

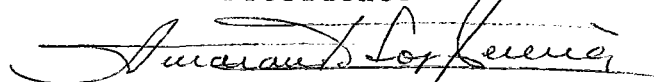
REDUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS DE CONTRÔLE ÓTIMO A PROBLEMAS
DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

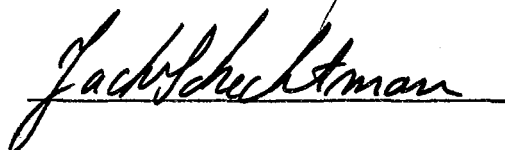
Clóvis Caesar Gonzaga

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:


Presidente





RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
ABRIL - 1970

Agradeço ao meu orientador, Prof.
Jean - Paul Jacob, que me encaminhou ao
estudo de otimização e a meu amigo Newton
D. Vasconcellos, por seu auxílio na reda-
ção e datilografia da tese.

R E S U M O

O princípio do mínimo de Pontryagin fornece condições necessárias para que seja minimizada uma funcional condicionada a um problema de controle. Como resultado, obtém-se, em geral, sistemas de equações diferenciais que as variáveis de controle e parâmetros do problema devem satisfazer. Neste trabalho mostramos que certos tipos de problemas de controle podem ser aproximados, dentro de certo critério, por problemas de programação matemática, cujas soluções devem satisfazer certas condições. Estas aproximações não são do tipo "discretização no tempo", mas são aproximações nas funções controle usadas. Estudamos, neste trabalho, condições necessárias e suficientes para os problemas simplificados, assim como alguns métodos numéricos para sua solução.

A B S T R A C T

Pontryagin's minimum principle furnishes the necessary conditions for the minimization of a functional restricted by a control problem. Systems of differential equations on the control variables and problem parameters are generally obtained as a result. This work shows that a certain class of control problems can be approximated, within certain limitations, by mathematical programming problems, the solution of which must satisfy determinate conditions. These approximations are not of the "time-discretization" type, but approximations on the control laws. We here study necessary and sufficient conditions for these simplified problems, as well as some numerical methods for their solution.

I N D I C E

Capítulo	1 . Introdução ao problema	1
Seção	I . Introdução	1
	II . Introdução ao problema de controle .	4
	III . Simplificação do problema de controle	6
	IV . Caso particular: problemas de tempo fixo com sistemas lineares . . .	9
	V . Caso particular: problemas de tempo fixo com sistemas lineares <u>inva-</u> <u>riantes</u> no tempo	11
	VI . Caso particular: problemas de tempo mínimo	12
	VII . Conclusões	15
Capítulo	2 . Problemas de tempo mínimo	17
Seção	I . Introdução	17
	II . Aplicação do teorema de Kuhn - Tucker	18
	III . Conclusões	28
Capítulo	3 . Problemas de controle com energia mínima em sistemas lineares	30
Seção	I . Introdução	30

Capítulo	3.		
Seção	II	Redução a um problema de dimensão finita	35
	III	Resolução do PM1 com vínculos aproximados	38
	IV	Conclusões	41
Capítulo	4	Condições necessárias e suficientes para soluções de PM1	45
Seção	I	Introdução	45
	II	Estudo dos vínculos e	50
	III	Condições necessárias e suficientes de otimalidade para P1, com não constante mente igual a 1	64
	IV	Conclusões	83
Capítulo	5	Resolução numérica de P1	85
Seção	I	Introdução	85
	II	Apresentação do método de penalidades	88
	III	Aplicação do método de penalidades a P4	99
	IV	Conclusões	112
Capítulo	6	Conclusões	114

C A P I T U L O 1

INTRODUÇÃO AO PROBLEMA

Seção I - Introdução

O princípio do Mínimo de Pontryagin (ref. [2], pag. 284), quando aplicável a um problema de controle, fornece condições necessárias para que seja minimizada uma funcional. Como resultado de sua aplicação, obtém-se, no entanto, sistemas de equações diferenciais e problemas de minimização em espaços de dimensão infinita que raramente podem ser resolvidos por métodos analíticos e cuja complexidade cresce muito com o aumento de complexidade dos sistemas de controle tratados.

Nosso intuito neste trabalho é desenvolver um método de redução do problema de otimização em espaço de dimensão infinita em que consiste o problema de controle, a um problema de otimização em espaço de dimensão finita. Esta redução, realizada através de uma simplificação do espaço de controles admissíveis, levará a problemas de programação não linear, cujas soluções, se existirem, conduzirão a soluções sub-ótimas do primeiro problema.

O problema de programação matemática é obtido através da expansão do vetor controle em uma soma finita de funções elementares, como proposto por Jacob [1]. A otimização será feita sobre os coeficientes dessa expansão, utilizando métodos de programação não linear.

O procedimento acima será desenvolvido nos capítulos 2 e 3 para problemas de controle particulares, onde abordamos problemas de tempo mínimo e problemas com critérios quadráticos. Poder-se-á ver, então, que a maior dificuldade do método reside na redução dos vínculos do problema de controle a vínculos sobre os coeficientes da expansão. Esta redução será tratada no capítulo 4 para funções critério convexas e um algoritmo para resolver o problema reduzido será desenvolvido no capítulo 5.

Neste capítulo formularemos o problema de controle, introduzindo os casos particulares a ser tratados nos capítulos restantes.

Façamos inicialmente algumas observações sobre notação.

Notação:

$$R^+ = \{x \mid x \in R \wedge x \geq 0\} \quad , \text{ onde } R \text{ é o conjunto dos reais}$$

1.1

Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor coluna e A uma matriz $n \times m$.
 Dados os conjuntos de índices $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, denotaremos:

$$x_I \triangleq \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{pmatrix}$$

$A_i \triangleq$ i^{a} linha da matriz A

$A^j \triangleq$ j^{a} coluna da matriz A

$$A_I \triangleq \begin{pmatrix} A_{i_1} \\ A_{i_2} \\ \vdots \\ A_{i_k} \end{pmatrix}, \quad A^J \triangleq [A^{j_1} \ A^{j_2} \ \dots \ A^{j_m}]$$

Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o gradiente de f em relação a x no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ será denotado por

$$\nabla_x f(\bar{x}) \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

Dada uma função $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\nabla_x g(\bar{x}) \triangleq \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}) \right]' \triangleq [\nabla_x g_1(\bar{x}) \ \dots \ \nabla_x g_m(\bar{x})]$$

onde $'$ denota transposição.

Seção II - Introdução ao problema de controle

O problema de controle será enunciado segundo a apresentação de Athans e Falb (ref. [2], pag. 284). Para que o problema seja tratável com alguma generalidade, mas também sem uma complicação excessiva, faremos desde logo simplificações em sua enunciação: a) não se fazem restrições sobre o estado do sistema;

b) as componentes do vetor controle serão limitadas somente em módulo;

c) o alvo do problema de controle será dado por uma variedade linear de $R^n \times R^+$ (vejam-se as definições abaixo).

Possíveis extensões da teoria serão indicadas nas conclusões deste capítulo e dos seguintes.

Considere-se então um sistema variante no tempo, descrito pela equação (ref. [2], pag. 284)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

onde $x : R^+ \rightarrow R^n$

1 $x(t) \in R^n \quad \forall t \in R^+$, o estado do sistema

2 $u : R^+ \rightarrow R^m$ satisfazendo condições de integrabilidade (veja-se [2], pag. 284)

$$u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^m \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

$$\Omega = \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y_i| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$f : \mathbb{R}^n \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ao conjunto U de funções controle que satisfazem (2) e (3), acima, chamaremos

$U =$ conjunto de controles admissíveis.

Vamos ainda definir o conjunto alvo.

$S \subset S_1 \times \mathbb{R}^+$, $S_1 \subset \mathbb{R}^n$, que neste trabalho será sempre tomado

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_I = \bar{x}_I\}, \text{ onde } I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}, \bar{x}_I \in \mathbb{R}^{|I|}, \text{ dado,}$$

e a funcional

$$J : \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(x_0, u, t_0, T) = \int_{t_0}^T L(x(t), u(t), t) dt$$

$$T \geq t_0$$

$$\text{onde } L : \mathbb{R}^n \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

Problema de controle:

Encontrar, se existir, um controle admissível que, aplicado ao sistema (1), em um estado inicial x_0 no instante t_0 dados, leva $(x(t), t)$ ao alvo S (6), minimizando a fun-

cional critério $J(x_0, u, t_0, T)$ (7), onde T é o primeiro instante tal que $(x(T), T) \in S$

Seção III - Simplificação do problema de controle

Um extenso tratamento do problema (9) é feito na referência [2].²² O conjunto de controles admissíveis U , constituído de funções satisfazendo condições gerais de integrabilidade, é muito geral.²³ Nossa simplificação mais importante ao problema de controle será particularizar o conjunto U , como segue:

Considere-se um conjunto finito de funções dadas

$$10 \quad v^j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

Definiremos agora

$$11 \quad U^1 = \left\{ u \mid u = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j, \alpha_j \in \mathbb{R}, j=1,2,\dots,q \wedge \right. \\ \left. \wedge (\forall t \in \mathbb{R}^+) |u_j(t)| \leq 1, j=1,2,\dots,m \right\}$$

A particularização acima, com a hipótese adicional

(12)

12 Hipótese: O sistema (1) é linear,

levar-nos-á a grande simplificação no tratamento do problema

de controle, como segue:

O sistema (1) linear, variante no tempo será representado por

$$13 \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

onde $A(t)$, $B(t)$ são matrizes reais, respectivamente $n \times n$ e $n \times m$, cuja apresentação e tratamento é encontrado na referência [3], pág.^{as} 341

Resolvendo o sistema (13) obtemos (ver [3], pag.

342)

$$14 \quad \dot{x}(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau ,$$

onde ϕ é a matriz de transição de estado.

Fazendo-se agora

$$15 \quad u(t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t)$$

e substituindo (15) em (14), obtém-se

$$16 \quad x(t) = \phi(t, t_0)x_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j F^j(t) , \text{ onde}$$

$$17 \quad F^j(t) \triangleq \int_{t_0}^t \phi(t, \tau) B(\tau) v^j(\tau) d\tau$$

1.III

Definindo

$$18 \quad \alpha \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}, \quad F(t) \triangleq \begin{bmatrix} F^1(t) & F^2(t) & \dots & F^q(t) \end{bmatrix}$$

obtem-se finalmente de (16) e (18),

$$19 \quad x(t) = \phi(t, t_0) x_0 + F(t) \alpha$$

Segue-se também imediatamente que

$$20 \quad x_1(t) = \phi_1(t, t_0) x_0 + F_1(t) \alpha, \quad \text{onde}$$

$$F_1^j(t) = \int_{t_0}^t \phi_1(t, \tau) B(\tau) v^j(\tau) d\tau$$

Note-se agora que a busca de um controle pertencente a U^1 transformou-se na busca de um $\alpha \in R^q$, e portanto reduziu-se ao tratamento em um espaço de dimensão finita, o tratamento do espaço U de dimensão infinita.

A substituição de (19) e (15) na funcional $J(x_0, u, t_0, T)$ (7), leva a uma função cujo domínio depende do tipo de problema abordado, mas que poderá ser tratada por métodos de programação matemática.

Nas seções seguintes, apresentaremos o tratamento dos casos que nos ocuparão em todo o trabalho: problemas com tempo fixo e problemas de tempo mínimo.

Seção IV - Caso particular: problemas de tempo fixo com sistemas lineares

Vamos considerar o caso particular em que, dado

$$\underline{T \in \mathbb{R}^+},$$

$$\begin{aligned} 21 \quad S &= S_1 \times \{T\} \quad , \quad T \geq t_0 \\ S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_I = \bar{x}_I\} \quad \bar{x}_I \in \mathbb{R}^{(I)} \quad \text{dado} \end{aligned}$$

Como os controles admissíveis devem levar $(x(t), t)$ ao alvo, deve-se ter, substituindo $t = T$ em (20),

$$22 \quad x_I(T) = \bar{x}_I = \phi_I(T, t_0) x_0 + P_I(T)$$

Definindo-se

$$23 \quad \hat{x}_I \triangleq \phi_I(T, t_0) x_0 - \bar{x}_I$$

Obtem-se de (22) e (23)

$$24 \quad \hat{x}_I + F_I(T) = 0$$

A equação (24) representa uma variedade linear de R^q de dimensão $n - |I|$. A grande vantagem dos problemas de tempo fixo reside na linearidade de (24), pois qualquer valor de $\alpha \in R^q$ tal que

$$u = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j \quad \text{resolve o problema de contrô-}$$

le estará sempre, se existir, sobre uma variedade linear. Veremos adiante que a equação (24) constituirá um vínculo do problema de programação não-linear a que se reduz o problema de controle, com a evidente vantagem de ser linear.

Note-se, entretanto, que os coeficientes que definem a variedade linear definida em (24), ou seja, os vetores \hat{x}_I e $F_I(T)$, necessitam o conhecimento da matriz de transição de estados $\phi(T, t_0)$ para poderem ser calculados. Em geral, o problema de achar-se ϕ não é trivial, a não ser no caso de sistemas invariantes no tempo, que abordaremos a seguir.

Seção V - Caso particular: problemas de tempo fixo com sistemas lineares invariantes no tempo

Citaremos ainda os resultados para sistemas lineares invariantes no tempo:

Se A e B forem constantes

$$25 \quad \phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)} \quad , \text{ o que substituído}$$

em (17) leva a

$$26 \quad F^j(\tau) = e^{AT} \int_{t_0}^T e^{-A\tau} B v^j(\tau) d\tau$$

Se $I = \{1, 2, \dots, n\}$, obtem-se, no lugar de (24), uma expressão muito simples para a variedade linear contendo α , ou seja

$$27 \quad \hat{x} + F(t)\alpha = 0 \quad , \text{ onde } \hat{x} = e^{A(\tau-t_0)} x_0 - \bar{x}$$

que pode ser escrita

$$28 \quad \hat{x} + e^{AT} \hat{F} \alpha = 0 \quad , \text{ onde, de (26), temos que}$$

$$29 \quad \hat{F}^j = \int_{t_0}^T e^{-A\tau} B v^j(\tau) d\tau$$

1.V

Como e^{AT} é não singular, multiplicando (28) por e^{-AT} obtém-se

$$30 \quad \hat{x}_0 + P\alpha = 0, \text{ onde } \hat{x}_0 = e^{-At_0} x_0 - e^{-AT} \bar{x}$$

Note-se que as expressões para P^j e \hat{x}_0 são, neste caso, mais fáceis de ser calculadas que as expressões correspondentes na Seção IV.^m

Seção VI - Caso particular: problemas de tempo mínimo

Considere-se o problema de controle da Seção II, com a função L , introduzida em (8), definida por

$$31 \quad L(x(t), u(t), t) = 1 \quad \text{Introduzindo-se (31) em II-7, vem}$$

$$32 \quad J(x_0, u, t_0, T) = T - t_0$$

Seja ainda o alvo

$$33 \quad S = S_1 \times R^+$$

$$34 \quad S_1 = \{x \in R^n \mid x_I = \bar{x}_I\}, \quad \bar{x}_I \in R^{I'} \text{ dado.}$$

Pode-se enunciar novamente o problema de controle:

- 35 Problema: Seja dado um sistema descrito pela equação
- $$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad , \text{ como na Seção II, acima, e seja } U \text{ o conjunto de controles admissíveis (ver II-5). Encontrar um controle admissível, se existir, que leve o sistema de um estado inicial } x_0 \text{ no instante } t_0 \text{, dados, ao conjunto } S_1 \text{ (34) em tempo mínimo } T - t_0 \text{, também desconhecido.}$$

O problema (35) é extensamente tratado na referência [2], à luz do Princípio do Mínimo. Os resultados obtidos desta maneira podem orientar-nos na escolha das funções elementares.

- 36 Devido ao princípio do "bang-bang" (ref. [2], pag. 382), dentro de condições de "normalidade", as componentes de u assumirão valores extremos, isto é, $|u_i(t)| = 1$ $\forall t \in [t_0, T]$. As condições de normalidade são bastante gerais e um resultado conhecido é o seguinte (ref. [2], pag. 400): se o sistema considerado for linear, invariante no tempo, uma condição necessária e suficiente para que o problema de controle seja normal (e portanto valha o princípio "bang-bang") é que o sistema seja normal (isto é, completamente controlável (ref. [2], pag. 218) através de qualquer de suas entradas atuando isoladamente).

Das considerações em (36), conclui-se que a melhor escolha das funções elementares v^i é do tipo

$$v^i(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1(t-T_{i_1}) - 1(t-T_{i_2}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (37)$$

onde $1(t-T_k)$ denota a função degrau aplicada no instante T_k . Já que cada componente $u_i(t)$ do vetor controle $u(t)$ pode ser escrita como

$$u_i(t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j v_i^j(t)$$

podemos escolher os vetores $v^j(t)$ de maneira que, a cada instante de tempo, $u_i(t)$ dependa apenas da i -ésima componente de um dos q vetores $v^j(t)$.

