A TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV - UMA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

DEMÉTRIO ALONSO RIBEIRO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTA DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS PÓS-GRADUADOS DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por:

dezembro de 1967

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Carlos J. Távora pela dedicação que demonstrou durante a elaboração do presente trabalho.

Aos amigos, colegas e funcionários da COPPE pelo apoio que sempre manifestaram.

A Elisa pela datilografia.

SUMÁRIO

No capítulo I estão expostos os conceitos fundamentais relativos ao método direto de Liapunov, bem como estão enunciados os principais teoremas referentes ao mesmo.

No capítulo II é feita a correspondência "conjunto de matrizes 2 x 2 reais simétricas $\longrightarrow$ espaço euclidiano tridimensional" que permitirá, no capítulo III, a definição do "cone das formas quadráticas de Liapunov associadas a um sistema linear", com o qual enunciaremos os teoremas do capítulo I em uma linguagem geométrica.

O capítulo IV contém algumas aplicações desta linguagem à exposição e solução de algumas questões particulares.

Os apêndices ao corpo do trabalho são dois:

Apêndice I - em que estão reproduzidos e discutidos os programas do computador IBM 1130 usados para o estudo da "flexibilidade na escolha de uma forma quadrática de Liapunov."

Apêndice II - em que é demonstrado um teorema de geometria, correspondente a um dos teoremas de Liapunov.

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1.1 - NOTAÇÃO:

No que segue, os vetores serão representados por letras latinas minúsculas sublinhadas, as matrizes quadradas por letras latinas maiúsculas sublinhadas, os conjuntos de vetores ou de matrizes por letras latinas maiúsculas manuscritas, os operadores por letras latinas maiúsculas manuscritas sublinhadas e os subconjuntos do espaço euclidiano tridimensional por letras gregas maiúsculas.

Nas equações da geometria analítica, procuraremos, sempre que possível, seguir a notação de Bell*.

1.2 - ESTABILIDADE DA SOLUÇÃO TRIVIAL DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM AUTÔNOMO:

O sistema a ser estudado é do tipo:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}\,(\underline{x})$$

$$\underline{x}\,(t_o) = \underline{x}_o \qquad (1.1)$$

$$\underline{f}\,(\underline{0}) = \underline{0}$$

onde $\underline{f}(\underline{x})$ satisfaz as condições de Cauchy-Lipschitz**, garantindo a existência e a unicidade das soluções de (1.1).

A cada $\underline{x}_o$ corresponde um ponto no espaço euclidiano n-dimensional E_n (espaço de estado) e a cada solução $\underline{x}(t;\ \underline{x}_o,\ t_o)$ do sistema (1.1)

* [6]

**[9], pg. 68

corresponde uma curva parametrizada cujos pontos têm coordenadas

$$x_k = x_k(t, \underline{x}_o, t_o) \qquad k=1,2...n$$

chamada trajetória de (1.1).

Quando as coordenadas $x_k(t, \underline{x}_o, t_o)$ forem definidas apenas para $t \geq t_o$ a curva correspondente será chamada semi-trajetória.

Quando x_k= cte., k=1, 2 ... n, para qualquer t, a curva fica reduzida a um ponto e recebe o nome de <u>singularidade</u> ou <u>ponto de equilíbrio</u>.

A solução trivial de (1.1) é dita <u>estável no sentido de Liapunov</u> se para todo t_o e todo $\varepsilon > 0$ existir um $\delta(t_o,\varepsilon)$ tal que:

$$||\underline{x}_o|| < \delta \rightarrow ||\underline{x}(t; \underline{x}_o; t_o)|| < \varepsilon \quad , \quad t \geq t_o$$

Se, além disto

$$\lim_{t \to +\infty} \underline{x}(t; \underline{x}_o, t_o) = \underline{0} \qquad \underline{x}_o \varepsilon \Omega \subset E_n \qquad t \geq t_o$$

a solução é dita assintòticamente estável e Ω é chamado <u>domínio de atração</u> de $\underline{x} = \underline{0}$.

A solução $\underline{x} = \underline{0}$, de (1.1), é dita <u>completamente instável</u> se existir um $\varepsilon>0$ com a seguinte propriedade: após um intervalo de tempo finito, tôda trajetória $\underline{x}(t; \underline{x}_o, t_o)$ atinge a hiperesfera $||\underline{x}|| = \varepsilon$ para $0<||\underline{x}_o||< \varepsilon$ $(\underline{x}(t_1; \underline{x}_o, t_o) = \varepsilon$ para algum $t_1 \geq t_o)$ *

1.3 - <u>FUNÇÕES DEFINIDAS</u>:

Diremos que uma função $V(\underline{x}) \varepsilon C_1$ é <u>definida positiva</u>(<u>negativa</u>) quando:

* [2] , pg. 9

i) $V(\underline{x}) > 0 \ (< 0) \quad \underline{x} \neq \underline{0}$

ii) $V(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} = \underline{0}$

De uma forma análoga, quando

i) $V(\underline{x}) \geq 0 \ (\leq 0) \quad \underline{x} \neq \underline{0}$

ii) $V(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} = \underline{0}$

dizemos que $V(\underline{x})$ é <u>semi-definida positiva (negativa)</u>

1.4 - MÉTODO DIRETO DE LIAPUNOV

1.4-1) <u>Teorema</u> (Liapunov)*

Dado o sistema (1.1), se existir uma função $V(\underline{x})$ definida positiva (negativa) tal que

i) $\dfrac{dV}{dt} = \langle \text{grad } V, \underline{f}(\underline{x}) \rangle$ seja definida negativa (positiva)

ii) $\lim\limits_{||\underline{x}|| \to \infty} V(\underline{x}) = +\infty \ (-\infty)$

então a solução trivial de (1.1) é assintòticamente estável e seu domínio de atração é todo o espaço E_n

1.4-2) Teorema (Liapunov)**

Dado o sistema linear

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} \qquad (1.2)$$

*[1] pg. 261, 2 pg 15
**[1]

se (1.2) fôr assintòticamente estável, então a cada forma quadrática

$$\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} g_{ij}x_i x_j = \langle \underline{x}, \underline{G}\,\underline{x} \rangle ,$$

definida positiva (negativa) corresponde outra forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{K}\,\underline{x} \rangle$ definida positiva (negativa), tal que

$$\underline{A}'\underline{K} + \underline{K}\,\underline{A} = -\underline{G} \qquad (1.3)$$

1.4-3) Teorema (Liapunov)*

Dado o sistema (1.1), se existir uma função $V(\underline{x})$ definida positiva (negativa) tal que

i) $\frac{dV}{dt} = \langle \text{grad } V, \underline{f}(\underline{x}) \rangle$

ii) $\lim_{\|\underline{x}\| \to \infty} V(\underline{x}) = +\infty (-\infty)$

então $\underline{x} = \underline{0}$ é completamente instável.

1.4-4) Teorema (Liapunov)**

Dado o sistema (1.2), se o mesmo fôr completamente instável (ou, o que é equivalente, se os autovetores de $\underline{A}$ tiverem parte real positiva), a cada forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{G}\,\underline{x} \rangle$ definida positiva (negativa) corresponde uma outra forma quadrática $\langle \underline{x}, \underline{K}\,\underline{x} \rangle$ definida negativa (positiva), tal que

$$\underline{A}'\underline{K} + \underline{K}\,\underline{A} = -\underline{G}$$

*[1] pg. 262, 2 pg. 19

**[1]

CAPÍTULO II

O CONE DAS MATRIZES DEFINIDAS

2.1) CONVENÇÕES:

Designaremos por

S_2 o conjunto das matrizes 2 x 2 simétricas*

$S_2^+(S_2^-)$ o conjunto das matrizes 2 x 2 simétricas definidas positivas (negativas)

V_3 o conjunto das matrizes 3 x 1 (matrizes coluna)

D_2 o conjunto das matrizes 2 x 2 diagonais

2.2) PROPOSIÇÃO:

S_2 é isomorfo a E_3.

Com efeito, a aplicação bijetora τ que associa a cada

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \varepsilon\ S_2$$

um

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{22} \\ g_{12} \end{bmatrix} \varepsilon\ V_3$$

é um isomorfismo.

O vetor $\underline{g}$ define, no espaço E_3, um ponto de coordenadas g_{11}, g_{22}, g_{12}.

