"UMA APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA: OCUPAÇÃO ÓTIMA DE UMA INSTALAÇÃO"

Oswaldo Nelson Chaves

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.) .

Aprovada por:

Presidente

RIO DE JANEIRO
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL
OUTUBRO DE 1973

DEDICATÓRIA

À

CEIÇA

AGRADECIMENTOS

Nelson Maculan Filho

Professor e Amigo

RESUMO

A tese tem por objetivo fornecer Metodologias alternativas para enquadramento do problema da ocupação funcional de instalações numa emprêsa.

Desenvolve modêlos determinísticos na área de Programação Quadrática e Programação Linear Mista, bem como um algorítmo específico de resolução do problema, através dos métodos de Enumeração Implícita.

Incorpora, ainda, programas computacionais de montagem dêsses modêlos, em paralelo com o desenvolvimento de rotina de ..... "Branch and Bound", para resolução do PPLI a partir do Simplex Primal (duas fases).

ABSTRACT

The objective of this thesis was to offer alternative methodologies for solving the problem of functional occupation of the physical facilities existing in a building.

Deterministic models for "Quadratic Programming" and "Mixed Programming", as well as a specific algorithm for solving the problem through the "Implicit Enumeration" method were developed. Computer programs for the stablishment of these models, as well as routine of Branch and Bound for "MP" solving starting from Simplex Primal were also studied.

INDICE

APÊNDICE:

I - INTRODUÇÃO

I.1 - ÁREAS DE APLICAÇÃO DO MODÊLO

À medida em que se tornam mais complexas as estruturas administrativo-produtivas das grandes emprêsas, maiores se tornam as dificuldades em compatibilizar suas disponibilidades de área, e as reais necessidades de ocupação e comunicação inerentes a cada uma delas.

Em têrmos gerais, o problema pode ser pôsto na forma seguinte :

i) - "Para a ocupação de suas novas instalações, que distribuição funcional deve uma emprêsa promover a fim de obter-se a "situação - ideal", relativa às suas necessidades de ocupação e comunicação inter-setorial"?

ii) - "Para uma dada disposição já implantada, que benefícios podem advir de sua re-distribuição funcional, ponderados os gastos e ganhos decorrentes dessa mudança"?

Três aspectos sobressaem das proposições acima :

i) - Trata-se de problema que, por natureza, abrange grande número de variáveis exógenas, em maioria com difícil relacionamento.

ii) - O problema presta-se a mais de um tipo de solução, e tôdos os fatores restritivos podem ser matemàticamente expressáveis.

iii) - É possível definir critérios de avaliação que diferenciam as soluções entre si, bem como associa-las a valores numéricos, que representarão uma medida (relativa) da "qualidade" de cada solução.

Está caracterizado, evidentemente, um problema típico de pesquisa operacional, cujos campos de aplicação, entre outros, podem ser :

i) - Reformulação e racionalização de lay-outs industriais.

ii) - Distribuição setorial de hospitais e clínicas de grande porte.

iii) - "Distribuição ideal", em Faculdades e Institutos, de disciplinas/salas disponíveis, com vistas a uma minimização do deslocamento global dos alunos*.

iv) - "Distribuição ideal" dos departamentos ou setôres de uma Emprêsa, pelas instalações disponíveis na Sede.**

O presente modêlo desenvolve metodologias de enquadramento orientadas para êsse último aspecto, visando uma distribuição específica de um edifício-sede, que minimize sua quantidade de esfôrço-deslocamento (inter-departamental).*** e assim, o tempo total de espera por elevadores, tambem demandado pelos respectivos fluxos.

(*) - Oriundos de cursos diversos e para os quais uma mesma disciplina pode constituir requisito obrigatório.

(**) - Com vistas à "otimização" de suas necessidades de ocupação e comunicação inter-setorial.

(***) - Com base nos fluxos associados.

I.2 - PROCESSOS DE SOLUÇÃO

Foi elaborado um modêlo de Programação Linear Mista*, e o trabalho será desenvolvido de um caso mais simples para a situação generalizada, em que são abordados, simultâneamente, tempos de "espera" e esfôrço deslocamento, nos sentidos vertical e horizontal.

Alem das facilidades didáticas de uma exposição progressiva, o trabalho incorpora, a cada etapa, um conjunto de restrições e componentes da função-objetivo, que representam problemas práticos específicos. Assim, considerando tais situações, (que não reúnem todos os fatôres introduzidos no modêlo mais generalizado), um problema de alocações seria processado de forma mais eficiente, tendo em vista o menor desgaste computacional e a desconsideração de restrições eventualmente supérfulas.

Nêsses têrmos, o plano de trabalho discriminado a seguir, arrola, em cada item, um estágio completo do desenvolvimento do modêlo, podendo ser implementado sempre que uma situação específica recomende o seu aproveitamento.

I.3 - PLANO DE TRABALHO

I - INTRODUÇÃO

- I-1. Áreas de Aplicação do Modêlo.
- I-2. Processos de Solução utilizados.
- I-3. Plano de Trabalho.

II - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

- II.1. "Esfôrço-Deslocamento".
- II.2. Formalização do Problema.

(*) - A título ilustrativo, é ainda anexada uma metodologia de enquadramento à programação quadrática.

iii) Um processo de enumeração implícita.

II - DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

II.1. ESFÔRÇO - DESLOCAMENTO

Define-se como uma unidade de esfôrço - deslocamento, ao deslocamento vertical, em elevadores, de um indivíduo padrão*, por um andar das instalações em estudo.

II.2. FORMALIZAÇÃO DO PROBLEMA

O problema de alocação ideal dos departamentos de uma unidade operativa qualquer, com vistas à minimização de sua quantidade de esfôrço - deslocamento, é definido, na forma mais simples, como se segue :

1. Objetivos

$$\min \bar{z} = \left[\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=o}^{n} q_{ij} \, f_{ij} \, y_{ij} \right] \text{, onde } j=\phi \text{ ou } j<i \text{, e}$$

f_{ij} - é o fluxo provável do departamento **i** para o departamento **j**, (ou para o andar térreo das instalações), numa unidade de tempo considerada.

q_{ij} - é o custo (qualificado) do deslocamento unitário**.

(*) - Vide "qualificação dos fluxos", a seguir.

(**) - Tomando-se como base uma unidade de deslocamento - padrão. A partir de sua importância funcional na organização, atribui-se um custo diferenciado para seu deslocamento.

(Ex: 1 servente = 1 U.D. ; 1 diretor = 100 U.D.)

y_{ij} - é a distância projetada, em andares, do departamento i para o departamento j ou pavimento térreo.

n - é o número total de departamentos e/ou andares da instalação em estudo.

2. Restrições

2.1. Todos os andares devem ser ocupados, e os departamentos completamente alocados.

2.2. A ocupação de um andar i pelo departamento j qualquer, implicará na exclusão obrigatória de outras alocações, para êsse pavimento, de todos os demais departamentos.

$$\boxed{\begin{array}{c} y_{jo} \neq y_{j'o} \neq y_{j''o} \ldots \text{ para} \\ j \neq j' \neq j'' \end{array}}$$

2.3. Os valôres assumidos por y_{jk}, para todo j ou k, serão inteiros e positivos.

$$\boxed{\begin{array}{c} [(y_{jo} - n) \quad \ldots \quad (y_{jo} - 1)] \neq \phi \ , \\ \text{para } j \notin [1,n] \end{array}}$$

2.4. A função-módulo da diferença entre a distância ao térreo de dois departamentos quaisquer, implica necessàriamente na medida da distância entre ambos*.

$$\boxed{\begin{gathered} \| y_{jo} - y_{ko} \| = y_{jk}, \text{ para} \\ j = [1,n] \; , \; k = [1,n] \; , \; j \neq k \end{gathered}}$$

II.3. CONDIÇÕES ESPECIAIS DO PROBLEMA

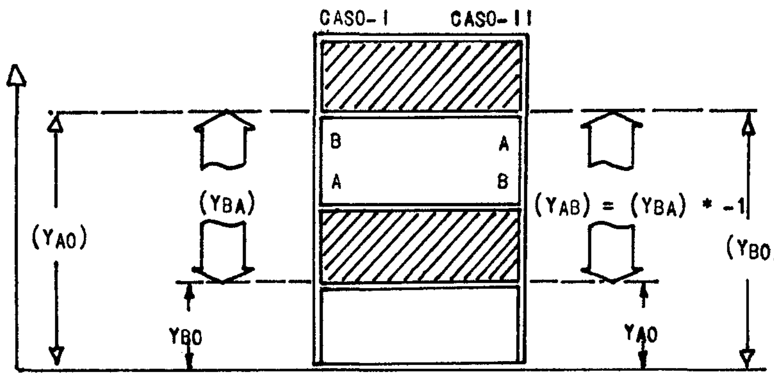
Embora o problema possa ser, como se viu, perfeitamente caracterizado, são evidentes os embargos à aplicação direta dos algorítmos de programação linear, tendo em vista os três impedimentos básicos a seguir:

1. Os valôres de y_{jk}, pela natureza do problema real, devem ser inteiros e positivos, o que vai de encontro aos requisitos da P.L. "contínua".

2. A condição de mútua - exclusividade necessária ao processo ($y_{jo} \neq y_{jo}' \neq y_{jo}'' \ldots$), não é pertinente, por tratar-se de restrição não linear.

3. A condição de equilíbrio entre as diferenças (o módulo da diferença de distância entre dois andares e o térreo, deve necessàriamente corresponder à medida da distância entre ambos), também não pode assumir representação linear, já que se trata de espaço orientado.

(*) - Êsse tipo de restrição, no decorrer do trabalho, será referido simplificadamente como "restrição - Modular".



Com efeito, tendo em vista os requisitos da P.L. para valôres não-negativos da variável, ($y_{jk} \geqslant \emptyset$ em qualquer j ou k), a expressão $y_{jk} = y_{jo} - y_{ko}$, nos casos em que y_{ko} seria maior que y_{jo} torna-se incompatível. A restrição demanda $\| y_{jo} - y_{ko} \| = y_{jk}$, ou $[y_{jo} - y_{ko}]^2 = y_{jk}^2$ e, por decorrência, programação não-linear. Problemas complexos ou muito densos, fazem impraticável êsse tipo de tratamento.

III - METODOLOGIAS DE EQUACIONAMENTO

III.1. UM MODELO SIMPLIFICADO

Tendo em vista os aspectos supra enumerados, o processo presentemente desenvolvido utiliza uma metodologia que, a partir de nova conceituação da variável básica, mantem a natureza linear das restrições e função - objetivo, convergindo para uma solução ótima compatível com os requisitos inteiros e mútuamente exclusivos do problema dado.

1. Variáveis básicas

1.1. Admite-se, em princípio, que um departamento (j) possa ser distribuído pelos diferentes andares (i) da instalação, tal que X_{ij} represente a parcela do departamento j alocada no pavimento i qualquer.

1.2. Igualmente ao que se estabeleceu na caracterização inicial do problema, y_{jk} é a distância em andares do departamento j ao departamento k.

Um requisito $j < k$ é introduzido para eliminar o simétrico da distância entre andares, desde que, se y_{AB} é a distância do departamento A para o departamento B, y_{BA} (distância de B para A) é redundante.

2. Expressão da distância média dos departamentos ao solo

Considerando o princípio de que um departamento é distribuido em parcelas pelos diversos andares, a medida de seu afastamento ao solo será dada pela média ponderada entre a altura do pavimento (distância), e a quantidade de departamento que êle apropria :

$$\boxed{(p_i) = \sum_{j=i}^{n} (x_{ij}), \text{ onde } \quad j = [1,n]} \qquad \text{(I)}$$

3. Ocupação total dos pavimentos, pelas parcelas de departamento

Tendo em vista que apenas uma fração do departamento j é alocada em i, o espaço excedente (complemento), será preenchido com parcelas de outros departamentos, tal que a ocupação total do andar se represente por :

$$\boxed{(p_i)=\sum_{j=i}^{n}(x_{ij}), \text{ onde } j=[1,n]}$$

4. Função - Objetivo

Embora o objetivo do problema seja o mesmo especificado na sua formulação inicial, a nova conceituação de variáveis básicas, desenvolvida na presente metodologia, implica em alterações de forma, para a componente da F.O. que reune as distâncias do departamento ao térreo.

Tomando-se f_{jo}* como o fluxo provável do departamento j para o andar térreo das instalações, e f_{jk} como o movimento inter-departamental de j para k, assume-se :

$$\min z = \left[\sum_{j=1}^{n}(f_{jo}\ d_j)\right] + \left[\sum_{j=1}^{n-1}\ \sum_{k=j+1}^{n}(f_{jk}\ y_{jk})\right],$$

onde Dj é a distância do departamento j ao pavimento térreo.

- Substituindo-se Dj pelo equivalente em (I)

$$\min z = \left[\sum_{j=1}^{n} f_{jo}*\sum_{i=1}^{n}(ix_{ij})\right] + \left[\sum_{j=1}^{n-1}\ \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}\ y_{jk}\right]$$

(*) Já inclui o custo qualificado (q_{jo}) do deslocamento

– Reagrupando :

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo*} \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}\, y_{jk} \right] ,$$

onde f_{ij} é variável exógena (pré-determinada)

5. Escôpo de Restrições

5.1. • A soma em i das diversas parcelas de um departamento j qualquer, será sempre igual à unidade.

Desde que se consideram todos os departamentos com um tamanho padrão, embora admita-se, até o presente, uma sua partição segundo os andares, é manifesto que o somatório dessas parcelas, (tomadas em relativo), deverá corresponder à unidade.

$$\sum_{i=j}^{n} (x_{ij}) = 1, \text{ para } j = 1,n$$

5.2. • A soma em j das diversas partições de um pavimento i qualquer, será tambem igual à unidade.

Como já observado para o tamanho dos departamentos, se todos os andares têm igual medida de área, e existe uma relação lógica de ocupação (1 departamento $\hat{=}$ 1 andar), a soma das diferentes parcelas de departamento, num mesmo andar, corresponderá à ocupação unitária dêsse pavimento.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}) = 1, \text{ para } i = (1,n)}$$

5.3. • Restrições modulares de compatibilização das distâncias entre os departamentos, ou suas distâncias ao térreo.

Como observado inicialmente, a programação linear é desenvolvida num espaço vetorial, onde o valor assumido, para qualquer variável, deve ser não - negativo.

Assim, a restrição $[y_{jo} - y_{ko}] = y_{jk}$, que compatibilizaria a distância entre departamentos, (restrição modular), com base na diferença de suas distâncias ao andar térreo, exclui a possibilidade de y_{ko}* assumir maior valor que y_{jo}.

Por outro lado, essa formalização no Modêlo é imprescindível, desde que pretende-se minimizar o conjunto de fluxos ponderados entre cada departamento e o andar térreo, e também dos departametos entre si. Em adição, a relação física de diferença entre y_{jo} e y_{ko}, implicará, efetivamente, em $\| y_{jk} \|$

A identificação das distâncias absolutas entre dois departamentos quaisquer, sem violentar requisitos da programação linear, pode ser atendida através dos dois processos alternativos seguintes :

(*) - $y_{ko} = \sum_{i=j}^{n}(ix_{ik})$

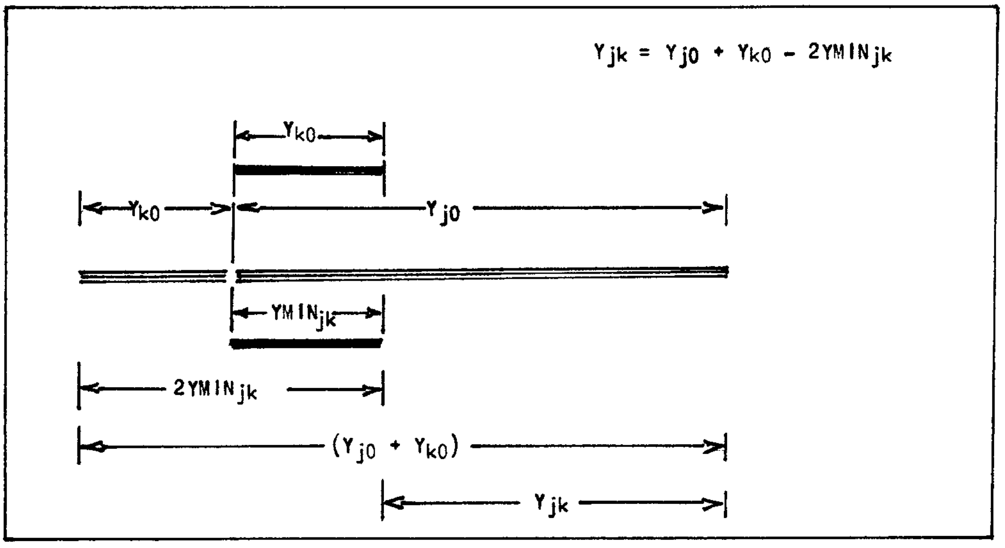
5.3.1. Alternativa das "distâncias menores"

Pela análise do problema descrito, infere-se que a dificuldade básica em determinar as distâncias inter-departamentais repousa no fato de que não se conhece, a priori, qual das distâncias ao solo é dominante. Assim, pode-se criar uma variável auxiliar $yMIN_{jk}$, limitada superiormente em y_{jo} = y_{ko}, de forma a que represente, no máximo, o menor dos valôres de y.

$$yMIN_{jk} \leqslant y_{jo}$$

$$yMIN_{jk} \leqslant y_{ko}$$

Desde que a distância inter-departamental apropriará uma diferença entre a soma de suas distâncias ao solo e o menor dêsses afastamentos*, assume-se:



(*) Supondo y_{jo} dominante em relação a y_{ko}, (sem perda de generalidade)

$y_{jk} = y_{jo} - y_{ko} \quad \therefore \quad y_{jk} = y_{jo} - y_{ko} + y_{ko} - y_{ko} \quad \therefore$

$y_{jk} = (y_{jo} + y_{ko}) - 2 \times y_{ko}$

Uma vêz que a função - utilidade é induzida à minimização dos y, o limite inferior de y_{jk}, com base nas restrições I e II, ocorrerá para $yMIN_{jk}$ máximo, ou seja, ... $yMIN_{jk} = \min \{ y_{jo}, y_{ko} \}$, ou ainda, para o verdadeiro valor do afastamento entre os departamentos j e k.

Embora mantendo os requisitos da programação linear, o processo acima descrito implicará na criação de $2*\binom{n}{2}$ variáveis adicionais, e, paralelamente, $3*\binom{n}{2}$ novas restrições*.

5.3.2. Alternativa das "variáveis simétricas"

Pelo uso dessa segunda alternativa, são criadas novas variáveis auxiliares, referidas, daqui por diante, como "simétricas"**, às quais estarão atribuidos, na F.O., os mesmos pesos originalmente considerados para os y_{jk}.

$$\min z\{\sum_{j=1}^{n} f_{jo} \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij})\}+\{\left[\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}\, y_{jk}\right] \boxed{+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} y_{kj}]\}}$$

- Reagrupando

$$\boxed{\min z = \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo} \cdot \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}^{*} (y_{jk} + y_{kj})\right] ,}$$

(*) - Três a cada combinação de departamentos.

(**) - O têrmo é apenas didático, não ocorrendo necessariamente numa simetria.

As restrições "modulares" podem agora ser introduzidas na forma seguinte :

$$d_j - d_k = y_{jk} - y_{kj}$$

Considerando a "forma" das variáveis de distância ao solo,

$$\sum_{i=1}^{n} ix_{ij} - \sum_{i=1}^{n} ix_{ik} = y_{jk} - y_{kj} \quad \therefore$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i(x_{ij}-x_{ik}) = \left[y_{jk}-y_{kj} \right] ,} \qquad \begin{matrix} j= [1;\ n-1] \\ k= [j+1;\ n] \end{matrix}$$

Três aspectos sobressaem da expressão acima :

1. Quaisquer que sejam os valôres de y_{jo} e y_{ko}, existem sempre valôres de y_{jk} e y_{kj} que atendem à igualdade estabelecida.

2. Mesmo para y_{ko} maior que y_{jo} (ou seja, para um resultado negativo da diferença), as variáveis y_{jk} e y_{kj} podem sempre assumir valôres <u>não - negativos</u>.

3. A diferença entre y_{jo} e y_{ko} , ao contrário da situação real, implica em <u>infinitas combinações de valôres</u> para y_{jk} e y_{kj} , embora mantendo-se, entre êles, <u>uma relação única</u>.

No sentido de contornar-se essa <u>indiferença</u>

de valôres para y_{jk} e y_{kj}, foram introduzidos, na F.O., as variáveis "simétricas" (y_{kj}), com os mesmos coeficientes atribuídos às variáveis iniciais (y_{jk})*.

Desde que a otimização do Modêlo, com vistas a êsse aspecto, corresponde a uma análise isolada para cada par de variáveis (y_{jk} e y_{kj}), é conclusivo que o programa assumirá sempre o valor da diferença em uma das variáveis (no têrmo à esquerda - RHS), anulando a segunda variável.

Exemplos :

Suposta uma "alocação - ideal" em que $y_{30} = 4$ e $y_{50} = 7$**, é o seguinte o comportamento da "restrição modular" $[D_3 - D_5] = [y_{35} - y_{53}]$

- Combinações Possíveis

y_{53}	y_{35}	Efeito na F.O.
7	4	11
6	3	9
4	1	5
3	0	3
2	- 1	*
1	- 2	*

(*) Inviável, por não atender $y_{ij} > 0$

(*) - f_{jk}

(**) - $x_{43} = 1$; $x_{75} = 1$, $x_{i3} = \emptyset$ para $i \neq 4$

$x_{i5} = \emptyset$ para $i \neq 7$

- Efeito mínimo viável : 3

para : $\boxed{y_{35} = \emptyset \quad e \quad y_{53} = 3}$

Do exemplo acima depreende-se que a afirmação anterior é realmente válida, ou seja:

- para as diversas combinações de y_{jk} e y_{kj} que decorrem em $[D_j - D_k]$, o efeito, na F. O., será mínimo viável sempre que qualquer das variáveis for nula*.

Mesmo considerando a incorporação da terceira restrição, (descrita na alternativa anterior), à função-objetivo**, é evidente que o uso das variáveis "simétricas" decorrerá em menor desgaste computacional, (durante a resolução do algorítmo), daí eleger-se, para efeito de estruturação do modêlo nos ítens seguintes, êsse conjunto de restrições modulares como alternativa em uso.

5.4. . A ocupação de um andar (i) pelo departamento (j) qualquer, implicará na exclusão obrigatória de outras alocações, para êsse

(*) - Por tratar-se de comportamento evidente, não se promove sua demonstração teórica.

(**) - $\min Z \ldots + \left[(y_{jo} + y_{ko}) - 2\, yMIN_{jk}\right] + \ldots$

Sujeito a $yMIN_{jk} < y_{jo}$

$yMIN_{jk} \leqslant y_{ko}$

pavimento , de todos os demais departamentos.

Essa restrição de mútua exclusividade, representando o verdadeiro elemento de ligação entre o conjunto de equações e função utilidade anteriores, e o comportamento discreto que caracteriza o problema real, decorre em :

$$\sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) \neq \sum_{i=1}^{n} (ix_{ik}), \text{ para } j=[1,n] \text{ , } k=[1,n] \text{ e } j \neq k$$

A introdução dos requisitos de programação inteira para todas as variáveis x_{ij} , associada às restrições 5.1 e 5.2., que definem limites unitários na composição de um pavimento, ou departamento, asseveram o requisito de mútua exclusividade em pauta.

6. Resumo da Estrutura do Modêlo

6.1. Função - Objetivo

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo} \cdot \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}(y_{jk} + y_{kj}) \right]$$

6.2. Restrições

6.2.1. Equilíbrio da distribuição dos departamentos segundo os andares

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij}) = 1, \quad \text{para } j=[1,n]$$

6.2.2. Equilíbrio da ocupação dos andares pelas parcelas de departamento

$$\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}) = 1, \quad \text{para} \quad i = [1, n]$$

6.2.3. Restrições Modulares

$$\sum_{i=1}^{n} [i(x_{ij} - x_{ik})] = [y_{jk} - y_{kj}] \ , \text{para}$$

$$j= [1, n-1] \ , \quad k= [j+1, n]$$

6.3. Tipos de variáveis : Discretas

7. Dimensionamento do Modêlo*

7.1. Número de Restrições

7.1.1. Tipo 6.2.1.	....	n
7.1.2. Tipo 6.2.2.	....	n
7.1.3. Tipo 6.2.3.	....	$n\ (n - 1)/2$
7.1.4. Total	....	$n\ (n + 3)/2$

7.2. Densidade da matriz**

7.2.1. Número de Variáveis	....	$n(2n-1)$
7.2.2. Número de celas da matriz***	....	$n^2(2n^2+5n-3)/2$

(*) - Durante o processo de "solução contínua"

(**) - Relativa às variáveis originais

(***) - (7.1.4) x (7.2.1)

7.2.3. Ocorrências não-nulas

7.2.3.1.	....	n^2
7.2.3.2.	....	n^2
7.2.3.3.	....	$n(n^2-1)$
Total	....	$n(n^2+2n-1)$

7.2.4. Densidade $\left[2(n^2+2n-1)\right]/n(2n^2+5n-3)$

8. Montagem das Restrições

Tendo em vista o número de variáveis e restrições da presente metodologia, a composição das equações e função-objetivo é atendida através de um programa computacional de montagem (programa montador -I), cujos dados de entrada são os fluxos ao solo e inter-departamentais, e a saída é o proprio modêlo P.L., já nos formatos requeridos pelo MPSX/MIP, ou pelo otimizador anexado ao trabalho.