38 O número q de funções elementares utilizadas deve ser arbitrado em cada problema. Pode-nos auxiliar o fato de que, se o sistema for linear, invariante no tempo e todos os autovalores de A forem reais, o número de comutações de cada componente de u no intervalo (t_0, T) não excederá $n-1$, onde n é a ordem do sistema (ref. [2], pag. 402). Assim, uma boa escolha para q quando $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é $m \cdot n$.

A busca de um controle ótimo pertencente ao novo espaço de controles admissíveis deverá ser feita através de um problema de programação não-linear sobre os coeficientes α_j , $j = 1, 2, \dots, q$ das funções elementares e também sobre os instantes de comutação, como se desenvolverá no capítulo 2.

39 Os problemas de tempo mínimo assim formulados têm uma característica particular: os vínculos de $u(t)$, ou seja,

$$|u_i(t)| \leq 1 \quad \forall t \in [t_0, T] \quad , i = 1, 2, \dots, m$$

serão refletidos diretamente nos α_j :

$|\alpha_j| \leq 1 \quad j = 1, 2, \dots, q$, devido à não superposição de funções elementares relativas a cada componente de u , o que facilitará muito a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker.

Seção VII - Conclusões

40 Nosso tratamento do problema de controle é aplicável somente a sistemas lineares, mas a variância no tempo não traz dificuldades essenciais, além das já existentes na derivação das soluções de III-13.

1.VII

41 Os conjuntos S_1 de estados finais escolhidos têm o formato de variedades lineares. Esta escolha foi feita para simplificar os vínculos dos problemas reduzidos, como se verá nos capítulos seguintes, mas um tratamento mais geral não será qualitativamente muito diferente: apenas será mais trabalhoso e os vínculos dos problemas de programação matemática resultantes serão fortemente não-lineares.

42 No tratamento de problemas de tempo mínimo, devido à observação (39) da Seção anterior, será fácil trabalhar com os vínculos do vetor controle. Os problemas resultantes serão entretanto difíceis devido a fortes não-linearidades dos vínculos, como se verá no capítulo 2.

43 A simplificação de VI-39 não será possível quando as funções elementares não forem do tipo degrau e surge o problema: como expressar os vínculos de $u(t)$ em termos de vínculos de α ? Este problema é interessante e ocupará a maior parte de nosso trabalho, com uma abordagem aproximada no capítulo 3 e uma abordagem exata nos capítulos 4 e 5. Nesta parte da tese trabalharemos com problemas de tempo fixo, por causa das vantagens desses problemas, como explicamos na Seção IV. Além disso, a fixação do instante final será importante no estudo dos vínculos $|u_1(t)| \leq 1 \quad (\forall t \in [t_0, T])$ e o tratamento de problemas com alvos mais gerais não segue imediatamente do apresentado nesta tese.

C A P Í T U L O 2

PROBLEMAS DE TEMPO MÍNIMO

Seção I - Introdução

Na Seção 1.VI apresentamos o enunciado do problema de controle com tempo mínimo (veja-se (35)) e fizemos várias observações que facilitam sua redução a um problema de programação matemática.

Este capítulo tem por finalidade mostrar a formulação do problema de programação matemática para problemas de tempo mínimo, através das técnicas apresentadas no capítulo 1. Segue-se a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker a um caso particular (sistema linear invariante no tempo). Concluiremos que o sistema de inequações resultantes da aplicação do teorema de Kuhn - Tucker é muito complexo, devido à não-linearidades essenciais nos vínculos do problema de otimização.

Seção II - Aplicação do Teorema de Kuhn - Tucker

Vamos considerar o problema de controle com tempo mínimo, como apresentado em 1.VI-35. O conjunto de controles admissíveis, nesse enunciado, é o conjunto definido em 1.II-5, dado por

$$U = \{ u \mid (\forall t \in [t_0, T_f]) \mid u_i(t) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \};$$

u satisfaz condições de integrabilidade }
 onde T_f é o instante final desconhecido e

$$\forall t \in [t_0, T_f] \quad u(t) \in \mathbb{R}^m$$

Executaremos agora a simplificação do espaço de contrôles admissíveis, através da expansão dos controles em somas de funções elementares

$$v^j : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \quad j = 1, 2, \dots, q$$

com o método desenvolvido no capítulo 1, utilizando para as v^j o formato sugerido em 1.VI-37.

Seja então

1

$$I^{\ell} = \ell^{\text{a}} \text{ coluna da matriz identidade}$$

$$2 \quad v^j(t) = (1(t-T_{i_1}) - 1(t-T_{i_2})) I^l$$

onde $1(t - T_k)$ representa a função degráu (veja 1.VI-37).

As funções elementares (2) deverão ser ordenadas e deve-se escolher o número q .

Vamos considerar o sistema linear variante no tempo, como introduzimos em 1.III-13:

$$3 \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad , \quad \text{com}$$

$$4 \quad u(t) \in R^m \quad \forall t \in R^+$$

$$5 \quad x(t) \in R^n \quad \forall t \in R^+$$

Imporemos a condição

$$6 \quad (\forall t \in R^+) \quad u(t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t) \quad , \quad v^j \text{ dadas por (2),}$$

construindo assim o novo espaço de contrôles admissíveis (veja 1.III-11).

Na expressão (2), cada v^j tem influência sobre apenas uma componente do vetor controle. Sendo m a dimensão de u , escolheremos um número p de funções elementares para cada componente de u , ou seja, admitiremos para cada

componente de u um número $p - 1$ de comutações no intervalo (t_0, T_p) (veja 1.ºVI)

Assim,

7

$$q = mp$$

Pela observação 1.ºVI-38, p será geralmente igual a n , a ordem do sistema.

Os instantes de comutação serão denotados por

T_j , $j = 1, 2, \dots, q$, no que se inclui o instante final. $T_p = T_q$

Faremos uma ordenação das funções elementares da seguinte maneira:

8

$$\begin{aligned} u^1(t) &= (1(t-t_0) - 1(t-T_1)) I^1 \\ &\vdots \\ u^m(t) &= (1(t-t_0) - 1(t-T_m)) I^m \\ u^{m+1}(t) &= (1(t-T_1) - 1(t-T_{m+1})) I^1 \\ &\vdots \\ u^{mp}(t) &= (1(t-T_{(m-1)p}) - 1(t-T_{mp})) I^m \end{aligned}$$

No esquema de ordenação dos T_i em (8), os instantes $t_0, T_k, T_{m+k}, \dots, T_{(m-1)p+k}$ correspondem às comutações de u_k , $k = 1, \dots, m$

Uma forma reduzida de apresentar esta ordenação é:

$$9 \quad v^j(t) = (1(t - T_{j-m}) - 1(t - T_j)) I^{\ell}$$

$$10 \quad \text{onde } I = \begin{cases} j \text{ módulo } m & \text{se } j \neq km, \quad k = 1, 2, \dots \\ m & \text{se } j = km, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

e definimos: $\forall i \leq 0 \quad T_i = t_0$

$$T_q = T_p$$

Resolução do sistema (3)

Aplicando o método apresentado em I.III-20, obtem-

se

$$\begin{aligned} 11 \quad F_i^j(T_f) &= \int_{t_0}^{T_f} \Phi_i(T_f, \tau) B(\tau) v^j(\tau) d\tau \\ &= \int_{T_{j-m}}^{T_j} \Phi_i(T_f, \tau) B(\tau) I^{\ell} d\tau \\ &= \int_{T_{j-m}}^{T_j} \Phi_i(T_f, \tau) B^{\ell}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

onde Φ é a matriz de transição do sistema e ρ é dada por (10).

A equação para as coordenadas I do estado do sistema no instante $T_f = T_f$ será dada por (veja 1.III-20)

$$12 \quad \Phi_I(T_f, t_0) x_0 + F_I(T_f) \alpha - x_I(T_f) = 0$$

$$\text{onde } F(T_f) = [F^1(T_f) \ F^2(T_f) \ \dots \ F^q(T_f)]$$

Enunciado do problema de otimização

Podemos agora enunciar um problema de otimização sobre as variáveis α_j e T_j , $j = 1, 2, \dots, q$, equivalente ao problema de controle com tempo mínimo 1.VI-35, com o espaço de controles admissíveis simplificado por (6).

Sejam

$$13 \quad \alpha \in R^q$$

$$T \triangleq [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_q]' \in R^q$$

$$\theta : R^q \times R^q \rightarrow R$$

$$\theta(\alpha, T) = [0 \ \dots \ 0 \ 1] T = T_q$$

O Problema PM

14 PM Encontrar $(\bar{\alpha}, \bar{\tau})$ que minimiza $\theta(\alpha, \tau)$, sujeito às restrições

$$15 \quad h(\alpha, \tau) = \Phi_I(\tau_1, t_0) x_0 + F_I(\tau_1) \alpha - \bar{x}_1 = 0$$

onde $\bar{x}_1 \in R^{121}$, dado

$$16 \quad \tau_q = \tau_{q-1} = \dots = \tau_{q-m+1}$$

$$17 \quad \tau_j \geq \tau_{j-m}, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

$$18 \quad -1 \leq \alpha_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, q$$

PM é, em geral, um problema complexo de programação não linear, devido ao grande número de vínculos e às fortes não-linearidades do vínculo $h(\alpha, \tau)$ dado por (15). Note-se que em (15), a matriz $F(\tau_q) = F(\tau)$ depende de todes os ins tantes de comutação, como se pode ver na expressão (11), em que a j^{a} coluna de F depende de τ_{j-m} e τ_j . Sucessivas simplificações podem ser feitas, considerando o sistema invariante no tempo, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $\bar{x}_1 = 0$, $\alpha: R \rightarrow R$

Mostraremos a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker ao problema simplificado seguinte, enunciado segundo 1.VI-35.

Seja dado um sistema linear invariante no tempo

19

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \\ u(t) \in \mathbb{R}$$

Problema

Encontrar um controle admissível, se existir, que leva o sistema (19) do estado inicial x_0 em $t_0 = 0$ à origem do espaço de estado em tempo mínimo.

Para o sistema dado em (19), se fizermos $t_0 = 0$, a solução é dada por $x(T_f) = e^{AT_f} \left(x_0 + \int_0^{T_f} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \right)$, como vimos em 1.^oV-25.

Em nosso enunciado, o alvo é dado por

$$S = \{0\} \times \mathbb{R}^+ \quad (\text{veja 1.^oVI-35})$$

e para $(x(T_f), T_f) \in S$,

$$x(T_f) = 0, \text{ e a equação do sistema fica}$$

20 $x_0 + \int_0^{T_f} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau = 0$, onde eliminamos o termo e^{AT_f} , sempre não singular (veja ref. [2], pag. 128)

As funções elementares são, segundo (9),

$$21 \quad u^j(t) = 1(t - T_{j-1}) - 1(t - T_j) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, q$$

Pelo método mostrado em 1.^oV-29, constrói-se a matriz $\hat{F} = [\hat{F}^1 \dots \hat{F}^q]$, onde

$$22 \quad \hat{F}^j = \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{-Az} \theta dz$$

e a equação (20) torna-se

$$23 \quad x_0 + \hat{F} \alpha = 0$$

Podemos, agora, utilizando (14) e (23), enunciar o problema de otimização no caso particular:

24 PM : Sejam

$$\alpha \in R^q \quad , \quad T \in R^q$$

$$\theta: R^q \times R^q \rightarrow R \quad , \quad \theta(\alpha, T) = T_q$$

$$\theta(\alpha, \bar{T}) = \min_{\substack{\alpha \\ T \in R^{2q}}} \left\{ \theta(\alpha, T) \mid x_0 + \hat{F} \alpha = 0 \quad , \quad -1 \leq \alpha_j \leq 1 \quad , \quad T_j \geq T_{j-1} \quad , \right. \\ \left. T_0 = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, q \right\}$$

O problema PM em (24) pode ser enunciado em uma forma mais elegante, definindo

$$25 \quad T^s \triangleq [0 \ T_1 \ T_2 \ \dots \ T_{p-1}]'$$

$$26 \quad h(\alpha, \tau) \triangleq x_0 + \hat{F} \alpha$$

$$27 \quad g_1(\tau) \triangleq T^s - \tau$$

$$28 \quad g_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ \alpha_{q-1} \end{bmatrix} \quad g_3(\alpha, \tau) = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ -\alpha_q - 1 \end{bmatrix}$$

Com as definições acima, pode-se reescrever PM

$$29 \quad \text{PM:} \quad \theta(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) = \min_{\begin{bmatrix} \alpha \\ \tau \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2p}} \left\{ \theta(\alpha, \tau) \mid h = x_0 + \hat{F} \alpha = 0, \ g_1 = T^s - \tau \leq 0, \right. \\ \left. g_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ \alpha_{q-1} \end{bmatrix} \leq 0, \ g_3 = \begin{bmatrix} -\alpha_1 - 1 \\ \vdots \\ -\alpha_q - 1 \end{bmatrix} \leq 0 \right\}$$

Aplicaremos agora ao problema (29) o teorema de Kuhn - Tucker (veja ref. [7], pag. 173):

Notamos que $\theta(\alpha, \tau), h(\alpha, \tau), g(\alpha, \tau) = [g_1, g_2, g_3]'$ são diferenciáveis com relação a $[\alpha, \tau]'$. Supondo-se satisfeita alguma condição de qualificação de vínculos, (ver ref. [7], pag. 171) segue-se que para o problema PM (29)

$$(\exists \bar{u} \in \mathbb{R}^{3q}, \bar{v} \in \mathbb{R}^m)$$

tais que

$$30 \quad \nabla_{\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \tau \end{smallmatrix}\right]} \theta(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) + \left[\nabla_{\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \tau \end{smallmatrix}\right]} h(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) \right] \bar{v} + \left[\nabla_{\left[\begin{smallmatrix} \alpha \\ \tau \end{smallmatrix}\right]} g(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) \right] \bar{u} = 0$$

$$31 \quad \bar{u} \geq 0$$

$$32 \quad \langle \bar{u}, g(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) \rangle = 0$$

$$33 \quad \left[\begin{smallmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\tau} \end{smallmatrix} \right] \text{ satisfaz } h(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) = 0, \quad g(\bar{\alpha}, \bar{\tau}) \leq 0$$

Utilizando as expressões em (25), III, (28), e separando (30) em duas expressões, com ∇_{α} e ∇_{τ} , obtém-se para (30), ... , (33)

$$34 \quad \hat{F}' \bar{v} + \begin{bmatrix} 0 & I & -I \end{bmatrix} \bar{u} = 0$$

$$35 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \left[\nabla_{\tau} [\hat{F} \bar{\alpha}] \right] \bar{v} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ & -1 & 1 \\ 0 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} \bar{u} = 0$$

$$x_0 + \hat{F} \bar{\alpha} = 0$$

$$36 \quad \left\langle \bar{u}, \begin{bmatrix} \bar{\tau}^s - \bar{\tau} \\ \bar{\alpha} - [1] \\ -\bar{\alpha} - [1] \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \quad \text{onde } [1] \stackrel{\Delta}{=} [1 \ 1 \dots 1]'$$

$$38 \quad \bar{u} \geq 0$$

$$39 \quad \bar{T}^s - \bar{T} \leq 0$$

$$40 \quad \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_1 - 1 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_q - 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} -\bar{\alpha}_1 - 1 \\ \vdots \\ -\bar{\alpha}_q - 1 \end{bmatrix} \leq 0$$

Seção III - Conclusões

Observando-se o enunciado do problema PM em (14), nota-se que a maior dificuldade existente em sua solução reside no tratamento do vínculo $h(\alpha, \tau) = 0$, que representa a equação do sistema de controle considerado.

Este vínculo não é simples devido à matriz $F(\tau_q)$, que depende dos instantes de comutação, de forma complexa, pois na expressão (11) para cada $F^j(\tau_q)$ aparecem T_{j-m} e T_j como extremos de um intervalo de integração. Além disso, o integrando contém a matriz $\Phi_T(\tau_q, \tau)$, que normalmente não é simples e contém funções transcendentais, o que torna o vínculo $h(\alpha, \tau)$ essencialmente não linear em T , em qualquer caso não trivial.

Métodos numéricos podem ser usados para resolver PM, dado em (14), mas estes deverão ser bastante gerais para dar conta do vínculo $h(x, \gamma)$. Não estudaremos métodos numéricos para problemas de tempo mínimo, fazendo-o somente para problemas de energia mínima, no capítulo 5.