Por conseguinte, a cada matriz $\underline{G}$ pode ser associado um ponto

* As matrizes são definidas no Corpo real.

g_{11}, g_{22}, g_{12} e a cada matriz $\underline{K}$, definida por (1.3) pode ser associado outro ponto k_{11}, k_{22}, k_{12}.

Para maior facilidade de manipulação designaremos as coordenadas g_{11}, g_{22}, g_{12} (k_{11}, k_{22}, k_{12}) por x, y, z. Desta forma, também manteremos a notação de [6] .

2.3) DEFINIÇÃO DO CONE DAS MATRIZES DEFINIDAS:

2.3-1) Teorema

O conjunto S_2^+ define no E_3 , via τ, o interior de uma das fôlhas de um cone sólido $\equiv$, a qual simbolizaremos por $\equiv^+$. Desta forma, as matrizes $\underline{G} > 0$ determinam o interior $\overset{o}{\equiv}{}^+$, de $\equiv^+$. Anàlogamente, o conjunto das matrizes $\underline{G} < 0$ determina o interior $\overset{o}{\equiv}{}^-$ da outra fôlha.

Com efeito, para que $\underline{G}$ seja semi-definida positiva, é necessário e suficiente que

$$g_{11} \geq 0 (g_{22} \geq 0) \qquad (2.1a),\ (2.1b)^*$$

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \geq 0 \qquad (2.2)$$

ou no E_3

$$x \geq 0 \ (z \geq 0) \qquad (2.3a),\ (2.3b)$$

$$xy - z^2 \geq 0$$

Para que $\underline{G}$ seja definida positiva, é necessário e suficiente que

$$x > 0 \ (y > 0) \qquad (2.5a),\ (2.5b)^*$$

* [5] vol I,pg. 66

$$xy - z^2 > 0 \qquad (2.6)$$

Quando $\underline{G}$ não fôr estritamente definida, pelo menos uma das relações (2.3a), (2.3b) ou (2.4) deverá apresentar um sinal de igualdade.

A relação (2.4) define uma quádrica $\partial \equiv$, bem como seus pontos interiores, e as relações (2.5a) e (2.5b) definem um quadrante no E_3 .

Podemos classificar a quádrica*, observando que

$$\phi_1(x, y, z) \equiv xy - z^2 \equiv \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2 - z^2 = 0$$

ou seja, que $\partial \equiv$ é um cone**.

As retas principais de $\partial \equiv$ são definidas pelos autovetores da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad ***$$

que são

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As equações das retas são, portanto

$$\gamma_1 : x = 0 \quad y = 0$$
$$\gamma_2 : x = y \quad z = 0$$
$$\gamma_3 : x = -y \quad z = 0$$

* [7] , pg. 566
**[7]
*** [6]pg. 212

CAPÍTULO III

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV

3.1) RESTRIÇÕES E COLOCAÇÃO DO PROBLEMA:

Nosso estudo ficará restrito aos sistemas de segunda ordem associados à equação diferencial escalar

$$\ddot{\zeta} + \alpha\dot{\zeta} + \beta\zeta = 0 \qquad (3.1)$$

ou seja, a sistemas do tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (3.2)$$

$$\zeta = x_1$$

Pelas seguintes razões:

a) Sòmente os sistemas de segunda ordem estão associados, via $\underline{\tau}$, ao espaço euclidiano tridimensional (um sistema de terceira ordem estaria associado ao E_6).

b) Para as finalidades a que se propõe o presente estudo, a restrição adicional (3.2) não é crítica, levando, além disto, a expressões mais fàcilmente manipuláveis.

Vimos no capítulo II que a imagem do conjunto $S_2^+ U S_2^-$, via a transformação $\underline{\tau}$, é o interior $\overset{o}{\Xi}$ de um cone $\Xi = \Xi^- U \Xi^+$. Por outro lado, sabemos que a relação (1.3), dentro de certas condições*, associa a cada matriz $\underline{G}$ definida positiva (negativa) uma e uma única matriz $\underline{K}$.

* [2] pg. 26
[10], pg. 81

$\underline{\kappa}$ será definida positiva (negativa) se os autovalores de $\underline{A}$ tiverem parte real negativa e será definida negativa (positiva) se os autovalores de $\underline{A}$ tiverem parte real positiva.

Note-se que o espaço E_2, em que vamos representar os sistemas (3.2), não é da mesma natureza que o espaço que utilizaremos para a representação das matrizes 2 x 2 simétricas. No entanto a todo ponto do espaço E_2 definido por um vetor $\underline{w} \in V_2$ podemos associar um ponto do E_3 determinado pela matriz $\underline{w} \times \underline{w}$.

Feitas as restrições, a transformação (1.3) assume a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g_{11} & -g_{12} \\ -g_{12} & -g_{22} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

ou

$$\begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{22} \\ g_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\beta \\ 0 & 2\alpha & -2 \\ -1 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

cuja inversa é

$$\begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{22} \\ k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{2\alpha} & \frac{\beta}{2} & -1 \\ \frac{1}{2\alpha\beta} & \frac{1}{2\alpha} & 0 \\ \frac{1}{2\beta} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{22} \\ g_{12} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\underline{k} = \underline{M}_{\underline{A}} \cdot \underline{g}$$

Examinemos as condições nas quais um autovetor de $\underline{M}_{\underline{A}}$, interior a Ξ^+, é mapeado em outro vetor interior a Ξ^+.

Para que isto aconteça é necessário que, além de o autovetor estar contido em Ξ^+, o autovalor associado ao mesmo seja positivo. (Se o autovalor associado fôr negativo, o autovetor será mapeado na outra fôlha).

i) <u>Estudo dos sinais dos autovalores reais de $\underline{M}_{\underline{A}}$.</u> $(\alpha^2 \geq 4\beta)$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{4\beta}$$

$$\lambda_3 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{4\beta}$$

a) Se $\alpha > 0$ $\beta > 0$ (sistema assintòticamente estável)

$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 > 0$ $\lambda_3 > 0$

b) Se $\alpha < 0$ $\beta > 0$ (sistema completamente instável)

$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 < 0$

c) Se $\alpha > 0$ $\beta < 0$

$\lambda_1 > 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 > 0$

d) Se $\alpha < 0$ $\beta < 0$

$\lambda_1 < 0$ $\lambda_2 < 0$ $\lambda_3 > 0$

ii) Estudo da localização dos autovetores de $\underline{M}_{\underline{A}}$

Os autovetores $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, $\underline{x}_3$ de $\underline{M}_{\underline{A}}$, associados respectivamente a $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ são

$$\underline{x}_1 \doteq \begin{bmatrix} 2\beta \\ 2 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) - 2\beta \\ 2 \\ \alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} \alpha(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) - 2\beta \\ 2 \\ \alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta} \end{bmatrix}$$

Em relação ao cone $\partial\Xi$:

a) $\underline{x}_1 \in \dot{\Xi}$ se $\alpha^2 < 4\beta$ (λ_2 λ_3 complexos conjugados)

b) Sempre que $\alpha^2 \geq 4\beta$ (λ_2 λ_3 reais)

$\underline{x}_2$ $\underline{x}_3 \in \partial\Xi$

pois

$$x_{k1}\, x_{k2} - x_{k3}^2 \equiv 0 \qquad (k = 1, 2)$$

c) Quando $\alpha^2 = 4\beta$ os vetores $\underline{x}_1$ $\underline{x}_2$ $\underline{x}_3$ são confundidos e pertencem à fronteira de Ξ .

3.2) PROPOSIÇÕES RELACIONADAS COM A TRANSFORMAÇÃO DE LIAPUNOV:

3.2-1) Teorema

O conjunto de matrizes $\underline{K} = \underline{L}_{\underline{A}}(\underline{G})$, onde $\underline{A}$ é fixa e $\underline{G}$ varia em $S_2^+ \cup S_2^-$, define o interior $\overset{o}{T}$ de um cone ∂T .

Com efeito, de (2.7) e (3.6) resulta

$$\phi_2(x, y, z) \equiv \phi_1(2\beta z, 2\alpha y - 2z, \beta y + \alpha z - x) \equiv$$

$$\equiv -(x^2 + \beta^2 y^2 + (\alpha^2 + 4\beta)z - 2\beta xy - 2\alpha\beta yz - 2\alpha xz) = 0 \qquad (3.2\text{-}1)$$

Como

$$-\phi_2(x,y,z) \equiv (x - \beta y - \alpha z)^2 + 4\beta(z - \frac{\alpha}{2} y)^2 - \alpha^2\beta^2 y^2 \qquad (3.2\text{-}2)$$

∂T é um cone*.