Seu fluxograma geral está desenvolvido a seguir:

- Códigos

Variáveis

a - Parcela do dp j no andar i

X*II*JJ* onde II = and.
JJ = dep.

b - Distância do dp j ao dp k

Y*JJ*KK* onde JJ = dep.
KK = dep.

Restrições

a - Equilíbrio dos departam.

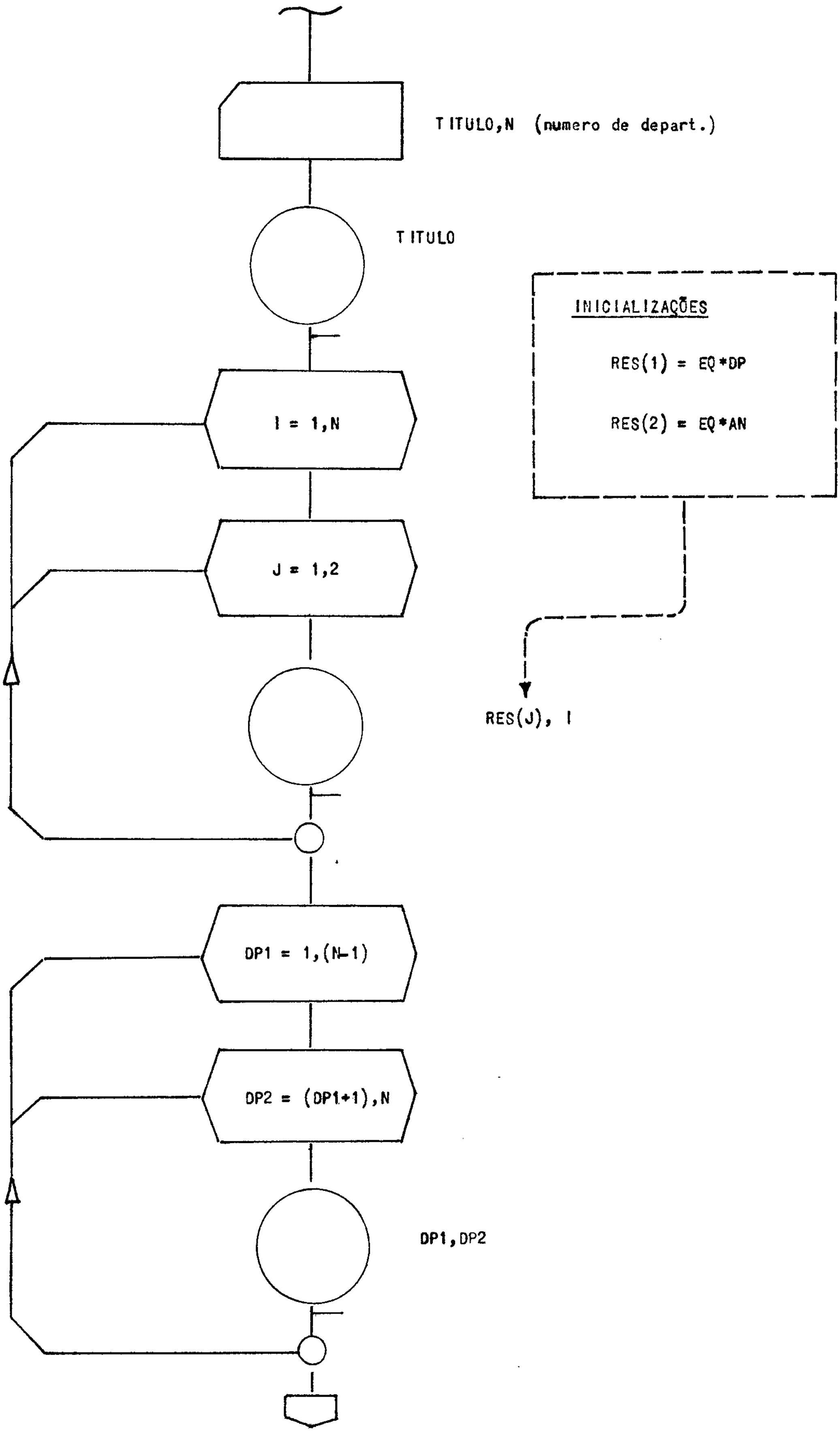
EQ*DP*JJ onde JJ = dp.

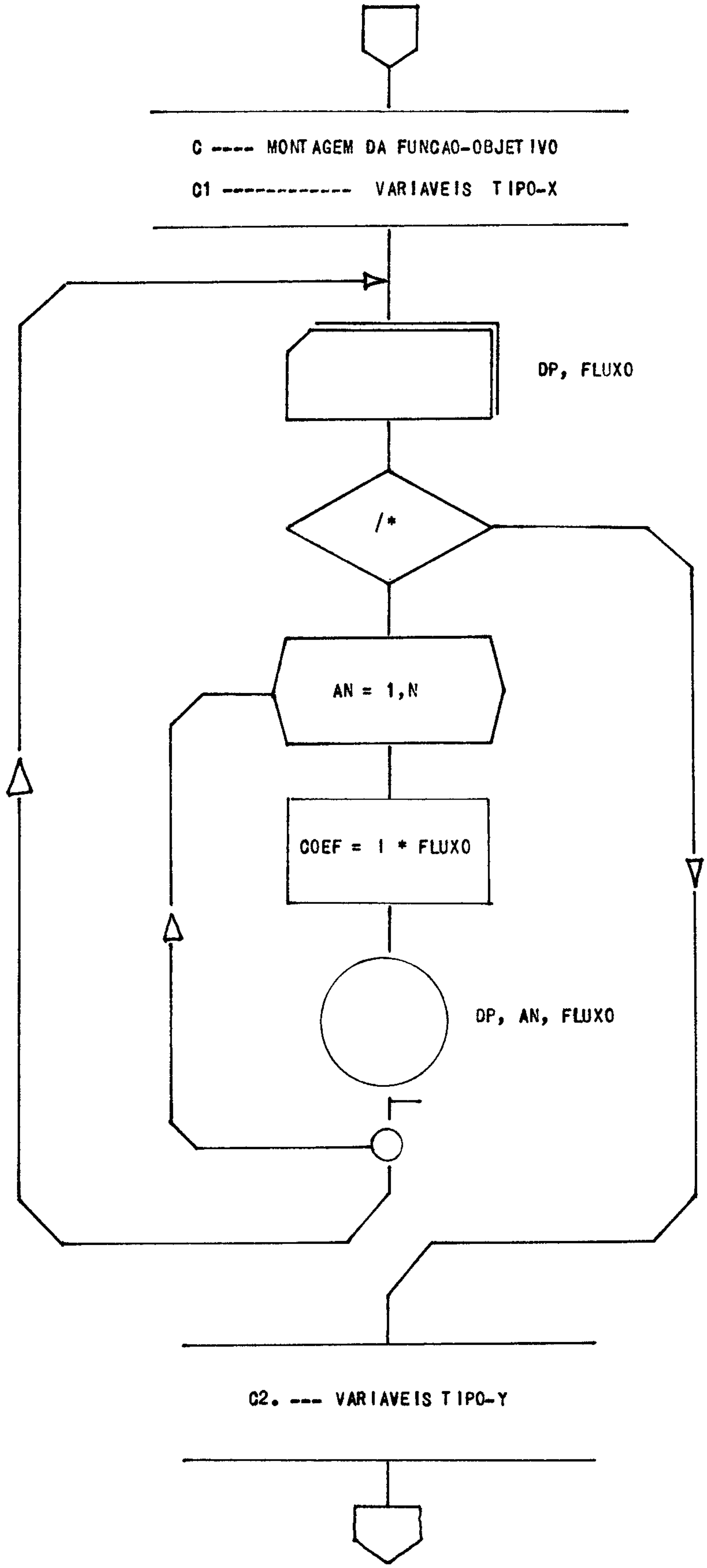
b - Equilíbrio dos andares

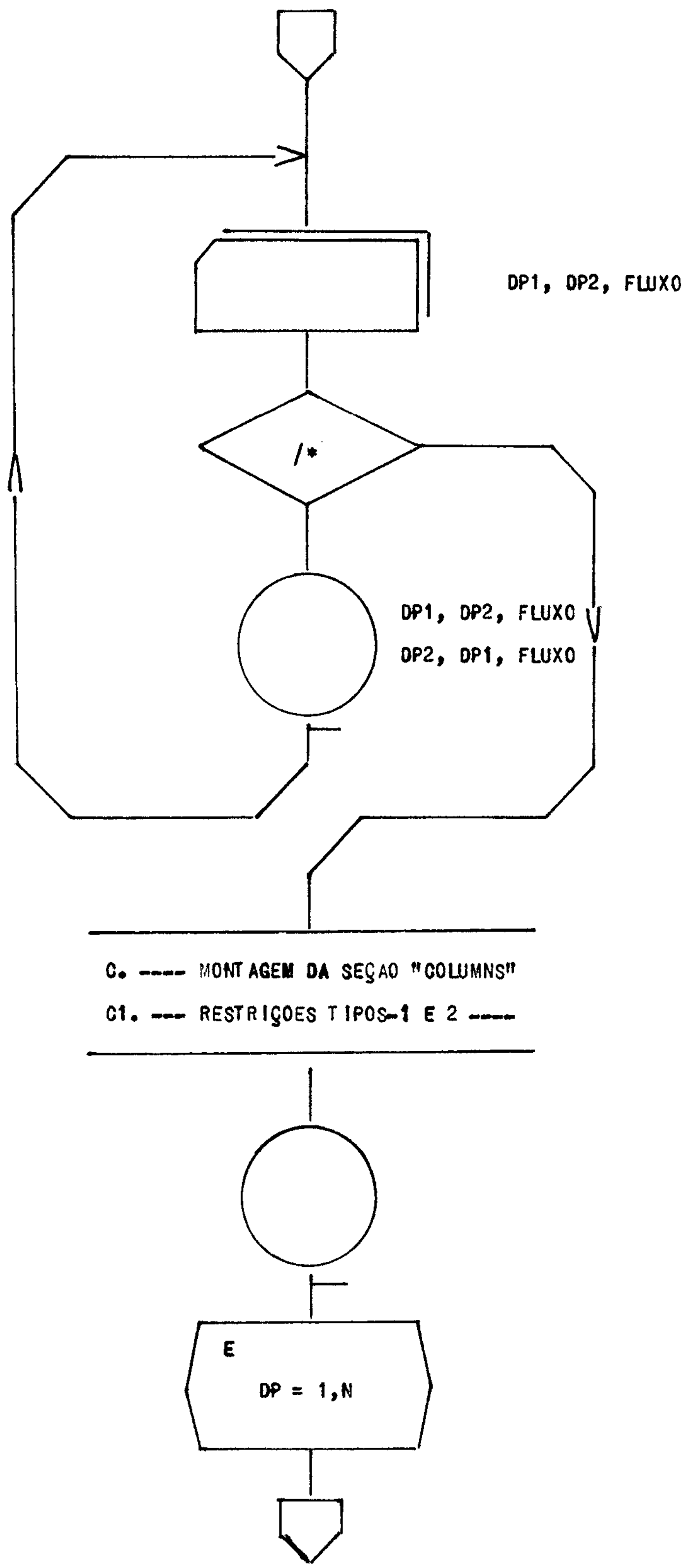
EQ*AN*II onde II = andar

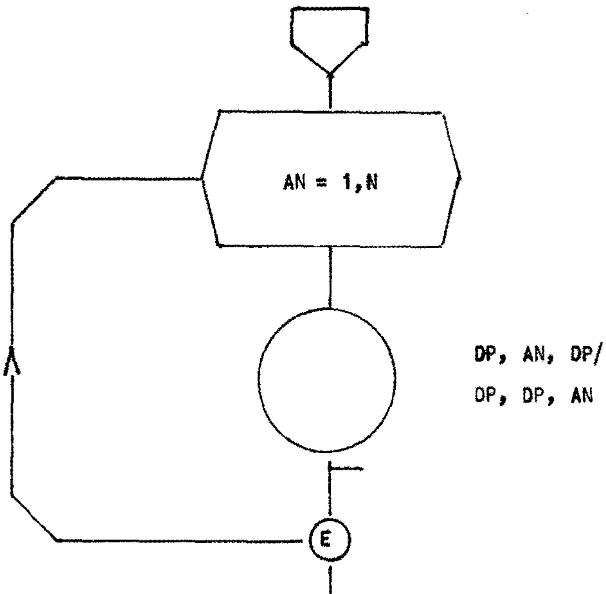
c - Restrições modulares

MD*JJ*KK onde JJ = dep.
KK = dep.

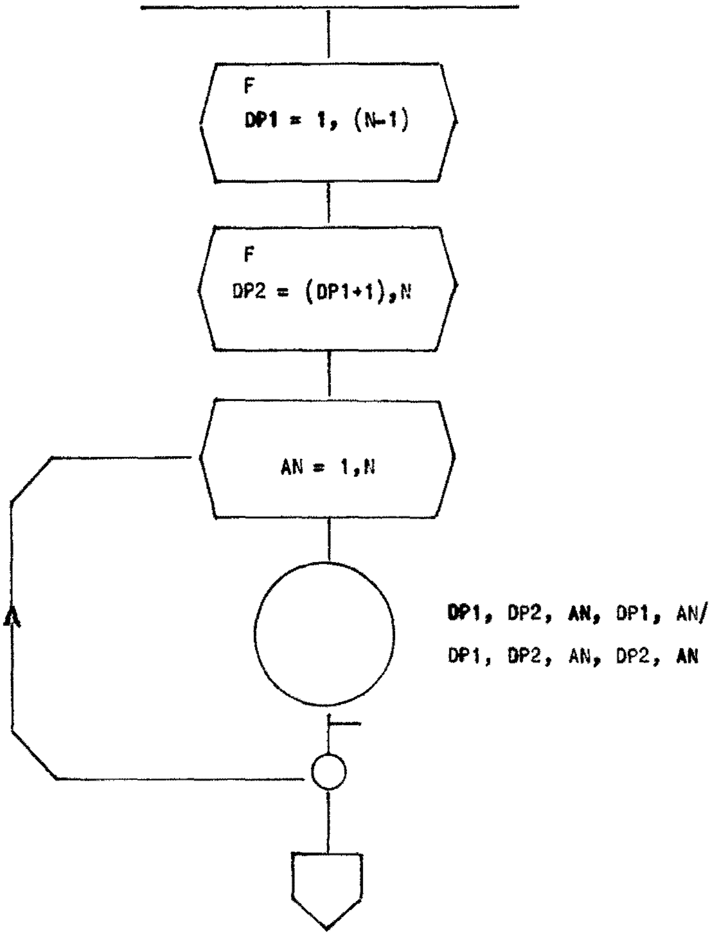

TITULO,N (numero de depart.)
TITULO
INICIALIZAÇÕES
RES(1) = EQ*DP
RES(2) = EQ*AN
I = 1,N
J = 1,2
RES(J), I
DP1 = 1,(N-1)
DP2 = (DP1+1),N
DP1,DP2

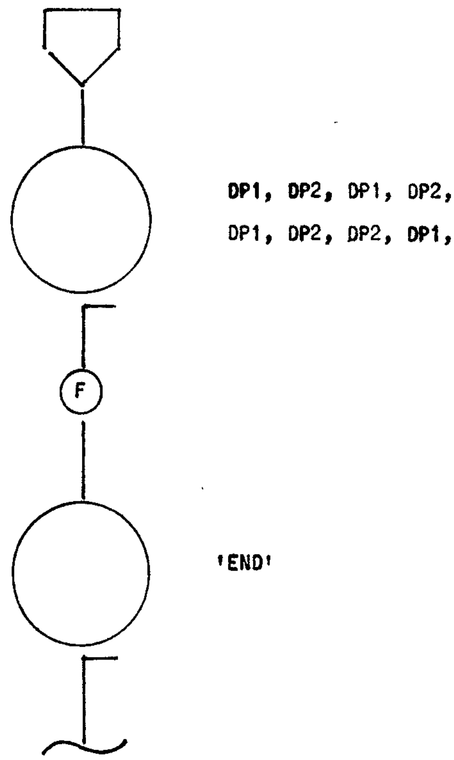

C ---- MONTAGEM DA FUNCAO-OBJETIVO
C1 ------------ VARIAVEIS TIPO-X
DP, FLUXO
/*
AN = 1,N
COEF = I * FLUXO
DP, AN, FLUXO
C2. --- VARIAVEIS TIPO-Y


DP1, DP2, FLUXO
/*
DP1, DP2, FLUXO
DP2, DP1, FLUXO
C. ---- MONTAGEM DA SEÇAO "COLUMNS"
C1. --- RESTRIÇOES TIPOS-1 E 2 ----
E
DP = 1,N



C. ---- RESTRIÇOES MODULARES





DP1, DP2, DP1, DP2,
DP1, DP2, DP2, DP1,
F
'END'

9. Caso - Exemplo

Foi desenvolvido, para efeito de avaliação, um exemplo-base em que se considera a ocupação funcional das novas instalações de uma empresa, admitida a organização composta de seis departamentos, e com o edifício-sede apropriando igual número de andares.*

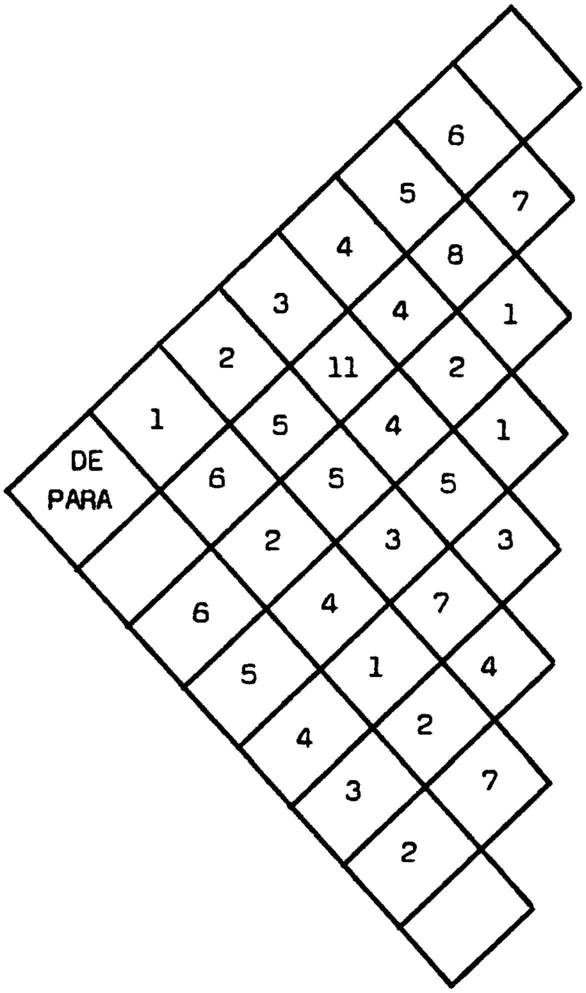
As matrizes de suporte, para o problema, estão detalhadas nas tabelas seguintes :

9.1. Matriz de fluxos ao solo

Nº do Departam.	Fluxo (qualificado)
1	6
2	5
3	11
4	4
5	8
6	7

(*) - Êsse exemplo - base será expandido para todas as situações gerais desenvolvidas nos capítulos posteriores.

9.2. Matriz de fluxos inter - departamentais



9.3. Dimensionamento do Modêlo*

9.3.1. Número de Restrições

i)	- Tipo I (Ocupação total dos Andares)	6
ii)	- Tipo II (Distrib.Total dos departamentos)	6
iii)	- Tipo III (Restrições Modulares)	15
iv)	- Total	27

9.3.2. Densidade da Matriz

(*) - No processo de "solução contínua"

i)	– Número de Variáveis	66
ii)	– Celas da Matriz	1782
iii)	– Ocorrências não-nulas	282
iv)	– Densidade	.15

III.2. CUSTOS DE INSTALAÇÃO

1. INSTALAÇÃO INICIAL

Paralelamente à minimização do esfôrço-deslocamento, que se constitui no objetivo inicial do presente modêlo, é possível influenciar a solução quanto aos custos de instalação da unidade j, num pavimento i qualquer.

Considerando-se custos diferenciados de instalação, segundo o andar e o departamento, novos parâmetros (cij) podem ser atribuídos à função - objetivo, os quais, expressos em unidade comum aos demais, orientam a solução para um valor mínimo de ocorrências dessa grandeza.

Dois aspectos sobressaem no exposto acima:

1.1. Diferentemente de uma análise isolada dos deslocamentos, cujos fluxos independem da unidade padrão,* um objetivo composto (fluxos + instalações) demanda o estabelecimento preliminar de um fator de conversão, que associará "lògicamente" as unidades de deslocamento e de instalações.

Assim, se há fluxos inter - departamentais tomados em homens/mês, e há custos de instalação em cruzeiros, é necessário o fator de conversão que, aplicado ao primeiro, expresse o fenômeno em unidade comum ao segundo.

1.2. A consideração da ocupação dos andares pelos departamentos não pode, de per si, definir uma solução ótima para o Modêlo, desde que os fluxos de deslocamento são permanentes (renováveis), enquanto a instalação das unidades é

(*) - Desde que são sempre mantidas as proporções de medida.

instantanea.

Com efeito, uma situação extrema de ocupação, por um período de apenas um dia, orientará a solução para a distribuição dos departamentos que represente o Custo Mínimo de Instalações, sem qualquer influência dos fluxos de deslocamento. Se, ao contrário, é atribuido ao Modêlo um período de 2~~00~~ anos, os custos de instalação inicial não influenciam significativamente o vetor - ótimo, que representará a medida mínima dos fluxos de deslocamento.

A função - objetivo, para o caso presente, assume :

$$\min \bar{z} = \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo} \cdot \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} (y_{jk} + y_{kj}) \right] + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (c_{ij} \; x_{ij}) \qquad *$$

- Reagrupando :

$$\boxed{\min \bar{z} = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (c_{ij} + if_{jo}) * x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} * (y_{jk} + y_{kj}) \right]}$$

1.3. Dimensionamento de períodos

É evidente que os diversos critérios de dimensionamento do t, não serão necessàriamente ideais para a maioria dos casos. De fato, cada situação particular recomendará um critério de tratamento específico, mais adequado às características individuais do dado problema, daí porque, nêsse trabalho, não se desenvolvem processos de determinação do período.

2. Custos de Re - Instalação

(*) - Com cij e fij em unidade comum.

O Modêlo pode ainda ser aproveitado para redistribuição de Unidades já instaladas, desde que os custos de ocupação, no andar que o departamento já apropria, sejam considerados nulos.

A questão é :

i) - "Para uma situação de ocupação já implantada, até que ponto justifica-se a redistribuição dos departamentos (para um esfôrço - deslocamento menor), tendo em vista os custos de instalação inerentes à mudança"?

E em paralelo,

ii) - que nova distribuição ideal corresponde a uma redução dos deslocamentos*, a pouco custo**, de forma a obter-se um vetor ótimo, representativo da minimização conjunta "Deslocamento / Re-instalação"?

Depreende-se, do expôsto, que a solução do Modêlo, nos casos de ocupação inicial, caracteriza uma e somente uma distribuição ótima para o problema***, enquanto os casos de re-instalação estarão influenciados pela distribuição anterior, e pela redução do Esfôrço-Deslocamento/Custos de Mudança, agregados à nova ocupação dos andares pelos Departamentos.

Assim, é possível que uma mesma matriz de fluxos de deslocamento e de custos de instalação, converjam para "ótimos" diferentes, a partir de duas distribuições iniciais diversas, e, ainda, que nenhum dêsses "ótimos" represente solução ideal para uma primeira ocupação das instalações.

(*) - Que não necessàriamente decorrerão num valor mínimo.

(**) - Que, igualmente, não deve corresponder à distribuição de menor custo de instalações.

