

A UTILIZAÇÃO DE VETORES DE LANCZOS-RITZ

NA CONDENSAÇÃO DINÂMICA DE ESTRUTURAS


Celina Cyrillo Gomes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL.

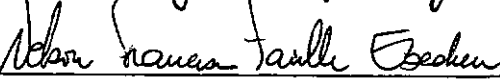
Aprovada por:



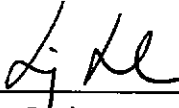
Prof. Edison Castro Prates de Lima



Prof. Luiz Eloy Vaz



Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken



Prof. Luiz Landau

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1988

GOMES, CELINA CYRILLO

A Utilização de Vetores de Lanczos-Ritz na Condenação Dinâmica de Estruturas (Rio de Janeiro) 1988.

VII, 48 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1988).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPE.

1. Condensação

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Edison Castro Prates de Lima pela orientação e apoio.

Aos Professores Eduardo Thomaz e Ernani Diaz pelo apoio e estímulo recebidos.

Aos demais Professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE e da Escola de Engenharia da UFRJ pelos ensinamentos transferidos.

Aos amigos Geraldo e Gilberto Filizola pela amizade e apoio.

Aos colegas e amigos da COPPE/UFRJ, pela amizade e incentivo.

À CAPES pela ajuda financeira.

À Promon Engenharia pelo uso do seu Centro de Processamento de Dados.

A Luis Teixeira Videla pela confecção dos desenhos.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

**A UTILIZAÇÃO DE VETORES DE LANCZOS-RITZ NA
CONDENSAÇÃO DINÂMICA DE ESTRUTURAS**

Celina Cyrillo Gomes

Março de 1988

ORIENTADOR: Prof. Edison Castro Prates de Lima

PROGRAMA : Engenharia Civil

O objetivo deste trabalho é estudar a condensação de graus de liberdade em problemas de análise dinâmica de estruturas. Foram estudadas a redução de Guyan e a representação da subestrutura por vetores de Lanczos-Ritz. É proposta uma correção dos vetores de base da subestrutura através de um processo iterativo para permitir uma correta representação modal das cargas de inércia.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

**THE USE OF LANCZOS-RITZ VECTORS IN
DYNAMIC CONDENSATION OF STRUCTURES**

Celina Cyrillo Gomes

March, 1988

CHAIRMAN : Prof. Edison Castro Prates de Lima

DEPARTAMENT: Civil Engineering

The main objective of the dissertation is to analyse the condensation of degrees of freedom in Structural Dynamics. The Guyan reduction and the substructure representation by its Lanczos-Ritz vectors were implemented. A correction in the substructure base of transformation through an iterative process was proposed in order to obtain a correct modal representation of inertia forces.

ÍNDICE

	Pág.
CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II - MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL.....	4
II.1 - Resposta em Frequência.....	4
II.2 - Método de Iteração por Subespaços.....	8
II.3 - Método de Lanczos-Ritz.....	10
CAPÍTULO III - SUBESTRUTURAÇÃO E CONDENSAÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE.....	14
III.1 - Redução de Guyan.....	14
III.2 - Síntese Modal de Componentes.....	19
III.3 - Subestruturação Utilizando Vetores de Lanczos-Ritz	22
III.4 - Extensão para Cargas Periódicas.....	27
CAPÍTULO IV - EXEMPLOS E APLICAÇÕES.....	28
IV.1 - Introdução.....	28
IV.2 - Pórtico em "L" Invertido.....	28
IV.3 - Pórtico Plano com Vários Andares.....	31
IV.4 - Exemplos de Plataforma Tridimensional.....	35
IV.5 - Pórtico Plano.....	40
IV.6 - Pórtico em "L" Invertido sem Carga na Subestrutura.	41
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES.....	43
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	45

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Modernamente, o emprego da análise dinâmica no projeto de estruturas tem se tornado cada vez mais freqüente devido à necessidade de se estabelecer resultados confiáveis decorrentes de cargas variáveis no tempo. Em estruturas tais como centrais nucleares ou plataformas para prospecção e extração de petróleo no mar, os códigos de projetos internacionais solicitam este tipo de análise. Com o advento do método dos elementos finitos tornou-se possível a execução de análises bastante sofisticadas.

O refinamento dos modelos estruturais, se por um lado nos conduz a resultados mais confiáveis, por outro gera esforços computacionais excessivos, devido ao grande número de equações a serem resolvidas.

A condensação de graus de liberdade é a alternativa que nos permite adotar modelos suficientemente refinados sem recair em sistemas excessivamente custosos.

A utilização de condensação e geração de superelementos na análise estática é uma técnica bastante conhecida, permitindo obter grande eficiência e versatilidade no projeto de grandes sistemas estruturais. Entretanto, até recentemente, não havia um procedimento para a análise dinâmica que produzisse resultados igualmente confiáveis com razoável eficiência.

Houve no passado muitas tentativas para o estabelecimento de métodos de condensação dinâmica de estruturas. As primeiras tentativas nesse sentido foram os chamados **"component-mode-synthesis methods"**, desenvolvidos por HURTY (1, 2). Um método si-

milar foi desenvolvido por GLADWELL (3), sendo que sua extensão, apresentada por BENFIELD e HRUDA (4), é conhecida como "**component-mode-substitutions**". Outra importante contribuição foi o trabalho de GUYAN (5), resultando no chamado "**Método de Guyan**", baseado na condensação estática.

Após estes trabalhos pioneiros, vários novos procedimentos têm sido propostos. Entre eles vale a pena mencionar os métodos apresentados por MACNEAL (6), CRAIG (7, 8), LEUNG (9) e PAZ (10).

Vários autores desenvolveram algoritmos bastante sofisticados com a finalidade de minimizar o erro introduzido no processo de redução dinâmica. Entretanto, a aplicação prática destas técnicas requer uma cuidadosa seleção dos graus de liberdade que devem ser condensados.

Ocorre porém que o principal objetivo de quase todos estes métodos é a determinação de aproximações das frequências naturais e dos modos de vibração da estrutura. Desta forma torna-se difícil a avaliação da precisão obtida no cálculo da resposta dinâmica, uma vez que não é possível assegurar que modos de vibração importantes para o cálculo da resposta não estejam faltando.

A primeira tentativa de superar esta dificuldade foi proposta por WILSON (11), no que foi seguido por outros autores (12, 13), onde ficou estabelecido que os modos de vibração (autovetores) não são a melhor base para o método da superposição modal no cálculo da resposta dinâmica de estruturas submetidas a determinados tipos de carregamento. Foi demonstrado que o método da superposição modal utilizando um conjunto de vetores de base do tipo Lanczos-Ritz produz resultados mais precisos que os obtidos por uma correspondente base de autovetores. Isto ocorre, princi-

palmente, devido ao fato de que os vetores de Lanczos-Ritz são gerados levando em consideração a distribuição espacial das cargas dinâmicas, incorporando desta forma, automaticamente, a correção devido ao erro de truncamento dos modos superiores.

O passo seguinte foi a extensão da utilização da base de vetores Lanczos-Ritz para a análise por subestruturação, o que foi objeto de um trabalho apresentado por WILSON (14).

Entretanto, o esquema apresentado por Wilson não permite assegurar em todos os casos a correta representação das cargas de inércia atuantes na subestrutura devido às acelerações produzidas nos nós de contorno da subestrutura.

