4}{RR^2} \left\{ \alpha [RR \cdot (\partial G_n / \partial FK) (\partial FK / \partial RQ) - G_n (\partial RR / \partial RQ)] + \right. \\ \left. + B [RR \cdot (\partial G_n / \partial FK) (\partial FK / \partial ZQ) - G_n (\partial RR / \partial ZQ)] \right\} \quad (III.47)$$

onde

$\alpha$  = cosseno diretor relativo a RQ

B = cosseno diretor relativo a ZQ

$$\partial FK / \partial RQ = [2RP - FK^2 (RQ + RP)] \cdot \frac{1}{FK \cdot RR^2} \quad (\text{III.48})$$

$$\partial RR / \partial RQ = (RQ + RP) \cdot \frac{1}{RR} \quad (\text{III.49})$$

$$\partial FK / \partial ZQ = -FK (ZQ - ZP) \cdot \frac{1}{RR^2} \quad (\text{III.50})$$

$$\partial RR / \partial ZQ = (ZQ - ZP) \cdot \frac{1}{RR} \quad (\text{III.51})$$

$$\partial G0 / \partial FK = \partial C0 / \partial FK \quad (\text{III.52})$$

$$\partial Gn / \partial FK = (-1)^n \cdot n \cdot \sum_{m=0}^n 2^{2(n-m)} \cdot \frac{(-1)^m (2n-m-1)!}{m! [2(n-m)]!} (\partial C_{n-m} / \partial FK) \quad (\text{III.53})$$

$n = 1, 2, \dots, \infty$

$$\partial C0 / \partial FK = [EE - FKL^2 \cdot EK] \cdot \frac{1}{FK \cdot FKL^2} \quad (\text{III.54})$$

$$\partial C1 / \partial FK = [(FK^2 - 2 FKL^2) EK - 2EE] \cdot \frac{1}{FK^3} \quad (\text{III.55})$$

$$\partial C_n / \partial FK = \left\{ \begin{aligned} &2(n-1) [ (2FK^2-1) (\partial C_{n-1} / \partial FK) + (2/FK) C_{n-1} ] + \\ &+ (2n-3) [ FKL^2 (\partial C_{n-2} / \partial FK) - (2/FK) C_{n-2} ] \end{aligned} \right\} \cdot \frac{1}{[ (2n-1) \cdot FK^2 ]}$$

(III.56)

## CAPÍTULO IV

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

#### IV.1 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Com a adequada expansão em série de Fourier da equação III.1 como foi visto no Capítulo III, temos que:

$$V(P) = \frac{V_0(RP, ZP)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [V_n^C(RP, ZP) \cos n\theta P + V_n^S(RP, ZP) \sin n\theta P] \quad (IV.1)$$

onde  $V = u$  ou  $q$ , como requerido.

Os valores de  $V_n^C(RP, ZP)$  e  $V_n^S(RP, ZP)$  para cada harmônico da série podem agora ser obtidos, através do método dos elementos de contorno.

Assim, das equações (III.17) e (III.18) temos:

$$u_n^C(RP, ZP) = \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{\Gamma}} [u_n^{C'}(RQ, ZQ) \cdot HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) - u_n^C(RQ, ZQ) \cdot HL_n(RP, ZP; RQ, ZQ)] \cdot RQ \cdot d\bar{\Gamma}Q \quad (IV.2)$$

$$n=0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

$$u_n^S(RP, ZP) = \frac{1}{4\pi} \int_{\bar{\Gamma}} [u_n^{S'}(RQ, ZQ) \cdot HH_n(RP, ZP; RQ, ZQ) -$$

$$- u_n^S(RQ, ZQ) \cdot HL_n(RP, ZP; RQ, ZQ)] \cdot RQ \, d\bar{\Gamma}Q \quad (IV.3)$$

$$n=1,2,3,\dots,\infty$$

Para tal, as coordenadas cilíndricas dos pontos de contorno situados ao longo do elemento  $\Gamma_j$ , são expressas em termos das funções de interpolação  $M$  e as coordenadas nodais do elemento na forma:

$$\tilde{x}^{(j)} = \tilde{M} \tilde{x}^{(n)} \quad (IV.4)$$

onde

$$x^{(j)} = \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix}^{(j)}$$

e

$$x^{(n)} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix}_1 \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} R \\ Z \end{Bmatrix}_p \end{Bmatrix}, \text{ p é o nº de nós do elemento}$$

de maneira análoga, potencial e derivada do potencial na direção

normal são aproximados sobre cada elemento através do uso das funções de interpolação  $\tilde{N}$ :

$$u^{(j)} = \sum_{\tilde{N}} \tilde{u}^{(n)} \quad (\text{IV.5})$$

$$q^{(j)} = \sum_{\tilde{N}} \tilde{q}^{(n)} \quad (\text{IV.6})$$

onde  $\tilde{u}^{(n)}$  e  $\tilde{q}^{(n)}$  contêm os valores nodais de potencial e derivada do potencial na direção normal.

Assume-se que o contorno  $\Gamma$  é discretizado em  $N$  elementos  $\Gamma_j$ . A equação (II.19) pode ser escrita como:

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} q^* \tilde{N} d\Gamma \right] \tilde{u}^{(n)} = \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Gamma_j} u^* \tilde{N} d\Gamma \right] \tilde{q}^{(n)} \quad (\text{IV.7})$$

similarmente à equação (II.24), a equação (IV.8) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u_j^{(n)} = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j^{(n)} \quad (\text{IV.8})$$

o problema concentra-se agora em determinar os elementos das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$ .

## IV.2 CÁLCULO DOS ELEMENTOS DA MATRIZ $G$

Neste trabalho supomos a variação de  $u$  e  $q$  constante. Logo, a matriz  $N$  é tomada igual à identidade 1.

A matriz  $G$  na equação (IV.8) escreve-se como:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma \quad (IV.9)$$

As funções de interpolação  $N$  são normamente expressas em termos de uma coordenada adimensional  $\eta$ .

Escreve-se portanto  $d\Gamma$  em relação a este sistema de coordenadas intrínseco como:

$$d\Gamma = |J| \cdot d\eta \quad (IV.10)$$

onde  $|J|$  é o jacobiano da transformação.

Neste trabalho, as integrais são calculadas numericamente usando a quadratura de Gauss.

São empregados 6 pontos de integração por elemento, inclusive para aquele correspondente ao nó em consideração que é singular (este usando cuidados especiais).

Para este caso (2-D) pode-se utilizar o sistema de coordenadas intrínseco  $\eta$  sobre um segmento de comprimento  $l$  (Figura IV.1).



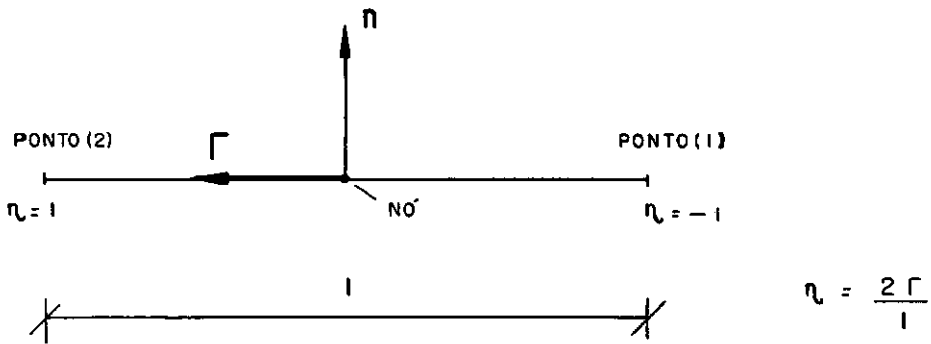


FIG. IV-1 - ELEMENTO CONSTANTE

Neste caso, temos:

$$\tilde{R}^{(j)} = \tilde{M} \tilde{R}^{(n)} \quad (\text{IV.11})$$

$$\tilde{Z}^{(j)} = \tilde{M} \tilde{Z}^{(n)} \quad (\text{IV.12})$$

$$e \quad |J| = \frac{l}{2} \quad (*6) \quad (\text{IV.13})$$

Assim, para o cálculo dos elementos fora da diagonal de  $\tilde{G}$ , isto é  $P_i \notin \Gamma_j$ , as integrais são obtidas por:

$$\int_{\Gamma_j} u^* d\Gamma = \int_{-1}^1 u^* |\tilde{J}| d\eta = \sum_{k=1}^L |\tilde{J}|_j W_K \cdot (u^*)_K \quad (\text{IV.14})$$

onde  $L$  é o número de pontos de integração e  $W_K$  é o fator de peso associado ao ponto  $K$ .

\*6 (Ver Apêndice F)

Logo, os elementos da matriz  $G$  fora da diagonal escrevem-se conforme as equações (IV.2) e (IV.3) da seguinte forma:

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 u^* |\tilde{J}| d\eta = \sum_{K=1}^L \frac{1}{4\pi} \cdot HH_n \cdot RQ_K \cdot W_K \cdot |\tilde{J}|_j \quad (IV.15)$$

$i \neq j$

ou seja,

$$G_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{K=1}^L HH_n \cdot RQ_K \cdot W_K \cdot |\tilde{J}|_j \quad (IV.16)$$

$i \neq j$

Assim,

$$G_{ij} = \frac{\ell_j}{8\pi} \sum_{K=1}^L HH_n \cdot RQ_K \cdot W_K \quad (IV.17)$$

$i \neq j$

Onde  $HH_n$  assume expressões diferentes para cada valor de  $n$ . Sendo que para  $n=0$  corresponde ao caso axissimétrico clássico,  $n=1$  corresponde ao primeiro termo e assim sucessivamente até o 5º termo da série de Fourier.

Já para o cálculo dos elementos da diagonal da matriz  $G$ , são requeridos cuidados especiais devido à singularidade que ocorre em  $HH_n$ , como será mostrado a seguir:

$$HH_n = f(EK, EE)$$

sendo  $EK$  e  $EE$ , as integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipo, respectivamente (Fig. IV.2).

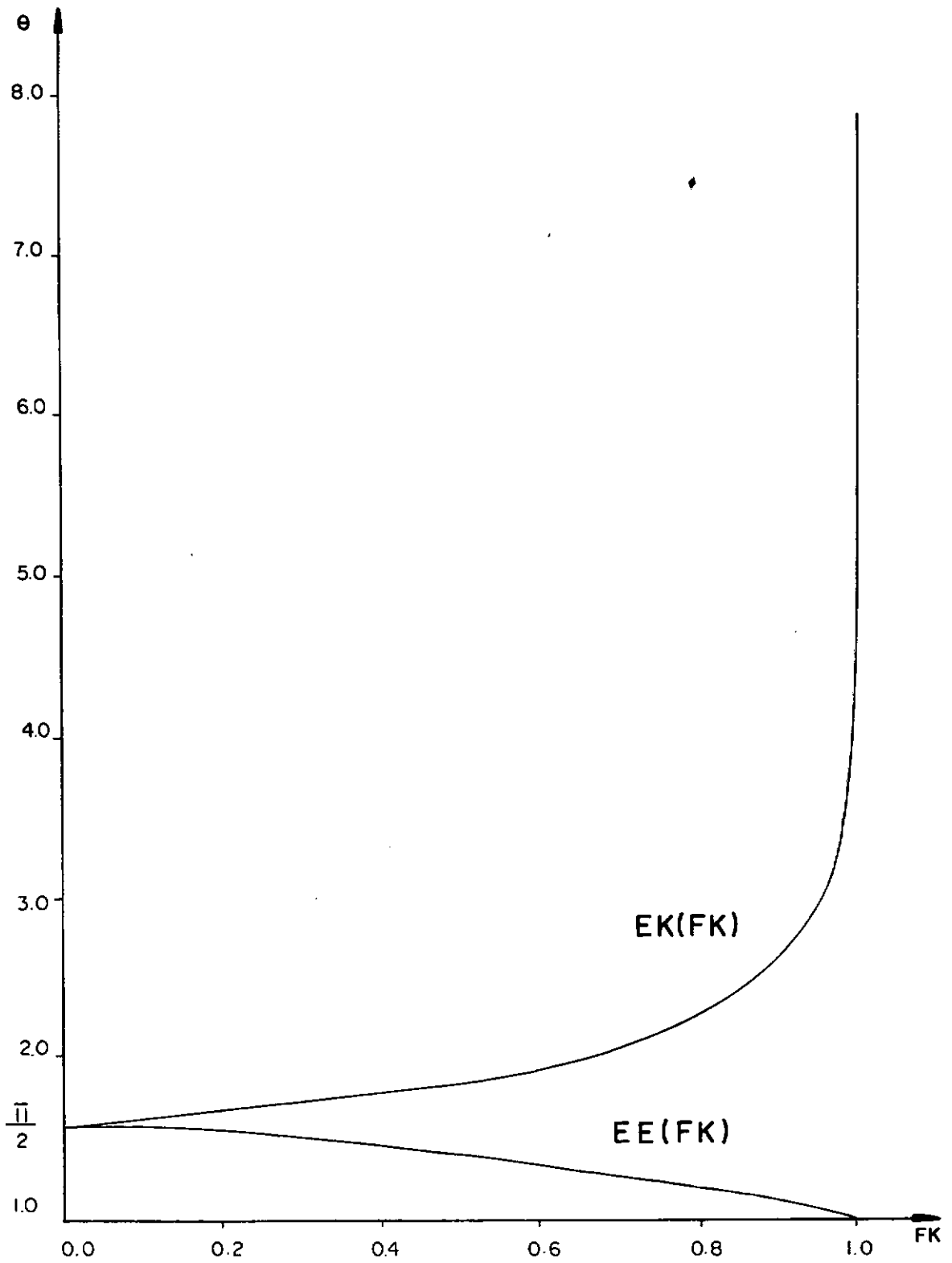


FIG. IV - 2 - INTEGRAIS ELÍPTICAS COMPLETAS

EK e EE são calculadas numericamente por meio de polinômios, com erro de aproximação  $\varepsilon(FK) \leq 10^{-18}$  [12].

Integral elíptica completa do primeiro tipo:

$$EK = SA + SB \cdot \ln \left( \frac{1}{FKL^2} \right) \quad (IV.18)$$

onde:

$$SA = |A0 + A1 \cdot FKL^2 + A2 \cdot FKL^4 + A3 \cdot FKL^6 + A4 \cdot FKL^8 + A5 \cdot FKL^{10} + \\ + A6 \cdot FKL^{12} + A7 \cdot FKL^{14} + A8 \cdot FKL^{16} + A9 \cdot FKL^{18} + A10 \cdot FKL^{20}|$$

$$SB = |B0 + B1 \cdot FKL^2 + B2 \cdot FKL^4 + B3 \cdot FKL^6 + B4 \cdot FKL^8 + B5 \cdot FKL^{10} + \\ + B6 \cdot FKL^{12} + B7 \cdot FKL^{14} + B8 \cdot FKL^{16} + B9 \cdot FKL^{18} + B10 \cdot FKL^{20}|$$

e

A0 = 1.38629436111989061883	B0 = 0.5
A1 = 0.096573590280856255384	B1 = 0.1249999999999908051
A2 = 0.030885146271305189866	B2 = 0.070312499739038352054
A3 = 0.014938013532687165242	B3 = 0.048828041906862397978
A4 = 0.0087898018745550646778	B4 = 0.037377739758623604144
A5 = 0.0061796274460533176084	B5 = 0.030124849012698930266
A6 = 0.0068479092826245051197	B6 = 0.023931913323110790077
A7 = 0.0098489293221768937682	B7 = 0.015530941631977203877
A8 = 0.0080039806499853708	B8 = 0.0059739042991554291551
A9 = 0.0022966348983969586869	B9 = 0.00092155463496324984638
A10 = 0.00013930878570066467279	B10 = 0.000029700280966555612066

Integral elíptica completa do segundo tipo:

$$EE = SC + SD \cdot \ln \left( \frac{1}{FKL^2} \right) \quad (IV.19)$$

onde:

$$SC = |1 + C1 \cdot FKL^2 + C2 \cdot FKL^4 + C3 \cdot FKL^6 + C4 \cdot FKL^8 + C5 \cdot FKL^{10} + \\ + C6 \cdot FKL^{12} + C7 \cdot FKL^{14} + C8 \cdot FKL^{16} + C9 \cdot FKL^{18} + C10 \cdot FKL^{20}|$$

$$SD = |D1 \cdot FKL^2 + D2 \cdot FKL^4 + D3 \cdot FKL^6 + D4 \cdot FKL^8 + D5 \cdot FKL^{10} + \\ + D6 \cdot FKL^{12} + D7 \cdot FKL^{14} + D8 \cdot FKL^{16} + D9 \cdot FKL^{18} + D10 \cdot FKL^{20}|$$

e

C1 = 0.44314718056088952648	D1 = 0.249999999999990177208
C2 = 0.056805194567559156648	D2 = 0.093749999721203140658
C3 = 0.021831811676130481568	D3 = 0.058593661255531491732
C4 = 0.011569595745295402175	D4 = 0.042717890547383095644
C5 = 0.0075950934225594322802	D5 = 0.033478943665761626232
C6 = 0.0078204040609595541727	D6 = 0.026145014700313878932
C7 = 0.010770635039866455473	D7 = 0.016804023346363384981
C8 = 0.0086384421736040744302	D8 = 0.0064321465864383017666
C9 = 0.0024685033304607227339	D9 = 0.00098983328462253847867
C10 = 0.00014946621757181326771	D10 = 0.000031859195655501571800

Lembrando que

$$FK^2 = \frac{4 \cdot RP \cdot RQ}{RR^2}$$

$$\text{onde } RR^2 = (RP + RQ)^2 + (ZQ - ZP)^2$$

$$\text{e } FKL^2 = 1 - FK^2$$

Nota-se que a integral elíptica completa do primeiro tipo tem singularidade logarítmica quando o parâmetro  $FK \longrightarrow 1$  ( $FKL \longrightarrow 0$ ), isto ocorre quando  $RP \rightarrow RQ$  e  $ZP \rightarrow ZQ$ , ou seja:

Quando  $RP=RQ$  e  $ZP=ZQ$

$$FK^2 = \frac{4 RQ RQ}{(RQ+RQ)^2} = 1 \quad \text{e} \quad FKL^2 = 0$$

Já na integral elíptica completa do segundo tipo, não há singularidade, pois temos:

$$EE = SC + SD \cdot \ln \left( \frac{1}{FKL^2} \right)$$

Quando  $RP=RQ$  e  $ZP=ZQ$

$FKL=0$ , conseqüentemente  $SC=1$  e  $SD=0$ , logo:

$$EE = 1 + \lim_{FKL \rightarrow 0} SD \ln \left( \frac{1}{FKL^2} \right) = 1$$

Pois com a aplicação da regra de L'Hospital, verifica-se que esse limite tende a zero.