Apesar de não conhecermos as expressões algébricas dos eixos do cone ∂T, podemos estabelecer as seguintes proposições:

3.2-2) Proposição

O cone ∂T, definido por (3.2-1), é tangente ao plano z=0, quaisquer que sejam α, β finitos e não nulos.

Com efeito, fazendo $z = 0$, em (3.2-1), obtemos a equação

$$x = \beta y$$

da geratriz na qual ∂T é tangente a $z = 0$.

Quando $\beta > 0$ esta geratriz é interior a $\equiv$, e quando $\beta<0$, não.

3.2-3) Teorema

Quando $\alpha^2 \geqslant 4\beta$ (λ_2, λ_3 reais) os cones ∂T e $\partial\equiv$ são tangentes, e as geratrizes comuns são os autovetores de $\underline{M}_{\underline{A}}$.

Quando $\alpha^2<4\beta$, os cones ∂T e $\partial\equiv$ não têm geratriz comum.

A demonstração está no apêndice II.

* [7] pg. 566

3.2-4) <u>Corolário</u>

Quando $\beta < 0$, o interior de $\equiv$ e o interior de T não tem nenhum ponto comum.

No caso de β ser positivo, temos três possibilidades:

a) $\alpha > 0$ e neste caso, a fôlha $\equiv^+$ é mapeada num subconjunto de $\equiv^+$

b) $\alpha < 0$ e neste caso, a fôlha $\equiv^+$ é mapeada num subconjunto de $\equiv^-$

c) $\alpha = 0$. Êste caso será examinado no cap. IV

CAPÍTULO IV

APLICAÇÕES

4.1) EXISTÊNCIA DA TRANSFORMADA DE LIAPUNOV:

A equação

$$\underline{A}'\underline{K} + \underline{K}\,\underline{A} = -\underline{G}$$

tem uma e uma única solução, se a soma de dois autovalores distintos ou não de $\underline{A}$ fôr diferente de zero.

Qual o significado geométrico desta condição ? Ou melhor, qual o significado geométrico do não cumprimento desta condição ?

No caso em estudo, os autovalores de $\underline{A}$ são:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right)$$

Vemos que $\lambda_i + \lambda_j = 0 \quad i, j = 1, 2$

sòmente quando $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

Mostraremos que, neste caso, o cone ∂T degenera. Com efeito

a) Quando $\alpha = 0$ a equação (3.2-1) assume a forma

$$(x - \beta y)^2 + 4\beta z^2 = 0$$

Se $\beta > 0$ (3.2-2) representa a reta

$$x = \beta y \qquad z = 0$$

Se $\beta < 0$ (3.2-2 representa os dois planos)

$$x - \beta y + 2\sqrt{-\beta}\ z' = 0$$

e

$$x - \beta y - 2\sqrt{-\beta}\ z = 0$$

b) Quando $\beta = 0$ a equação (3.2-1) assume a forma

$$x - \alpha z = 0$$

O cone também degenera se

a) $\alpha = \infty$

Com efeito, dividindo ambos os membros de (3.2-1) por α^2 e fazendo $\alpha \to \infty$, temos

$$z = 0$$

b) $\beta = \infty$

Dividindo (3.2-1) por β^2 e fazendo $\beta \to \infty$ temos

$y = 0$

Vemos, portanto que nos casos acima o interior do cone $\equiv$ é mapeado no conjunto vazio.

4.2) <u>ESTUDO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV DO TIPO "FORMA QUADRÁTICA" ASSOCIADAS A UM SISTEMA REGULADOR LINEAR:</u>

O sistema a ser estudado é o apresentado na figura 4.1

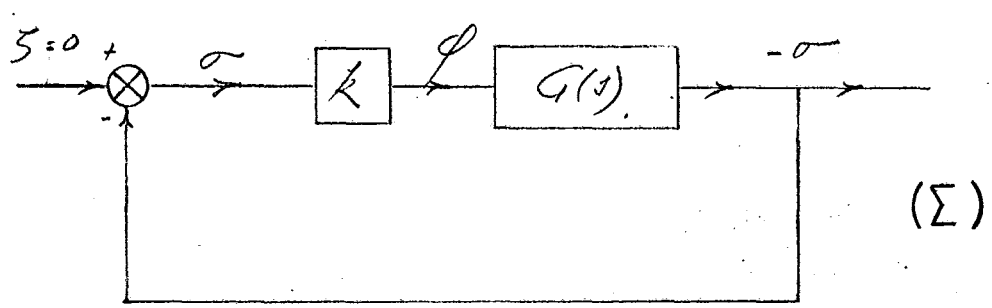

Fig. 4.1

onde

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + \alpha S + \beta}$$

ε admite uma representação no espaço de estado

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$$

onde

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Os parâmetros α e $\beta + k$ definem uma família de cones $\partial T\ (\alpha,\ \beta + k)$

Se fixarmos $\alpha = \alpha_o$, teremos uma família de cones $\partial T(\alpha_o, \beta + k)$

Anàlogamente, se fixarmos $\beta + k = \beta_o + k_o$ teremos uma família de cones $\partial T(\alpha,\ \beta_o + k_o)$.

Sabemos, através dos teoremas de Liapunov, que uma condição suficiente para que Σ seja assintòticamente estável é que exista uma função de Liapunov representável por uma forma quadrática $< \underline{x}, \underline{Kx} >> 0$, associada a Σ.

Surgem então as seguintes questões:

a) Uma vez fixados α e β , dentro de que limites pode variar k, de maneira a Σ permanecer sempre associado à mesma forma quadrática de Liapunov ?

b) Uma vez fixados β e k, dentro de que limites pode variar α, de maneira a Σ permanecer sempre associado à mesma forma quadrática de Liapunov ?

Qual a interpretação geométrica destas limitações ?

4.2-1) Resposta à Questão a)

Cada par de valores α e $\beta+k$ define um conjunto de funções de Liapunov $< \underline{x}, \underline{Kx} >$ associadas a Σ, cada qual, por sua vez determinando um cone $\partial T(\alpha, \beta + k)$ no E_3.

Se fixarmos α e β e variarmos k, à variação de k corresponderá uma deformação contínua de $\partial T(\alpha, \beta + k)$.

Mais especificamente, fazendo $k = k_o$, existe um $k_1(k_2)$ tal que os cones $\partial T(\alpha, \beta + k_1)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k_o)$ ($\partial T(\alpha,\beta + k_2)$ e $\partial T(\alpha,\beta + k_o)$) são tangentes.

Neste caso, para um k'_1 tal que $k_1 < k'_1 \leqslant k_o$ (k'_2 tal que $k_o \leqslant k'_2 < k_2$) o sistema Σ, para $k'_1 \leqslant k \leqslant k_o (k_o \leqslant k \leqslant k'_2)$ está associado a uma função de Liapunov, e esta função é determinada por um ponto qualquer da interseção dos interiores de $\partial T(\alpha, \beta + k'_1)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k_o)$ ($\partial T(\alpha, \beta + k_o)$ e $\partial T(\alpha, \beta + k'_2)$)

Na figura 4.3 temos uma idéia qualitativa do que acontece.

4.2-2) Solução da questão b)

Para um dado valor de ($\beta+ k$) todos os cones $\partial T(\alpha, \beta + k)$ são tangentes entre si na reta $x = (\beta + k)y$, $z = 0$ (excetuando-se, naturalmente os casos de degenerescência), conforme ilustrado na fig. 4.4.

Quaisquer que sejam α_1 e α_2, valores finitos e não nulos de α, existe um ponto comum aos interiores de todos os cones $\partial T(\alpha, \beta + k)$ $(\alpha_1 < \alpha < \alpha_2)$ e portanto, para os mesmos valores de α, uma função de Liapunov,

dada pelo ponto, associada a Σ .

Na figura 4.4 representamos isto qualitativamente.

Para formar uma idéia quantitativa precisa, mostramos as figuras 4.5 a 4.9 os cones ∂T e $\partial \Xi$ seccionados pelo plano $\eta = 1$ e projetados sôbre o plano $\eta = 0$ para alguns valores de α e $\beta + k$.