A aplicação do teorema de Kuhn - Tucker ao caso invariante no tempo mostra-nos o procedimento geral para encontrar condições necessárias para o problema PM. Não é possível, no entanto, encontrar condições de qualificação que sejam sempre verificadas por PM, e a busca dessas condições deve ser feita em cada problema particular.

Aplicando as equações (34), ..., (40) ao problema de tempo mínimo para o duplo integrador, problema este tratado em [2], pag. 507, obtém-se um sistema de inequações cujo tratamento leva a conclusões idênticas às obtidas na referência citada através da aplicação do princípio do mínimo.

C A P Í T U L O 3

PROBLEMAS DE CONTRÔLE COM ENERGIA
MÍNIMA EM SISTEMAS LINEARESSeção I - Introdução

Problemas de controle com energia mínima e funcionais critério quadráticos constituem uma classe importante de problemas de controle, tanto por terem um significado físico palpável com aplicação ao projeto de servomecanismos, como por existirem métodos para obter-se soluções analíticas em muitos casos. Um tratamento deste tipo de problemas é realizado na ref. [2], pag. 752, para sistemas lineares, invariantes no tempo, instante terminal fixo. Uma abordagem diferente será feita aqui.

O método geral de tratamento do problema de controle já foi apresentado no capítulo 1 e vamos limitar-nos aqui a desenvolver a resolução de problemas de tempo fixo. Esta abordagem introduz grandes simplificações, como já apontamos na Seção 1-IV. Como a invariância no tempo não introduz simplificações essenciais ao problema de tempo fixo, todo o tratamento será feito para sistemas lineares variantes no tempo.

Considere-se então um sistema linear variante no tempo

$$1 \quad \dot{x}(t) = A(t) x(t) + B(t) u(t)$$

tal que, dados $t_0, T \in \mathbb{R}^+$, $T > t_0$

$$T \triangleq [t_0, T]$$

$$\begin{aligned} (\forall t \in T) \quad & x(t) \in \mathbb{R}^n \\ & u(t) \in \mathbb{R}^m \\ & A(t) \text{ } n \times n \\ & B(t) \text{ } n \times m \end{aligned}$$

Expandindo o controle em funções elementares, como mostramos em 1.º.III

$$2 \quad u = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j$$

E definindo

$$3 \quad \alpha \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix}$$

Chegamos à solução do sistema (1)

4
$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + F(t) \alpha$$
 (veja-se 1.111-19) onde $(\forall t \in T)$ $F(t)$ é uma matriz $n \times q$ e Φ é a matriz de transição de estado do sistema (1).

No instante final, dado o alvo

5
$$S = S_1 \times \{T\}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_I = \bar{x}_I\}, \text{ com } \bar{x}_I \in \mathbb{R}^{|I|}, \text{ dado}$$

Obtem-se

6
$$\hat{x}_I + F_I(t) \alpha = 0$$
 , onde $\hat{x}_I = \Phi_I(T, t_0) x_0 - \bar{x}_I$, pelo tratamento da Seção 1.1V

Introduziremos agora a funcional critério para problemas de energia mínima (veja também ref. [2] , pag. 461),

7
$$J(x_0, u, t_0, t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T [\langle x(t), Q(t) x(t) \rangle + \langle u(t), R(t) u(t) \rangle] dt$$

onde $(\forall t \in T)$

$Q(t)$ uma matriz $n \times n$ definida positiva

$R(t)$ uma matriz $m \times m$ definida positiva

$Q_{ij} : T \rightarrow \mathbb{R}$, seccionalmente contínuas, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$R_{ij} : T \rightarrow \mathbb{R}$, seccionalmente contínuas, $i, j \in \{1, \dots, m\}$

O espaço de controles admissíveis

No problema particular de controle, que enunciaremos abaixo, o espaço de controles admissíveis é

$$8 \quad U^1 \triangleq \left\{ u \mid u = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j \wedge (\forall t \in T) \mid u_i(t) \mid \leq 1, i = 1, 2, \dots, m \right\}$$

A restrição $u = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j$ é simplificadora, responsável pela obtenção de um problema equivalente de programação matemática, como desenvolvemos no capítulo 1 e mostraremos abaixo.

A restrição

$$9 \quad (\forall t \in T) \mid u_i(t) \mid \leq 1 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dificulta o tratamento em termos de programação não-linear, pois só poderemos impor vínculos sobre α .

Podemos obter vínculos sobre os α de duas maneiras:

a) Através de condições satisfeitas pelos α_j suficientes mas não obrigatoriamente necessárias para que (9) sejam satisfeitas. Estas condições podem ser, por exemplo, impor limitações a cada α_j de modo que

$$\alpha_j \max_{t \in T} |v_i^j(t)| \leq \frac{1}{q}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

o que garante (9). As soluções obtidas serão sub-

-ótimas para o problema reduzido e poderão distanciar-se muito da solução procurada;

- b) através de condições necessárias e suficientes para que (9) sejam satisfeitas, ou seja, através do estudo da função

$$\varphi_i(\alpha) = \max_{t \in T} |\mu_i(\alpha, t)|, \text{ onde}$$

$$\mu_i(\alpha, t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j u_i^j(t)$$

O tratamento do vínculo $\varphi_i(\alpha) \leq 1$, vínculo este equivalente a $\forall t \in T \quad |\mu_i(t)| \leq 1$ não é trivial e será o objetivo principal dos dois últimos capítulos da tese. No presente capítulo desenvolveremos a solução do problema de controle com energia mínima com restrições do tipo (a), acima.

Enunciado do Problema Particular

10 Dado o sistema (1), encontrar um controle admissível, se existir, que (a) leva o sistema de um estado inicial x_0 no instante t_0 , dados, ao conjunto de estados S_1 (5) no instante T .

(b) minimiza a funcional critério $J(x_0, u, t_0, T)$ (7), com $Q(t)$ e $R(t)$ definidas positivas.

Seção II - Redução a um problema de dimensão finita

Definindo para todo $t \in \mathbb{T}$ a matriz $m \times q$,

$$11 \quad v(t) = \begin{bmatrix} v^1(t) & v^2(t) & \dots & v^q(t) \end{bmatrix},$$

segue-se que para α definido em I-4,

$$12 \quad u(t) = v(t)\alpha$$

Entrando com (12) na expressão (7), obtém-se

$$13 \quad \theta(\alpha) \triangleq J(x_0, \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j, t_0, \tau) \\ = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} [\langle x(t), Q(t)x(t) \rangle + \langle \alpha, v'(t) R(t) v(t) \alpha \rangle] dt$$

Substituindo agora em (13) a expressão para $x(t)$ (4), obtém-se

$$14 \quad \theta(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\tau} [\langle \alpha, [F'(t) Q(t) F(t) + v'(t) R(t) v(t)] \alpha \rangle + \langle x_0, \phi'(t, t_0) Q(t) \phi(t, t_0) x_0 \rangle + 2 \langle x_0, \phi'(t, t_0) Q(t) F(t) \alpha \rangle] dt$$

Definindo agora

$$15 \quad G \triangleq \int_{t_0}^{\tau} [F'(t) Q(t) F(t) + v'(t) R(t) v(t)] dt$$

$$16 \quad H \triangleq \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \dot{\Phi}'(t, t_0), Q(t) \dot{\Phi}(t, t_0) dt$$

$$17 \quad K \triangleq \int_{t_0}^T \dot{\Phi}'(t, t_0), Q(t) F(t) dt$$

obtem-se de (14), (15), (16) e (17),

$$18 \quad \theta(\alpha) = \frac{1}{2} \langle \alpha, G\alpha \rangle + \langle x_0, K\alpha \rangle + \langle x_0, Hx_0 \rangle$$

O resultado (18) é interessante, pois mostra que o critério em α é quadrático e portanto de fácil tratamento em programação matemática. Além disso, as únicas dificuldades introduzidas pela variância no tempo, tanto do sistema como do critério, residem na resolução do próprio sistema, isto é, no cálculo de $\dot{\Phi}(t, t_0)$ e no cálculo das integrais (15), (16), (17).

Outro resultado importante é dado pelo lema a seguir, que garantirá a suficiência do teorema de Kuhn - Tucker:

$$19 \quad \underline{\text{Lema:}} \quad \text{a função } \theta \text{ definida por (18) é convexa em } \mathbb{R}^q.$$

Demonstração: basta provar que a matriz G é semi-definida positiva, pois em (18) o termo que não inclui G é linear em α e portanto convexo, e o termo em G é quadrático.

Como $Q(t)$ e $R(t)$ são definidas positivas $\forall t \in \pi$, o integrando de (15) é claramente semi-definida positiva. Chamando de $L(t)$ ao integrando, isto é,

$$G = \int_{t_0}^T L(t) dt$$

Seja $x \in \mathbb{R}^q$ qualquer

$$\begin{aligned} \langle x, Gx \rangle &= \int_{t_0}^T \langle x, L(t)x \rangle dt \\ &= \int_{t_0}^T y(t) dt, \text{ onde } y(t) \geq 0 \quad \forall t \in \pi \end{aligned}$$

Como $T \geq t_0$, temos que $\int_{t_0}^T y(t) dt \geq 0$ e portanto $\langle x, Gx \rangle \geq 0$ e G é semi-definida positiva.

Enunciado do problema de programação não-linear

20 PM1 - Dadas as funções $Q : R^q \rightarrow R^m$, as matrizes $\phi(\tau, t_0)$ e $F(\tau)$, os vetores $x_0 \in R^n$, $\bar{x}_I \in R^{II}$, e as funções $v^j : R \rightarrow R^m$,

Encontrar $\alpha \in R^q$, se existir, que minimiza $\theta(\alpha)$,
sujeito aos vínculos

$$21 \quad \hat{x}_I + F_I(\tau) \alpha = 0 \quad , \text{ onde } \hat{x}_I = \phi_I(\tau, t_0) - \bar{x}_I$$

$$22 \quad \left| \sum_{j=1}^q \alpha_j v_i^j(t) \right| - 1 \leq 0 \quad \forall t \in T, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Seção III - Resolução de PM1 com vínculos aproximados

23 Desenvolveremos a solução do PM1 com vínculos impostos sobre α suficientes para (22), como indicamos em I-9.

Vamos, então, limitar os α_j a intervalos fechados usando-se como vínculos, ao invés de (22), as desigualdades

$$a_{j-} \leq \alpha_j \leq a_{j+} \quad j = 1, 2, \dots, q$$

desigualdades essas que também podem ser escritas como

$$g_j(\alpha) \leq 0 \quad \text{onde } g_j : R^q \rightarrow R^1 \text{ e dada por}$$

24

$$g(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_q - a_q \\ -\alpha_1 + a_{q+1} \\ \vdots \\ -\alpha_q + a_{2q} \end{pmatrix}, \quad g(\alpha) \leq 0$$

25 Com esta aproximação, as restrições em α dadas por (21) e (24) serão todas lineares.

26 Podem-se obter sucessivas aproximações a (22), usando (24), resolvendo-se o problema para um conjunto de a_j 's e depois modificando êsse conjunto de maneira a melhor aproximar-se o conjunto de α 's que satisfaz

$$27 \quad \max_{t \in T} \left| \sum_{j=1}^q \tilde{\alpha}_j v_i^j(t) \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Este procedimento pode ser útil na busca de um ponto viável, mas pode levar a soluções muito distantes da ótima, devido à configuração particular da região $\{\alpha \mid g(\alpha) \leq 0\}$, que é um hipercubo.

Incorporando as restrições (24), o problema de otimização PML dado em (20) fica:

28 Sejam $\theta : R^q \rightarrow R$ dado por (18)

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2} \langle \alpha, G\alpha \rangle + \langle x_0, K\alpha \rangle + \langle x_0, Hx_0 \rangle$$

Encontrar $\tilde{\alpha} \in R^q$, se existir, tal que

$$29 \text{ PM2: } \theta(\tilde{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \mid h(\alpha) = \hat{x}_1 + F_1(\tau)\alpha = 0, g(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - a_1 \\ \vdots \\ \alpha_q - a_q \\ -\alpha_1 + a_{q+1} \\ \vdots \\ -\alpha_q + a_{2q} \end{pmatrix} \leq 0 \right\}$$

Podemos agora aplicar o teorema de Kuhn - Tucker (ver ref. [7], pag. 173), pois (21) e (24) satisfazem uma das condições de qualificação, ou seja, a condição *iii* da ref. [7] pag. 173.

30 θ, g, h são diferenciáveis com relação a α , θ é convexa em R^q (ver (19)), g e h são lineares, e portanto uma condição de qualificação de vínculos é satisfeita para todo $\alpha \in R^q$.

31 Segue-se, portanto, da ref. [7], pag. 173, que o problema de Kuhn - Tucker é equivalente a PM2, ou seja, um conjunto de condições necessárias e suficientes para que $\tilde{\alpha}$ resolva PM2 é:

$$\exists \tilde{u} \in R^{2q}, \tilde{w} \in R^{121}$$

tais que

$$32 \quad G\bar{\alpha} + K'x_0 + \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \bar{u} + F'_T(\tau) \bar{w} = 0$$

$$33 \quad g_i(\bar{\alpha}) \bar{u}_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 2q$$

$$34 \quad \bar{u} \geq 0$$

$$35 \quad g(\bar{\alpha}) \leq 0$$

$$36 \quad h(\bar{\alpha}) = 0$$

(31), ..., (36) foram obtidos substituindo nas condições de Kuhn - Tucker (ref. [7], pag. 173),

$$\nabla \theta(\alpha) = G\alpha + K'x_0$$

$$\nabla h(\alpha) = F'_T(\tau)$$

$$\nabla g(\alpha) = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}$$

Seção IV - Conclusões

A aproximação (24) dos vínculos sobre a amplitude do controle conduz a um problema típico de programação quadrática, cuja resolução por métodos numéricos é conhecida e vários métodos podem ser encontrados nas referências [9] e [10]. Alguns desses métodos são baseados na equivalência en-

tre PM2 e o problema de Kuhn - Tucker (32) - (36) , isto é, no fato de que podemos resolver PM2, resolvendo um sistema de equações e desigualdades lineares em $\bar{\alpha}$, \bar{u} e \bar{w} , ou seja, (32), (34), (35) e (36), observando-se que (33) apenas nos dá uma condição de complementaridade. Essa condição é que se $\bar{u}_i > 0$ então $\bar{\alpha}_i = a_i$ e se $\bar{u}_i = 0$ então $\bar{\alpha}_i \leq a_i$.

Processos iterativos poderiam ser desenvolvidos para obter uma sequência de conjuntos de valores dos a_i , $i = 1, \dots, 2p$, mas este não nos parece ser um bom caminho, pois não é fácil encontrar-se uma política de modificação dos a_i sem um estudo profundo de $\psi_i(\alpha) = \max_{t \in \pi} \left| \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j^i(t) \right|$.

Este estudo, no entanto, leva à abordagem mais geral do problema, que consiste em procurar a solução exata de PM1, e que vai nos ocupar nos capítulos restantes da tese. Como veremos, nenhuma simplificação essencial é obtida por considerar-se apenas funções critério quadráticas e no que segue trataremos de funções critério convexas, o que inclui o caso de mínima energia.

Neste capítulo usamos $u(t) \in R^m$. Como os vínculos de amplitude de controle são impostos independentemente sobre

as coordenadas de u , após uma ordenação das funções elementares teremos que impor vínculos sobre blocos de componentes de α , correspondentes à mesma coordenada de u . Isto complica o tratamento e vamos considerar no que segue controles escalares, isto é, $(\forall t \in T) \quad u(t) \in R$, indicando que a extensão para $u(t) \in R^m$ pode ser feita sem grande dificuldade.

CLÓVIS CAESAR GONZAGA

1944
1944

C A P Í T U L O 4

CONDIÇÕES NECESSÁRIAS E SUFI-
CIENTES PARA SOLUÇÕES DE PMLSeção I - Introdução

No capítulo anterior, vimos que o estudo do problema PML, definido em 3.II-20 é dificultado pelos vínculos na amplitude do vetor contrôle. Um método foi desenvolvido para o cálculo de um contrôle que otimiza a função critério θ em um conjunto mais particular do que o conjunto de pontos viáveis de PML e indicamos que esta aproximação poderia ser muito grosseira.

Neste capítulo e no seguinte, propomo-nos estudar uma classe de problemas de programação matemática em que a configuração do conjunto de pontos viáveis é exatamente a do problema PML. O objetivo dêste capítulo será obter condições necessárias e suficientes de otimalidade para êstes problemas e no capítulo 5 trataremos de um método para a busca de um ponto de ótimo.

A classe de problemas que trataremos terá alguns aspectos importantes, que enunciamos abaixo:

a) O controle $u(t)$ é um escalar. Esta simplificação é feita, como indicamos no capítulo anterior, para evitar as complicações introduzidas pela dimensão do controle na definição e ordenação das funções elementares v^j .

b) A função critério será tomada convexa e diferenciável, englobando portanto os critérios quadráticos estudados no capítulo anterior.

c) As funções elementares serão tomadas analíticas e linearmente independentes. A classe de funções analíticas é bastante geral e tem propriedades muito úteis em nosso desenvolvimento, como será visto adiante.

