

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

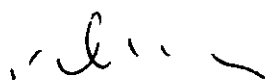
Andrê de Carvalho Neves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

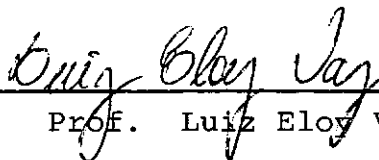
Aprovada por:



Prof. Webe João Mansur
(Presidente)



Prof. José Claudio de Faria Telles



Prof. Luiz Eloy Vaz

NEVES, André de Carvalho

Resolução de Problemas Viscoelásticos Utilizando o Método dos Elementos de Contorno (Rio de Janeiro) 1988.

x , 118 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1988).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Viscoelasticidade. I. COPPE/UFRJ
II. Título (série).

AGRADECIMENTOS

Aos professores José Claudio de Faria Telles e Webe João Mansur pela orientação, apoio e amizade necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos companheiros da Noronha Engenharia e da COPPE que tanto contribuíram com sua sólida amizade.

À minha prima Cristina pela colaboração na confecção dos desenhos apresentados neste trabalho.

À Jaciãra Roberta pelo excelente trabalho de datilografia.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

**RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS UTILIZANDO O
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Andrê de Carvalho Neves

Junho de 1988

Orientadores: José Claudio de Faria Telles e Webe João Mansur
Programa : Engenharia Civil

O presente trabalho trata da análise de problemas viscoelásticos bidimensionais utilizando a transformada de Laplace e o princípio da correspondência para elasticidade Linear.

Para a obtenção da transformada inversa, é utilizado o método de Durbin com algoritmo de Fast Fourier Transform (F.F.T.).

Na primeira parte do trabalho, é desenvolvido um programa elástico bidimensional sendo feito um estudo comparativo para a resolução das integrais dos elementos singulares utilizando a integração por partes finitas e a integração por Gauss com a transformada de terceira ordem.

Para problemas de descontinuidade de forças de superfície, é testado o elemento interpolado onde o ponto fonte é deslocado para o interior do elemento não modificando a função de interpolação.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULLFILMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

**ON THE SOLUTION OF VISCOELASTIC PROBLEMS BY USING THE
BOUNDARY ELEMENT METHOD**

Andrê de Carvalho Neves

June 1988

Chairmen : José Claudio de Faria Telles and Webe João Mansur
Department: Civil Engineering

The present work deals with a two-dimensional boundary element implementation for viscoelastic problems through the application of the Laplace transform and the correspondence principle.

The inverse transform is obtained by using Durbin's method coupled with a Fast Fourier Transform (F.F.T.) procedure.

In the first chapters a 2-D elastic computer program is described where different numerical Gaussian techniques for computing the singular integrals are tested. Here, finite part integration and third degree coordinate transformations are included.

For accurate representation of traction discontinuities on the boundary, the so-called interpolated element is tested. In this element, the source point is located near to but not at the extremities of the element and the interpolation functions are not modified.

ÍNDICE

	Página
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
I.1 - Introdução Geral	1
I.2 - Revisão Bibliográfica	2
I.3 - Descrição do Escopo da Tese	3
CAPÍTULO II - TEORIA DA ELASTICIDADE E DA VISCOELASTICIDADE	5
II.1 - Notação Indicial	5
II.2 - Equações Gerais	6
II.2.1 - Equações de Equilíbrio	7
II.2.2 - Relações Cinemáticas	7
II.2.3 - Equações Constitutivas	9
II.3 - Problemas Bidimensionais	14
CAPÍTULO III - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS ELÁSTICOS	16
III.1 - Equação de Navier	16
III.2 - Dedução da Identidade de Somigliana a partir do Método dos Resíduos Ponderados	20
III.3 - Soluções Fundamentais	23
III.4 - Tensões em Pontos Internos	24

	Página
III.5 - Equação Integral do Contorno	25
III.6 - Regiões Infinitas	27
III.7 - Tensões no Contorno	29
CAPÍTULO IV - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	32
IV.1 - Discretização do Contorno	32
IV.2 - Integração Numérica nos Elementos de Contorno ...	39
IV.2.1 - Transformação Polinomial de Terceira Or- dem	40
IV.2.2 - Integração por Partes Finitas	45
IV.2.3 - Problemas de Descontinuidades	47
IV.3 - Simetria	52
CAPÍTULO V - EXEMPLOS ELÁSTICOS	55
V.1 - Placa Quadrada Tractionada	56
V.2 - Problema da Cavidade Cilíndrica	58
V.3 - Placa Finita com Cavidade Circular	61
V.4 - Viga em Balanço com Carga na Extremidade	63
CAPÍTULO VI - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS	66
VI.1 - Fluência e Relaxação	66
VI.2 - Fluido de Maxwell e Sólido de Kelvin	67

	Página
VI.3 - Relação Tensão-Deformação em Forma de Equações Diferenciais para os Modelos Generalizados de Maxwell e Kelvin	71
VI.4 - Integrais Hereditárias	75
VI.5 - Equações Governantes da Viscoelasticidade	78
CAPÍTULO VII - INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE	82
VII.1 - Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace	82
VII.2 - Método de Durbin	83
CAPÍTULO VIII - EXEMPLOS VISCOELÁSTICOS	94
VIII.1 - Problema Elástico	94
VIII.2 - Tubo Espesso com Pressão Interna	95
VIII.3 - Placa Infinita com Cavidade Circular	97
CAPÍTULO IX - CONCLUSÕES	100
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	103
APÊNDICE A - DEDUÇÃO DE FÓRMULAS	107
A.1 - Obtenção das Relações de Compatibilidade	107
A.2 - Obtenção da Equação (III.12)	107
A.3 - Obtenção da Equação (III.25)	110

	Página
APÊNDICE B - PONTOS DE INTEGRAÇÃO	112
B.1 - Pontos de Gauss	112
B.2 - Pontos de Kutt	114
APÊNDICE C - PROGRAMA FFTURB	115

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - Introdução Geral

A dificuldade em se obter a solução analítica de problemas governados por equações diferenciais, comuns no campo da engenharia, aliado ao acelerado desenvolvimento tecnológico na área de computadores têm proporcionado o aparecimento de diversos métodos numéricos eficientes. Um método recente que tem apresentado grande avanço nos últimos anos é o método dos elementos de contorno. A principal causa desse aumento de popularidade é devida à algumas vantagens que apresenta com relação ao clássico método dos elementos finitos em determinadas aplicações. A mais importante de todas é a possibilidade de discretizar apenas o contorno do problema ao invés de seu volume, como requer o método dos elementos finitos, com a consequente redução de tempo e custo para a preparação dos dados geométricos. Esta característica é particularmente útil quando se trata de problemas envolvendo cavidades no meio infinito (aberturas subterrâneas) ou cargas na superfície do semi-espço (fundações superficiais e aterros).

Neste trabalho, utilizamos o método dos elementos de contorno para resolver problemas elásticos e viscoelásticos. Para isso, foram desenvolvidos programas em linguagem FORTRAN 77 (V.4.0) para micros PCs utilizando dupla precisão.

I.2 - Revisão Bibliográfica

A teoria da elasticidade e da viscoelasticidade foi estudada por MALVERN (1), FUNG (2) e FLÜGGE (3).

BREBBIA, TELLES e WROBEL (4) e TELLES (5) apresentam um procedimento numérico para a resolução do problema elástico utilizando o método dos elementos de contorno.

Para o problema de canto, MARQUES (8) desenvolveu um estudo comparando o elemento descontínuo apresentado por PATTERSON e SHEIKH (9) e o elemento interpolado apresentado por MUSTOE, et alii (7). Este estudo foi desenvolvido para problemas de potencial.

Para a resolução das integrais dos elementos de contorno, TELLES (10) apresenta a transformação polinomial de terceiro grau fazendo com que os pontos de Gauss se aproximem do ponto fonte. Para os elementos singulares é utilizada a integração por partes finitas (4).

O problema viscoelástico será resolvido utilizando a transformada de Laplace e o princípio da correspondência para elasticidade linear (13) à (16).

Existem vários métodos numéricos para a resolução da transformada inversa. BESKOS e NARAYANAN (17) comparam oito métodos de inversão em seus estudos e concluem que o método de DURBIN (19) utilizando o algoritmo do Fast Fourier Transform (FFT)

desenvolvido por COOLEY e TUKEY (20) é o mais preciso. Este método é um eficiente aperfeiçoamento do método de DUBNER e ABATE (21).

I.3 - Descrição do Escopo da Tese

A seguir são descritos os assuntos abordados em cada capítulo.

No Capítulo II são definidas as equações gerais que governam os problemas bidimensionais de elasticidade e de viscoelasticidade.

Os Capítulos III e IV apresentam, respectivamente, as formulações e a implementação numérica do método dos elementos de contorno para problema elástico.

O Capítulo V contém exemplos elásticos comparando os procedimentos utilizados nas resoluções das integrais dos elementos singulares discutidas no Capítulo IV.

O Capítulo VI apresenta o comportamento de alguns modelos viscoelásticos e define o conceito de fluência e relaxação. A equação constitutiva expressa em termos das integrais hereditárias possibilita a utilização do princípio da correspondência. Dessa forma, pode-se resolver o problema viscoelástico utilizando as equações gerais da elasticidade no domínio transformado.

No Capítulo VII é apresentado o método de Durbin com o algoritmo do Fast Fourier Transform para o cálculo da transformada inversa. De maneira a poder demonstrar a precisão desse método, foram testadas algumas funções no domínio transformado.

O Capítulo VIII contém exemplos ilustrativos no regime viscoelástico.

CAPÍTULO II

TEORIA DA ELASTICIDADE E DA VISCOELASTICIDADE

II.1 - Notação Indicial

Antes de apresentarmos as equações gerais da elasticidade e da viscoelasticidade, convém esclarecer o conceito de notação indicial. Esta notação não é só eficiente para escrever expressões longas mas também para derivações e nas provas de teoremas. Tal notação utiliza índices subscritos (1,2,3) para representar (x,y,z) e torna a utilização de símbolos de somatórios desnecessários quando a mesma letra aparece duas vezes em um só termo.

Os índices podem ser qualificados como:

- Índice mudo → aparece repetido. Num monômio, deve ser somado de 1 à 3.
- Índice livre → aparece uma vez. Num monômio, assume sucessivamente os valores 1, 2 e 3.

Como exemplo, temos:

$$A_i = B_{ij} C_j \quad (\text{II.1})$$

que equivale, em notação algébrica, às equações:

$$A_1 = B_{11} C_1 + B_{12} C_2 + B_{13} C_3$$

$$A_2 = B_{21} C_1 + B_{22} C_2 + B_{23} C_3 \quad (\text{II.2})$$

$$A_3 = B_{31} C_1 + B_{32} C_2 + B_{33} C_3$$

No caso de derivação, esta pode ser representada através de vírgula como:

$$A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \quad (\text{II.3})$$

Também será usado o símbolo de delta de Kronecker (δ_{ij}) e o símbolo de permutação (e_{ijk}), sendo:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{se } i = j \quad (\text{II.4})$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{se } i \neq j$$

e

$$e_{ijk} = 0 \quad \text{se houver índices repetidos}$$

$$e_{ijk} = 1 \quad \text{se } ijk \text{ formarem permutação par} \quad (\text{II.5})$$

$$e_{ijk} = -1 \quad \text{se } ijk \text{ formarem permutação ímpar}$$

II.2 - Equações Gerais

A mecânica dos meios contínuos utiliza três tipos de grandezas:

- Tensão (σ_{ij}) → força interna média por unidade de área de uma seção infinitesimal.
- Deslocamento (u_j) → Movimento de um ponto durante o processo de deformação.
- Deformação → Mudança de forma e de dimensões do corpo quando atuam solicitações.

As quantidades acima definidas estão relacionadas por três tipos de equações que serão apresentadas a seguir. (Ref. (3)).

II.2.1 - Equações de Equilíbrio Estático

As equações de equilíbrio são relações entre as derivadas das tensões e a força de volume.

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (\text{II.6})$$

Teremos então, uma equação de equilíbrio para cada direção.

II.2.2 - Relações Cinemáticas

Este segundo conjunto de equações, conhecido também como relações deformação - deslocamento, possibilita o cálculo das deformações específicas a partir das componentes de deslocamento. Para pequenas deformações, temos:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.7})$$

Para garantir a obtenção de um campo de deslocamento contínuo e unívoco, as componentes de deformação devem obedecer às relações de compatibilidade que podemos estabelecer derivando as equações que relacionam deformação e deslocamento conforme demonstrado no Apêndice A.

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{II.8})$$

Destas 81 equações algébricas, somente 6 são independentes

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z}$$

(II.9)

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_{yx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zx}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial z^2}$$

Um estado tensional só será possível se atender às equações de equilíbrio e o correspondente estado de deformação atender às equações de compatibilidade.

II.2.3 - Equações Constitutivas

O último conjunto, conhecido como equações constitutivas ou relações tensão - deformação, descreve o comportamento macroscópico resultante da constituição interna do material.

Os materiais existentes apresentam uma grande variedade de comportamento tais como elástico, viscoso, plástico, viscoelástico, viscoplástico ou viscoelastoplástico. No presente trabalho, serão considerados apenas os comportamentos elásticos e viscoelásticos. Para que estes comportamentos sejam bem definidos, apresentaremos dois tipos de materiais de resposta ideal, conforme descreve MALVERN (1): sólido elástico ideal (Hookeano) e fluído viscoso ideal (Newtoniano).

O **sólido elástico ideal** é o material mais usualmente utilizado para análise de tensões em estruturas. A característica deste material está no fato de o corpo retornar a sua forma original depois que a força que causou a deformação é removida. Estruturas metálicas, por exemplo, se aproximam deste comportamento se as deformações forem pequenas.

O material linear elástico obedece uma relação linear entre tensão e deformação conhecida como Lei de Hooke.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{II.10})$$

onde C_{ijkl} é o tensor isotrópico de 4ª ordem.

Considerando o material elasticamente isotrópico, o número de constantes relacionando tensões com deformações se reduz a apenas duas. Na engenharia estrutural, utiliza-se geralmente:

E = módulo de elasticidade longitudinal

ν = coeficiente de Poisson

São também usados as constantes de Lamé

G = módulo de elasticidade transversal

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Estas constantes se relacionam através das fórmulas

$$E = \frac{G(3\nu + 2G)}{\lambda + G} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{II.11})$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\nu + G)} \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

A Lei de Hooke pode ser escrita em termos das componentes deviatórias e esféricas.

As componentes desviatórias são dadas por:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \bar{\sigma}_{ij} \quad (\text{II.12})$$

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \bar{\epsilon}_{ij}$$

sendo $\bar{\sigma}_{ij}$ e $\bar{\epsilon}_{ij}$ as componentes esféricas dadas por:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.13})$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}$$

Dessa forma, a Lei de Hooke pode ser expressa por:

$$\sigma'_{ij} = 2G\epsilon'_{ij} \quad (\text{II.14})$$

$$\sigma_{kk} = 3K\epsilon_{kk}$$

onde K é o módulo volumétrico ("bulk modulus") e equivale a

$$K = \lambda + \frac{2}{3} G \quad (\text{II.15})$$

Considere agora o caso uniaxial de tensão de uma mola de material elástico linear.

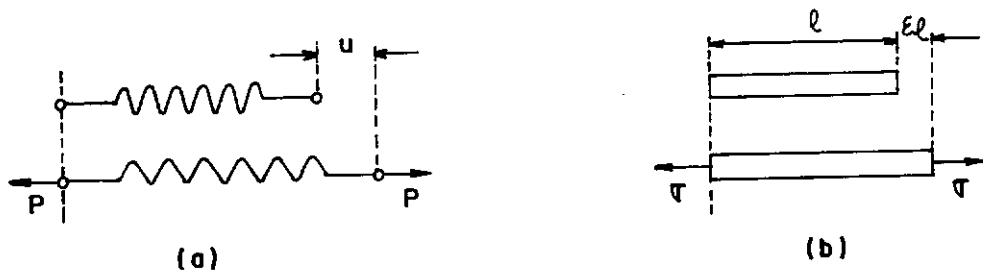


FIG. II.1 REPRESENTAÇÃO DE UM MODELO ELÁSTICO DE (a) UMA MOLA E (b) UMA BARRA TRACIONADA

Quando a carga P é aplicada, o comprimento da mola aumenta de uma quantidade u e quando a força P pára de atuar, ela retorna ao seu comprimento original. Este mesmo fenômeno pode ser observado no caso de uma barra elástica tracionada.

Para este caso, a equação constitutiva deve obedecer a Lei de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{II.16})$$

O **fluido viscoso ideal** é o material utilizado para aplicações em análise de fluidos viscosos. A característica deste material está no fato de a tensão ser proporcional à taxa de deformação.

Para o caso em que se tem tensões e deformações cisalhantes, a equação constitutiva deve obedecer à

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{II.17})$$

onde μ é o coeficiente de viscosidade e $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ sendo $i \neq j$.

Considere agora o caso uniaxial de tensão de um amortecedor onde o pistão se move no interior de um cilindro fechado com lubrificante viscoso na superfície interna.

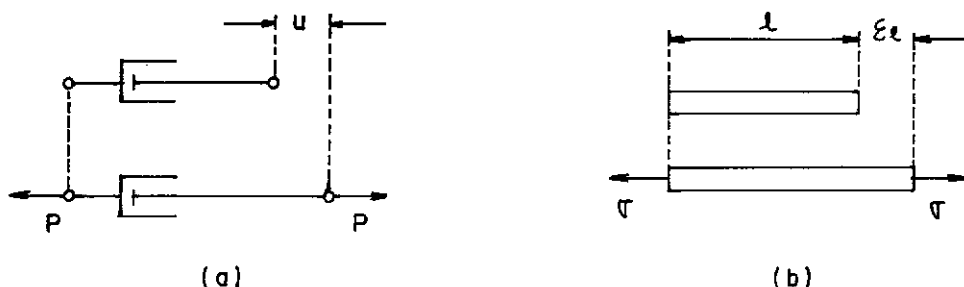


FIG. II.2 REPRESENTAÇÃO DE UM MODELO VISCOSO DE (a) UM AMORTECEDOR
(b) UMA BARRA TRACIONADA

Quanto maior for a força mais rápido o pistão se move. Temos então a relação linear $P = K (du/dt)$. O mesmo pode ocorrer no caso de uma barra tensionada onde a força não é proporcional ao alongamento da barra (εl) mas sim à taxa de variação no tempo ($d(\varepsilon l)/dt$). Escrevendo em termos de tensão e deformação longitudinal, temos:

$$\sigma = F \dot{\varepsilon} \quad (\text{II.18})$$

A equação constitutiva de materiais de comportamento viscoelástico pode ser linear ou não linear. No nosso caso, será estudada a teoria linear da viscoelasticidade cuja equação constitutiva é a combinação da Equação (II.16) com a Equação (II.18) dependendo do modelo utilizado, conforme será visto no Capítulo VI.

II.3 - Problemas Bidimensionais

Conforme visto no item anterior, o problema geral fica então expresso por:

$$\begin{array}{lcl}
 15 \text{ equações} & \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ equações de equilíbrio} \\ 6 \text{ relações deformação - deslocamento} \\ 6 \text{ relações constitutivas} \end{array} \right. & \\
 \\
 15 \text{ incógnitas} & \left\{ \begin{array}{l} 6 \text{ componentes de tensão} \\ 6 \text{ componentes de deformação} \\ 3 \text{ componentes de deslocamento} \end{array} \right. &
 \end{array}$$

Consideraremos neste trabalho uma classe de problemas na qual se tem, de forma exata ou aproximada, o fenômeno ocorrendo igualmente em todos os planos paralelos a xy , e as tensões e deformações independendo de z . Destes problemas, serão considerados o estado plano de deformação (E.P.D.), onde a deformação em z é nula, e o estado plano de tensão (E.P.T.), onde a tensão em z é nula.

O número de equações e o número de incógnitas para os problemas bidimensionais são apresentados na Tabela II.1 à seguir.

Tabela II.1 - Número de equações e de incógnitas para problemas bidimensionais

EQUAÇÕES E INCÓGNITAS	E.P.D.	E.P.T.	TOTAL
Equações de equilíbrio	2	2	9
Relações deformação - deslocamento	4	3	
Relações constitutivas	3	4	
Componentes de tensão	4	3	9
Componentes de deformação	3	4	
Componentes de deslocamento	2	2	

CAPÍTULO III

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

APLICADO A PROBLEMAS ELÁSTICOS

III.1 - Equação de Navier

Neste capítulo, serão considerados problemas bi-dimensionais de elasticidade governados pela equação de Navier que satisfaçam às seguintes condições de contorno:

- condições essenciais $\rightarrow u_i = \bar{u}_i$ em Γ_1
 - condições naturais $\rightarrow p_i = \bar{p}_i$ em Γ_2
- (III.1)

onde \bar{u}_i e \bar{p}_i são valores prescritos e o contorno do corpo é $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Seja um corpo definido pelo domínio Ω e pelo seu contorno Γ que está em equilíbrio sob a ação de cargas e deslocamentos prescritos (Figura III.1).