Introduzimos, com a finalidade de obter uma melhor projeção das seções dos cones, uma rotação do sistema de coordenadas, dada por:

$$\xi = \cos\left(tg^{-1}\left(\frac{1}{\beta+k}\right)\right)x + \operatorname{sen}\left(tg^{-1}\left(\frac{1}{\beta+k}\right)\right)y$$

$$\eta = -\operatorname{sen}\left(tg^{-1}\left(\frac{1}{\beta+k}\right)\right)x + \cos\left(tg^{-1}\left(\frac{1}{\beta+k}\right)\right)y$$

$$\zeta = z$$

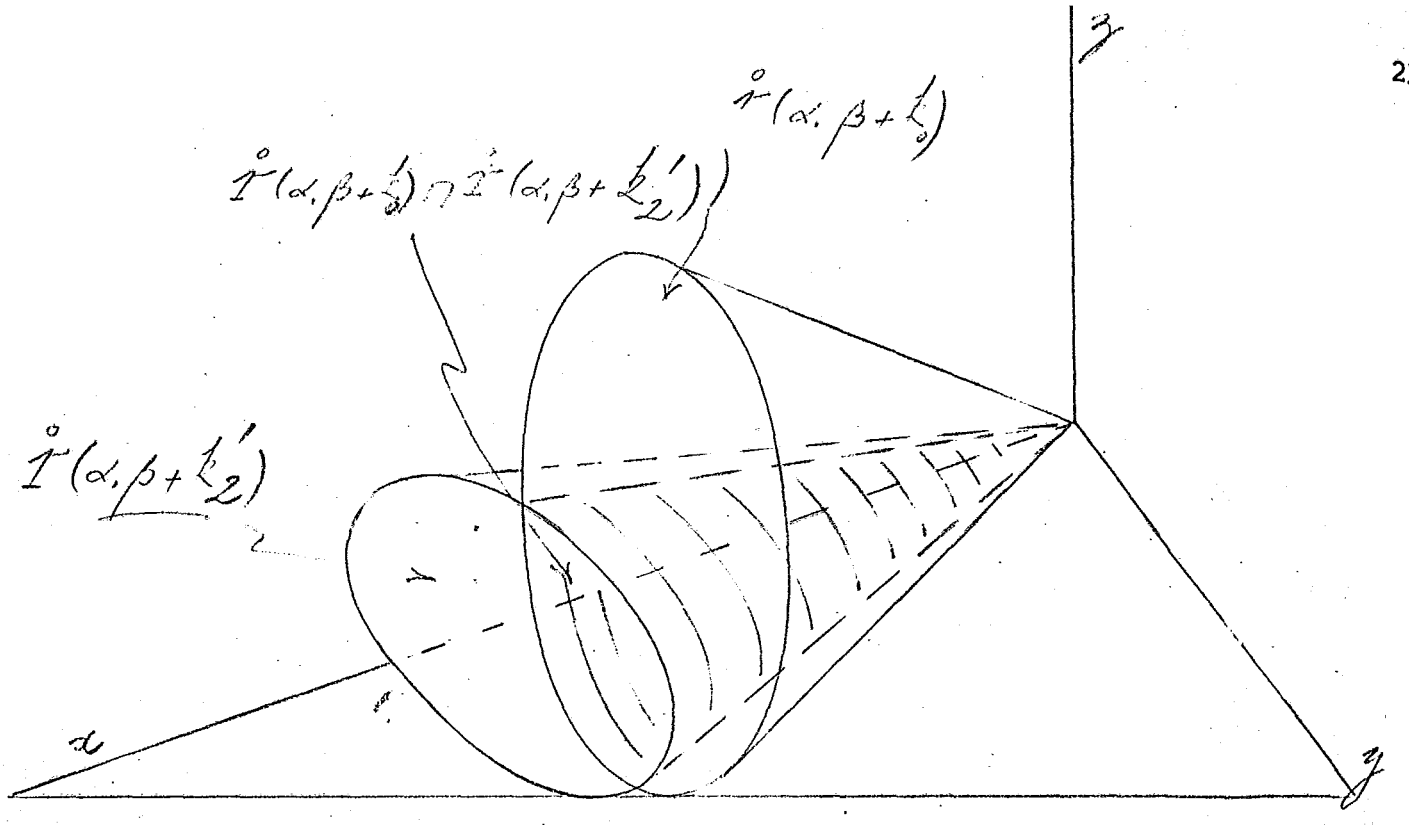
z
$\mathring{I}(\alpha, \beta + k_0)$
$\mathring{I}(\alpha, \beta + k_0) \cap \mathring{I}(\alpha, \beta + k_2')$
$\mathring{I}(\alpha, \beta + k_2')$
x
y

Fig. 4.3

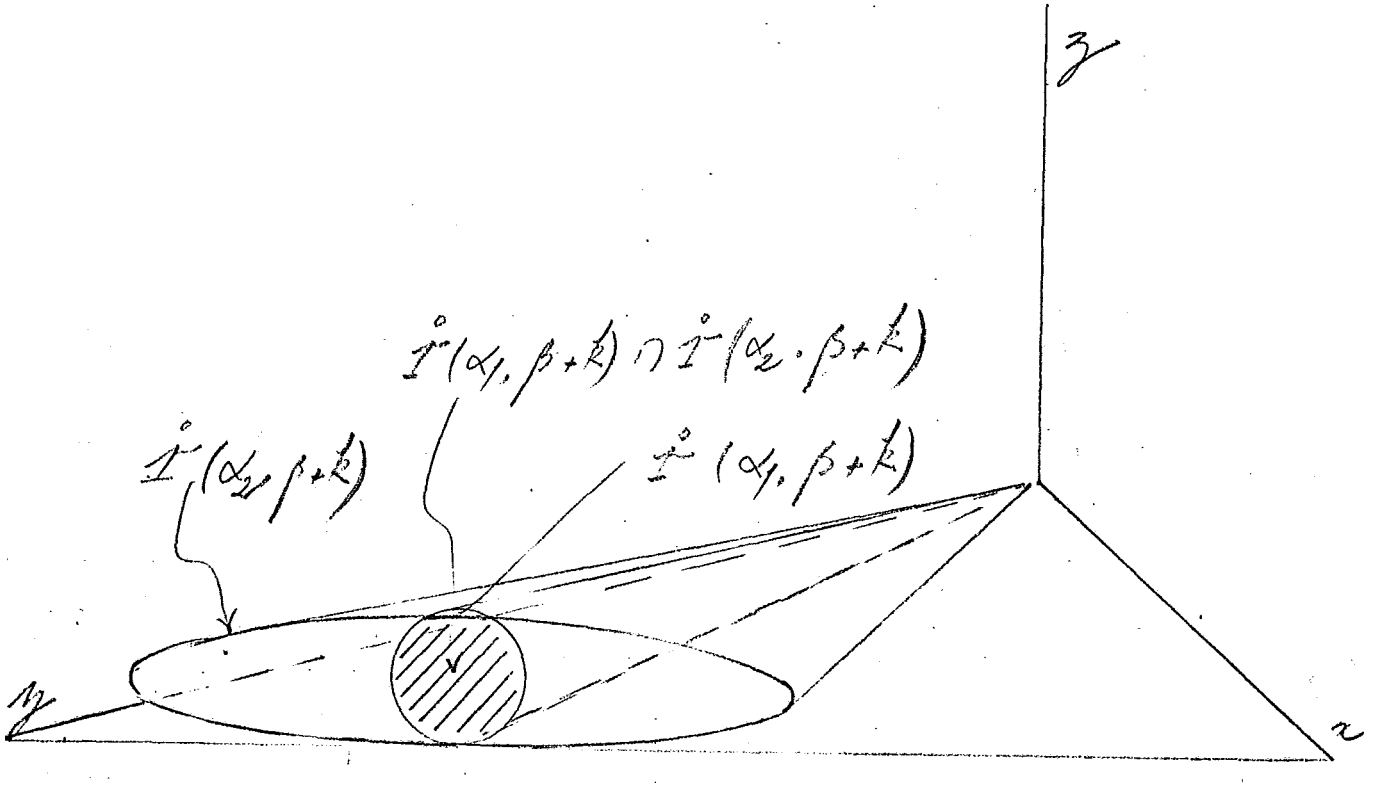
z
$\mathring{I}(\alpha_1, \beta + k) \cap \mathring{I}(\alpha_2, \beta + k)$
$\mathring{I}(\alpha_2, \beta + k)$
$\mathring{I}(\alpha_1, \beta + k)$
y
x