O método proposto no presente trabalho permite superar este inconveniente, através da geração de uma base de vetores de Lanczos-Ritz, que leva em conta tanto a distribuição espacial das cargas externas aplicadas na subestrutura como a distribuição das cargas de inércia devidas às acelerações dos graus de liberdade associados aos nós de contorno da subestrutura. Como estas acelerações são inicialmente desconhecidas, é então proposto um esquema iterativo.

Foi abordado, no presente trabalho, apenas o método da superposição modal, com aplicação à resposta em frequência. Há duas alternativas para a base de transformação: a base de autovetores do problema de autovalor associado às equações de movimento e o uso dos vetores de Lanczos-Ritz, que estão apresentados no Capítulo II. No Capítulo III são desenvolvidos a redução de Guyan, o método de Wilson com a correção da base de subestrutura. No Capítulo IV apresentam-se os exemplos e no V as conclusões e recomendações para trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

MÉTODO DE SUPERPOSIÇÃO MODAL

II.1 - RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

A resposta dinâmica de sistemas estruturas submetidas a cargas harmônicas pode ser decomposta em duas parcelas: a resposta transiente e a resposta permanente ou "steady-state".

Devido ao amortecimento, a resposta transiente desaparece com o tempo, restando a resposta permanente que, para a análise linear, possui frequência idêntica à da carga de excitação.

Para um sistema discreto com n graus de liberdade, tem-se

$$\underset{\sim}{M}\ddot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{C}\dot{\underset{\sim}{U}} + \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{P}(t) \quad (2.1)$$

onde $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{C}$ e $\underset{\sim}{K}$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez da estrutura, de dimensão $n \times n$, $\underset{\sim}{P}$ é o vetor de cargas aplicadas e $\underset{\sim}{U}$, $\dot{\underset{\sim}{U}}$ e $\ddot{\underset{\sim}{U}}$ são os vetores deslocamento, velocidade e aceleração dos pontos nodais.

No caso da análise no domínio da frequência, a excitação periódica pode ser expressa pela soma de parcelas harmônicas. Cada parcela pode ser representada por uma expressão do tipo:

$$\underset{\sim}{P}(t) = \underset{\sim}{P}_o e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

sendo a correspondente resposta no regime permanente dada por

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}_0 e^{i\omega t} \quad (2.3)$$

onde \tilde{P}_0 e \tilde{U}_0 são, respectivamente, vetores de amplitudes de carga e deslocamento.

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1) e derivando, obtém-se

$$-\tilde{M}\omega^2 \tilde{U}_0 e^{i\omega t} + i\omega \tilde{C} \tilde{U}_0 e^{i\omega t} + \tilde{K} \tilde{U}_0 e^{i\omega t} = \tilde{P}_0 e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

O vetor \tilde{U}_0 será obtido pela solução do sistema de equações algébricas

$$[-\omega^2 \tilde{M} + i\omega \tilde{C} + \tilde{K}] \tilde{U}_0 = \tilde{P}_0 \quad (2.5)$$

Este sistema pode ser resolvido diretamente ou por intermédio do método da superposição modal, no qual o sistema de equações (2.5) expresso em coordenadas físicas é transformado em um sistema equivalente em coordenadas modais, através de uma mudança de base utilizando a matriz modal $\tilde{\Phi}$. Desta forma os deslocamentos \tilde{U}_0 da estrutura serão obtidos em função de deslocamentos modais $\tilde{\eta}$ através da transformação linear

$$\tilde{U}_0 = \tilde{\Phi} \tilde{\eta} \quad (2.6)$$

Admitindo-se a ortogonalidade das matrizes \tilde{K} e \tilde{M} em relação aos vetores de base da matriz de transformação $\tilde{\Phi}$, e supondo que estes vetores sejam normalizados em relação à matriz de massa \tilde{M} , são válidas as seguintes relações

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim\sim}{K} \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{\Lambda} \quad (2.7)$$

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim\sim}{M} \underset{\sim}{\phi} = \underset{\sim}{I}$$

onde $\underset{\sim}{\Lambda}$ é uma matriz diagonal, e $\underset{\sim}{I}$ é a matriz identidade.

A matriz de amortecimento pode ser definida de modo que

$$\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim\sim}{C} \underset{\sim}{\phi} = 2\omega_i \xi_i \delta_{ij} \quad (2.8)$$

sendo ω_i a frequência natural de ordem i , ξ_i a percentagem de amortecimento crítico associado a cada vetor de base $\underset{\sim}{\phi}_i$ da matriz modal $\underset{\sim}{\phi}$ e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Substituindo (2.4) em (2.3) e pré-multiplicando-se todos os termos por $\underset{\sim}{\phi}^T$ resulta

$$[-\underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim\sim}{M} \underset{\sim}{\phi} \bar{\omega}^2 + i\bar{\omega} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim\sim}{C} \underset{\sim}{\phi} + \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim\sim}{K} \underset{\sim}{\phi}] \underset{\sim}{\eta} = \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{P} \quad (2.9)$$

Observando-se as relações (2.5) e (2.6), o sistema de equações definido em (2.7) fica desacoplado e torna-se um conjunto de equações do tipo

$$(-\bar{\omega}^2 + 2i\bar{\omega}\omega_j \xi_j + \omega_j^2) \eta_j = P_j \quad (2.10)$$

Uma vez obtidos os deslocamentos modais através das equações (2.10), as amplitudes dos deslocamentos $\underset{\sim}{U}_0$ podem ser obtidas através de (2.6).

Tradicionalmente têm sido utilizados os modos de vibração como vetores de base da matriz de transformação modal $\underset{\sim}{\phi}$. Estes vetores são obtidos pela solução do problema de autovalor as-

sociado à análise de vibrações livres da estrutura. No presente trabalho, utiliza-se o método de iteração por subespaços, desenvolvido por BATHE (15), para a determinação das frequências naturais e os correspondentes modos de vibração da estrutura.

Porém, mais recentemente, foi demonstrado por WILSON (11), seguido de vários autores (12, 13), que os modos de vibração não são a melhor base possível para o método de superposição modal. Efetivamente, a utilização de uma base modal composta por vetores de Lanczos-Ritz fornece melhores resultados para um mesmo número de vetores de base, que os correspondentes obtidos através da base de autovetores. Este fato decorre, fundamentalmente, da propriedade dos vetores de Lanczos-Ritz serem gerados levando em conta a distribuição espacial da carga aplicada na estrutura, o que não ocorre com os autovetores.

Os dois métodos são descritos sucintamente a seguir.

II.2 - MÉTODO DE ITERAÇÃO POR SUBESPAÇOS

Neste método, desenvolvido por BATHE (15) resolve-se o problema de autovalor

$$\underset{\sim}{K}\phi = \underset{\sim}{M}\phi\Lambda^2$$

através da projeção das matrizes $\underset{\sim}{K}$ e $\underset{\sim}{M}$ no subespaço formado pelos "r" autovetores desejados. Inicia-se então um ciclo iterativo a partir de "p" vetores de partida, que formam uma base para o subespaço E_0 . A iteração termina quando o subespaço converge para E_∞ , cuja base é formada pelos "p" primeiros autovetores do sistema, ortogonalizados em relação à matriz de massa.