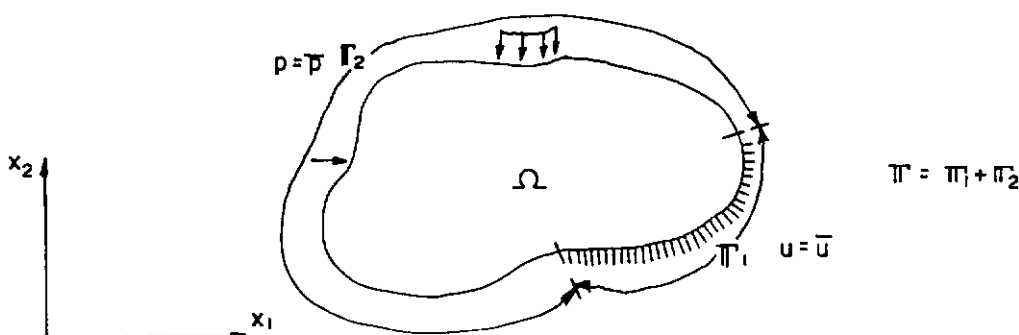


FIG. III.1 DEFINIÇÕES DE PROBLEMA DE ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

A equação de equilíbrio estático no domínio Ω é dada por:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad (\text{III.2})$$

onde σ_{ij} = componentes do tensor de tensões

b_j = componentes de forças de volume

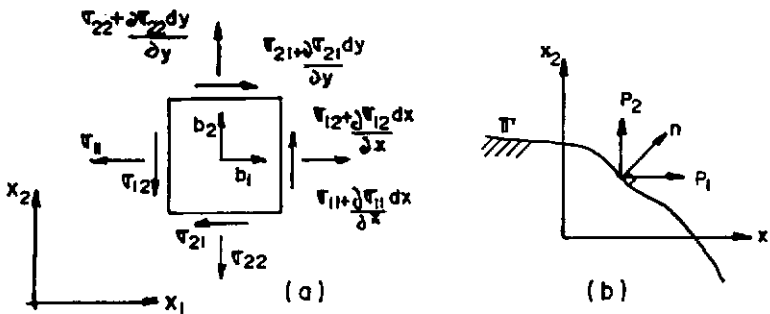


FIG III 2 (a) TENSÕES E (b) FORÇAS DE SUPERFÍCIE

A condição de equilíbrio no contorno Γ do corpo é

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{III.3})$$

onde p_i = componentes do vetor de forças de superfície

n_j = cossenos diretores do vetor unitário normal n apontando para fora do domínio.

Baseando-se na hipótese das pequenas mudanças de configuração, temos como relação entre as deformações específicas e os deslocamentos a equação:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{III.4})$$

Considerando o material:

- homogêneo - as propriedades são as mesmas em todos os pontos;
- isótropo - as propriedades elásticas são as mesmas em todas direções;
- linearmente elástico - as relações tensão - deformação apresentam comportamento linear.

a Lei de Hooke fornece a seguinte relação entre as tensões e as deformações específicas:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{III.5a})$$

A Equação (III.5a) também pode ser expressa por

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{III.5b})$$

onde C_{ijkl} é o tensor isotrópico de 4ª ordem

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{III.6})$$

Substituindo a Equação (III.4) em (III.5a) e utilizando a Equação (III.2), chegamos à equação de equilíbrio de Navier:

$$G u_{j, kk} + \frac{G}{1 - 2\nu} u_{k, kj} + b_j = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{III.7})$$

Esta equação é conveniente quando as condições de deslocamentos no contorno são especificadas. Usando novamente as Equações (III.4) e (III.5a) e substituindo em (III.3) para os pontos no contorno, obtemos as condições de forças de superfície no contorno

$$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu} u_{k, k} n_i + G(u_{i, j} + u_{j, i})n_j = p_i \quad \text{em } \Gamma \quad (\text{III.8})$$

Podemos notar pela Equação (III.7) que a condição de equilíbrio é expressa em função dos deslocamentos não requerendo, desta forma, as equações de compatibilidade. Uma vez definidas as condições de contorno, obtemos os deslocamentos u_i através da Equação de Navier. As deformações são obtidas por (III.4) e as tensões são calculadas pela Lei de Hooke (III.5a).

As equações anteriores foram definidas para estado plano de deformações. Para resolver problemas de estado plano de tensões, devemos substituir ν por $\bar{\nu}$, onde:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (\text{III.9})$$

III.2 - Dedução da Identidade de Somigliana a Partir dos Métodos dos Resíduos Ponderados

A solução analítica para a resolução de qualquer problema utilizando as equações descritas na seção anterior é de difícil obtenção. Torna-se necessário, então, a utilização de métodos numéricos que forneçam uma solução aproximada correspondente a Equação de Navier e que satisfaçam as condições de contorno.

A formulação do Método dos Elementos de Contorno será deduzida a partir do Método dos Resíduos Ponderados (Ref. (4), (8)).

O Método dos Resíduos Ponderados fornece a seguinte relação:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk,j} + b_k) u_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (p_k - \bar{p}_k) u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_k - u_k) p_k^* d\Gamma \quad (\text{III.10})$$

onde u_k^* e p_k^* são as funções de ponderação.

Adotando como funções de ponderação uma solução na região $\Omega^* + \Gamma^*$ que contém o corpo $\Omega + \Gamma$ (Figura III.3)), temos:

$$p_k^* = \sigma_{ij}^* n_j \quad (\text{III.11})$$

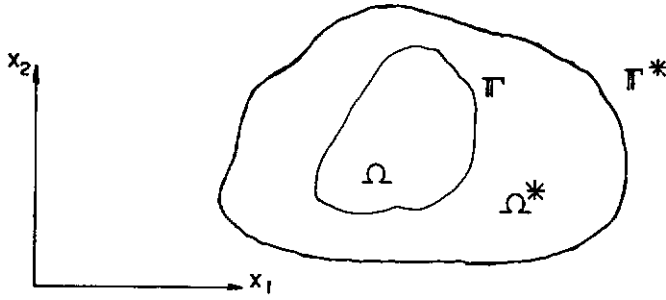


FIG. III.3 REGIÃO $\Omega^* + \Gamma^*$ CONTENDO O CORPO $\Omega + \Gamma$

Integrando por partes o lado esquerdo de (III.10) duas vezes e utilizando o teorema da divergência (vide Apêndice A), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* u_j \, d\Omega + \int_{\Omega} b_j u_j^* \, d\Omega = & - \int_{\Gamma_1} p_j u_j^* \, d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_j u_j^* \, d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_j p_j^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_j p_j^* \, d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

sendo

$$\sigma_{ij,i}^* = - \delta(\xi, x) \, p_j = - b_j^* \quad (\text{III.13})$$

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) \, p_i \quad (\text{III.14})$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) \, p_i \quad (\text{III.15})$$

onde $\delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac (Figura III.4); P_i são cargas concentradas unitárias aplicadas, independentemente, no ponto ξ do domínio Ω^* , e $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ representam os deslocamentos e forças de superfície na direção "j" no ponto "x" correspondendo a uma força unitária atuando na direção "i" aplicada no ponto " ξ ".

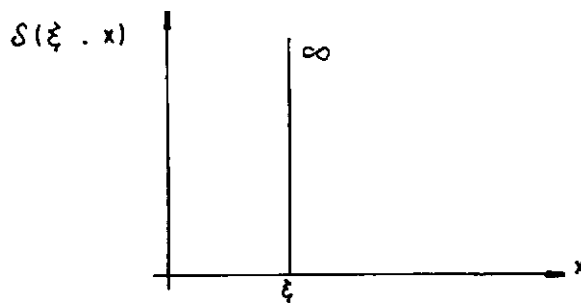


FIG. III.4 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Dessa forma, chegamos à duas equações (uma para cada direção) das por:

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma_1} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_2} u_{ij}^*(\xi, x) \bar{p}_j(x) d\Gamma(x) - \\
 & - \int_{\Gamma_1} p_{ij}^*(\xi, x) \bar{u}_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_2} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega
 \end{aligned} \tag{III.16}$$

que é conhecida como "Identidade de Somigliana" para deslocamentos.

Esta equação pode ser obtida também por reciprocidade com uma solução singular da Equação de Navier (III.7) (ver TELLES (4)) satisfazendo a:

$$G u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj}^* + \delta(\xi, x) p_j = 0 \quad (\text{III.17})$$

III.3 - Soluções Fundamentais

Soluções da Equação (III.17) são chamadas soluções fundamentais que podem variar tanto com relação à região $\Omega^* + \Gamma^*$ como também em relação às condições de contorno.

Para o caso em que o domínio Ω^* representa um espaço elástico infinito, a solução fundamental corresponde à solução de Kelvin e suas componentes de deslocamento e forças de superfície são dadas, respectivamente, por:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \quad (\text{III.18})$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (\text{III.19})$$

onde r é a distância entre o ponto fonte " ξ " e o ponto campo " x ".

III.4 - Tensões em Pontos Internos

A Equação (III.16) é uma representação contínua dos deslocamentos em pontos "ξ" pertencentes ao domínio Ω. Para a obtenção das componentes de tensão nos pontos internos, devemos derivar a Equação (III.16) em relação as coordenadas do ponto fonte obtendo as deformações específicas que substituídas na Equação (III.5) fornece:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (III.20)$$

onde as componentes dos tensores são dadas por :

$$\begin{aligned} u_{ijk}^* = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu) (r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk} - r_{,k} \delta_{ij}) + \right. \\ & \left. + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \end{aligned} \quad (III.21)$$

$$\begin{aligned} p_{ijk}^* = & \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \right. \right. \\ & - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \left. \right] + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + \\ & \left. + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (III.22)$$

III.5 - Equação Integral do Contorno

Considerando a simetria de C_{ijkl} da Equação (III.5b), temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}^*(\xi, x) \varepsilon_{ij}(x) d\Omega(x) = \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(x) \varepsilon_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) \quad (\text{III.23})$$

onde Ω_ε é o domínio restante de Ω quando retiramos o círculo de raio ε e contorno $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ centrado no ponto ξ (Figura III.5).

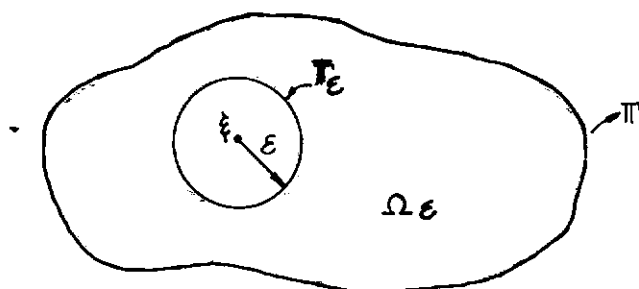


FIG. III. 5 CONTORNO $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ DO CÍRCULO DE RAIO ε CENTRADO NO PONTO ξ

Integrando por partes a Equação (III.23) e considerando $u_i(x)$, $\varepsilon_{ij}(x)$ e $\sigma_{ij}(x)$ como contínuos, chegamos à equação que equivale à Identidade de Somigliana (III.16).

Considerando a solução de Kelvin, a Identidade de Somigliana não pode ser empregada para a obtenção das tensões ou deslocamentos enquanto não soubermos os valores dos deslocamentos e forças de superfície em todo o seu contorno. Para isso, integramos por partes a Equação (III.23) e tiramos o limite quando o ponto "ξ" tende para o contorno (Figura III.6), obtendo:

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega_\epsilon} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \quad (\text{III.24})$$

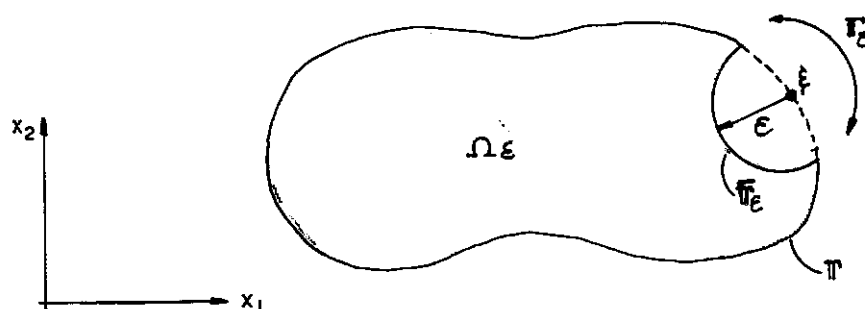


FIG. III. 6 PONTO ξ A UMA DISTÂNCIA ϵ DO CONTORNO CIRCULAR $\bar{\Gamma}_\epsilon$

Tomando-se o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ e considerando a hipótese de continuidade de $u_j(x)$ (vide Apêndice A), chegamos a equação integral do contorno, dada por:

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) +$$

$$+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Gamma(x) \quad \text{para } \xi \in \Gamma \quad (\text{III.25})$$

onde

$$C_{ij}(\xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.26})$$

sendo que para contornos suaves

$$c_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2} \quad (\text{III.27})$$

III.6 - Regiões Infinitas

Para o caso de regiões infinitas, devem ser levadas em conta as condições de regularidades que governam o comportamento das funções envolvidas na Equação (III.25) em uma superfície infinitamente distante do ponto fonte ξ .

Seja ξ , pertencente ao contorno da cavidade, o centro do círculo de raio ρ e contorno Γ_ρ (Figura III.7)

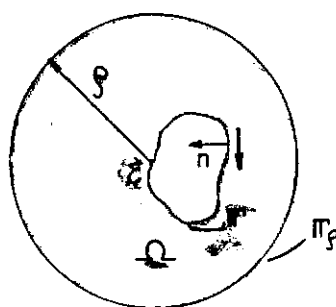


FIG. III.7 REGIÃO INFINITA COM CAVIDADE

Escrevendo a Equação (III.25) para a região entre Γ e Γ_ρ e considerando $b_j = 0$ para simplificar, temos:

$$\begin{aligned} c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma + \Gamma_\rho} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) &= \\ &= \int_{\Gamma + \Gamma_\rho} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

Tirando o limite quando $\rho \rightarrow \infty$, a Equação (III.28) pode ser expressa em termos de integrais sobre Γ apenas se for satisfeita a condição de regularidade, ou seja:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_\rho} \left[p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) - u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) \right] d\Gamma(x) = 0 \quad (\text{III.29})$$

Para o caso bidimensional, temos:

$$d\Gamma(x) = |J| d\theta \quad \text{onde} \quad |J| = O(\rho) \quad (\text{III.30})$$

$$u_{ij}^*(\xi, x) \begin{cases} O(\ln \rho + 1), & i = j \\ O(1) & , i \neq j \end{cases}$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = O(\rho^{-1})$$

Para garantirmos que cada termo de (III.29) se anule separadamente, devemos ter $u_j(x) = O(\rho^{-1})$ e $p_j(x) = O(\rho^{-2})$. Ou seja, teremos um decaimento das funções na direção do infinito. Este caso não corresponde ao comportamento da solução fundamental no infinito.

Observando que se a carga total aplicada sobre a superfície Γ não for auto-equilibrada, o Princípio de Saint Venant nos mostra que $u_j(x)$ e $p_j(x)$ terão o mesmo comportamento que a solução fundamental correspondente à uma carga concentrada na direção da resultante. Podemos, então, substituir $u_j(x)$ e $p_j(x)$ pelos tensores correspondentes à solução fundamental 2-D e veri-

ficamos que a Equação (III.29) é satisfeita uma vez que os seus termos se cancelam quando $\rho \rightarrow \infty$.

Podemos afirmar que a condição de regularidade é sempre satisfeita se $u_j(x)$ e $p_j(x)$ se comportam, na pior das hipóteses, com a solução fundamental no infinito.

Desta forma, problemas de cavidades em meios infinitos podem ser representados pela Equação (III.25) com Γ correspondendo apenas ao contorno interno desde que a normal aponte para dentro da cavidade.

III.7 - Tensões no Contorno

Após a solução no contorno, temos p_1 e p_2 em qualquer ponto pertencente a Γ (veja Figura III.8)). Se usarmos as equações de equilíbrio (III.3), temos:

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 \quad (III.31)$$

$$p_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2$$

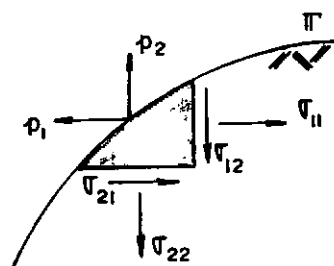


FIG. III 8 EQUILÍBRIO DE FORÇAS NO CONTORNO Γ

Portanto, temos 2 equações e 3 incógnitas (σ_{11} , σ_{12} e σ_{22}). Logo, precisamos de outra equação para resolver o problema.

Tendo em vista que os deslocamentos ao longo do contorno são conhecidos e considerando o elemento de ordem superior ao constante, a componente de deformação $\bar{\epsilon}_{11}$ ao longo do elemento é facilmente calculada por

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \quad (\text{III.32})$$

onde $\bar{\epsilon}_{11}$ é referido ao sistema local (tangente e normal) ao contorno no ponto.

Os vetores de tensões referidos ao sistema local de coordenadas (Figura III.9) são dados diretamente por:

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{p}_2 \quad (\text{III.33})$$

$$\bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_1$$

sendo \bar{p}_1 e \bar{p}_2 interpolados.

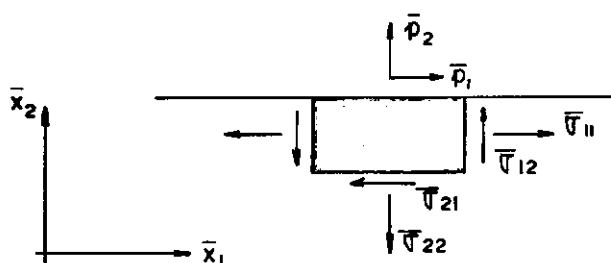


FIG. III.9 TENSÕES NO CONTORNO

Para o caso plano de deformação e utilizando a Lei de Hooke (III.5a) com $i = j = 2$, temos:

$$\bar{\epsilon}_{22} = \frac{1}{1-\nu} \left[(1-2\nu) \frac{\bar{\sigma}_{22}}{2G} - \nu \bar{\epsilon}_{11} \right] \quad (\text{III.34})$$

Usando novamente a Lei de Hooke (III.5a) com $i = j = 1$ e empregando a equação anterior, temos

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\nu} \left[2G\bar{\epsilon}_{11} + \nu \bar{\sigma}_{22} \right] \quad (\text{III.35})$$

CAPÍTULO IV

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

IV.1 - Discretização do Contorno

Para resolver a Equação (III.25) com $b_j = 0$, foi empregado um procedimento numérico aproximado em que o contorno é dividido em "m" elementos lineares Γ_j interligados por nós sobre os quais os valores dos deslocamentos u e das forças de superfície p são interpolados (Figura IV.1). Os nós funcionais desses elementos coincidem com os nós geométricos.

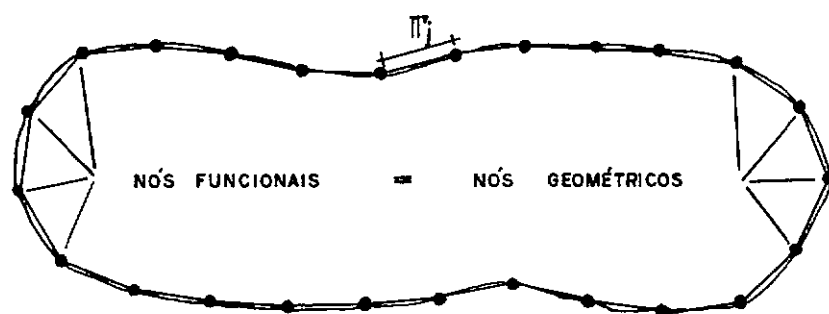


FIG. IV.1 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO EM ELEMENTOS LINEARES Γ_j

Utilizando a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas intrínsecas, temos:

$$d\Gamma_j(x) = |J| dn \quad (IV.1)$$

sendo $|J| = \ell/2$ o jacobiano da transformação para elemento linear.