Fig. 4.4

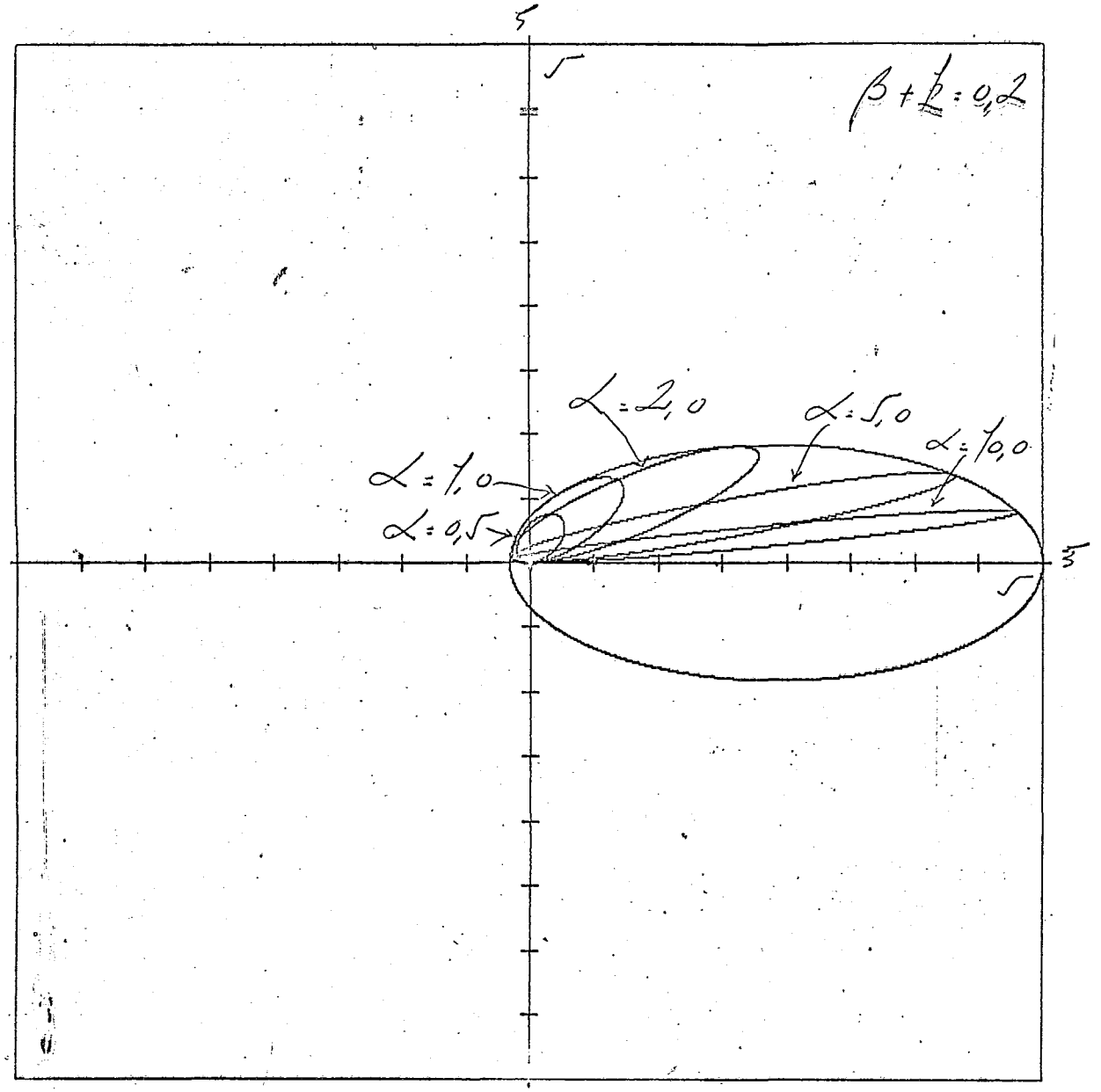

Fig. 4.5

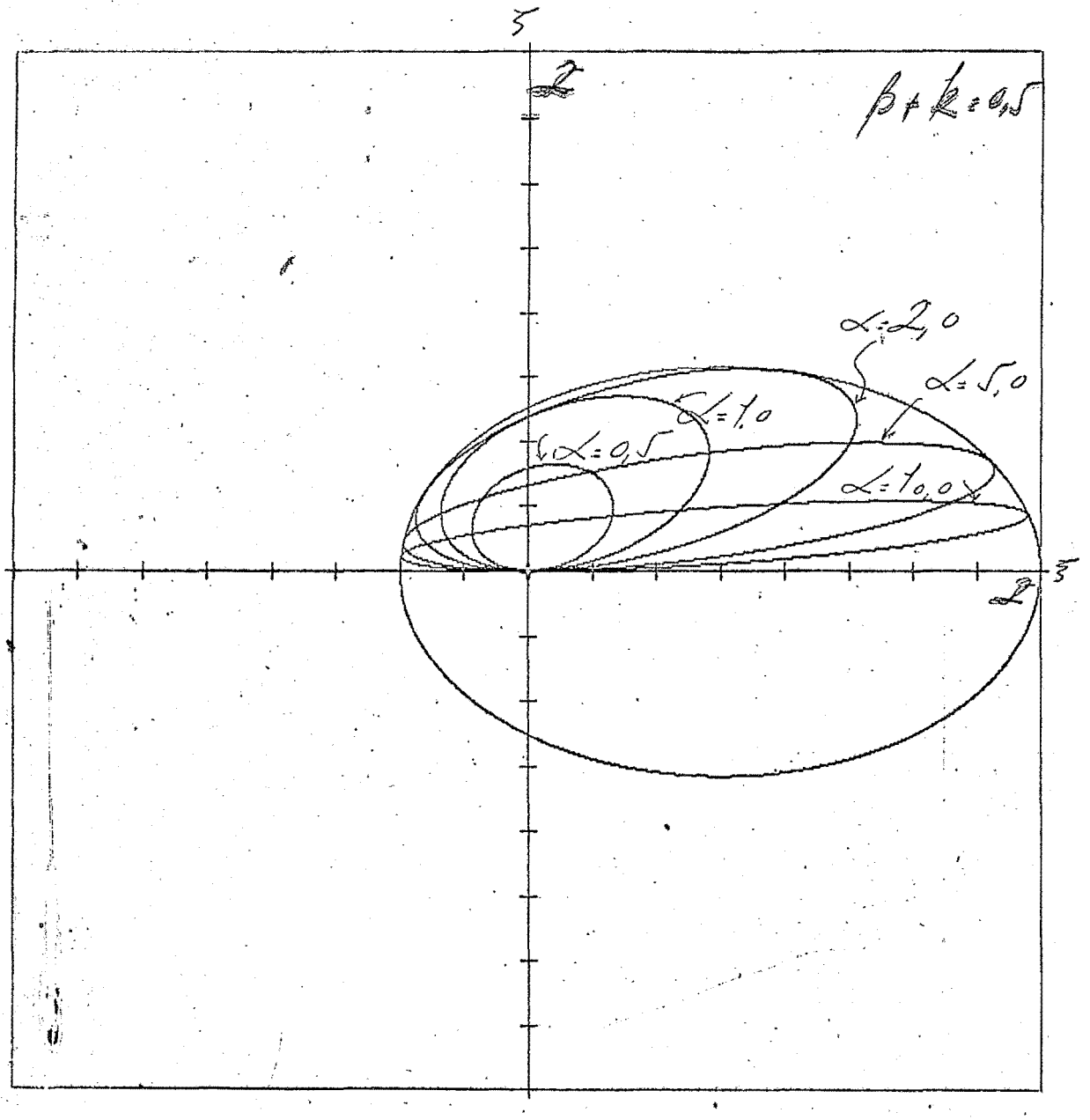

Fig. 4.6

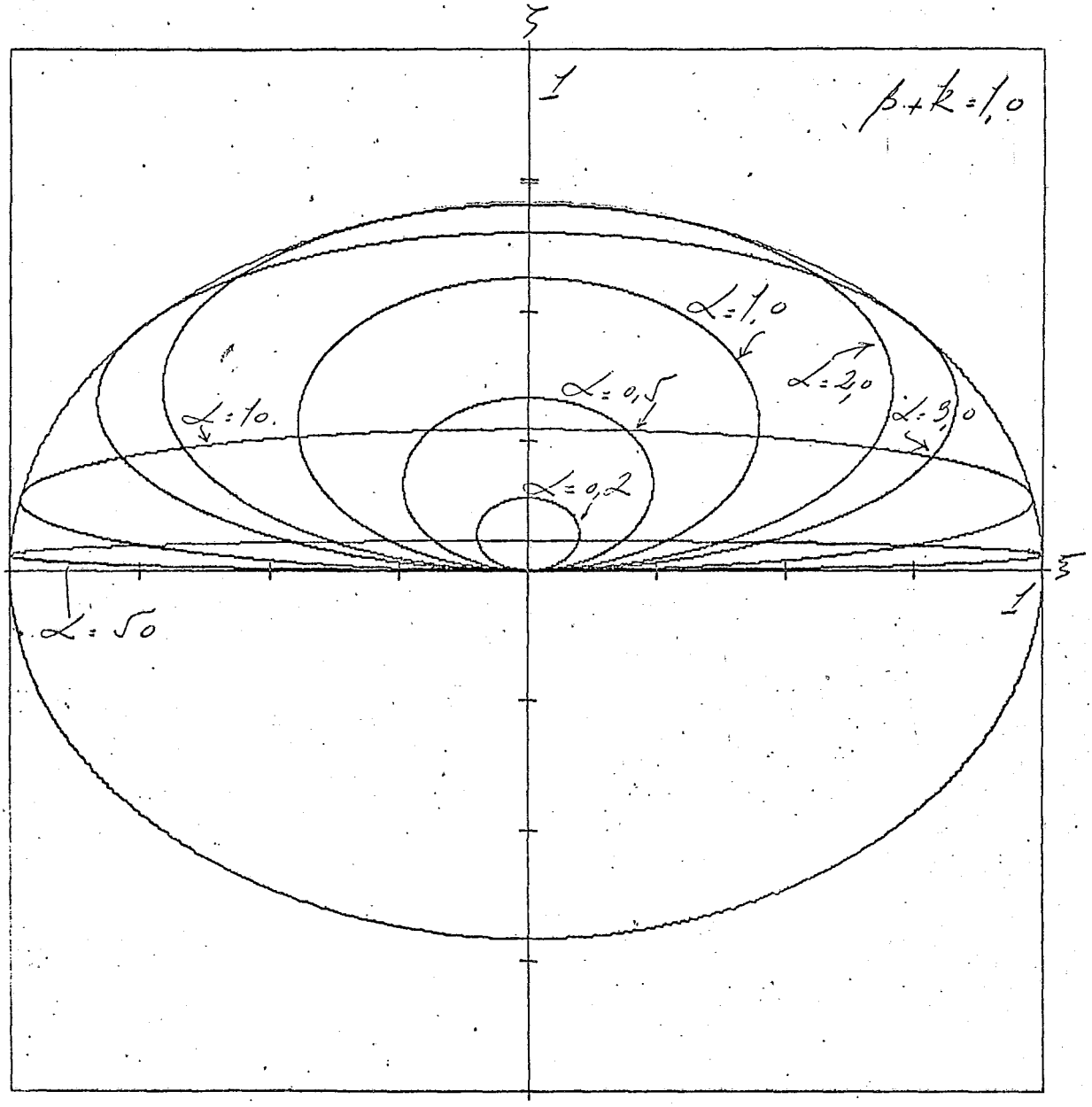

Fig. 4.7

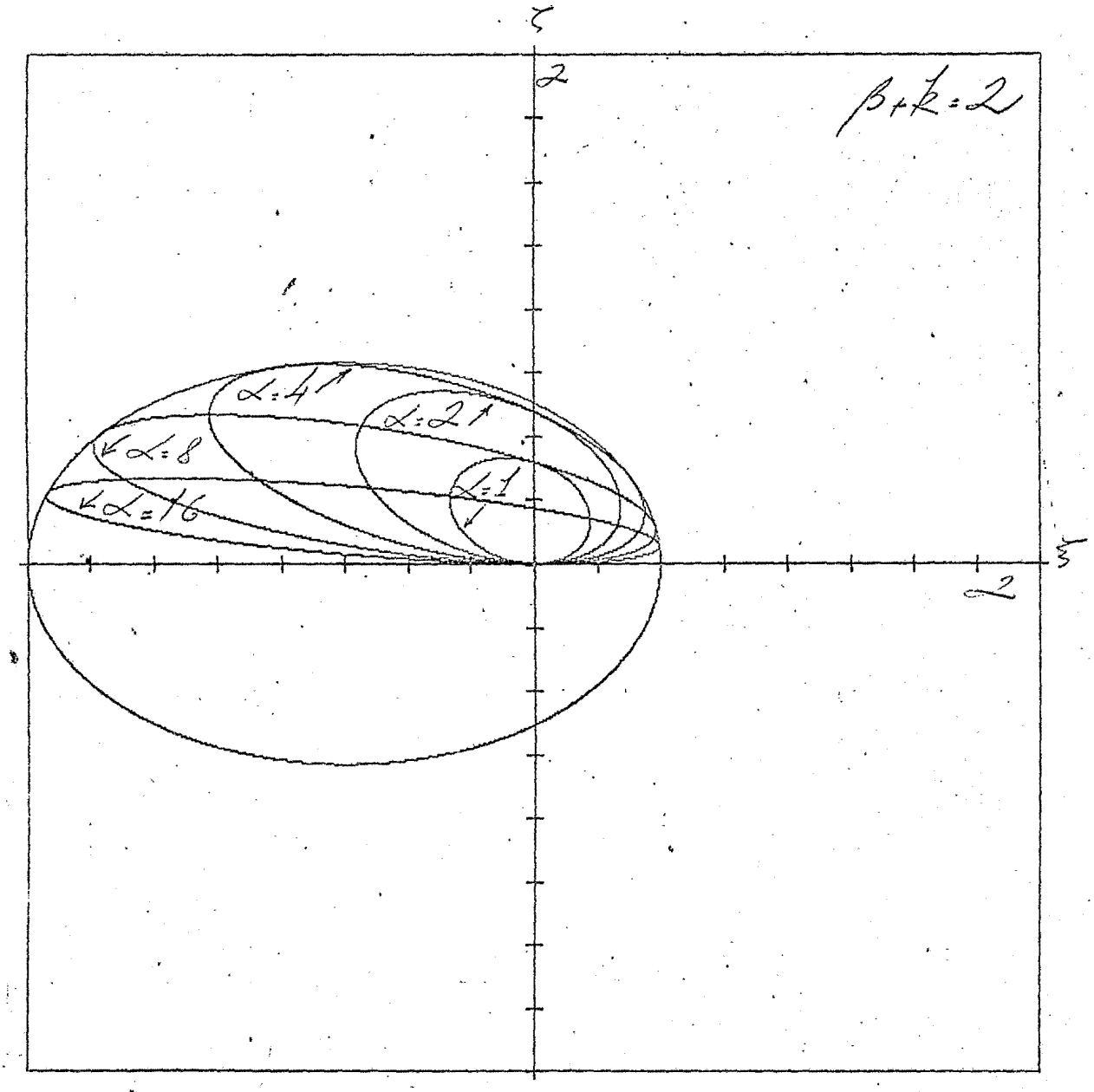

Fig. 4.8

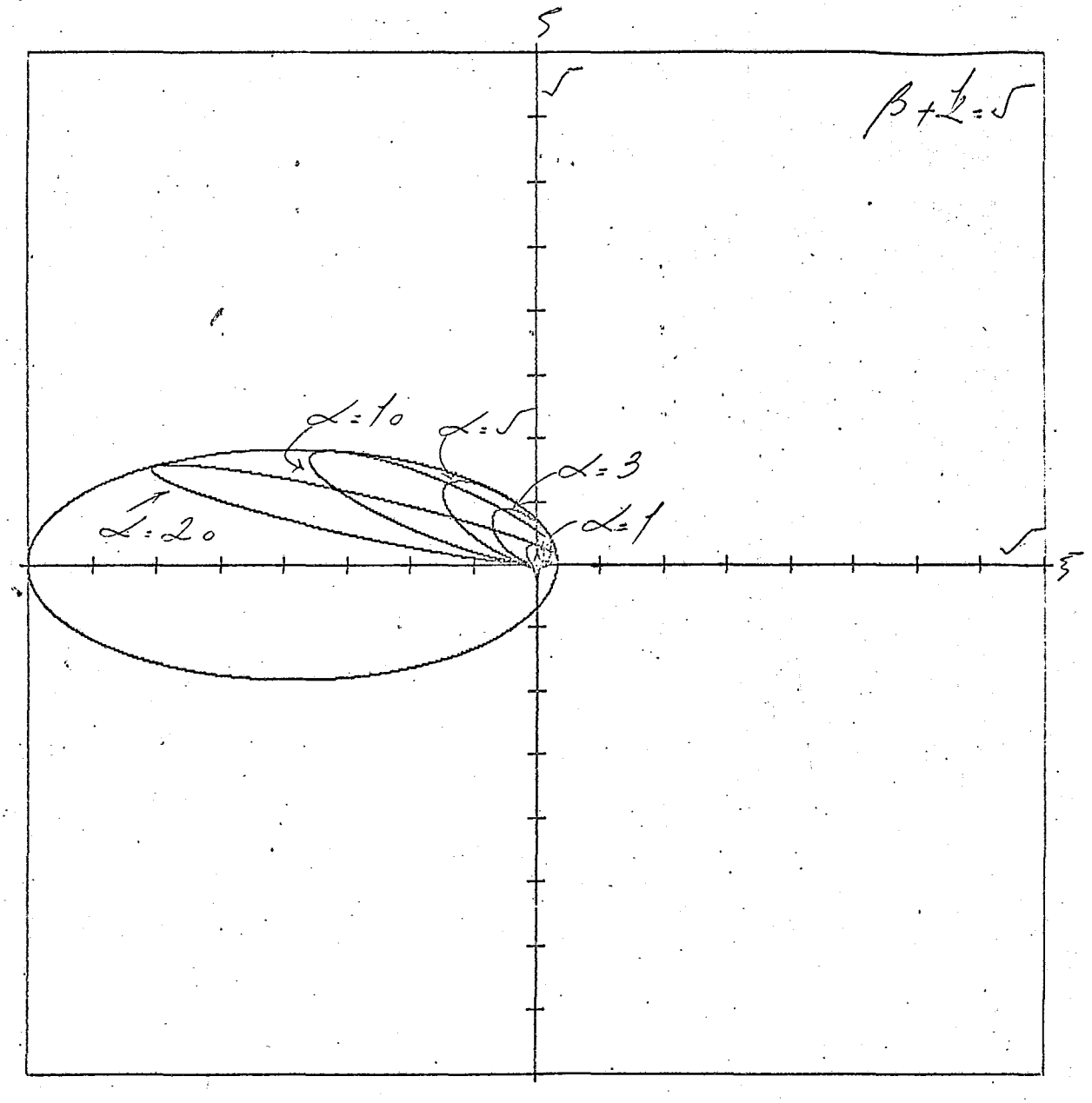

Fig. 4.9

4.3) ESTUDO DAS FUNÇÕES DE LIAPUNOV DO TIPO "FORMA QUADRÁTICA MAIS INTEGRAL" ASSOCIADAS A UM SISTEMA REGULADOR NÃO LINEAR.

Examinaremos um caso particular do sistema (!), estudado em Aizerman e Gantmacher*.

Os autores demonstram que a função de Liapunov

$$V_1 = \underline{L}_{\underline{A}}(\langle \underline{u}, \underline{x}^2 \rangle) + \bar{\beta} \int_0^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma \quad **$$

cuja derivada é

$$V_1 = -(\sqrt{r}\phi(\sigma) - \langle \underline{u}, \underline{x}^2 \rangle - \tau\phi(\sigma)(\sigma - \frac{\phi}{k}(\sigma))$$

assegura a estabilidade absoluta de (!).

Considerando que:

a) Em $\sigma = 0$ o segundo têrmo de V_1 se anula

b) A forma quadrática $(\langle \underline{u}, \underline{x}^2 \rangle)$ não é <u>definida</u> positiva (é apenas semi-definida positiva).

Surge a seguinte pergunta:

Quais as restrições que deve sofrer o vetor $\underline{u}$ para que a função V_1 seja definida ? Qual a interpretação geométrica desta restrição ?

Nosso sistema está representado na figura 4.2

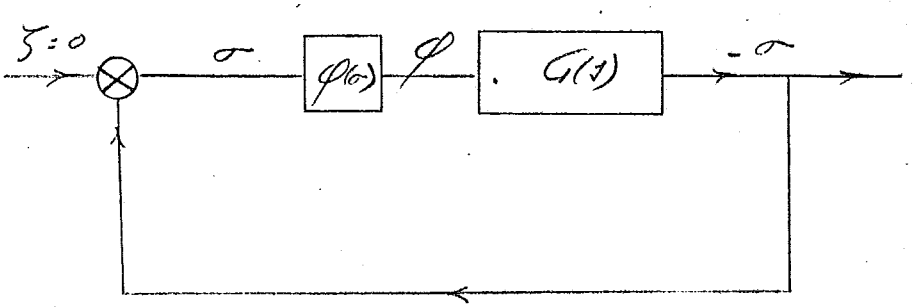

Fig. 4.2

*[3] pg. 153, teorema II