Em resumo tem-se o seguinte procedimento:

- . fatoração da matriz de rigidez $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{L}\underset{\sim}{D}\underset{\sim}{L}^T$
- . determinação dos "p" vetores de partida $\underset{\sim}{X}_0$
- . cálculo de $\underset{\sim}{Y}_0 = \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_0$
- . início de iteração
- . resolução do sistema $\underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X}_{k+1} = \underset{\sim}{Y}_k$
- . projeção de $\underset{\sim}{K}$ e $\underset{\sim}{M}$ na base E_{k+1}

$$\underset{\sim}{K}_{k+1} = \underset{\sim}{X}_{k+1}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{X}_{k+1}, \text{ sendo } \underset{\sim}{K}\underset{\sim}{X}_{k+1} = \underset{\sim}{Y}_k$$

$$\underset{\sim}{M}_{k+1} = \underset{\sim}{X}_{k+1}^T \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{X}_{k+1}, \text{ sendo } \underset{\sim}{M}\underset{\sim}{X}_{k+1} = \underset{\sim}{Y}_{k+1}$$
- . solução do problema de autovalor no subespaço de dimensão p

$$\underset{\sim}{K}_{k+1} \underset{\sim}{Q}_{k+1} = \underset{\sim}{M}_{k+1} \underset{\sim}{Q}_{k+1} \underset{\sim}{\Lambda}_{k+1}$$
- . obtenção dos novos vetores de iteração

$$\underset{\sim}{Y}_{k+1} = \underset{\sim}{Y}_{k+1} \underset{\sim}{Q}_{k+1}$$
- . verificação da convergência
- fim da iteração

Pode-se verificar, com auxílio do teste da seqüência de Sturm, se os autovalores desejados foram obtidos ou se houve omissão de algum (15).

II.3 - MÉTODO DE LANCZOS-RITZ

O objetivo deste método é gerar uma base formada por vetores de Ritz obtidos a partir de um procedimento baseado no algoritmo de Lanczos (11, 13).

O algoritmo constrói, a partir de um vetor inicial \tilde{X} , uma base ortogonal com auxílio da seqüência de Krylov.

São gerados portanto os vetores

$$\tilde{X}, \tilde{K}^{-1} \tilde{M} \tilde{X}, (\tilde{K}^{-1} \tilde{M})^2 \tilde{X}, \dots, (\tilde{K}^{-1} \tilde{M})^{n-1} \tilde{X}$$

impondo-se a condição de ortonormalidade em relação à matriz de massa \tilde{M} .

Tem-se então o seguinte algoritmo:

- $\tilde{q}_0 = 0$
- $\tilde{r}_0 = \tilde{K}^{-1} \tilde{P}$
- $\beta_1 = \sqrt{\tilde{r}_0^T \tilde{M} \tilde{r}_0}$

Para cada um dos n vetores, faz-se

- $\tilde{q}_j = \tilde{r}_{j-1} / \beta_j$
- $\tilde{r}_j = \tilde{K}^{-1} \tilde{M} \tilde{q}_j$
- $\tilde{r}_j = \tilde{r}_j - \tilde{q}_j \beta_j$

$$\alpha_j = \tilde{r}_j^T M \tilde{q}_j$$

$$\tilde{r}_j = \tilde{r}_j - \alpha_j \tilde{q}_j$$

$$\beta_{j+1} = // \tilde{r}_j^T M \tilde{r}_j //$$

fim do laço.

A fim de que os vetores de base sejam também ortogonais a K , projeta-se K no subespaço dos vetores \tilde{q} .

. cálculo da projeção da matriz de rigidez no subespaço gerado

$$\bar{K} \tilde{Y} = \tilde{Y} \tilde{\Lambda}_m, \text{ sendo } \bar{K} = \tilde{Q}^T K \tilde{Q}$$

. obtenção da matriz de transformação

$$\tilde{\Phi} = \tilde{Q} \tilde{Y}$$

A matriz $\tilde{\Lambda}_m$ obtida contém aproximações dos quadrados das frequências naturais e as colunas da matriz $\tilde{\Phi}$ são aproximações de Rayleigh-Ritz dos modos de vibração da estrutura não ortogonais a X .

O vetor de partida é obtido pela solução estática do problema, incorporando-se desta forma a contribuição dos modos mais altos, que é fundamentalmente estática.

Observa-se que este método exige um esforço computacional bastante menor do que a iteração por subespaços.

A matriz de transformação de coordenadas é formada por vetores ortogonais entre si. Com o aumento do número de vetores requeridos para a base de transformação, pode haver perda de ortogonalidade, devido a erros de arredondamento. Pode ser feita a cada passo, a completa reortogonalização dos vetores (11) porém, atualmente alternativas como a ortogonalização seletiva (13) e reortogonalização parcial (22) tornam-se mais atrativas.

No presente trabalho foi utilizada apenas a ortogonalização de Gram-Schmidt, em relação aos dois vetores anteriormente gerados, o que fornece bons resultados para a obtenção de poucos vetores para a matriz de transformação.

A reortogonalização parcial (22) tem como objetivo evitar a ortogonalização total dos vetores a cada passo, avaliando a perda de ortogonalidade através de uma fórmula de recorrência.

Definindo

$$w_{i,j} = \tilde{q}_i^T M \tilde{q}_j \quad (2.11)$$

E reescrevendo r_j a partir do algoritmo de Lanczos chega-se a

$$r_j = \beta_{j+1} \tilde{q}_{j+1} = K^{-1} M \tilde{q}_j - \alpha_j \tilde{q}_j - \beta_j \tilde{q}_{j-1} \quad (2.12)$$

pré-multiplicando a equação acima por $\tilde{q}_i^T M$ obtém-se

$$\begin{aligned} \beta_{j+1} \tilde{q}_i^T M \tilde{q}_{j+1} &= \tilde{q}_i^T M K^{-1} M \tilde{q}_j - \alpha_j \tilde{q}_i^T M \tilde{q}_j \\ &- \beta_j \tilde{q}_i^T M \tilde{q}_{j-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Repetindo o procedimento para o i -ésimo passo

$$\beta_{i+1} \tilde{q}_j^T M \tilde{q}_{i+1} = \tilde{q}_i^T M K^{-1} M \tilde{q}_i - \alpha_i \tilde{q}_j^T M \tilde{q}_i - \beta_i \tilde{q}_j^T M \tilde{q}_{i-1} \quad (2.14)$$

Subtraindo (2.14) de (2.2.13), tem-se

$$\begin{aligned} \beta_{j+1} \omega_{j+1,i} &= \beta_{i+1} \omega_{j,i+1} + (\alpha_i - \alpha_j) \omega_{i,j} + \beta_i \omega_{j,i-1} - \\ &- \beta_j \omega_{i,j-1} \end{aligned}$$

onde

$$\omega_{j,j} = 1, \quad j = 1, 2 \dots$$

$$\omega_{j,j-1} = \epsilon, \quad j = 2, 3 \dots$$

ϵ = tolerância

Logo a perda de ortogonalidade entre os vetores pode ser detectada. Se o valor calculado para $\omega_{i,j}$ for maior que o valor limite ϵ , é feita então a reortogonalização através do procedimento de Gram-Schmidt.

A detecção da perda de ortogonalidade e conseqüentemente a garantia da ortogonalidade entre os vetores de base são fundamentais para a utilização do método de Lanczos no emprego da superposição modal em análise dinâmica.

O método de Lanczos é o primeiro a surgir que fornece uma base de transformação de coordenadas que prescinde da correção do erro que ocorre devido ao truncamento dos modos superiores. A existência desta base de transformação torna possível o desenvolvimento da técnica de super elementos em análise dinâmica.