Com o uso das funções de interpolação $N^k(\eta)$, aproximamos os valores de u_j e p_j no interior do elemento j da seguinte forma:

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^2 N^k(\eta) u_j^{tk} \quad (\text{IV.2})$$

$$p_j(x) = \sum_{k=1}^2 N^k(\eta) p_j^{tk}$$

onde u_j^{tk} e p_j^{tk} contêm os valores de deslocamento e força de superfície na direção "j" do nó "k" do elemento "t".

Para elemento linear, as funções de interpolação em coordenadas intrínsecas são dadas por (Figura IV.2):

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta) \quad (\text{IV.3})$$

$$N_2 = \frac{1}{2} (1 + \eta)$$

$$\text{sendo } \eta = \frac{2x_j}{\ell} - 1$$

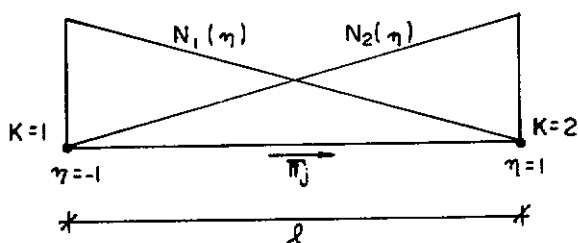


FIG. IV.2 ELEMENTO LINEAR $\overline{\Pi}_j$

A escolha das funções de ponderação w^ℓ pode fornecer uma aproximação tipo colocação ou uma aproximação tipo Galerkin. No nosso caso, será utilizado o método de colocação. Nesse método, as funções de ponderação utilizadas são as funções Delta de Dirac (Figura III.4).

$$w^\ell(\xi) = \delta(\xi^\ell, x) \quad \ell = 1, 2, \dots, S \quad (\text{IV.6})$$

onde ξ^ℓ são pontos selecionados no contorno coincidentes com os pontos nodais.

Escrevendo a Equação (IV.5) em forma matricial após utilizar a função Delta de Dirac, teremos $2m$ equações da forma

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij} u_j^{(n)} + \sum_{t=1}^m u_j^{(t)} \left(\int_{-1}^1 \tilde{p}_{ij}^* N^T |J| d\eta \right) &= \\ &= \sum_{t=1}^m \tilde{p}_j^{(t)} \left(\int_{-1}^1 u_{ij}^* N^T |J| d\eta \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

onde

$$\tilde{c}_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

$$\tilde{N}^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

$$\tilde{u}_j^{(n)} = \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \end{Bmatrix} \quad \tilde{p}_j^{(n)} = \begin{Bmatrix} p_1^n \\ p_2^n \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.10})$$

$$\tilde{u}_j^{(t)} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_j^{(n=i)} \\ \tilde{u}_j^{(n=f)} \end{Bmatrix} \quad \tilde{p}_j^{(t)} = \begin{Bmatrix} \tilde{p}_j^{(n=i)} \\ \tilde{p}_j^{(n=f)} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

$$\tilde{u}_{ij}^* = \begin{bmatrix} u_{i1}^* & u_{i2}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad \tilde{p}_{ij}^* = \begin{bmatrix} p_{i1}^* & p_{i2}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.12})$$

Notar que o sobrescrito (n) se refere ao nó en quanto que o sobrescrito (t) se refere ao elemento.

Na Equação (IV.12), u_{ij}^* e p_{ij}^* são deslocamentos e forças de superfície na direção j devido a uma força unitária no ponto em consideração atuando na direção i.

Devido a dificuldade em integrar a Equação (IV.7), podemos usar quadraturas numéricas para funções de interpolação de ordem elevada.

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{ij} \tilde{u}_j^{(n)} + \sum_{t=1}^m \tilde{u}_j^{(t)} & \left[\sum_{\ell=1}^K (\tilde{p}_{ij}^* \tilde{N}^T)_\ell \mid J \mid_\ell w_\ell \right] = \\ & = \sum_{t=1}^m \tilde{p}_j^{(t)} \left[\sum_{\ell=1}^K (\tilde{u}_{ij}^* \tilde{N}^T)_\ell \mid J \mid_\ell w_\ell \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

onde K = número total de pontos de integração

W_ℓ = fator de peso associado ao ponto ℓ .

Para fins de implementação, escreveremos a expressão acima em forma matricial

$$\underline{C}_{ij} \underline{u}_j^{(n)} + \sum_{t=1}^m \hat{\underline{h}}_{ij}^{(t)} \underline{u}_j^{(t)} = \sum_{t=1}^m \hat{\underline{g}}_{ij}^{(t)} \underline{p}_j^{(t)} \quad (\text{IV.14})$$

onde $\hat{\underline{h}}_{ij}^{(t)}$ e $\hat{\underline{g}}_{ij}^{(t)}$ são matrizes 2×4 referentes ao elemento (t) que têm a forma:

$$\hat{\underline{h}}_{ij}^{(t)} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{h}}_{ij}^{(n=i)} & \hat{\underline{h}}_{ij}^{(n=f)} \end{bmatrix} = \frac{\ell}{2} \sum_{\ell=1}^K W_\ell \begin{bmatrix} N_1 \underline{p}_{ij}^* & N_2 \underline{p}_{ij}^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

$$\hat{\underline{g}}_{ij}^{(t)} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{g}}_{ij}^{(n=i)} & \hat{\underline{g}}_{ij}^{(n=f)} \end{bmatrix} = \frac{\ell}{2} \sum_{\ell=1}^K W_\ell \begin{bmatrix} N_1 \underline{u}_{ij}^* & N_2 \underline{u}_{ij}^* \end{bmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

sendo

$\hat{\underline{h}}_{ij}^{(n)}$ e $\hat{\underline{g}}_{ij}^{(n)}$ matrizes 2×2 referentes ao nó (n) .

Podemos reescrever a Equação (IV.14) para cada nó em consideração. Sendo (\bar{n}) o nó fonte, temos:

$$\sum_{n=1}^N \hat{\underline{h}}_{ij}^{(n)} \underline{u}_j^{(n)} = \sum_{n=1}^N \hat{\underline{g}}_{ij}^{(n)} \underline{p}_j^{(n)} \quad (\text{IV.17})$$

onde

$$\hat{\underline{h}}_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \hat{\underline{h}}_{ij}^{(n)} + \underline{C}_{ij} & \text{para } (n) = (\bar{n}) \\ \hat{\underline{h}}_{ij}^{(n)} & \text{para } (n) \neq (\bar{n}) \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Da aplicação da Equação (IV.17) para todos os N pontos nodais, obtém-se um sistema de $2N$ equações lineares

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{P}} \quad (\text{IV.18})$$

onde os vetores $\underline{\underline{U}}$ e $\underline{\underline{P}}$ contêm todos os deslocamentos e forças de superfície dos pontos nodais.

As matrizes $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ são matrizes quadradas de ordem NN , sendo NN o número de graus de liberdade do sistema. Os elementos destas matrizes correspondem às integrais ao longo dos elementos de contorno indicadas na Equação (IV.13).

Uma vez definidas as condições de contorno, obtemos um sistema de NN equações que pode ser facilmente resolvido utilizando o método de eliminação de Gauss.

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{F}} \quad (\text{IV.19})$$

onde $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz quadrada cujas colunas são multiplicadas pelos elementos desconhecidos de força de superfície e deslocamento contidos no vetor $\underline{\underline{Y}}$, e o vetor $\underline{\underline{F}}$ é formado pelo produto das condições de contorno prescritas, pelas correspondentes colunas das matrizes $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$.

A solução deste sistema fornece os deslocamentos e as forças de superfícies em todos os pontos nodais do contorno. Empregando a Identidade de Somigliana (III.16), encontramos os valores dos deslocamentos em qualquer ponto do domínio. Deri

vando a Identidade de Somigliana em relação às coordenadas do ponto fonte ξ , obtêm-se as deformações específicas utilizando a Equação (III.4). Aplicando estas deformações na Lei de Hooke (III.5) obtemos as tensões no ponto ξ .

IV.2 - Integração Numérica nos Elementos de Contorno

Após a discretização do contorno, devemos calcular as seguintes integrais sobre cada elemento de contorno Γ_j :

$$\underline{h} = \int_{\Gamma_j} \underline{p}^* \underline{N}^T d\Gamma \quad (\text{IV.20})$$

$$\underline{g} = \int_{\Gamma_j} \underline{u}^* \underline{N}^T d\Gamma$$

Utilizando a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas intrínsecas, temos:

$$\underline{h} = \int_{-1}^1 \underline{p}^* \underline{N}^T |J| d\eta \quad (\text{IV.21})$$

$$\underline{g} = \int_{-1}^1 \underline{u}^* \underline{N}^T |J| d\eta$$

O comportamento das matrizes \underline{p}^* e \underline{u}^* , correspondentes a solução de Kelvin para problemas de elasticidade bidimensional, são dominantes nas integrais em (IV.21) uma vez que suas componentes são de $O(1/r)$ e $O(\ln 1/r)$ respectivamente, onde r é a distância entre o ponto fonte e o ponto campo.

O cálculo das integrais em (IV.21) será feito utilizando integração numérica tanto para os elementos singulares quanto para os elementos quase-singulares.

Elementos singulares são aqueles em que o ponto fonte pertence ao elemento. Neste caso, as integrais (IV.21) tornam-se singulares quando $r \rightarrow 0$ e devem ser interpretadas no sentido do Valor Principal de Cauchy ou por partes finitas.

Os elementos quase-singulares são aqueles em que as integrais são regulares, ou seja, integrais em que o ponto fonte não pertence ao contorno do elemento. Para a resolução dessas integrais, será utilizada a transformação polinomial de terceira ordem (Ref. (10)) que produz uma concentração dos pontos de integração de Gauss em direção à singularidade aumentando dessa forma a acurácia da solução.

Esta transformação também pode ser usada para o cálculo da integral singular que contém u^* , mas para o cálculo da integral singular que contém p^* deverá ser utilizada a integração por partes finitas de KUTT (Ref. (4)) uma vez que esta integral deve ser interpretada no sentido do Valor Principal de Cauchy.

IV.2.1 - Transformação Polinomial de Terceira Ordem

Considere a integral

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (\text{IV.22})$$

onde $f(\eta)$ é singular em $\bar{\eta}$; e a relação contida de terceira ordem

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (\text{IV.23})$$

onde γ = coordenada dos pontos de integração de Gauss.

Utilizando a transformação polinomial acima, temos

$$I = \int_{-1}^1 f(\gamma) J d\gamma \quad (\text{IV.24})$$

onde $J = \frac{d\eta}{d\gamma}$

A relação (IV.23) deve satisfazer as seguintes condições:

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = \bar{r}$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0$$
(IV.25)

$$\eta(1) = 1$$

$$\eta(-1) = -1$$

A primeira das condições acima equivale ao jacobiano no ponto $\bar{\eta}$ sendo que, para integral regular, este valor deve ser diferente de zero.

O parâmetro \bar{r} é função da distância D e varia de 0 à 1. A distância D , dada em coordenadas intrínsecas, equivale à menor distância entre o ponto fonte e o elemento. $\bar{\eta}$ é o ponto, pertencente ao elemento, que está mais próximo do ponto fonte ξ , conforme Figura (IV.3).

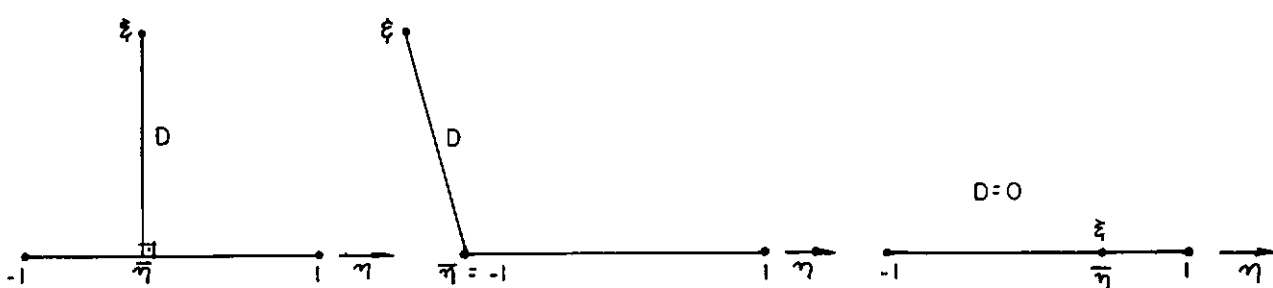


FIG. IV.3 DISTÂNCIA DO PONTO FONTE AO ELEMENTO

Com as condições dadas em (IV.25), podemos calcular os parâmetros de (IV.23)

$$a = (1 - \bar{r})/Q$$

$$b = -3(1 - \bar{r}) \bar{\gamma}/Q$$

(IV.26)

$$c = (\bar{r} + 3\bar{\gamma}^2)/Q$$

$$d = -b$$

onde

$$Q = 1 - 3\bar{\gamma}^2$$

(IV.27)

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{(q^2 + p^3)}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{(q^2 + p^3)}} + \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{r}}$$

sendo

$$q = \frac{1}{2(1+2\bar{r})} \left\{ \left[\bar{\eta} (3-2\bar{r}) - \frac{2\bar{\eta}^3}{1+2\bar{r}} \right] \frac{1}{1+2\bar{r}} - \bar{\eta} \right\}$$

(IV.28)

$$p = \frac{1}{3(1+2\bar{r})^2} \left[4\bar{r} (1-\bar{r}) + 3 (1-\bar{\eta}^2) \right]$$

Substituindo (IV.26) em (IV.23) e aplicando em (IV.24), calculamos facilmente o valor da integral I.

A relação entre \bar{r} e D, de acordo com TELLES (10), é dada por

$$\begin{aligned} \bar{r} &= 0 & D &\leq 0.05 \\ \bar{r} &= 0.85 + 0.24 \ln(D) & 0.05 &\leq D \leq 1.3 \\ \bar{r} &= 0.893 + 0.0832 \ln(D) & 1.3 &\leq D \leq 3.618 \\ \bar{r} &= 1 & 3.618 &\leq D \end{aligned}$$

(IV.29)

Podemos observar que, quando $D = 0$, a integral definida em (IV.22) se torna singular, ou seja, $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$. Outra observação importante é que a partir da distância $D = 3.618$, $\bar{r} = 1$ e, conseqüentemente, $J = 1$, ou seja; a integral dada em (IV.24) será efetuada utilizando diretamente a integração de Gauss.

A vantagem da utilização da transformação é que com um número reduzido de pontos de integração se obtém um resultado bastante satisfatório, reduzindo assim o tempo de computador.

Para saber quantos pontos de integração são necessários para obter um resultado com erro pequeno, foi desenvolvido um pequeno programa em que se variava $\bar{\eta}$ no extremo do elemento até o seu centro e, para cada posição de $\bar{\eta}$, variava D de um ponto distante do elemento até um ponto próximo. Para cada posição do ponto fonte, o programa calculava o erro médio das componentes da matriz de tensões e se esse erro fosse superior a 2% o programa imprimia o valor dessa distância, e a partir dessa distância passava a utilizar mais pontos de integração.

Obtivemos como resultados os seguintes valores:

$$\begin{array}{ll}
 D \leq 0.5 & p = 12 \\
 0.5 < D \leq 0.8 & p = 8 \\
 0.8 < D \leq 1.6 & p = 6 \\
 1.6 < D \leq 11.0 & p = 4 \\
 11.0 < D & p = 2
 \end{array} \quad (\text{IV.30})$$

onde p é o número de pontos de integração.

Deve-se observar que para o cálculo do número de pontos de integração necessários, foi utilizada a matriz de tensão cujas componentes tem $O(1/r^2)$. Dessa forma, para o cálculo das componentes das matrizes g e h esse erro se reduzirá mais ainda uma vez que elas são de $O(\ln 1/r)$ e $O(1/r)$, respectivamente.

IV.2.2 - Integração por Parte Finitas

Sendo a integral singular de h interpretada no sentido de Valor Principal de Cauchy, para o seu cálculo iremos utilizar integração numérica por partes finitas apresentada por Kutt.

Considere a integral de Valor Principal de Cauchy:

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-s)} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{s-\varepsilon} \frac{f(x)}{x-s} dx + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{f(x)}{x-s} dx \right\} \quad a < s < b \quad (\text{IV.31})$$

onde $f(x)$ satisfaz a condição de Hölder, ou seja, existem três constantes positivas B , α e C tais que:

$$|f(x) - f(s)| \leq Br^\alpha \quad (\text{IV.32})$$

para todo ponto x tal que $r < C$, sendo $r = |x - s|$

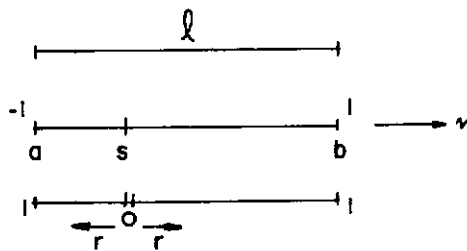


FIG. IV.4 INTEGRAÇÃO POR PARTES FINITAS

Utilizando a integral por partes finitas para comprimento unitário (Figura IV.4), temos:

$$I' = \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx \approx - \sum_{i=1}^n f \left[(a-s)x_i + s \right] w_i - f(s) \ln |a-s|$$

$$I'' = \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx \approx \sum_{i=1}^n f \left[(b-s)x_i + s \right] w_i + f(s) \ln |b-s| \quad (IV.33)$$

$$I = I' + I''$$

onde \int representa integral por partes finitas

x_i é a coordenada do i-ésimo ponto de integração e

w_i é o seu fator de peso associado

Notar que o último termo das equações descritas em (IV.33) é devido à escala de tamanho unitário da integral por partes finitas.

Para o cálculo da integral de h em (IV.21), considere:

$$f(x) = (x-s) \bar{h}(x) \quad (IV.34)$$

onde $\bar{h}(x) = p^* N^T$

sendo p^* função de $(1/r)$ onde $r = |x-s|$

Desta forma, estaremos integrando

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (IV.35)$$

onde

$$F(x) = \frac{f(x)}{(x-s)}$$

Utilizando o procedimento acima para a resolução da integral de h singular, verificou-se que com apenas 6 pontos de Kutt se chegava a um resultado bem preciso.

IV.2.3 - Problemas de Descontinuidade

De maneira a poder simular a descontinuidade das forças de superfície sobre o contorno, utiliza-se o conceito de nó duplo (Ref. (4) e (5)) que consiste em ter 2 nós no mesmo ponto sem nenhum elemento interligando-os (Figura IV.5). Desta forma, são geradas equações extras que permitem a consideração de uma força de superfície adicional em cada nó onde existe descontinuidade.

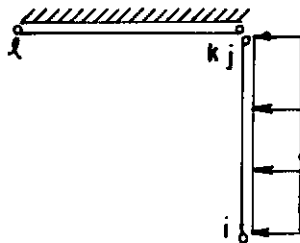


FIG. IV.5 DESCONTINUIDADE SIMULADA POR NÓ DUPLO

A única restrição à utilização do nó duplo ocorre quando ambos os nós tem como condição de contorno a componente deslocamento prescrita na mesma direção (Fig. IV.6). Neste caso, os elementos das duas linhas da matriz \tilde{A} (Equação (IV.19)) correspondentes ao nó duplo são iguais, gerando singularidade nesta matriz.

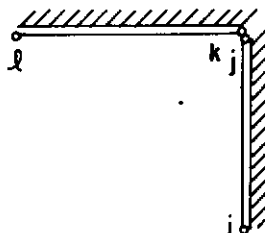


FIG. IV.6 DESLOCAIMENTO PRESCRITO NAS DUAS DIREÇÕES

Para este caso, pode-se usar o conceito de elemento descontínuo (Figura IV.7). PATTERSON e SHEIKH (9) apresentam a introdução de um elemento que consiste no deslocamento do nó funcional da extremidade do elemento modificando-se a função de interpolação.

Neste trabalho, utilizamos o chamado elemento interpolado (Ref. (7) e (8)). Este elemento é formulado de tal modo que o ponto fonte é deslocado do canto para o interior do elemento não modificando a função de interpolação, ou seja, o nó funcional é mantido no extremo do elemento. Uma das vantagens que este elemento apresenta em relação ao elemento descontínuo está no fato de permitir a junção do Método dos Elementos de Contor-

no com o Método dos Elementos Finitos sem a necessidade de extra polar valores de deslocamento na interface.