Formularemos inicialmente o problema P1 incorporando os aspectos apresentados acima, seguido de um novo problema (P2) equivalente a P1 em que os vínculos estão em um formato mais facilmente tratável. Propriedades desses vínculos serão estudadas na Seção II, fornecendo-nos as ferramentas requeridas para o desenvolvimento, na Seção III, de condições necessárias e suficientes de otimalidade para P1.

1 Sejam, então:

$$\alpha \in \mathbb{R}^q$$

$\theta : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ convexa, diferenciável com relação a α com gradiente contínuo, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^q$

$$\tau \triangleq [t_0, \tau] \subset \mathbb{R}^+$$

$v^j : \tau \longrightarrow \mathbb{R}$ analíticas, linearmente independentes, $j = 1, 2, \dots, q$

$\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ dado

F uma matriz $n \times q$

$$I \subset \{1, 2, \dots, n\}$$

2

Enunciado do Problema Pl

Encontrar $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^q$ tal que

$$\theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^q} \left\{ \theta(\alpha) \mid \left| \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t) \right| - 1 \leq 0, \forall t \in \tau; \hat{x}_I + F_I \alpha = 0 \right\}$$

Pl encontra-se em um formato dificilmente tratável por termos vínculos definidos por funções implícitas em α , ou seja, dado um α qualquer, não podemos verificar com um número finito de operações aritméticas, se $\forall t \in \tau \mid \left| \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t) \right|$ é menor que 1. Definimos a seguir funções que nos auxiliarão a visualizar o conjunto de pontos viáveis de Pl:

3

Definição:

Seja

$$\mu : R^q \times T \rightarrow R \text{ definida para } (\alpha, t) \in R^q \times T$$

por

$$\mu(\alpha, t) \triangleq \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t)$$

A função μ definida em (3) acima é obviamente diferenciável em relação a α , para cada $t \in T$, com gradiente contínuo, e analítica em t .

Definimos a seguir duas funções auxiliares que nos permitirão reformular o problema P1.

Definição:

Sejam

4

$$\varphi_m : R^q \rightarrow R, \quad \varphi_m(\alpha) \triangleq \max_{t \in T} \mu(\alpha, t)$$

5

$$\varphi_m : R^q \rightarrow R, \quad \varphi_m(\alpha) \triangleq \max_{t \in T} (-\mu(\alpha, t))$$

Com as funções φ_m e $\varphi_{m'}$ podemos formular o problema seguinte:

6 Enunciado do Problema P2

Encontrar $\bar{\alpha} \in R^q$ tal que

$$\theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \mid \varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0, \varphi_{m'}(\alpha) - 1 \leq 0, \hat{x}_I + F_I \alpha = 0 \right\}$$

7 Lema: P1 e P2 são problemas equivalentes, isto é, se $\bar{\alpha}^1$ for uma solução de P1, também será uma solução de P2. Conversamente, se $\bar{\alpha}^2$ for uma solução de P2, também será uma solução de P1.

A demonstração do lema (7) é imediata.

Os vínculos φ_m e $\varphi_{m'}$ do problema P2 serão objeto de estudo das próximas seções, onde se procurará aplicar os teoremas de Fritz-John (ref. [7], pag. 170) e Kuhn - Tucker (ref. [7], pag. 173) a P2. Os resultados encontrados dependerão, como se pode prever, do cálculo de pontos t onde ocorrem os máximos e mínimos da função $\mu(\alpha, t)$, o que dificulta sua aplicação.

Sessão II - Estudo dos vínculos φ_m e φ_m

O problema (P2) descrito acima encontra-se numa das formas canônicas de problemas de programação não linear (veja, por exemplo, ref. [7] , pag. 170). Condições necessárias e suficientes são conhecidas para este tipo de problemas (ref. [7] , pag. 170). Estas condições, entretanto, só têm algum valor para os casos em que as funções vínculo e critério de P2 possuem as propriedades de convexidade e diferenciabilidade nas variáveis do problema. Essas propriedades são obviamente satisfeitas pela função critério θ e pelos vínculos lineares em α . Resta, entretanto, verificá-las para as funções φ_m e φ_m . Conforme veremos abaixo, essas funções são convexas mas nem sempre apresentam derivadas globais, se bem que derivadas direcionais existam em todas as direções. O estudo dessas derivadas direcionais e das condições que implicam na existência de derivadas globais nos levará a substituir os vínculos $\varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0$ e $\varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0$ por outra família de vínculos em α , tal que com esta nova família de vínculos, um novo problema equivalente a (P2) seja definido. Esse novo problema pertencerá à classe de problemas convexas e diferenciáveis.

Convexidade de φ_m e φ_m

8 Teorema: $\varphi_M : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, definida em (4), é convexa em \mathbb{R}^q

Demonstração: Por definição

$$9 \quad \varphi_M(\alpha) = \max_{t \in T} \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t)$$

Sejam agora $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}^q$ quaisquer e seja $0 \leq \lambda \leq 1$. A convexidade de φ_M estará provada se mostrarmos que

$$10 \quad \varphi_M(\alpha^1 \lambda + (1-\lambda) \alpha^2) \leq \lambda \varphi_M(\alpha^1) + (1-\lambda) \varphi_M(\alpha^2)$$

Usando-se a definição (9) no lado esquerdo de (10)

$$\begin{aligned} \varphi_M(\alpha^1 \lambda + (1-\lambda) \alpha^2) &= \max_{t \in T} \left[\sum_{j=1}^q (\lambda \alpha_j^1 + (1-\lambda) \alpha_j^2) v^j(t) \right] \\ &= \max_{t \in T} \left[\sum_{j=1}^q \lambda \alpha_j^1 v^j(t) + \sum_{j=1}^q (1-\lambda) \alpha_j^2 v^j(t) \right] \\ &\leq \max_{t \in T} \sum_{j=1}^q \lambda \alpha_j^1 v^j(t) + \max_{t \in T} \sum_{j=1}^q (1-\lambda) \alpha_j^2 v^j(t) \\ &\leq \lambda \varphi_M(\alpha^1) + (1-\lambda) \varphi_M(\alpha^2) \end{aligned}$$

o que termina esta demonstração.

11 Teorema: $\varphi_\mu : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$, definida em (5),
é convexa em \mathbb{R}^q .

Demonstração: Análoga à demonstração do teorema
(8).

12 Diferenciabilidade direcional de φ_μ

Demonstraremos a seguir que a função $\varphi_\mu : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$ tem derivadas direcionais em tôdas direções e em qualquer ponto $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^q$. O mesmo resultado pode ser análogamente obtido para $\varphi_\mu : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}$. Para o teorema (16) abaixo, necessitamos da seguinte definição:

13 Definição: Seja $\varphi_\mu(\alpha)$ definido em (4). Podemos então definir o mapeamento Γ_μ de \mathbb{R}^q em partes de \mathbb{R} por

$$14 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad \Gamma_\mu(\alpha) \triangleq \{t \mid t \in \mathbb{R} \wedge \varphi_\mu(\alpha) = \mu(\alpha, t)\}$$

O seguinte resultado pode ser encontrado na ref.

[4].

- 15 Lema : O mapeamento Γ_n é semi-contínuo superiormente (veja definição na ref. [5], pag. 114).

Demonstração : Veja Pshenichnyi (ref. [4]).

Podemos agora enunciar um primeiro resultado sobre as derivadas direcionais de φ_n ou seja, o

- 16 Teorema - Seja $e \in \mathbb{R}^q$ qualquer, com $|e| = 1$.
Seja $\alpha \in \mathbb{R}^q$ um ponto qualquer. Então $\varphi_n(\alpha)$ é diferenciável na direção e com derivada direcional $\partial \varphi_n(\alpha) / \partial e$ dada por

$$17 \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial e}(\alpha) = \max_{t \in \Gamma_n(\alpha)} \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t), e \rangle$$

onde $\Gamma_n(\alpha)$ está definido em (14) acima.

Demonstração: Por definição de $\varphi_n(\alpha)$,

$$18 \quad \varphi_n(\alpha) = \max_{t \in T} \mu(\alpha, t)$$

Seja agora $\lambda^+ > 0$ um número real qualquer. Segue-se de (18) que

$$19 \quad \varphi_n(\alpha + \lambda^* e) - \varphi_n(\alpha) = \max_{t \in T} \mu(\alpha + \lambda^* e, t) - \max_{t \in T} \mu(\alpha, t)$$

Para qualquer $t \in T$

$$\mu(\alpha, t) \leq \max_{t \in T} \mu(\alpha, t)$$

Em particular para $t_\lambda \in \Gamma_n(\alpha + \lambda^* e) \subset T$ temos que

$$20 \quad \mu(\alpha, t_\lambda) \leq \max_{t \in T} \mu(\alpha, t)$$

e também, por definição de $\Gamma_n(\alpha + \lambda^* e)$

$$21 \quad \mu(\alpha + \lambda^* e, t_\lambda) = \max_{t \in T} \mu(\alpha + \lambda^* e, t)$$

Substituindo (20) e (21) em (19), segue-se que para $t_\lambda \in \Gamma_n(\alpha + \lambda^* e)$

$$22 \quad \varphi_n(\alpha + \lambda^* e) - \varphi_n(\alpha) \leq \mu(\alpha + \lambda^* e, t_\lambda) - \mu(\alpha, t_\lambda)$$

Como $\mu(\alpha + \lambda^* e, t_\lambda)$ é diferenciável em relação a α , o segundo membro de (22) pode ser re-escrito

$$23 \quad \mu(\alpha + \lambda^* e, t_\lambda) - \mu(\alpha, t_\lambda) = \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_\lambda), \lambda^* e \rangle + o(\lambda^*)$$

24 onde

$$\lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \frac{o(\lambda^*)}{\lambda^*} = 0$$

Dividindo ambos os membros de (22) por $\lambda^* > 0$ e entrando com (23),

$$25 \quad \frac{\varphi_n(\alpha + \lambda^* e) - \varphi_n(\alpha)}{\lambda^*} \leq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t_\lambda), e \rangle + \frac{o(\lambda^*)}{\lambda^*}$$

Considerando agora que o mapeamento $\Gamma_n : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathcal{P}(R)$ é semi-contínuo superiormente,

$$26 \quad \left(\lim_{\lambda^* \rightarrow 0} t_\lambda \right) \in \Gamma_n(\alpha)$$

De (24), (25) e (26) conclui-se que quando λ tende para zero, a desigualdade (25) deverá valer para algum $t \in \Gamma_n(\alpha)$ ou seja,

$$27 \quad (\exists t' \in \Gamma_n(\alpha)) \quad \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(\alpha + \lambda^* e) - \varphi_n(\alpha)}{\lambda^*} \leq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t'), e \rangle$$

A desigualdade (27) implica imediatamente em

$$28 \quad \lim_{\lambda^+ \rightarrow 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \leq \max_{t \in \Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

Voltando à expressão (19), se escolhermos $t \in \Gamma_M(\alpha)$ obteremos por um procedimento análogo a (19) ... , (22)

$$29 \quad (\forall t \in \Gamma_M(\alpha)) \quad \varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha) \geq \mu(\alpha + \lambda^+ e, t) - \mu(\alpha, t)$$

Dividindo ambos os membros de (29) por $\lambda^+ > 0$ e utilizando (23), obtém-se

$$30 \quad (\forall t \in \Gamma_M(\alpha)) \quad \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \geq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle + \frac{o(\lambda^+)}{\lambda^+}$$

Tomando o limite de (30) quando λ^+ tende a zero,

$$31 \quad (\forall t \in \Gamma_M(\alpha)) \quad \lim_{\lambda^+ \rightarrow 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \geq \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

Em particular, pode-se escrever

$$32 \quad \lim_{\lambda^+ \rightarrow 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} \geq \max_{t \in \Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

De (28) e (32), obtém-se que

$$\lim_{\lambda^+ \rightarrow 0} \frac{\varphi_M(\alpha + \lambda^+ e) - \varphi_M(\alpha)}{\lambda^+} = \max_{t \in \Gamma_M(\alpha)} \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle$$

que, pela definição de derivada direcional, coincide com (17) e está completa nossa demonstração.

Note-se que, devido a (18), se o conjunto de pontos de T em que $\mu(\alpha, t)$ atinge o máximo tem mais de um elemento, pode não existir um vetor P com as propriedades de um gradiente, ou seja $\frac{\partial \varphi_n}{\partial e}(\alpha) = \langle P, e \rangle \quad \forall e \in R^2, |e|=1$ e φ_n não é diferenciável em α . No entanto, se $\Gamma_n(\alpha)$ tiver somente um ponto, φ_n será diferenciável, como provamos no teorema seguinte:

33 Teorema -

Seja $\alpha \in R^2$ um ponto qualquer.

Se $|\Gamma_n(\alpha)|=1$, isto é, $\Gamma_n(\alpha) = \{\bar{t}\}$, $\bar{t} \in T$ então φ_n é diferenciável em α , com gradiente

$$34 \quad \nabla_{\alpha} \varphi_n(\alpha) = \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, \bar{t})$$

Demonstração :

Partiremos da expressão (22) acima, definindo $h = \lambda^* e$ e subtraindo em ambos os membros $\langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_n), h \rangle$

$$(\forall t_n \in \Gamma_n(\alpha+h))$$

$$35 \quad \varphi_n(\alpha+h) - \varphi_n(\alpha) - \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_n), h \rangle \leq \mu(\alpha+h, t_n) - \mu(\alpha, t_n) - \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_n), h \rangle$$

Notando agora que $(\forall t \in T) \mu(\alpha, t)$ é diferenciável em α , obtém-se por definição de diferenciabilidade (ref. [6], pag. 38)

$$36 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(\alpha+h, t_n) - \mu(\alpha, t_n) - \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_n), h \rangle}{|h|} = 0$$

Dividindo-se ambos os membros de (35) por $|h|$ e fazendo $h \rightarrow 0$, obtém-se $\forall t_n \in \Gamma_n(\alpha+h)$

$$37 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(\alpha+h) - \varphi_n(\alpha) - \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_n), h \rangle}{|h|} \leq 0$$

onde o segundo membro é nulo devido a (36).

Agora, graças à semi-continuidade superior de Γ_n e ao fato de que, por hipótese, $\Gamma_n(\alpha) = \{\bar{t}\}$

$$38 \quad \lim_{h \rightarrow 0} t_n = \bar{t} \quad \forall t_n \in \Gamma_n(\alpha+h)$$

Utilizando (38), como $\nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t)$ é contínuo por hipótese,

$$39 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_h) = \lim_{t_h \rightarrow \bar{t}} \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, t_h) = \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, \bar{t})$$

Introduzindo (39) em (37), obtém-se

$$40 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(\alpha+h) - \varphi_n(\alpha) - \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, \bar{t}), h \rangle}{|h|} \leq 0$$

Anàlogamente, partindo da expressão (29) obtém-se

$$41 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi_n(\alpha+h) - \varphi_n(\alpha) - \langle \nabla_{\alpha} \mu(\alpha, \bar{t}), h \rangle}{|h|} \geq 0$$

As expressões (40) e (41) demonstram, pela aplicação da definição de diferenciabilidade, que φ_n é diferenciável e vale (34), estando demonstrado o teorema.

Os resultados dos teoremas (16) e (33) acima são também válidos para a função φ_m , como enunciado no seguinte:

42 Teorema

Seja $e \in \mathbb{R}^2$, $|e|=1$. Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}^2$, φ_μ é diferenciável na direção e com derivada direcional.

$$43 \quad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial e}(\alpha) = \max_{t \in \Gamma_\mu(\alpha)} \{- \langle \nabla_\alpha \mu(\alpha, t), e \rangle\}$$

$$\text{onde } \Gamma_\mu(\alpha) = \{t \in T \mid \varphi_\mu(\alpha) = -\mu(\alpha, t)\}$$

Além disso, se

$$\Gamma_\mu(\alpha) = \{\bar{t}\}, \quad \bar{t} \in T$$

, então φ_μ é diferenciável em α com gradiente

$$44 \quad \nabla_\alpha \varphi_\mu(\alpha) = -\nabla_\alpha \mu(\alpha, \bar{t})$$

Demonstração: Análoga à demonstração dos teoremas (16) e (33), acima.

Para a demonstração dos teoremas (16), (33) e (42) acima foi somente necessária a diferenciabilidade de $\mu(\alpha, t)$. No lema a seguir mostraremos que se $\mu(\alpha, t)$ também for analítica em t , o conjunto de pontos de máximo locais em t para cada α , será em geral finito, o que terá grande importância para o desenvolvimento de condições de otimalidade para o problema Pl, como se verá na Seção III, e será também

utilizado no capítulo seguinte.