Assim, o cálculo das integrais singulares (que contém EK) usando a quadratura de Gauss será implementado com a aplicação do seguinte processo:

$$\text{Pretende-se calcular} \quad \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{IV.20})$$

onde  $f(\eta)$  é singular em um certo ponto  $\bar{\eta}$  ( $|\bar{\eta}|=1$ )

$$\text{seja} \quad \bar{\eta} = a\theta^2 + b\theta + c \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 2a\theta + b \quad (\text{IV.22})$$

com:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta=1 \Rightarrow \theta=1 \\ \eta=-1 \Rightarrow \theta=-1 \\ \frac{d\eta}{d\theta} = 0 \quad \text{em} \quad \bar{\eta} \end{array} \right. \quad (\text{IV.23})$$

Esta mudança só é válida se e somente se  $|\bar{\eta}| = 1$

Considerando esta condição obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{\bar{\eta}}{2} \\ b = 1 \quad (*7) \\ c = \frac{\bar{\eta}}{2} \end{array} \right.$$

Logo,

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{2} (1-\theta^2) + \theta \quad (\text{IV.24})$$

\*7 (Ver Apêndice G)

e

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 1 - \bar{\eta}\theta$$

Assim, se  $|\bar{\eta}|=1$  temos:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f\left[\frac{\bar{\eta}}{2}(1-\theta^2)+\theta\right] (1-\bar{\eta}\theta) d\theta \quad (\text{IV.25})$$

Neste trabalho, a singularidade ocorre quando  $\bar{\eta} = 0$ , pois trabalha-se com elemento constante. Divide-se a integral (IV.20) em duas partes e escrevemos:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \underbrace{\int_{-1}^0 f(\eta) d\eta}_I + \underbrace{\int_0^1 f(\eta) d\eta}_{II} \quad (\text{IV.26})$$

de I temos:

$$\int_{-1}^0 f(\eta) d\eta$$



façamos: 
$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = 1+2\eta \\ d\rho' = 2d\eta \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \rho/\eta = -1 & \Rightarrow \rho' = -1 \\ \rho/\eta = 0 & \Rightarrow \rho' = 1 \end{array} \right.$$

Logo,

$$\int_{-1}^0 f(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{1}{2}(\rho'-1)\right] d\rho'$$

que tem singularidade quando  $\rho' = 1$  chama-se:

$$g'(\rho) = f\left[\frac{1}{2}(\rho-1)\right] \quad (\text{IV.27})$$

de (IV.24), temos:

$$\rho = \frac{1}{2}(1-\theta^2) + \theta$$

Assim, (IV.27) escreve-se:

$$g'(\rho) = f\left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}(1+\theta^2)\right)\right] \quad (\text{IV.28})$$

e de II temos:

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta$$

Façamos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho'' = 2\eta - 1 \\ d\rho'' = 2d\eta \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} \rho/\eta = 0 & \Rightarrow \rho'' = -1 \\ \rho/\eta = 1 & \Rightarrow \rho'' = 1 \end{array} \right.$$

Logo,

$$\int_0^1 f(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left[\frac{1}{2}(\rho''+1)\right] d\rho''$$

que tem singularidade quando  $\rho'' = -1$

Chamando:

$$g''(\rho) = f\left[\frac{1}{2}(\rho''+1)\right] \quad (\text{IV.29})$$

de (IV.24), temos:

$$\rho = -\frac{1}{2}(1-\theta^2) + \theta$$

Assim, (IV.29) escreve-se:

$$g''(\rho) = f\left[\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}(1+\theta^2)\right)\right] \quad (\text{IV.30})$$

desta maneira, temos:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = I+II = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\int_{-1}^1 g'(\rho') d\rho'}_{\substack{\text{SINGULARIDADE} \\ \text{EM } \rho' = 1}} + \underbrace{\int_{-1}^1 g''(\rho'') d\rho''}_{\substack{\text{SINGULARIDADE} \\ \text{EM } \rho'' = -1}} \right]$$

Substituindo, vem:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left\{ f \left[ \frac{1}{2} \left( \theta - \frac{1}{2} (1+\theta^2) \right) \right] (1-\theta) + \right. \\ \left. + f \left[ \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{1}{2} (1+\theta^2) \right) \right] (1+\theta) \right\} d\theta \quad (\text{IV.31})$$

Desta forma, os elementos da diagonal da matriz  $\tilde{G}$  escrevem-se da seguinte maneira:

$$G_{ii} = \frac{1}{4\pi} \sum_{K=1}^L \left[ \frac{1}{4} H H_n \cdot R Q_K \cdot W_K \cdot (1 - G I_K) \cdot |J|_{\sim i} + \frac{1}{2} H H_n \cdot R Q_K \cdot W_K \cdot (1 + G I_K) \cdot |J|_{\sim i} \right] \quad (\text{IV.32})$$

ou seja,

$$G_{ii} = \frac{\ell i}{16\pi} \cdot \sum_{K=1}^L \left[ H H_n \cdot R Q_K \cdot W_K \cdot (1 - G I_K) + H H_n \cdot R Q_K \cdot W_K \cdot (1 + G I_K) \right] \quad (\text{IV.33})$$

onde  $G I_K$  são as coordenadas dos pontos de integração.

IV.3 CÁLCULO DOS ELEMENTOS DA MATRIZ  $\underline{H}$ 

De (II.23), temos que:

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & \text{quando } i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{quando } i = j \end{cases}$$

onde  $\hat{H}_{ij}$  conforme (IV.8) escreve-se como:

$$\hat{H}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma \quad (\text{IV.34})$$

O cálculo dos elementos fora da diagonal de  $\underline{H}$ , isto é  $P_i \notin \Gamma_j$ , obtém-se da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma_j} q^* d\Gamma = \int_{-1}^1 q^* |\underline{J}| d\eta = \sum_{K=1}^L |\underline{J}|_j \cdot W_K \cdot (q^*)_K \quad (\text{IV.35})$$

onde, como já visto em (IV.14),  $L$  é o número de pontos de integração e  $W_K$  é o fator de peso associado ao ponto  $K$

Assim,  $\underline{H}$  escreve-se como:

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 q^* |\underline{J}| d\eta \quad i \neq j$$

$$H_{ij} = \sum_{K=1}^L \frac{1}{4\pi} \cdot H L n R Q_K \cdot |J|_j \cdot W_K \quad (IV.36)$$

$i \neq j$

ou seja,

$$H_{ij} = \frac{\ell_j}{8\pi} \sum_{K=1}^L H L n \cdot R Q_K \cdot W_K \quad (IV.37)$$

$i \neq j$

Para o cálculo dos elementos da diagonal da matriz  $\tilde{H}$ , requerem-se os mesmos cuidados tomados para o cálculo dos elementos da diagonal da matriz  $\tilde{G}$ .

Deste modo:

$$H_{ii} = \hat{H}_{ii} + \frac{1}{2}$$

Logo:

$$H_{ii} = \frac{\ell_i}{16\pi} \left\{ \sum_{K=1}^L [H L n \cdot R Q_K \cdot W_K \cdot (1 - G L_K) + H L n \cdot R Q_K \cdot W_K \cdot (1 + G L_K)] \right\} + \frac{1}{2} \quad (IV.38)$$

Na determinação dos elementos da matriz  $\tilde{G}$ , precisa-se dos valores da solução fundamental da equação de Laplace angularmente independente (HHn) para cada harmônico.

Para tal, utiliza-se a fórmula de recorrência do trabalho de SHIPPY, RIZZO e GUPTA [7].

Na determinação dos elementos da matriz  $\tilde{H}$ , os valores da derivada da solução fundamental na direção normal ( $HL_n$ ), para cada harmônico, são calculados com as expressões aqui neste trabalho desenvolvidas. Cabe observar que para um número de termos na série de Fourier superior a um (notar que  $n=0$  corresponde ao problema axissimétrico clássico) utiliza-se diretamente integração angular tipo Gauss com 24 pontos (que proporcionou o resultado mais satisfatório).

Esta combinação de formulações foi necessária e é comentada a seguir.

A intenção inicial deste trabalho para o cálculo dos coeficientes das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  era a de utilizar somente as fórmulas de recorrência do trabalho de SHIPPY e colaboradores.

Inicialmente, implementou-se um programa de computador de precisão aritmética simples. Os resultados para os coeficientes das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  divergiram. Deste modo, passou-se a trabalhar com precisão aritmética dupla.

Devido a este fato, a matriz  $\tilde{G}$  convergiu corretamente mas a matriz  $\tilde{H}$  continuou apresentando instabilidade em alguns coeficientes.

Estes resultados levaram a desenvolver uma forma alternativa para calcular os coeficientes da matriz  $\tilde{H}$  como visto no capítulo III.

Assim, o programa final foi implementado usando para o cálculo de  $\tilde{G}$  as fórmulas de recorrência de SHIPPY e colaboradores, e para o cálculo de  $\tilde{H}$  as integrais neste trabalho desenvolvidas. Estes coeficientes são calculados separadamente para cada harmônico da série (notar que podem ser calculados conjuntamente).

As integrais que foram obtidas utilizando diretamente integração angular tipo Gauss, e que aparecem nas equações (IV.37) e (IV.38) são calculados da seguinte forma:

$$H_{Ln} = F(f_1(K), f_2(FK))$$

sendo que,

$$f_2(FK) = \int_{-\pi}^{\pi} f_3(FK, \theta) d\theta = \sum_{l=1}^M f_3(FK, GI_M) \cdot W_M \quad (IV.39)$$

onde  $M$  é o número de pontos de integração,  $GI_M$  são as coordenadas dos pontos de integração e  $W_M$  são os fatores de peso associados ao ponto  $M$ .

Os valores de  $u_n^C(RP, ZP)$ ,  $u_n^S(RP, ZP)$ ,  $u_n^{C'}(RP, ZP)$  e  $u_n^{S'}(RP, ZP)$  são obtidos através do MEC para cada harmônico, portanto, estes valores devem ser armazenados pois serão usados na reconstituição da série.

A solução final é obtida fazendo a superposição para cada harmônico da série em função do ângulo  $\theta$ , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u(p) = & \frac{u_0(RP, ZP)}{2} + u_1^C(RP, ZP) \cos \theta P + u_1^S(RP, ZP) \operatorname{sen} \theta P + \\
 & + u_2^C(RP, ZP) \cos 2\theta P + u_2^S(RP, ZP) \operatorname{sen} 2\theta P + \\
 & + u_3^C(RP, ZP) \cos 3\theta P + u_3^S(RP, ZP) \operatorname{sen} 3\theta P + \\
 & + u_4^C(RP, ZP) \cos 4\theta P + u_4^S(RP, ZP) \operatorname{sen} 4\theta P + \\
 & + u_5^C(RP, ZP) \cos 5\theta P + u_5^S(RP, ZP) \operatorname{sen} 5\theta P
 \end{aligned}
 \tag{IV.40}$$

e, ou

$$\begin{aligned}
 q(p) = & \frac{u_0'(RP, ZP)}{2} + u_1^{C'}(RP, ZP) \cos \theta P + u_1^{S'}(RP, ZP) \operatorname{sen} \theta P + \\
 & + u_2^{C'}(RP, ZP) \cos 2\theta P + u_2^{S'}(RP, ZP) \operatorname{sen} 2\theta P + \\
 & + u_3^{C'}(RP, ZP) \cos 3\theta P + u_3^{S'}(RP, ZP) \operatorname{sen} 3\theta P + \\
 & + u_4^{C'}(RP, ZP) \cos 4\theta P + u_4^{S'}(RP, ZP) \operatorname{sen} 4\theta P + \\
 & + u_5^{C'}(RP, ZP) \cos 5\theta P + u_5^{S'}(RP, ZP) \operatorname{sen} 5\theta P
 \end{aligned}
 \tag{IV.41}$$

Procedendo de maneira semelhante, no cálculo do potencial e fluxo nos pontos internos.



## CAPÍTULO V

### IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Neste capítulo é apresentado um resumo do programa computacional elaborado neste trabalho, bem como o respectivo fluxograma e o manual de entrada de dados.

#### V.1 RESUMO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

O programa PRINCIPAL chama as subrotinas necessárias numa determinada ordem e armazena os resultados, levando em consideração o número de termos da série de Fourier e os índices de cosseno e seno da referida série.

A subrotina DADOS é responsável pela leitura de dados.

A subrotina FORM calcula as matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  e forma o sistema de equações  $\tilde{A} \tilde{R} = \tilde{F}$ . Nesta subrotina são calculadas as coordenadas dos pontos médios, e para o cálculo das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  são chamadas as subrotinas NDIAG e DIAG.

A subrotina NDIAG calcula os elementos fora da diagonal das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  através de integração numérica ao longo dos elementos de contorno. Nesta subrotina os elementos fora da diagonal das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  são calculados independentemente para cada termo da série de Fourier.

A subrotina DIAG calcula os elementos da diagonal das

matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  através de integração numérica, levando em consideração a singularidade logarítmica apresentada pela integral elíptica completa do primeiro tipo quando o ponto fonte coincide com o ponto campo. Nesta subrotina os elementos da diagonal das matrizes  $\tilde{G}$  e  $\tilde{H}$  são calculados independentemente para cada termo da série de Fourier.