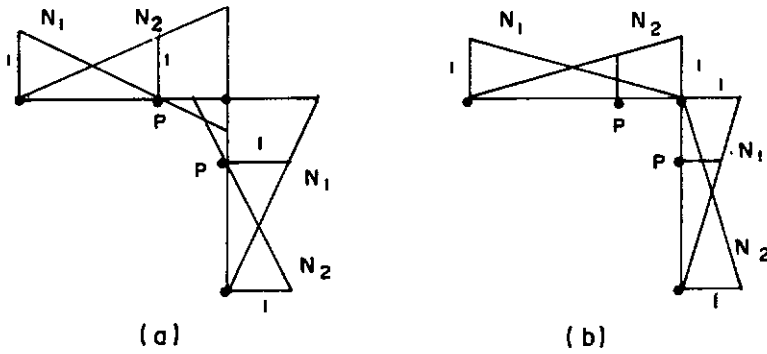


FIG. IV.7 (a) ELEMENTO DESCONTÍNUO (b) ELEMENTO INTERPOLADO

Expressando os deslocamentos no ponto interpolado em função dos deslocamentos dos pontos extremos do elemento k (Figura IV.8), temos:

$$u_k^{p1} = N_1^k(P) u_k^{i1} + N_2^k(P) u_k^{f1} \quad (\text{IV.36})$$

$$u_k^{p2} = N_1^k(P) u_k^{i2} + N_2^k(P) u_k^{f2}$$

onde $N_1^k(P)$ e $N_2^k(P)$ são os valores das funções $N_1(\eta)$ e $N_2(\eta)$ no ponto P do elemento " k "

u_k^{ab} é o deslocamento na direção " b " no ponto " a " do elemento " k "

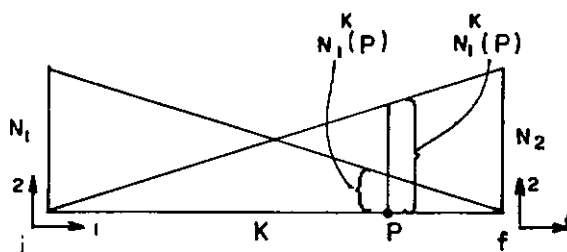


FIG. IV.8 FUNÇÕES DE PONDERAÇÃO NO PONTO P

De acordo com MARQUES (7), podemos adotar o valor da distância de afastamento do nó funcional (TAX) como sendo de 25% do comprimento do elemento (Figura IV.9) de maneira que não haja distorção dos resultados por motivos de má integração numérica no elemento vizinho e nem cause problemas de singularidade na matriz \tilde{G} .

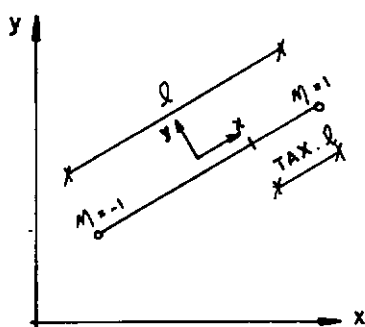


FIG. IV.9 DISTÂNCIA DE AFASTAMENTO DO NÓ FUNCIONAL

Conforme visto anteriormente, para o cálculo das integrais singulares g e h será utilizado a integração por Kutt. Notar que para o elemento interpolado, devemos calcular as integrais relativas aos 2 intervalos, conforme Figura IV.10.

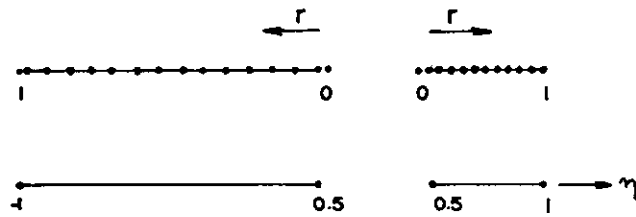


FIG. IV.10 PONTOS DE KUTT PARA ELEMENTO INTERPOLADO

Quando o ponto fonte está contido em um elemento contínuo, o cálculo da submatriz da diagonal de \tilde{H} da Equação (IV.18) pode ser obtida implicitamente através da imposição da condição de que translações do corpo rígido correspondem a forças de superfície nulas. Portanto, adotando duas translações independentes $u_i = \delta_{i1}$ e $u_i = \delta_{i2}$ podemos calcular indiretamente as submatrizes da diagonal de \tilde{H} na forma:

$$\tilde{H}_{pp} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^N \tilde{H}_{pq} \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.37)$$

para regiões finitas, e

$$\tilde{H}_{pp} = I - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^N \tilde{H}_{pq} \quad (p = 1, 2, \dots, N) \quad (IV.38)$$

para regiões infinitas,

onde \tilde{H}_{pq} representa submatriz (2×2) de \tilde{H} .

Quando o ponto fonte está contido em um elemento interpolado é usada a integração por partes finitas. Devemos, então, acrescentar à submatriz H_{pp} o coeficiente $C_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{2}$ extrapolado para os nós extremos (Figura IV.11).

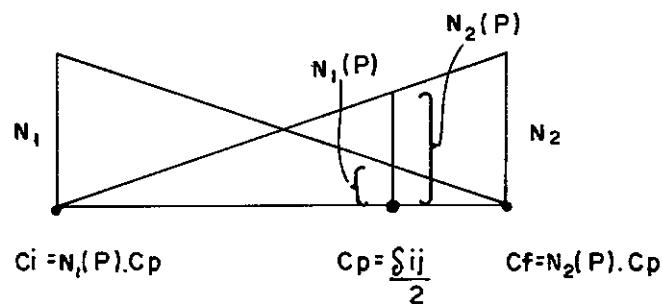


FIG. IV.11 EXTRAPOLAÇÃO DO COEFICIENTE C_{ij} PARA O ELEMENTO INTERPOLADO

IV.3 - Simetria

Corpos simétricos sujeitos a carregamentos simétricos podem ser discretizados por regiões conforme Figura IV.12.

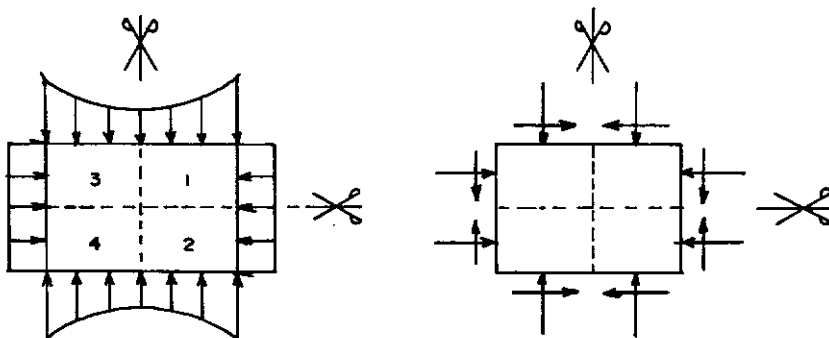


FIG. IV.12 SIMETRIA

Teremos então:

$$\begin{bmatrix} \underline{H}_{11} & \underline{H}_{12} & \underline{H}_{13} & \underline{H}_{14} \\ \underline{H}_{21} & \underline{H}_{22} & \underline{H}_{23} & \underline{H}_{24} \\ \underline{H}_{31} & \underline{H}_{32} & \underline{H}_{33} & \underline{H}_{34} \\ \underline{H}_{41} & \underline{H}_{42} & \underline{H}_{43} & \underline{H}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{G}_{11} & \underline{G}_{12} & \underline{G}_{13} & \underline{G}_{14} \\ \underline{G}_{21} & \underline{G}_{22} & \underline{G}_{23} & \underline{G}_{24} \\ \underline{G}_{31} & \underline{G}_{32} & \underline{G}_{33} & \underline{G}_{34} \\ \underline{G}_{41} & \underline{G}_{42} & \underline{G}_{43} & \underline{G}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \underline{p}_3 \\ \underline{p}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

onde \underline{H}_{ij} ou \underline{G}_{ij} é a submatriz que relaciona os valores nodais do contorno da região "j" quando a carga unitária está em pontos nodais do contorno da região "i";

\underline{u}_j ou \underline{p}_j é o subvetor que contém os valores nodais ao longo do contorno da região "j".

Podemos condensar o sistema de equações em (IV.39) para uma matriz de dimensão correspondente à submatriz \underline{H}_{11} e \underline{G}_{11} refletindo o elemento.

Ao invés de refletir o elemento, reflete-se o nó singular mantendo os elementos em suas posições originais. Para isso, deve haver trocas de sinais nas seguintes linhas das submatrizes g e h (2 x 4).

- i) Simetria em X - Troca de sinal na segunda linha das submatrizes g e h;
- ii) Simetria em Y - Troca de sinal na primeira linha das submatrizes g e h;

- iii) Dupla Simetria - Troca de sinal nas duas linhas das submatrizes g e h .

Para calcular as submatrizes da diagonal de \tilde{H} por aplicação do movimento do corpo rígido, temos que transformar a matriz h de volta para a configuração que corresponde à integração sobre os elementos refletidos com sinais trocados.

Uma vez que o grupamento da matriz modificada acima tenha sido efetuado, podemos modificar a matriz h novamente por movimento de corpo rígido. Essa troca final é feita como segue: caso (i) troca de sinal das colunas 2 e 4; caso (ii) troca de sinal das colunas 1 e 3; caso (iii) troca de sinal de toda matriz.

CAPÍTULO V

EXEMPLOS ELÁSTICOS

Serão apresentados a seguir alguns exemplos ilustrativos bidimensionais no regime elástico considerando Estado Plano de Tensões (E.P.T.) ou Estado Plano de Deformações (E.P.D.). Observou-se que, para uma mesma malha, os resultados serão mais precisos se melhor forem feitas as resoluções das integrais g e h singulares. Com isso, foram considerados 4 casos a seguir apresentados:

Caso A - Integrais g e h singulares resolvidas analiticamente.

Caso B - Integral g singular resolvida numericamente utilizando a transformada de 3^a ordem com 12 pontos de Gauss; Integral h singular resolvida numericamente utilizando a integração por partes finitas com 8 pontos de Kutt.

Caso C - Semelhante ao Caso B, com a diferença em que se utilizam 16 pontos de Gauss na integração de g singular.

Caso D - Integrais g e h singulares resolvidas numericamente utilizando integração por partes finitas com 16 pontos de Kutt.

Quando houver descontinuidade de tensão será utilizado o conceito de nó duplo apenas para o Caso A, enquanto que para os outros casos será utilizado o elemento interpolado.

V.1 - Placa Quadrada Tractionada

Considere o problema da placa quadrada (E.P.T.) com dupla simetria discretizado com elementos lineares conforme Figura (V.1) (Ref. (4) e (5)).

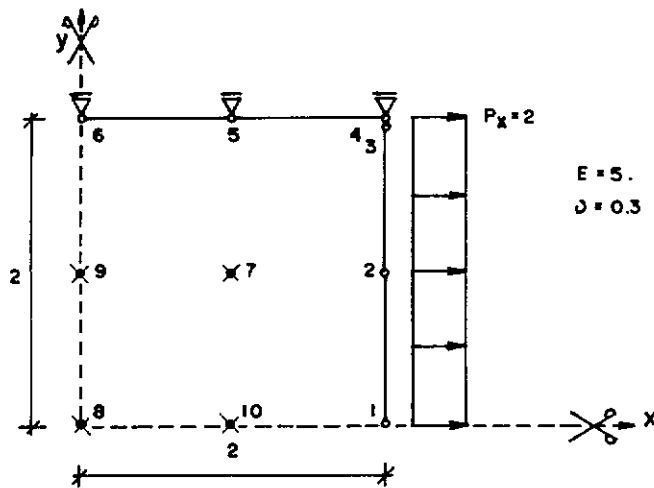


FIG. V.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DA PLACA QUADRADA

Nas Tabelas (V.1) a (V.3) estão indicados os valores dos deslocamentos na direção X e as tensões em S_x e S_y para todos os pontos.

Tabela V.1 - Deslocamentos na direção X

NÓ	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
1	0.7280	0.7282	0.7280	0.7280
2	0.7280	0.7281	0.7280	0.7280
3	0.7280	0.7265	0.7279	0.7280
4	0.7280	0.7273	0.7280	0.7280
5	0.3640	0.3638	0.3640	0.3640
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.3640	0.3640	0.3640	0.3640
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.3640	0.3641	0.3640	0.3640

Tabela V.2 - Tensões na direção X

NÓ	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
1	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
2	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
3	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
4	2.0000	1.9980	1.9999	2.0000
5	2.0000	1.9983	1.9999	2.0000
6	2.0000	1.9991	2.0000	2.0000
7	2.0000	2.0001	2.0001	2.0001
8	2.0000	2.0003	2.0000	2.0000
9	2.0000	1.9998	2.0000	2.0000
10	2.0000	2.0005	2.0001	2.0001

Tabela V.3 - Tensões na direção y

Nº	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
1	0.6000	0.6012	0.6001	0.6000
2	0.6000	0.6007	0.6000	0.6000
3	0.6000	0.6002	0.6000	0.6000
4	0.6000	0.6007	0.6000	0.6000
5	0.6000	0.6007	0.6000	0.6000
6	0.6000	0.6003	0.6000	0.6000
7	0.6000	0.5998	0.5999	0.5999
8	0.6000	0.5997	0.6000	0.6000
9	0.6000	0.5999	0.6000	0.6000
10	0.6000	0.5999	0.5999	0.5999

V.2 - Problemas da Cavidade Cilíndrica

Considere agora o problema de uma cavidade cilíndrica no meio infinito (E.P.D.) submetida a uma pressão interna (Ref. (4) e (5)) discretizado conforme Figura (V.2) utilizando du pla simetria.

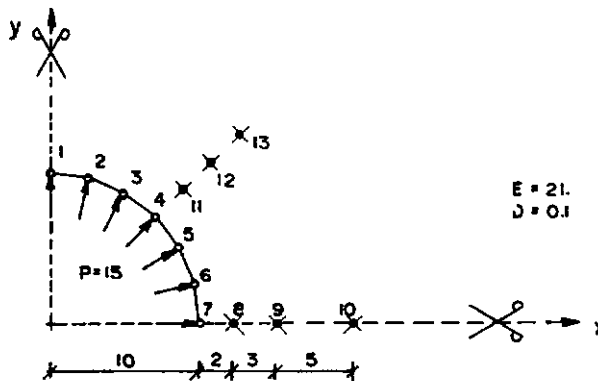


FIG. V.2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DA CAVIDADE CILÍNDRICA

Nas Tabelas (V.4) à (V.7) estão indicados os deslocamentos e as tensões de todos os nós, para os casos A, B, C e D respectivamente.

Tabela V.4 - Deslocamentos e tensões nos nós - Caso A

NÓ	u	v	Sx	Sxy	Sy	Sz
1	.0000	7.7353	14.7577	.0000	-14.8737	-.0116
2	2.0020	7.4717	12.7729	- 7.4078	-12.8888	-.0116
3	3.8676	6.6990	7.3499	-12.8308	- 7.4658	-.0116
4	5.4697	5.4697	- .0580	-14.8157	- .0580	-.0116
5	6.6990	3.8676	- 7.4658	-12.8308	7.3499	-.0116
6	7.4717	2.0020	-12.8888	- 7.4078	12.7729	-.0116
7	7.7353	.0000	-14.4078	.0000	14.7576	-.0116
8	6.4100	.0000	-10.2220	.0000	10.2136	-.0008
9	5.1274	.0000	- 6.5259	.0000	6.5259	.0000
10	3.8455	.0000	- 3.6707	.0000	3.6707	.0000
11	4.5325	4.5325	- .0042	-10.2178	- .0042	-.0008
12	3.6256	3.6256	.0000	- 6.5259	.0000	.0000
13	2.7192	2.7192	.0000	- 3.6707	.0000	.0000

Tabela V.5 - Deslocamentos e tensões nos nós - Caso B

NÓ	u	v	Sx	Sxy	Sy	Sz
1	.0000	7.7353	14.7576	.0000	-14.8737	-.0116
2	2.0020	7.4717	12.7728	- 7.4078	-12.8888	-.0116
3	3.8676	6.6990	7.3499	-12.8308	- 7.4659	-.0116
4	5.4697	5.4697	- .0580	-14.8157	- .0580	-.0116
5	6.6990	3.8676	- 7.4659	-12.8308	7.3499	-.0116
6	7.4717	2.0020	-12.8888	7.4078	12.7728	-.0116
7	7.7353	.0000	-14.8737	.0000	14.7576	-.0116
8	6.4099	.0000	-10.2219	.0000	10.2135	-.0008
9	5.1274	.0000	- 6.5259	.0000	6.5259	.0000
10	3.8455	.0000	- 3.6707	.0000	3.6707	.0000
11	4.5325	4.5325	- .0042	-10.2177	- .0042	-.0008
12	3.6256	3.6256	.0000	- 6.5259	.0000	.0000
13	2.7192	2.7192	.0000	- 3.6707	.0000	.0000

Tabela V.6 - Deslocamentos e tensões nos nós - Caso C

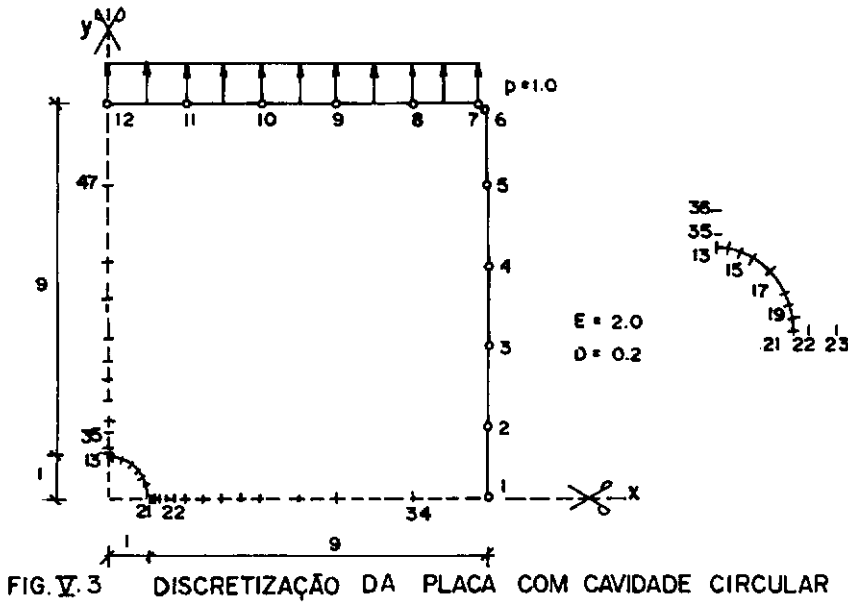
NÓ	u	v	Sx	Sxy	Sy	Sz
1	.0000	7.7353	14.7576	.0000	-14.8737	-.0116
2	2.0020	7.4717	12.7728	- 7.4078	-12.8888	-.0116
3	3.8676	6.6990	7.3499	-12.8308	- 7.4659	-.0116
4	5.4697	5.4697	- .0580	-14.8157	- .0580	-.0116
5	6.6990	3.8676	- 7.4659	-12.8308	7.3499	-.0116
6	7.4717	2.0020	-12.8888	- 7.4078	12.7728	-.0116
7	7.7353	.0000	-14.8737	.0000	14.7576	-.0116
8	6.4099	.0000	-10.2219	.0000	10.2135	-.0008
9	5.1274	.0000	- 6.5259	.0000	6.5259	.0000
10	3.8455	.0000	- 3.6707	.0000	3.6707	.0000
11	4.5325	4.5325	- .0042	-10.2177	- .0042	-.0008
12	3.6256	3.6256	.0000	- 6.5259	.0000	.0000
13	2.7192	2.7192	.0000	- 3.6707	.0000	.0000

Tabela V.7 - Deslocamentos e tensões nos nós - Caso D

NÓ	u	v	Sx	Sxy	Sy	Sz
1	.0000	7.7354	14.7579	.0000	-14.8737	-.0116
2	2.0021	7.4718	12.7731	- 7.4078	-12.8888	-.0116
3	3.8677	6.6991	7.3501	-12.8308	- 7.4658	-.0116
4	5.4697	5.4697	- .0579	-14.8158	- .0579	-.0116
5	6.6991	3.8677	- 7.4658	-12.8308	7.3501	-.0116
6	7.4718	2.0021	-12.8888	- 7.4078	12.7731	-.0116
7	7.7354	.0000	-14.8737	.0000	14.7579	-.0116
8	6.4100	.0000	-10.2220	.0000	10.2135	-.0008
9	5.1274	.0000	- 6.5260	.0000	6.5259	.0000
10	3.8456	.0000	- 3.6708	.0000	3.6708	.0000
11	4.5325	4.5325	- .0042	-10.2177	- .0042	-.0008
12	3.6256	3.6256	.0000	- 6.5260	.0000	.0000
13	2.7192	2.7192	.0000	- 3.6708	.0000	.0000

V.3 - Placa Finita com Cavidade Circular

A solução analítica para o problema da placa infinita com cavidade circular (E.P.T.) submetida a uma tensão uniaxial é apresentada por TIMOSHENKO e GOODIER (12). A discretização é apresentada na Figura V.3.