45

Lema

Seja $f : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, analítica em um intervalo aberto contendo $\mathcal{T} \triangleq [t_0, \tau]$

Se $f(t)$ tem um número infinito de pontos de máximo ou mínimo locais em \mathcal{T} , então $f(t)$ é constante em \mathcal{T}

Demonstração

Sejam $\mathcal{Z} \triangleq \{t \in \mathcal{T} \mid \frac{\partial f}{\partial t}(t) = 0\}$

46 $\mathcal{B} \triangleq \{t \in \mathcal{T} \mid t \text{ é ponto de extremo de } f(t) \text{ local em } \mathcal{T}\}$

Como f é analítica,

47

$$\mathcal{B} \subset \mathcal{Z} \cup \{t_0, \tau\}$$

Supondo que o conjunto \mathcal{B} é infinito, provaremos que $f(t)$ é constante.

Supondo, então, que \mathcal{B} é infinito, conclui-se de (47) que \mathcal{Z} é infinito.

Pelo teorema de Bolzano - Weierstrass (ref. [14], pag. 76)

$$48 \quad (\exists \hat{t} \in \mathbb{R})(\forall v(\hat{t})) \quad (v(\hat{t}) - \{\hat{t}\}) \cap \tau \neq \emptyset$$

ou seja, o conjunto τ tem um ponto de acumulação \hat{t} em \mathbb{R} .

Mostraremos que $\hat{t} \in \tau$ da seguinte maneira:

Como $\frac{\partial}{\partial t} f$ é contínua e $\{0\}$ é fechado, a imagem inversa de $\{0\}$

$$49 \quad \tau = \left(\frac{\partial}{\partial t} f \right)^{-1}(\{0\}) \quad \text{é fechada}$$

e como por (48) \hat{t} é ponto de acumulação de τ ,

τ fechado $\Rightarrow \hat{t} \in \tau$, ou seja, por definição de τ ,

$$50 \quad \frac{\partial}{\partial t} f(\hat{t}) = 0$$

De (48) e (50), deduz-se que \hat{t} é um zero não isolado de $\frac{\partial}{\partial t} f(t)$, ou seja, não existe nenhuma vizinhança de \hat{t} na qual somente \hat{t} anule $\frac{\partial}{\partial t} f(t)$.

51. Usando um resultado da referência [13], pag. 556, sabemos que somente pode valer uma das alternativas: ou os zeros de uma função analítica são isolados, ou a função é idênticamente nula.

Como \hat{t} não é um zero isolado, deduzimos por (51) que $(\forall t \in T) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mu(t) = 0$ ou seja, $\mu(t)$ é constante em T .

52. Os resultados obtidos nesta Seção permitir-nos-ão fazer uma reformulação de P2, baseada no teorema (33) e no lema (45) da seguinte maneira: se $\mu(\alpha, t)$ não é constante, segue-se do lema (45) que os conjuntos $\Gamma_n(\alpha)$ e $\Gamma_m(\alpha)$ são finitos para qualquer α . Construindo várias funções $\varphi_n^i(\alpha)$ cada uma correspondente a um intervalo T_i , $\varphi_n^i(\alpha) = \max_{t \in T_i} \mu(\alpha, t)$ de modo que cada T_i contenha somente um ponto de $\Gamma_n(\alpha)$, as funções φ_n^i serão diferenciáveis pelo teorema (33). Obteremos então um problema equivalente a P2, utilizando as funções φ_n^i e φ_m^i e aplicaremos a este problema os resultados de Fritz - John e Kuhn - Tucker.

Este procedimento somente será possível se $\mu(\alpha, t)$ não for constante, pois se $(\forall t \in T) \quad \mu(\alpha, t) = k \in \mathbb{R}$, obtém-se $\Gamma_n(\alpha) = \Gamma_m(\alpha) = T$, obviamente infinito. Assim, desenvolveremos na próxima Seção condições de otimalidade para P1 aplicáveis a pontos α tais que $\mu(\alpha, t)$ não é constante em T .

O estudo dos pontos α tais que $\mu(\alpha, t)$ é constante em \mathcal{T} é complicado. Como este caso é muito particular e os resultados são de aplicação muito difícil, limitaremos-nos a fazer alguns comentários na próxima Seção, sem desenvolver condições de otimalidade.

Seção III - Condições necessárias e suficientes de otimalidade para P1, com $|\mu(\alpha, t)|$ não constantemente igual a 1

Precedendo o enunciado das condições de otimalidade, provaremos um teorema importante relativo aos vínculos φ_m e φ_{m^*} , fornecendo um procedimento para construir o conjunto de funções φ_m^i e $\varphi_{m^*}^i$ de que falamos em II-52.

Até agora não utilizamos a independência linear das funções v^j definidas em (1). Esta condição é introduzida com a finalidade seguinte: se as funções v^j são linearmente independentes, uma função μ que possa ser expressa como combinação linear das v^j ,

$$\mu = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j, \quad \text{terá somente uma representação}$$

e haverá uma correspondência 1 a 1 entre os pontos do espaço $\{\mu \mid \mu = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j\}$ e o R^q .

Como os pontos em que $\mu(\alpha, t)$ é constante constituem um caso especial em nosso tratamento, é interessante que se estabeleça que uma das funções $v^j(t)$ seja constante e diferente de zero em t , ou seja, $v^1(t) = k \neq 0 \quad \forall t \in T$, o que nos garantirá que

$\mu(\alpha, t) = \text{constante} \iff \alpha_{\{2, \dots, q\}} = 0$, como provaremos adiante, tornando imediato o reconhecimento desses pontos.

53

Teorema

Sejam

$$54 \quad \alpha \in \mathbb{R}^q$$

$$55 \quad v^j : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad T = [t_0, T]$$

$$\text{onde } (\forall t \in T) \quad v^j(t) = k \neq 0 \quad k \in \mathbb{R}$$

e ainda v^j analíticas, em um intervalo aberto contendo T , $\{v^j\}$ linearmente independentes em T , $j = 1, 2, \dots, q$

$$56 \quad \mu(\alpha, t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t)$$

Consideradas as condições (53), (54) e (55) acima, vale uma e somente uma das alternativas abaixo:

ou a) $\alpha_j = 0$, $j = 2, 3, \dots, q$ e ϵ é constante em T

ou b) i) Os conjuntos $\Gamma_n(\alpha)$ e $\Gamma_m(\alpha)$ em (57) e (58) abaixo são finitos:

$$57 \quad \Gamma_n(\alpha) \triangleq \{t \in T \mid \varphi_n(\alpha) = \mu(\alpha, t)\} = \{t_1, t_2, \dots, t_h\} \quad , \quad t_i > t_{i-1} \quad , \quad i = 2, 3, \dots, h$$

$$58 \quad \Gamma_m(\alpha) \triangleq \{t \in T \mid \varphi_m(\alpha) = -\mu(\alpha, t)\} = \{t_{h+1}, \dots, t_p\} \quad , \quad t_i > t_{i-1} \quad , \quad i = h+2, \dots, p$$

onde φ_n e φ_m foram definidos em (4) e (5)

ii) Pode-se portanto fazer duas partições Π_1 e Π_2 de T em intervalos fechados T_i , $i = 1, 2, \dots, p$ tal que

$$\Pi_1 = \{T_1, T_2, \dots, T_h\} \quad \text{com} \quad T = \bigcup_{i=1}^h T_i$$

$$\Pi_2 = \{T_{h+1}, \dots, T_p\} \quad \text{com} \quad T = \bigcup_{i=h+1}^p T_i$$

e construir um conjunto de funções

$$59 \quad \varphi_n^i(\alpha) = \max_{t \in T_i} \mu(\alpha, t) \quad i = 1, 2, \dots, h$$

$$60 \quad \varphi_{\mu}^i(\alpha) = \max_{t \in T_i} (-\mu(\alpha, t)) \quad i = h+1, \dots, p$$

tais que os conjuntos $\Gamma_{\mu}^i(\alpha)$ e $\Gamma_{\mu}^i(\alpha)$, definidos abaixo só tenham um elemento cada.

$$61 \quad \Gamma_{\mu}^i(\alpha) \triangleq \{t \in T_i \mid \varphi_{\mu}^i(\alpha) = \mu(\alpha, t)\} = \{t_i\} \quad i = 1, 2, \dots, h$$

$$62 \quad \Gamma_{\mu}^i(\alpha) \triangleq \{t \in T_i \mid \varphi_{\mu}^i(\alpha) = -\mu(\alpha, t)\} = \{t_i\} \quad i = h+1, \dots, p$$

onde $(\forall i \in \{1, 2, \dots, p\})$, $\begin{cases} \text{ou } t_i \text{ é ponto interior de } T_i \\ \text{ou } t_i \in \{t_0, \tau\} \end{cases}$

Demonstração

63 Se $\mu(\alpha, t)$ for constante, evidentemente não ocorre (b) acima. Mostraremos que (a) ocorre:

Supondo, a título de contradição, que existe $\alpha_J \neq 0$ com $J \subset \{2, 3, \dots, q\}$ e $\alpha_j = 0$ para $j \notin J$, $j \neq 1$, obtém-se que

$$(\forall t \in T) \quad \sum_{j \in \{1\} \cup J} \alpha_j v^j(t) = \text{constante} = \lambda t = \lambda v^1(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{de onde } (\forall t \in T) \quad (\alpha_1 - \lambda) v_1(t) + \sum_{j \in J} \alpha_j v^j(t) = 0$$

e as v^j são linearmente dependentes, o que contraria a hipó-

tese (55) acima. Assim, $J = \emptyset$ e está provado (a) acima.

64 Se $\mu(\alpha, t)$ não fôr constante, evidentemente não ocorre (a). Mostraremos que (b) ocorre. Sabemos que $\mu(\alpha, t)$ é analítica em t , pois em (3) as v^j são analíticas e μ é uma soma de funções analíticas. Já que $\mu(\alpha, t)$ é analítica e não constante em T , segue-se como consequência do lema (45), que o conjunto

$$\beta(\alpha) \triangleq \{t \in T \mid t \text{ é ponto de extremo local de } \mu(\alpha, t)\}$$

é finito. Como

$$\Gamma_n(\alpha), \Gamma_m(\alpha) \subset \beta(\alpha),$$

deduz-se

que $\Gamma_n(\alpha)$ e $\Gamma_m(\alpha)$ são finitos e está estabelecido (i).

O item (ii) será demonstrado por construção. Consideremos apenas os casos não triviais em que $h+p > 5$ onde h e p foram introduzidos em (57) e (58).

As partições são construídas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \left[t_0, \frac{t_1+t_2}{2} \right] & \tau_{h+1} &= \left[t_0, \frac{t_{h+1}+t_{h+2}}{2} \right] \\ \tau_h &= \left[\frac{t_{h-1}+t_h}{2}, T \right] & \tau_p &= \left[\frac{t_{p-1}+t_p}{2}, T \right] \\ \tau_i &= \left[\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, \frac{t_i+t_{i+1}}{2} \right], & i &\in \{1, 2, \dots, p\} - \{1, h, h+1, p\} \end{aligned}$$

Note-se que:

$$\text{Se } h = 1 \text{ então } T_1 = T$$

$$\text{Se } p-h = 1 \text{ então } T_{h+1} = T$$

Com esta construção, obviamente valem (61) e (62) e nossa demonstração está completa.

Finalmente, podemos demonstrar nossos resultados principais, ou seja, condições necessárias e suficientes de otimalidade para que um ponto $\bar{x} \in R^p$ resolva o problema P1, no caso em que $\mu(\bar{x}, t)$ não é idênticamente igual a 1.

Vamos utilizar os conceitos e condições definidos atrás, ou seja, $\alpha, \theta, T, \hat{x}, F, I$ como apresentamos em (1):

$$\mu, v^i, \varphi_m, \psi_m, \Gamma_m, \bar{\Gamma}_m, \rho \quad \text{como em} \\ (4), (5), (55), \dots, (58)$$

Definiremos ainda

$$\bar{x} \in R^p \quad \text{um ponto qualquer}$$

$$v'(t) \triangleq [v^1(t) \ v^2(t) \ \dots \ v^p(t)]' \quad \forall t \in T$$

$$67 \quad \bar{\Gamma}_m(\bar{\alpha}) \triangleq \begin{cases} \Gamma_m(\bar{\alpha}) & \text{se } \varphi_m(\bar{\alpha}) = 1 \\ \emptyset & \text{se } \varphi_m(\bar{\alpha}) \neq 1 \end{cases}$$

$$68 \quad \bar{\Gamma}_u(\bar{\alpha}) \triangleq \begin{cases} \Gamma_u(\bar{\alpha}) & \text{se } \varphi_u(\bar{\alpha}) = 1 \\ \emptyset & \text{se } \varphi_u(\bar{\alpha}) \neq 1 \end{cases}$$

E, se $\bar{\Gamma}_m(\bar{\alpha})$ e $\bar{\Gamma}_u(\bar{\alpha})$ forem finitos,

$$69 \quad \bar{\Gamma}(\bar{\alpha}) \triangleq \bar{\Gamma}_m(\bar{\alpha}) \cup \bar{\Gamma}_u(\bar{\alpha}) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}, \quad t_i > t_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Considere-se agora o problema P1

$$70 \quad \Theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \Theta(\alpha) \mid |\mu(\alpha, t)| - 1 \leq 0, \forall t \in T; \hat{x}_1 + F_1 \alpha = 0 \right\}$$

e a hipótese adicional que $\mu(\bar{\alpha}, t)$ não é constantemente igual a, 1 em T , isto é,

$$71 \quad (\exists t \in T) \quad |\mu(\bar{\alpha}, t)| \neq 1$$

72 Teorema

Dado um ponto $\bar{\alpha} \in R^q$ satisfazendo a hipótese (71) acima, (73) a (77) formam um conjunto de condições necessárias para que $\bar{\alpha}$ resolva o problema P1 (70),

73 $(\exists \bar{u}_0 \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{R}^n)(\exists \bar{w} \in \mathbb{R}^{12})$ tais que

74 a) $\bar{u}_0 \nabla_x \theta(\bar{x}) + [s_1 v^1(t_1) \ s_2 v^1(t_2) \ \dots \ s_n v^1(t_n)] \bar{u} + F_I' \bar{w} = 0$

onde $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}) \quad t_i \in \bar{\Gamma}(\bar{x})$
 $s_i = \begin{cases} 1 & \text{se } t_i \in \bar{\Gamma}_n(\bar{x}) \\ -1 & \text{se } t_i \in \bar{\Gamma}_m(\bar{x}) \end{cases}$

75 b) Se $\bar{\Gamma}_n(\bar{x}) = \emptyset$ então $\varphi_n(\bar{x}) < 1$

Se $\bar{\Gamma}_m(\bar{x}) = \emptyset$ então $\varphi_m(\bar{x}) < 1$

76 c) $\hat{x}_I + F_I \bar{x} = 0$

77 d) $\begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u} \\ \bar{w} \end{bmatrix} \neq 0$

Demonstração

Como vimos em (6), P1 pode ser reformulado em P2:

78 P2. $\theta(\bar{x}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \left\{ \theta(\alpha) \mid \varphi_n(\alpha) - 1 \leq 0, \varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0, \hat{x}_I + F_I \alpha = 0 \right\}$

Note que se $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ significa $x_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ e $x \neq 0$

Deveremos provar que (73), ..., (77) são necessárias para que \bar{x} resolva P2.

79 Vamos inicialmente considerar o caso em que

$\mu(\bar{x}, t)$ é constante em T . A hipótese (71) exclui os casos em que $\mu(\bar{x}, t) = \pm 1$, o que obriga $\bar{r}(\bar{x}) = \emptyset$

Com isto, é necessário que $\varphi_{n,m}(\bar{x}) < 1$ pelo enunciado de P2, e vale a condição (75).

Com $\varphi_{n,m}(\bar{x}) < 1$, como os vínculos de desigualdade de P2 não são ativos, pode-se construir um novo problema

$$P2' \quad \theta(\bar{x}) = \min_{\alpha \in X^0} \{ \theta(\alpha) \mid \alpha \in X^0, \bar{x}_2 + F_2 \alpha = 0 \}$$

onde X^0 é aberto e contém \bar{x} , $X^0 \subset \{ \alpha \mid \varphi_n(\alpha) \leq 1, \varphi_m(\alpha) \leq 1 \}$

Para o problema P2' acima, podemos aplicar o teorema de Kuhn - Tucker sobre condições necessárias (ver ref. [7] pag. 106) porque os vínculos lineares satisfazem trivialmente a condição de qualificação (iii). As condições necessárias de

Kuhn - Tucker acima referidas podem, neste caso, serem escritas como

$$(\exists \tilde{w} \in R^{12'}) \quad \text{tal que}$$

$$a') \quad \nabla_{\tilde{x}} \theta(\tilde{x}) + F_3' \tilde{w} = 0$$

$$b') \quad \hat{x}_3 + F_2 \tilde{x} = 0$$

Basta notar agora que, tomando-se $\tilde{u}_0 = 1$ e $\tilde{u} = 0$, as condições (a') e (b') acima implicam em (74), (76) e (77) onde a cardinalidade r torna-se irrelevante, pois

$$\tilde{u} = 0 \in R^n$$

Portanto, como o teorema vale para $\mu(\tilde{x}, t)$ constante, basta-nos demonstrá-lo para $\mu(\tilde{x}, t)$ não constante.