As subrotinas NDIAG e DIAG chamam as functions EK, EE, EE32, EE42, EE52 e EE62 no decorrer do programa, onde:

EK = integral elíptica completa do primeiro tipo

EE = integral elíptica completa do segundo tipo

$$EE32 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4\theta \cdot \cos^2 \theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

$$EE42 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 6\theta \cdot \cos^2 \theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

$$EE52 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 8\theta \cdot \cos^2 \theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

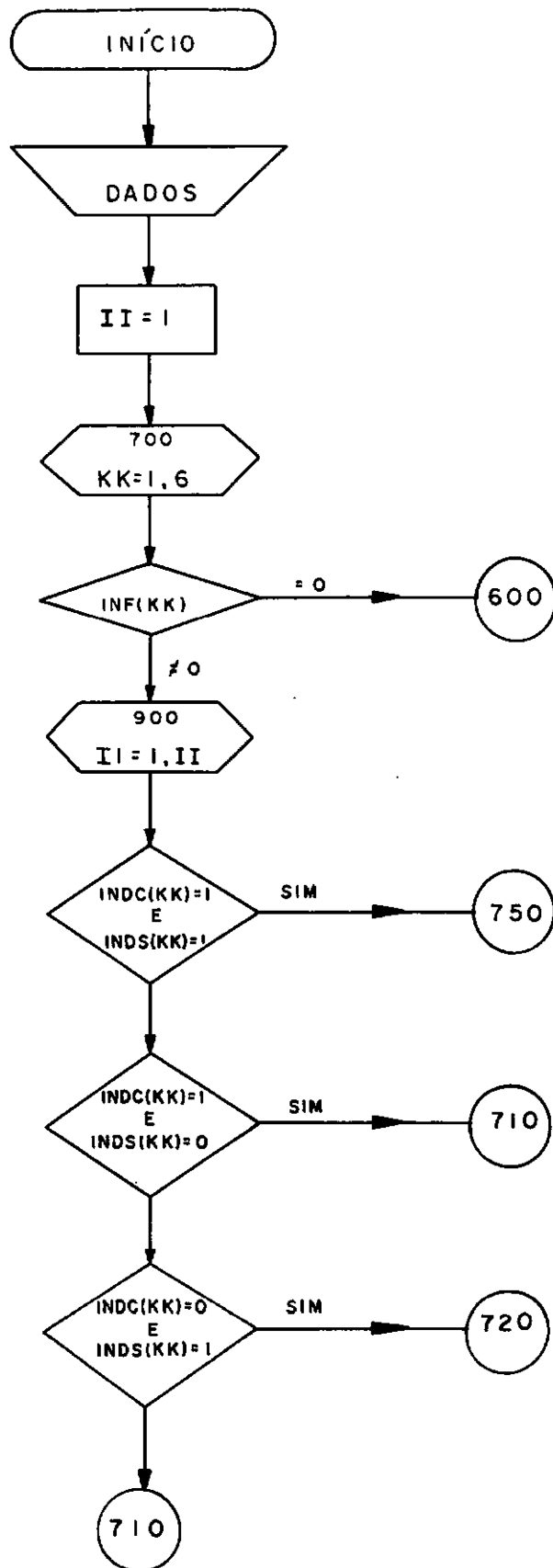
$$EE62 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 10\theta \cdot \cos^2 \theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

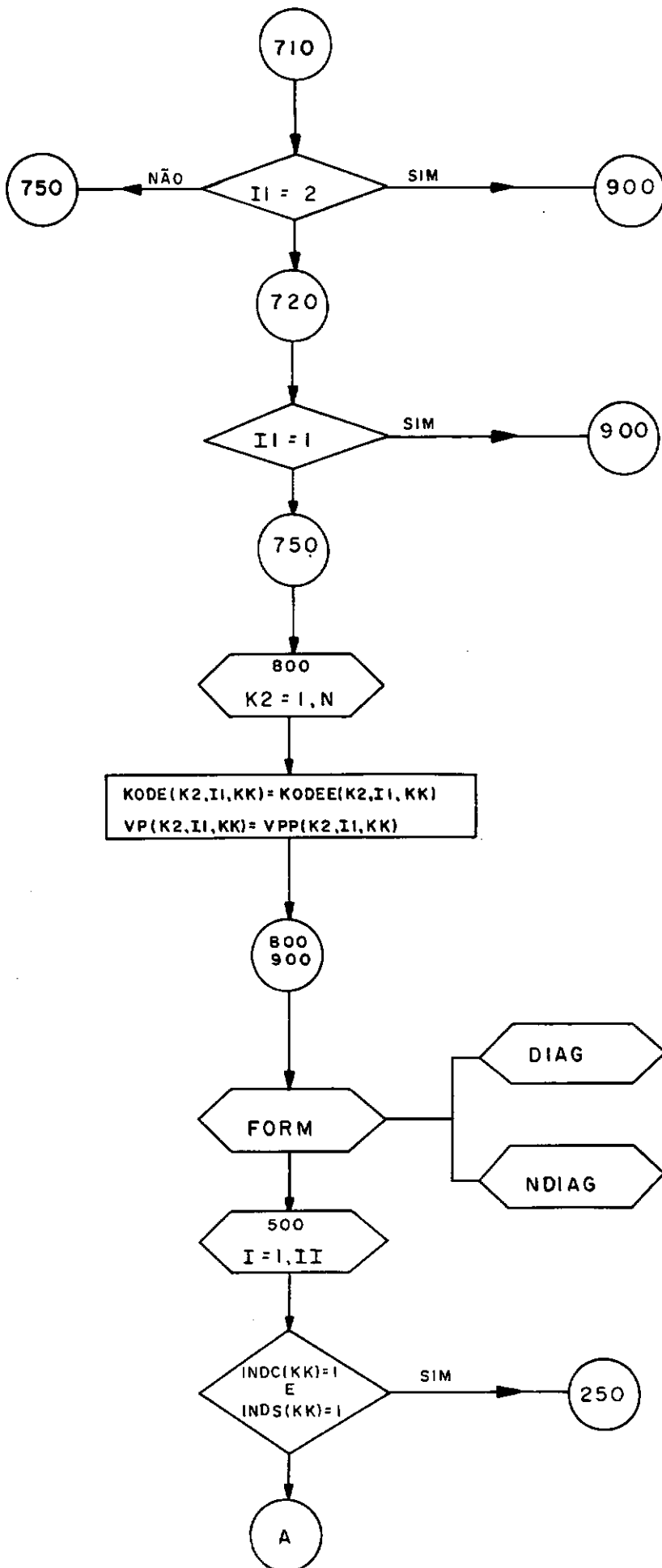
A subrotina RESOL resolve o sistema de equações lineares pelo método da eliminação de Gauss. Este método, através de sucessivas tentativas, executa intercâmbio de linhas para conseguir coeficiente de diagonal diferente de zero. O resultado é um vetor com as incógnitas de potencial e derivada do potencial na direção normal.

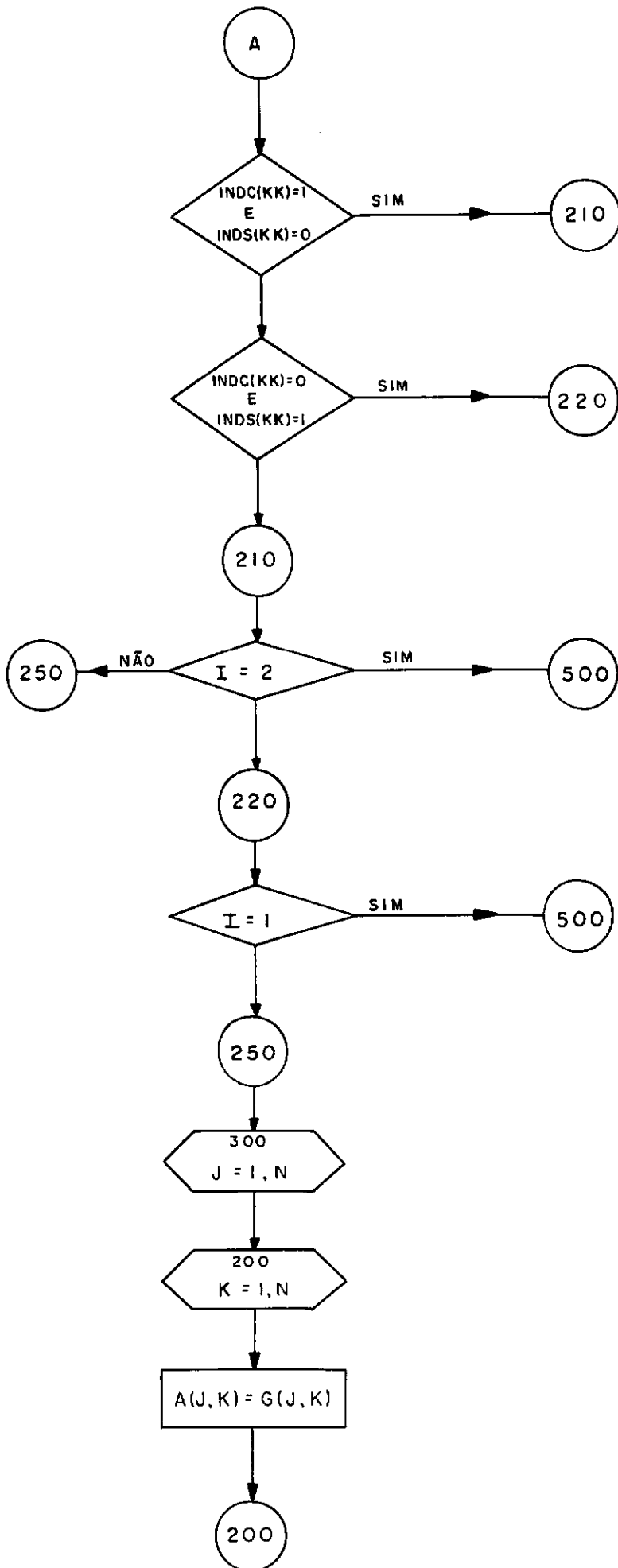
A subrotina INTER inicialmente reordena os vetores, separando os valores dos potenciais e os valores das derivadas. Posteriormente, se necessário, calcula os valores dos potenciais dos pontos internos.

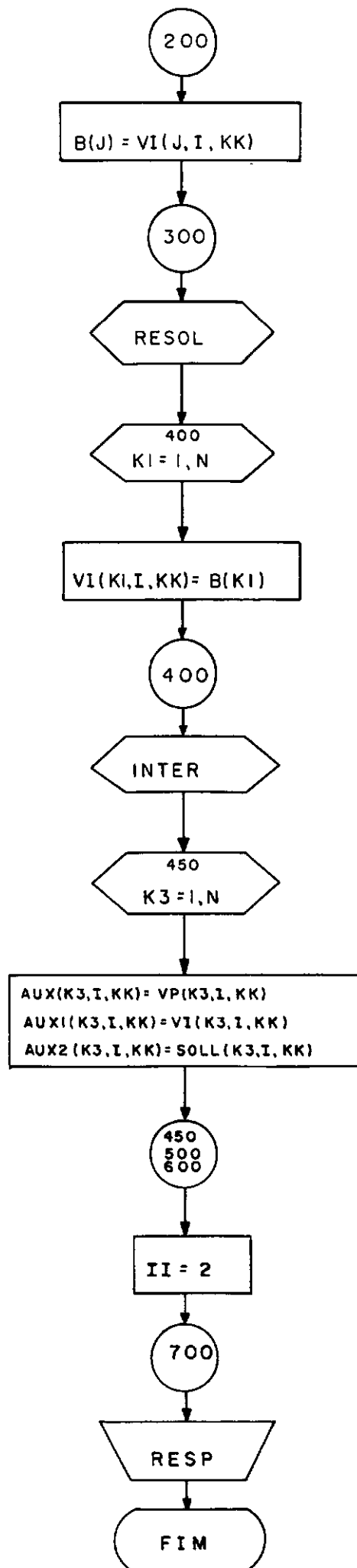
A subrotina RESP executa a saída de resultados em duas versões. Uma delas considera o número de termos na série de Fourier igual a zero ( $n=0$ ), isto é, é a saída de resultados para o caso axissimétrico clássico (com condições de contorno axissimétricas). A outra considera o número de termos na série de Fourier diferente de zero e mostra os resultados dos potenciais e das derivadas para cada valor do ângulo  $\theta$ , levando em consideração que neste caso as condições de contorno são arbitrárias.

## V.2 FLUXOGRAMA









### V.3 MANUAL DE ENTRADA DE DADOS

O programa é elaborado em linguagem FORTRAN para computadores Bourroughs B-6700 e B-6800. Resolve-se um problema de cada vez, sendo que a capacidade do programa é estabelecida pelos limites de cada máquina.

A leitura dos dados é feita introduzindo-se grupos distintos de cartões (linhas) como segue:

Leitura do nome do problema;

Leitura dos parâmetros básicos;

Leitura da incidência das superfícies diferentes;

Leitura das coordenadas dos pontos internos;

Leitura das coordenadas dos pontos extremos dos elementos de contorno;

Leitura das condições de contorno.

#### V.3.1 - Nome do Problema

Um cartão com caracteres alfa-numéricos até a coluna 80, no máximo, identificando o problema a ser resolvido.

#### V.3.2 - Parâmetros Básicos

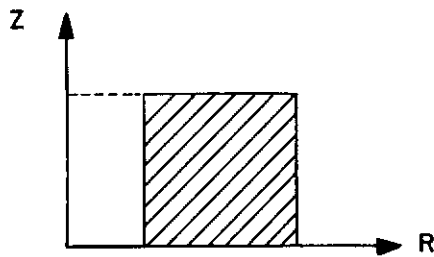
Composto de dois cartões com a seguinte orientação:

- 1) Cartão com caracteres numéricos até a coluna 80 ( formato 16I5), contendo, na ordem:

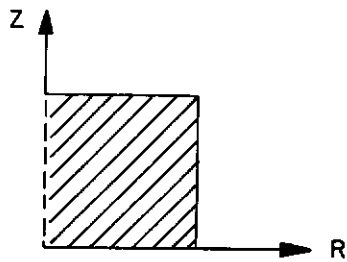


- o número de elementos de contorno (N)
- o número de pontos internos onde as funções são calculadas (L)
- o tipo de contorno (NNN)

NNN = 0 (zero) indica contorno fechado



NNN = 1 (um) indica contorno aberto



- o incremento do ângulo  $\theta$  (ITH)  
incrementos de 1 a 360 (graus)
- os índices que indicam os termos da série de Fourier que serão utilizados (INF(KK)), no qual:

$INF(KK) = 0$  (zero) indica que o termo em consideração não será levado em conta.

$INF(KK) = 1$  (um) indica que o termo em consideração será levado em conta.

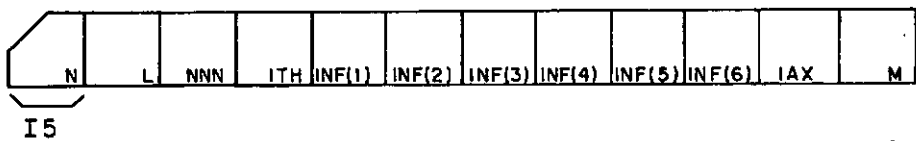
- o número de termos na série de Fourier (IAX)

- o número de superfícies diferentes (M)

Consideram-se, no máximo, cinco superfícies diferentes.

Deste modo, este cartão é esquematizado da seguinte forma:

ma:



2) Cartão com caracteres numéricos até a coluna 80 (Formato 16I5), contendo, na ordem:

- os índices relativos a cosseno na série de Fourier ( $INDC(KK)$ ), no qual:

$INDC(KK) = 0$  (zero) indica que o termo relativo a cosseno não será levado em consideração.

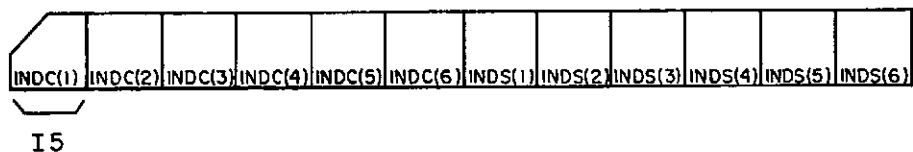
$INDC(KK) = 1$  (um) indica que o termo relativo a cosseno será levado em consideração.

- os índices relativos a seno na série de Fourier (INDS(KK)), no qual:

INDS(KK) = 0 (zero) indica que o termo relativo a seno não será levado em consideração.

INDS(KK) = 1 (um) indica que o termo relativo a seno será levado em consideração.

Assim, este cartão é esquematizado da seguinte forma:



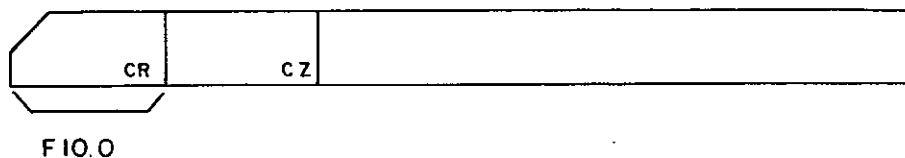
### V.3.3 - Incidência das Superfícies Diferentes

Neste grupo, o número de cartões é idêntico ao número de superfícies diferentes. Em cada cartão (Formato 8I10) são fornecidos o elemento inicial e o elemento final, sendo que é possível um máximo de 5 cartões.

### V.3.4 - Coordenadas dos Pontos Internos

Este grupo possui o número de cartões idêntico ao número de pontos internos. As coordenadas são dados numéricos reais e utiliza-se o formato 2F10.0 no qual o ponto pode ser colocado em qualquer coluna dentro da respectiva faixa.

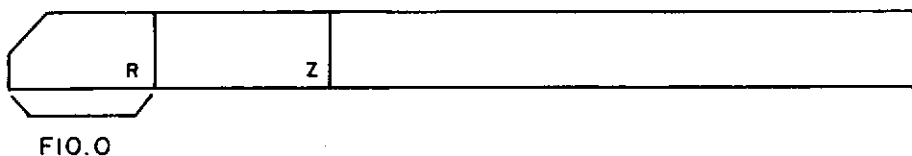
Em cada cartão, a coordenada R e A coordenada Z (CR e CZ) de cada ponto interno são fornecidas (nessa ordem). Deste modo, temos:



Obs.: Se não forem necessárias informações nos pontos internos, isto é,  $L=0$ , as coordenadas dos pontos internos não são fornecidas.