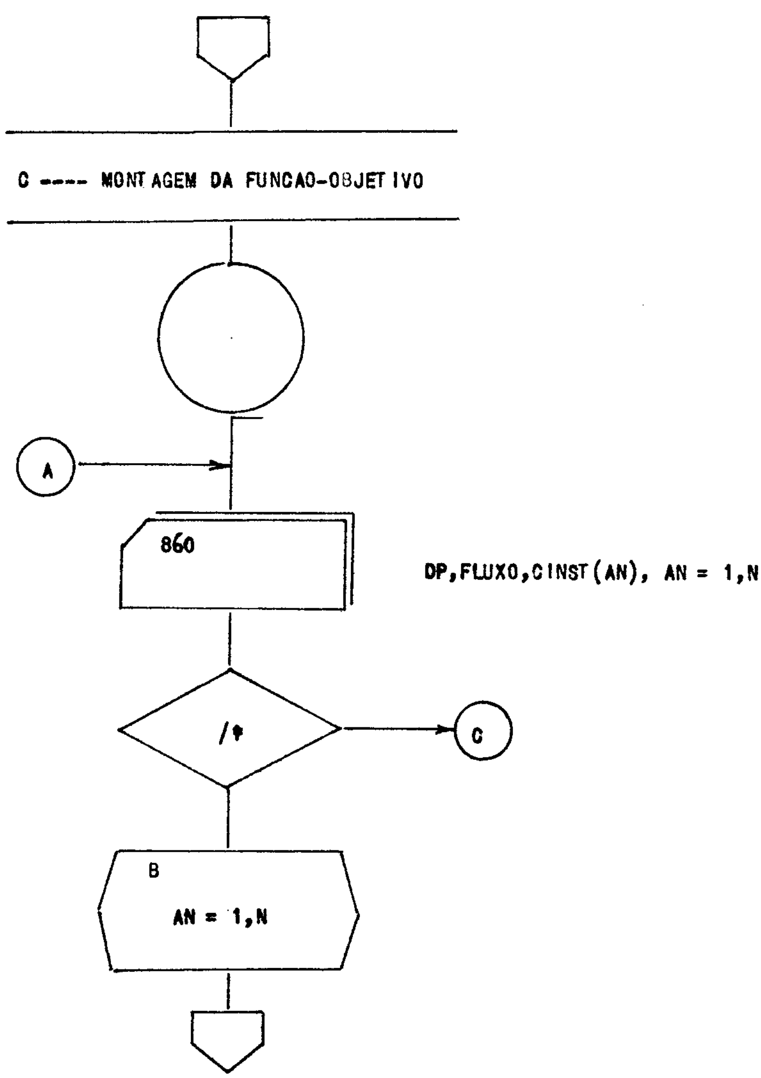
(***) - Sem considerar soluções indiferentes do simplex.

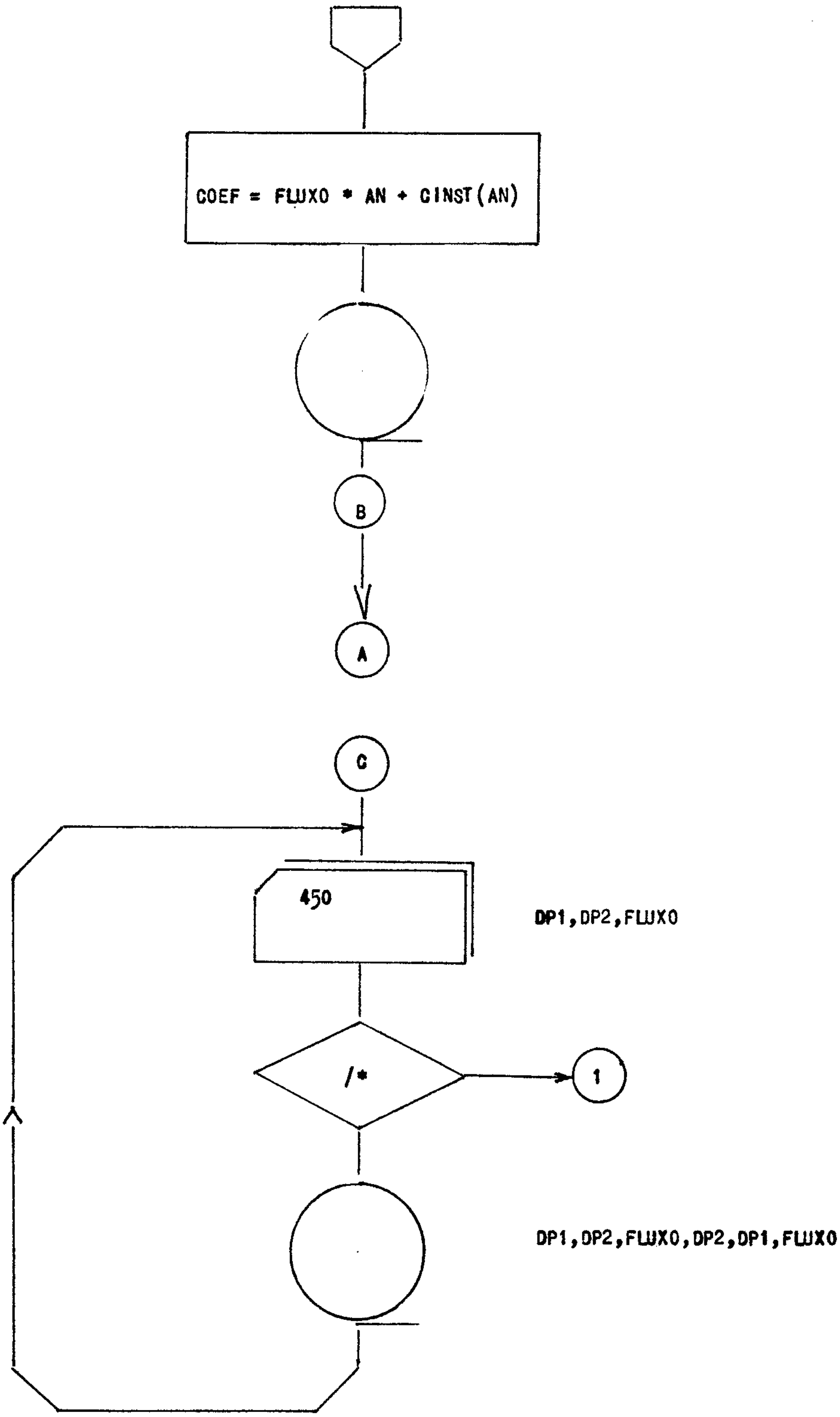
3. Alterações na Estrutura do Modêlo

Tendo em vista os novos conceitos introduzidos junto aos custos de Instalação/Re-Instalação, a função-objetivo é expandida, pela anexação dos parâmetros Cij, decorrendo em:

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (c_{ij} + if_{io})^* x_{ij} + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}^* (y_{jk} + y_{kj}) \right] ,$$

4. Sub-Rotina para geração da função-objetivo modificada




COEF = FLUXO * AN + CINST(AN)
B
A
C
450
DP1,DP2,FLUXO
/*
1
DP1,DP2,FLUXO,DP2,DP1,FLUXO

(1) - ROTINA DE MONTAGEM DA SEÇÃO COLUMNS - (Idem à apresentada no item ..... 8)

5. Casos - Exemplos

5.1. Instalação Inicial

Pode ser utilizado, para efeito de comparação, o mesmo exemplo desenvolvido no processo de solução anterior, em que se considerava a minimização isolada do esfôrço-deslocamento.

A matriz de custos de instalação, a ser agregada, está representada a seguir :

AND \ DEP	1	2	3	4	5	6
1	2	3	1	2	5	4
2	4	5	3	2	9	2
3	4	7	6	8	3	1
4	3	5	9	1	7	2
5	1	1	6	5	4	7
6	6	2	3	9	7	2

5.2. Re-Instalação

Supondo que os custos de mudança do departamento j, (de um andar i para o departamento i'), correspondam ao custo inicial da instalação dêsse departamento no pavimento i'*, que são mantidas as matrizes de suporte utilizadas no exemplo-base do presente trabalho (fluxos-deslocamento), e considerando-se ainda a distribuição inicial abaixo, assumir-se-á uma matriz de custos como apresentado em 5.2.2.

5.2.1. Distribuição Inicial dos Departamentos

ANDAR	DEPARTAMENTO
1	4
2	1
3	3
4	6
5	2
6	5

5.2.2. Custos de Re - Instalação

(*) - Êsse disposto não necessàriamente ocorre para todos os casos.

AND \ DEP	1	2	3	4	5	6
1	2	3	1		5	4
2		5	3	2	9	2
3	4	7		8	3	1
4	3	5	9	1	7	
5	1		6	5	4	7
6	6	2	3	9		2

III.3. CUSTOS DE ESPERA

1. PREMISSAS

O problema da alocação dos departamentos, pode ainda ser abordado a partir de uma redefinição dos condicionantes da decisão, ou seja, considerando-se uma minimização do tempo de espera por elevadores, independentemente do tempo de deslocamento, ou número de andares percorridos.

De fato, desde que os elevadores, em têrmos gerais, percorrem a distância total dos andares (qualquer que seja o número de pessoas transportadas), e tendo em vista as velocidades crescentes dos equipamentos mais modernos, o tempo de deslocamento, nos elevadores, seria pouco representativo em relação ao tempo de espera por elevadores.

O Modêlo pode então ser reformulado, considerando idêntico efeito para um deslocamento de m pessoas por k ou j pavimentos da instalação.

Como, na maioria dos problemas, é possível associar-se ambos os aspectos (tempo de deslocamento e tempo de espera), a reestruturação do Modêlo, com vistas ao tratamento atual, assume :

i) - Andares adjacentes não implicam em tempo de espera e/ou deslocamento (uso de escadas)

ii) - A utilização dos elevadores decorrerá sempre nos seguintes efeitos:

a) Tempo de Espera, que independe do número de andares a percorrer.

b) Tempo de deslocamento, que representa a medida do esfôrço-deslocamento analisada nas hipóteses anteriores dêsse trabalho.

2. <u>Variáveis Adicionais</u>

A fim de estabelecer-se os novos efeitos do Modêlo, foram introduzidas as variáveis auxiliares w_{jk}, onde w assume a ocorrência de espera e deslocamento (zero ou valôres inteiros e positivos)* , e $\overline{jk}$ corresponde ao índice dos departamentos onde ocorre o fluxo jk, ou fluxo ao solo (k = o).

3. <u>Restrições Adicionais</u>

Desde que departamentos adjacentes são considerados sem efeito de espera ou deslocamento, é lícito introduzir restrições em que w_{jk} será azerada sempre que

$$\left[(y_{jk} + y_{kj}) - 1 \right] = \emptyset$$

A restrição, para fluxos departamentais, assume:

(I) $$\left[(y_{jk} + y_{kj}) - 1 \right] \leqslant n\, w_{jk}, \text{ onde}$$

$$j = [1, n-1], \quad k = [j+1, n]$$

Em se tratando de movimento ao solo, e tido o primeiro pavimento como de acesso pela escada, as restrições, no caso, representam-se por :

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (i x_{ij}) - 1 \right] \leqslant n\, w_{jo} \text{ , onde } j = [1,n]$$

(*) - Desenvolvimento posterior demonstra a assunção de <u>valôres binários</u> para w_{jk}.

Re-agrupando :

$$\text{(I)} \quad y_{jk} + y_{kj} - nw_{jk} \leqslant 1, \qquad \text{para} \quad j = [1, n-1], \; k = [j+1, n]$$

$$\text{(II)} \quad \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) - nw_{jo} \leqslant 1 \qquad \text{para} \quad j = [1, n]$$

Não é necessária a definição de limites superiores para w_{jk} ou w_{jo} ($\leqslant 1$), tendo em vista que o próprio objetivo (minimização) e os requisitos de programação inteira para a variável em epígrafe, implicam na assunção dos valôres $\emptyset$ e 1 pretendidos.

4. Componente Adicional da F.O.

Pelo novo conceito de otimização presentemente considerado, a função-objetivo receberá novos parâmetros (tempos de espera), e será alterada nos parâmetros de esfôrço-deslocamento, pela exclusão do efeito atribuido ao departamento locado no primeiro andar, ou aos departamentos adjacentes.

Para uma melhor percepção das alterações, a função-utilidade é distribuida (didàticamente) como se segue:

i) Componente "Deslocamento"

(*) - O MPSX, que demanda "BOUNDS" para as variáveis inteiras, receberá êsses limites formalizados.

$$\min Z' = D. \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo} . \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})\right]$$

ii) <u>Componente "Espera"</u> (A introduzir)

$$\min Z'' = E. \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo}\, w_{jo} + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}\, w_{jk}\right]\right\}$$

A criação dos parâmetros D e E, permite correlacionar, em unidade comum, o Tempo Unitário de Espera (por elevadores), e o Tempo Unitário de Deslocamento (por andar percorrido).

Depreende-se, das expressões acima, que o efeito-deslocamento atribuído aos fluxos do departamento no primeiro andar, bem como dos departamentos adjacentes, ainda permanecem considerados, o que vai de encontro aos requisitos da atual metodologia.

Como a minimização incorrerá sempre na <u>as</u>sunção de $\emptyset$ (w_{jk}) para as adjacências, e 1 para os demais casos, é lícito agr<u>e</u>gar o <u>complemento da variável</u> à componente (I) da F.O., conforme desenvolvido a seguir :

$$\min Z' = \overbrace{D^*\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo} \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})\right]\right\}}^{(I)} -$$

$$- \underbrace{D^*\left\{ \sum_{j=1}^{n} \left[f_{jo}(1-w_{jo}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}(1-w_{jk})\right]\right\}}_{(II)}$$

Pode-se observar que, ocorrendo adjacência, $w_{jk} = \emptyset$ e $[-f_{jk}(1-w_{jk})] = -f_{jk}$. Desde que, em tais casos, o efeito-deslocamento anteriormente atribuido representava f^{*}_{jk}, a componente (II) estará anulando o efeito acima verificado.

Por outro lado, nos casos da não-adjacência, incorre-se $w_{jk} = 1$, e $[-f_{jk}(1-w_{jk})] = \emptyset$, ou seja, apenas a componente verdadeira $[f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})]$ dêsse deslocamento, assumirá seu real efeito na função minimizante.

Caso se pretenda atribuir um novo custo ao deslocamento pelas escadas, basta introduzir o elemento $G*f_{jk}(w_{jk})$. Se G fôr representativo, é necessário amarrar w_{jk} em $\emptyset$ nas adjacências, e não apenas induzi-lo na F.O., como se vem observando.

Há que considerar, nessa hipótese, o desgaste computacional decorrente da criação de novas restrições associadas a êsse aspecto.

Reagrupando a Função Objetivo, em sua forma modificada, tem-se:

$$\min Z = D\{\sum_{j=1}^{n}[f_{jo}*\sum_{i=1}^{n}(ix_{ij}) + \sum_{k=2}^{n} f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})] -$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=o}^{n}[f_{jk}(1-w_{jk})]\} + E\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=o}^{n}(f_{jk}\, w_{jk})\} \quad \therefore$$

(*) - Pelo evento da adjacência, $y_{jk} + y_{kj} = 1$, e $[f_{jk}\, y_{jk} + f_{jk}\, y_{kj}] =$ $= f_{jk}$.

$$\min Z = \{D \sum_{j=1}^{n} [f_{jo} \sum_{i=1}^{n} (ix_{jo}) + \sum_{k=2}^{n} f_{jk} (y_{jk} + y_{kj})]\} -$$

$$- D\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} (f_{jk})\} + D\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} f_{jk} w_{jk} \} +$$

$$+ E \{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} (f_{jk} w_{jk})\} \text{ , onde } k=0 \text{ ou } k \quad j$$

Para $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} (f_{jk})$ constante, e por decorrência, sem capacidade de efeito na condução da solução-ótima, a função-objetivo assume :

$$\boxed{\begin{aligned} \min Z = D \{ \sum_{j=1}^{n} [f_{jo} * \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} (y_{jk} + y_{kj})]\} \quad + \\ + \{(D+E) [\sum_{j=1}^{n} (f_{jo} w_{jo} + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} w_{jk})]\} \end{aligned}}$$

É evidente que, segundo cada problema específico, os parâmetros D ou E podem ser azerados, quando então a solução será conduzida para a ocorrência mínima do <u>Tempo de Espera</u> ou do <u>Esfôrço-Deslocamento Total</u>, considerados isoladamente.

5. <u>Resumo da nova estrutura do Modêlo</u>

5.1. <u>Função-Objetivo</u>.

$$\min z = D\{ \sum_{j=1}^{n} \left(f_{jo} \sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})\right)\}+$$

$$+\{(D+E)\left(\sum_{j=1}^{n} (f_{jo} w_{jo} + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} w_{jk})\right)\}$$

5.2. Restrições

5.2.1. Equilíbrio da distribuição dos departamentos :

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij}) = 1, \quad \text{para } j=[1,n]$$

5.2.2. Equilíbrio da Ocupação dos Andares

$$\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}) = 1, \quad \text{para } i=[1,n]$$

5.2.3. Restrições Modulares

$$\sum_{i=1}^{n} \left(i(x_{ij} - x_{ik})\right) = \left(y_{jk} + y_{kj}\right), \quad \text{para}$$

$$j = [1,n-1], \; k = [j+1,n]$$

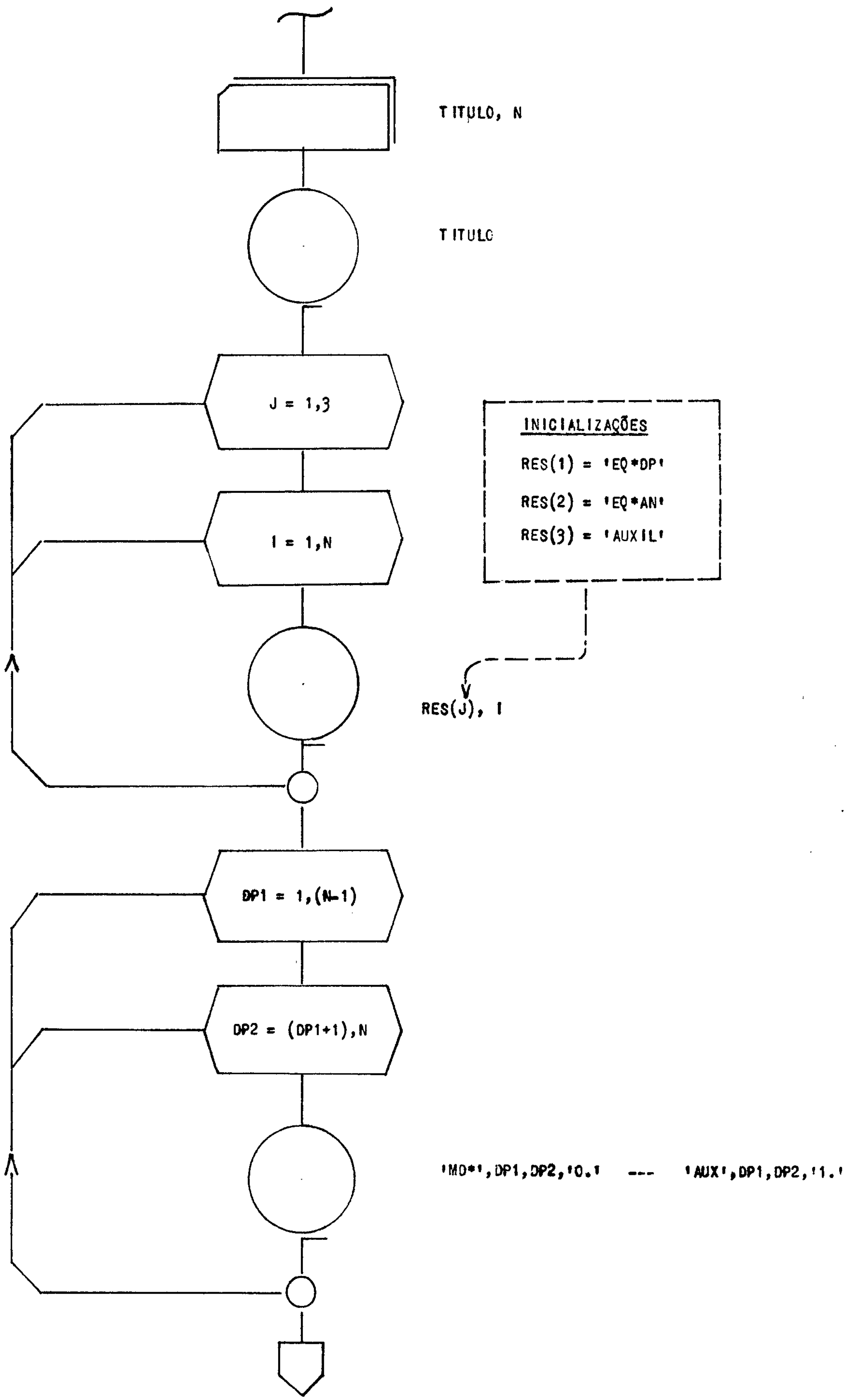
5.2.4. Restrições Auxiliares

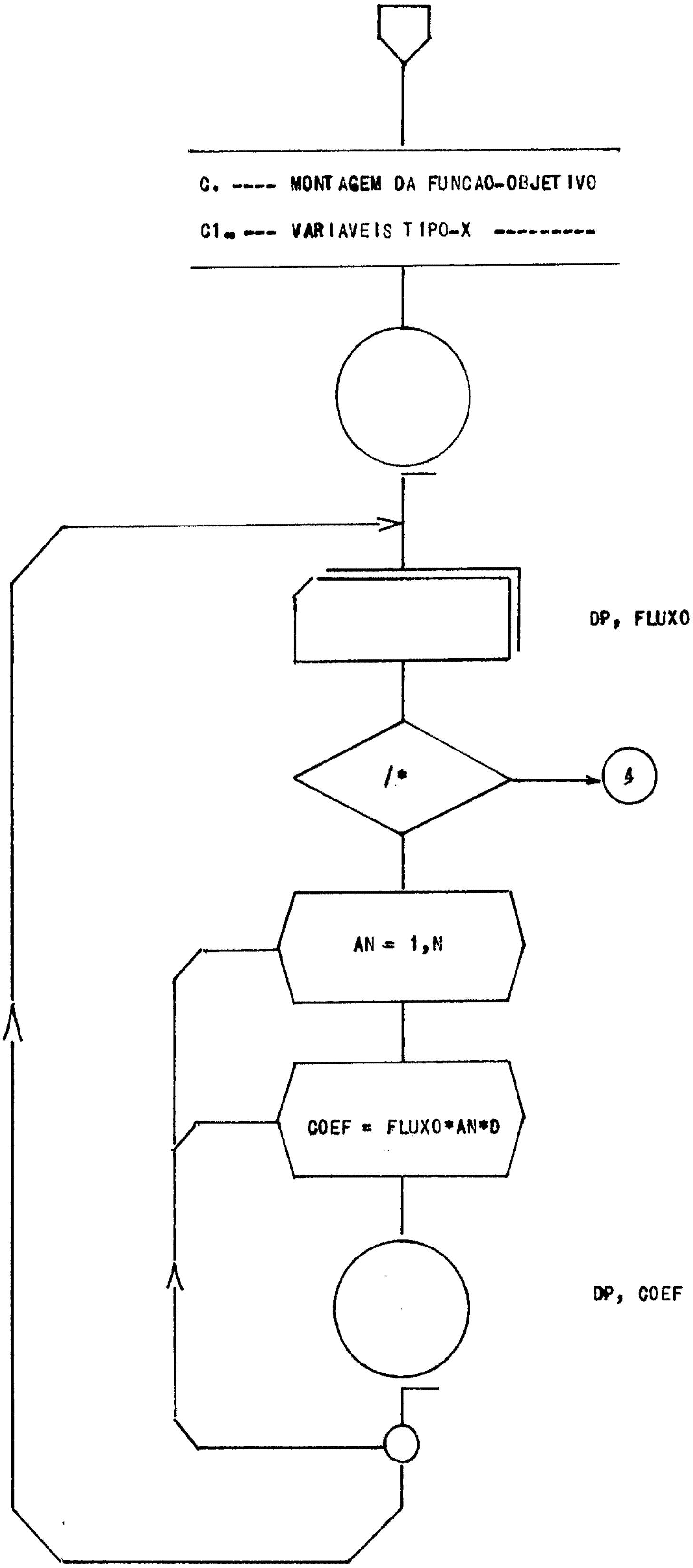
(I) $y_{jk} + y_{kj} - nw_{jk} \leq 1$, para $j = [1, n-1]$