CAPÍTULO III

SUBESTRUTURAÇÃO E CONDENSAÇÃO DE GRAUS DE LIBERDADE

III.1 - REDUÇÃO DE GUYAN

Apresentado há mais de vinte anos, e ainda hoje bastante utilizada, a redução de GUYAN (5) equivale à condensação estática do problema, uma vez que a matriz de transformação utilizada na condensação da matriz de massa é a mesma que foi utilizada para a condensação do problema estático.

Seja o seguinte sistema de equações

$$\begin{Bmatrix} P_{\sim s} \\ P_{\sim m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\sim ss} & K_{\sim sm} \\ K_{\sim ms} & K_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\sim s} \\ U_{\sim m} \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

sendo o índice s referente aos graus de liberdade dependentes e m , aos graus de liberdade independentes.

Eliminando-se os graus de liberdade dependentes obtém-se

$$P_{\sim m} - K_{\sim ms} K_{\sim ss}^{-1} P_{\sim s} = (K_{\sim mm} - K_{\sim ms} K_{\sim ss}^{-1} K_{\sim sm}) U_{\sim m} \quad (3.2)$$

que pode ser escrito como

$$P_{\sim m}^* = K_{\sim mm}^* U_{\sim m} \quad (3.3)$$

sendo

$$\tilde{P}_m^* = \tilde{P}_m - \tilde{K}_{ms} \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{P}_s$$

$$\tilde{K}_{mm}^* = \tilde{K}_{mm} - \tilde{K}_{ms} \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{K}_{sm}$$

Os deslocamentos dependentes \tilde{U}_s serão obtidos através da relação

$$\tilde{U}_s = - \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{K}_{sm} \tilde{U}_m + \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{P}_s \quad (3.4)$$

Pode-se definir a seguinte matriz de transformação

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -\tilde{K}_{ss}^{-1} & \tilde{K}_{sm} \\ & I \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

se $\tilde{P}_s = 0$, tem-se

$$\tilde{U}_m = \tilde{T} \tilde{U} = \begin{Bmatrix} \bar{\tilde{T}} \\ \tilde{I} \end{Bmatrix} \tilde{U} \quad (3.6)$$

onde $\bar{\tilde{T}} = - \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{K}_{sm}$.

As matrizes \tilde{K}_{mm}^* e \tilde{P}_m^* podem ser reescritas como

$$\tilde{K}_{mm}^* = \tilde{T}^T \tilde{K} \tilde{T} \quad (3.7)$$

$$\tilde{P}_m^* = \tilde{T}^T \tilde{P}$$

No caso da análise dinâmica, a mesma transformação é aplicada às matrizes da massa e amortecimento. No caso da matriz de massa \tilde{M} , tem-se

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M_{\tilde{SS}} & M_{\tilde{Sm}} \\ M_{\tilde{ms}} & M_{\tilde{mm}} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} M_{\tilde{mm}}^* &= T^T M T = M_{\tilde{mm}} - M_{\tilde{ms}} K_{\tilde{SS}}^{-1} K_{\tilde{Sm}} - K_{\tilde{Sm}} K_{\tilde{SS}}^{-1} M_{\tilde{Sm}} + \\ &+ K_{\tilde{ms}} K_{\tilde{SS}}^{-1} M_{\tilde{SS}} K_{\tilde{SS}}^{-1} K_{\tilde{Sm}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se for utilizada a matriz de massa discreta, para a qual $M_{\tilde{ms}} = M_{\tilde{sm}} = 0$, ter-se-á

$$M_{\tilde{mm}}^* = M_{\tilde{mm}} + K_{\tilde{ms}} K_{\tilde{SS}}^{-1} M_{\tilde{SS}} K_{\tilde{SS}}^{-1} K_{\tilde{Sm}}$$

Considerando o problema de autovalor

$$K_{\tilde{m}} X = \omega^2 M_{\tilde{m}} X, \quad (3.10)$$

O sistema fica descrito como

$$\begin{bmatrix} K_{\tilde{SS}} & K_{\tilde{Sm}} \\ K_{\tilde{ms}} & K_{\tilde{mm}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{\tilde{S}} \\ X_{\tilde{m}} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{\tilde{SS}} & M_{\tilde{Sm}} \\ M_{\tilde{ms}} & M_{\tilde{mm}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{\tilde{S}} \\ X_{\tilde{m}} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Substituindo o vetor $X_{\tilde{m}}$ pela relação definida em (3.5) e pré-multiplicando-se ambos os lados por T^T , obtém-se

$$T^T K_{\tilde{m}} T X_{\tilde{m}} = \omega^2 T^T M_{\tilde{m}} T X_{\tilde{m}}$$

$$K_{\tilde{mm}}^* X_{\tilde{m}} = \omega^2 M_{\tilde{mm}}^* X_{\tilde{m}} \quad (3.12)$$

A equação (3.12) exprime o problema de autovalor em termos dos graus de liberdade independentes.

Explicitando $X_{\sim S}$ no sistema (3.11), chega-se a

$$X_{\sim S} = - (-K_{\sim SS} + \omega^2 M_{\sim SS})^{-1} (-K_{\sim SM} + \omega^2 M_{\sim SM}) X_{\sim m} \quad (3.13)$$

onde se nota claramente as parcelas desprezadas na Redução de Guyan.

Para a obtenção da resposta dinâmica, deve ser adicionada à transformação (3.5), nos graus de liberdade dependentes, a resposta dinâmica da subestrutura separadamente. Logo, a equação (3.4) passa a ser

$$U_{\sim S} = - K_{\sim SS}^{-1} K_{\sim SM} U_{\sim m} + \psi_{\sim S} \eta_{\sim S} \quad (3.14)$$

sendo:

$\psi_{\sim S}$ = modos de vibração da subestrutura obtidos restringindo-se os nós de seu contorno

$\eta_{\sim S}$ = deslocamentos da subestrutura em coordenadas modais, devido ao carregamento $F_{\sim S}$

$U_{\sim m}$ = deslocamentos independentes, calculados com o vetor de carga $p_{\sim m}^*$

Pode-se escrever uma nova matriz de transformação para os deslocamentos, considerando-se a resposta dinâmica da subestrutura

$$\begin{array}{c} \sim \\ U \end{array} = \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} U \\ \sim S \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} U \\ \sim m \end{array} \right\} \end{array} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \psi & -K^{-1} \\ \sim S & \sim S S \quad K \\ & \sim S m \end{array} \right] \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \eta \\ \sim S \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{c} U \\ \sim m \end{array} \right\} \end{array} \right. \quad (3.15)$$

III.2 - SÍNTESE MODAL DE COMPONENTES

Neste método, os graus de liberdade da subestrutura são representados por seus modos de vibração, que são subdivididos em modos de vibração e modos de restrição (2, 7). Os primeiros são obtidos fixando-se os nós de contorno da subestrutura, ou seja, prescrevendo como nulos estes deslocamentos. Os últimos são resultado de deslocamentos unitários nos nós de contorno. Os modos de vibração são obtidos resolvendo-se o problema de autovalor para os graus de liberdade da subestrutura, considerando-se os nós de contorno como apoios.

Logo

$$\begin{pmatrix} K_{\sim ss} & -\Lambda_{\sim s} & M_{\sim ss} \end{pmatrix} \psi_{\sim s} = 0 \quad (3.16)$$

Pode-se demonstrar que os modos de restrição $\psi_{\sim sm}$ são expressos pela equação (7)

$$\psi_{\sim sm} = K_{\sim ss}^{-1} K_{\sim sm} \quad (3.17)$$

A matriz de transformação T_{\sim} , fica então definida

$$T = \begin{bmatrix} \psi_{\sim s} & -K_{\sim ss}^{-1} & K_{\sim sm} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

As matrizes de rigidez, amortecimento e massa podem ser obtidas através de relações semelhantes àsquelas utilizadas na redução de Guyan.