#### V.3.5 - Coordenadas dos Pontos Extremos dos Elementos de Contorno

Neste grupo, em cada cartão são fornecidas as coordenadas de cada ponto extremo. A ordem é igual à utilizada para os pontos internos (formato 2F10.0). Assim, temos:



#### V.3.6 - Condições de Contorno

O modelo desenvolvido exige o conhecimento prévio do potencial ou da derivada do potencial em cada nó. Neste modelo, cada harmônico possui as suas próprias condições de contorno, que

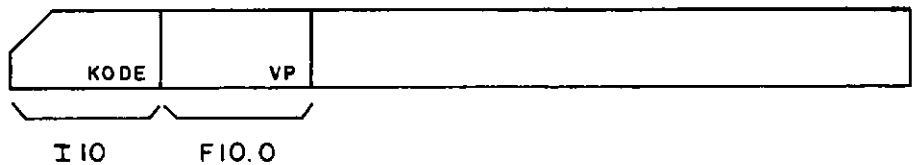
são os coeficientes da série de Fourier.

Neste grupo de cartões são lidos os códigos que indicam o tipo de condição de contorno do nó de cada elemento (KODE) e os valores das condições de contorno prescritas (VP), sendo que:

KODE = 0 (zero) indica potencial prescrito.

KODE = 1 (um) indica derivada do potencial prescrito.

Nestes cartões utiliza-se formato I10 para KODE e formato F10.0 para VP. Assim, estes cartões são esquematizados da seguinte forma:



## CAPÍTULO VI

## APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados resultados numéricos para cinco problemas. Comparações são feitas com soluções analíticas exatas, que para estas aplicações, são conhecidas.

## APLICAÇÃO 1

No primeiro problema é estudado o caso de fluxo de calor radial que num estado estacionário atravessa um cilindro oco com extremos isolados como mostra a Fig. (VI.1).

As condições de contorno são especificadas como:

$$T = T_1 \quad \text{para} \quad R = R_1$$

$$T = T_2 \quad \text{para} \quad R = R_2$$

$$T' = 0 \quad \text{para} \quad Z = \pm Z_0$$

onde  $T$  é a temperatura, isto é, a função harmônica  $\bar{u}$ ; e  $T'$  é o gradiente de temperatura, isto é, a derivada de  $T$  na direção normal.

A distribuição exata da temperatura dentro do cilindro foi dada por CHAPMAN [13] como:

$$T = T_1 + \left[ (T_2 - T_1) \cdot \ln \left( \frac{R}{R_1} \right) \right] \cdot \frac{1}{\ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)}$$

Desta maneira nota-se que não há dependência angular da temperatura. Assim, este problema envolve somente o termo constante ( $n=0$ ) na expansão de Fourier, isto é, as condições de contorno são axissimétricas.

Os parâmetros da Figura (VI.1) foram selecionados com os seguintes valores:

$$\left\{ \begin{array}{l} R1=1 ; R2=2 \\ Z0 = 0.5 \\ T1=1 ; T2=2 \end{array} \right.$$

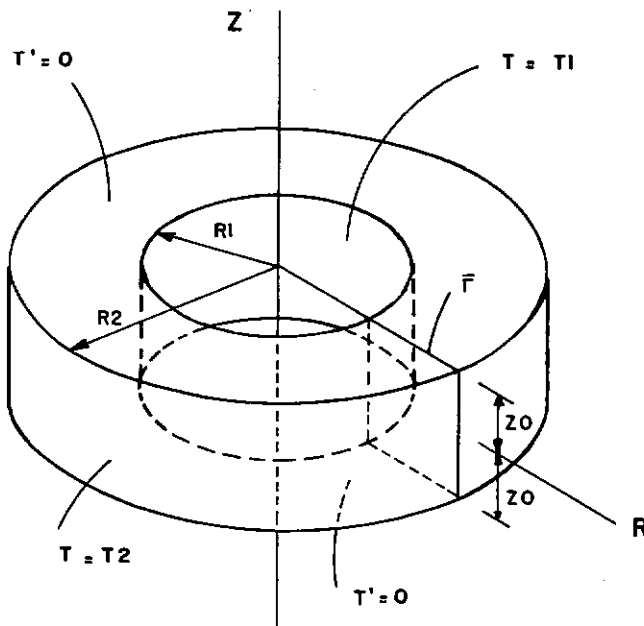


FIG.VI-1- CILINDRO OCO COM CONDUÇÃO DE CALOR RADIAL

Neste exemplo o domínio é finito.

Deste modo, o modelo de contorno, isto é, a discretização do contorno  $\bar{\Gamma}$  usada é a mostrada na Figura (VI.2).

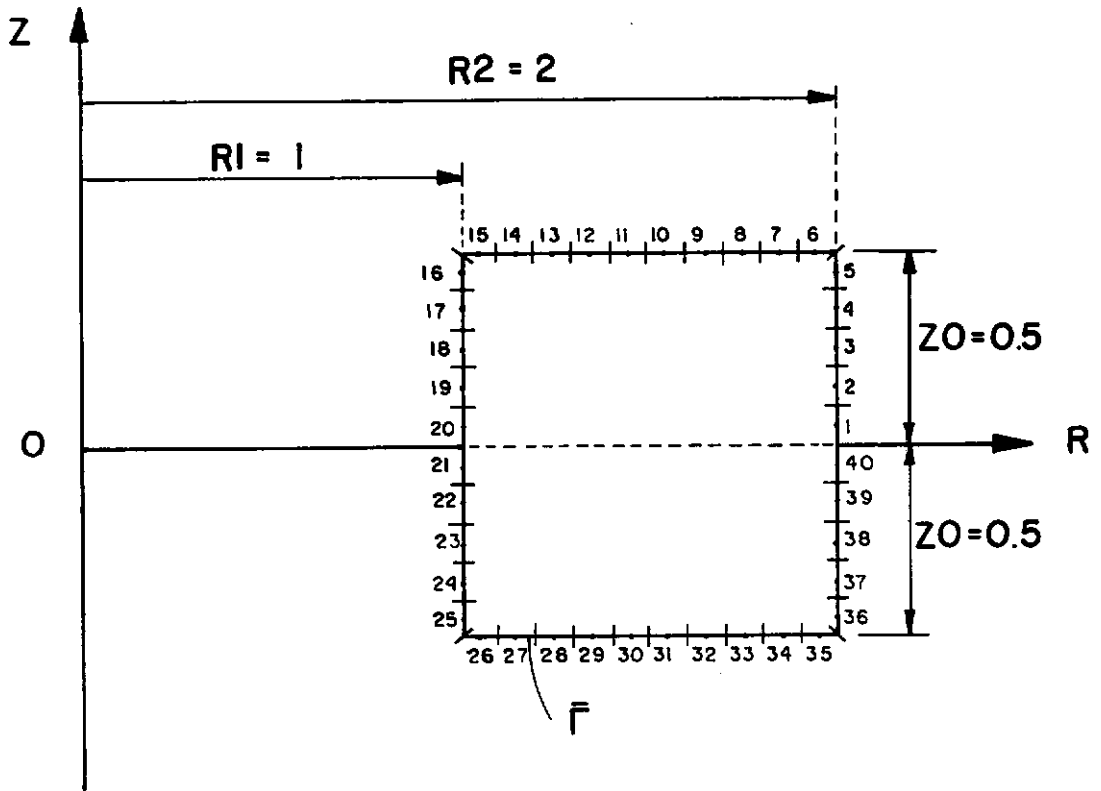


FIG. VI-2- DISCRETIZAÇÃO DO CILINDRO OCO

Na tabela (VI.1) são apresentados resultados representativos obtidos pelo MEC e os encontrados com a solução analítica exata.

Na tabela (VI.2) são apresentados os resultados para a temperatura obtidos pelo MEC comparados com a solução analítica para pontos onde o raio varia. Na mesma tabela mostra-se os erros ( $\epsilon$ ) observados.



Finalmente, na Figura (VI.3) tem-se o gráfico T X R de maneira a melhor visualizar estes resultados.

Tab. (VI.1) - Resultados Representativos da Aplicação 1

Nº	T		T'	
	MEC	ANALÍTICA	MEC	ANALÍTICA
3			0.7183	0.7213
8	1.8081	1.8074		
10	1.6323	1.6323		
12	1.4330	1.4328		
18			- 1.4357	-1.4427

Tab. (VI.2) - Comparação de Resultados para a Temperatura

R	T		$\left  \frac{T_{ANAL}^i - T_{MEC}^i}{T_{ANAL}^i} \right  \cdot 100 (\%)$
	MEC	ANALÍTICA	
1.00	1.0000	1.0000	0
1.05	1.0666	1.0704	0.36
1.15	1.1995	1.2016	0.17
1.25	1.3206	1.3219	0.10
1.35	1.4328	1.4330	0.01
1.45	1.5357	1.5361	0.03
1.55	1.6323	1.6323	0
1.65	1.7228	1.7225	0.02
1.75	1.8081	1.8074	0.04
1.85	1.8887	1.8875	0.06
1.95	1.9655	1.9635	0.10
2.00	2.0000	2.0000	0

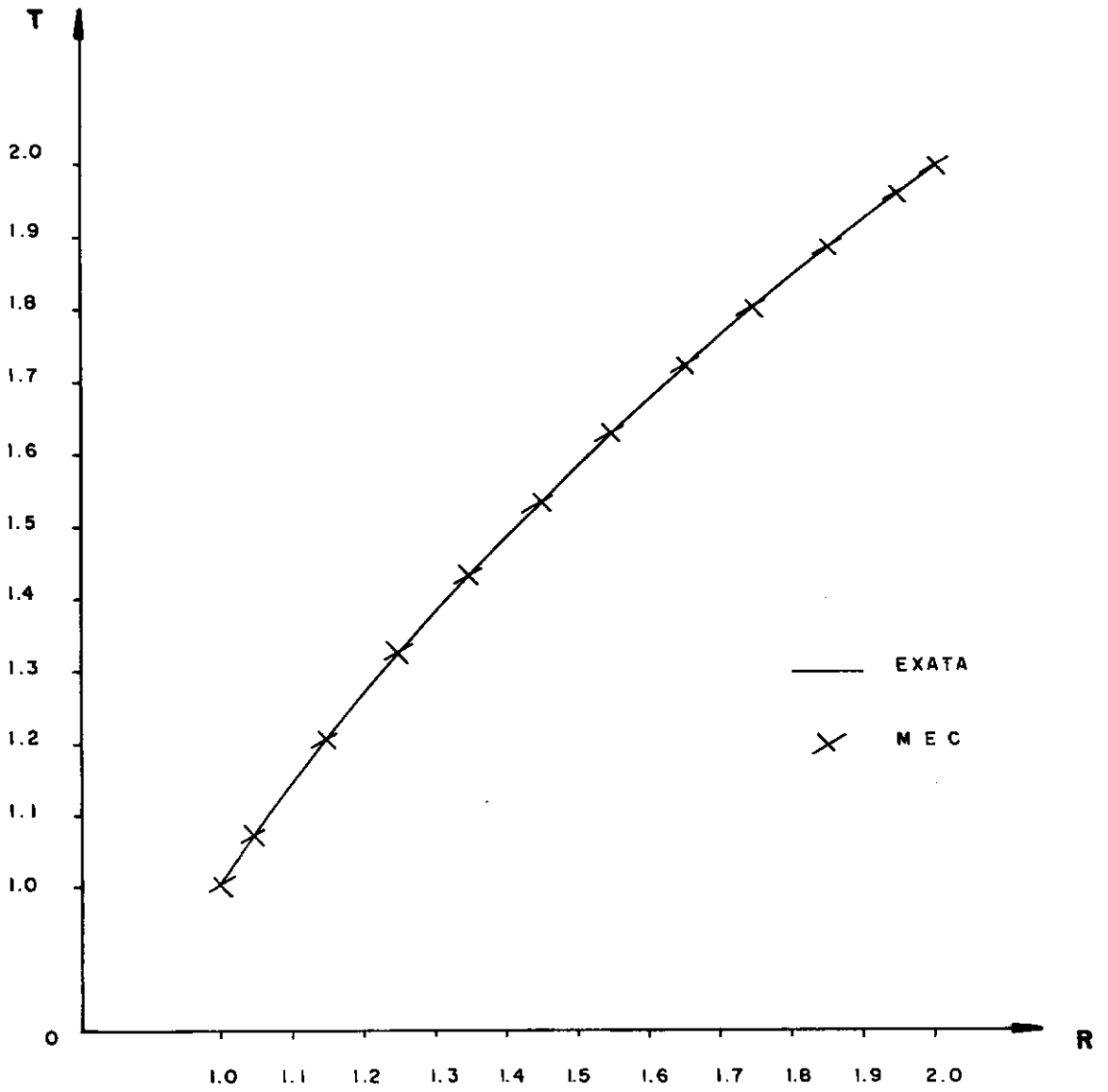


FIG. VI-3- GRÁFICO T X R

## APLICAÇÃO 2

Este exemplo trata do problema de um potencial de fluxo uniforme num tubo circular. Trata-se então de um problema de domínio finito. As dimensões do tubo são:

Diâmetro igual a 20 unidades

Comprimento igual a 10 unidades

As condições de contorno são:

Potencial no topo da superfície do tubo igual a 10.

Potencial na base do tubo igual a zero.

O contorno lateral é assumido como sendo uma parede sólida de maneira que a velocidade dissipa-se.

A geometria e as condições de contorno são mostradas na Figura (VI.4) e a discretização do problema na Fig. (VI.5).