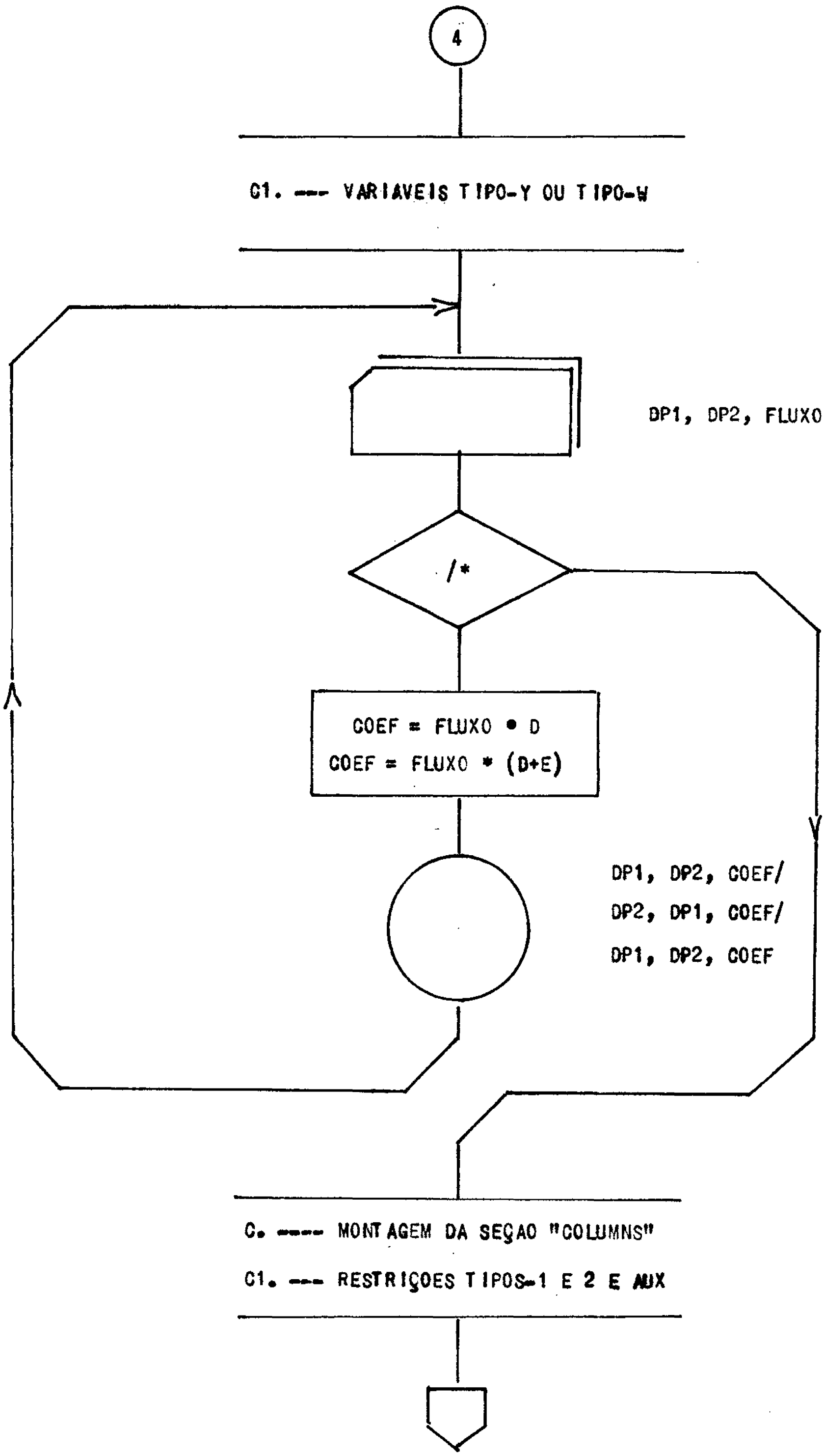
$k = [j + 1, n]$

(II) $\sum_{i=1}^{n} (ix_{ij}) - nw_{jo} \leq 1$, para $j = [1, n]$

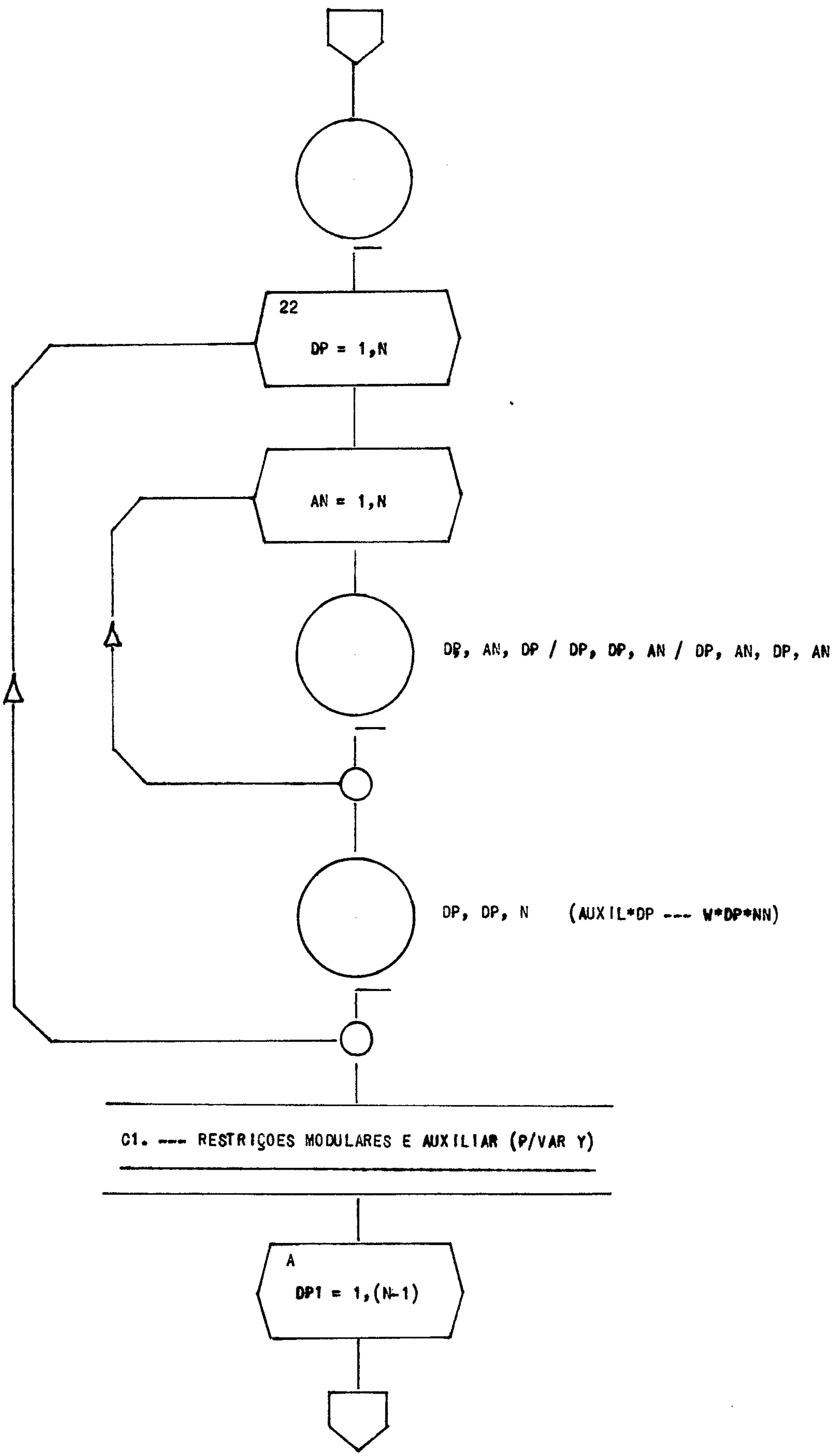
6. MONTAGEM DAS RESTRIÇÕES E FUNÇÃO OBJETIVO

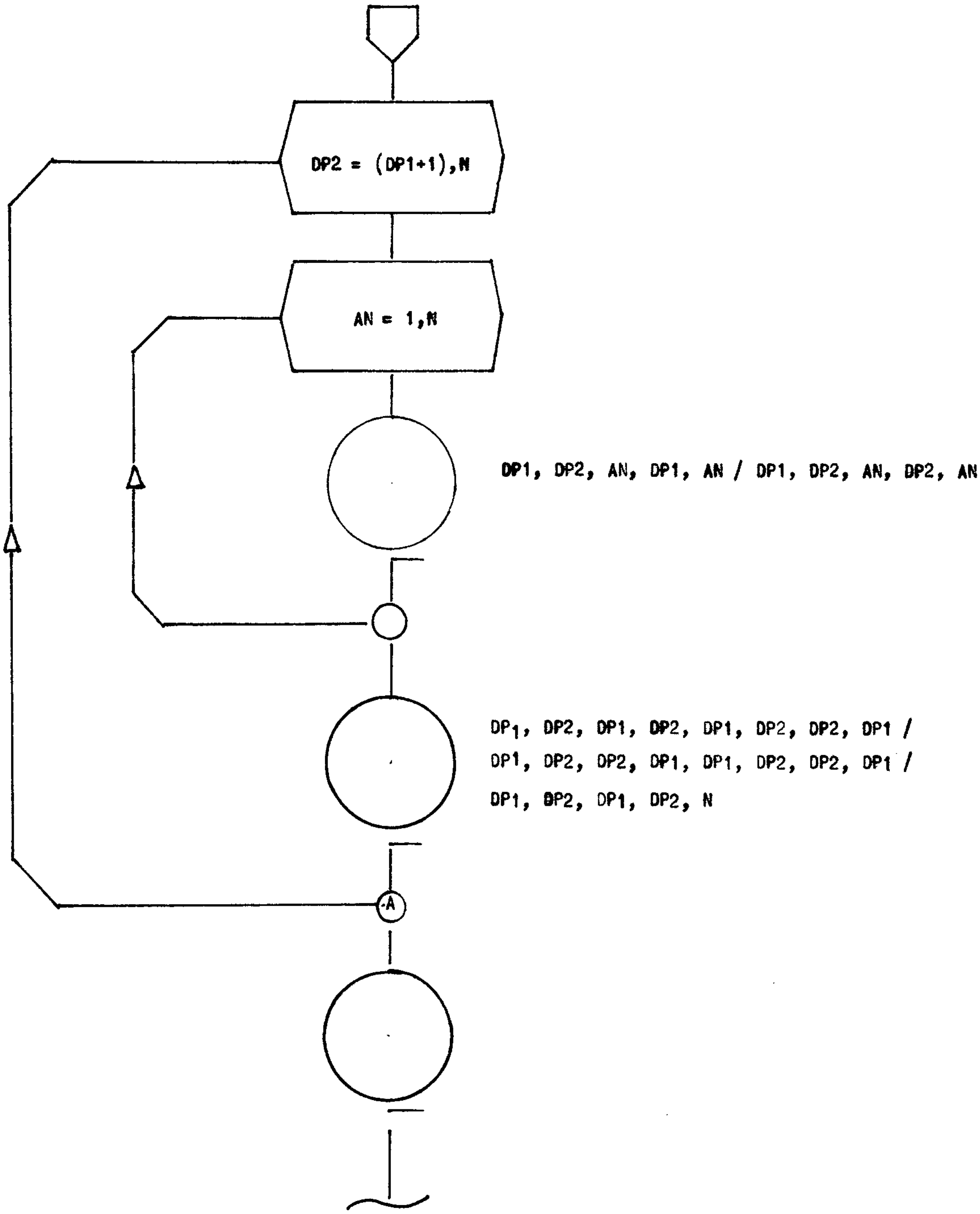



C. ---- MONTAGEM DA FUNCAO-OBJETIVO
C1. --- VARIAVEIS TIPO-X ---------
DP, FLUXO
/*
AN = 1,N
COEF = FLUXO*AN*D
DP, COEF



4
C1. --- VARIAVEIS TIPO-Y OU TIPO-W
DP1, DP2, FLUXO
/*
COEF = FLUXO * D
COEF = FLUXO * (D+E)
DP1, DP2, COEF/
DP2, DP1, COEF/
DP1, DP2, COEF
C. ---- MONTAGEM DA SEÇAO "COLUMNS"
C1. --- RESTRIÇOES TIPOS-1 E 2 E AUX


22
DP = 1,N
AN = 1,N
DP, AN, DP / DP, DP, AN / DP, AN, DP, AN
DP, DP, N (AUXIL*DP --- W*DP*NN)
C1. --- RESTRIÇOES MODULARES E AUXILIAR (P/VAR Y)
A
DP1 = 1,(N-1)



DP2 = (DP1+1),N
AN = 1,N
DP1, DP2, AN, DP1, AN / DP1, DP2, AN, DP2, AN
DP1, DP2, DP1, DP2, DP1, DP2, DP2, DP1 /
DP1, DP2, DP2, DP1, DP1, DP2, DP2, DP1 /
DP1, DP2, DP1, DP2, N
A

IV - RESTRIÇÕES ESPECIAIS

IV.1. JUSTIFICATIVA

Embora o escôpo de restrições apresentadas no ítem III.2.5. anterior já seja suficiente à viabilização das soluções do problema, é possível ainda influenciar o tempo de seu processamento em computador, pela introdução de novas expressões restritivas, que implicarão numa menor defasagem entre o "ótimo-contínuo" e o "ótimo-inteiro" efetivamente produzido.

De fato, a própria observação dos exemplos já desenvolvidos até o momento, permite estabelecer que o vetor-ótimo, atingido no processo de solução "contínua", está orientado para uma distribuição fracionária dos departamentos, (segundo os andares), que implique em distâncias médias do solo* minimamente dispersas. O exemplo a seguir, ilustra formalmente a tendência em discussão.

SOLUÇÃO – I	SOLUÇÃO–II
$x_{11} = .5$ $x_{13} = .5$ $x_{31} = .5$ $x_{33} = .5$ $x_{22} = 1.$	$x_{11} = 1.$ $x_{22} = 1.$ $x_{33} = 1.$

Ambas as composições listadas no exemplo, representam soluções viáveis do simplex "contínuo", desde que:

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ \bullet\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ \bullet\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Eq. dos dep. é atendido}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \bullet\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ \bullet\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ \bullet\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{array}\right\} \quad \text{Eq. dos and. é atendido}$$

(*) – Distância Média = $\sum_{i=1}^{n} (i x_{ij})$

Entretanto, pode-se observar que as distâncias médias ao solo, na Solução-I, coincidem com um mesmo valor, dado que :

- $D_1 = 1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} = .5 + 1.5 = 2$
- $D_2 = 1x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} = 2$
- $D_3 = 1x_{31} + 2x_{32} + 3x_{33} = .5 + 1.5 = 2$

Considerando-se a segunda componente da F. O. que avalia os efeitos dos fluxos e distâncias dos departamentos entre si, e ainda, que essa medida representa o módulo da diferença de seus afastamentos ao solo, é conclusivo :

$$\text{i)} \quad \sum_{i=1}^{n} i\,(x_{ij} - x_{ij}) = (y_{jk} - y_{kj}) = \phi$$

$$\text{ii)} \quad f_{jk}(y_{jk} + y_{kj})^{*} = \phi \quad \text{, ou seja:}$$

- No processo de solução "contínua", o Modêlo é conduzido a um vetor onde os fluxos inter-departamentais não são considerados, pela atribuição de valôres a x_{ij} que impliquem numa mesma distância média do solo, para todo departamento j.

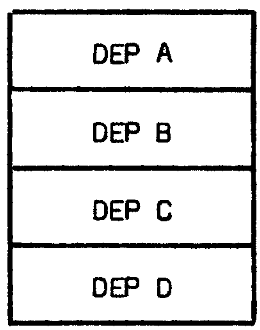
Pretende-se, com a introdução de "restrições indutivas", reduzir essa defazagem entre o vetor ótimo "contínuo" e a solução inteira posterior, i.e., melhorar a eficiência global do programa, pela a-

(*) - Por indução de mínimo.

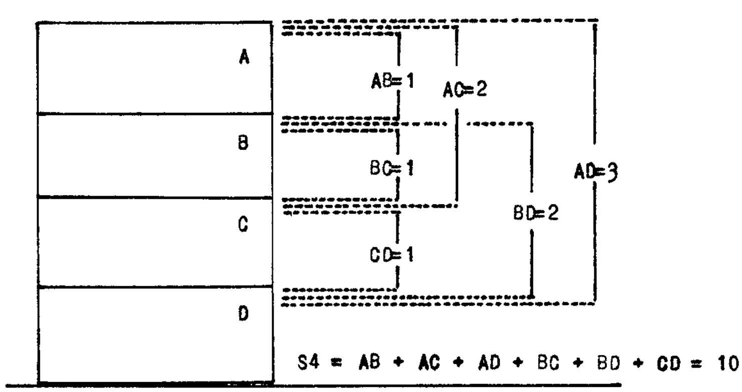
proximação dos dois "ótimos"*.

Assim, o desenvolvimento a seguir procura estabelecer relações que, embora não necessárias ao cerceamento do Modêlo, representem uma tendência de seu comportamento, com vistas à solução ótima inteira.

Considerou-se, em princípio, um vetor solução viável no problema contínuo, e que atenda aos requisitos de programação discreta para uma instalação de <u>quatro pavimentos quaisquer</u>. (Essa associação, a um exemplo, permite a percepção mais imediata do fato).



A soma dos afastamentos inter-setoriais (desconsiderados os fluxos), é uma medida constante (e igual a 10 para o caso em estudo - n = 4).



(*) - Desde que, como se sabe, a convergência do processo contínuo é mais acelerada que a do caso discreto.

A expressão da soma (por reagrupamento), é tambem definida como

$$S_4 = 1(3) + 2(3-1) + 3(3-2)$$

Generalizando-se* e induzindo para n pavimentos :

$$S_n = 1(n-1) + 2(n-2) + \ldots + (n-1)(n-n+1)$$

$$\boxed{S_n = \sum_{j=1}^{n-1} j\,(n-j) \qquad (I)}$$

2. Restrições Adicionais :

Com base na expressão (I) acima,

$$S = [(y_{12} - y_{21}) + \ldots + (y_{1n} - y_{n1})] + [(y_{23} - y_{32}) + \ldots + (y_{2n} - y_{n2})] +$$

$$+ \ldots + [(y_{n-1,n} - y_{n,n-1})] \quad , \text{ ou}$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} (y_{jk} - y_{kj}) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} j\,(n-j)}_{\leftarrow \text{const.} \rightarrow}}$$

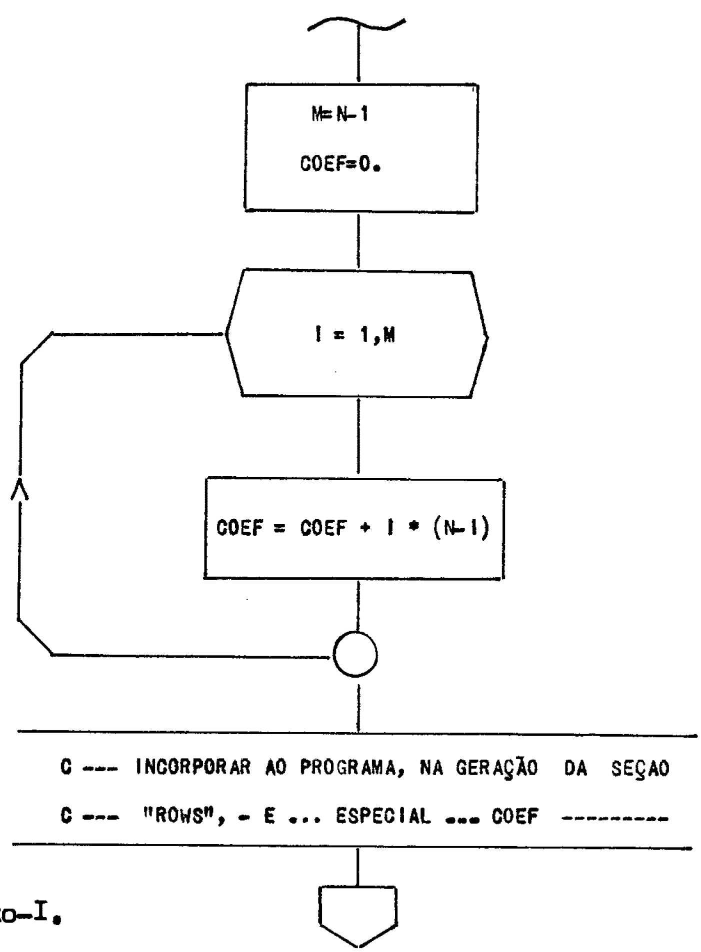
Por outro lado, os conceitos emitidos na

(*) - Por tratar-se de comportamento evidente, não será promovida a respectiva demonstração teórica.

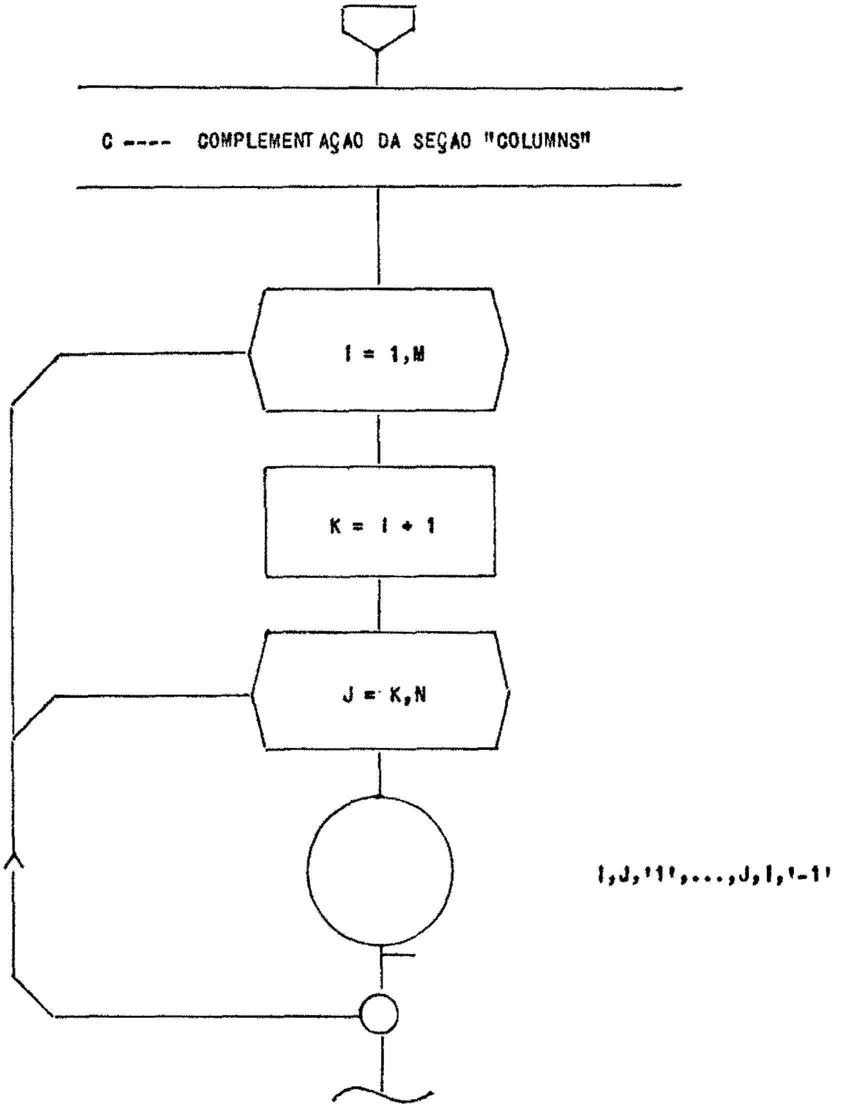
Metodologia de Enquadramento do Problema à Programação Quadrática*, no que refere às suas "restrições cumulativas", também são válidas como processo de aproximação dos dois "ótimos", e podem, de acôrdo com as características individuais de cada situação, ser aproveitados.

3. Sub-rotina de geração das restrições-especiais

No fluxograma a seguir, está considerada apenas a geração da restrição especial-II, dado que as demais serão englobadas na sub-rotina de montagem do problema-quadrático.



(*) - Vide Anexo-I.


C ---- COMPLEMENTAÇAO DA SEÇAO "COLUMNS"
I = 1,M
K = I + 1
J = K,N
I,J,'1',...,J,I,'-1'

V) - PROGRAMAÇÃO-BIVALENTE

1. Tendo em vista os frequentes aperfeiçoamentos de alguns algorítmos de resolução da P.I., é possível reformular o Modêlo de Alocações, pela utilização de processos específicos de programação-binária (Ballas), cuja convergência é comprovadamente mais rápida.

Assim, de acôrdo com o "hardware" e o .... "software" disponível a um usuário do Modêlo, as variáveis serão introduzidas na forma binária, ou discreta em geral, sendo que, no primeiro caso, devem ser consideradas as alterações seguintes :

1.2. Alterações do Modêlo

Atribuindo a uma classificação das variáveis de decisões anteriores os tipos I e II, (distâncias dos departamentos ao solo e distâncias dos departamentos entre si), é evidente que as primeiras já atendem aos requisitos de programação bi-valente, dado que assumem apenas os valôres 1 (ocupação do andar pelo departamento) e Ø (caso contrário).

As variáveis tipo-II, embora não restringidas de forma direta, são também induzidas, pelo escôpo de restrições, a um comportamento discreto. Especìficamente, seu campo de variação é o intervalo inteiro entre 1 e (n-1).

Pode-se substituir cada par de variáveis (y_{de} e y_{ed}), pelo conjunto de alternativas bivalentes, y'_{dei}, y'_{edi}, onde i = 1, ..., (n-1), significativas da assunção, (ou não), de uma distância determinada (constante), para cada par de departamentos.

Exemplificando, $y_{bc7} = 1^*$ indica que, para os departamentos B e C, a distância de 7 andares foi assumida. Igualmente,

(*) - Por facilidade didática, a partir dêsse ponto todos os y' são descritos como y, considerando-se ressalvada a diferença entre ambos,

$y_{bc3} = \underline{\emptyset}$, indica que não ocorre uma distância de 3 pavimentos entre os departamentos $\overline{BC}$.

As "restrições-modulares" de distância interdepartamental, representariam então :

$$\sum_{i=1}^{n} i\left(x_{ij}-x_{ki}\right) = \{(y_{jk1}-y_{kj1}) + 2(y_{jk2}-y_{kj2}) + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+(n-1)(y_{jk(n-1)}-y_{kj(n-1)})\} \quad \therefore$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(i(x_{ji}-x_{ki})\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(i(y_{jki}-y_{kji})\right), \quad \text{para} \quad j = [1,n-1],\ k = [j+1,n]}$$

4. Restrições Adicionais

Novamente seriam necessárias restrições aditivas, que garantissem a característica de mútua exclusividade, inerente a cada uma das igualdades acima. De fato, se num exemplo $y_{ao} = 7$ e $y_{bo} = 1$, o vetor $y'_{ab1} = 1$, $y'_{ab2} = 1$ e $y_{ab3} = 1$, satisfaz ao conjunto de restrições enumeradas, desde que

$$1(y_{ab1}) + 2(y_{ab2}) + 3(y_{ab3}) = 1*1+2*1+3*1 = 6$$

Depreende-se a necessidade, tambem nêsse caso, dos requisitos de mútua exclusividade já introduzidos para as variáveis x_{ij}.