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} T^T & K & T \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} T^T & C & T \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

(3.19)

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} T^T & M & T \\ \sim & \sim & \sim \end{bmatrix}$$

Logo

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ \sim_s & \sim \\ 0 & K^* \\ \sim & \sim_{mm} \end{bmatrix}$$

(3.20)

$$K^*_{\sim mm} = K_{\sim mm} - K_{\sim ms} K_{\sim ss}^{-1} K_{\sim sm}$$

$\Lambda_{\sim s}$ = matriz diagonal contendo os quadrados das frequências naturais relativas a $\psi_{\sim s}$. Para a matriz de massa discreta.

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} I & A \\ \sim & \sim \\ A^T & M^* \\ \sim & \sim_{mm} \end{bmatrix}$$

(3.21)

$$A_{\sim} = - \psi_{\sim s}^T M_{\sim ss}^{-1} K_{\sim ss} K_{\sim sm}$$

$$M^*_{\sim mm} = M_{\sim mm} + K_{\sim ms} K_{\sim ss}^{-1} M_{\sim ss} K_{\sim ss}^{-1} K_{\sim sm}$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} B & D \\ \sim & \sim \\ D^T & E \\ \sim & \sim \end{bmatrix}$$

(3.22)

$$\tilde{B} = \begin{matrix} \psi^T \\ \tilde{s} \end{matrix} \begin{matrix} C \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} \psi \\ \tilde{s} \end{matrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{matrix} \psi^T \\ \tilde{s} \end{matrix} \left(\begin{matrix} C \\ \tilde{sm} \end{matrix} - \begin{matrix} C \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} K^{-1} \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} K \\ \tilde{sm} \end{matrix} \right)$$

$$\tilde{E} = \begin{matrix} C \\ \tilde{mm} \end{matrix} + \begin{matrix} K \\ \tilde{ms} \end{matrix} \begin{matrix} K^{-1} \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} C \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} K \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} K \\ \tilde{sm} \end{matrix} - \begin{matrix} C \\ \tilde{ms} \end{matrix} \begin{matrix} K^{-1} \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} K \\ \tilde{sm} \end{matrix} - \begin{matrix} K \\ \tilde{ms} \end{matrix} \begin{matrix} K^{-1} \\ \tilde{ss} \end{matrix} \begin{matrix} C \\ \tilde{sm} \end{matrix}$$

Ao se utilizar, entretanto, um método de transformação de coordenadas que utilize uma base de autovetores para desacoplar as equações, a matriz \tilde{C} não é montada explicitamente, mas são usadas percentagens do amortecimento crítico associadas aos vetores da matriz de transformação de coordenadas, de tal forma que

$$\begin{matrix} \phi^T \\ \tilde{i} \end{matrix} \begin{matrix} C \\ \tilde{i} \end{matrix} \begin{matrix} \phi \\ \tilde{i} \end{matrix} = 2 \omega_i \xi_j \delta_{ij} \quad (3.23)$$

Na prática, não são utilizados todos os modos de vibração da subestrutura, mas apenas os primeiros, o que já provê bons resultados para o cálculo dos modos de vibração e frequências naturais da estrutura global (15). Outro ponto de destaque é o fato de que, se não for usado nenhum modo de vibração para a representação da subestrutura, recai-se na redução de Guyan. Observa-se também que nesta transformação existe acoplamento de massa entre os graus de liberdade dependentes e independentes.

III.3 - SUBESTRUTURAÇÃO UTILIZANDO VETORES DE LANCZOS-RITZ

Para a análise de modelos completos, foi visto que os autovetores nem sempre são a melhor base para a transformação do sistema de equações para análise dinâmica (11, 12, 13). Assim sendo, a matriz de transformação de coordenadas definida em (3.18) vai conter em $\psi_{\sim s}$ os vetores de Lanczos-Ritz da subestrutura gerados a partir do vetor de carga $P_{\sim s}$ e não mais os primeiros modos de vibração da subestrutura (14).

Este procedimento é mais adequado quando se deseja obter a resposta da estrutura para uma excitação, já que os vetores de Lanczos-Ritz fornecem uma base seletiva com relação ao carregamento atuante, o que não ocorre com a base de autovetores. Entretanto ele pode não ser suficientemente confiável quando as forças de inércia aplicadas na subestrutura, através das acelerações dos nós de contorno, forem ortogonais aos vetores de Lanczos-Ritz gerados a partir das cargas externas atuantes na subestrutura. Assim sendo, faz-se necessária a correção da base da subestrutura, a fim de se levar em conta as forças de inércia que nela atuam.

A equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} M_{\sim ss} & M_{\sim sm} \\ M_{\sim ms} & M_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{\sim s} \\ \vdots \\ \ddot{U}_{\sim m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\sim ss} & C_{\sim sm} \\ C_{\sim ms} & C_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{\sim s} \\ \vdots \\ \dot{U}_{\sim m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\sim ss} & K_{\sim sm} \\ K_{\sim ms} & K_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\sim s} \\ \vdots \\ U_{\sim m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{\sim s} \\ \vdots \\ P_{\sim m} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

O vetor que contém os deslocamentos é expresso por

$$\begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U}_s \\ \underset{\sim}{U}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\psi}^0 & \overline{\underset{\sim}{T}} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{X}_1 \\ \underset{\sim}{U}_m \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

onde

$$\overline{\underset{\sim}{T}} = - \underset{\sim}{K}_{ss}^{-1} \underset{\sim}{K}_{sm}$$

$\underset{\sim}{\psi}^0$ = primeira aproximação para o conjunto de vetores de Lanczos-Ritz gerada a partir do vetor de carregamento $\underset{\sim}{P}_s$

O novo sistema de equações é obtido substituindo-se (3.25) em (3.24)

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{I} & \underset{\sim}{A} \\ \underset{\sim}{A}^T & \underset{\sim}{M}^*_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underset{\sim}{X}}_s \\ \ddot{\underset{\sim}{U}}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{B} & \underset{\sim}{E} \\ \underset{\sim}{E}^T & \underset{\sim}{C}^*_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underset{\sim}{X}}_s \\ \dot{\underset{\sim}{U}}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}^2 & \underset{\sim}{O} \\ \underset{\sim}{O} & \underset{\sim}{K}^*_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{X}_s \\ \underset{\sim}{U}_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{\psi}^T_{ss} \underset{\sim}{P}_s \\ \underset{\sim}{P}^*_{mm} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

onde

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{\psi}^T_{ss} \underset{\sim}{M}_{ss} \overline{\underset{\sim}{T}} + \underset{\sim}{\psi}^T_{ss} \underset{\sim}{M}_{sm} \quad (3.27)$$

$$\underset{\sim}{M}^*_{mm} = \underset{\sim}{M}_{mm} + \overline{\underset{\sim}{T}}^T \underset{\sim}{M}_{ss} \overline{\underset{\sim}{T}} + \overline{\underset{\sim}{T}}^T \underset{\sim}{M}_{sm} + \underset{\sim}{M}_{ms} \overline{\underset{\sim}{T}} \quad (3.28)$$