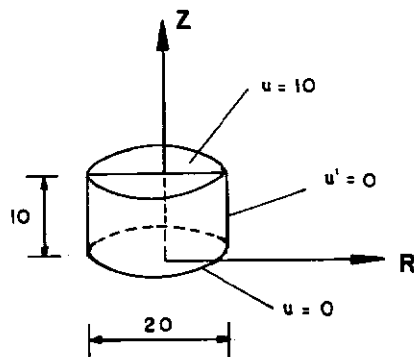


FIG. VI-4- GEOMETRIA E CONDIÇÕES DE CONTORNO

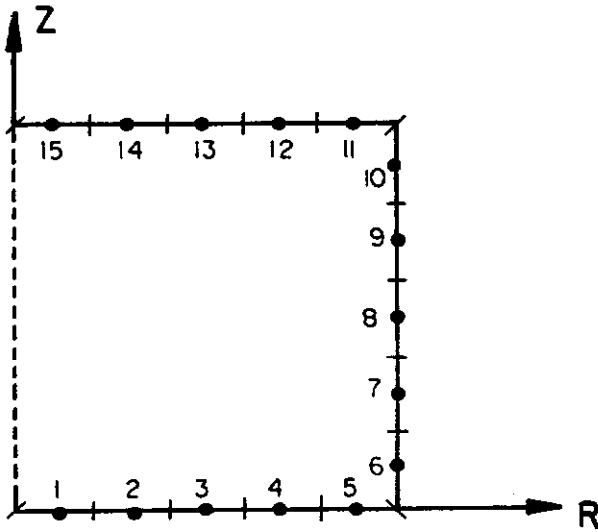


FIG. VI-5- DISCRETIZAÇÃO DO TUBO CIRCULAR

A solução analítica deste problema é

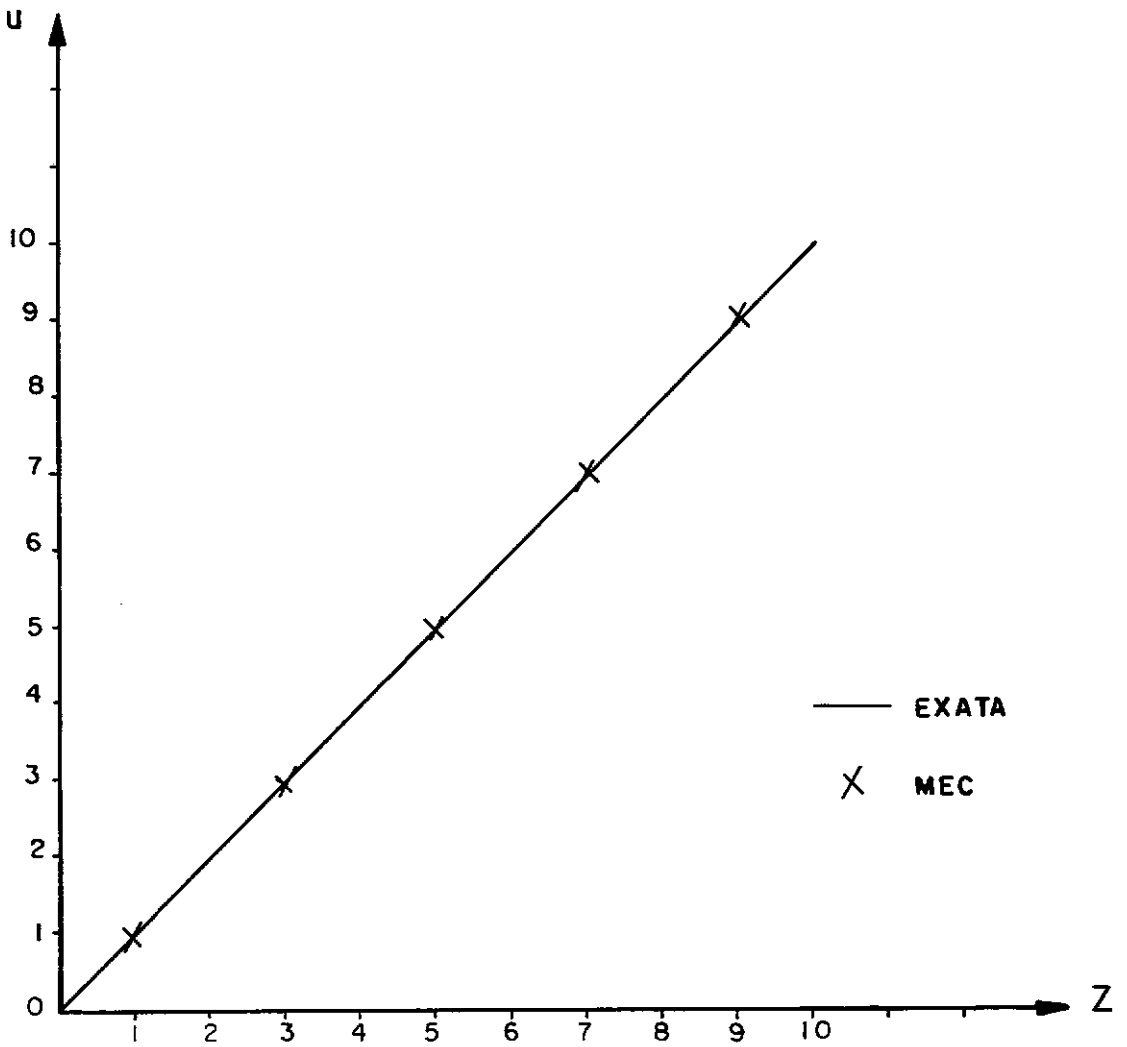
$$u = Z$$

portanto,  $n=0$  no desenvolvimento em série de Fourier.

Na tabela (VI.3) são apresentados resultados representativos obtidos pelo MEC e comparados com a solução analítica exata e na Fig. (VI.6) tem-se o gráfico  $u \times Z$ .

Tab. (VI.3) - Resultados Representativos da Aplicação 2

Nº	u		Q	
	MEC	ANALÍTICA	MEC	ANALÍTICA
1			- 0.9980	- 1.0000
2			- 0.9974	- 1.0000
3			- 0.9962	- 1.0000
4			- 0.9821	- 1.0000
5			- 1.0613	- 1.0000
6	0.9482	1.0000		
7	2.9774	3.0000		
8	5.0001	5.0000		
9	7.0227	7.0000		
10	9.0520	9.0000		
11			1.0613	1.0000
12			0.9821	1.0000
13			0.9962	1.0000
14			0.9974	1.0000
15			0.9980	1.0000

FIG. VI-6 - GRÁFICO  $U \times Z$ 

### APLICAÇÃO 3

Este problema consiste na análise de fluxo irrotacional e estacionário (fluxo com energia específica constante) de um fluido passando por uma esfera.

O eixo (Z) é tomado como sendo paralelo ao fluxo e é portanto um eixo de simetria conforme mostrado na Figura (VI.7)

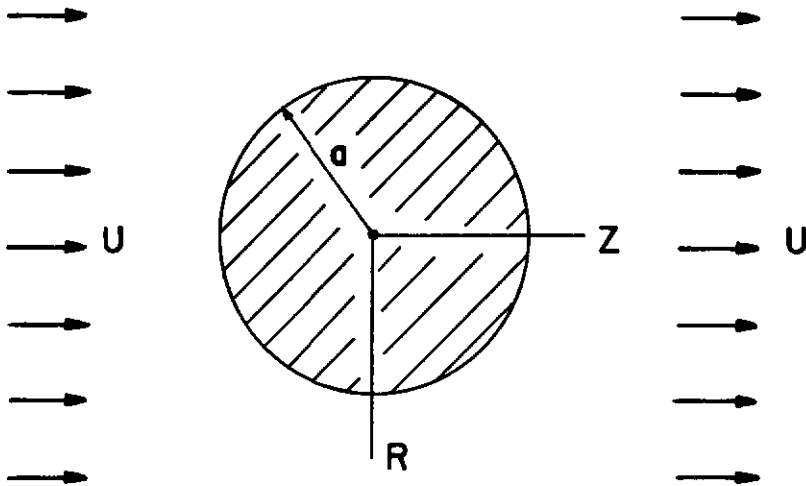


FIG. VI-7- FLUXO PASSANDO POR UMA ESFERA

Neste caso, ROUSE [14] observou que o campo de potencial é simétrico com respeito a este eixo.

Aplica-se o princípio da superposição de efeitos e deste modo considera-se a combinação do fluxo paralelo com a perturbação.

Assim,

para o movimento sem a perturbação

$$\phi_1 = UZ$$

para a perturbação

$$\phi_2 = \frac{a^3 \cdot U \cdot Z}{2 (R^2 + Z^2)^{3/2}}$$

ou seja, em termo destas coordenadas tem-se:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = U \cdot Z + \frac{a^3 \cdot U \cdot Z}{2 (R^2 + Z^2)^{3/2}}$$

onde:

$\phi$  é o potencial de velocidade (isto é a função harmônica  $\bar{u}$ ).

$U$  é o fluxo uniforme de velocidade no infinito.

$a$  é o raio da esfera.

Tem-se que  $a = (R^2 + Z^2)^{1/2}$ , logo:

$$\phi = UZ + \frac{UZ}{2}$$

como o campo de potencial é simétrico, somente a parte axissimétrica ( $n=0$ ) é tomada na expansão de Fourier.

Neste exemplo é proposto um "problema de fluxo" para este corpo, isto é,  $\phi'$  é prescrito na superfície da esfera com  $\phi$  para ser determinado.

A comparação de resultados para o potencial de veloci-



dade entre o MEC e a solução analítica exata é feita para o local onde ocorre a perturbação ( $\phi_2$ ).

Os valores dos parâmetros usados para este problema são:

$$a = 1 \quad e \quad U = 1$$

Trata-se, portanto, de um problema de domínio infinito. Neste trabalho, como é sabido, utiliza-se o elemento com variação constante.

Deste modo a discretização é feita considerando-se um polígono de área idêntica à da superfície da esfera em consideração conforme é mostrado na Figura (VI.8).

A tabela (VI.4) contém resultados representativos para o modelo do exemplo 3 e na Figura (VI.9) tem-se o gráfico  $\phi_2 \times Z$ .

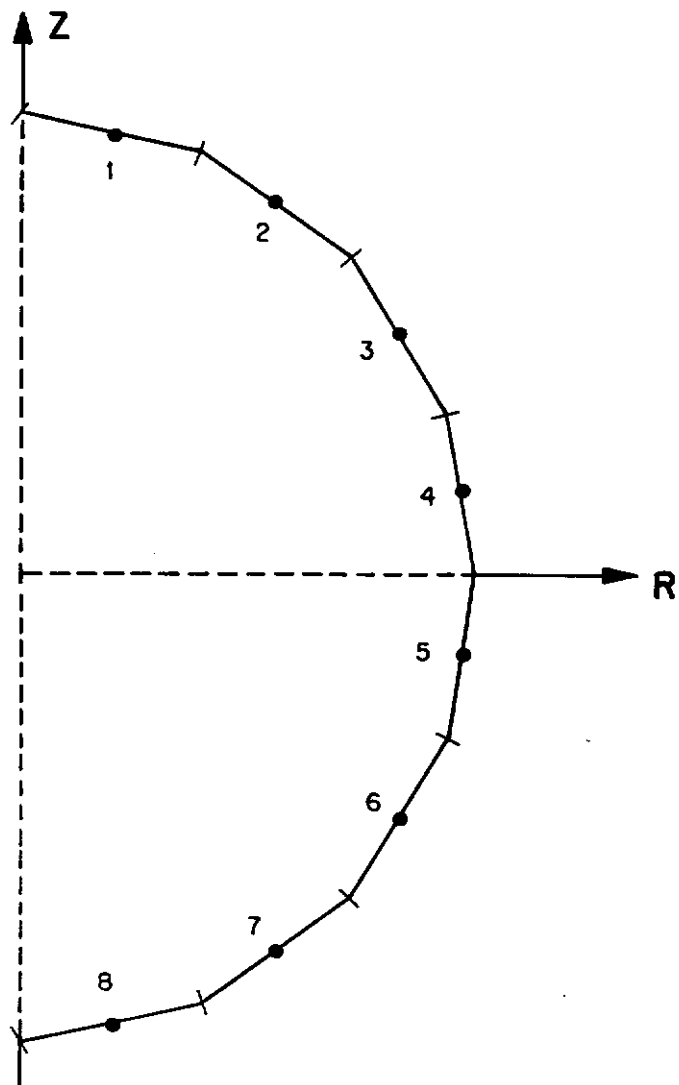
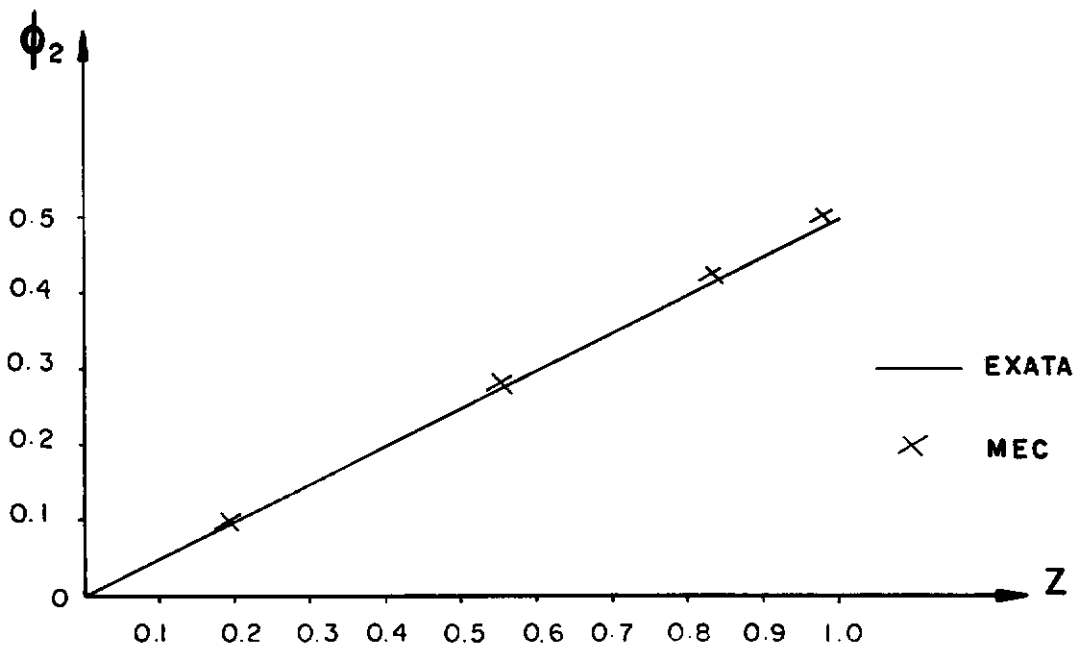


FIG. VI-8- DISCRETIZAÇÃO DA ESFERA

Tab. (VI.4) - Resultados Representativos do Exemplo 3

N.º	$\phi_2$		$\phi_2'$ PRESCRITO
	MEC	ANALÍTICA	
1	0.50495	0.49040	0.98080
2	0.42815	0.41574	0.83147
3	0.28608	0.27779	0.55557
4	0.10046	0.09755	0.19509
5	-0.10046	-0.09755	-0.19509
6	-0.28608	-0.27779	-0.55557
7	-0.42815	-0.41574	-0.83147
8	-0.50495	-0.49040	-0.98080

FIG. VI-9- GRÁFICO  $\phi_2$  X  $Z$

## APLICAÇÃO 4

Este exemplo também estuda a análise de fluxo irrotacional e estacionário de um fluido passando por uma esfera.

Pretende-se demonstrar a capacidade da formulação utilizada neste trabalho para tratar com problemas sujeitos a condições de contorno arbitrárias.

Para tal, o eixo (Z) da aplicação 3 é tomado perpendicular ao fluxo, isto é, na Figura (VI.10) o eixo (Z) é perpendicular ao papel.

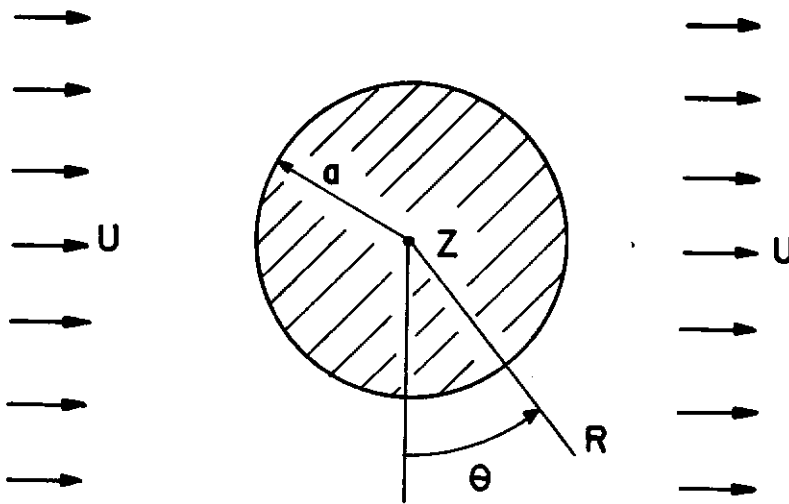


FIG. VI-10- FLUXO PASSANDO POR UMA ESFERA

Deste modo, em termo destas coordenadas tem-se:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = UR \sin\theta + \frac{UR \sin\theta a^3}{2(R^2 + Z^2)^{3/2}}$$

Em particular tem-se que o potencial é visto como função de  $\sin\theta$ . Assim, este problema envolve somente um único ( $n=1$ ) termo na expansão em série de Fourier.

Neste exemplo, semelhantemente à aplicação 3, é proposto um "problema de fluxo". A comparação de resultados para o potencial de velocidade entre o MEC e a solução analítica exata é feita para o local onde ocorre a perturbação ( $\phi_2$ ).

Os valores dos parâmetros usados para este problema são:

$$a = 1 \quad e \quad U = 1$$

Tem-se neste exemplo um problema de domínio infinito. Considera-se o ângulo  $\theta$  igual a  $90^\circ$  e para a comparação de resultados são feitas 3 discretizações com 8, 16 e 32 elementos, para os quais consideram-se polígonos de área idêntica à da superfície da esfera em consideração.

Na tabela (VI.5) são apresentados resultados representativos obtidos pelo MEC e comparados com a solução analítica exata. Na Figura (VI.11) tem-se o gráfico  $\phi_2 \times R$  para o ângulo de  $90^\circ$ .