As tensões σ_y ao longo do eixo X e σ_x ao longo do eixo Y são mostradas nas Tabelas (V.8) e (V.9), respectivamente.

Tabela V.8 - Tensões σ_y sobre o eixo X

X	NÓ	SOLUÇÃO EXATA	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
1.0	21	3.000	3.176	3.176	3.176	3.176
1.1	22	2.438	2.503	2.503	2.503	2.503
1.2	23	2.071	2.106	2.107	2.107	2.107
1.3	24	1.821	1.848	1.848	1.848	1.848
1.5	25	1.519	1.540	1.540	1.540	1.540
1.7	26	1.353	1.373	1.373	1.373	1.373
2.0	27	1.219	1.239	1.239	1.239	1.239
2.5	28	1.118	1.138	1.138	1.138	1.138
3.0	29	1.074	1.092	1.092	1.092	1.092
3.5	30	1.051	1.067	1.067	1.067	1.067
4.0	31	1.037	1.052	1.051	1.051	1.051
5.0	32	1.022	1.032	1.032	1.032	1.032
6.0	33	1.015	1.019	1.020	1.020	1.020
8.0	34	1.008	0.998	0.998	0.998	0.998
10.0	1	1.005	0.970	0.970	0.970	0.970

Tabela V.9 - Tensões σ_x sobre o eixo Y

Y	NÓ	SOLUÇÃO EXATA	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
1.0	13	-1.000	-1.111	-1.111	-1.111	-1.111
1.1	35	-0.611	-0.652	-0.652	-0.652	-0.652
1.2	36	-0.376	-0.399	-0.399	-0.399	-0.399
1.3	37	-0.224	-0.247	-0.247	-0.247	-0.247
1.5	38	-0.074	-0.089	-0.089	-0.089	-0.089
1.7	39	-0.007	-0.021	-0.021	-0.021	-0.021
2.0	40	0.031	0.018	0.018	0.018	0.018
2.5	41	0.042	0.030	0.030	0.030	0.030
3.0	42	0.037	0.027	0.027	0.028	0.027
3.5	43	0.031	0.022	0.022	0.022	0.022
4.0	44	0.025	0.019	0.019	0.019	0.019
5.0	45	0.018	0.016	0.016	0.016	0.016
6.0	46	0.013	0.017	0.017	0.017	0.017
8.0	47	0.007	0.029	0.029	0.029	0.029
10.0	12	0.005	0.058	0.058	0.058	0.058

V.4 - Viga em Balanço com Carga na Extremidade

Considere a viga engastada em uma extremidade e com um carregamento distribuído parabólico de forças de cisalhamento no outro extremo (Ref. (6) e (11)). O contorno será discretizado com 36 elementos de mesmo comprimento (Figura (V.4)).

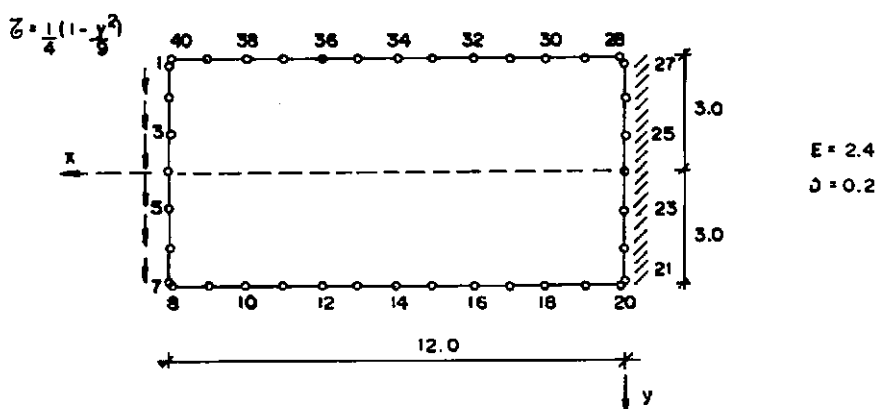


FIG. V.4 DISCRETIZAÇÃO DA VIGA EM BALANÇO

Como o carregamento é parabólico e o elemento linear, foi feita uma distribuição de cargas nos nós de maneira que melhor pudesse simular o carregamento (Tabela V.10).

Tabela V.10 - Cargas nos nós

NÓ	Py
1	.0000
2	.1481
3	.2222
4	.2593
5	.2222
6	.1481
7	.0000

Na Tabela (V.11) apresentamos os deslocamentos na direção do eixo Y ao longo do eixo X.

Tabela V.11 - Deslocamentos na direção Y ao longo da viga

X	CASO A	CASO B	CASO C	CASO D
12.0	15.1795	15.2461	15.2461	15.2464
11.0	13.4070	13.4627	13.4627	13.4630
10.0	11.6385	11.6919	11.6919	11.6921
9.0	9.9141	9.9645	9.9645	9.9647
8.0	8.2579	8.3048	8.3048	8.3050
7.0	6.6923	6.7356	6.7356	6.7358
6.0	5.2397	5.2791	5.2791	5.2792
5.0	3.9224	3.9577	3.9577	3.9578
4.0	2.7627	2.7937	2.7937	2.7938
3.0	1.7824	1.8090	1.8090	1.8090
2.0	1.0001	1.0229	1.0229	1.0230
1.0	.4222	.4460	.4460	.4460

Podemos observar, nos exemplos anteriores, que entre os casos em que as integrais foram resolvidas numericamente, o caso D foi o que obtivemos melhores resultados, principalmente nos exemplos em que foi utilizado o elemento interpolado.

Para o elemento singular, o caso D apresenta a vantagem de utilizar apenas uma subrotina de integração, sendo necessário, porém, o uso de 16 pontos de Kutt para o cálculo da integral g singular.

CAPÍTULO VI

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADOS A PROBLEMAS VISCOELÁSTICOS

Na seção II.2.3, apresentamos as características do material sólido elástico representado por uma mola, e do material fluido viscoso representado por um amortecedor. Conforme foi dito anteriormente, o comportamento dos materiais viscoelásticos em estados de tensões uniaxiais nada mais é do que a combinação de molas e amortecedores formando diversos modelos. Estes modelos apresentam uma relação linear entre tensão e deformação que depende de um terceiro parâmetro: o tempo. Como esta relação é escrita em termos de tensão e deformação, representaremos todas as forças atuantes nas molas e amortecedores como σ e as extensões como ϵ .

VI.1 - Fluência e Relaxação

Para estudar o comportamento dos modelos viscoelásticos, devemos definir o conceito de fluência e relaxação.

Fluência é o aumento da deformação sob uma tensão constante $\sigma(t) = \sigma_0 \Delta(t)$ onde $\Delta(t)$ é conhecida como função degrau unitária sendo definida por:

$$\Delta(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0$$

$$\Delta(t) = 1 \quad \text{para} \quad t > 0$$

(VI.1)

Uma vez que são considerados apenas materiais lineares, a deformação será sempre proporcional a σ_0 e pode ser escrita como:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) \quad (\text{VI.2})$$

onde $J(t)$ é a função de fluência e varia para cada modelo.

O mesmo raciocínio deve ser feito para a definição de relaxação. Considere um modelo em que a deformação inicial ϵ_0 foi causada pela tensão σ_0 . Fixando os extremos do modelo, ou seja, mantendo a deformação constante $\epsilon(t) = \epsilon_0 \Delta(t)$, a tensão decresce. Desde que as equações sejam lineares, σ será proporcional a ϵ_0 :

$$\sigma(t) = \epsilon_0 R(t) \quad (\text{VI.3})$$

onde $R(t)$ é a função de relaxação.

O material viscoelástico é definido pela específica função de fluência ou função de relaxação. Como exemplos deste tipo de material, temos metais na temperatura próxima do ponto de fusão, concreto, plásticos e polímeros.

VI.2 - Fluído de Maxwell e Sólido de Kelvin

De maneira a poder firmar o conceito de fluência e relaxação, considere como exemplo os modelos de viscoelasticidade linear de Maxwell e Kelvin apresentados na Figura VI.1 (Ref. (1) a (3)).

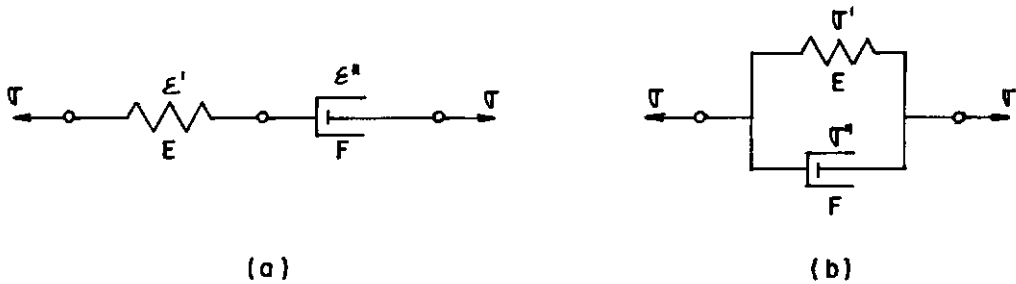


FIG. VI.1 MODELOS DE VISCOELASTICIDADE LINEAR (a) MAXWELL (b) KELVIN

No modelo de Maxwell, como a mola e o amortecedor estão ligados em série, a tensão atuando em ambas será a mesma, mas a variação da deformação total será igual à soma das variações na mola e no amortecedor. Já no modelo de Kelvin, a deformação será a mesma para os dois elementos uma vez que eles estão ligados em paralelo, mas a tensão total será a soma das tensões na mola e no amortecedor.

Dessa forma, a relação tensão-deformação pode ser expressa como:

$$\text{Maxwell: } \dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{F} \quad (\text{VI.4})$$

$$\text{Kelvin : } \sigma = E\epsilon + F\dot{\epsilon}$$

As funções de fluência podem ser calculadas resolvendo as equações dadas em (VI.4) para $\sigma = \sigma_0 \Delta(t)$, obtendo-se:

$$\text{Maxwell: } J(t) = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{F} t \right] \quad (\text{VI.5})$$

$$\text{Kelvin : } J(t) = \frac{1}{E} \left[1 - e^{-t/\tau} \right]$$

onde τ é conhecida como tempo de relaxação ou tempo de retardamento e é dado por:

$$\tau = \frac{F}{E} \quad (\text{VI.6})$$

Analisando graficamente as Equações (VI.4) e (VI.5) (Figura VI.2), vemos que para o modelo de Maxwell, a aplicação repentina de uma tensão induz em uma imediata deformação elástica da mola seguido pela fluência do amortecedor. Já no modelo de Kelvin, a aplicação repentina da tensão não irá causar uma deformação imediata pois o amortecedor, estando em paralelo com a mola, não irá se mover instantaneamente e sim gradualmente numa variação de $(1 - e^{-t/\tau})$. Devemos observar que se $t_1 \rightarrow \infty$, $\epsilon_\infty = \frac{\sigma_0}{E}$ que corresponde ao comportamento elástico.

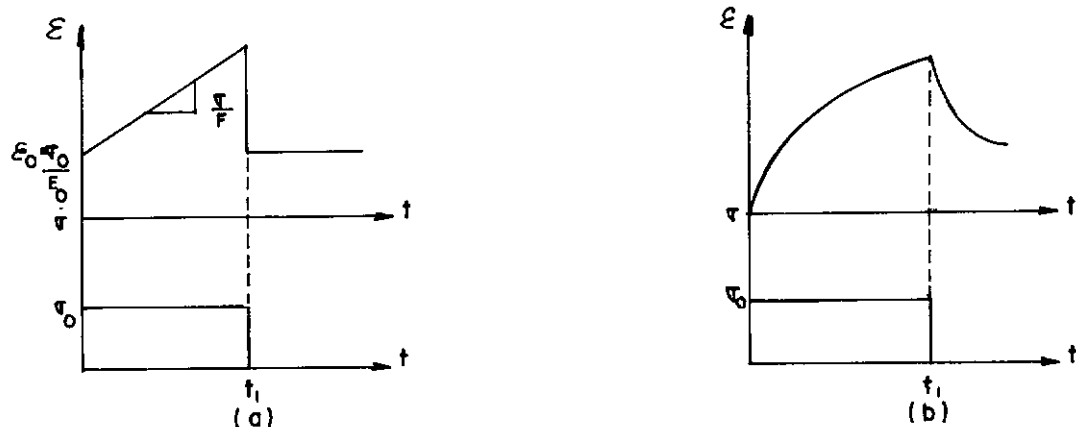


FIG. VI.2 FUNÇÕES DE FLUÊNCIA PARA O MODELO DE (a) MAXWELL E (b) KELVIN

Considerando agora $\varepsilon = \varepsilon_0 \Delta(t)$, obtemos como funções de relaxação para os modelos de Maxwell e Kelvin:

$$\text{Maxwell: } R(t) = E e^{-t/\tau} \quad (\text{VI.7})$$

$$\text{Kelvin : } R(t) = E + F \delta(t)$$

Analisando graficamente (Figura VI.3) as expressões acima, vemos que no modelo de Maxwell, a deformação repentina produz uma imediata tensão na mola seguida por uma relaxação de tensão proporcional a $e^{-t/\tau}$. No modelo de Kelvin, quando a deformação é fixada, a tensão é imediatamente relaxada para um certo valor e mantida constante ao longo do tempo, ou seja; a relaxação é incompleta.

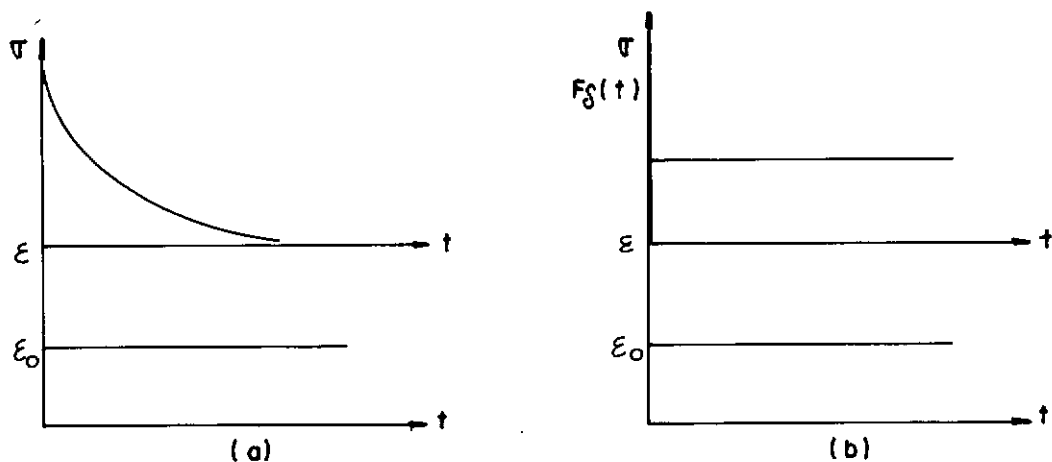


FIG. VI.3 FUNÇÃO DE RELAXAÇÃO PARA O MODELO DE (a) MAXWELL
E (b) KELVIN

VI.3 - Relação Tensão-Deformação em Forma de Equações Diferenciais Para os Modelos Generalizados de Maxwell e Kelvin

Existem dois tipos de modelos mais complicados conhecidos como modelo generalizado de Maxwell e modelo generalizado de Kelvin (Figura VI.4). O primeiro é formado por N elementos de Maxwell em paralelo enquanto que o segundo consiste de N elementos de Kelvin em série.

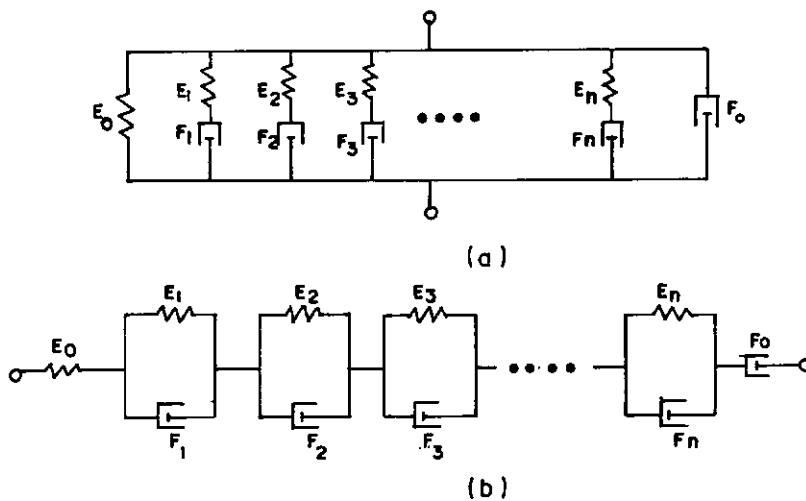


FIG.VI.4 MODELOS GENERALIZADOS DE (a) MAXWELL E (b) KELVIN

A equação diferencial de qualquer modelo generalizado de Kelvin ou Maxwell tem a forma:

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + \dots = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon} + q_2 \ddot{\epsilon} + \dots \quad (\text{VI.8a})$$

ou

$$\sum_{k=0}^m p_k \frac{d^k \sigma}{dt^k} = \sum_{k=0}^n q_k \frac{d^k \epsilon}{dt^k} \quad (\text{VI.8b})$$

A equação acima também pode ser escrita na forma:

$$P\sigma = Q\varepsilon \quad (\text{VI.9})$$

onde P e Q são os operadores diferenciais

$$P = \sum_0^m p_k \frac{d^k}{dt^k} \quad \text{e} \quad Q = \sum_0^n q_k \frac{d^k}{dt^k} \quad (\text{VI.10})$$

A transformada de Laplace faz com que equações diferenciais no domínio do tempo se transformem em equações algébricas no domínio transformado dependentes do parâmetro s no qual são mais facilmente resolvidas. Portanto, utilizando a transformada de Laplace

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{VI.11})$$

em (VI.9) temos:

$$P(s) \cdot \bar{\sigma} = Q(s) \bar{\varepsilon} \quad (\text{VI.12})$$

onde P e Q são polinômios em s

$$P(s) = \sum_0^m p_k s^k \quad \text{e} \quad Q(s) = \sum_0^n q_k s^k \quad (\text{VI.13})$$

Para obter a função de fluência, considere $\sigma_0 = 1$.

Teremos então:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= 1 \cdot \Delta(t) \\ \varepsilon(t) &= 1 \cdot J(t) \end{aligned} \quad (\text{VI.14})$$

Aplicando a transformada de Laplace (Equação (VI.11)) nas equações anteriores e utilizando a Equação (VI.12), chegamos a:

$$\bar{J}(s) = \frac{P(s)}{sQ(s)} \quad (\text{VI.15})$$

Transformando para o domínio do tempo obtemos a função de fluência $J(t)$.

Como exemplo, para o modelo geral de Kelvin, a função de fluência é dada por (Ref. (1)):

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{F} t + \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left(1 - e^{-t/\tau_i} \right) \quad (\text{VI.16})$$

Da mesma forma que encontramos a Equação (VI.15), podemos obter a função de relaxação considerando $\epsilon_0 = 1$. Teremos então:

$$\bar{R}(s) = \frac{Q(s)}{sP(s)} \quad (\text{VI.17})$$


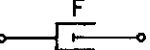


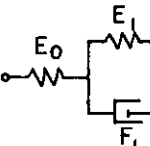
na qual $R(t)$ pode ser encontrado calculando a inversa da transformada de Laplace na Equação (VI.17).

Comparando as Equações (VI.15) e (VI.17) encontramos uma relação entre as transformadas das funções de fluência e de relaxação dada por:

$$\bar{J}(s)\bar{R}(s) = s^{-2} \quad (\text{VI.18})$$

Na Tabela VI.1 estão apresentados alguns modelos viscoelásticos e suas funções de fluência e relaxação.