A restrição, necessária e suficiente, representar-se-ia, então, por :

$$\sum_{i=1}^{n} (y_{jki}) = 1, \text{ para } j=[1,n-1], \ k=[j+1,n]$$

Há que considerar, entretanto :

i) - que o efeito, na função utilidade, é idêntico para ambos os procedimentos, ($y_{ab1} = \emptyset$; $y_{ab2} = \emptyset$; ... $y_{ab7} = 1$ e $y_{ab1} = 1$; $y_{ab2} = 1$; $y_{ab3} = 1$; ...; $y_{ab7} = \emptyset$), e assim, não se justificam essas restrições aditivas.

ii) - uma carga adicional de variáveis, decorrente da substituição de cada y_{jp} por n variáveis tipo y'_{jkm} ou seja ; a expansão do modêlo em cêrca de n vêzes o número de colunas originais.

5. Redefinição das variáveis y_{abi}

Pretende-se, pois, utilizar um processo auxiliar de composição da variável, similar à representação binária dos números inteiros em computador. Se y_{jk} pode assumir valôres discretos entre 1 e 15, por exemplo, definimos

$$\boxed{y_{jk} = \sum_{m=1}^{4} (2^{m-1} x_{mjk})}$$

Assim,

	m = 4	m = 3	m = 2	m = 1
y_{jk} = 1	0	0	0	1
y_{jk} = 2	0	0	1	0
y_{jk} = 3	0	0	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_{jk} = 14	1	1	1	0
y_{jk} = 15	1	1	1	1

As restrições-modulares estão pois reformuladas para

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \left(i\,(x_{ji}-x_{ki})\right) = \sum_{i=1}^{t} \left(2^{i-1}(y'_{jki}-y'_{kji})\right)}$$

onde t é a menor potência de 2 que satisfaz a 2^t n*

As restrições de mútua-exclusividade, no caso, passam a redundantes, e podem ser eliminadas.

5. Função-Objetivo

A função-objetivo, ajustada para a nova caracterização das variáveis y'_{jki}, constitui :

$$\boxed{\min Z = \sum_{j=1}^{n} \left(f_{jo} \sum_{i=1}^{n} (i x_{ij}) + \sum_{k=j+1}^{n} f_{jk} \sum_{m=1}^{t} 2^{m-1}(y_{jkm}+y_{kjm})\right)}$$

6. Resumo da Estrutura do Modêlo

6.1. Função-Objetivo

Idem 5

(*) - Dado que a menor distância entre departamentos é (n-1).

6.2. Restrições

6.2.1. Equilíbrio da distribuição dos departamentos segundo os andares

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij}) = 1, \quad \text{para} \quad j=[1,n]$$

6.2.2. Equilíbrio da ocupação dos andares pelas parcelas de departamento

$$\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}) = 1, \quad \text{para} \quad i=[1,n]$$

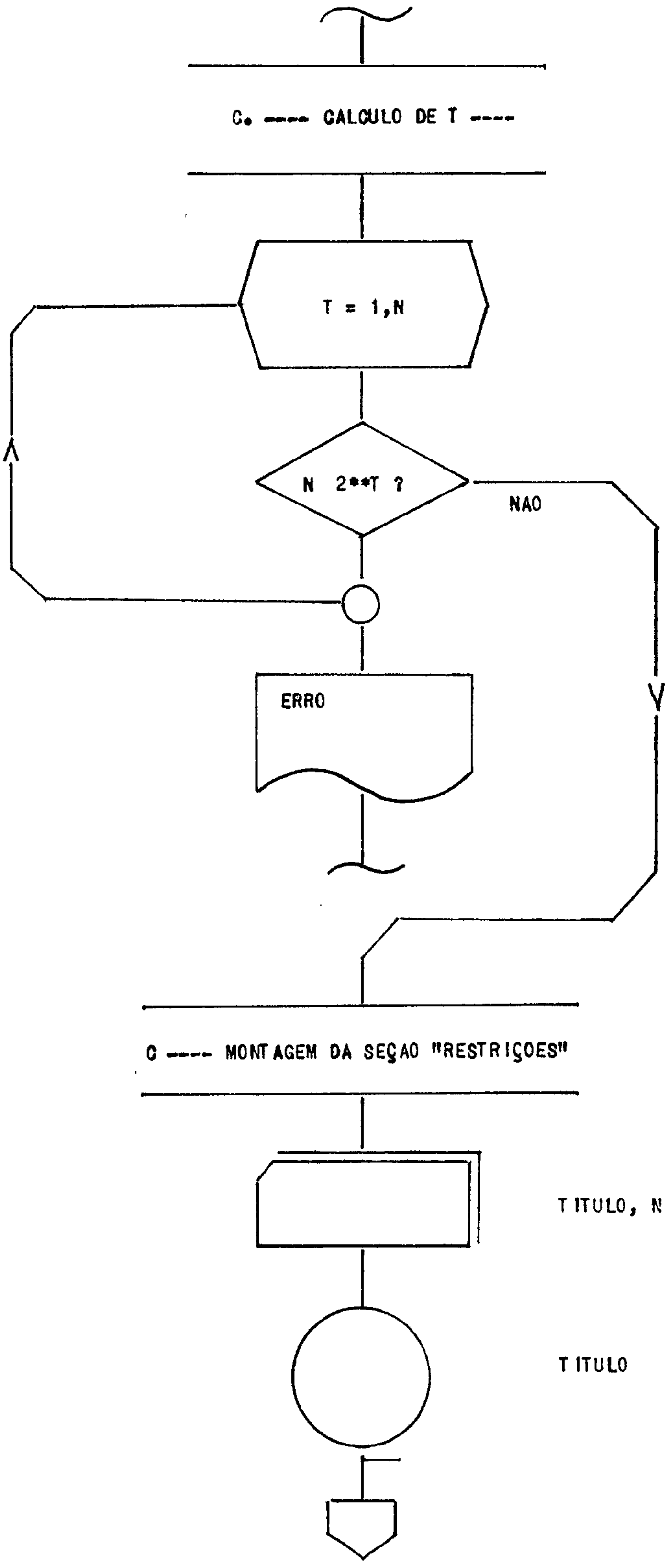
6.2.3. Restrições Modulares

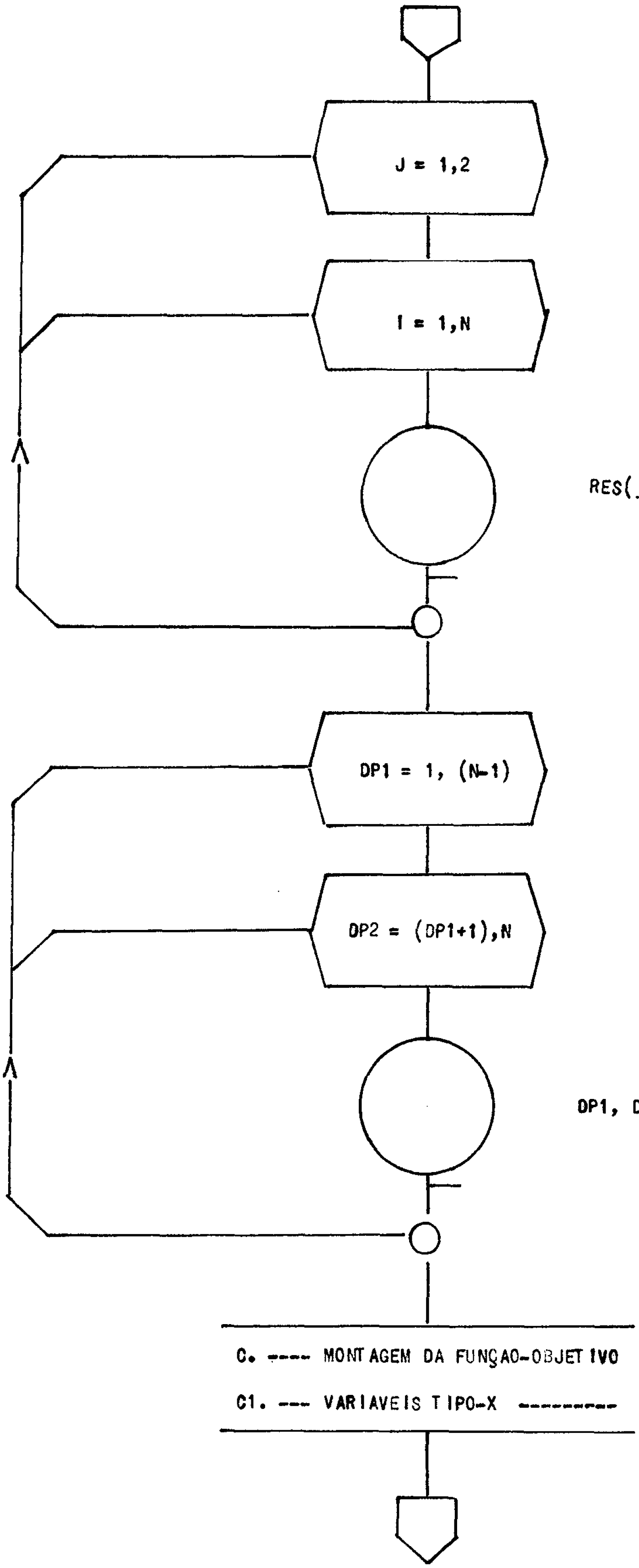
$$\sum_{i=1}^{n} \{i(x_{ji}-x_{ki})\} = \sum_{m=1}^{t} \{2^{m-1}(y_{jkm}-y_{kjm})\} , \quad \text{para}$$

$$j=[1,n-1] ; \; k=[j+1,n]$$

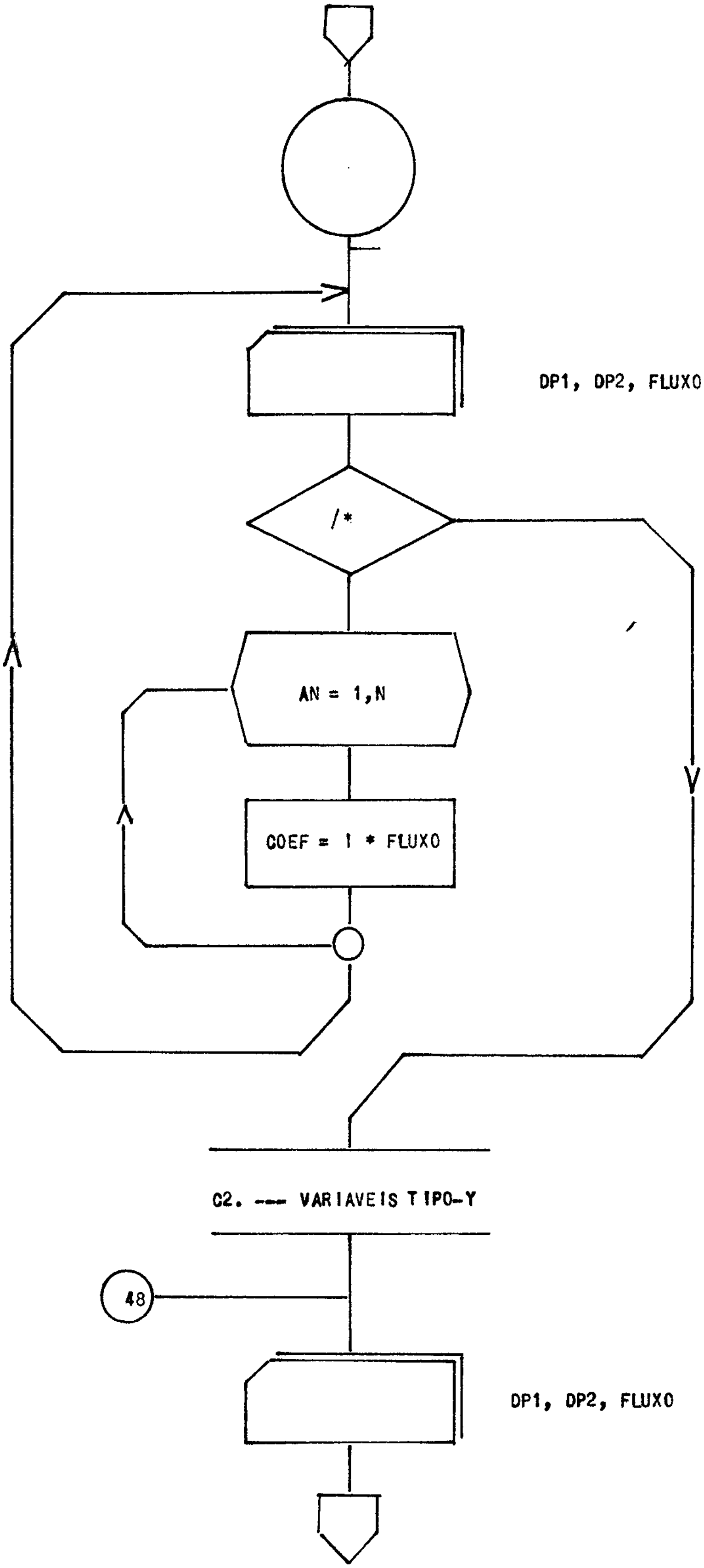
6.3. Tipos de variáveis: Bivalentes

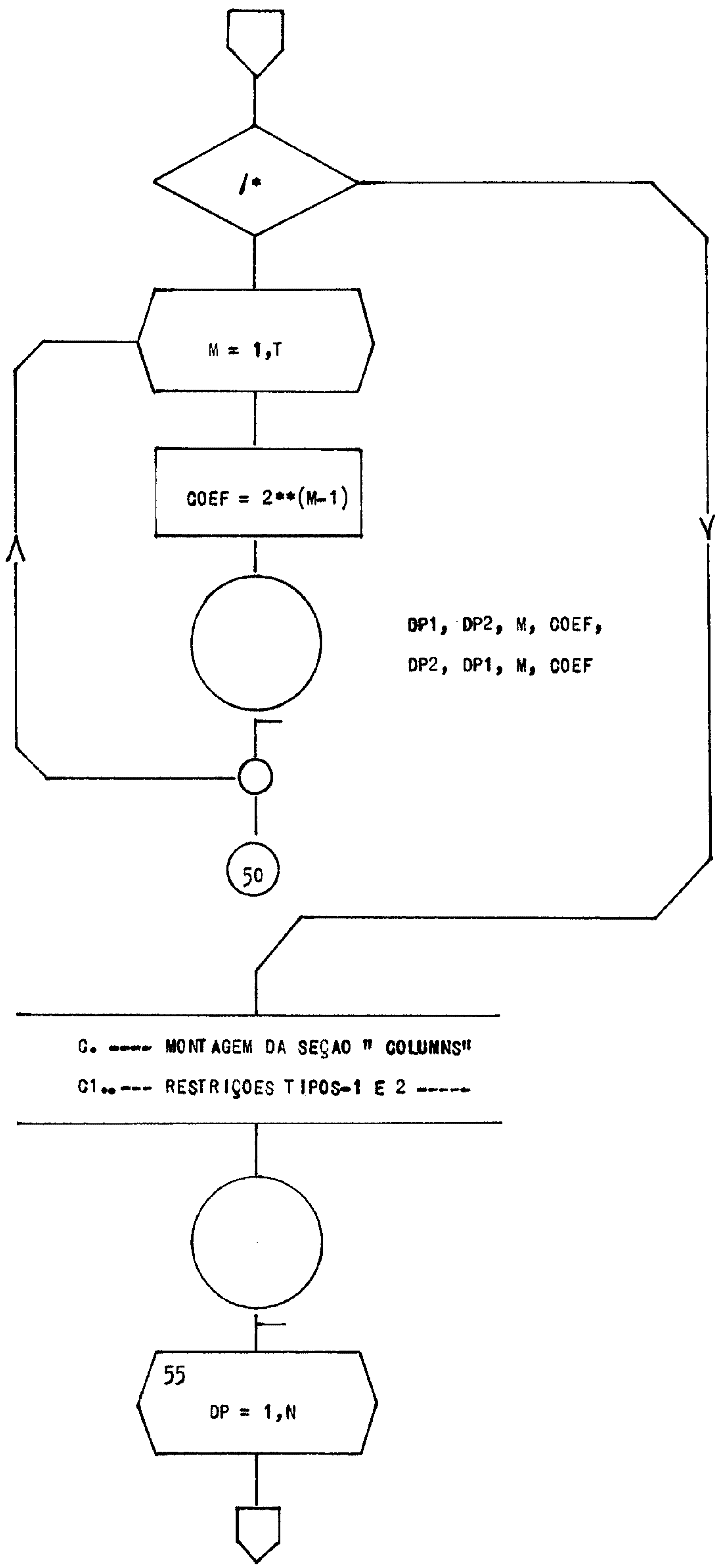
7. Sub-rotina de montagem das restrições, na forma atual

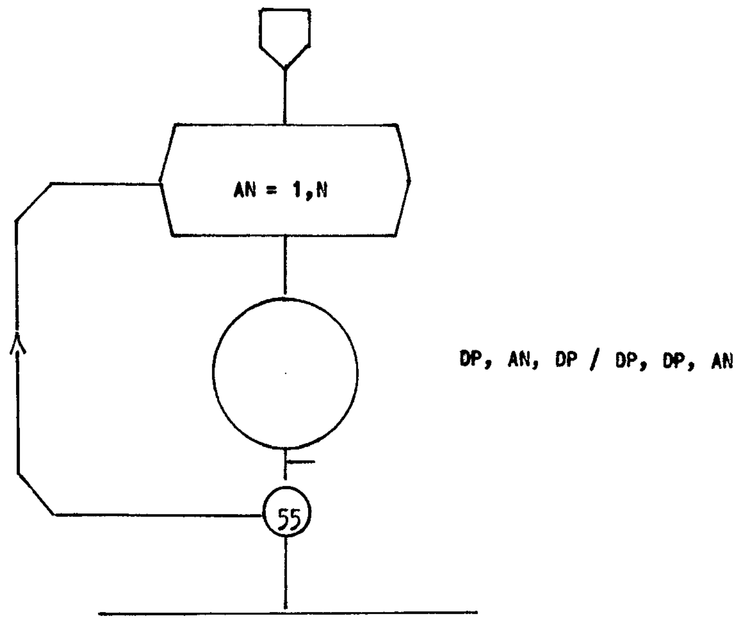

C. ---- CALCULO DE T ----
T = 1,N
N 2**T ?
NAO
ERRO
C ---- MONTAGEM DA SEÇAO "RESTRIÇOES"
TITULO, N
TITULO



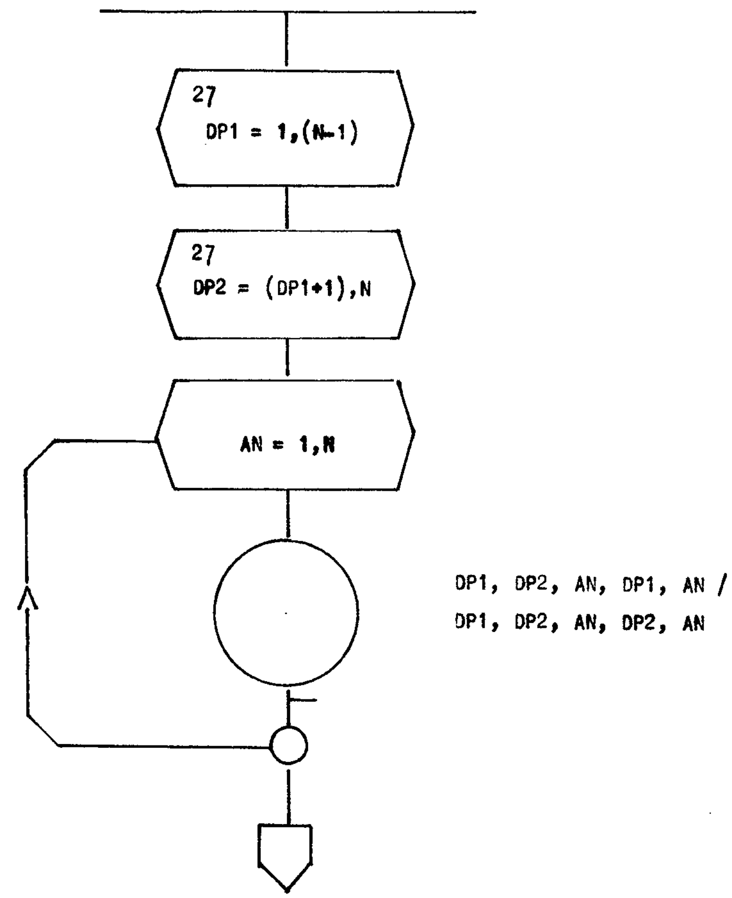
J = 1,2
I = 1,N
RES(j), I
DP1 = 1, (N-1)
DP2 = (DP1+1),N
DP1, DP2
C. ---- MONTAGEM DA FUNÇAO-OBJETIVO
C1. --- VARIAVEIS TIPO-X ---------

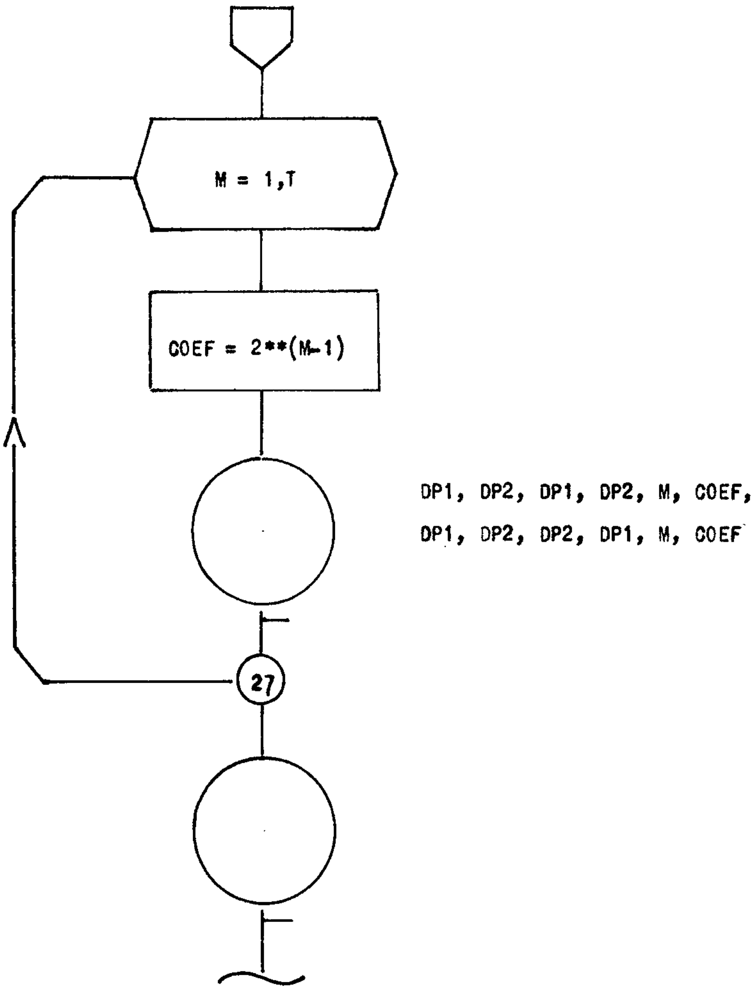

DP1, DP2, FLUXO
/*
AN = 1,N
COEF = I * FLUXO
C2. --- VARIAVEIS TIPO-Y
48
DP1, DP2, FLUXO


/*
M = 1,T
COEF = 2**(M-1)
DP1, DP2, M, COEF,
DP2, DP1, M, COEF
50
C. ---- MONTAGEM DA SEÇAO " COLUMNS"
C1..--- RESTRIÇOES TIPOS-1 E 2 -----
55
DP = 1,N



C2. ---- RESTRIÇOES MODULARES



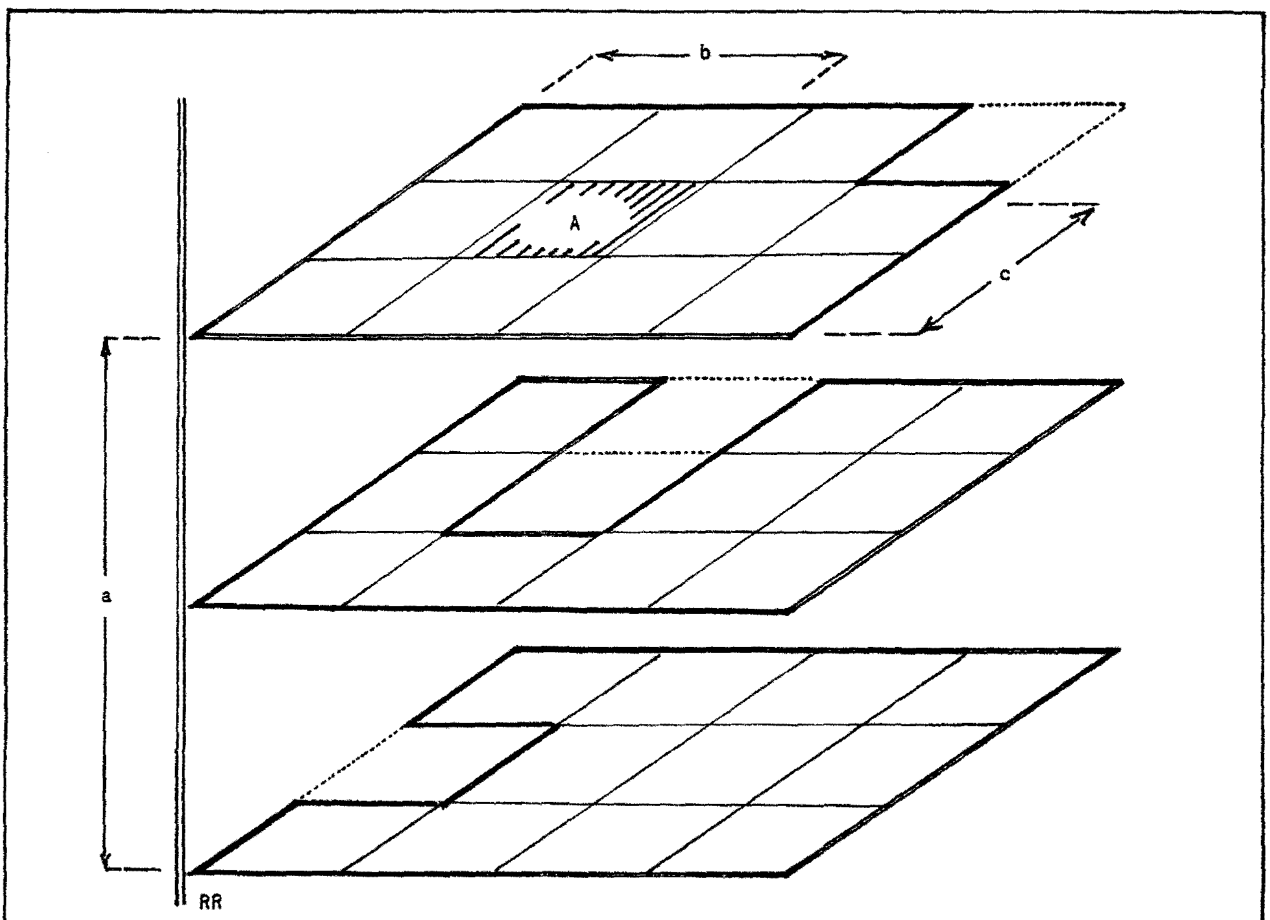

M = 1,T
COEF = 2**(M-1)
DP1, DP2, DP1, DP2, M, COEF,
DP1, DP2, DP2, DP1, M, COEF
27

VI - EXTENSÕES DO MODÊLO

1. Conceito de 'Módulo' e Deslocamento Horizontal

Um dos elementos que, até o momento, tem se apresentado como mais restritivo ao uso geral do Modêlo, é justamente a necessidade de equivalência do tamanho entre os departamentos, ("múltiplos" entre si) ou das áreas de alocação disponíveis.* Assim, pretende-se estender o Modêlo a aplicação nos casos gerais em que as instalações não são necessàriamente uniformes, e os departamentos têm tamanhos diversos.