Tab. (VI.5) - Resultados Representativos para 8, 16 e 32  
Elementos

N=8	R	$\phi_2$	
Nº		MEC	ANALÍTICA
1	0.19509	0.09365	0.09755
2	0.55557	0.28128	0.27779
3	0.83147	0.42389	0.41574
4	0.98079	0.50100	0.49040
N=16	R	$\phi_2$	
Nº		MEC	ANALÍTICA
2	0.29028	0.14491	0.14514
4	0.63440	0.31848	0.31720
6	0.88192	0.44328	0.44096
8	0.99519	0.50037	0.49760
N=32	R	$\phi_2$	
Nº		MEC	ANALÍTICA
2	0.14673	0.07315	0.07337
4	0.33690	0.16846	0.16845
6	0.51411	0.25726	0.25706
8	0.67156	0.33616	0.33578
10	0.80322	0.40213	0.40161
12	0.90400	0.45262	0.45200
14	0.97003	0.48571	0.48502
16	0.99880	0.50012	0.49940

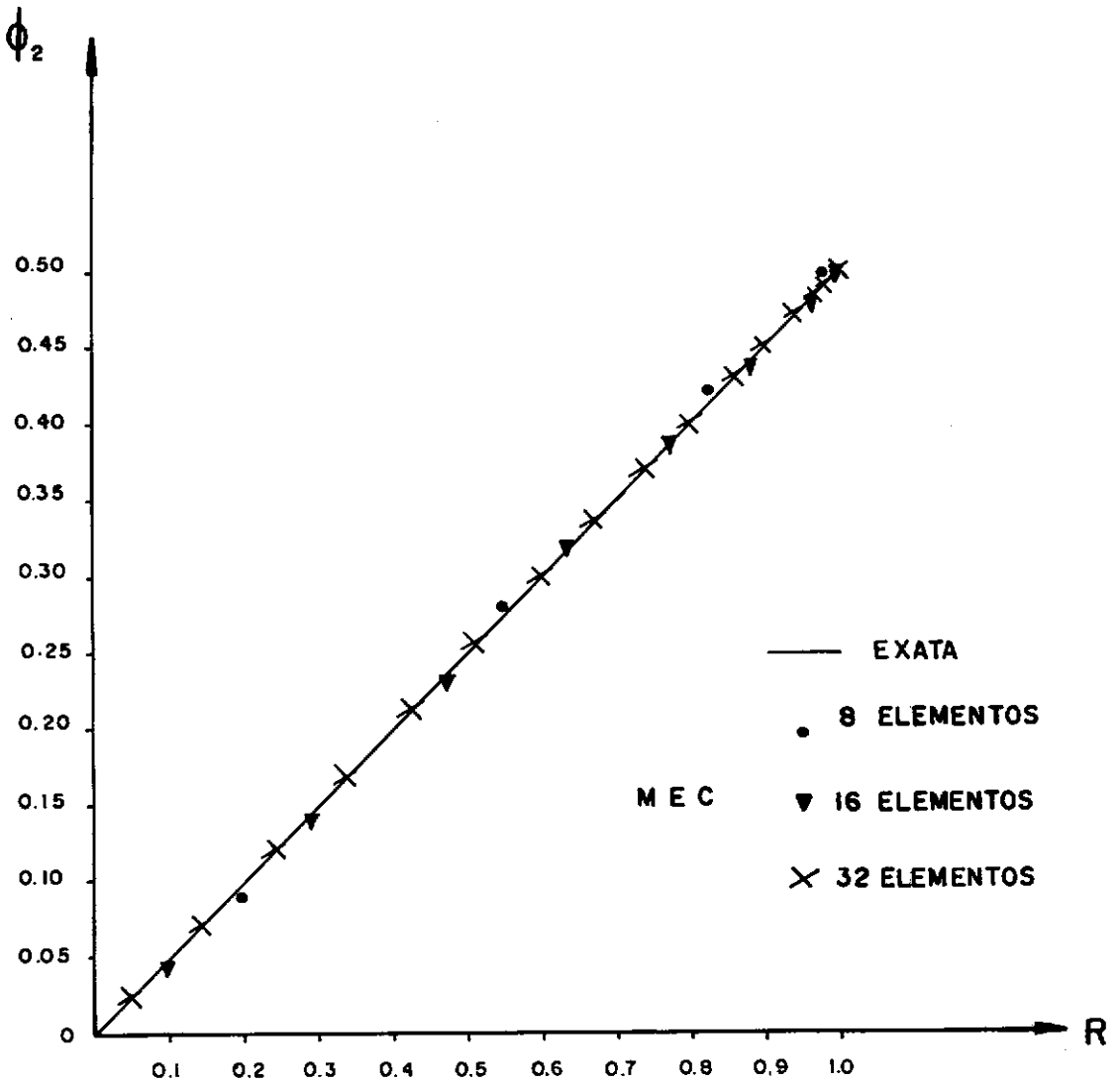


FIG. VI-II- GRÁFICO  $\phi_2 \times R$

## APLICAÇÃO 5

O último exemplo estuda o problema de um campo eletrostático dentro de uma região cilíndrica de comprimento infinito.

A região possui raio unitário e é contornada por duas placas de carga semicilíndricas opostas, como se mostra na figura (VI.12).

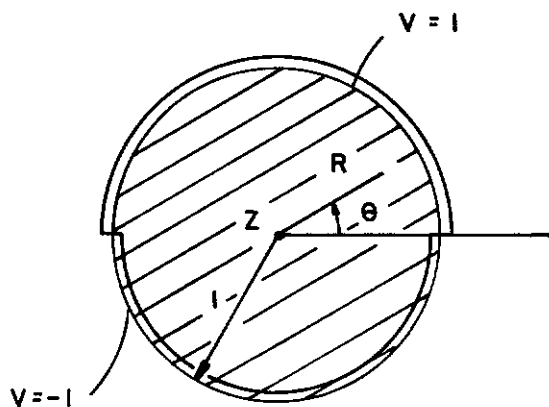


FIG. VI-12- CAMPO ELÉTRICO DENTRO DE UMA REGIÃO CILÍNDRICA

As condições de contorno são:

$$V = -1 \quad \text{para} \quad R=1 \quad , \quad -\pi < \theta < 0$$

$$V = 1 \quad \text{para} \quad R=1 \quad , \quad 0 < \theta < \pi$$

onde

$V$  é o potencial elétrico (a função harmônica  $\bar{u}$ ).

O campo dentro da região é dado exatamente por CHURCHILL [15] como:

$$V = \frac{2}{\pi} \cdot \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{2 R \operatorname{sen} \theta}{(1-R^2)} \right]$$



Como  $V$  e  $V'$  são funções ímpares de  $\theta$ , a expansão em série de Fourier não contém termos em cosseno, embora possua um número infinito de termos em seno.

Nota-se que quando  $R=1$ ,  $V$  é descontínuo e  $V'$  é indefinido. Logo  $V$  e  $V'$  não são bem representados pelas séries de Fourier. Conseqüentemente, para efeito de comparação de resultados escolhe-se somente a região de  $R \leq 0,75$ . Igualmente considera-se a região para  $-0,5 \leq Z \leq 0,5$ .

As condições de contorno impostas sobre esta região são:

$$V = \frac{2}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{24}{7} \operatorname{sen} \theta \right] \text{ para } R = 0.75$$

$$V' = 0 \quad \text{para } Z = \pm 0.5$$

e são mostradas na Figura (VI.13).

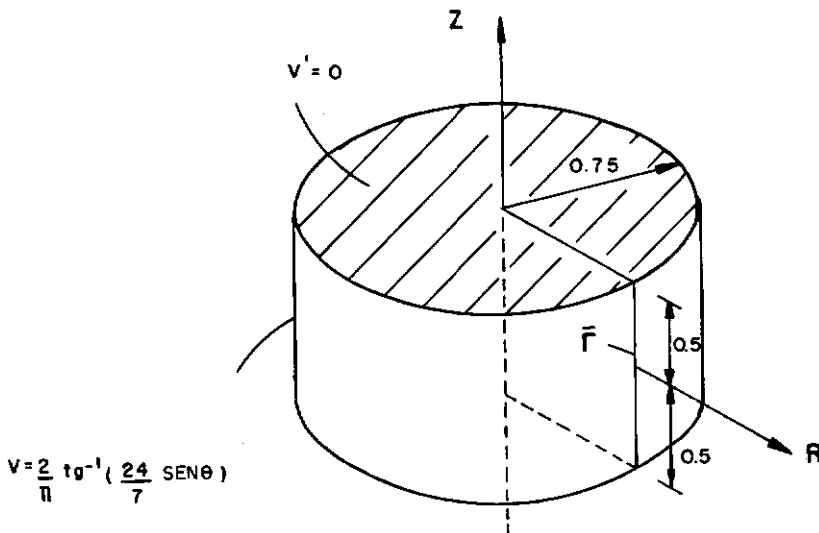


FIG.VI-13- REGIÃO REDUZIDA DO CAMPO ELÉTRICO



Tab. (VI.6) - Resultados dos Coeficientes para a Aplicação 5

$\eta$	V no N <sup>o</sup> 3		V' no N <sup>o</sup> 8	
	MEC	EXATA	MEC	EXATA
1	0.4791	0.4774	1.2699	1.2732
2	0.0000	0.0000	0.0000	- 0.0002
3	0.0229	0.0224	0.6789	0.7162
4	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0006
5	0.0019	0.0019	0.3819	0.4029

A Tabela (VI.7) mostra resultados obtidos pelo MEC no cálculo de V no N<sup>o</sup> 3 para diversos valores do ângulo  $\theta$ . Estes resultados são comparados com a solução analítica exata.

Tab. (VI.7) - Distribuição de V para  $\theta$  no N<sup>o</sup> 3

$\theta$	POTENCIAL ELÉTRICO (V)	
	MEC	ANALÍTICA
0 <sup>o</sup>	0	0
15 <sup>o</sup>	0.1421	0.1414
30 <sup>o</sup>	0.2635	0.2619
45 <sup>o</sup>	0.3536	0.3520
60 <sup>o</sup>	0.4132	0.4120
75 <sup>o</sup>	0.4470	0.4459
90 <sup>o</sup>	0.4580	0.4568

Nas Figuras (VI.15-VI.20) tem-se gráficos de  $V \times R$  para diversos valores de  $\theta$ .