Tabela VI.1 - Modelos viscoelásticos

MODELO	NOME	EQUAÇÃO DIFERENCIAL ($p_0 = 1$)	COEFICIENTE DA EQUAÇÃO	FUNÇÃO DE FLUÊNCIA (J)	FUNÇÃO DE RELAXAÇÃO (R)
	sólido elástico	$\sigma = q_0 \epsilon$	$q_0 = E$	$1/q_0$	q_0
	fluido viscoso	$\sigma = q_1 \dot{\epsilon}$	$q_1 = F$	t/q_1	$q_1 \delta(t)$
	fluido de Maxwell	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_1 \dot{\epsilon}$	$p_1 = \frac{F}{E}$ $q_1 = F$	$(p_1 + t)/q_1$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/p_1}$
	sólido de Kelvin	$\sigma = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$	$q_0 = E$ $q_1 = F$	$\frac{1}{q_0} \left(1 - e^{-tq_0/q_1} \right)$	$q_0 + q_1 \delta(t)$
	sólidos de três parâmetros	$\sigma + p_1 \dot{\sigma} = q_0 \epsilon + q_1 \dot{\epsilon}$	$p_1 = \frac{F_1}{E_0 + E_1}$ $q_0 = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$ $q_1 = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}$	$\frac{p_1}{q_1} e^{-tq_0/q_1} + \frac{1}{q_0} (1 - e^{-tq_0/q_1})$	$\frac{q_1}{p_1} e^{-t/p_1} + q_0 (1 - e^{-t/p_1})$

VI.4 - Integrais Hereditárias

Na seção anterior, descrevemos a equação constitutiva dos materiais viscoelásticos pela equação diferencial (VI.8). Podemos descrevê-las por outro meio: as integrais hereditárias.

Considere uma barra submetida a uma tensão constante σ_0 . Se no instante $t = t'$ for adicionada uma tensão de magnitude $\Delta\sigma'$ (Figura VI.5), teremos para $t > t'$ uma deformação adicional proporcional a $\Delta\sigma'$ e que depende da mesma função de fluência. Utilizando o princípio da superposição introduzido por Boltzmann (Ref. (1) e (3)), teremos como deformação total para $t > t'$:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \Delta\sigma' J(t - t') \quad (\text{VI.19})$$

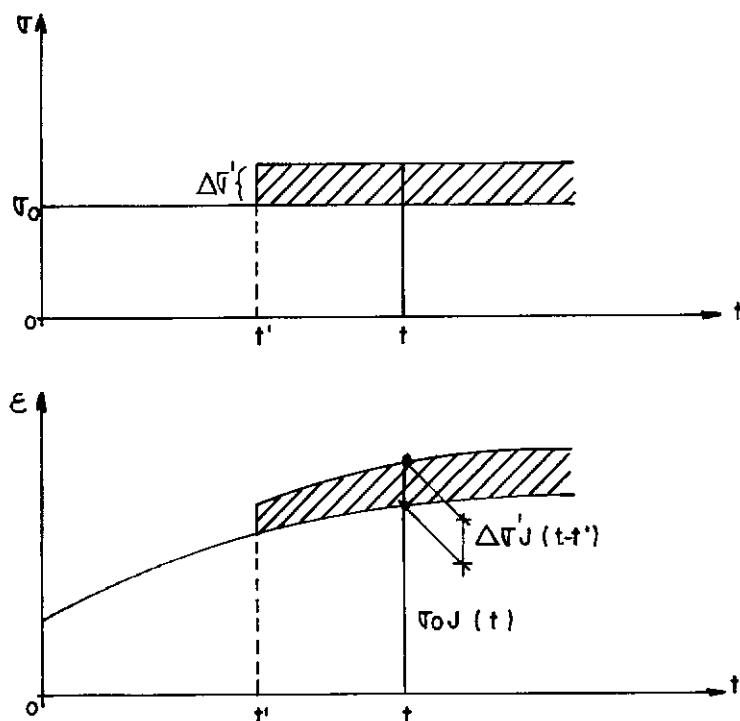


FIG. VI.5 SUPERPOSIÇÃO DE TENSÕES

Considere agora o caso geral em que a tensão σ_0 é aplicada no instante inicial mas ela varia ao longo do tempo (Figura VI.6). O diagrama de tensão pode ser decomposto em uma soma incluindo a função degrau $\sigma_0 \Delta(t)$ e as funções degraus infinitesimais da forma $d\sigma' \cdot \Delta(t - t')$. A correspondente deformação no tempo t será a soma das deformações causadas por todas as funções degraus, ou seja:

$$\epsilon(t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t - t') \frac{d\sigma'}{dt'} dt' \quad (\text{VI.20})$$

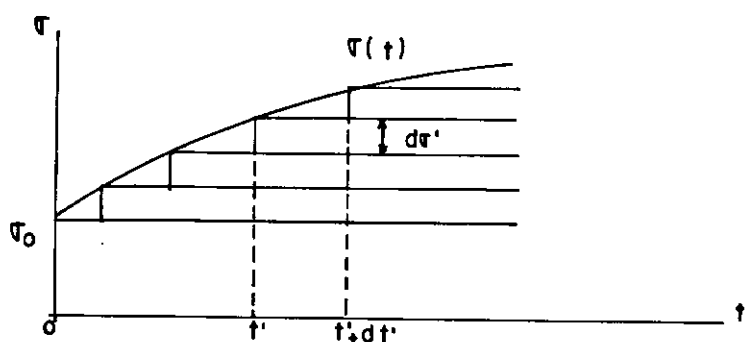


FIG. VI.6 DERIVAÇÃO DE INTEGRAL HEREDITÁRIA

A Equação (VI.20) nada mais é que a convolução de J e $\dot{\sigma}$. Portanto, ela pode ser escrita na forma:

$$\epsilon(t) = J(t) * \dot{\sigma}(t) \quad (\text{VI.21})$$

A integral definida em (VI.20) é conhecida como integral hereditária e mostra que a deformação em um dado tempo

t depende da história da tensão e não apenas da tensão no instante t .

Como exemplo, considere o material formado pelo modelo de Maxwell e os diagramas de tensão da Figura (VI.7). Utilizando a Equação (VI.20) podemos notar que no instante $t = t_1$, as deformações são dadas respectivamente por:

$$a) \quad \varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_1}{q_1} p_1$$

$$b) \quad \varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_1}{q_1} \left(p_1 + \frac{t_1}{2} \right)$$

$$c) \quad \varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_1}{q_1} (p_1 + t_1)$$

Vemos, portanto, que a deformação é função da história da tensão.

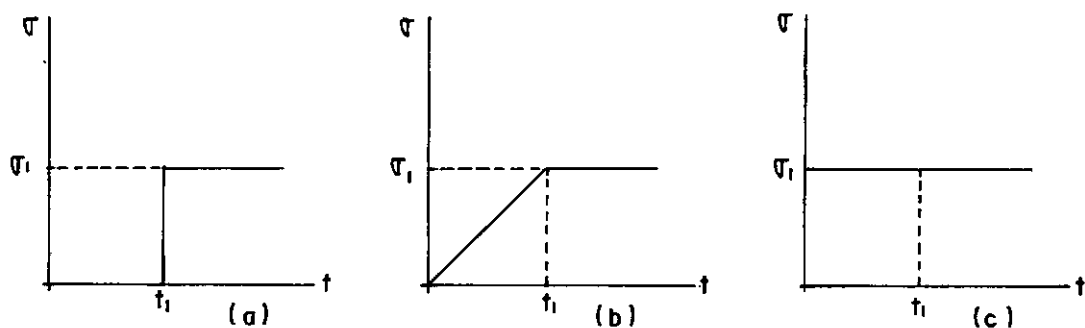


FIG. VI. 7 HISTÓRIA DA TENSÃO

O mesmo raciocínio pode ser feito para o conceito do módulo de relaxação $R(t)$. Se a deformação de uma barra tensionada é conhecida ao longo do tempo (história da deformação), a tensão pode ser calculada por

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 R(t) + \int_0^t R(t - t') \frac{d\varepsilon'}{dt'} dt' \quad (\text{VI.22})$$

ou

$$\sigma(t) = R(t) * \dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{VI.23})$$

VI.5 - Equações Governantes da Viscoelasticidade

Vimos na seção anterior que para o material viscoelástico linear submetido a uma tensão uniaxial, a equação constitutiva pode ser expressa em termos das integrais hereditárias

$$\sigma(t) = R^E(t) * \dot{\varepsilon}(t) \quad (\text{VI.24})$$

$$\varepsilon(t) = J^E(t) * \dot{\sigma}(t) \quad (\text{VI.25})$$

Escrevendo as equações constitutivas em termos das componentes deviatóricas e volumétricas dadas pelas Equações (II.12) e (II.13) (Ref. (13) a (15)), temos:

$$\sigma'_{ij}(t) = 2R^G(t) * \dot{\varepsilon}'_{ij}(t) \quad (\text{VI.26})$$

$$\sigma_{kk}(t) = 3R^K(t) * \dot{\varepsilon}_{kk}(t)$$

$$\varepsilon'_{ij}(t) = \frac{J^G}{2}(t) * \dot{\sigma}'_{ij}(t)$$

$$\varepsilon_{kk}(t) = \frac{J^K}{3}(t) * \dot{\sigma}_{kk}(t)$$
(VI.27)

onde R^G e R^K são funções de relaxação no modo distorcional e dilatacional respectivamente, e J^G e J^K são as correspondentes funções de fluência.

A Figura (VI.8) apresenta o modelo generalizado de Kelvin volumétrico e deviatório, sendo:

K - módulo volumétrico

η - viscosidade volumétrica

G - módulo cisalhante

μ - viscosidade cisalhante

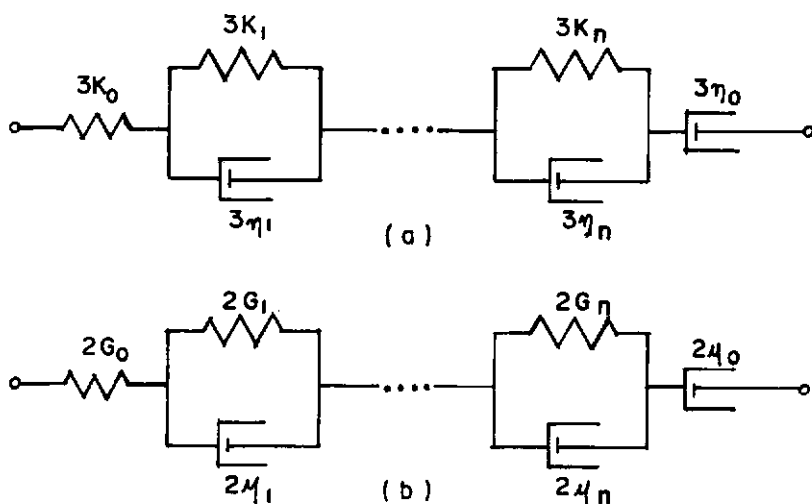


FIG. VI. 8 MODELO GENERALIZADO DE KELVIN (a) VOLUMÉTRICO (b) DEVIATÓRICO

A transformada de Laplace da Equação (VI.26) é

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}'_{ij}(s) &= 2s\bar{R}^G(s) \bar{\epsilon}'_{ij}(s) \\ \bar{\sigma}_{kk}(s) &= 3s\bar{R}^K(s) \bar{\epsilon}_{kk}(s)\end{aligned}\tag{VI.28}$$

Comparando as equações acima com as equações constitutivas de um material elástico isotrópico dada em (II.15), vemos que elas são idênticas em forma.

Do mesmo modo, podemos mostrar que os deslocamentos no domínio transformado satisfazem a equação de equilíbrio

$$\left[3s\bar{R}^K + s\bar{R}^G \right] \frac{\partial^2 \bar{u}_j}{\partial x_i \partial x_j} + 3s\bar{R}^G \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \tag{VI.29}$$

Essa equação é análoga à equação de equilíbrio elastostático de Navier dada em (III.7).

O princípio da correspondência declara que as equações que governam o problema viscoelástico no domínio transformado são exatamente análogas às equações que governam o problema elástico no domínio do tempo contanto que a história das cargas e deslocamentos em todos os pontos do contorno seja conhecida (Ref. (2), (13), (14) e (15)).

Portanto, substituindo G por $s\bar{R}^G$ e K por $s\bar{R}^K$ e usando a transformada de Laplace para as condições de contorno e as equações gerais, podemos utilizar o algoritmo do método dos ele-

mentos de contorno desenvolvido para elasticidade linear obtendo as tensões e os deslocamentos no domínio transformado s . A solução final será obtida calculando-se numericamente a inversa da transformada de Laplace conforme será visto no capítulo seguinte.

CAPÍTULO VII

INVERSÃO NUMÉRICA DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

VII.1 - Métodos Numéricos de Inversão da Transformada de Laplace

Usando o princípio da correspondência, o problema viscoelástico é resolvido no domínio transformado. A obtenção dos resultados no domínio do tempo é feita utilizando a inversa da transformada de Laplace que pode ser obtida analiticamente.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \bar{f}(s) ds \quad (\text{VII.1})$$

$$\text{onde } s = a + iw \text{ e } i = \sqrt{-1} \quad (\text{VII.2})$$

O valor de "a" é escolhido de maneira que todos os pontos singulares de $\bar{f}(s)$ fiquem à esquerda da linha $\text{Re}(s) = a$ no plano complexo s . Devemos ter portanto $\text{Re}(s) \geq a > 0$.

Visto que o cálculo analítico da Equação (VII.1) é de difícil obtenção, a utilização de métodos numéricos torna-se imperativo.

Podemos classificar os vários métodos de inversão em 3 grupos (Ref. (17)):

- a) Métodos de interpolação-colocação;
- b) Métodos baseados na expansão de funções ortogonais;

- c) Métodos baseados na transformação numérica de Fourier.

Neste trabalho, foi utilizado o método de Durbin (19) com o algoritmo do Fast Fourier Transform desenvolvido por Cooley e Tukey (20). Este método está classificado no grupo (c). Estudos desenvolvidos por Beskos e Narayanan (17) para problemas lineares dependentes do tempo mostram que de 8 métodos comparados, o método de Durbin foi o que obteve resultados mais precisos tanto para tempo curto quanto para tempo longo.

VII.2 - Método de Durbin

O método de Durbin é um eficiente melhoramento do método de Dubner e Abate (21) no qual se desenvolve a transformação finita de Fourier em cosseno. Durbin combina as transformadas finitas de Fourier em seno e em cosseno. As vantagens dessa combinação são:

- a) O erro para o cálculo da inversa da transformação da $f(t)$ torna-se independente do tempo;
- b) O resultado é válido para todo o período T em estudo.

Utilizando o método de Durbin, a Equação (VII.1) fica da forma:

$$f(t_j) + \text{ERRO}(a, T) + E_r + E_t = \frac{2}{T} e^{aj\Delta t} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Re} \left[\bar{f}(a) \right] + \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{N-1} A(k) w^{jk} \right] \right\} \quad (\text{VII.3})$$

onde

$$A(k) = \sum_{\ell=0}^L \bar{f}(a + i(k + \ell N) \frac{2\pi}{T}) = \sum_{\ell=0}^L \bar{f}(s), \quad A(k) \text{ complexa} \quad (\text{VII.4})$$

$$w = \exp \left\{ i \frac{2\pi}{N} \right\} = \cos \frac{2\pi}{N} + i \sin \frac{2\pi}{N} \quad (\text{VII.5})$$

$$t_j = j\Delta t = j \frac{T}{N} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$\text{ERRO}(a, T) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2akT} f(2kT - t) \quad (\text{VII.6})$$

Os parâmetros de entrada para o cálculo da inversa da transformada de Laplace usando o método de Durbin são: a , T , L e N .

Estudo desenvolvido por Durbin mostra que o $\text{ERRO}(a, T)$ decresce com $\exp(-aT)$ mas que para cada tempo t os erros de arredondamento (E_r) e de truncamento (E_t) são amplificados pelo fator $\exp(aT)/T$. Desta forma, quanto maior for o valor de aT maior será o valor de $\text{NSUM} = N \times L$ para uma dada precisão

e, conseqüentemente, maior será o tempo computacional. Para aT variando de 5 a 10, bons resultados são obtidos com NSUM variando de 50 a 5000. Segundo AHMAD, et alii (15) resultados bem precisos foram obtidos utilizando $L = 1$, $N = 200$ e $aT = 6$. De maneira a poder economizar tempo de computador, podemos utilizar $N = 20$ obtendo um erro de 2 a 3 por cento e um erro médio de 0.6 por cento. Para este caso, só deve ser considerado os resultados no intervalo $0.05T$ a $0.75T$.

O cálculo direto da Equação (VII.3) necessita de N^2 operações onde "operação" significa uma multiplicação de números complexos seguida por uma adição complexa. Utilizando o algoritmo do Fast Fourier Transform, o número de operações decai para $2N \log_2 N$ sendo $N = 2^m$.

De maneira a podermos mostrar a precisão do método de Durbin foram resolvidas 4 funções no domínio transformado apresentadas na Tabela VII.1. A listagem do programa FFTURB para a resolução da transformada inversa dessas 4 funções foi anexada no Apêndice C podendo ser adaptada para qualquer programa que utilize a transformada de Laplace.

Tabela VII.1 - Funções no domínio transformado e no domínio do tempo

TESTE	$\bar{f}(s)$	$f(t)$	T'
1	$\frac{s}{(s^2 + 1)^2}$	$\frac{t}{2} \text{ sen } (t)$	16
2	$\frac{e^{-10s}}{s}$	$U(t - 10)$	16
3	$\frac{2}{s(1 + e^{-2s})}$	$2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k U(t - 2k)$	16
4	$\frac{1}{s^2 + 1}$	$\text{sen } (t)$	8

onde $T' =$ intervalo de tempo de interesse

$U =$ função degrau.

Para cada função, serão analisados 5 casos apresentados na Tabela VII.2.

Tabela VII.2 - Parâmetros de entrada

CASO	T	AT	L	m	$N = 2^m$
1	T'	5	20	7	128
2	T'	6	1	8	256
3	T'	6	1	5	32
4	T'	6	1	4	16
5	2T'	6	1	5	32

Nas Tabelas VII.3 à VII.6 estão listados os resultados para os testes 1 à 4, respectivamente.