** O vetor $\underline{u}$ é definido pelos aa no decorrer da demonstração do teorema.

onde

$$G(s) = \frac{1}{S^2 + \alpha S + \beta} \qquad 0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} < k$$

Neste caso, a função V_1 é

$$V_1 = \underline{L}_{\underline{A}} \left((u_1x_1 + u_2x_2)^2 \right) + \overline{\beta} \int_0^{\sigma} \phi(\sigma)d\sigma$$

ou

$$V_1 = \underline{L}_{\underline{A}} < \underline{x}, \underline{Mx} > + \overline{\beta} \int_0^{\sigma} \phi(\sigma)d\sigma$$

com

$$\underline{M} = \underline{u} >< \underline{u}$$

O conjunto das matrizes $\underline{M}$ define a fronteira de $\overset{o}{\equiv}$. Como $\overset{o}{\underline{T}}$ é sempre interior a $\overset{o}{\equiv}$, o único caso em que

$$\underline{L}_{\underline{A}} (< \underline{x}, \underline{Mx} >)$$

poderá ser semi-definida, será quando

$$\begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1u_2 \end{bmatrix}$$

fôr um autovetor de $\underline{M}_{\underline{A}}$.

Neste caso V_1 se anulará na interseção das retas

$$\langle \underline{u}, \underline{x} \rangle = 0 \quad e \qquad \sigma = \sigma_o, \ \phi\ (\sigma_o) = 0$$

e V_1 não será uma função de Liapunov.

A coincidência ocorre quando

$$\underline{u} = \underline{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) \\ \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{u} = \underline{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}) \\ \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Como, por outro lado $\underline{u}_1$ e $\underline{u}_2$ são ortogonais aos autovetores de $\underline{A}$, podemos afirmar:

A função V_1 não será uma função de Liapunov quando fôr ortogonal a um dos autovetores de $\underline{A}$.

CONCLUSÃO

Procuramos, neste trabalho, traduzir a linguagem do método direto de Liapunov para a linguagem da geometria analítica. O teorema 3.2.3, juntamente com o corolário 3.2.4, são o equivalente aos teoremas 1.4.2 e 1.4.4.

As aplicações do método geométrico, ficaram, de certo modo limitadas aos exemplos que conseguimos encontrar de aplicações da própria transformação de Liapunov, que foram poucos. Entretanto, o método geométrico permite uma desenvoltura razoável quando se está trabalhando com as formulações do método direto.

Continua aberta a questão de existir algum significado físico para as funções de Liapunov, e o fato de um sistema permitir uma flexibilidade maior na escolha das formas quadráticas associadas, também, aparentemente não leva a nenhuma conclusão quanto ao desempenho do sistema. No entanto, julgamos interessante incluir os resultados obtidos num apêndice.

B I B L I O G R A F I A

[1] Liapunov, A. M. -"Problème générale de la stabilité du mouvement", 1907.

[2] Hahn, W. -"Theory and application of Liapunov's direct method", Prentice-Hall, 1963.

[3] Aizerman, e Gantmacher -"Absolute stability of regulator Systems", Holdenday, 1965.