80 Se $\mu(\tilde{x}, t)$ não é constante, o teorema (53) nos garante que $\Gamma_{h, \mu}(\tilde{x})$ são finitos e fornece um procedimento para particionar T em dois grupos, de $h \in p-h$

intervalos fechados, construindo as funções $\varphi_{n,m}^i(\bar{\alpha})$ (vejam-se (59) e (60)).

Como $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^h \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T} = \bigcup_{i=h+1}^p \mathcal{T}_i$, obtém-se imediatamente que

$$81 \quad \varphi_n(\alpha) - 1 \leq 0 \iff (\forall i \in \{1, 2, \dots, h\}) \quad \varphi_n^i(\alpha) - 1 \leq 0$$

$$\varphi_m(\alpha) - 1 \leq 0 \iff (\forall i \in \{h+1, \dots, p\}) \quad \varphi_m^i(\alpha) - 1 \leq 0$$

Com (81) podemos reescrever P2:

$$82 \quad P3 \quad \theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in \mathcal{R}^2} \left\{ \theta(\alpha) \mid \begin{array}{l} \varphi_n^k(\alpha) - 1 \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, h; \\ \varphi_m^l(\alpha) - 1 \leq 0, \quad l = h+1, \dots, p; \quad \hat{x}_I + F_I \alpha = 0 \end{array} \right\}$$

As funções $\varphi_{n,m}^i$ são tais que $\Gamma_{n,m}^i(\bar{\alpha})$ contém somente um ponto cada um, isto é,

$$\Gamma_n^i(\bar{\alpha}) = \{t_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, h; \quad \Gamma_m^i(\bar{\alpha}) = \{t_i\}, \quad i = h+1, \dots, p$$

Da aplicação do teorema (33), obtém-se que as funções $\varphi_{n,m}^i$ são diferenciáveis em relação a α em $\bar{\alpha}$, com derivadas

$$83 \quad \nabla_{\alpha} \varphi_{\mu}^k(\bar{\alpha}) = \nabla_{\alpha} \mu(\bar{\alpha}, t_k) = \nabla_{\alpha} \sum_{j=1}^q u_j v^j(t_k) = s_k v'(t_k) \quad , \quad s_k = 1 \quad , \quad k=1,2,\dots,h$$

$$84 \quad \nabla_{\alpha} \varphi_{\mu}^l(\bar{\alpha}) = -\nabla_{\alpha} \mu(\bar{\alpha}, t_k) = s_l v'(t_l) \quad , \quad s_l = -1 \quad , \quad l=h+1,\dots,p$$

As funções vínculo são definidas no R^q e diferenciáveis em $\bar{\alpha}$. Vale então o teorema de Fritz - John (ref. [7] , pag. 170) :

$$85 \quad (\exists \bar{u}_0 \in R, \bar{u} \in R^p) (\exists \bar{w} \in R^{11}) \quad \text{tais que}$$

$$a') \quad \bar{u}_0 \nabla_{\alpha} \theta(\bar{\alpha}) + \left[\nabla_{\alpha} \varphi_{\mu}^1(\bar{\alpha}) \dots \nabla_{\alpha} \varphi_{\mu}^h(\bar{\alpha}) \nabla_{\alpha} \varphi_{\mu}^{h+1}(\bar{\alpha}) \dots \nabla_{\alpha} \varphi_{\mu}^p(\bar{\alpha}) \right] \bar{u} + \left[\nabla_{\alpha} [\hat{x}_1 + F_1 \bar{\alpha}] \right]_{\bar{\alpha}} \bar{w} = 0$$

$$b') \quad \begin{aligned} \varphi_{\mu}^k(\bar{\alpha}) - 1 &\leq 0 & k=1,2,\dots,h \\ \varphi_{\mu}^l(\bar{\alpha}) - 1 &\leq 0 & l=h+1,\dots,p \end{aligned}$$

$$c') \quad \hat{x}_1 + F_1 \bar{\alpha} = 0$$

$$d') \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \geq 0 \quad , \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_0 \\ \bar{u} \end{bmatrix} \neq 0$$

$$e') \quad \left\langle \begin{bmatrix} \varphi_{\mu}^1(\bar{\alpha}) - 1 \\ \varphi_{\mu}^h(\bar{\alpha}) - 1 \\ \varphi_{\mu}^{h+1}(\bar{\alpha}) - 1 \\ \varphi_{\mu}^p(\bar{\alpha}) - 1 \end{bmatrix} , \bar{u} \right\rangle = 0$$

Substituindo (83) e (84) em (a'), obtém-se

$$86 \quad \bar{u}_0 \nabla_{\alpha} \theta(\bar{\alpha}) + \left[s_1 v'(t_1) \ s_2 v'(t_2) \dots s_p v'(t_p) \right] \bar{u} + F_1' \bar{w} = 0$$

Por outro lado, (b'), (d') e (e') implicam em que $[\varphi_m^n(\bar{\alpha}) - 1]\bar{u}_n = 0$ e $[\varphi_m^l(\bar{\alpha}) - 1]\bar{u}_l = 0$, ou seja,

$$87 \quad \text{Se } \varphi_m^n(\bar{\alpha}) \neq 1, \text{ então } \bar{u}_n = 0$$

$$\varphi_m^l(\bar{\alpha}) \neq 1, \text{ então } \bar{u}_l = 0$$

Podemos, portanto, reduzir a dimensão do vetor \bar{u} , eliminando as componentes que satisfazem (87), ou seja, tomando os gradientes de $\nabla_{\alpha} \varphi_{m,m}^i(\bar{\alpha}) = \pm \nabla_{\alpha} \mu(\bar{\alpha}, t_i)$ somente nos pontos em que $\varphi_{m,m}(\bar{\alpha}) = \pm \mu(\bar{\alpha}, t_i) = 1$.

Ora, o conjunto $\bar{F}(\bar{\alpha}) = \{t_i \mid \varphi_{m,m}(\bar{\alpha}) = \pm \mu(\bar{\alpha}, t_i) = 1\}$ foi definido em (69), $\bar{F}(\bar{\alpha}) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

Podemos então reescrever (a') como

$$88 \quad (a) \quad \bar{u}_0 \nabla_{\alpha} \theta(\bar{\alpha}) + [s_1 \sigma'(t_1) \dots s_n \sigma'(t_n)] \bar{u} + \bar{F}_I' \bar{\omega} = 0$$

onde $\bar{u} \in \mathbb{R}^n$

$$\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \bar{F}(\bar{\alpha})$$

Com (88) mostramos a expressão (a), dada em (74)

4.III

Mostraremos agora a equivalência entre (b) dado em (75) e (b') dado em (85).

Partindo da expressão (b'), notamos inicialmente que

$$\varphi_n(\tilde{\alpha}) = \psi_n^h(\tilde{\alpha}) \quad , \quad n = 1, 2, \dots, h$$

$$\varphi_m(\tilde{\alpha}) = \psi_m^l(\tilde{\alpha}) \quad , \quad l = h+1, \dots, p$$

e (b') pode ser reescrita como

$$89 \quad \varphi_n(\tilde{\alpha}) - 1 \leq 0$$

$$90 \quad \varphi_m(\tilde{\alpha}) - 1 \leq 0$$

As expressões (89) e (90) acima implicam trivialmente em (b), pois valem para quaisquer $\bar{\Gamma}_{n,m}(\tilde{\alpha})$ e em particular para $\bar{\Gamma}_{n,m}(\tilde{\alpha}) = \emptyset$

Partindo agora de (b), basta notar o seguinte:

91 se $\bar{\Gamma}_n(\tilde{\alpha}) \neq \emptyset$, por definição de $\bar{\Gamma}_n$, $\varphi_n(\tilde{\alpha}) = 1$ (veja (67)) e (89) é automaticamente satisfeita. O mesmo ocorre com (90) se $\bar{\Gamma}_m(\tilde{\alpha}) \neq \emptyset$

4. III

Assim, se (b) fôr satisfeita, (b') também será satisfeita, levando-se em conta a observação (9f). Está assim mostrado que (b) e (b') são equivalentes.

92 (c) e (d) são idênticas a (c') e (d')

Mostramos, portanto, que

$(a'), \dots, (e') \Rightarrow (a), \dots, (d)$, o que completa a prova do teorema, pois $(a'), \dots, (e')$ são necessárias para que $\tilde{\alpha}$ resolva P3, devido ao teorema de Fritz - John e P3 é equivalente a P1 por (81) e (82).

93 Teorema :

As condições (73) a (77) do teorema (72), com $\bar{u}_0 = 1$ são também suficientes para que $\tilde{\alpha}$ resolva P1.

Demonstração

94 Com $\bar{u}_0 = 1$, as condições $(a'), \dots, (e')$ em (85) constituem condições de Kuhn - Tucker para P3. θ é convexa por hipótese, $\varphi_{n,m}^i$ são convexas como mostra-

mos em (8) e (11), $\hat{x}_i + F_i \alpha$ é linear e portanto convexa no R^q , θ e as funções vínculo são diferenciáveis em $\bar{\alpha}$. Com isto, as condições de Kuhn - Tucker (a') , ..., (e') são também suficientes para que $\bar{\alpha}$ resolva P3 (veja ref. [7], pag. 162).

Para mostrarmos que (73) a (77) são suficientes, devemos mostrar que $(a), \dots, (d) \implies (a'), \dots, (e')$.

Já mostramos em (91) e (92) a equivalência entre (b) e (b') , e já que (c) e (d) são idênticas a (c') e (d') segue-se que

$\{(b), (c), (d)\}$ e $\{(b'), (c'), (d')\}$ são equivalentes.

Falta-nos, portanto, provar que $(a), \dots, (d)$ implicam também em (a') e (e') .

A demonstração é imediata:

95 Basta introduzir no segundo termo de (a) as colunas que faltam à matriz, com multiplicadores nulos nas posições correspondentes de $\bar{\alpha}$, obtendo (a') . Com essas compo-

nentes nulas de \bar{u} , (e') valerá sempre, pois em cada produto

$$(\psi_{n,m}^i(\bar{\alpha}) - 1) \bar{u}_i, \text{ ou } \psi_{n,m}^i(\bar{\alpha}) - 1 = 0 \text{ ou } \bar{u}_i = 0$$

pela construção de \bar{u} em (95).

96

Condições de qualificação de vínculos

No teorema 72, a condição (d) garante que $\left[\frac{\bar{u}_0}{\bar{u}} \right] \geq 0$ mas o resultado da aplicação do teorema não tem significado prático se $\bar{u}_0 = 0$. Pelo teorema de Kuhn - Tucker (ref. [7], pag. 173), se alguma "condição de qualificação de vínculos" for satisfeita pelos vínculos de P3 em $\bar{\alpha}$, vale o teorema (72) com $\bar{u}_0 = 1$, $\bar{u} \geq 0$.

Nenhuma condição de qualificação é trivialmente satisfeita pelos vínculos e estes devem ser testados em cada ponto $\bar{\alpha}$. As condições mais facilmente testáveis são as LIQC (ref. [8]) e as condições de qualificação de Arrow - Hurwicz - Uzawa generalizadas (ref. [7], pag. 172) e a condição de Slater generalizada (ref. [7], pag. 80). A primei-

ra pode ser testada através de um problema de programação linear. A segunda depende de conseguir-se encontrar um ponto viável de P1 tal que $|\mu(\alpha, t)|$ não atinja o valor 1 em \mathcal{T}

97 A condição de qualificação de Slater generalizada é interessante por ter a seguinte interpretação em termos de controle ótimo:

Um sistema $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$, com entradas restritas a $|u(t)| \leq 1 \quad \forall t \in \mathcal{T}$, originará um problema de programação matemática, após reduzido segundo o processo que apresentamos no capítulo 1. Este problema de programação satisfará uma condição de Slater generalizada sempre que $\bar{x}_1 \in \hat{A}_1(x_0, t_0, \tau)$, onde

$\hat{A}(x_0, t_0, \tau)$ é o interior do conjunto de estados alcançáveis no instante τ a partir de x_0, t_0 , com controles tais que $\max_{t \in [t_0, \tau]} |u(t)| \leq 1$, $\hat{A}_1(x_0, t_0, \tau) = \{x_1 | x \in \hat{A}(x_0, t_0, \tau)\}$

98 O caso $(\forall t \in \mathcal{T}) |\mu(\bar{x}, t)| = 1$

Como μ é analítica, (98) só ocorre se $\mu(\bar{x}, t)$ é constante em \mathcal{T} , com valor +1 ou -1.

Como em (55) e (56)

$$\mu(\bar{\alpha}, t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t)$$

$$v^j(t) = k \neq 0 \quad \forall t \in T \quad \text{e} \quad v^j, j=1, 2, \dots, q$$

são linearmente independentes,

$$99 \quad \mu(\bar{\alpha}, t) = \pm 1 \Rightarrow \bar{\alpha} = \pm \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

De (99) deduz-se que, para que $\bar{\alpha}$ tal que $\mu(\bar{\alpha}, t) = \pm 1$ possa resolver Pl, é necessário que $\pm \left[\frac{1}{k} \ 0 \dots 0 \right]'$

seja um ponto do conjunto de pontos viáveis de Pl, ou seja

$$\bar{\alpha} \in \{ \alpha \mid \hat{x}_1 + F_1 \alpha = 0 \} \quad , \text{ ou ainda}$$

$$100 \quad \hat{x}_1 \pm \frac{1}{k} F_1^1 = 0 \quad , \text{ isto é}$$

$$101 \quad \hat{x}_1 = \pm \frac{1}{k} F_1^1$$

Conclui-se que somente se \hat{x}_1 satisfizer (100) necessitaremos testar se o ponto $\bar{\alpha} = \left[\frac{1}{k} \ 0 \dots 0 \right]'$ otimiza $\theta(\alpha)$

Este caso é muito particular e de tratamento muito difícil e as conclusões não são interessantes: as condições

necessárias de otimalidade obtidas serão tão difíceis de testar que perdem o interêsse.

Seção IV - Conclusões

Os teoremas (72) e (93) permitem que, dado um ponto \bar{z} , possamos testá-lo e determinar se resolve ou não o problema P1. O teste exige que se determinem os pontos de extremo de $\mu(\bar{z}, t)$, e êste é o ponto mais fraco do procedimento. Se a expansão usada fôr simples (polinomial, por exemplo), os pontos de extremo poderão ser encontrados igualando a zero a derivada de $\mu(\bar{z}, t)$ em relação a t , o que se torna mais difícil à medida que aumenta o número de funções elementares (q).

Note-se, no entanto, que para polinômios dificilmente se obterão dois pontos de extremo interiores a T com o mesmo valor para $\mu(\bar{z}, t)$. De fato, somente polinômios da ordem superior a 3 poderão ter mais de um ponto de máximo em (t, τ) . Nas situações mais comuns teremos, portanto, não mais que um máximo e um mínimo iguais a $+1$ em pontos interiores a T e dois ou menos outros extremos em $\{t, \tau\}$.

Nesses casos, não será difícil calcular os conjuntos $\Gamma_{n,m}(\alpha)$ e a aplicação dos teoremas acima é fácil.

A resolução de PL, no entanto, consiste em encontrar-se um $\bar{\alpha}$ viável que minimize $\theta(\alpha)$, o que não pode ser feito com os resultados que obtivemos, como ocorre geralmente para problemas de programação não-linear em relação ao teorema de Kuhn - Tucker (com exceção dos problemas de programação linear e quadrática). É necessário para encontrar um mínimo de $\theta(\alpha)$, que se disponha de um método numérico que, partindo de algum ponto não ótimo, leve-nos por um processo iterativo a aproximarmos-nos de um ponto viável que minimize a função critério.

As condições de otimalidade obtidas podem fornecer-nos uma regra de parada para um método iterativo e sugere-se imediatamente a idéia de um método de direções viáveis (ref.

[11]). Um método deste tipo exige, no entanto, que se calculem a cada passo os conjuntos $\Gamma_{n,m}(\alpha)$, o que gostaríamos de evitar. Devido a isto, desenvolveremos no próximo capítulo um método de penalidades (ref. [10], pag. 248), em que a aproximação do ótimo poderá ser feita por meio de métodos que não requeiram o cálculo de gradientes, e portanto não necessitem do cálculo de $\Gamma_{n,m}(\alpha)$.