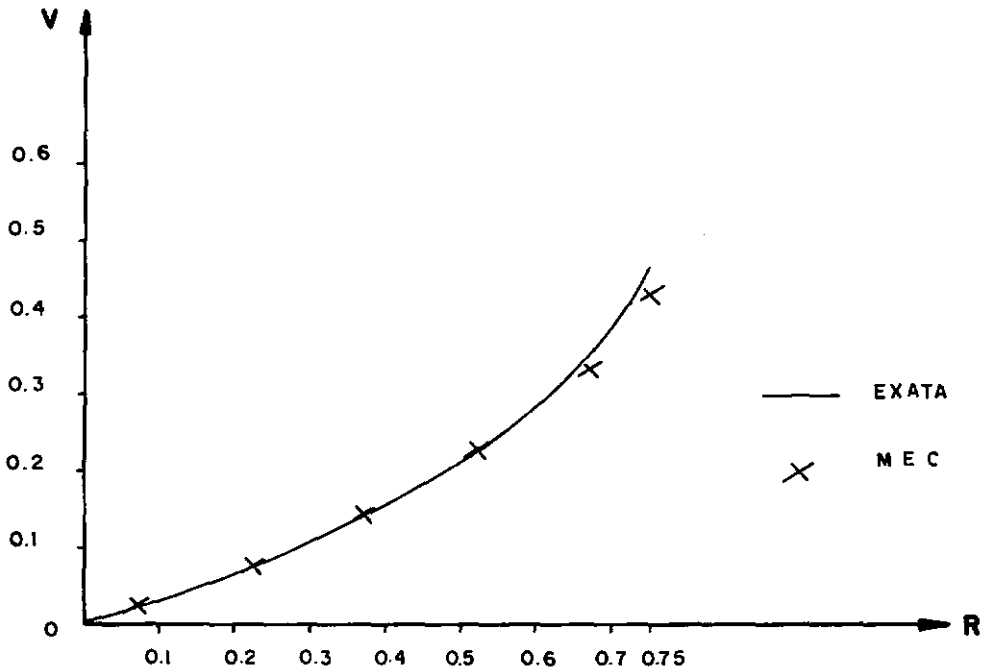


FIG. VI-15- GRÁFICO  $V \times R$  PARA  $\theta = 15^\circ$

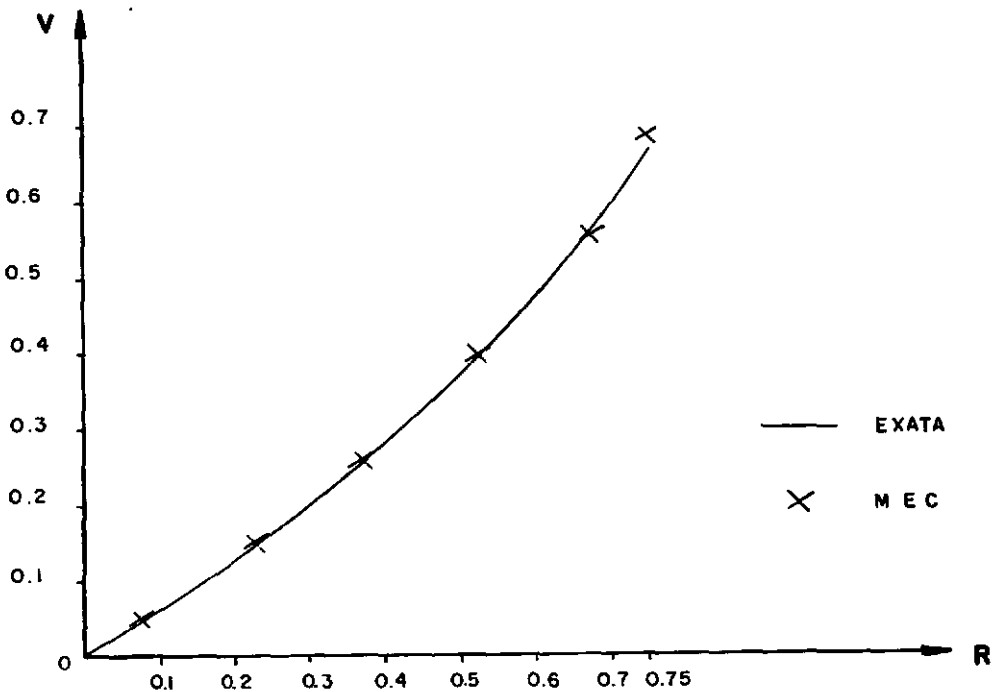
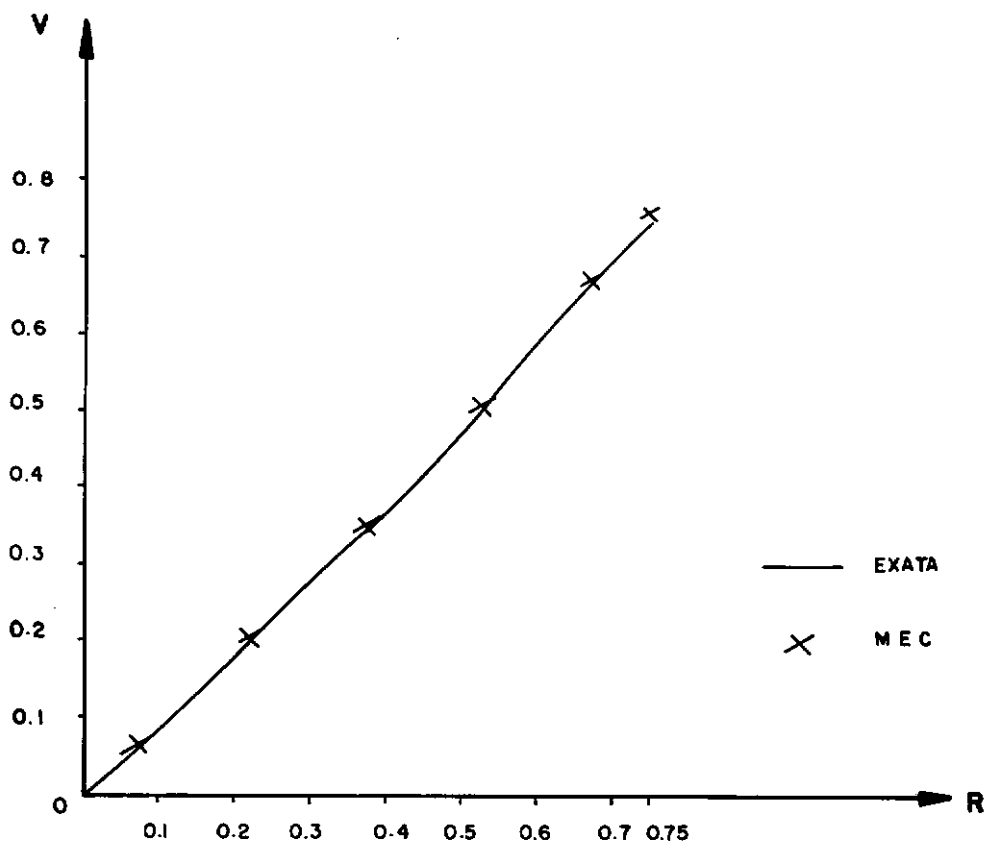
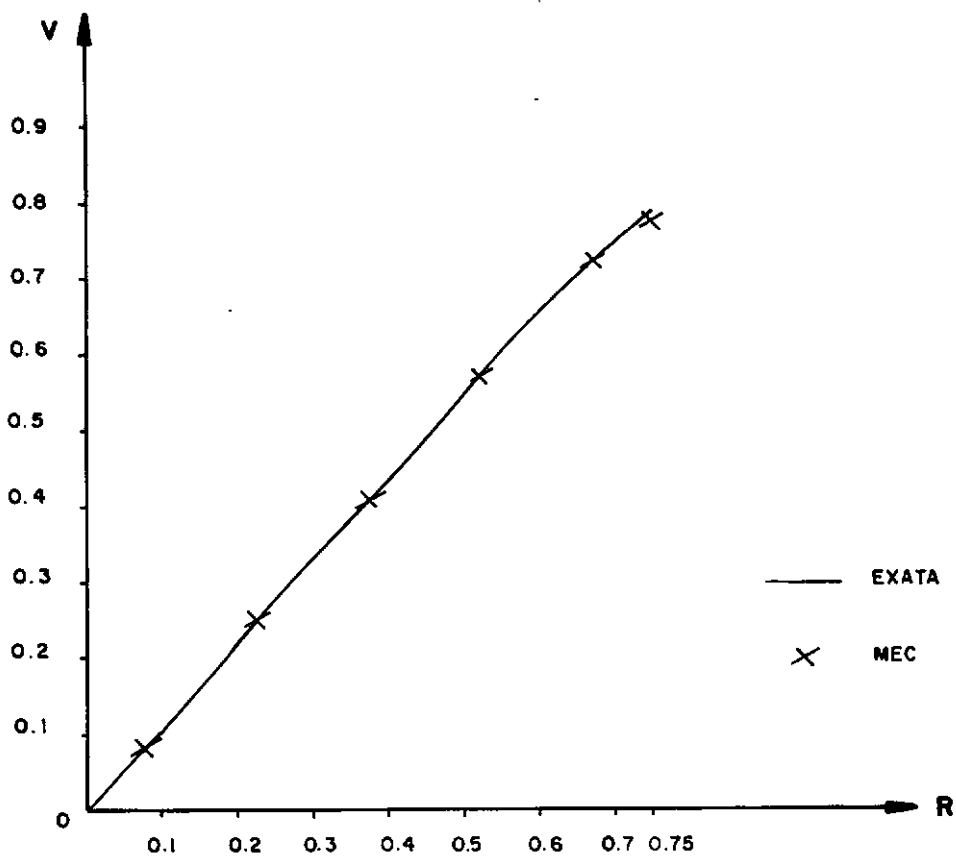
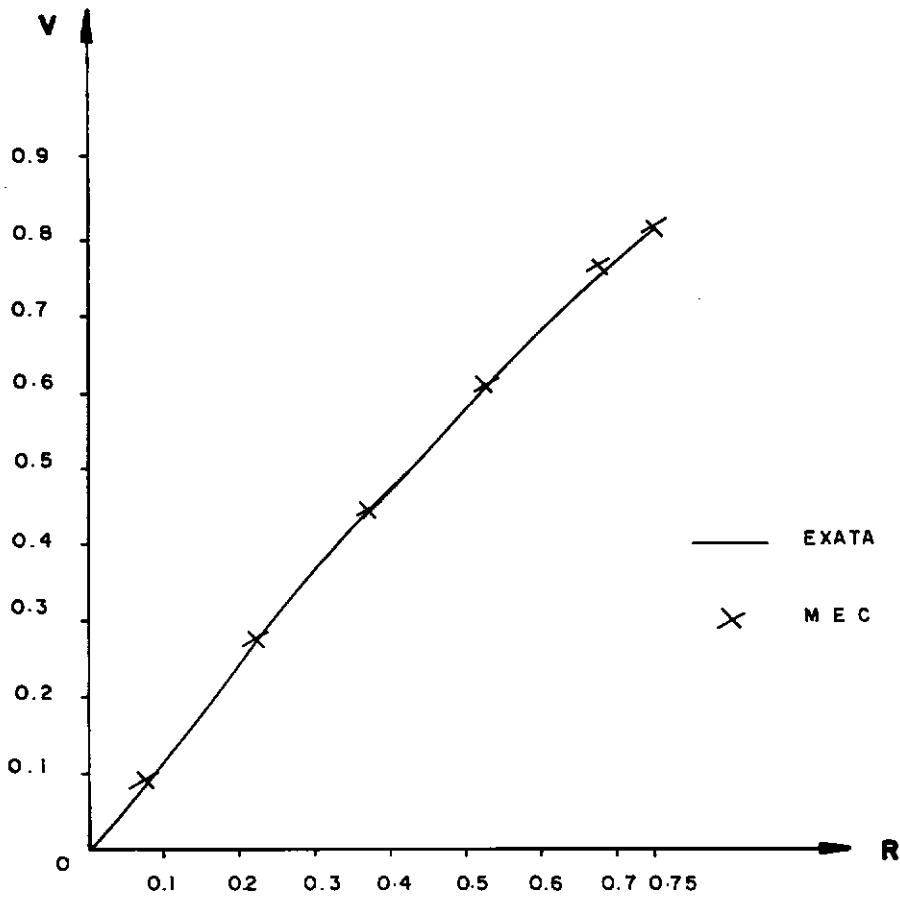
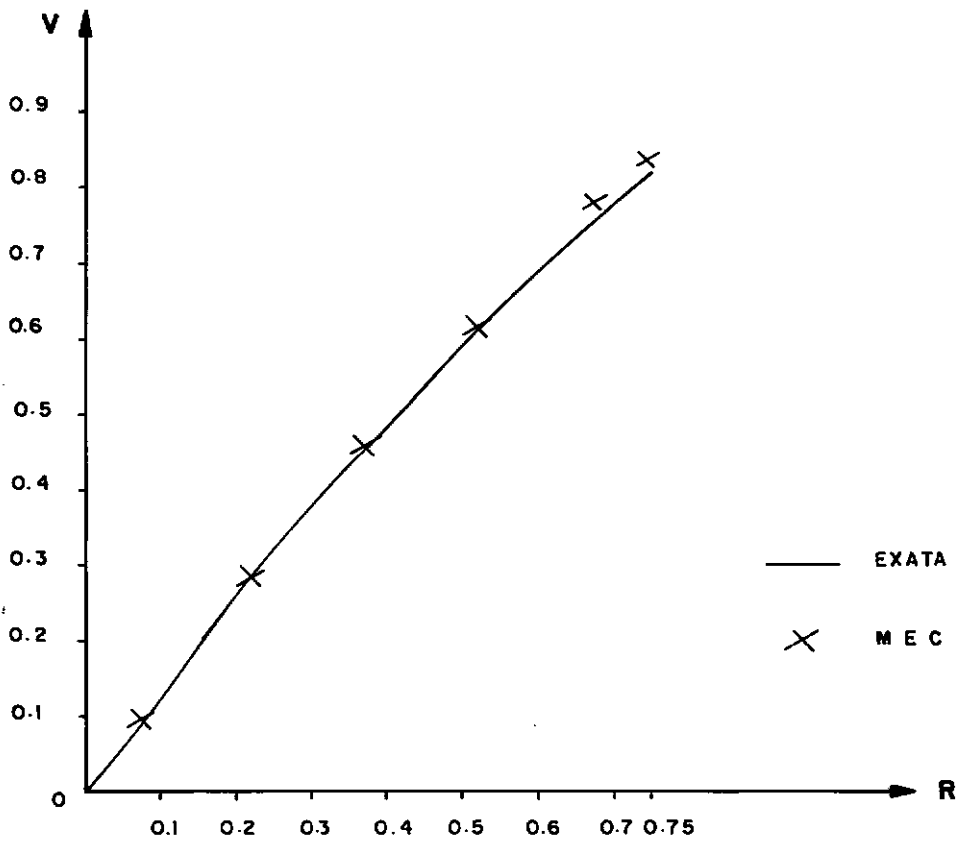


FIG. VI-16- GRÁFICO  $V \times R$  PARA  $\theta = 30^\circ$

FIG. VI-17- GRÁFICO  $V \times R$  PARA  $\theta = 45^\circ$ 

FIG. VI-19- GRÁFICO V X R  $\theta = 75^\circ$ FIG. VI-20- GRÁFICO V X R PARA  $\theta = 90^\circ$

## CAPÍTULO VII

### CONCLUSÕES

Utilizando a formulação desenvolvida neste trabalho para a obtenção das soluções fundamentais, angularmente independentes ( $HH_n$  e  $HL_n$ ) para cada harmônico da série de Fourier, há dificuldade em expressar estas soluções em integrais elípticas completas do primeiro e segundo tipo. A partir do segundo termo da série, as integrais são resolvidas numericamente usando diretamente integração angular.

A integração angular foi implementada utilizando 24 pontos de Gauss. Usando a regra de Simpson, devem ser utilizados 60 pontos que para as mesmas integrais deram resultados semelhantes.

As condições de contorno para os casos não-axissimétricos são os coeficientes da série de Fourier. Estas integrais devem ser calculadas com um grande grau de precisão e são calculadas neste trabalho com 100 pontos, utilizando a regra de integração de Simpson.

Neste trabalho são estudados os problemas governados pela equação de Laplace, mas é possível fazer a simulação de problemas de difusão para estados estacionários. Neste caso, a constante de difusão está incluída nas condições de contorno naturais do problema ( $q$ ).

O cálculo das integrais que apresentaram singularidade foi levantado utilizando uma transformação quadrática. No entanto, este cálculo foi realizado inicialmente através de outro processo.

Neste processo sempre é possível separar as integrais elípticas, numa função que contém somente a integral elíptica completa do primeiro tipo (EK) mais outra que contém somente a integral elíptica completa do segundo tipo (EE). A singularidade acontece quando a coordenada R do ponto fonte (RP) é igual à coordenada R do ponto campo (RQ), isto é, quando  $FK=1$ ,  $EE=1$ .

Logo, esta parcela é calculada normalmente, usando a quadrática de Gauss. Este mesmo procedimento não deve ser seguido para o cálculo da contribuição de EK devido à singularidade existente.

Passando-se estas integrais para coordenadas locais, a parcela que contém EK é dividida em duas partes, sendo a primeira no intervalo de -1 até a singularidade e a segunda da singularidade até 1. Fazendo uma mudança de variáveis, cada parcela é dividida em outras duas, de maneira a obtermos uma parte bem comportada, que é calculada usando a quadratura de Gauss e outra parte que é calculada usando peso logaritmo.

Este processo apresenta precisão comparável com a transformação quadrática. Entretanto, não é vantajoso ser usado devido ao maior número de parcelas a serem integradas, que além de tornar o programa menos eficiente computacionalmente, dificulta



a ativação de novos termos na série de Fourier, caso for desejado ou seja necessário.

No trabalho realizado por Hess e Smith [2] para o tratamento de problemas de potencial, no qual corpos axissimétricos são sujeitos a condições de contorno arbitrárias, foi considerado somente o primeiro termo da série de Fourier (termo em coseno somente). Deste modo, a formulação implementada neste trabalho inclui o trabalho de Hess e Smith.

Tendo-se trabalhado com condições de contorno arbitrárias, é dado um grande passo para a extensão da aplicação do MEC a outros tipos de problemas. Assim, poderão ser tratados problemas de elasticidade, plasticidade e viscosidade axissimétrica entre outros, nos quais as condições de contorno sejam arbitrárias.

Os coeficientes da diagonal da matriz  $\tilde{H}$  não são calculados através de movimentos de corpo rígido, pois esta consideração só é válida para o termo axissimétrico ( $n=0$ ).

Apesar da complexidade de ter uma seqüência de integrais elípticas completas como solução fundamental singular, o sucesso numérico para problemas do mesmo tipo é bastante satisfatório. Devido à grande dificuldade em tratar com integrais elípticas completas e ao fato da pequena literatura a respeito deste assunto, desenvolve-se neste trabalho uma tabela de integrais elípticas completas. O objetivo desta tabela é dar uma pequena contribuição, de maneira a fornecer subsídios para resolver algumas integrais que aqui aparecem.

As principais vantagens da formulação deste trabalho são:

- a) se somente poucos termos da série de Fourier são utilizados, este tratamento tem importantes vantagens em contraste com o tratamento tridimensional.
- b) o problema tridimensional é reduzido a uma seqüência de problemas unidimensionais.
- c) a simples preparação de dados.
- d) as modificações de projetos são facilmente implantadas, já que somente o contorno da região precisa ser definido.

O programa implementado utiliza o elemento com geometria linear, não sendo possível, desta forma, representar de maneira exata os problemas de geometria circular ou parabólica. Devido a esta dificuldade recomenda-se implementar um programa com elementos circulares ou parabólicos, deixando para o usuário a correta utilização de cada elemento.

Com o aumento do número de engenheiros e pesquisadores ocupados no seu estudo e divulgação, no Brasil o método dos elementos de contorno começa a ocupar lugar de destaque entre os instrumentos disponíveis para o tratamento dos problemas que a engenharia nos apresenta.

Os resultados obtidos neste trabalho dão uma pequena contribuição e incentivam o prosseguimento das pesquisas para a generalização do método dos elementos de contorno.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1] WILSON, E.L., "Structural Analysis of Axisymmetric Solids", AIAA Journal, vol. 3, nº 12, 2269-2274 (1965).
  
- [ 2] HESS, J.L., and SMITH, A.M.O., "Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies", Progress in Aeronautical Sciences, vol. 8, (D. Küchemann, Ed.), Pergamon Press, London, 1967.
  
- [ 3] MAYR, M., "On the Numerical Solution of Axisymmetric Elasticity Problems Using an Integral Equation Approach", Mechanics Research Communications, Vol. 3, 393-398, (1976).
  
- [ 4] RIZZO, F.J., and SHIPPY, D.J., "A Boundary Integral Approach to Potential and Elasticity Problems for Axisymmetric Bodies with Arbitrary Boundary Conditions", Mech. Res. Commun., Vol. 6, 99-103 (1979).
  
- [ 5] MAYR, M., DREXLER, W., and KUNHN, G., "A Semi-Analytical Boundary Integral Approach for Axisymmetric Elastic Bodies with Arbitrary Boundary Conditions", Int. J.Solids Structures, Vol. 16, 863-871 (1980).

- [ 6] SHIPPY, D.J., RIZZO, F.J., and NIGAN, R.K., "A Boundary Integral Equation Method for Axisymmetric Elastostatic Bodies under Arbitrary surface Loads", in Proc. 2nd Int. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Appl. Engng. SCI. (R.P.Shaw et al., Eds.), University of Virginia Press, Charlottesville, 1980.
  
- [ 7] SHIPPY, D.J., RIZZO, F.J., and GUPTA, A.K., "Boundary Integral Solution of Potential Problems Involving Axisymmetric Bodies and Nonsymmetric Boundary Conditions", in Proc. 10th South Eastern Conf. on Theoretical and Applied Mechanics, 1980.
  
- [ 8] BREBBIA, C.A., "The Boundary Element Method for Engineers", Pentech Press, London; Halstead Press, New York, 1978 (Second Edition, 1980).
  
- [ 9] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., and WROBEL, L.C., "Boundary Element-Techniques", Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
  
- [10] CHERTOCK, G., "Sound Radiation from Vibrating Surfaces", J. Acoust. Soc. Amer., 38, 1308-1313 (1964).
  
- [11] HADAMAR, J., "Lectures on Cauchy's Problem", Yale, New York, 1923.

- [ 12]    CODY, W.J., "Chebyshev Approximations for the Complete Elliptic Integrals K and E", Math. Comp. 19, 105-112, (1965).
  
- [ 13]    CHAPMAN, A.J., "Heat Transfer" (2nd ed.), MacMillan, New York, 49-51 (1967).
  
- [ 14]    ROUSE, H., "Fluid Mechanics for Hydraulic Engineers", Dover Publications, Inc., New York, 83-93 (1961).
  
- [ 15]    CHURCHILL, R.V., "Fourier Series and Boundary Value Problems", Mc Graw-Hill, New York, p. 126 (1941).
  
- [ 16]    RIZZO, F.J., GUPTA, A.K., and WU, Y., "A Boundary Integral Equation Method for Torsion of Variable Diameter Circular Shafts and Related Problems", in Proc. 2nd Int. Symp. on Innovative Numerical Analysis in Appl. Engng. SCI. (R.P. Shaw et al., Eds.), University of Virginia Press, Charlottesville, 1980.
  
- [ 17]    WROBEL, L.C., "Potential and Viscous Flow Problems Using the Boundary Element Method", Ph.D. Thesis, Southampton University, 1981.
  
- [ 18]    KERMANIDIS, T., "A Numerical Solution for Axially Symmetrical Elasticity Problems", Int. J. Solids Structures, Vol. 11, 493-500 (1975).