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\psi}^T_{ss} \underset{\sim}{C}_{ss} \underset{\sim}{\psi}_s \quad (3.29)$$

$$\underset{\sim}{E} = \underset{\sim}{\psi}^T_{ss} \underset{\sim}{C}_{ss} \overline{\underset{\sim}{T}} + \underset{\sim}{\psi}^T_{ss} \underset{\sim}{C}_{sm} \quad (3.30)$$

$$\underset{\sim}{C}^*_{mm} = \underset{\sim}{C}_{mm} + \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{C}_{SS} \underset{\sim}{T} + \underset{\sim}{T}^T \underset{\sim}{C}_{Sm} + \underset{\sim}{C}_{ms} \underset{\sim}{T} \quad (3.31)$$

$$\underset{\sim}{A}^2 = \underset{\sim}{\psi}_S^T \underset{\sim}{K}_{SS} \underset{\sim}{\psi}_S \quad (3.32)$$

$$\underset{\sim}{K}^*_{mm} = \underset{\sim}{K}_{mm} + \underset{\sim}{K}_{ms} \underset{\sim}{T} \quad (3.33)$$

Resolvendo-se o sistema (3.26), obtêm-se os deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós de contorno da subestrutura. De posse do vetor de acelerações $\ddot{\underset{\sim}{U}}_m$, pode-se avaliar as forças de inércia $\underset{\sim}{F}_i$ atuantes na subestrutura. É gerado, então, um novo conjunto de vetores de Lanczos-Ritz $\underset{\sim}{\psi}_S^1$ para a subestrutura, a partir do vetor de carregamento $\underset{\sim}{P}_S$ somado ao vetor $\underset{\sim}{F}_i$ de forças de inércia. É obtida, então, uma nova solução para o sistema (3.26) caracterizando o processo iterativo.

Na prática, a solução do sistema é geralmente refeita apenas uma vez, pois a primeira avaliação das forças de inércia já provê resultados bastante bons. Deve-se ressaltar, também, que apenas as submatrizes que dependem de $\underset{\sim}{\psi}_S$ no sistema (3.26) necessitam ser recalculadas. Essas submatrizes não possuem grande quantidade de elementos, visto que poucos vetores de Lanczos-Ritz podem representar bem o comportamento da subestrutura. Se for utilizada a matriz de massa discreta e amortecimento tal como definido em (3.23), o número de submatrizes a serem reavaliadas diminui e torna o procedimento mais eficiente.

Observa-se que as forças de inércia atuantes na subestrutura podem ser calculadas através de técnica semelhante àquela usada para movimentos de apoios.

A equação de equilíbrio neste caso pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} M_{\sim ss} & M_{\sim sm} \\ M_{\sim ms} & M_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_{\sim s} \\ \ddot{U}_{\sim m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{\sim ss} & C_{\sim sm} \\ C_{\sim ms} & C_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_{\sim s} \\ \dot{U}_{\sim m} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\sim ss} & K_{\sim sm} \\ K_{\sim ms} & K_{\sim mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{\sim s} \\ U_{\sim m} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.34)$$

O vetor de deslocamento $U_{\sim s}$ é formado por duas parcelas, $U_{\sim s}^s$ e $U_{\sim s}^d$, sendo a primeira causada pelos deslocamentos dos nós de contorno e a última devida às acelerações destes mesmos nós.

Como não existem forças aplicadas nos nós internos, pode-se escrever para a parcela $U_{\sim s}^s$.

$$K_{\sim ss} U_{\sim s}^s + K_{\sim sm} U_{\sim m} = 0 \quad (3.35)$$

Analogamente, se a matriz de amortecimento for proporcional à matriz de rigidez, ter-se-á

$$C_{\sim ss} \dot{U}_{\sim s}^s + C_{\sim sm} \dot{U}_{\sim m} = 0 \quad (3.36)$$

Desmembrando-se a parcela $U_{\sim s}$ e reescrevendo a primeira equação de (3.34)

$$\begin{aligned} M_{\sim ss} (\ddot{U}_{\sim s}^s + \ddot{U}_{\sim s}^d) + M_{\sim sm} \ddot{U}_{\sim m} + C_{\sim ss} (\dot{U}_{\sim s}^s + \dot{U}_{\sim s}^d) + C_{\sim sm} \dot{U}_{\sim m} + \\ + K_{\sim ss} (U_{\sim s}^s + U_{\sim s}^d) + K_{\sim sm} U_{\sim m} = 0 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Substituindo (3.35) e (3.36) em (3.37) resulta

$$\tilde{M}_{ss} (\ddot{\tilde{U}}_s^s + \ddot{\tilde{U}}_s^d) + \tilde{M}_{sm} \ddot{\tilde{U}}_m + \tilde{C}_{ss} \dot{\tilde{U}}_s^d + \tilde{K}_{ss} \tilde{U}_s^d = 0 \quad (3.38)$$

onde $\ddot{\tilde{U}}_m$ são as acelerações presentes nos nós de contorno e $\ddot{\tilde{U}}_s^s$ pode ser obtido através da relação (3.35) por derivação

$$\tilde{K}_{ss} \ddot{\tilde{U}}_s^s + \tilde{K}_{sm} \ddot{\tilde{U}}_m = 0$$

$$\ddot{\tilde{U}}_s^s = - \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{K}_{sm} \ddot{\tilde{U}}_m \quad (3.39)$$

Logo

$$\tilde{M}_{ss} \ddot{\tilde{U}}_s^d + \tilde{C}_{ss} \dot{\tilde{U}}_s^d + \tilde{K}_{ss} \tilde{U}_s^d = \tilde{M}_{ss}^{-1} \tilde{K}_{ss}^{-1} \tilde{K}_{sm} \ddot{\tilde{U}}_m - \tilde{M}_{sm} \ddot{\tilde{U}}_m \quad (3.40)$$

No caso de não existir carregamento na subestrutura, a base de transformação será gerada a partir das forças de inércia existentes sendo as acelerações dos nós de contorno avaliadas em primeira aproximação através da redução de Guyan.

III.4 - EXTENSÃO PARA CARGAS PERIÓDICAS

Para uma carga periódica qualquer, que possa ser decomposta em uma série harmônica, ou seja

$$\tilde{P}(t) = \sum_{j=1}^N \tilde{P}_j e^{i\omega_j t}$$

vão existir H vetores \tilde{P}_j de amplitudes do carregamento. Visto que a base formada pelos vetores de Lanczos-Ritz é formada a partir da distribuição espacial do carregamento, haverá tantas bases de transformação quantas forem as parcelas utilizadas para a representação da carga. Haverá também N resoluções do sistema (3.26) devendo-se ressaltar, porém, que apenas as submatrizes (3.27) a (3.30) e (3.32) deverão ser reavaliadas para cada harmônico, visto que elas dependem da matriz ψ_s que contem os vetores de Lanczos-Ritz. A resposta final será obtida somando-se os resultados obtidos para os diversos harmônicos.

No caso de se ter carregamento qualquer, este pode ser representado através da integral de Fourier, e a solução do problema pode ser obtida dentro da mesma filosofia descrita anteriormente.

CAPÍTULO IV

EXEMPLOS E APLICAÇÕES

IV.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são analisados cinco exemplos, quatro pórticos planos e um pórtico tridimensional, este último representando uma plataforma fixa para prospecção e produção de petróleo no mar. Foram comparados os resultados da análise de cada estrutura completa, e com subestruturação utilizando-se a redução de Guyan, o método proposto por WILSON (14) e com o método proposto neste trabalho.