C A P Í T U L O 5

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE P1Seção I - Introdução

Desenvolvemos no capítulo anterior a aplicação do teorema de Kuhn - Tucker ao problema P1. Para isto, tivemos que reduzir alguns vínculos não diferenciáveis de P1 a vínculos equivalentes diferenciáveis, construindo então o problema P3. Este problema, introduzido em 4.III-82 é passível de tratamento através dos teoremas de Fritz - John e Kuhn - Tucker, mas este tratamento possibilita-nos sobretudo estabelecer se um ponto dado é ou não um ponto de ótimo. Além disso, os resultados do capítulo anterior apoiam-se no cálculo de pontos de máximo e mínimo da função contrôle, o que pode ser excessivamente trabalhoso.

As considerações acima levam-nos a procurar métodos numéricos para a busca de pontos que resolvam o problema P1. Devido à dificuldade do cálculo de pontos de extremo

da função controle, de que depende o cálculo dos gradientes dos vínculos de P3 (veja 4.º.III), é interessante que se disponha de um método numérico em que somente se necessite do cálculo dos valores dos extremos. Como veremos abaixo, o método de penalidades, desenvolvido por Zangwill na referência [10], satisfaz este requerimento, o que nos leva a escolhê-lo para o tratamento deste capítulo.

Além do método de penalidades, poderíamos utilizar um método de direções viáveis (ver [11]), o que não faremos neste trabalho por serem estes métodos baseados no cálculo de gradientes, com a desvantagem que citamos acima.

O método de penalidades está apresentado, como o utilizaremos, em [10], pag. 254. Consiste essencialmente em, dado um problema de otimização vinculado, construir-se um novo problema equivalente ao primeiro, mas desvinculado. Isto é conseguido através da introdução de funções penalidade, ou seja, funções que assumem valores positivos fora da região de pontos viáveis do problema original e nulos dentro dessa região. Como veremos abaixo, a soma dessas funções penalidade à função critério do primeiro problema vinculado constitui a função critério para o segundo problema desvinculado. A solução do segundo tipo de problema leva-nos a pontos tanto mais

próximos dos pontos de ótimos do primeiro problema, quanto mais fortes forem as "penalidades" impostas.

Um algoritmo de penalidades constará, portanto, da resolução de uma sequência de problemas desvinculados. Em cada novo problema dessa sequência, a penalidade imposta a um ponto x que viole os vínculos do problema vinculado, torna-se mais rigorosa. A sequência de soluções dos problemas desvinculados deverá, portanto, convergir para a solução do problema vinculado, desde que algumas condições sejam satisfeitas.

O algoritmo de penalidades será formalizado abaixo, na Seção II, e sua convergência será mostrada na Seção III para nosso problema particular (P1). Surge, no entanto, a necessidade de resolver o problema desvinculado a cada passo do método de penalidades, como vimos acima. Este subproblema terá uma função critério envolvendo a função

$$\varphi(\alpha) = \max_{t \in T} |\mu(\alpha, t)|, \quad \text{não diferenciável, o}$$

que nos impede de utilizar métodos de otimização baseados no cálculo de gradientes. Podem-se, no entanto,

utilizar outros métodos, como o método de variação cíclica de parâmetros, ou métodos de direções conjugadas (veja ref. [10]).

É também possível formular-se um método de direções viáveis para a resolução do subproblema desvinculado, usando o estudo dos vínculos de P1 realizado no capítulo 4, mas não o faremos neste trabalho.

Seção II - Apresentação do método de penalidades

Formularemos inicialmente o método de penalidades para um problema geral de otimização:

Sejam

$$1 \quad \alpha \in R^q$$

$$\theta : R^q \longrightarrow R$$

$$g : R^q \longrightarrow R^m$$

$$h : R^q \longrightarrow R^r$$

O problema geral de otimização é:

- 2 Encontrar, se existir, $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^q$ que minimiza a função critério $\theta(\alpha)$, sujeito às restrições

$$g(\alpha) \leq 0$$

$$h(\alpha) = 0$$

- 3 O método de penalidades:

Seja o conjunto de pontos viáveis definido por

4
$$F = \{ \alpha \in \mathbb{R}^q \mid g(\alpha) \leq 0, h(\alpha) = 0 \}$$

- 5 Seja ainda $\{r^k\}_1^\infty$ uma sequência, tal que

$$r^k > 0, \quad r^{k+1} > r^k$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r^k = \infty$$

E vamos definir uma função $L(\alpha)$ contínua, tal que

6
$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad L(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{se } \alpha \in F \\ > 0 & \text{se } \alpha \notin F \end{cases}$$

A esta função chamaremos função penalidade e um formato típico será visto abaixo, na aplicação do método a Fl

Vamos definir ainda uma função $p : \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$7 \quad p(\alpha, r) = \theta(\alpha) + r L(\alpha)$$

Esta função será o critério para o subproblema des-
vinculado em cada passo do método, onde $L(\alpha)$ "penaliza"
os pontos fora da região de pontos viáveis, F

8 O algoritmo

a) Escolher $r^1 > 0$

b) Faça $k = 0$

c) Substitua k por $k + 1$

d) Para r^k dado, ache α^k tal que

$$9 \quad p(\alpha^k, r^k) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^q} p(\alpha, r^k)$$

10 e) Se α^k resolver o problema (3) acima, pare.
Caso contrário, prossiga.

f) Defina $r^{k+1} > r^k$ e recomece em (c)

O critério para determinar se α^k é ótimo deve ser especificado para cada problema.

11 Convergência do algoritmo:

Vamos enunciar três axiomas:

12 A0: A região de pontos viáveis F , definida em (4), não é vazia;

13 A1: $\theta(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$, $L(\alpha)$ são contínuas em R^q

14 A2: $(\exists n_0 \in R^+)$ $(\exists X \subset R^q \text{ compacto})$ tais que

$$(\forall n \geq n_0) \quad \bar{\alpha}_n \in X, \text{ onde}$$

$$p(\bar{\alpha}_n, n) = \inf_{\alpha \in R^q} p(\alpha, n) = \min_{\alpha \in R^q} p(\alpha, n)$$

ou seja, a partir de $n_0 > 0$, existem os mínimos das funções $p(\alpha, n^k)$ e todos os pontos α^k encontrados pela minimização de $p(\alpha, n^k)$ pertencem a um conjunto compacto $X \subset R^q$

Se os axiomas acima forem satisfeitos podemos mostrar que:

15 Teorema

Dado um algoritmo de penalidades como formulamos em (8) acima, se forem satisfeitos os axiomas A0, A1, A2, em (12), (13), (14), acima, o algoritmo converge, isto é, ou o algoritmo pára ou qualquer subsequência convergente da sequência $\{\alpha^k\}_1^\infty$ converge para uma solução do problema (3).

A demonstração dêste teorema encontra-se na ref. [10] , pag. 255.

Nossa tarefa será, daqui por diante, aplicar o método de penalidades apresentado acima ao problema P1. O primeiro passo será escolher funções penalidade convenientes, e o segundo, provar que com esta escôlha são satisfeitos os axiomas A1 e A2 em (13) e (14). O axioma A0 depende, evidentemente, de cada caso particular de problemas P1 formulado como em (3).

Iniciaremos formulando o problema P1, colocando-o em seguida em forma de outro problema, P4, equivalente a P1 e mais conveniente para a aplicação do método de penalidades.

Considere-se então, dados

$$16 \quad \theta : R^q \longrightarrow R \quad \text{convexa, diferenciável com gra-} \\ \text{diente contínuo no } R^q$$

$$\alpha \in R^q$$

$$v^j : R \longrightarrow R \quad \text{analíticas, linearmente inde-} \\ \text{pendentes, } j = 1, 2, \dots, q$$

$$v^j(t) \quad \text{constante} \quad \forall t \in T = [t_0, T]$$

$$\mu(\alpha, t) = \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t)$$

$$17 \quad h : R^q \longrightarrow R^{|I|} \quad \text{linear,} \quad |I| \in R^+$$

$$h(\alpha) = \hat{x}_I + F_I \alpha$$

Queremos encontrar $\bar{\alpha}$ viável tal que

$$18 \quad \text{Pl:} \quad \theta(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \mid (\forall t \in T) \quad |\mu(\alpha, t)| - 1 \leq 0, \quad h(\alpha) = 0 \right\}$$

Este formato de Pl, como vimos em 4.I-2 é inconveniente, o que nos leva a definir:

$$19 \quad \varphi(\alpha) \triangleq \max_{t \in T} |\mu(\alpha, t)|$$

20

$$g(\alpha) \triangleq \varphi(\alpha) - 1$$

e podemos reescrever P1 como

$$21 \quad P4: \quad \theta(\alpha) = \min_{\alpha \in R^q} \left\{ \theta(\alpha) \mid g(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1 \leq 0, \quad h(\alpha) = 0 \right\}$$

Os problemas P1 e P4 são obviamente equivalentes.

Para a aplicação do método de penalidades a P4, que será feita na próxima Seção, é interessante dispormos dos resultados dados por dois lemas preliminares, que enunciaremos a seguir:

22

Lema:

A função

$$\varphi(\alpha) = \max_{t \in T} |\mu(\alpha, t)|, \quad \text{definida em (19) é contínua em } \alpha$$

Demonstração:

Consequência imediata do teorema 7.2 em [10], pag.

23

Lema

O conjunto $F_k \triangleq \{\alpha \mid \varphi(\alpha) \leq k\}$ é compacto, $\forall k \in \mathbb{R}^+$

Demonstração

Demonstraremos que o conjunto é limitado e fechado.

a) O conjunto F_k é limitado

Para mostrar que F_k é limitado, deveremos mostrar que

24

$$(\exists \bar{\epsilon} \in \mathbb{R}^+) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q)$$

$$\alpha \in F_k \Rightarrow |\alpha| \leq \bar{\epsilon}$$

Notemos primeiramente que, devido à independência linear das funções elementares v^j (veja (16))

$$\mu(\alpha, t) \triangleq \sum_{j=1}^q \alpha_j v^j(t) \equiv 0 \iff \alpha = 0, \text{ ou seja}$$

25

$$\varphi(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0$$

Devido a (25), o mínimo de $\varphi(\alpha)$ em um conjunto compacto que não contenha a origem é maior que zero. Usando este fato, procuraremos encontrar um valor $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$ tal que o mínimo de $\varphi(\alpha)$ na fronteira de qualquer vizinhança $V_{\bar{\varepsilon}}(0)$ da origem com $\bar{\varepsilon} > \bar{\varepsilon}$, seja maior do que K .

Ou seja, mostraremos que

$$26 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad |\alpha| > \bar{\varepsilon} \Rightarrow \varphi(\alpha) > K$$

A expressão (26) é equivalente a

$$27 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad \varphi(\alpha) \leq K \Rightarrow |\alpha| \leq \bar{\varepsilon}$$

Pela definição de F_K , a expressão (27) pode ser reescrita como

$$28 \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad \alpha \in F_K \Rightarrow |\alpha| \leq \bar{\varepsilon}$$

Basta-nos portanto mostrar que existe $\bar{\varepsilon}$ satisfazendo (26) para provar que F_K é limitado, pois (28) é idêntica a (24).

Vamos definir então

$$29 \quad B = \{e \mid e \in \mathbb{R}^q \wedge |e| = 1\}$$

Como φ é contínua pelo lema (23) e B é compacto,

$$30 \quad (\exists \bar{e} \in B) \quad \varphi(\bar{e}) = \min_{e \in B} \varphi(e) > 0$$

Tomando-se agora

$$31 \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\kappa}{\varphi(\bar{e})} > 0$$

e multiplicando ambos os membros de (30) por

$$32 \quad \varepsilon > \bar{\varepsilon}, \quad \text{obtem-se}$$

$$\varepsilon \varphi(\bar{e}) = \varepsilon \min_{e \in B} \varphi(e)$$

$$= \min_{e \in B} \varepsilon \varphi(e)$$

$$\text{E como } (\forall t \in \mathbb{T}) \quad \varepsilon |\mu(e, t)| = |\mu(\varepsilon e, t)|$$

$$33 \quad \varepsilon \varphi(\bar{e}) = \min_{e \in B} \varphi(\varepsilon e)$$

Entrando com (32) em (33)

$$34 \quad (\forall \varepsilon > \bar{\varepsilon}) \quad \min_{e \in B} \varphi(\varepsilon e) > \bar{\varepsilon} \varphi(\bar{e}) \quad \text{e substituindo } \bar{\varepsilon} \\ \text{de (31) em (34),}$$

$$35 \quad \min_{e \in B} \varphi(\bar{\sigma}e) > k$$

A expressão (35) pode ser reescrita

$$36 \quad (\forall \bar{\sigma} > \bar{\sigma}) \quad \min \left\{ \varphi(\bar{\sigma}e) \mid e \in \mathbb{R}^q, |e| = 1 \right\} > k$$

(36) é equivalente a

$$37 \quad (\forall \bar{\sigma} > \bar{\sigma}) \quad \min \left\{ \varphi(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^q, |\alpha| = \bar{\sigma} \right\} > k$$

De (37) segue-se que

$$38 \quad (\forall \bar{\sigma} > \bar{\sigma}) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad \left(|\alpha| = \bar{\sigma} \Rightarrow \varphi(\alpha) > k \right)$$

(38) pode ser escrito como

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad \left(|\alpha| > \bar{\sigma} \Rightarrow \varphi(\alpha) > k \right)$$

que corresponde

à expressão (26) e prova a primeira parte do lema.

$$39 \quad b) \text{ O conjunto } F_k \text{ definido em (23) é fechado.}$$

Demonstração

Prova-se mostrando que o complementar

$$\mathcal{C}(F_k) = \left\{ \alpha \mid \varphi(\alpha) > k \right\} \quad \text{é aberto.}$$

A demonstração vem facilmente como consequência da continuidade de φ , e não a escreveremos.

Seção III - Aplicação do método de penalidades a P4

Faremos inicialmente a escolha das funções penalidade que julgamos convenientes em nosso problema, tendo em vista que estas, juntamente com θ , devem satisfazer o axioma A1, dado em (13).

As funções devem "penalizar" os vínculos $g(\alpha)$ e $h(\alpha)$, definidos em (17) e (20):

Vamos introduzir a notação:

$$40 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad [x]^+ \triangleq \max \{0, x\}$$

E as funções

$$41 \quad L_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L_1(y) = [y]^+$$

$$42 \quad L_2 : \mathbb{R}^{|\mathcal{I}|} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L_2(x_{\mathcal{I}}) = \sum_{i=1}^{|\mathcal{I}|} (\|x_{\mathcal{I}_i}\|)^{\kappa_2}, \quad \kappa_2 \in \{1, 2\}, \text{ dado}$$

43 As funções L_1 e L_2 em (41) e (42) acima são obviamente contínuas em R e R^{II} , respectivamente.

Definiremos agora a função

$$44 \quad L : R^q \longrightarrow R$$

$$L(\alpha) = L_1(g(\alpha)) + L_2(h(\alpha))$$

45 L é bem definida, pois $(\forall \alpha \in R^q) \quad g(\alpha) \in R \wedge h(\alpha) \in R^{II}$

46 L é contínua em R^q , pois

$g(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1$ é contínua pelo lema (22)
e L_1 é contínua

$h(\alpha) = \hat{\alpha}_r + F_r \alpha$ é linear (contínua) e L_2
é contínua.

47 Lema

A função $L : R^q \longrightarrow R$ definida em (44) é uma função penalidade para o problema P4 e satisfaz, juntamente com Θ , introduzida em (16), o axioma A1 (13).

Demonstração

Mostraremos inicialmente que L satisfaz II-6.

Seja

48 $F = \{ \alpha \mid g(\alpha) \leq 0, h(\alpha) = 0 \}$ o conjunto de pontos viáveis para P4.

Devemos mostrar que $(\forall \alpha \in R^q) \quad L(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{se } \alpha \in F \\ > 0 & \text{se } \alpha \notin F \end{cases}$

Se $\alpha \in F$, então $g(\alpha) \leq 0$, donde $L_1(g(\alpha)) = 0$ pela definição de $L_1(y)$ em (41).

$h(\alpha) = 0$, donde $L_2(h(\alpha)) = 0$, pela definição de $L_2(x_1)$ em (42).

Se $\alpha \notin F$, então $g(\alpha) > 0 \vee (\exists h_i) h_i(\alpha) \neq 0, i=1, \dots, II$

ou seja, $L_1(g(\alpha)) > 0 \vee L_2(h(\alpha)) > 0$ de onde segue-se que $L(\alpha) > 0$

Como θ é contínua por (16), $g(\alpha)$ é contínua por (23), $h(\alpha)$ é contínua por ser linear, $L(\alpha)$ é contínua por (39), está demonstrado o lema.