[4] Ogata, K. -"State Spaceanalysis of Control Systems", Prentice-Hall, 1967.

[5] Gantmacher, -"Matrix theory", Chelsea, 1964.

[6] Bell, R. -"Coordinate geometry of three dimensions", McMillan, 1963.

[7] Papelur, G. -"Précis de géometrie analytique", Vuibert, 1930.

[8] Kalman, R. e Bertram, J -"Control System Analysis and Design via the Second method of Liapunov", Trans. ASME - Série D - junho 1960, pg. 371

[9] Bellman, R. -"Stability theory of differential equations", McGraw--Hill, 1953.

[10] La Salle, J e Lefschetz, S. -"Stability by Liapunov's direct method", Academic Press -1961.

APÊNDICE I

UMA FIGURA DE MÉRITO PARA OS SISTEMAS (1.3) - O CONE DE ÂNGULO SÓLIDO MÁXIMO.

Fazendo uma mudança de coordenadas (cartesianas para cilíndricas) a equação de ∂T assume a forma

$$\operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + \beta^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + (\alpha^2 + 4\beta)\cos^2\theta - 2\beta \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi -$$

$$- 2\alpha\beta \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\phi - 2\alpha \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\phi = 0 \qquad \text{(I.1)}$$

Esta expressão resultaria ainda mais simples se (2.2-1) estivesse na forma canônica.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2 = 0$$

caso em que (I-1) assumiria a forma

$$\lambda_1 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta + \lambda_2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\theta - \lambda_3 \cos^2\theta = 0$$

donde a expressão para o ângulo sólido máximo

$$\underset{\alpha,\beta}{\text{Máx}}\ \Omega\ (\alpha, \beta) = \underset{\alpha,\beta}{M'_{ax}}\ 2\left(\pi - \int_0^{\pi} \left(\frac{\lambda_1 \cos^2\phi + \lambda_2 \operatorname{sen}^2\phi}{\lambda_1 \cos^2\phi + \lambda_2 \operatorname{sen}^2\phi - \lambda_3} \right)^{1/2} d\phi \right)$$

Os valores de α e β para os quais Ω é máximo, que foram encontrados com o auxílio do computador IBM 1130 (ver páginas seguintes), determinam um sistema (3.2) para o qual a escolha de uma função de Liapunov do tipo forma quadrática é "mais flexível".

```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      FUNCTION FINTA (X)
      COMMON ALAM1,ALAM2,ALAM3
      C=(ALAM1*(COS(X))**2+ALAM2*(SIN(X))**2)
      D=SQRT(C)
      B=SQRT(C-ALAM3)
      FINTA=D/B
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED

 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR FINTA
 COMMON        6  VARIABLES      10  PROGRAM      54

END OF COMPILATION
```

```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      FUNCTION OMEGA(ALFA,BETA)
      EXTERNAL FINTA
      DIMENSION A(6),R(3,3)
      COMMON ALAM1,ALAM2,ALAM3
      A(1)=1.
      A(2)=-BETA
      A(3)=BETA**2
      A(4)=-ALFA
      A(5)=-ALFA*BETA
      A(6)=ALFA**2+4.*BETA
      CALL EIGEN (A,R,3,0)
      CALL ELUD(ALAM1,A(1))
      CALL ELUD(ALAM2,A(3))
      CALL ELUD(ALAM3,A(6))
      PI=3.141592653
      CALL SMPSN(FINTA,0.,PI,0.1E-04,50,SI1,S,N,IER)
      ANGLE=2.*(PI-S
      OMEGA=ANGLE
      RETURN
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS

CORE REQUIREMENTS FOR OMEGA
 COMMON       6  VARIABLES      50  PROGRAM.    152

END OF COMPILATION
```

```
// JOB
// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(CARD,1132PRINTER)
C       CALCULO DO ANGULO SOLIDO MAXIMO
C       PROGRAMADOR     DEMETRIO     COPPE  1967
        EXTERNAL OMEGA
        DIMENSION V(11),VAL(3)
        COMMON ALAM1,ALAM2,ALAM3
        READ(2,1)V
      1 FORMAT(8(1X,F3.1),2X,F10.8,2(1X,F3.1))
        CALL PATSE(OMEGA,V,VAL,200,KI)
        WRITE(3,3)
        WRITE(3,2) VAL
      3 FORMAT(//////4X'ANGULO SOLIDO MAXIMO')
      2 FORMAT(/////4X'ALFA = 'F7.5/4X'BETA = 'F7.5
     1/4X'OMEGA = 'F7.5)
        CALL EXIT
        END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON       6  VARIABLES      30  PROGRAM     108

END OF COMPILATION
```

ANGULO SOLIDO MAXIMO

ALFA = 2.80000
BETA = 1.00000
OMEGA = 0.59693

A P Ê N D I C E II

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2-3

$\alpha^2 \geqslant 4\beta$

Sabemos que, quando $\alpha^2 \geqslant 4\beta$ (λ_2 e λ_3 reais), os cones $\partial\equiv$ e ∂T têm duas geratrizes comuns. Para provar que os cones são tangentes, provaremos que o plano tangente ao cone $\partial\equiv$ numa das geratrizes comuns coincide com o plano tangente a ∂T, outro cone na mesma geratriz.

Com efeito, a equação do plano tangente a $\partial\equiv$ na reta

$$\frac{x}{(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4})-2\beta} = \frac{y}{2} = \frac{z}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}}$$

é

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)_{P_o} 2 + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right) y + \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right) z = 0$$

onde

$$P_o = (\ \alpha(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}) - 2\beta \quad 2 \quad \alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}\ )$$

ou seja

$$2x + (\ \alpha(\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta}) - 2\beta\ )y - 2(\ \alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta})z = 0 \qquad \text{(II-1.1)}$$

Analogamente, o plano tangente a ∂T na mesma reta é

* [7], pg. 545

$$-8\beta x - (4\beta\alpha(\alpha + \sqrt{\alpha^2-4\beta}) - 8\beta^2)y + 8\beta(\alpha + \sqrt{\alpha^2-4\beta})\ z = 0 \qquad \text{(II-1-2)}$$

A proporcionalidade entre os coeficientes de (II.1-1) e de (II-1.2) mostra-nos que amboa os planos coincidem.

No caso de outra geratriz comum a ∂T e a $\partial \equiv$, a demonstração é análoga.

$$\alpha^2 < 4\beta$$

O cone $\partial \equiv$ tem uma geratriz que coincide com o eixo $0x$, e outra que coincide com o eixo $0y$. Por sua vez o cone ∂T , para α e β finitos e não nulos, é tangente ao plano $z = 0$ na reta $x = \beta y$. Isto exclui a possibilidade de uma geratriz comum a $\partial \equiv$ e a ∂T no plano $z = 0$.

Seccionando os cones $\partial \equiv$ e ∂T por um plano paralelo a $z = 0$ ($z = 1$ por exemplo), obtemos as equações de duas cônicas. Os cones terão uma geratriz comum se e sòmente se as cônicas tiverem algum ponto em comum. Além disto, se as cônicas forem tangentes, os cones também o serão.

A equação da seção de $\partial \equiv$ pelo plano $z = 1$ é

$$xy = 1 \qquad \text{(II.2-1)}$$

e a seção de $\partial \equiv$ pelo mesmo plano é

$$x^2 + \beta^2y^2 - 2\beta xy - 2\alpha x - 2\alpha\beta y + (\alpha^2 + 4\beta) = 0 \qquad \text{(II.2-2)}$$

Eliminando entre (II-2.1) e (II-2.2) temos

$$x^4 - 2\alpha x^3 + (\alpha^2 + 2\beta)x^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2 = 0 \qquad \text{(II.2-3)}$$

que, por meio da transformação (de Tschirnhausen)

$$\tilde{x} = x - \frac{\alpha}{2}$$

se reduz a

$$(\tilde{x}^{\,2} + \frac{1}{2}(2\beta - \frac{\alpha^2}{}))^2 = 0$$

As raizes de (II.2-3) são portanto

$$x_1 = x_2 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

$$x_3 = x_4 = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

Quando $\alpha^2 \geqslant 4\beta$ os cones são tangentes (como já havíamos visto em 3.2.3.1).

Quando $\alpha^2 < 4\beta$ os cones não têm geratriz comum.