IV.2 - PÓRTICO EM "L" INVERTIDO

O pórtico plano da Figura (IV.1) possui 9 nós e 8 barras. Foram condensados os nós da barra horizontal e foi aplicada uma carga horizontal no nó 1.

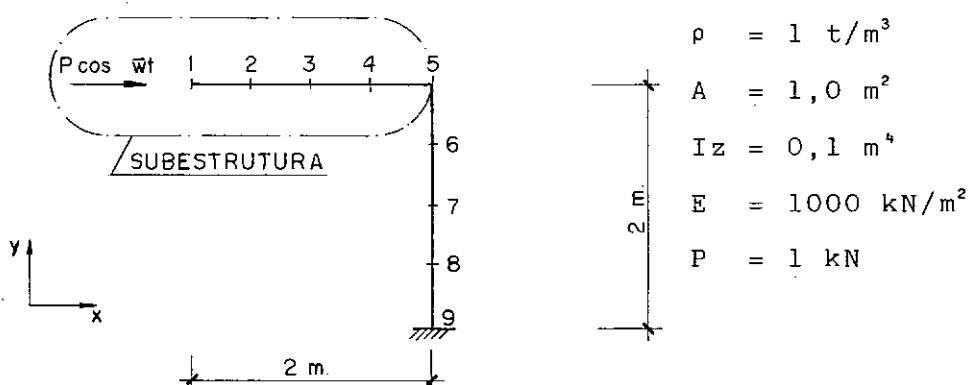


Fig. IV-1 (Exemplo de pórtico em "L")

Foi aplicada inicialmente carga com frequência de excitação $\omega = 0,7 \text{ rd/s}$, o que corresponde a aproximadamente $1/4$ da primeira frequência natural que vale $2,870 \text{ rd/s}$. Foram utilizados

4 vetores de Lanczos-Ritz para a transformação de coordenadas.

Apresentam-se, a seguir os resultados para deslocamentos e esforços mais significativos

NÓ	DIREÇÃO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
1	X	0,0302	0,0302	0,0302	0,0302
1	Y	0,0429	0,0426	0,0426	0,0429
1	RZ	- 0,0215	- 0,0213	- 0,0213	- 0,0215
5	RZ	- 0,0213	- 0,0213	- 0,0213	- 0,0213

TABELA IV.1 - Deslocamentos para $\bar{\omega} = 0,7$ rd/s
Unidades: m, rd

BARRA	ESFORÇOS	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
1 (nó 1)	Normal	1,0	1,0	1,0	1,0
1 (nó 1)	Cortante	0,00526	0	0	0,00526
4 (nó 5)	Momento	0,0289	0	0	0,0289

TABELA IV.2 - Esforços para $\bar{\omega} = 0,7$ rd/s
Unidades: kN, mkN

No caso dos deslocamentos, os erros não são significativos, ocorrendo apenas no caso de deslocamento vertical do nó 1 (- 0,60%). Os esforços nas barras, porém, não são bem representados devido ao fato de que os vetores de Lanczos-Ritz da subestrutura são gerados por uma carga axial e, portanto, só representam vibrações axiais da barra horizontal.

Foi aplicada em seguida, a carga com frequência de excitação $\bar{\omega} = 2,2$ rd/s e obteve-se os seguintes resultados

NÓ	DIREÇÃO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
1	X	0,0633	0,0598	0,0611	0,0633
1	Y	0,107	0,0935	0,0947	0,107
1	RZ	-0,0543	-0,0463	-0,0469	-0,0543
5	RZ	-0,0489	-0,0463	-0,0469	-0,0489

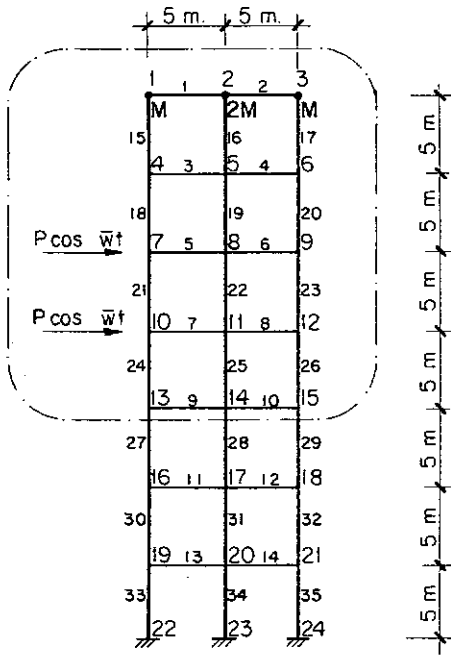
TABELA IV.3 - Deslocamentos para $\bar{\omega} = 2,2$ rd/s
Unidades: m, rd

BARRA	ESFORÇO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
1-2 nó 1	Normal	1,08	1,0	1,07	1,08
1-2 nó 1	Cortante	0,129	0	0	0,130
4-5 nó 5	Momento	0,706	0	0	0,705

TABELA IV.4 - Esforços para $\bar{\omega} = 2,2$ rd/s
Unidades: kN, mkN

Nota-se que, pelo fato de a estrutura estar sendo excitada com freqüência mais próxima da ressonância, o efeito dinâmico torna-se preponderante. Conseqüentemente, os erros nos esforços e deslocamentos tornam-se mais significativos. Percebe-se mais claramente que, nos métodos onde não há a consideração das forças de inércia para geração dos vetores de base, as rotações na barra horizontal são constantes, o que caracteriza um movimento de corpo rígido em torno do nó 5.

IV.3 - PÓRTICO PLANO COM VÁRIOS ANDARES



$$M = 100.0 \text{ t}$$

$$P = 100 \text{ kN}$$

$$\bar{\omega} = 6.28 \text{ rd/s}$$

$$E = 1.000.000 \text{ kN/m}^2$$

$$A = 1,0 \text{ m}^2$$

$$I_z = 0,1 \text{ m}^4$$

$$\rho = 10,0 \text{ t/m}^3$$

$$\omega_1 = 1,070 \text{ rd/s}$$

Fig. IV-2 (Pórtico Plano)

O pórtico plano da Figura (IV.2) foi analisado com 8 vetores de Lanczos-Ritz. Foram consideradas três frequências de excitação: a primeira de aproximadamente $1/3$ da primeira frequência natural ω_1 , a segunda da mesma ordem de grandeza de ω_1 , e a terceira de aproximadamente seis vezes ω_1 .

Apresentam-se a seguir os resultados para $\bar{\omega} = 0,3 \text{ rd/s}$, $\bar{\omega} = 1,0 \text{ rd/s}$ e $\bar{\omega} = 6,28 \text{ rd/s}$ nos nós e barras mais significativos.