Tabela VII.3 - Teste da função $f(t) = \frac{t}{2} \sin(t)$

TEMPO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5	EXATO
0.0	- .01512	- .01512	- .00565	- .00559	- .02208	.00000
1.0	.36642	.36642	.40061	.40081	.46198	.42073
2.0	.86416	.86416	.89262	.89277	.93170	.90929
3.0	.22094	.22094	.21518	.21532	.19302	.21168
4.0	-1.45289	-1.45289	-1.49107	-1.49093	-1.55796	-1.51360
5.0	-2.33866	-2.33866	-2.37559	-2.37545	-2.42677	-2.39731
6.0	- .83865	- .83865	- .83844	- .83830	- .82405	- .83824
7.0	2.23473	2.23473	2.27546	2.27558	2.34632	2.29945
8.0	3.88488	3.88488	3.93059	3.93065	3.99450	3.95743
9.0	1.84324	1.84324	1.85039	1.85032	1.84639	1.85433
10.0	-2.65418	-2.65418	-2.69571	-2.69608	-2.76796	-2.72010
11.0	-5.41376	-5.41376	-5.46820	-5.46916	-5.54429	-5.49995
12.0	-3.19387	-3.19387	-3.21037	-3.21258	-3.21827	-3.21944
13.0	2.66711	2.66711	2.70660	2.70164	2.77884	2.73109
14.0	6.83533	6.83533	6.89588	6.88410	6.98584	6.93425
15.0	4.83510	4.83509	4.85634	4.82229	4.88429	4.87716

Tabela VII.4 - Teste da função $f(t) = U(t - 10)$

TEMPO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5	EXATO
0.0	.00678	.00248	.00246	.00243	.00273	.00000
1.0	.00678	.00248	.00247	.00245	.00286	.00000
2.0	.00678	.00248	.00248	.00248	.00303	.00000
3.0	.00678	.00249	.00252	.00255	.00329	.00000
4.0	.00679	.00250	.00259	.00269	.00368	.00000
5.0	.00679	.00252	.00273	.00297	.00429	.00000
6.0	.00680	.00255	.00303	.00356	.00530	.00000
7.0	.00682	.00264	.00368	.00484	.00712	.00000
8.0	.00686	.00284	.00530	.00805	.01101	.00000
9.0	.00700	.00356	.01101	.01927	.02309	.00000
10.0	.50669	.50189	.49770	.49284	.49770	.50000
11.0	1.00638	1.00021	.98428	.96619	.97228	1.00000
12.0	1.00652	1.00089	.98970	.97679	.98428	1.00000
13.0	1.00656	1.00105	.99091	.97911	.98804	1.00000
14.0	1.00658	1.00109	.99117	.97953	.98970	1.00000
15.0	1.00659	1.00113	.99141	.97984	.99051	1.00000

Tabela VII.5 - Teste da função $f(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k U(t - 2k)$

TEMPO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5	EXATO
0.0	1.00647	1.00070	.98819	.97384	.97984	1.00000
1.0	2.01237	1.99851	1.95337	1.90250	1.90994	2.00000
2.0	1.00656	1.00109	.99122	.97974	.98872	1.00000
3.0	.00075	.00359	.02844	.05572	.06615	.00000
4.0	1.00659	1.00109	.99113	.97932	.99068	1.00000
5.0	2.01244	1.99866	1.95437	1.90396	1.91487	2.00000
6.0	1.00666	1.00143	.99358	.98370	.99113	1.00000
7.0	.00091	.00458	.03591	.06951	.06730	.00000
8.0	1.00691	1.00352	1.00987	1.01513	.99121	1.00000
9.0	2.01304	2.00397	1.99576	1.98426	1.91520	2.00000
10.0	1.00777	1.01235	1.07945	1.15171	.99160	1.00000
11.0	.00298	.02663	.21003	.41209	.06827	.00000
12.0	1.01083	1.04848	1.36613	1.71865	.99312	1.00000
13.0	2.02088	2.10005	2.75903	3.49517	1.91857	2.00000
14.0	1.02545	1.24229	2.90898	4.77536	.99716	1.00000
15.0	.05732	.77115	6.12662	12.05237	.07699	.00000

Tabela VII.6 - Teste da função $f(t) = \sin(t)$

TEMPO	CASO 1	CASO 2	CASO 3	CASO 4	CASO 5	EXATO
0.0	.00680	.00324	.00883	.01531	.01206	.00000
0.5	.48477	.48140	.48149	.48183	.47793	.47943
1.0	.84420	.84249	.84259	.84293	.83928	.84147
1.5	.99694	.99731	.99746	.99792	.99527	.99749
2.0	.90560	.90795	.90817	.90883	.90766	.90930
2.5	.59253	.59629	.59661	.59759	.59788	.59847
3.0	.13439	.13865	.13911	.14054	.14180	.14112
3.5	- .35665	- .35294	- .35226	- .35016	- .34892	- .35078
4.0	- .76038	- .75811	- .75712	- .75403	- .75410	- .75680
4.5	- .97793	- .97767	- .97621	- .97166	- .97453	- .97753
5.0	- .95605	- .95784	- .95571	- .94896	- .95621	- .95892
5.5	- .70010	- .70350	- .70036	- .69028	- .70359	- .70554
6.0	- .27274	- .27689	- .27224	- .25700	- .27849	- .27941
6.5	.22140	.21754	.22453	.24822	.21506	.21512
7.0	.66133	.65874	.66970	.70949	.65628	.65697
7.5	.93935	.93873	.95977	1.05079	.93720	.93800

Dos exemplos anteriores podemos concluir que:

- Os casos 1 e 2 foram os que obtivemos respostas mais precisas exigindo, porém, um tempo computacional elevado.
- Entre os casos de tempo computacional curto, o caso 3 foi o mais preciso, principalmente para função bem comportada.
- Para função oscilatória, dos 3 últimos casos, o caso 3 foi o mais preciso em tempo cedo ($t < 0.25T'$) e médio e o caso 5 o mais preciso em tempo tarde ($t > 0.75T'$) visto que para este caso o período foi de $2T'$.
- Para funções oscilatórias descontínuas, devem ser desprezados os resultados de tempo tarde para os 3 últimos casos.

Devemos observar que se houver descontinuidade da função $f(t)$ para o tempo t' , o algoritmo dará como resposta:

$$f(t') = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[f(t' + \rho) + f(t' - \rho) \right] \quad (\text{VII.7})$$

Na Figura VII.1, apresentamos o fluxograma do programa viscoelástico em comparação com o programa elástico.

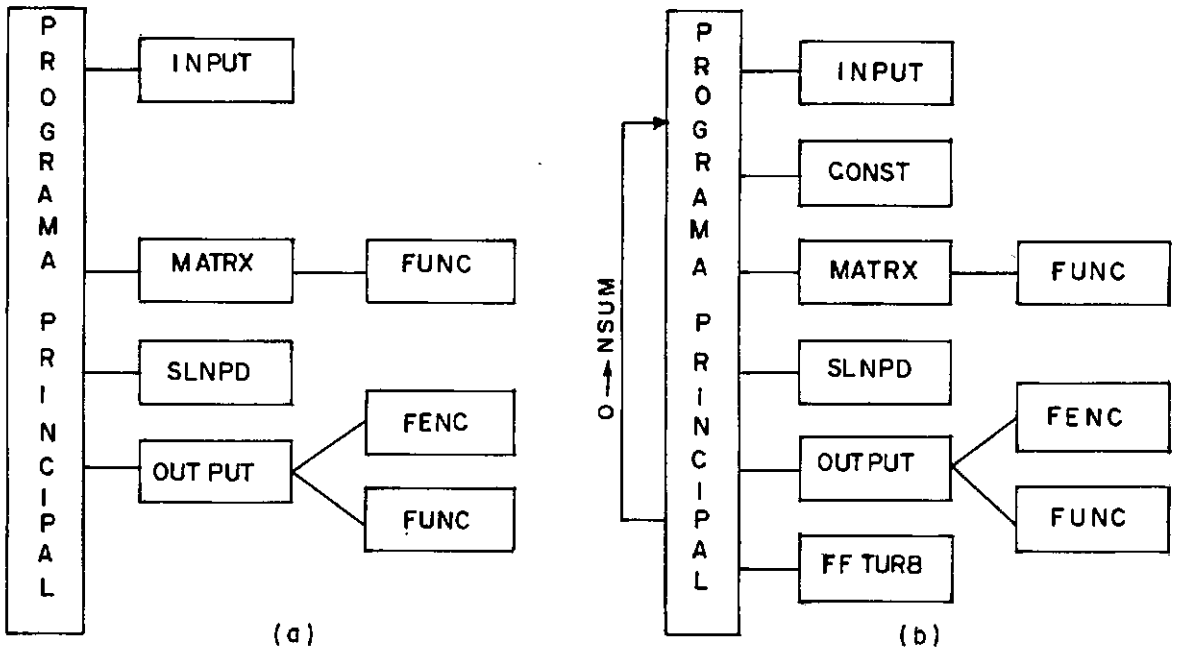


FIG.VII.1 FLUXOGRAMA DOS PROGRAMAS (a) ELÁSTICO E (b) VISCOELÁSTICO

O programa viscoelástico é acrescido de 2 subrotinas:

- A subrotina CONST transforma as variáveis para o domínio transformado S
- A subrotina FFTURB transforma para o domínio do tempo as respostas obtidas para os NSUM valores de S

Devemos observar que além dessas 2 subrotinas, foi acrescentado um "looping" que varia de 0 à NSUM. Dessa forma, quanto maior for o valor de NSUM maior será o tempo computacional uma vez que teremos NSUM valores do parâmetro S, ou seja, teremos NSUM soluções no domínio transformado (Eq. VII.4). Somente após este "looping" entramos na subrotina FFTURB onde uma variável qualquer (deslocamento, tensão, força de superfície, etc...) é obtida no domínio do tempo através da aplicação da Equação (VII.3).

CAPÍTULO VIII

EXEMPLOS VISCOELÁSTICOS

De maneira a demonstrar a validade e acurácia do método dos elementos de contorno para a resolução de problemas viscoelásticos, apresentamos alguns exemplos ilustrativos.

Para todos os exemplos, os parâmetros utilizados para a resolução da transformada inversa de Laplace foram: $AT = 5$, $L = 1$ e $N = 32$.

VIII.1 - Problema Elástico

De maneira a verificar a precisão da resposta do programa viscoelástico ao longo do tempo, considere o problema elástico da placa quadrada tracionada apresentado na Seção V.1.

As propriedades do material elástico são:

$$R^G(t) = G_O = 1.9230769 \quad (\text{VIII.1})$$

$$R^K(t) = K_O = 4.16666$$

Os valores de $s\bar{R}^G(s)$ e $s\bar{R}^k(s)$ são

$$s\bar{R}^G(s) = G_O \quad (\text{VIII.2})$$

$$s\bar{R}^k(s) = K_O$$

Para este caso, teremos uma resposta elástica ao longo do intervalo de interesse ($T = 8$).

A Figura VIII.1 apresenta o deslocamento U_x para os pontos 1 a 4 do contorno.

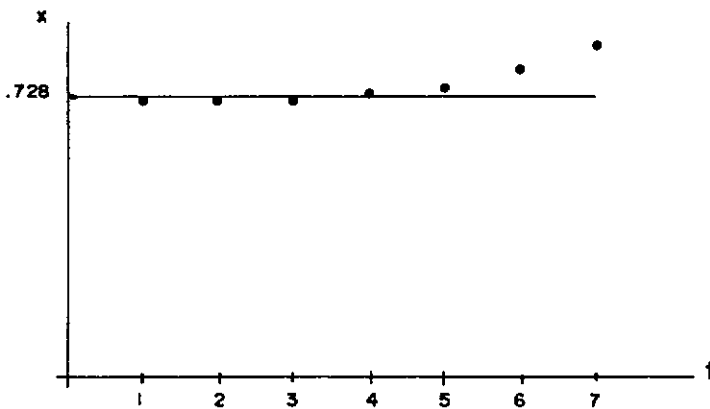


FIG. VIII.1 DESLOCAMENTO EM x PARA OS NÓS 1 A 4

Houve um deterioramento da resposta para o tempo tarde ($t > 0.75T$) devido ao cálculo da inversa da transformada da função degrau no tempo zero.

VIII.2 - Tubo Espesso com Pressão Interna

Considere o tubo de parede espessa (Figura VIII.2) submetido a uma pressão interna p . (Ref. (24)). Sendo um problema que apresenta dupla simetria, foi necessário a utilização de apenas 18 elementos lineares para a discretização do contorno.

O material é assumido como tendo função de relaxação de Kelvin no modo distorcional e função de relaxação elástica no modo dilatacional, ou seja:

$$R^G(t) = G_0 \left[1 + \tau \delta(t) \right]$$

(VIII.3)

$$R^K(t) = K_0$$

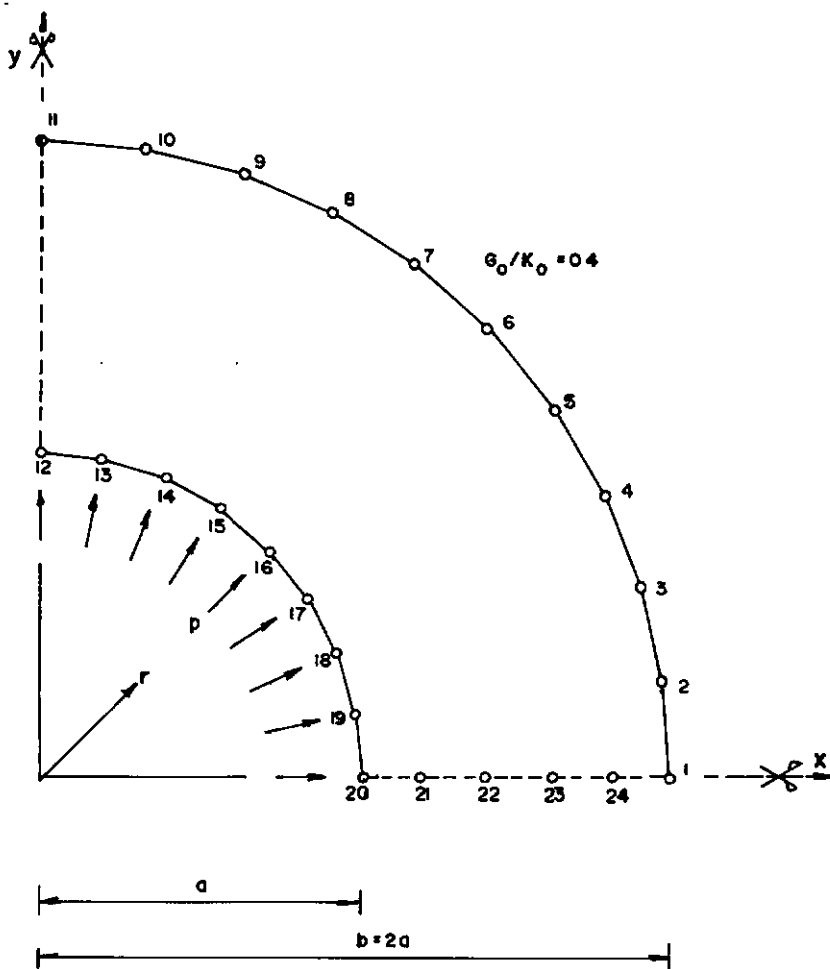


FIG. VIII.2 DISCRETIZAÇÃO DO TUBO DE PAREDE ESPESSE

Da Equação VIII.3, podemos obter $s\bar{R}^G(s)$ e $s\bar{R}^K(s)$ que são equivalentes ao módulo de elasticidade transversal e ao coeficiente de Poisson respectivamente, no domínio transformado. Teremos então:

$$s\bar{R}^G(s) = G_O (1 + \tau s)$$

(VIII.4)

$$s\bar{R}^k(s) = K_O$$

Os deslocamentos radiais obtidos para $T = 4$ estão mostrados na Figura VIII.3.

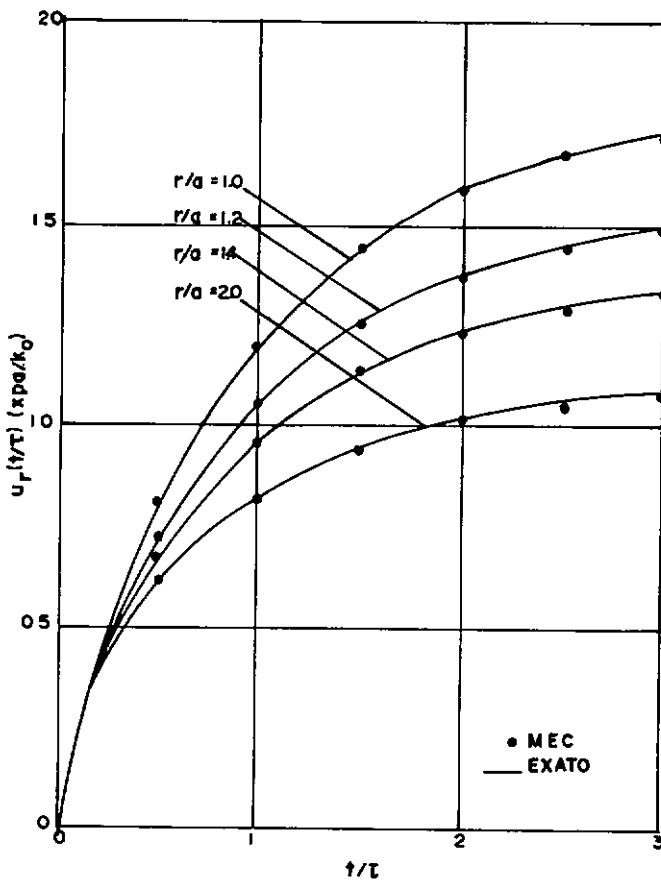


FIG. VIII.3 DESLOCAMENTOS RADIAIS NO TUBO DE PAREDE ESPESSE

VIII.3 - Placa Infinita com Cavidade Circular

Neste exemplo, é analisado os deslocamentos radiais de uma placa infinita com pressão interna na cavidade circular (Figura VIII.4). Considerando dupla-simetria, utilizou-se apenas 6 elementos lineares para a discretização do contorno.

As propriedades viscoelásticas do material são:

$$R^G(t) = G_0 (0.25 + 0.75 e^{-4t/\tau})$$

(VIII.5)

$$R^K(t) = K_0$$

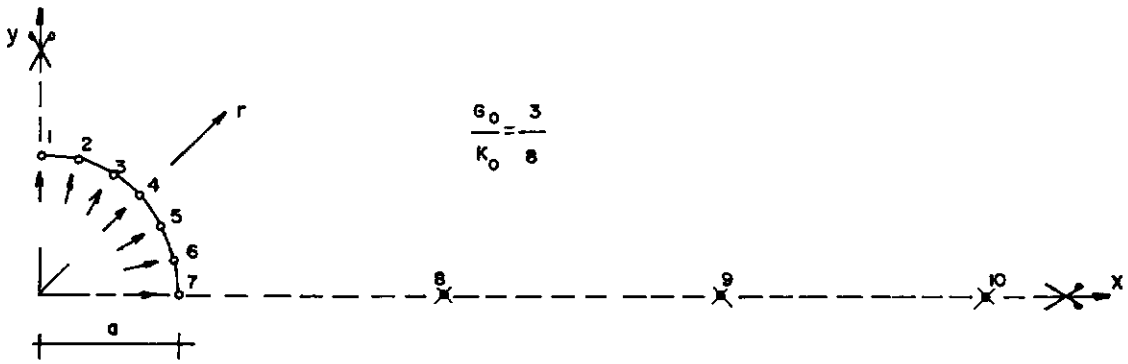


FIG. VIII. 4 DISCRETIZAÇÃO DO CONTOURO DA CAVIDADE NA PLACA INFINITA

Os valores de $s\bar{R}^G(s)$ e $s\bar{R}^k(s)$ no domínio transformado são:

$$s\bar{R}^G(s) = 0.25 G_0 + \frac{0.75 G_0 \tau s}{4 + \tau s}$$

(VIII.6)

$$s\bar{R}^k(s) = K_0$$

A Figura VIII.5 mostra a variação do deslocamento radial com o tempo para um período de interesse (T) igual a 8.

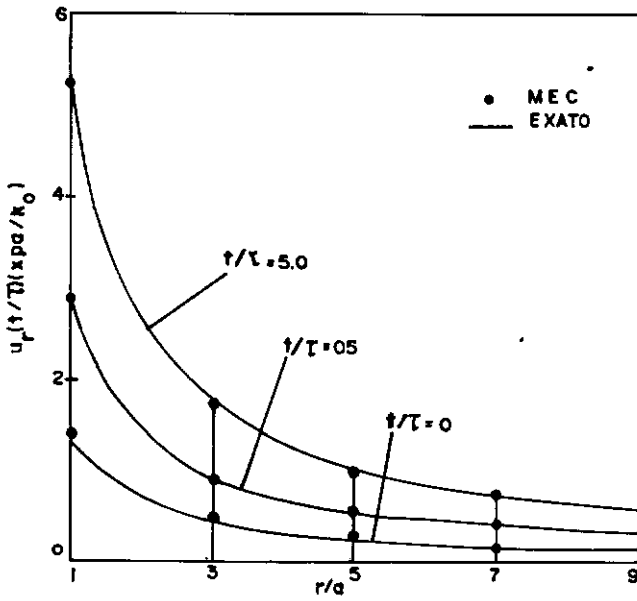


FIG. VIII.5 DESLOCAMENTOS RADIAIS NA PLACA INFINITA COM CAVIDADE CIRCULAR

CAPÍTULO IX

CONCLUSÕES

O motivo que levou a abordar o tema deste estudo, foi a necessidade de se desenvolver um software que pudesse analisar de maneira rápida e econômica o comportamento viscoelástico do solo de uma mina de potássio situada em Sergipe. Por se tratar de meio infinito, o método dos elementos de contorno apresenta vantagens em relação aos outros métodos pelo fato de que apenas o contorno do problema é discretizado; no caso, a mina.

Neste trabalho, o problema viscoelástico é resolvido utilizando a transformada de Laplace e o princípio da correspondência para elasticidade. Dessa forma, analisou-se, primeiramente, o problema elástico onde foi testado o elemento interpolado para os casos em que havia descontinuidade de tensão. Verificou-se que a colocação do ponto fonte no interior do elemento em pontos distando da extremidade de 25% de seu comprimento, não causa problemas de imprecisões. A vantagem desse elemento em relação ao elemento de nó-duplo está no fato de se poder prescrever deslocamentos à esquerda e à direita de nós onde haja descontinuidade de normal.

Foram também estudados métodos para o cálculo das integrais singulares e quase singulares sobre os elementos do contorno. Os coeficientes das matrizes G e H para o elemento quase-singular foram calculados utilizando a quadratura de Gauss com a transformada polinomial de terceiro grau. Essa transformação

faz com que os pontos de integração se aproximem da singularidade aumentando a precisão da integração. Para estes elementos foi utilizado a integração seletiva, ou seja; o número de pontos necessários para a integração é função da distância do ponto fonte ao elemento.

No elemento singular, os coeficientes da matriz G também foram calculados com a transformada polinomial de 3º grau e para os coeficientes de H foi utilizada a integração por partes finitas de Kutt. Verificou-se que para o cálculo da integral de h bastava utilizar 6 pontos mas para o cálculo da integral de g foi necessário a utilização de 16 pontos.