Considere-se o dispôsto abaixo, em que os pavimentos estão distribuidos por módulos padronizados :



(*) - Muito embora êsse aspecto possa ser parcialmente contornado - pelo desmembramento de um d_p, ou pela sua assimilação em conjuntos.

Uma seção S de departamento, situada no Módulo A, está perfeitamente caracterizada em sua distância vertical a um referencial RR (a), e pelas distâncias horizontais, (nos dois sentidos), b e c.

Então, x_{sijk} apropria a parcela de S com coordenadas i (vertical), j (horizontal-sentido I) e R (horizontal-sentido II).

2. Redefinição do Modêlo

Tendo em vista essa abertura do modêlo para deslocamento tambem horizontal, e a redefinição das variáveis básicas, sua estrutura sofre alterações de forma, embora mantidos os conceitos até então já estabelecidos.

2.1. Variáveis básicas do Problema

x_{dijk} - Quantidade de departamento d apropriada pelo andar i e módulo j (deslocamento-horizontal-I), k (desl.-horizontal-II)

$y\nu_{d\varepsilon}$ - Distância vertical, (em andares), entre os departamentos d e e.

$y1_{de}$ - Distância horizontal, (em módulos), entre os departamentos d e e, sentido-I.

$y2_{de}$ - Idem para sentido-II.

w_{de} - Adjacência (ou não) entre os departamentos d e e.

2.2. Função-Objetivo

$$\min z = D\{\sum_{d=1}^{n}\left(f_{do}\sum_{i=1}^{p} i \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r}(x_{dijk}) + \sum_{e=d+1}^{n} f_{d\varepsilon}(y_{\nu d\varepsilon}+y_{\nu\varepsilon d}+y1_{de}+\right.$$

$$\left.+\, y1_{ed}+y2_{de}+y2_{ed})\right)\}+(D+E)\{\sum_{d=1}^{n}\left(f_{do}\,w_{do}+\sum_{e=d+1}^{n} f_{de}w_{de}\right)\}\ .$$

2.3. Restrições

2.3.1. Equilíbrio de distribuição dos departamentos segundo os andares

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}(x_{dijk}) = 1, \quad \text{para} \quad d=\lceil 1.n \rceil \quad \text{sendo}$$

n = número de departamentos

r = número de andares da instalação

p = afastamento máximo (em módulos), nos sentido-I

q = idem, sentido-II

2.3.2. Equilíbrio de ocupação dos módulos pelas parcelas de departamento

$$\sum_{d=1}^{n}(x_{dijk}) = 1 \ , \quad \text{para } i=\lceil 1,r \rceil,\ j=\lceil 1.p \rceil,\ k=\lceil 1.q \rceil$$

2.3.3. Restrições "Modulares"*

$$\sum_{i=1}^{r}\ \sum_{j=1}^{p}\ \sum_{k=1}^{q} \left(i\,(x_{dijk}-x_{eijk})\right) = (y_{\nu de}-y_{\nu ed}) \text{ , para}$$

$$d=[1,n-1] \text{ , } e=[2,n] \text{ e } d<e$$

2.3.4. Restrições Auxiliares-I-

i) $\left((y\nu_{de}+y\nu_{ed}) - 1\right) \leq nw_{ed}$, para

$d=[1,n-1]$, $e=[2,n]$ e $d<e$

ii) $\left(\sum_{i=1}^{r} (ix_{dijk}) - 1\right) \leq nw_{d\phi}$, para $d=[1,n]$

Considerando-se o caso de um pavimento distribuido por m módulos, é evidente que o deslocamento, de um a outro módulo, nem sempre representará a distância física entre ambos. Há que definir, nessas situações, linha de escoamento (rotas), e uma ligação específica a cada par de módulos num mesmo pavimento.

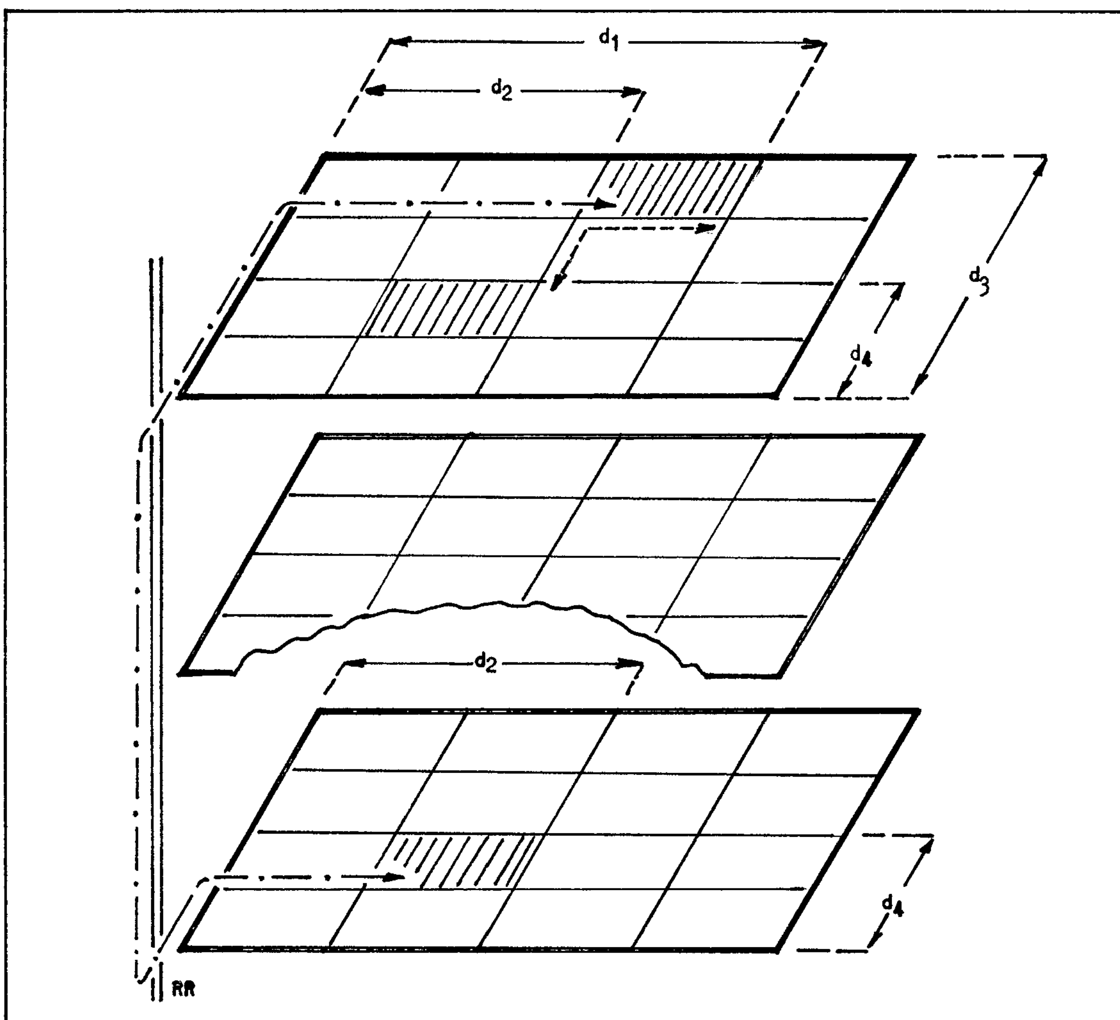
São admitidas, portanto, duas alternativas, de caracterização do problema, e o enquadramento, na prática, dar-se-á segundo cada caso em particular.

(*) - Não confundir função-módulo com o conceito de "Módulos" acima introduzidos.

Dado que êsse último critério envolve grandes implicações de natureza computacional (tamanho da matriz), a presente metodologia enfatiza o problema de alocações <u>segundo a distância física entre módulos</u>.

2.4. <u>Deslocamento pela distância (física) entre módulos</u>

Do expôsto no gráfico 2.Ø anterior, determinadas situações específicas admitem, como aproximação válida, o uso das distâncias "físicas" entre dois módulos, como medida do deslocamento entre os departamentos que apropriam. No gráfico a seguir, estão exemplos do critério de afastamento presentemente considerado.



2.4.1. Premissas

Pela observação do esquema acima, infere-se que o deslocamento horizontal, (em qualquer sentido), representa:

i) - A soma das distâncias dos módulos ao eixo (d1 + d2) + (d3 + d4) ,sempre que os dp's estão alocados em pavimentos distintos, ou

ii) - A soma das diferenças entre os afastamentos dos módulos, nos casos em que ambos os departamentos situam-se num mesmo andar (d1 - d2) + (d3 - d4)

Para caracterizar êsse comportamento alternativo, foram utilizadas novas variáveis "dummy", semelhantes àquelas já introduzidas no correr do trabalho, que indicaram uma ocorrência de seções ou dp's adjacentes (deslocamento vertical - w_{jk}).

Como, no caso presente, está tambem admitida uma distância vertical nula entre duas unidades quaisquer, vale observar que as variáveis binárias w permanecem com a assunção do valor zero nas adjacências ou nas coincidências de alocação vertical, e assim, mantem-se eliminado o efeito da espera por elevadores, na instância de departamentos nivelados.

Denotando-se por λ_{de} os novos parâmetros que indicarão uma ocorrência de departamentos em mesmo andar, $(y_{de} + y_{ed}) \leq n\ \lambda_{de}$ restringiria os valôres nulos da variável àpenas àquelas situações onde $y\nu_{de} = y\nu_{ed} = \phi$

A fim de detectar tais nivelamentos, o Mode lo é reformulado em seus conceitos de determinação da distancia vertical entre departamentos, pela aplicação do segundo critério analisado no ítem III.1 (5.3.1) anterior (alternativa das distâncias menores).

2.4.2. Expressão da distância vertical entre departamentos -

Se

$$y\vee m_{de} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} i\,(x_{dijk})$$

$$y\vee m_{de} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} i\,(x_{eijk})$$

onde y m_{de} é o menor dos afastamentos $y_{d\emptyset}$ e $y_{e\emptyset}$,

$$\boxed{dy_{de}^{*} \geqslant \left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} i\,(x_{dijk} + x_{eijk}) \right] - 2 * y\vee m_{de}}$$

representará o valor absoluto da distância entre os afastamentos $\sum_i \sum_j \sum_k i\,(x_{dijk})$ e $\sum_i \sum_j \sum_k i\,(x_{eijk})$ considerados.

2.4.3. Determinação de de

$$\lambda_{de} \geqslant 1/n \cdot dv_{de} \therefore$$

(*) - A expressão de DV é apenas didática, uma vêz que pode ser implicitamente formalizada na F. Objetivo.

$$\lambda_{de} \geq \left\{\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} i(x_{dijk}+x_{eijk})\right)\right\} - 2.y\nu M_{de},$$

$$\text{para } d=[1,n-1],\ e=[2,n] \text{ e } d<e$$

Como λ_{de} será induzido (na função-utilidade) a assumir valor nulo sòmente quando $\sum_i \sum_j \sum_k i(x_{dijk})$ fôr igual a $\sum_i \sum_j \sum_k i(x_{eijk})$, ou seja, quando

$$y\nu M_{de} = \frac{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} i(x_{dijk}+x_{eijk})}{2},$$ o parâmetro λ não necessita ser <u>estritamente positivo</u>.

Pretende-se gerar, novamente, variáveis auxiliares $_{de}$, que assumirão:

i) Ø no caso de departamentos não nivelados

ii) O menor de seus afastamentos horizontais (em módulos ao elevador), no caso de dp's situados em mesmo pavimento.

2.4.4. Restrições Auxiliares-II.

O termo de restrições a seguir*, associado a

(*) - Uma vêz que a análise do deslocamento horizontal será a mesma para qualquer dos dois sentidos considerados, a expressão abaixo, que se reporta ao sentido-I, (Θ_{1de}), aplica-se igualmente ao sentido-II (Θ_{2de}) apenas pela alteração da nomenclatura.

novos parâmetros da função-objetivo, condiciona o Modêlo no intuito de assumir êsse aludido comportamento.

$$\theta_{lde} \leqslant (1-\lambda_{de}).\ M$$

- restrições :

$$\theta_{lde} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} j(x_{dijk})$$

$$\theta_{lde} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} j(x_{eijk})$$

- <u>Componente adicional da F.O.</u>

$$f_{de} \{[\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} j(x_{dijk} + x_{eijk})] - 2.\theta_{lde} \}$$

Depreende-se, pela análise das relações, que:

i) - <u>Se d e e são nivelados -</u>

a) $y\nu_{de} + y\nu_{ed} \leqslant n\lambda_{de} \longrightarrow \phi\ n\lambda_{de} \longrightarrow \lambda_{de} = \underline{\underline{\phi}}$ ou 1

b) $\theta_{lde} \leqslant (1-\lambda_{de}).n$ —— $\theta_{lde} < n$ —— θ_{lde} não restrigido

c) $\theta_{lde} \leqslant \min \left[\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} j(x_{dijk});\ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} j(x_{eijk}) \right]$

Decorre:

$$\theta_{1de}^{max} = \min\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} j(x_{dijk}); \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} j(x_{eijk})\right\}$$

$$F.O.\ (adic.) = f_{de}.\left\|\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left[j(x_{dijk}+x_{eijk})\right]\right\|$$

ii) Se d e e situam-se em pavimentos distantes

a) $y\nu_{de}+y\nu_{ed} \leq n\lambda_{de} \longrightarrow \phi<n\lambda_{de} \longrightarrow \lambda_{de} = 1$

b) $\theta_{1de} \leq (1-\lambda_{de}).N \longrightarrow \theta 1de \leq \phi \longrightarrow \theta_{1de} = \phi$

c) Supérfulo

Decorre

. $\theta_{1de}^{max} = \phi$

. $F\text{-}O.\ (adic) = f_{de}\left\{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\left(j(x_{dijk}+x_{eijk})\right)\right\}$

A consolidação dos novos elementos considerados na função-objetivo (componentes adicionais relativas aos dois sentidos horizontais), é dada pela expressão :

$$M.f_{de} . \{ [\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} j(x_{dijk} + x_{eijk})] - 2\theta_{1de} \} +$$

$$+ M.f_{de} . \{ [\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} k(x_{dijk} + x_{eijk})] - 2\theta_{2de} \} \quad , \text{ou}$$

$$\boxed{M.f_{de} . \{ [\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} (j+k)(x_{dijk} + x_{eijk})] -2 \sum_{i=1}^{2} \theta_{1de} \} \ , \ d<k} \qquad \text{(I)}$$

onde M representa um parâmetro incidente sôbre tôdas as variáveis de deslocamento-entre-módulos.

Com efeito, uma vêz que o deslocamento entre módulos implica em medidas de esfôrço diferentes daquelas aplicadas ao movimento vertical (uso de escadas ou elevadores), novos parâmetros são atribuídos aos seus respectivos componentes na função-objetivo, A e M, tais que Af_{de} e Mf_{de} podem ser avaliados em unidades de mesma grandeza.

Pela incorporação de (I) à função-utilidade originalmente considerada :

ANEXO - I

METODOLOGIA DE ENQUADRAMENTO DO PROBLEMA DE ALOCAÇÕES À PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA.

1. O processo metodológico atualmente desenvolvido, é uma variante do modêlo da programação linear mista anterior, e representa um enquadramento do problema de alocações à Programação Quadrática.

Desde que implica numa carga de restrições substancialmente maior, acrescida do desgaste computacional decorrente de uma convergência mais lenta, (característica de todos os algorítmos de programação quadrática), a presente metodologia assume caráter apenas ilustrativo, e só em casos muito específicos pode representar ventagens sôbre o modêlo discreto anteriormente detalhado.

I.1. Variáveis Básicas

Define-se como variável básica do problema, a distância vertical $\underline{x}$ de um departamento $\underline{i}$ ao departamento $\underline{j}$ das instalações (x_{ij}), ou pavimento térreo (x_{io}), tomada em número de andares.

I.2. Escôpo de Restrições

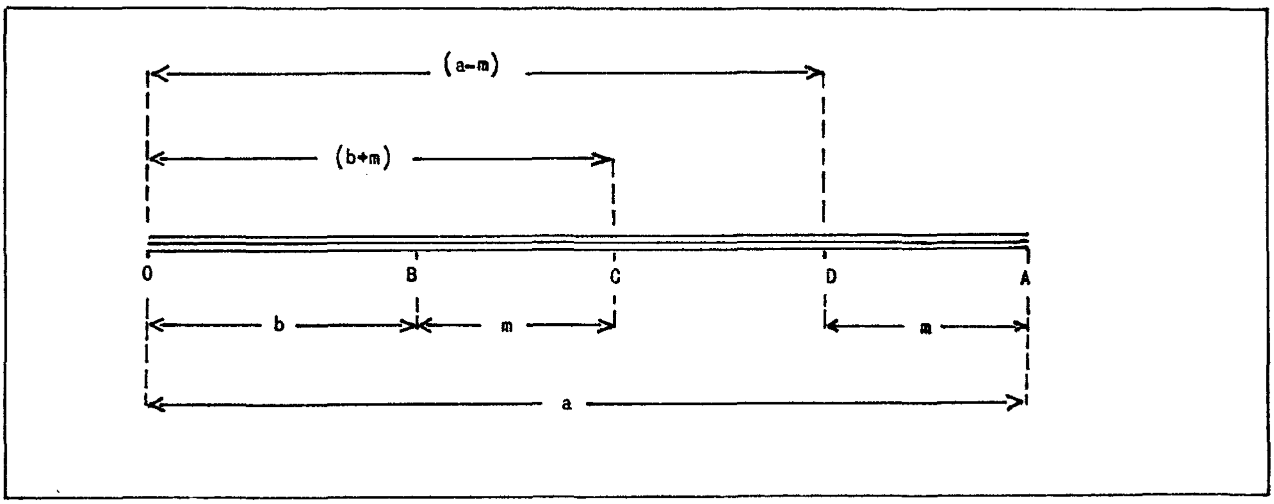
Ao contrário do que se estabeleceu para o Modêlo de Programação Inteira, pretende-se desenvolver uma sistemática que, a partir de novas restrições indutivas, (posteriormente detalhadas), e parâmetros adicionais na função-objetivo, permita aplicar, ao caso em estudo, os métodos condicionais de programação quadrática, (através do algorítmo de Beale), para os referidos problemas.

Em outros têrmos, pretende-se, com a introdução de uma nova componente na F.O., associada a restrições lineares adicionais, provocar $x_{io} \neq x_{i'o} \neq \ldots \neq x_{i''o}$*, qualquer que seja o valor de i, e por outro lado, estabelecer uma correspondência entre dois departamentos, e sua distância entre si ($x_{io} - x_{jo} = x_{ij}$)**.

É necessário, entretanto, o desenvolvimento da demonstração a seguir, cuja utilidade será evidente para aceitação da metodologia em sequência.

<u>Teorema</u>: Para diferentes conjuntos de valôres, cuja soma é constante, a soma de seus quadrados será <u>tão maior quanto mais afastados estiverem êsses valôres entre si</u>.

Procura-se demonstrar, no teorema acima, que se fôr estabelecido um intervalo entre dois números quaisquer, a soma do quadrado de seus <u>pontos extremos</u> , será sempre maior que a soma dos quadrados de dois outros pontos interiores, para os quais o resultado da <u>soma simples</u> é igual à soma dos valôres extremos considerados.



(*) – Com x_{io} ou x_{ij} assumindo sempre valôres inteiros, não-negativos.

(**) – "Restrições-Modulares".