- [19] FAIRWEATHER, G., RIZZO, F.J., SHIPPY, D.J., and WU, Y.S., "On the Numerical Solution of two-dimensional Potential Problems by an Improved Boundary Integral Equation Method", J. Comput. Phys., Vol. 31, 96-112 (1979).
- [20] RIZZO, F.J., "An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics", Quart. Appl. Math., Vol. 25, 83-95 (1967).
- [21] BYRD, P.F. and FRIEDMAN, M.D., "Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists" (2nd ed.), Springer-Verlag, New York, 191-210 (1971).
- [22] ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I.A. (Eds.), "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York, 1965.
- [23] TELLES, J.C.F., "Elementos de Contorno Aplicados à Plasticidade Axissimétrica", Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Estrutural, Vol. 1, nº 1, 103-115 (1982).
- [24] McCUEN, R.H., "Fortran Programming for Civil Engineers", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [25] PACITTI, T., "Fortran-Monitor; Princípios", Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1978.

- [ 26] PISKUNOV, N., "Cálculo Diferencial e Integral", Tomo II, 2.<sup>a</sup> edição, Editorial MIR, MOSCU, 323-364 (1973).
  
- [ 27] LIGGET, J.A., and LIU, P.L.F., "The Boundary Integral Equation Method for Porous Media Flow", George Allen and un Win (Eds.), London, 86-94 (1983).
  
- [ 28] SÃ, P.A.C.O., "Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo", M.Sc., Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, 1980.



## APÊNDICE A

Em coordenadas retangulares:

$$r(P,Q) = [(x_1(Q) - x_1(P))^2 + (x_2(Q) - x_2(P))^2 + (x_3(Q) - x_3(P))^2]^{1/2}$$

Em coordenadas cilíndricas:

$$x_1(Q) = RQ \cdot \cos \theta Q$$

$$x_1(P) = RP \cos \theta P$$

$$x_2(Q) = RQ \cdot \sin \theta Q$$

$$x_2(P) = RP \sin \theta P$$

$$x_3(Q) = ZQ$$

$$x_3(P) = ZP$$

Substituindo na equação, temos:

$$r(P,Q) = [(RQ \cdot \cos \theta Q - RP \cdot \cos \theta P)^2 + (RQ \cdot \sin \theta Q - RP \cdot \sin \theta P)^2 + (ZQ - ZP)^2]^{1/2}$$

$$\begin{aligned} r(P,Q) = [ & RP^2 (\cos^2 \theta P + \sin^2 \theta P) + RQ^2 (\cos^2 \theta Q + \sin^2 \theta Q) + \\ & - 2 RP \cdot RQ (\cos \theta Q \cos \theta P + \sin \theta Q \sin \theta P) + (ZQ - ZP)^2 ]^{1/2} \end{aligned}$$

Assim:

$$r(P,Q) = [ RP^2 + RQ^2 - 2RP \cdot RQ \cdot \cos (\theta Q - \theta P) + (ZQ - ZP)^2 ]^{1/2}$$

## APÊNDICE B

$$d\Gamma(Q) = |\tilde{J}| \, d\theta_Q \cdot d\bar{\Gamma}_Q$$

Sabe-se que:

$$x_1(Q) = RQ \cdot \cos \theta_Q$$

$$x_2(Q) = RQ \cdot \sin \theta_Q$$

$$x_3(Q) = ZQ$$

como,

$$|\tilde{J}| = \frac{\partial [x_1(Q), x_2(Q), x_3(Q)]}{\partial [RQ, \theta_Q, ZQ]} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1(Q)}{\partial RQ} & \frac{\partial x_1(Q)}{\partial \theta_Q} & \frac{\partial x_1(Q)}{\partial ZQ} \\ \frac{\partial x_2(Q)}{\partial RQ} & \frac{\partial x_2(Q)}{\partial \theta_Q} & \frac{\partial x_2(Q)}{\partial ZQ} \\ \frac{\partial x_3(Q)}{\partial RQ} & \frac{\partial x_3(Q)}{\partial \theta_Q} & \frac{\partial x_3(Q)}{\partial ZQ} \end{vmatrix}$$

temos que,

$$|\tilde{J}| = \begin{vmatrix} \cos \theta_Q & -RQ \cdot \sin \theta_Q & 0 \\ \sin \theta_Q & RQ \cdot \cos \theta_Q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = RQ (\cos^2 \theta_Q + \sin^2 \theta_Q)$$

Logo,  $|\tilde{J}| = RQ$

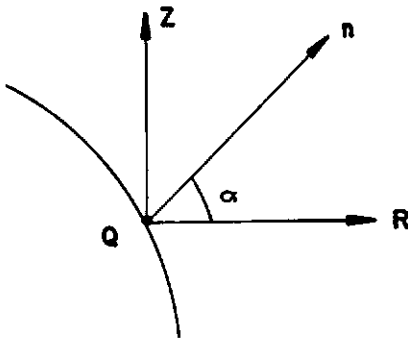
## APÊNDICE C

Tem-se que:

$$HHO = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cdot \cos^2 \theta]^{1/2}}$$

Pretende-se calcular HLO

$$HLO = \frac{\partial HHO}{\partial RQ} \cdot \frac{\partial RQ}{\partial n} + \frac{\partial HHO}{\partial ZQ} \cdot \frac{\partial ZQ}{\partial n}$$



$$\frac{\partial RQ}{\partial n} = \eta_{RQ} = \cos \alpha$$

$$\frac{\partial ZQ}{\partial n} = \eta_{ZQ} = \sin \alpha$$

Cálculo de  $\frac{\partial HHO}{\partial RQ}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial RQ} \left( \frac{4}{RR} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \right) &= \frac{\partial}{\partial RQ} \left( \frac{4}{RR} \right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} + \\ &+ \frac{4}{RR} \cdot \frac{\partial}{\partial RQ} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \right) \end{aligned}$$

Cálculo de  $\frac{\partial}{\partial RQ} \left( \frac{4}{RR} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial RQ} \left( \frac{4}{RR} \right) = \frac{\partial}{\partial RQ} \left( 4 \left[ (RP+RQ)^2 + (ZQ-ZP)^2 \right]^{-1/2} \right) = -4 \frac{(RP+RQ)}{RR^3}$$

Cálculo de  $\frac{\partial}{\partial RQ} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \right)$

$$FK^2 = \frac{4RP \cdot RQ}{[(RP+RQ)^2 + (ZQ-ZP)^2]}$$

$$\frac{\partial}{\partial RQ} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \right) = \frac{\partial}{\partial RQ} \left( \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{4RP \cdot RQ \cdot \cos^2 \theta}{[(RP+RQ)^2 + (ZQ-ZP)^2]} \right)^{-1/2} d\theta \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial RQ} \left( \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} \right) = \frac{[2RP - (RP+RQ)FK^2]}{RR^2} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{3/2}}$$

Logo, tem-se que:

$$\frac{\partial HHO}{\partial RQ} = \frac{4}{RR^3} \left( -(RP+RQ) \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{1/2}} + [2RP - (RP+RQ)FK^2] \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{3/2}} \right)$$

Cálculo de  $\frac{\partial HH0}{\partial ZQ}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \right) &= \frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \frac{4}{RR} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} + \\ &+ \frac{4}{RR} \cdot \frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Cálculo de  $\frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \frac{4}{RR} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \frac{4}{RR} \right) = \frac{\partial}{\partial ZQ} \left( 4 \cdot [(RP+RQ)^2 + (ZQ-ZP)^2]^{-\frac{1}{2}} \right) = - \frac{4 (ZQ-ZP)}{RR^3}$$

Cálculo de  $\frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial ZQ} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \right) = - \frac{(ZQ-ZP) \cdot FK^2}{RR^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \cdot d\theta}{[1-FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}$$

Logo,

$$\frac{\partial \text{HHO}}{\partial \text{ZQ}} = \frac{4}{\text{RR}^3} \left( -(\text{ZQ}-\text{ZP}) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} - (\text{ZQ}-\text{ZP}) \cdot \text{FK}^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \cdot d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned} \text{HLO} = \frac{4}{\text{RR}^3} & \left( -[ (\text{RP}+\text{RQ}) \eta \text{RQ} + (\text{ZQ}-\text{ZP}) \eta \text{ZQ} ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} + \right. \\ & \left. + [ (2\text{RP}-(\text{RP}+\text{RQ})\text{FK}^2) \eta \text{RQ} - (\text{ZQ}-\text{ZP})\text{FK}^2 \cdot \eta \text{ZQ} ] \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \cdot d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

## APÊNDICE D

Tem-se:

$$HH1 = \frac{4}{RR} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}$$

Pretende-se calcular:

$$HL1 = \frac{\partial HH1}{\partial RQ} \cdot \frac{\partial RQ}{\partial n} + \frac{\partial HH1}{\partial ZQ} \cdot \frac{\partial ZQ}{\partial n}$$

Cálculo de  $\frac{\partial HH1}{\partial RQ}$

$$\frac{\partial HH1}{\partial RQ} = \frac{\partial}{\partial RQ} \left( \frac{4}{RR} \right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{RR} \cdot \frac{\partial}{\partial RQ} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\frac{\partial HH1}{\partial RQ} = - \frac{4(RP+RQ)}{RR^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} + \frac{4 [2RP - (RP+RQ) FK^2]}{RR^3} \cdot$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}$$

Cálculo de  $\frac{\partial \text{HH1}}{\partial \text{ZQ}}$

$$\frac{\partial \text{HH1}}{\partial \text{ZQ}} = \frac{-4(\text{ZQ}-\text{ZP})}{\text{RR}^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} + \frac{4[-(\text{ZQ}-\text{ZP})]\text{FK}^2}{\text{RR}^3} \cdot$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}}$$

Assim:

$$\text{HL1} = \frac{4}{\text{RR}^3} \left( - [(\text{RP}+\text{RQ})\eta_{\text{RQ}} + (\text{ZQ}-\text{ZP})\eta_{\text{ZQ}}] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} + \right.$$

$$\left. + [ (2\text{RP} - (\text{RP}+\text{RQ})\text{FK}^2)\eta_{\text{RQ}} - (\text{ZQ}-\text{ZP}) \cdot \text{FK}^2 \cdot \eta_{\text{ZQ}}] \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta}{[1-\text{FK}^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} \right.$$



## APÊNDICE E

A seguir será apresentada uma tabela de integrais elípticas. De maneira a conhecer o processo utilizado no cálculo destas integrais, calcula-se uma das integrais que constam desta tabela.

Assim, como exemplo, pretende-se calcular:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}}$$

Tem-se que  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \therefore \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[2 \cos^2 \theta - 1]}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} d\theta &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{2}{FK^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[1 - FK^2 \cos^2 \theta - 1]}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} d\theta - EK \\ &= -\frac{2}{FK^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}} d\theta + \frac{2}{FK^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} - EK \\ &= \frac{-2}{FK^2} EE + \frac{2}{FK^2} EK - EK \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]} = [(2 - FK^2) \cdot EK - 2 \cdot EE] \cdot \frac{1}{FK^2}$$

## TABELA DE INTEGRAIS ELÍPTICAS COMPLETAS

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} = EK$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}} d\theta = EE$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} = [(2 - FK^2) \cdot EK - 2 \cdot EE] \cdot \frac{1}{FK^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} = [(-4 + FK^2) \cdot FKL^2 EK + (4 - 3FK^2) EE] \cdot \frac{1}{FK^2 FKL^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} = \frac{EE}{FKL^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}} = \frac{[EK - EE]}{FK^2}$$

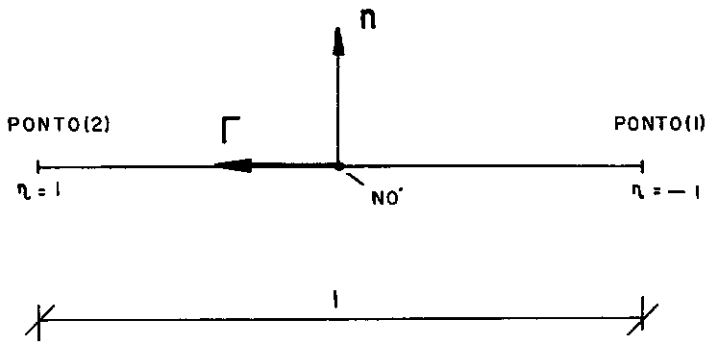
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} = \frac{[EE - FKL^2 \cdot EK]}{FK^2 \cdot FKL^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} = [(8FK^2 - 16) \cdot FKL^2 \cdot EK + (8FKL^2 + FK^4) EE] \cdot \frac{1}{FK^4 \cdot FKL^2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} = \left[ \frac{(1 + FKL^2)}{FKL^2} \cdot EE - 2 \cdot EK \right] \cdot \frac{1}{FK^4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \, d\theta}{[1 - FK^2 \cos^2 \theta]^{\frac{3}{2}}} = [-2 \cdot FKL^2 EK + (2 - FK^2) \cdot EE] \cdot \frac{1}{FK^2 \cdot FKL^2}$$

## APÊNDICE F



$$\eta = \frac{\Gamma}{l/2}$$

$$\therefore \eta = \frac{2\Gamma}{l}$$

$$\eta - \frac{2\Gamma}{l} = 0$$

Façamos

$$\begin{cases} u = \eta \\ v = \frac{-2\Gamma}{l} \end{cases}$$

Logo, temos:

$$u + v = 0$$

$$|J| = \frac{\partial(\Gamma, \eta)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(\Gamma, \eta)}}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\Gamma,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \Gamma} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \Gamma} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{\ell} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{\ell}$$

$$\text{Assim: } |\mathcal{J}|_{\sim} = \frac{1}{2/\ell} \therefore |\mathcal{J}|_{\sim} = \frac{\ell}{2}$$

## APÊNDICE G

CÁLCULO DE INTEGRAIS SINGULARES USANDO A QUADRATURA  
DE GAUSS

O objetivo é resolver:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta$$

onde  $f(\eta)$  é singular em um certo ponto  $\bar{\eta}$  ( $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$ ) seja:

$$\eta = a\theta^2 + b\theta + c$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 2a\theta + b$$

com

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta=1 & \Rightarrow \theta=1 \\ \eta=-1 & \Rightarrow \theta=-1 \\ \frac{d\eta}{d\theta} = 0 & \text{em } \bar{\eta} \end{array} \right.$$

tem-se:

$$a\theta^2 + b\theta + c - \eta = 0$$

$$\theta' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(C-\eta)}}{2a}$$

$$\theta'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(C-\eta)}}{2a}$$

que fornece na verdade 2 valores  $\theta$  para cada  $\eta$ , tínhamos que:

$$\begin{cases} a+b+C = 1 \\ a-b+C = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 2b &= 2 \therefore b=1 \\ a+C &= 0 \therefore a=-C \end{aligned}$$

no ponto singular  $\bar{\eta}$ , temos:

$$2a\bar{\theta} + b = 0$$

que fornece, quer usando  $\theta'$  ou  $\theta''$ :

$$b - 4a(C-\bar{\eta}) = 0$$

$$1 - 4a(-a-\bar{\eta}) = 0$$

$$4a(a+\bar{\eta}) = -1$$

$$4a^2 + 4a\bar{\eta} + 1 = 0$$

$$a = \frac{-4\bar{\eta} \pm \sqrt{(4\bar{\eta})^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4\bar{\eta} \pm \sqrt{4^2 \bar{\eta}^2 - 4^2}}{2 \cdot 4}$$

$$a = \frac{-4\bar{\eta} \pm 4\sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-\bar{\eta} \pm \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

$$a' = \frac{-\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} ; \quad c' = \frac{\bar{\eta} - \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

$$a'' = \frac{-\bar{\eta} - \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2} ; \quad c'' = \frac{\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta}^2 - 1}}{2}$$

Nota-se que como  $-1 \leq \bar{\eta} \leq 1$ , a mudança só fornece valores reais para  $a$  e  $c$  se  $|\bar{\eta}| = 1$  e neste caso  $a' = a''$  e  $C' = C''$

Fica-se, portanto com:

$$\begin{cases} a = -\frac{\bar{\eta}}{2} \\ c = \frac{\bar{\eta}}{2} \end{cases}$$

e a resposta é

$$\eta = a\theta^2 + b\theta + c$$

$$\eta = -\frac{\bar{\eta}}{2} \theta^2 + \theta + \frac{\bar{\eta}}{2}$$

$$\eta = \frac{\bar{\eta}}{2} (1 - \theta^2) + \theta$$

e

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 2a\theta + b = 2 \left( -\frac{\bar{\eta}}{2} \right) \theta + 1$$

$$\frac{d\eta}{d\theta} = 1 - \eta \bar{\theta}$$

Assim, tem-se:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \int_{-1}^1 f \left[ \frac{\bar{\eta}}{2} (1 - \theta^2) + \theta \right] (1 - \bar{\eta}\theta) d\theta$$