No caso do problema viscoelástico, foi feito inicialmente um estudo dos vários modelos, das funções de fluência e de relaxação e das integrais hereditárias. Utilizando a transformada de Laplace nas integrais hereditárias e o princípio da correspondência, pôde-se fazer uma analogia com o problema elástico.

A preocupação maior para o problema viscoelástico estava na escolha do método numérico para a resolução da transformada inversa. Após vários estudos bibliográficos, chegou-se a conclusão de que o método de Durbin era o mais eficiente. De maneira a agilizar o cálculo da transformada inversa, foi utilizado o algoritmo de Fast Fourier Transform. Foram analisadas várias funções no domínio transformado e verificou-se que este método era realmente eficiente tanto para tempo cedo quanto para tempo tarde. A precisão dos resultados depende da escolha dos

parâmetros T , aT , L e N . Quanto maior for o valor do produto $L \times N$ mais precisa é a resposta e em compensação, maior é o custo computacional. Portanto, para os problemas viscoelásticos, foram adotados os valores de $aT = 5$, $L = 1$ e $N = 32$. Com estes valores, obtivemos para certos modelos viscoelásticos, uma resposta precisa em todo o intervalo T , mas para outros modelos, as respostas em tempo tarde ($t > 0.75T$) é pouco precisa.

Para trabalhos futuros podemos sugerir que sejam testados esquemas alternativos para a resolução do problema viscoelástico sem usar a transformada de Laplace, como é o caso da integração passo-à-passo. Podem ser também estudadas extensões da formulação para problemas com sub-regiões e anisotropia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) MALVERN, L.E. - *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium* - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1969).
- (2) FUNG, Y.C. - *Foundations of Solid Mechanics* - Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1965).
- (3) FLÜGGE, W. - *Viscoelasticity* - Blaisdell Publishing Company, Massachusetts (1967).
- (4) BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. e WROBEL, L.C. - *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering* - Springer-Verlag, 1^a Ed. (1984).
- (5) TELLES, J.C.F. - *Topics in Boundary Element Research* - Vol. 3, Cap. 9 - Springer-Verlag, Berlin (1987).
- (6) PAULA, F.A. - *Obtenção de Matriz de Rigidez Utilizando o Método dos Elementos de Contorno*, Tese M.Sc. - COPPE/UFRJ - (1986).
- (7) MUSTOE, G.G.W., VOLAIT, F. e ZIENKIEWICZ, O.C. - "A Symmetric Direct Boundary Integral Equation Method for Two Dimensional Elastostatics" - *Res Mechanica* 4, 57-82p. (1982).
- (8) MARQUES, E. - *Combinação dos Métodos dos Elementos de Contorno e dos Elementos Finitos: Aplicação a Problemas de Potencial*, Tese M.Sc. - COPPE/UFRJ - (1986).

- (9) PATTERSON, C. e SHEIKH, M.A. - "Non-Conforming Boundary Elements for Stress Analysis" - *Second International Conference on BEM* - C.A. Brebbia Ed., Southampton (1981).

- (10) TELLES, J.C.F. - "A Self-Adaptive Co-ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals" - *International Journal for Numerical Methods in Engineering* - Vol. 24, 959-973 p. - (1987).

- (11) PAULA, F.A., TELLES, J.C.F. e MANSUR, W.J. - "Combination of Boundary Elements and Finite Elements to Solve Two-Dimensional Elasticity Problems" - *Boundary Element Techniques: Applications in Stress Analysis and Heat Transfer* - Computational Mechanics, 163-176 p. - (1987).

- (12) TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N. - "*Theory of Elasticity*", McGraw-Hill - Tokyo (1970).

- (13) CARINI, A. e GIODA, G. - "A Boundary Integral Equation Technique for Visco-Elastic Stress Analysis" - *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 10, 585-608 p. - (1986).

- (14) RIZZO, F.J. e SHIPPY, D.J. - "An Application of the Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity Theory" - *SIAM J. APPL. MATH.*, Vol. 21, 321-330 p. - (1971).

- (15) AHMAD, S., DAVIES, T.G. e MANOLIS, G.D. - "Viscoelastic Analysis of Piles and Piles Groups" - *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 9, 237-252 p. - (1985).
- (16) MANOLIS, G.D. - "Dynamic Response of Underground Structures", Tese Ph.D. - Universidade de Minnesota - (1980).
- (17) NARAYANAN, G.V. e BESKOS, D.E. - "Numerical Operational Methods for Time-Dependent Linear Problems" - *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, 1829-1854 p. - (1982).
- (18) NARAYANAN, G.V. e BESKOS, D.E. - "Dynamic Response of Frameworks by Numerical Laplace Transform", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 37, 289-307 p. - (1983).
- (19) DURBIN, F. - "Numerical Inversion of Laplace Transforms: an Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method", *Computer Journal*, Vol. 17, 371-376 p. - (1974).
- (20) COOLEY, J.W. e TUKEY, J.W. - "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series", *Mathematical Computational*, Vol. 19, 297-301 p. - (1965).
- (21) DUBNER, H. e ABATE, J. - "Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform, *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 15, 115-123 p. - (1968).

- (22) COOLEY, J.W., LEWIS, P.A.W. e WELCH, P.D. - "The Fast Fourier Transform Algorithm: Programming Considerations in the Calculation of Sine, Cosine and Laplace Transforms", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 12, 315-337 p. - (1970).
- (23) KRINGS, W. e WALLER, H. - "Contribution to the Numerical Treatment of Partial Differential Equations with the Laplace Transformation - an Application of the Algorithm of the Fast Fourier Transformation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 14, 1183-1196 p. - (1979).
- (24) KUSAMA, T. e MITSUI, Y. - "Boundary Element Method Applied to Linear Viscoelastic Analysis", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 6, 285-290 p. - (1982).

APÊNDICE A

DEDUÇÃO DAS FÓRMULAS

A.1 - Obtenção das Relações de Compatibilidade

As relações de compatibilidade são obtidas derivando as equações que relacionam deformação e deslocamento

$$\epsilon_{ij,kl} = \frac{1}{2} (U_{i,jkl} + U_{j,ikl})$$

$$\epsilon_{kl,ij} = \frac{1}{2} (U_{k,lij} + U_{l,kij})$$

$$\epsilon_{ik,jl} = \frac{1}{2} (U_{i,kjl} + U_{k,ijl})$$

$$\epsilon_{lj,ik} = \frac{1}{2} (U_{j,lik} + U_{l,jik})$$

Somando as duas primeiras equações e diminuindo pelas duas últimas, notamos que as parcelas à direita se anulam. Teremos então uma relação entre as derivadas das deformações:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{jl,ik} = 0$$

A.2 - Obtenção da Equação (III.12)

A Equação (III.12) é obtida a partir da Equação (III.10) conforme apresentado a seguir

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j} U_k^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} p_k U_k^* d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (\bar{U}_k - U_k) p_k^* d\Gamma$$

Integrando por partes

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk} U_k^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk,j} U_k^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk} U_{k,j}^* d\Omega$$

Pelo teorema da divergência temos que

$$\int_{\Omega} (\sigma_{jk} U_k^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{jk} U_k^* n_j d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_k U_k^* d\Gamma$$

Sendo

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} U_{k,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{11} U_{1,1}^* + \sigma_{12} U_{2,1}^* + \sigma_{21} U_{1,2}^* + \sigma_{22} U_{2,2}^*) d\Omega \\ = \int_{\Omega} (\sigma_{11} \epsilon_{11}^* + 2\sigma_{12} \epsilon_{12}^* + \sigma_{22} \epsilon_{22}^*) d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \sigma_{jk} \epsilon_{jk}^* d\Omega$$

Temos então

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j} U_k^* d\Omega = \int_{\Gamma_1} p_k U_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} p_2 U_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega$$

Analogamente, integrando por partes obteremos

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* U_k d\Omega = \int_{\Gamma_1} U_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k p_k^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega$$

Devido a simetria de C_{ijkl}

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega$$

Substituindo estas 3 últimas equações na primeira teremos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* U_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k U_k^* d\Omega = & - \int_{\Gamma_1} \bar{p}_k U_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{U}_k p_k^* d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma_1} \bar{U}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_k p_k^* d\Gamma \end{aligned}$$

A.3 - Obtenção da Equação (III.25)

Sendo a Equação (III.24)

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Omega(x) + \int_{\Omega_\epsilon} U_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x)$$

Estudando o limite separadamente quando $\epsilon \rightarrow 0$ de cada integral temos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x)$$

A primeira integral à direita da equação acima fi

ca:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) [U_j(x) - U_j(\xi)] d\Gamma(x) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ U_j(\xi) \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \right\}$$

Levando em consideração a continuidade de U_j e sendo $C_{ij}(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x)$ teremos então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) U_j(x) d\Gamma(x) = C_{ij}(\xi) U_j(\xi)$$

A segunda integral à direita deve ser interpretada no sentido do Valor Principal de Cauchy cuja existência pode ser demonstrada se $U_j(x)$ satisfazer a condição de Holder

$$| U_j(x) - U_j(\xi) | \leq B r^\alpha \text{ onde } B \text{ e } \alpha \text{ são constantes positivas}$$

As integrais restantes de (III.24) tem singularidades mais fracas e não apresentam problemas. Teremos então:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi) U_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^* U_j(x) d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} U_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \end{aligned}$$

APÊNDICE B

PONTOS DE INTEGRAÇÃO

B.1 - Pontos de Gauss

A expressão utilizada para a integração numérica unidimensional de Gauss é a seguinte:

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i ,$$

onde:

x_i é a coordenada do i-ésimo ponto de integração;

w_i é o fator de peso associado; e

n é o número de pontos de integração.

Estes valores estão listados na Tabela B.1 a seguir. O erro associado é $E_n = O(d^{2n} f/dx^{2n})$:

Tabela B.1 - Coordenadas e pesos dos pontos de Gauss

$\pm x_i$			w_i		
n = 2					
0.57735	02691	89626	1.00000	00000	00000
n = 4					
0.33998	10435	84856	0.65214	51548	62546
0.86113	63115	94053	0.34785	48451	37454
n = 6					
0.23861	91860	83197	0.46791	39345	72691
0.66120	93864	66265	0.36076	15730	48139
0.93246	95142	03152	0.17132	44923	79170
n = 8					
0.18343	46424	95650	0.36268	37833	78362
0.52553	24099	16329	0.31370	66458	77887
0.79666	64774	13627	0.22238	10344	53374
0.96028	98564	97536	0.10122	85362	90376
n = 12					
0.12523	34085	11469	0.24914	70458	13403
0.36783	14989	98180	0.23349	25365	38355
0.58731	79542	86617	0.20316	74267	23066
0.76990	26741	94305	0.16007	83285	43346
0.90411	72563	70475	0.10693	93259	95318
0.98156	06342	46719	0.04717	53363	86512
n = 16					
0.09501	25098	37637	0.18945	06104	55068
0.28160	35507	79258	0.18260	34150	44923
0.45801	67776	57227	0.16915	65193	95002
0.61787	62444	02643	0.14959	59888	16576
0.75540	44083	55003	0.12462	89712	55533
0.86563	12023	87831	0.09515	85116	84292
0.94457	50230	73232	0.06225	35239	38647
0.98940	09349	91649	0.02715	24594	11754

B.2 - Pontos de Kutt

A Tabela B.2 apresenta os valores das coordenadas e dos pesos dos pontos de integração para a Equação (IV.33).

Tabela B.2 - Coordenada e pesos dos pontos de Kutt

$\pm x_i$			w_i		
n = 8					
(-2)-0.32425	01597	29717	(1)-0.39306	36810	06855
(-1) 0.53490	76607	21459	(1) 0.17374	06310	90021
0.17782	73263	92695	0.85763	45422	73068
0.35071	78785	52549	0.53836	07734	82498
0.54581	95024	68487	0.35975	75915	92037
0.73342	70806	57186	0.23726	76990	94551
0.88498	30533	70116	0.14146	22854	96868
0.97745	43783	79799	(-1) 0.58747	60722	93117
n = 16					
(-3)-0.62904	58246	28357	(1)-0.52903	32028	72655
(-1) 0.13695	67953	72746	(1) 0.17423	69392	21104
(-1) 0.46744	22356	19870	0.89886	64068	57470
(-1) 0.97187	15233	18305	0.60238	62171	78397
0.16308	12359	17254	9,44652	70160	90127
0.24189	33680	83951	0.34848	95730	10362
0.33059	46026	20262	0.27990	42083	71624
0.42577	61123	30306	0.22832	70623	67066
0.52378	00897	45426	0.18740	99727	87158
0.62084	02867	29222	0.15355	75595	08967
0.71322	67432	00734	0.12456	65377	49616
0.79738	91352	14839	(-1) 0.98997	43284	06929
0.87009	32465	28864	(-1) 0.75855	46134	10597
0.92854	53930	07767	(-1) 0.54415	53487	02589
0.97050	05048	40090	(-1) 0.34120	59830	66382
0.99435	60209	09368	(-1) 0.14539	05523	60732

Nota: Os números devem ser multiplicados pela potência de 10 entre parênteses.

APÊNDICE C

PROGRAMA FFTURB

Apresentamos a seguir o algoritmo do Fast Fourier Transform (20) e a listagem do programa desenvolvido para o cálculo da transformada inversa de Laplace das funções descritas no Capítulo VII.

Considere o problema do cálculo de série complexa de Fourier

$$\chi(j) = \sum_{k=0}^{N-1} A(K) W^{jk} \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

onde $W = e^{2\pi i/N}$, $A(K)$ é um número complexo e $N = 2^m$.

Os índices j e K podem ser expressos da forma binária:

$$j = j_{m-1} 2^{m-1} + \dots + j_1 2 + j_0$$

$$K = K_{m-1} 2^{m-1} + \dots + K_1 2 + K_0$$

onde j_v e K_v são iguais à 0 ou 1.

Com esta convenção podemos escrever:

$$\chi(j_{m-1}, \dots, j_0) = \sum_{k_0} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{m-1}} A(K_{m-1}, \dots, K_0) W^{j_{m-1} 2^{m-1} + \dots + j_0 K_0}$$

Desde que

$$W^{j_{m-\ell} k_{m-\ell} 2^{m-\ell}} = W^{(j_{\ell-1} 2^{\ell-1} + \dots + j_0) K_{m-\ell} 2^{m-\ell}}$$

Podemos obter as sucessivas séries

$$A_{\ell}(j_0, \dots, j_{\ell-1}, K_{m-\ell-1}, \dots, K_0) = \sum_{K_{m-\ell}} A_{\ell-1}(j_0, \dots, j_{\ell-2}, K_{m-\ell}, \dots, K_0) \cdot W^{(j_{\ell-1} 2^{\ell-1} + \dots + j_0) K_{m-\ell} 2^{m-\ell}}$$

para $\ell = 1, 2, \dots, m$

De acordo com a convenção de índices, o valor de A_{ℓ} é armazenado na posição cujo índice é

$$j_0 2^{m-1} + \dots + j_{\ell-1} 2^{m-\ell} + K_{m-\ell-1} 2^{m-\ell-1} + \dots + K_0 2^0$$

Podemos notar que apenas a posição do bit $2^{m-\ell}$ foi envolvido no cálculo uma vez que o valor de $j_{\ell-1}$ variou de 0 e 1.

A última série calculada será a soma

$$\chi(j_{m-1}, \dots, j_0) = A_m(j_0, \dots, j_{m-1})$$

```
*DEBUG
```

```
PROGRAM FFTURB
C *** PROGRAMA PARA CALCULO DA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE UTILIZAN-
C *** DO O METODO DE DURBIN COMO ALGORITMO DO FAST FOURIER TRANSFORM
IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
CHARACTER*20 ARGOUT
COMPLEX*16 SK,AK(0:255),AKK(0:255),W,WJK,FSK1,FSK2,FSK3,FSK4
C *** FUNCAO (t/2)*sen(t)
FSK1(SK)=SK/(SK**2.D0+1.D0)**2.D0
C *** FUNCAO U(t-10)
FSK2(SK)=CDEXP(-10.D0*SK)/SK
C *** FUNCAO 2*E(-1)**K*U(t-2k)
FSK3(SK)=2.D0/(SK*(1.D0+CDEXP(-2.D0*SK)))
C *** FUNCAO sen(t)
FSK4(SK)=1.D0/(SK**2.D0+1.D0)
PI=3.141592653589793D0
C *** DADOS DE ENTRADA
WRITE(*,'(A)') ' NOME DO ARQUIVO DE SAIDA ='
READ(*,'(A20)')ARGOUT
OPEN(6,FILE=ARGOUT,STATUS='UNKNOWN')
WRITE(*,'(A)') ' T ='
READ(*,*)T
WRITE(*,'(A)') ' AT ='
READ(*,*)AT
WRITE(*,'(A)') ' L ='
READ(*,*)LL
WRITE(*,'(A)') ' M ='
READ(*,*)M
N=2**M
WRITE(*,'(A)') ' FUNCAO (1 a 4)='
READ(*,*)IFUN
WRITE(6,600)T,AT,LL,M,N,IFUN
600 FORMAT(' T =',F5.0,5X,' AT =',F5.0,5X,' LL =',I5,5X,' M =',I5,5X,
* ' N =',I5,5X,' FUNCAO',I2)
A=AT/T
C *** TIPO DE FUNCAO
GOTO(1,2,3,4)IFUN
1 P1=-DREAL(FSK1(DCMPLX(A)))/2.D0
DO 11 K0=0,N-1
AKK(K0)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
DO 11 IL=0,LL
SK=DCMPLX(A,(DBLE(K0+IL*N)*2.D0*PI/T))
11 AKK(K0)=AKK(K0)+FSK1(SK)
GOTO 5
2 P1=-DREAL(FSK2(DCMPLX(A)))/2.D0
DO 22 K0=0,N-1
AKK(K0)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
DO 22 IL=0,LL
SK=DCMPLX(A,(DBLE(K0+IL*N)*2.D0*PI/T))
22 AKK(K0)=AKK(K0)+FSK2(SK)
GOTO 5
3 P1=-DREAL(FSK3(DCMPLX(A)))/2.D0
DO 33 K0=0,N-1
AKK(K0)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
DO 33 IL=0,LL
SK=DCMPLX(A,(DBLE(K0+IL*N)*2.D0*PI/T))
33 AKK(K0)=AKK(K0)+FSK3(SK)
GOTO 5
4 P1=-DREAL(FSK4(DCMPLX(A)))/2.D0
DO 44 K0=0,N-1
AKK(K0)=DCMPLX(0.D0,0.D0)
DO 44 IL=0,LL
SK=DCMPLX(A,(DBLE(K0+IL*N)*2.D0*PI/T))
44 AKK(K0)=AKK(K0)+FSK4(SK)
5 DELT=T/DBLE(N)
```

```

W=DCMPLX(0.00,(2.00*PI/DBLE(N)))
DO 10 L=1,M
DO 20 IND=N-1,0,-1
IJ=0
JW=0
AK(IND)=(0.00,0.00)
IN2=IND
C *** LOOPING PARA CALCULO DE JW
DO 30 II=M-1,0,-1
C *** VALOR DO BINARIO NA POSICAO M-II
I0=IN2/(2**II)
IN2=IN2-I0*2**II
IF(IJ.LT.L)THEN
    JW=JW+I0*2**IJ
    IJ=IJ+1
ENDIF
30 CONTINUE
DO 20 KML=0,1
C *** MODIFICA O BIT DA VARIÁVEL IND NA POSICAO M-L
IF(KML.EQ.0)THEN
    IN2=IBCLR(IND,M-L)
ELSE
    IN2=IBSET(IND,M-L)
ENDIF
WJK=CDEXP(W*DBLE(JW*KML*2**(M-L)))
20 AK(IND)=AK(IND)+AKK(IN2)*WJK
DO 10 IND=N-1,0,-1
AKK(IND)=AK(IND)
10 CONTINUE
C *** LOOPING PARA OBTENCAO DOS RESULTADOS
DO 100 J=N-1,0,-1
TJ=J*DELT
CJ=2.00*DEXP(A*J*DELT)/T
INA=0
IN2=J
C *** LOOPING PARA TRANSFORMAR AK(Jn...J1,J0) EM X(J0,J1...Jn)
DO 50 II=M-1,0,-1
I0=IN2/(2**II)
IN2=IN2-I0*2**II
INA=INA+I0*2**(M-II-1)
50 CONTINUE
FT=CJ*(PI+DREAL(AK(INA)))
WRITE(6,666)TJ,FT
666 FORMAT(F10.2,F10.5)
100 CONTINUE
STOP
END

```