<u>hipótese</u> : $\sum_{i=1}^{n} x_i = k$ (I) $k > \emptyset$

Tomando-se o quadrado de (I)

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 = k^2 \quad (II)$$

$$(x_1+x_2+ \ldots + x_n)^2 = k^2 \therefore (x_1^2 + x_n^2) + 2(x_1x_2 + \ldots + x_ix_n + \ldots + x_{n-1}x_n) = k^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[x_i^2 + 2 \sum_{j=i+1}^{n} x_ix_j\right] = k^2 \therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} xix_j = k^2; \quad \text{com } j \neq i$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = k^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_ix_j \quad (III)$$

Dado que $x_i \geqslant \emptyset \ \forall \ i = [1;n]$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_ix_j \geqslant \emptyset \therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant k^2 \quad (IV)$$

De (III) temos que o máximo de $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ocorrerá quando $\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_ix_j\right] = \emptyset$ (V)

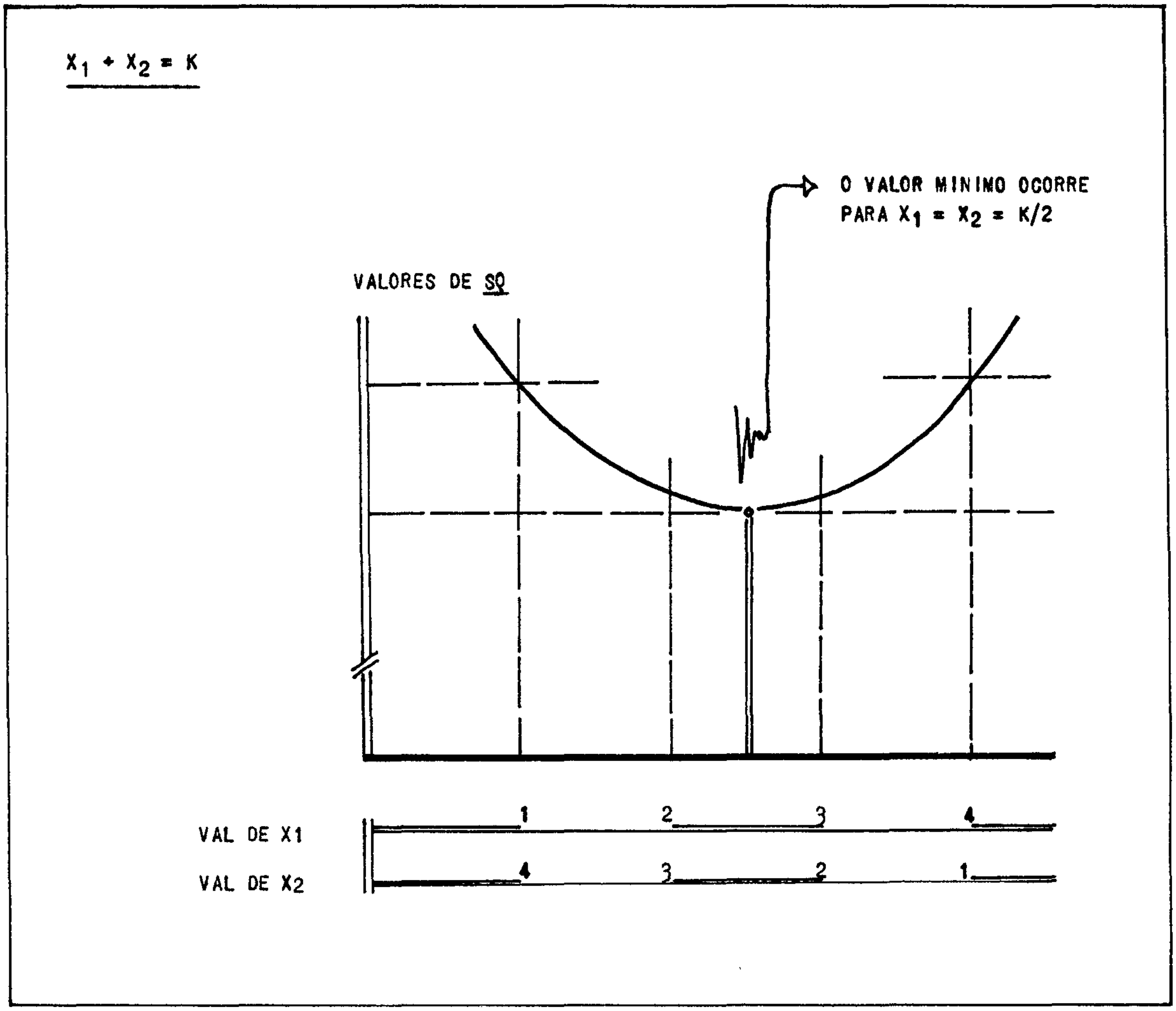
Infere-se,das relações.

i) $x_i = \emptyset \quad \forall \ i = 1;n$ — inviável por não atender (I)

ii) $x_i = k$ e $x_j = \emptyset \quad \forall \ j \neq i$ — satisfaz a (V) e (I)

iii) $x_i = k_i \ \forall \ i \in I;\ x_j = \emptyset \ \forall \ j \in J$, onde $I \cup J = N$ e $o_I$conjunto tem mais de um elemento

Inviável, pois (V) não seria satisfeito.



X1 + X2 = K
O VALOR MINIMO OCORRE PARA X1 = X2 = K/2
VALORES DE SQ
VAL DE X1
VAL DE X2
1
2
3
4
4
3
2
1

I.3. Novos componentes da F.O. e restrições adicionais introduzidas

Como já observado no início do trabalho, a representação matemática da função-objetivo (real) do modêlo é:

$$\min z = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{n} f_{ij} y_{ij} \right),$$

onde f_j é constante pré-determinada, e j   i (ou $j = \emptyset$)

Introduziu-se na função-utilidade, um novo componente, como explicitado a seguir, que forçosamente elegerá, dentre as possíveis soluções do problema, apenas aquelas em que ocorra a condição de mútua exclusividade.

$$\boxed{\min (z) = M \left\{ \underbrace{\left(\sum_{m=1}^{n} (m)^2 \right)}_{k} - \left(\sum_{i=1}^{n} (y_{io}) \right) \right\} + \left\{ \dots \right\}}$$

O Têrmo k, representa uma constante, igual à soma dos quadrados das distâncias dos departamentos ao solo.

De fato, uma restrição efetivamente necessária, seria $\prod_{i=1}^{n} (x_{ij} - i) = \phi \;\forall\; i$, a qual, associada à restrição básica de equilíbrio do modêlo, $\sum_{i=1}^{n} (x_{io}) = k_2$ onde $k_2 = n(n-1)/2$, implica em valôres 1,2,3,...,n (n = nº de andares), para qualquer solução viável do problema.

Tratando-se de expressão não linear, procurou-se substituí-la por uma componente na F.O., que induzisse o modêlo a assumir, de forma preferencial, essas soluções mútuamente exclusivas.

Conhecido o valor de k (soma do quadrado dos valôres de 1 a n, sabe-se, a priori, que existem diversas combinações possíveis* decorrendo em

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{io})^2\right) = \left(\sum_{m=1}^{n} (m)^2\right) = n(n-1)/2, \text{ ou seja,}$$

anulando o primeiro componente da função-utilidade acima referida.

$$\min\ (Z) = M\left\{\left(-\sum_{i=1}^{n} (x_{io})^2\right) + \left(\sum_{m=1}^{n} (m)^2\right)\right\} + \left\{\ldots\right\}$$

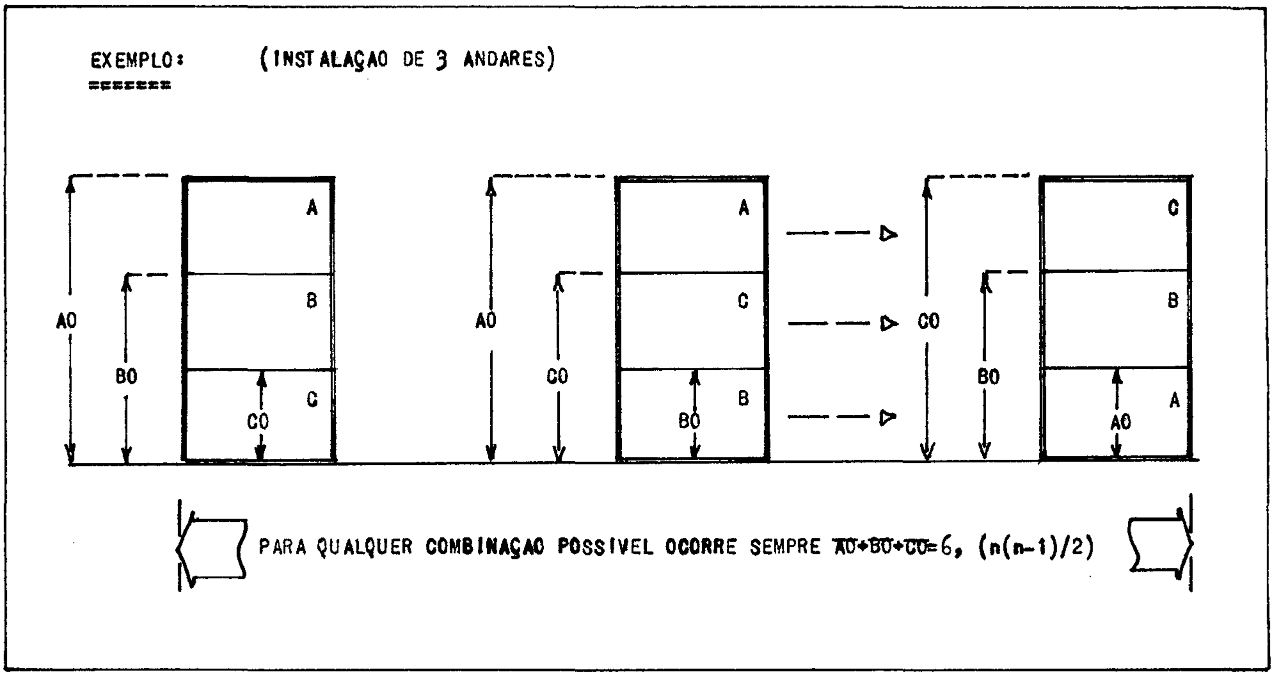
$$\min\ (Z) = \phi + \left\{\ldots\right\}$$

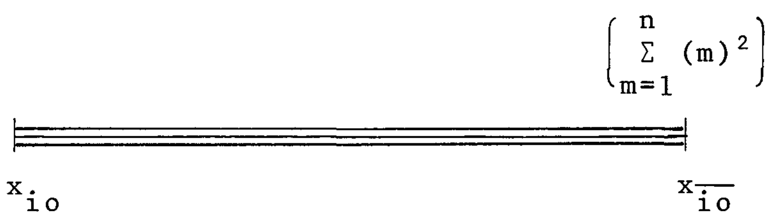
Considerando que a soma das distâncias dos departamentos ao térreo é uma restrição de igualdade $\left(\sum_{m=1}^{n} (x_{io})^2 = K\right)$** e com base no teorema anteriormente demonstrado $\left(\sum_{i=1}^{n} (x_{io})^2\right)$ será máximo se e sòmente se $\left(x_{\bar{i}o} = \sum_{m=1}^{n} (m)^2\right)$ e $x_{io} = \phi$*** para qualquer valor de i diferente de $\bar{i}$.

(*) - De maneira precisa, existem n! combinações possíveis

(**) - Onde $k = n(n-1)/2$

(***) - Pelos requisitos de Programação Quadrática, x_{ij} é sempre maior que ou igual a zero.



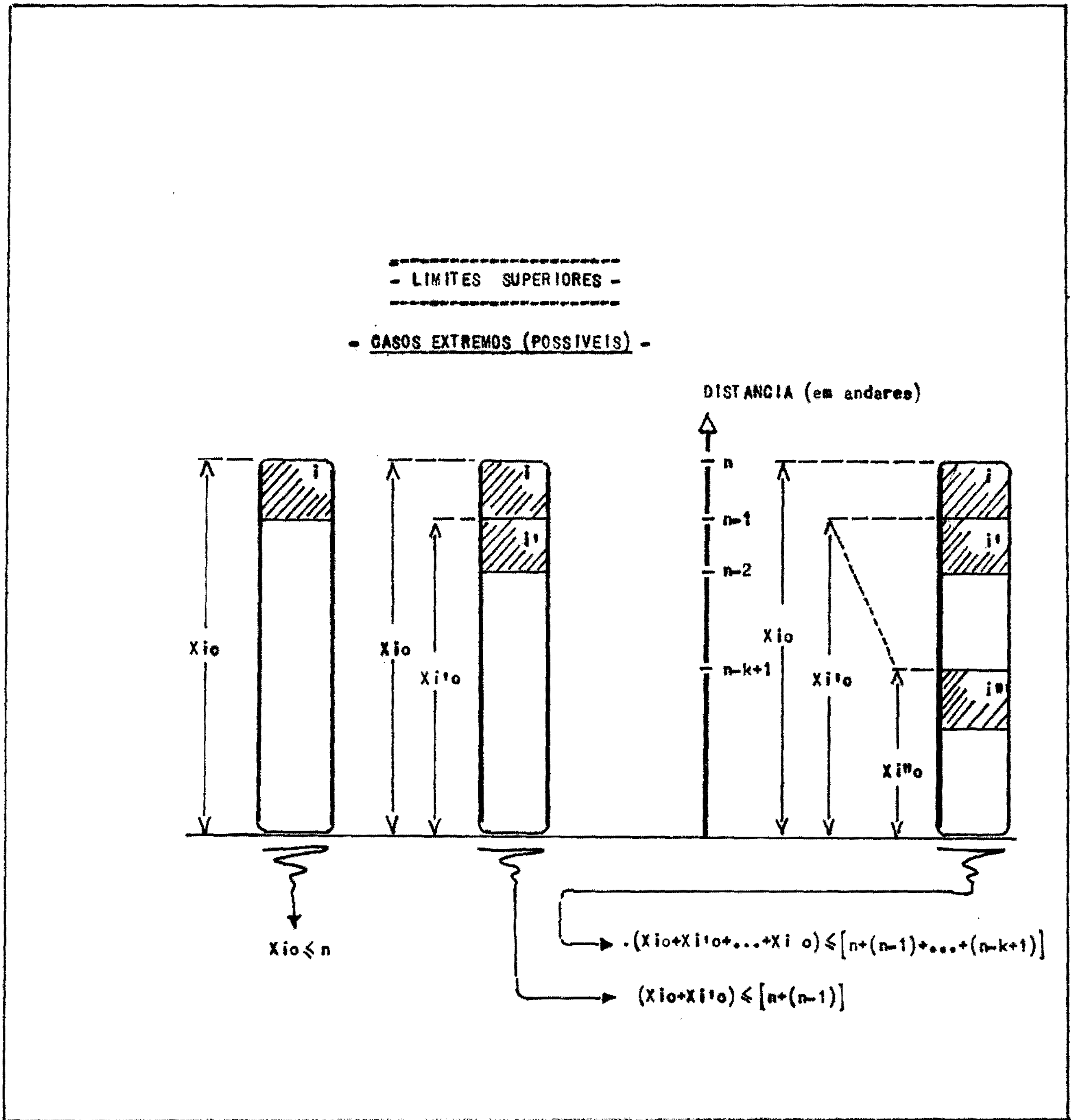


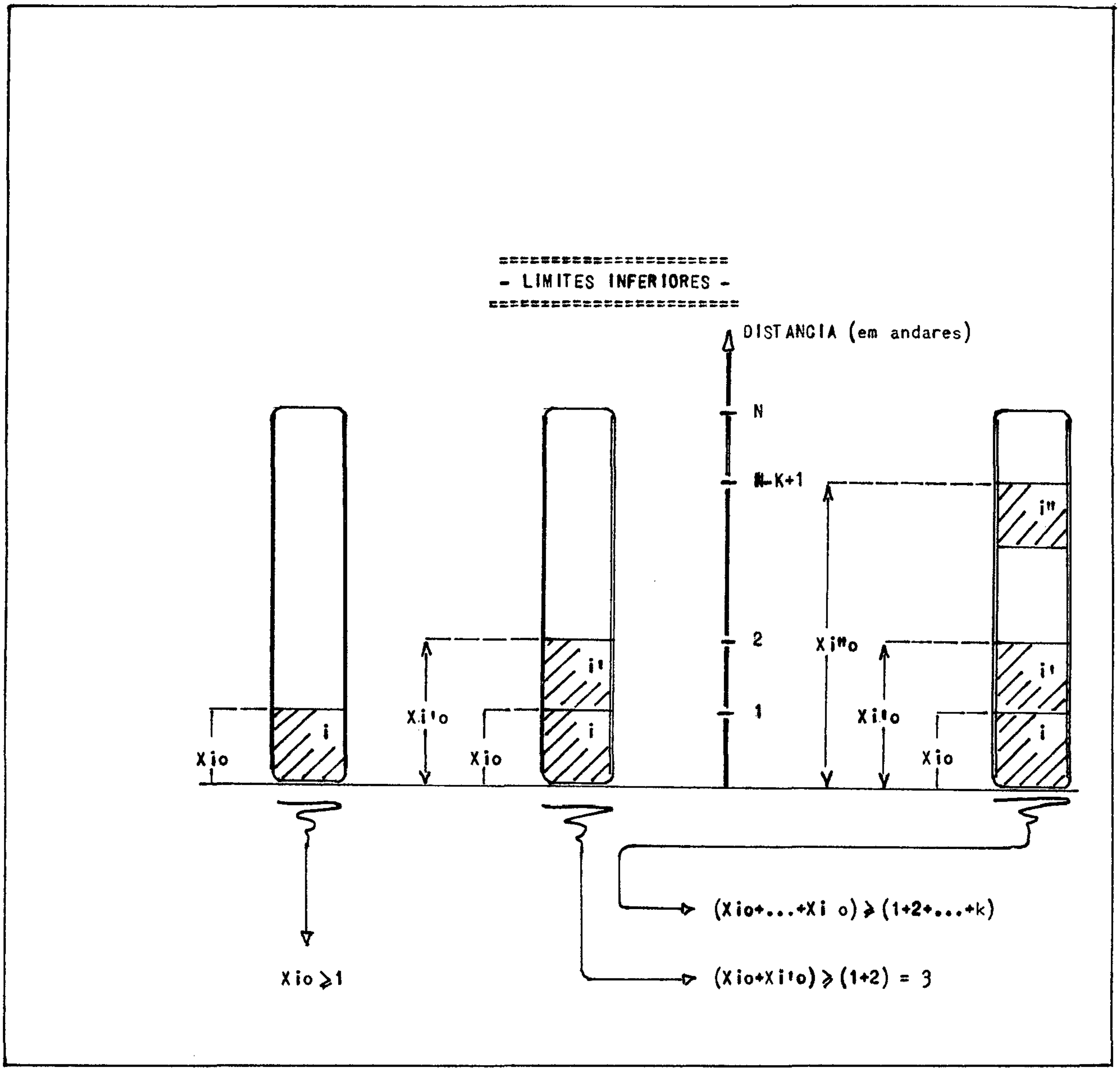
Essa situação, que não corresponde à limitações reais do problema, é contornada com a introdução de novas restrições cumulativas, que definem limites superiores para cada <u>x_{io} isolado</u>, para cada <u>par de valôres</u> (x_{io} + $x_{i'o}$), <u>ternos</u>,(x_{io} + $x_{i'o}$ + $x_{i''o}$), etc, até o máximo de (n–1) parcelas de soma.

Êsse raciocínio origina-se no fato de que, para uma instalação de <u>n</u> pavimentos, a distância ao térreo de um andar <u>i</u> qualquer, será menor ou igual a <u>n</u> (caso em que êle apropria o n-ésimo andar). A distância ao solo de dois departamentos <u>i</u> e <u>i'</u>, <u>somada</u>, será sempre menor ou igual a n + (n–1) , na hipótese extrema de situarem-se êles, respectivamente, no <u>n-ésimo</u> e <u>(n–1)-ésimo</u> andar, ou vice-versa*

(*) - Os limites mínimos, ao contrário, seriam acumulados crescentemente :

$(x_{io} \geqslant 1; (x_{io} + x_{i'o}) \geqslant 3; (x_{io} + x_{i'o} + \ldots + x_{iko}) \geqslant (1+2+\ldots+k)$, etc.


- LIMITES SUPERIORES -
- CASOS EXTREMOS (POSSIVEIS) -
DISTANCIA (em andares)
n
n-1
n-2
n-k+1
i
i'
i"
Xio
Xi'o
Xi"o
Xio ≤ n
(Xio+Xi'o) ≤ [n+(n-1)]
(Xio+Xi'o+...+Xi o) ≤ [n+(n-1)+...+(n-k+1)]



Tendo em vista o conjunto das restrições de limite superior acima enumeradas, e o teorema de maximização da soma, tambem já demonstrado, assume-se que :

$$\boxed{\begin{array}{l} x_{io} = n \\ x_{i'o} = n-1 \\ \vdots \\ x_{i^k o} = n-(k+1) \\ \vdots \\ x_{i^n o} = 1 \end{array}} \quad \begin{array}{l} \text{– (para atender } x_{io} \leqslant n) \\ \text{– (para atender } [x_{io} + x_{i'o}] \leqslant [2n-1]) \\ \\ \text{– (para atender } [x_{io} + \ldots + x_{i^k o}] \leqslant [kn-n(n-1)/2]\ ) \\ \\ \text{– (para atender } [x_{io} + \ldots + x_{i^n o}] \leqslant [\ n(n-1)/2]\ ) \end{array}$$

onde $i \neq i' \neq \ldots \neq i^k \neq \ldots \neq i^n$

Vale observar que, se o sub-conjunto das soluções apontadas corresponde à maximização de $[\sum_{i=1}^{n} (x_{io})^2]$, o valor mínimo de $m[k - \sum_{i=1}^{n} (x_{io})^2]$ também ocorrerá para êsse mesmo conjunto.

Em resumo, a minimização de

$$_m\{[\sum_{m=1}^{n} (m)^2] - [\sum_{i=1} (x_{io})^2]\},$$

sujeito a restrições:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{io}) = n(n-1)/2,$$

e ainda,

$$\left| \begin{array}{l} x_{io} \leqslant n \\ (x_{io} + x_{i'o}) \leqslant n + (n-1) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ (x_{io} + \ldots + x_{i^k o}) \leqslant n + (n-1) + \ldots + (n-k+1), \text{ onde} \\ \qquad\qquad i \neq i' \neq \ldots \neq i^k, \end{array} \right.$$

ocorre <u>se, e somente se</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{io} &= n \\ x_{i'o} &= n-1 \\ &\vdots \\ x_{i^k o} &= (n-k+1) \\ &\vdots \\ x_{i^n o} &= n \end{aligned}}$$

para i qualquer e $i \neq i' \neq \ldots \neq i^k \neq \ldots \neq 1^n$

Pretende-se, com a introdução da "componente indutiva" na função-objetivo, e das "restrições cumulativas" de limite superior (ou inferior), utilizar o método contínuo da programação quadrática, para a solução de um problema cujas variáveis assumem valôres inteiros, positivos e mùtuamente exclusivas.

Cumpre observar que o parâmetro multiplicador dêsse componente, admite os mesmos conceitos do "Big M" tradicionalmente utilizado nos algorítmos "simplex", tão grande quanto se queira, onde qualquer resultante da expressão intra-parênteses assume valor escalarmente alto, e por decorrência, incompatível* com a solução mínima pesquisada**.

Assim, por essa diferença escalar entre os dois têrmos da função-objetivo (conceito do Big-M), sua componente-real ....

(*) - O valor da componente é sempre maior que ou igual a zero, desde que o limite superior de é por fôrça das restrições cumulativas anteriormente referidas.

(**)- Sabe-se, a priori, que qualquer combinação mùtuamente exclusiva de x_{io}, implica na assunção do valor Ø pela COMPONENTE-I.

$\left[\min z = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} f_{ij} x_{ij} \right\}\right]$, com j i ou j = ∅ , sòmente é testada para o sub-conjunto das soluções viáveis que impliquem em COMP_I = ∅*

(*) - Êsse sub-conjunto é formado por n! distribuições de x_{ij}.

ANEXO-II

UM MÉTODO DE ENUMERAÇÃO IMPLÍCITA

O método de enumeração presentemente desenvolvido, define um esquema alternativo de resolução do problema, a partir das variações do Branch and Bound detalhadas abaixo :

i) - É possível eleger, através de processo empírico, uma solução sub-ótima do problema, que sirva de <u>base inicial ao truncamento dos nós, por ultrapassagem</u>, à medida em que evolue o algorítmo específico.

ii) - Como discutido a seguir, a aplicação do conceito de "<u>departamentos-dominantes</u>" implica sempre na obtenção de somas <u>efetivamente inferiores</u> ao valor dos fluxos-de-deslocamento, considerados como objetivo de minimização.

1. <u>Conceito de "departamento-dominante</u>"

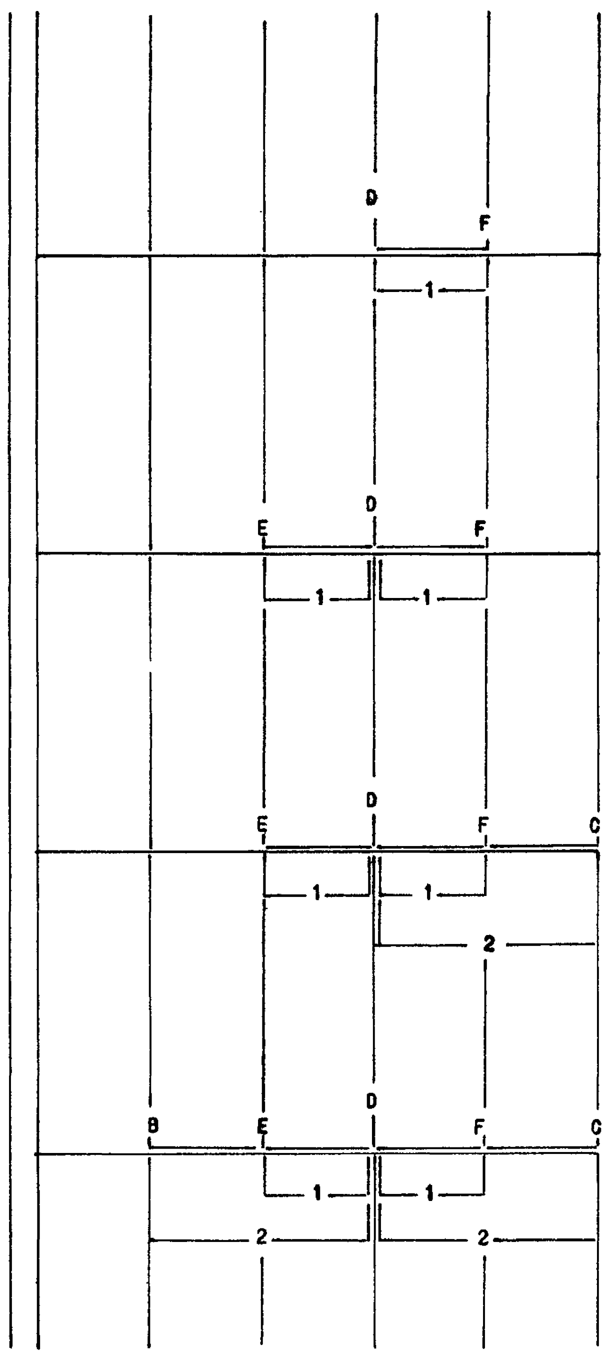
Se os fluxos associados a um departamento específico (d), fôssem "dominantes" em relação aos demais, ou seja, se seus valôres estivessem em <u>ordem de grandeza suficientemente superior</u> à dos demais fluxos, é fato que a solução de um modêlo de alocações estaria diretamente influenciada por êsse departamento, representando mesmo sua própria <u>distribuição-mínima</u>.