Dispomos então de uma função penalidade

$$49 \quad L : R^q \longrightarrow R$$

$$L(\alpha) = [\varphi(\alpha) - 1]^+ + \sum_{i \in I} (|h_i(\alpha)|)^{k_2}$$

$$\text{onde} \quad \varphi(\alpha) = \max_{t \in \pi} |\mu(\alpha, t)|$$

$$h(\alpha) = \hat{x}_I + F_I \alpha$$

Com a função L definida acima, poderemos aplicar o algoritmo de penalidades enunciado em (8), definindo a função

$$50 \quad p(\alpha, n) = \theta(\alpha) + n L(\alpha) \quad , \quad \text{que deverá ser iterativamente otimizada para valores crescentes de } n \quad .$$

Pelo teorema (15) , basta-nos provar o axioma A2 (14) para a função $p(\alpha, n)$ em (50) acima, para estabelecer a convergência do método de penalidades.

Procederemos da seguinte maneira:

Inicialmente definiremos a função

51

$$\bar{L}_2 : R^q \rightarrow R$$

$$\bar{L}_2(\alpha) = L_2(h(\alpha))$$

Utilizando a definição de L_2 , em (42), pode-se escrever

52

$$\bar{L}_2(\alpha) = \sum_{i \in I} (|h_i(\alpha)|)^{k_i}, \quad k_i \in \{1, 2\}$$

53

$\bar{L}_2(\alpha)$ é convexa, por ser a soma de funções convexas, já que o valor absoluto de uma função linear é uma função convexa. A exponenciação por $k_i > 0$ também não destrói a convexidade.

Com estas considerações, podemos afirmar que

54

$$\bar{\theta}(\alpha) \triangleq \theta(\alpha) + \lambda \bar{L}_2(\alpha) \quad \text{com } \lambda > 0$$

é convexa, pois θ é convexa por (16) e $\bar{L}_2(\alpha)$ é convexa por (53).

Se definirmos agora

$$55 \quad \bar{L}_1(\alpha) = L_1(g(\alpha)) \quad , \quad \text{obtem-se}$$

$$56 \quad \begin{aligned} p(\alpha, \lambda) &= \theta(\alpha) + \lambda L(\alpha) \\ &= \bar{\theta}(\alpha) + \lambda \bar{L}_1(\alpha) \end{aligned}$$

Mostraremos que o axioma A2 (14) é satisfeito quando

$$57 \quad p(\alpha, \lambda) = \bar{\theta}(\alpha) + \lambda \bar{L}_1(\alpha) \quad , \quad \text{onde } \bar{\theta}(\alpha) \text{ é convexa e}$$

$$58 \quad \bar{L}_1(\alpha) = [\varphi(\alpha) - 1]^+$$

Este caso inclui o da função $p(\alpha, \lambda)$ definida em (49), (50), pois em (50) $\bar{\theta}(\alpha)$ é particularizada, na forma (54).

Para mostrar o axioma A2 para (48) precisamos inicialmente do seguinte

59 Lema

A função $\varphi : R^q \longrightarrow R$, definida em (15) e convexa em R^q .

Demonstração

Notamos inicialmente que:

$$\varphi(\alpha) = \max \{ \varphi_m(\alpha), \varphi_{\infty}(\alpha) \} \quad , \text{ onde}$$

foram definidos em 4.I-4 e 4.I-5.

Mostramos em 4.II-8 e 4.II-11 que φ_m e φ_{∞} são convexas. Já que o máximo de funções convexas é convexo (ver ref. [7], pag. 61), φ é convexa.

60

Teorema

Seja $p(\alpha, n) = \bar{\theta}(\alpha) + n \bar{L}_1(\alpha)$, como definida em (51) acima.

Então, vale o axioma A2 , ou seja

$$(\exists X \subset \mathbb{R}^q, \text{ compacto}) (\exists n_0 \in \mathbb{R}^+) \text{ tais que}$$

$$(\forall n > n_0) \quad \bar{\alpha}_n \in X \quad , \text{ onde}$$

$$p(\bar{\alpha}_n, n) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^q} p(\alpha, n) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^q} p(\alpha, n)$$

Demonstração:

Nossa demonstração consistirá do seguinte:

a) Escolher um compacto X , dado por uma vizinhança fechada da origem de \mathbb{R}^q , tal que X contenha a região de pontos viáveis F

b) Determinar um valor r_0 tal que para todos os pontos α da fronteira de X

$$(\forall n \geq r_0) \quad p(\alpha, n) > p(0, n)$$

c) Mostrar, usando a convexidade de $\bar{\theta}(\alpha)$, que

$$(\forall n \geq r_0) (\forall \alpha \in \mathbb{R}^q) \quad (\alpha \notin X \Rightarrow p(\alpha, n) > p(0, n))$$

d) Deduzir, de (b) e (c) que o ínfimo de $p(\alpha, n)$ com $n \geq r_0$ estará obrigatoriamente em X e, como X é compacto,

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}^q} p(\alpha, n) = \inf_{\alpha \in X} p(\alpha, n) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^q} p(\alpha, n)$$

Vamos seguir os passos (a) a (d) acima:

a) Pelo lema (23), o conjunto

$$61 \quad F \triangleq \{ \alpha \mid \varphi(\alpha) - 1 \leq 0 \} \quad \text{é compacto.}$$

Seja então

$$|\hat{\alpha}| = \max_{\alpha \in F} |\alpha|, \quad \text{cuja existência é garan-}$$

tida por F ser compacto.

Tomemos agora

$$62 \quad k > |\hat{\alpha}|, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

E vamos definir

$$63 \quad X \triangleq \{ \alpha \in \mathbb{R}^q \mid |\alpha| \leq k \} \quad , \text{ uma vizinhança fechada da origem.}$$

b) Vamos agora procurar α_0

Preliminarmente, note-se que

$$64 \quad 0 \in F, \quad \text{pois} \quad \varphi(0) = 0 < 1$$

$$65 \quad p(0, n) = \bar{\theta}(0) + n \bar{L}_1(0) = \bar{\theta}(0)$$

pois pela definição de $\bar{L}_1(\alpha)$ (veja (58)), e por (64),

$$\bar{L}_1(0) = 0$$

Vamos definir a fronteira de X como:

$$66 \quad \bar{X} = \{ \alpha \in \mathbb{R}^q \mid |\alpha| = k \} \quad , \quad \text{compacto}$$

Para obter o valor de r_0 , tomemos

$$67 \quad \bar{\theta}(\tilde{\alpha}) = \min_{\alpha \in \bar{X}} \bar{\theta}(\alpha) \quad ; \quad \text{a existência do} \\ \text{mínimo é garanti-} \\ \text{da por (66) e pela continuidade de } \bar{\theta}$$

$$68 \quad \varphi(\tilde{\alpha}) - 1 = \min_{\alpha \in \bar{X}} (\varphi(\alpha) - 1)$$

O mínimo existe, pois φ é contínua e \bar{X} é compacto. Como $\tilde{\alpha} \in \bar{X} \Rightarrow \tilde{\alpha} \notin F$, pode-se escrever

$$69 \quad \varphi(\tilde{\alpha}) - 1 > 0 \quad , \quad \text{por definição de } F \text{ (veja (61)).}$$

Definindo agora

$$70 \quad n_0 \triangleq \left[\frac{\bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(\tilde{\alpha})}{\varphi(\tilde{\alpha}) - 1} + 1 \right]^+ ,$$

podemos escrever

$$(\forall n \geq n_0)(\forall \alpha \in \bar{x})$$

$$71 \quad \bar{\theta}(\alpha) + n(\varphi(\alpha) - 1) \geq \bar{\theta}(\alpha) + n_0(\varphi(\alpha) - 1)$$

pois $n \geq n_0$, $\varphi(\alpha) - 1 > 0$

$$\geq \bar{\theta}(\alpha) + \left(\frac{\bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(\tilde{\alpha})}{\varphi(\tilde{\alpha}) - 1} + 1 \right) (\varphi(\alpha) - 1) ,$$

substituindo (70) em (71)

$$> \bar{\theta}(\alpha) + (\bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(\tilde{\alpha})) \frac{\varphi(\alpha) - 1}{\varphi(\tilde{\alpha}) - 1}$$

e, entrando com (68) , $(\forall \alpha \in \bar{x}) (\varphi(\alpha) - 1 \geq \varphi(\tilde{\alpha}) - 1)$,

$$> \bar{\theta}(\alpha) + \bar{\theta}(0) - \bar{\theta}(\tilde{\alpha})$$

entrando agora com (56), $(\forall \alpha \in \bar{x}) \quad \bar{\theta}(\alpha) - \bar{\theta}(\tilde{\alpha}) \geq 0$

$$> \bar{\theta}(0)$$

De (71), usando (65), deduz-se que

$$72 \quad (\forall n \geq n_0) (\forall \alpha \in \bar{X}) \quad p(\alpha, n) > p(0, n)$$

o que completa o passo (b) da demonstração. Vamos agora examinar os pontos α fora de \bar{X} .

73 Observe-se primeiramente que $(\forall n \geq n_0) \quad p(\alpha, n)$ é convexa, no \mathbb{R}^q , pois: $\bar{L}_1(\alpha) = \max \{0, \varphi(\alpha) - 1\}$ e $\varphi(\alpha)$ é convexa por (59):

$\bar{\theta}(\alpha)$ é convexa por (57)

$$p(\alpha, n) = \bar{\theta}(\alpha) + n \bar{L}_1(\alpha) \quad , \quad n \geq 0$$

Tomando agora um ponto qualquer $\alpha \notin \bar{X}$, a reta que une a origem de \mathbb{R}^q a α cruza \bar{X} em um ponto $\bar{\alpha}$ e

$$(\exists \lambda, \quad 0 \leq \lambda \leq 1)$$

$$\bar{\alpha} = \lambda \cdot 0 + (1-\lambda) \alpha$$

Pela convexidade de $p(\alpha, n)$, $n \geq n_0$

$$74 \quad p(\bar{\alpha}, n) \leq \lambda p(0, n) + (1-\lambda) p(\alpha, n)$$

Usando (72), $p(\bar{\alpha}, n) > p(0, n)$ e obtém-se de

(74)

$$p(0, n) < \lambda p(0, n) + (1-\lambda) p(\alpha, n) ,$$

$$(1-\lambda) p(0, n) < (1-\lambda) p(\alpha, n) \quad \text{e como} \quad 1-\lambda \geq 0 ,$$

75

$$p(\alpha, n) > p(0, n)$$

Com o resultado (75), podemos passar ao passo (d):

d) reescrevendo o resultado (75), obtemos

76

$$(\forall n \geq n_0)(\forall \alpha \in X) \quad p(\alpha, n) > p(0, n)$$

De (76), e do fato de que $0 \in X$ deduz-se que $\forall n \geq n_0$
o ponto $\bar{\alpha}_n$ tal que

$$p(\bar{\alpha}_n, n) = \inf_{\alpha \in R^n} p(\alpha, n) \quad \text{pertence a } X \text{ e}$$

como X é compacto,

$$p(\bar{\alpha}_n, n) = \min_{\alpha \in R^n} p(\alpha, n) , \quad \text{o que prova o}$$

teorema.

Seção IV - Conclusões

77 Mostramos portanto que o método de penalidades, usando a função penalidade $L : R^q \rightarrow R$ definido em (49), constitui um algoritmo convergente, desde que o problema ao qual é aplicado tenha uma região de pontos viáveis não vazia. De fato, se esta região não fôr vazia, vale o axioma A0 (12). Mostramos que vale o axioma A1 (13) pelo lema (47) e que vale o axioma A2 (14) pelo teorema (60). Sendo satisfeitos A0, A1, A2, o algoritmo de penalidades converge, pelo teorema (15).

78 Penalizando o vínculo $\varphi(\alpha) - 1 \leq 0$ com a função

$$L_3(\alpha) = ([\varphi(\alpha) - 1]^+)^2, \text{ prova-se facilmente}$$

mente que valem também os axiomas A1 e A2.

79 Na definição da função penalidade em (49), a função

$$L_2 : R^{11} \rightarrow R \text{ que penaliza as restrições } h(\alpha) = 0$$

definida em (42) aparece com um expoente $k_2 \in \{1, 2\}$. A utilização do expoente $k_2 = 2$ bem como o uso da função L_3 definida em (78) para penalizar os vínculos de desigualdade, pode ser mais conveniente, devido à "suavização" da função $p(\alpha, n)$

na fronteira do conjunto de pontos viáveis.

80 Pode-se propor um outro processo para a busca de pontos de ótimo de P4: penalizam-se somente os vínculos de desigualdade $\varphi(\alpha) - 1 \leq 0$, realizando a otimização sobre pontos pertencentes à variedade linear $\hat{X}_1 + F_1 \alpha = 0$. A sub-otimização sobre variedades lineares está estudada na ref. [10], pags. 180, 186. Não desenvolveremos este tipo de algoritmos.

81 Como é evidente, a aplicação do método de penalidades não transforma o problema de otimização em um problema simples: tem-se ainda que minimizar a função $p(\alpha, n^k)$, a cada passo do algoritmo. Isto em geral não é fácil, pois esta função inclui $\varphi(\alpha)$, uma função não diferenciável. Métodos como o de variação cíclica de coordenadas, apresentado em [10], pag. 111, podem ser úteis, mas a convergência será lenta e o processo trabalhoso. Os resultados obtidos no capítulo anterior sugerem a construção de um método de direções viáveis para resolver o subproblema de minimização de $p(\alpha, n^k)$. Também este ponto não será desenvolvido nesta tese.

C A P I T U L O 6C O N C L U S Õ E S

Graças à adequação dos métodos de programação matemática ao uso de computadores, muito trabalho tem-se desenvolvido neste campo, nos últimos anos.

Mostramos neste trabalho que uma classe de problemas de controle pode ser reformulado em termos de problemas de programação, de dimensão finita, desde que algumas simplificações sejam feitas sobre as entradas admissíveis aos sistemas considerados. Estas simplificações não consistem em uma discretização no tempo, mas na expansão dos controles em soma finita de funções elementares dadas.

Para os tipos de problemas de controle tratados aqui, ou seja, problemas com tempo mínimo e energia mínima, os problemas de programação obtidos são relativamente simples, quando comparados em complexidade aos problemas originais de controle, e apresentam algumas características especialmente interessantes:

- um aumento na complexidade dos sistemas tratados

não acarreta um aumento essencial na complexidade do problema de programação obtido. As dificuldades maiores concentram-se na solução dos próprios sistemas, o que é inevitável.

- A complexidade do problema de programação matemática cresce principalmente com o número de funções elementares utilizadas para aproximar os controles. Em contrapartida, um aumento criterioso do comprimento da expansão usada para aproximar os controles, leva a aproximações cada vez melhores da função controle que resolve o problema de controle ótimo.
- O tipo de funções elementares usadas em problemas de energia mínima também não têm em geral grande influência sobre a complexidade do tratamento. Isto se deve a ser necessária em geral uma integração numérica destas funções, para construir a matriz F (veja 1.IV), o que não depende muito fortemente do tipo de funções v^j .

R E F E R Ê N C I A S

- 1 . JACOB, J-P. and POLAK, E., On a Class of Pursuit-Evasion Problems, IEEE Trans. A.C., Vol. AC.12, Dez. 1967, pag. 752
- 2 . ATHANS, M. and FALB, P., Optimal Control, McGraw-Hill 1966
- 3 . ZADEH, L.A., and DESOER, C.A., Linear Systems Theory: The State Space Approach, McGraw-Hill, 1963
- 4 . PSHENICHNYI, B.N., Linear Differential Games, Automat ion and Remote Control, Jan.1968, pag.55
- 5 . BERGE, C., Espaces Topologiques, Dunod, Paris, 1966
- 6 . FLEMING, W.H., Functions of Several Variables, Addison-Wesley, 1965
- 7 . MANGASSARIAN, O.L., Nonlinear Programming, McGraw-Hill 1969
- 8 . Curriculum and Methods in Control and Systems Engineer- ing, livro preparado pelo grupo Sistemas da Divisão de Pesquisas, I.B.M., San Jose, California
- 9 . KUNZI , KRELLE , OETTLI , Nonlinear Programming, Brais- dell Publishing Company, 1966

- 10 . ZANGWILL, W.I., Nonlinear Programming: A Unified Approach, Prentice-Hall, 1967
- 11 . ZOUTENDIJK, G., Methods of Feasible Directions: A Study in Linear and Nonlinear Programming, Elsevier, Amsterdam, 1960
- 12 . BARTLE, R.G., The Elements of Real Analysis, Wiley International Edition, 1964
- 13 . KAPLAN, W., Advanced Calculus, Addison-Wesley, 1962