Assim, dado que o dp é dominante, um processo de formulação da sua distribuição mais econômica consiste em fixar progressivamente os demais departamentos, nas suas adjacências, em ordem decrescente dos respectivos fluxos.

2. Exemplo :

- Dupondo-se D dominante, e

- FLUXO (D,A)= 1 ; FLUXO (D,B)= 2 ; FLUXO (D,C)= 3 ; FLUXO (D,E)= 4 ; FLUXO (D,F)= 5 ;



- 1ª fixação

  . [max (1,2,3,4,5)]

  . soma dos fluxos = 5*1=5

- 2ª fixação

  . [max (1,2,3,4)]

  . soma-fluxos = 5+4*1=9

- 3ª fixação

  . [max (1,2,3)]

  . soma-fluxos = 9+3*2=15

- 4ª fixação

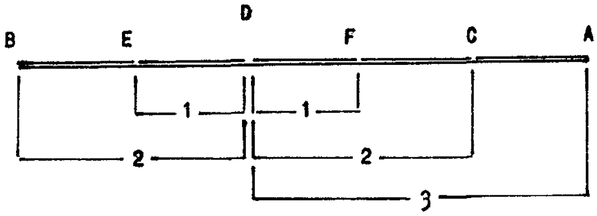
  . [max (1,2)]

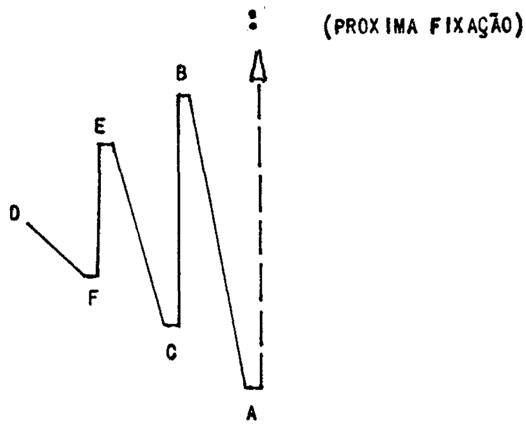
  . soma-fluxos = 15+2*2=19

- <u>5ª fixação</u>

  - (1)

  - soma-fluxos = 19+1*3=22

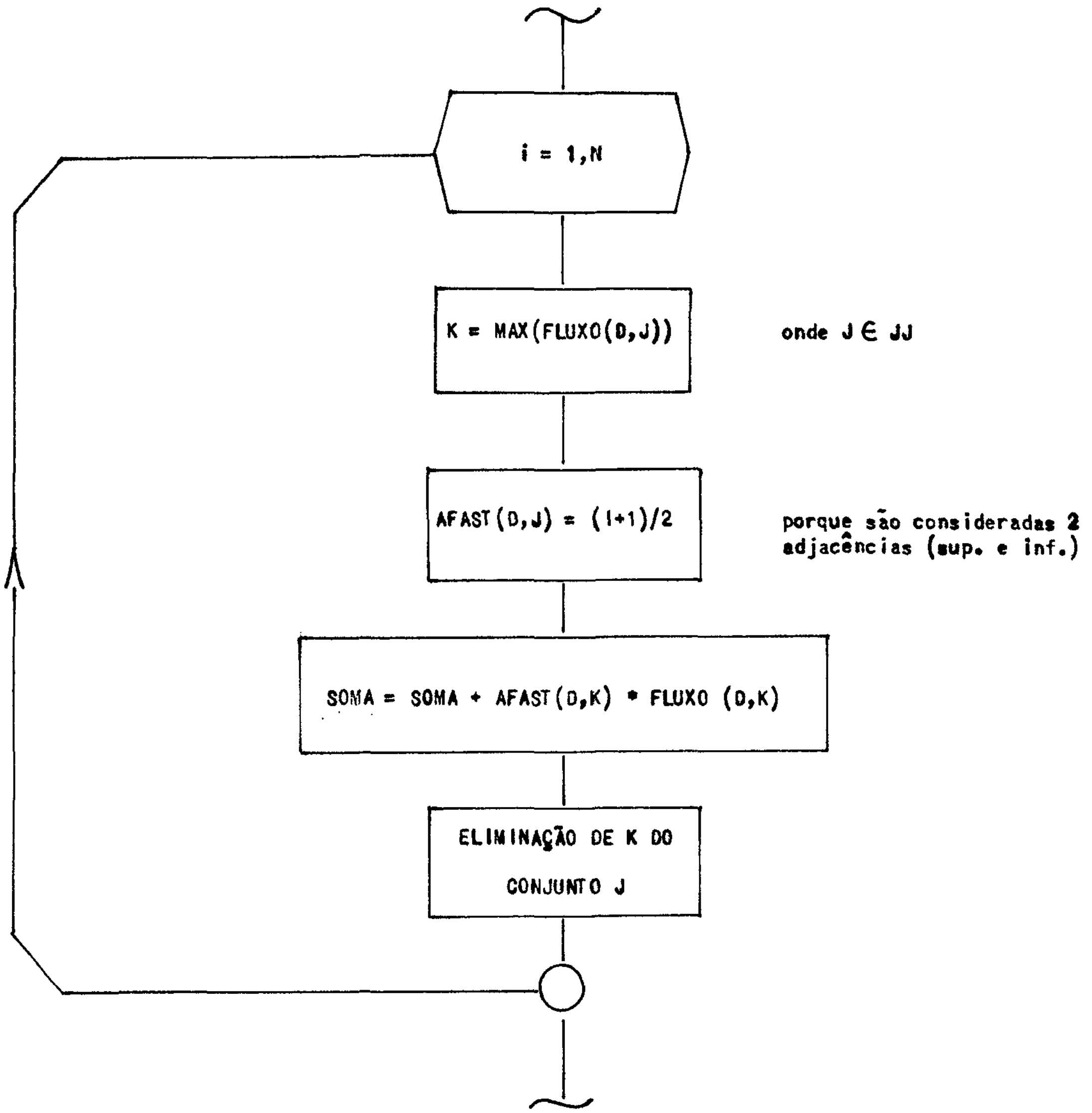




Do exemplo, depreende-se que o afastamento dos dp's, <u>em relação ao dominante</u>, decorrerá no deslocamento mínimo sempre que a distribuição fôr promovida segundo êsse critério.

Formalmente, o processo é estabelecido no fluxograma seguinte, onde

- D = departamento dominante;
- N = conjunto dos demais departamentos.
- J = conjunto dos departamentos ainda não fixados.
- AFAST = matriz-inteira



Uma vêz formulada a distribuição para D dominante, o esfôrço-deslocamento, (com D dominante), será tido pela soma dos fluxos a êle associados, ponderados os respectivos afastamentos.

Exemplo:

SOMA(D)= 2*FLUXO(D,B)+1*FLUXOS(D,E)+1*FLUXO(D,F)+2*FLUXO(D,C)+3*(FLUXO(A,D)

afastamentos do dominante

3. Se o processo é repetitivo para todos os outros departamentos, ou seja, se os considerarmos isoladamente como <u>maiores-dominantes</u>, obter-se-á um conjunto de <u>n</u> somas, associadas aos <u>n</u> dp's.

Estão <u>duplamente computados</u> na soma, entretanto, os diversos pares de departamentos, $\overline{ij}$, uma vêz que os respectivos fluxos estiveram presentes nos cálculos para i-dominante, como também na apuração de j-dominante.

Por outro lado, sabe-se que, <u>na solução real do Modêlo</u>, todas as combinações $\overline{ij}$ de departamentos estarão igualmente consideradas.

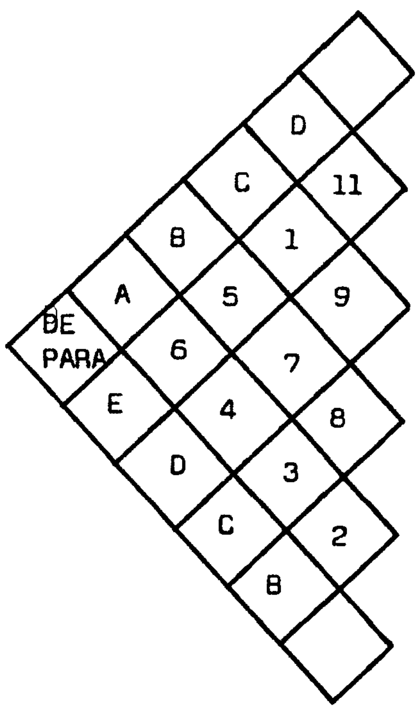
O processo consistirá, pois, de :

i) - Acumular as diversas somas de cada <u>maior-dominante</u> num totalizador SCM.

ii) - Eliminar, dêsse parâmetro, <u>o maior</u> dos dois valôres* [FLUXO(ij)*afastamento (i j)] verificado <u>para cada par de dp's</u>.

4. <u>Exemplo</u> :

FLUXOS



(*) MAX |DESL(I,J); DESL(J,I)|

SCM=SOM(A)+SOM(B)+ ...+SOM(E) - MAX[DESL(AB); DESL(BA)] -
- MAX[DESL(AC); DESL(CA)]- ... - MAX[DESL(DE); DESL(ED)]

SCM = 20 + 29 + ... - (4+ ...)

5. O totalizador SCM representa, então, uma soma de deslocamentos obrigatòriamente inferior ao verdadeiro efeito do esfôrço-deslocamento, (mínimo), correspondente à solução do problema.

De fato, trata-se de processo em que esteve mantido um critério de otimalidade, sem restrições de viabilização das soluções.

Assim, pela aplicação do processo anterior, se $\overline{ij} = 1$ e $\overline{jk} = 1$, e ambos, j e k, estão acima de i, $\overline{ik}$ não foi forçado a assumir valor maior que ou igual a 2, condição necessária para uma solução-viável do problema real*.

Êsses aspectos, entretanto, são elementos básicos no desenvolvimento do processo, desde que :

- Se o SCM encontrado é superior a um valor da função-utilidade já disponível, a solução-mínima do problema real,(compatível com as restrições consideradas na obtenção do SCM), será também não inferior à solução já disponível.

(*)- Pelo próprio exemplo, infere-se que o SCM incorpora AC=1, CD=1, AD=1 e AE= =1, e que não é admissível como solução-viável do Modêlo.

Com efeito, deve-se observar que os conceitos emitidos para o SCM e para as "soluções-mínimas", são válidos em qualquer nível, isto é:

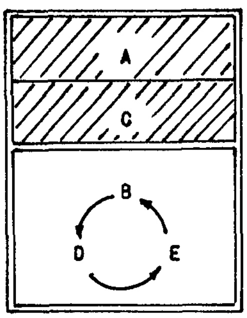
- Se forem fixados alguns departamentos, e aos demais, aplicado o critério de maior-dominante, permanece estabelecido que uma solução-ótima do Modêlo, (mínima), fixadas algumas alocações, será não-menor que a soma dos fluxos-inter-departamentais verificada para êsses dp's, acumulada ao SCM correspondente aos demais.

6. Exemplo:

Tendo-se que: A = fixado no andar N

C = fixado no andar (N-1)

B,D e E = Não fixados.



A solução-ótima (real) do Modêlo, com A = N e C = (N-1), será sempre não menor que [N*FLUXO(A,∅)+(N-1)*FLUXO(C,∅)+1*FLUXO(A,C)]+[SCM(B,D,E)]

Do expôsto, o atual processo de enumeração desenvolve a metodologia seguinte:

i) Determinar solução-sub-ótima, por processos empíricos.

ii) Fixar progressivamente os departamentos nos últimos andares, calculando formalmente o efeito de seus deslocamentos (SOMA-I).

iii) Aplicar os critérios de <u>maior-dominante</u> aos departamentos restantes, estabelecendo o <u>SCM</u> correspondente (SOMA-II).

iv) Acumular SOMA-I e SOMA-II.

v) Se o valor encontrado é <u>superior ou igual ao efeito-deslocamento de uma solução já disponível, nenhuma distribuição, em que estejam fixados os departamentos do Grupo-I*, poderá ser ótima</u>.

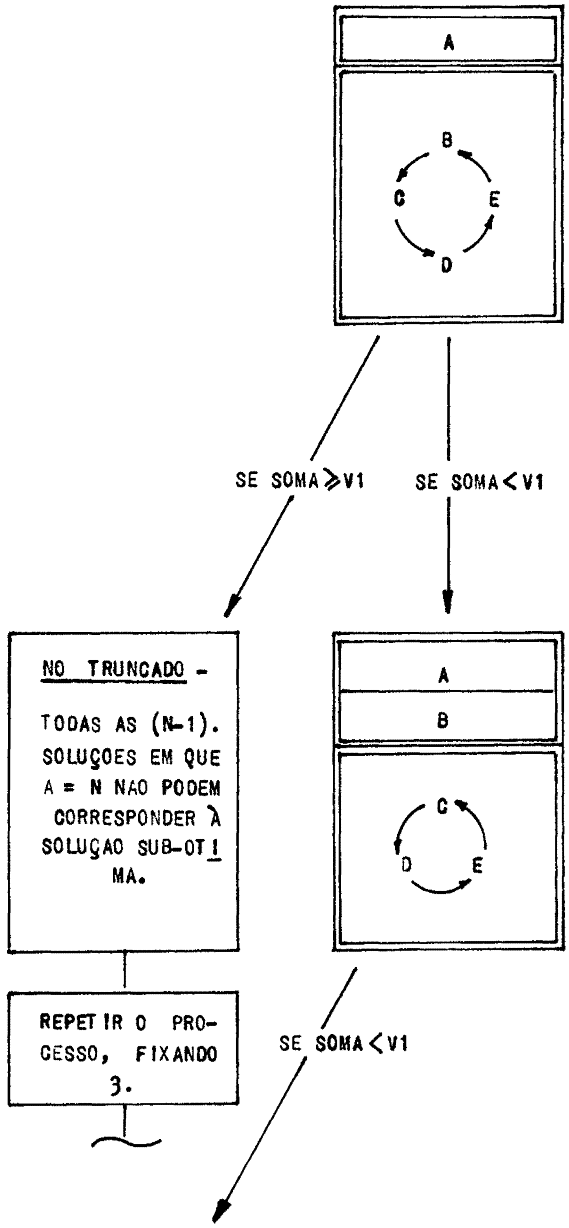
vi) Se a soma é inferior, promove-se uma fixação adicional, repetindo-se o processo a partir de ii .

7. <u>Exemplo</u>:

a) - Solução disponível (sub-ótima) valor F.O. =

b) - Fixando-se A em N.

(*) - Nas suas respectivas posições.



SOMA(I) = N * FLUXO(A,0)

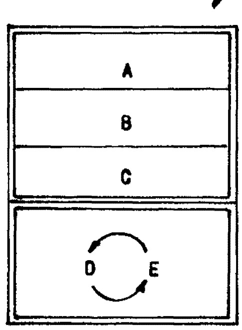
SOMA(II) = SCM(B,C,D,E)

SOMA = SOMA(I) + SOMA(II)

SOMA(I) = N * FLUXO(A,0) + (N - 1) *
* FLUXO(B,0) + FLUXO(A,B)

SOMA(II) = SCM(C,D,E)

SOMA = SOMA(I) + SOMA(II)



SOMA(I) = N * FLUXO(A,0) + (N - 1) * FLUXO(B,0) + (N - 2) *
* FLUXO(C,0) + 1 * FLUXO(A,B) + 2 * FLUXO(A,C) +
+ 1 * FLUXO(B,C)

SOMA(II) = SCM(D,E)

SOMA = SOMA(I) + SOMA(II)

Trata-se, evidentemente, de variações aplicadas ao método de branch and bound, pelo truncamento de nós que ultrapassam um valor já disponível da função-objetivo, eliminando-se assim a enumeração das (N-R)! soluções correspondentes à permutação dos departamentos não fixados.

Cumpre observar que o valor dessa solução disponível é atualizado sempre que todos os departamentos estão fixos, (ou seja quando o critério de menor dominante não é aplicado), e o efeito-deslocamento é inferior ao sub-ótimo armazenado (solução-corrente).

8. Caso Exemplo -

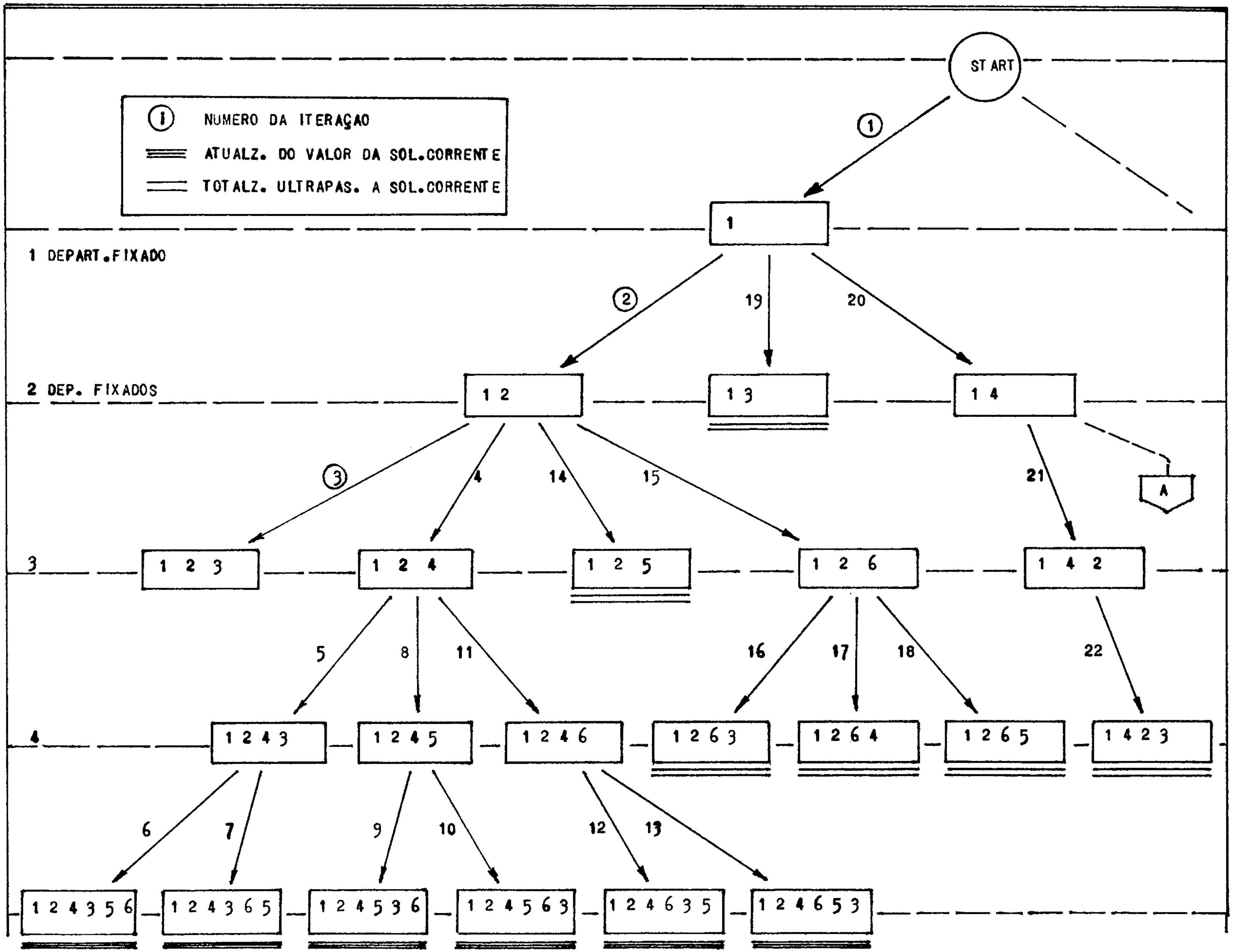
Foi desenvolvido um programa computacional de resolução do atual processo, e utilizado o exemplo-base já definido nos ítens anteriores.

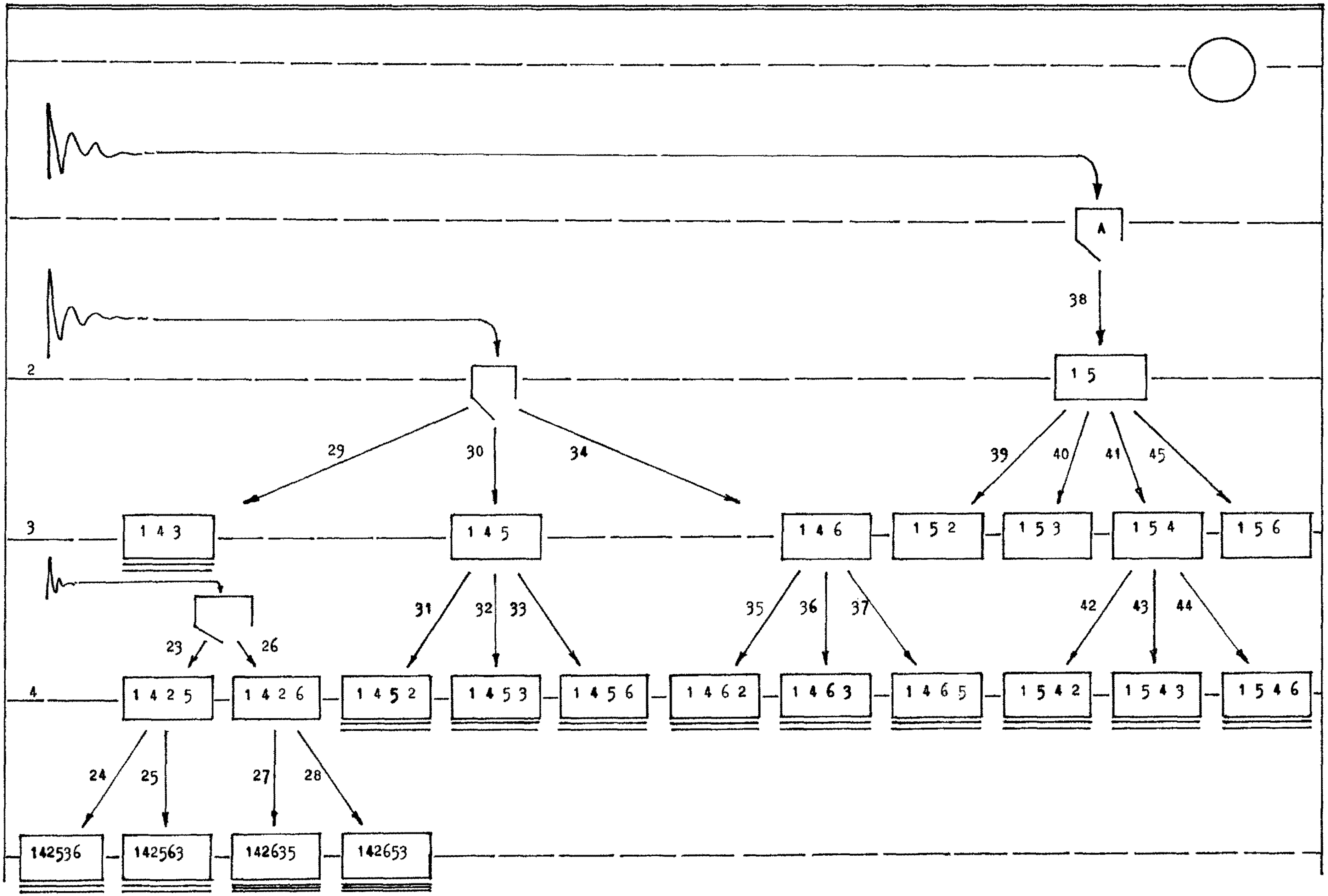
O método convergiu em 199 iterações, contra as 720 soluções possíveis (N!), o que vem demonstrar sua aplicabilidade a problemas maiores.

Nos ítens seguintes, está detalhada a evolução do algorítmo.

i) - Valor inicializado para a função-objetivo : 230

ii) - Evolução do algorítmo :


START
1
NUMERO DA ITERAÇAO
ATUALZ. DO VALOR DA SOL.CORRENTE
TOTALZ. ULTRAPAS. A SOL.CORRENTE
1
1 DEPART.FIXADO
2
19
20
2 DEP. FIXADOS
1 2
1 3
1 4
3
4
14
15
21
A
3
1 2 3
1 2 4
1 2 5
1 2 6
1 4 2
5
8
11
16
17
18
22
4
1 2 4 3
1 2 4 5
1 2 4 6
1 2 6 3
1 2 6 4
1 2 6 5
1 4 2 3
6
7
9
10
12
13
1 2 4 3 5 6
1 2 4 3 6 5
1 2 4 5 3 6
1 2 4 5 6 3
1 2 4 6 3 5
1 2 4 6 5 3


A
15
38
2
29
30
34
39
40
41
45
3
143
145
146
152
153
154
156
31
32
33
35
36
37
42
43
44
23
26
4
1425
1426
1452
1453
1456
1462
1463
1465
1542
1543
1546
24
25
27
28
142536
142563
142635
142653