DESLOCAMENTO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
nó 1 dir X	0,111	$0,973 \times 10^{-3}$	0,111	0,111
nó 10 dir X	0,0814	$0,709 \times 10^{-3}$	0,0814	0,0814
nó 16 dir X	0,0353	$0,324 \times 10^{-3}$	0,0353	0,0353

TABELA IV.5 - Deslocamentos para $\bar{\omega} = 0,3$ rd/s
Unidades: m

ESFORÇOS NORMAIS	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
Barra 1	- 0,420	0,0391	- 0,387	- 0,419
Barra 7	70,5	0,904	70,3	70,5
Barra 12	- 6,68	- 0,0432	- 6,67	- 6,68
Barra 16	0,315	- 0,115	0,516	0,312
Barra 21	- 39,7	- 0,0935	- 39,7	- 39,7
Barra 35	420.0	3,53	421.0	420.0

TABELA IV.6 - Esforços para $\bar{\omega} = 0,3$ rd/s
Unidades: kN, mkN

DESLOCAMENTO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
nó 1 dir X	0,859	0,00168	0,860	0,859
nó 10 dir X	0,519	0,00114	0,519	0,519
nó 16 dir X	0,225	$0,552 \times 10^{-3}$	0,226	0,225

TABELA IV.7 - Deslocamentos para $\bar{\omega} = 1,0$ rd/s
Unidades: m

ESFORÇOS NORMAIS	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
Barra 1	- 2,68	0,0604	0,0714	- 2,59
Barra 7	72,9	1,02	55,8	74,0
Barra 13	-41,5	-0,105	-41,1	- 41,6
Barra 16	0,595	-0,178	17,4	0,406
Barra 21	-853	0,623	-852	-852
Barra 35	3220	6,51	3260	3210

TABELA IV.8 - Esforços para $\bar{\omega} = 1,0$ rd/s
Unidades: kN, mkN

DESLOCAMENTO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
nó 1 dir X	-0,00603	0,000341	-0,00595	-0,00603
nó 10 dir X	0,00244	-0,000464	0,00213	0,00244
nó 16 dir X	-0,0209	-0,000461	-0,0209	-0,0209

TABELA IV.9 - Deslocamento para $\bar{\omega} = 6,28$ rd/s
Unidades: m

ESFORÇOS NORMAIS	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
Barra 1	1,75	- 0,0372	2,46	1,71
Barra 7	71,0	0,171	72,7	70,7
Barra 13	4,35	0,129	4,27	4,37
Barra 16	0,191	- 0,124	6,24	- 0,254
Barra 21	87,2	- 2,34	94,2	86,5
Barra 35	-20,1	11,9	-26,6	-20,3

TABELA IV.10 - Esforços para $\bar{\omega} = 6,28$ rd/s
Unidades: kN, mkN

Neste exemplo, devido à existência de massas concentradas no topo da estrutura, não se conseguiu bons resultados para a redução de Guyan em nenhum caso de frequência de excitação, nem mesmo para as frequências mais baixas. O método de Wilson fornece deslocamentos com erros bastantes baixos (- 5,07%) porém, para

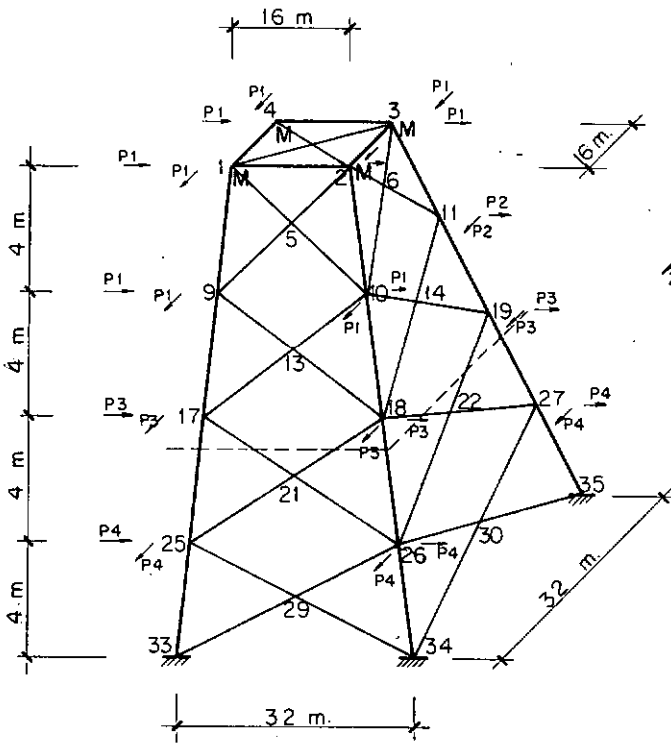
os esforços estes erros podem chegar a - 97,34%, no caso da frequência ressonante.

Utilizando-se então o método proposto neste trabalho, chega-se a erros desprezíveis nos deslocamentos e bastante pequenos nos esforços (- 3,36%).

É de se ressaltar que, no caso de excitação de alta frequência, o método de superposição modal geralmente não fornece bons resultados. Porém, com número adequado de vetores de Lanczos-Ritz e a correção da base de transformação da subestrutura a fim de se levar em consideração as forças de inércia, chega-se a resultados bastante confiáveis.

Ao se utilizar a correção da base da subestrutura, utilizou-se apenas 6 vetores de Lanczos-Ritz, que exauriram a base, ao invés dos 8 utilizados para os outros métodos.

IV.4 - EXEMPLO DE PLATAFORMA TRIDIMENSIONAL



$$\begin{aligned}
 P_1 &= 60 \cos \bar{\omega} t \text{ tf} \\
 P_2 &= 30 \cos \bar{\omega} t \text{ tf} \\
 P_3 &= 16 \cos \bar{\omega} t \text{ tf} \\
 P_4 &= 10 \cos \bar{\omega} t \text{ tf} \\
 E &= 21088000 \text{ tf/m}^2 \\
 G &= 8085000 \text{ tf/m}^2 \\
 \rho &= 0,98763 \text{ t/m}^3 \\
 M &= 980 \text{ t}
 \end{aligned}$$

Fig. IV-3 (Exemplo de Plataforma Tridimensional)

O terceiro exemplo mostra uma plataforma fixa simplificada com cargas nas duas direções horizontais, X e Z. A primeira frequência da excitação da estrutura vale 0,3774 rd/s. Foram utilizados seis vetores de Lanczos-Ritz para a formação da matriz de transformação de coordenadas.

Foram obtidos os seguintes resultados para a excitação de baixa frequência.

NÓ	DIREÇÃO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO GUYAN	MÉTODO WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
1	DIR X	0,706	0,681	0,706	0,706
	DIR Y	$-0,101 \times 10^{-3}$	$-0,101 \times 10^{-3}$	$-0,101 \times 10^{-3}$	$-0,101 \times 10^{-3}$
	DIR Z	0,706	0,681	0,706	0,706
	ROT X	$0,588 \times 10^{-2}$	$0,562 \times 10^{-2}$	$0,588 \times 10^{-2}$	$0,588 \times 10^{-2}$
	ROT Y	$0,379 \times 10^{-3}$	$0,399 \times 10^{-3}$	$0,379 \times 10^{-3}$	$0,379 \times 10^{-3}$
	ROT Z	$-0,588 \times 10^{-2}$	$-0,562 \times 10^{-2}$	$-0,588 \times 10^{-2}$	$-0,588 \times 10^{-2}$
17	DIR X	0,266	0,220	0,226	0,226
	DIR Y	$0,271 \times 10^{-4}$	$0,271 \times 10^{-4}$	$0,270 \times 10^{-4}$	$0,271 \times 10^{-4}$
	DIR Z	0,266	0,220	0,226	0,226
	ROT X	$0,528 \times 10^{-2}$	$0,511 \times 10^{-2}$	$0,528 \times 10^{-2}$	$0,528 \times 10^{-2}$
	ROT Y	$-0,183 \times 10^{-2}$	$-0,174 \times 10^{-2}$	$-0,183 \times 10^{-2}$	$-0,183 \times 10^{-2}$
	ROT Z	$-0,528 \times 10^{-2}$	$0,512 \times 10^{-2}$	$-0,528 \times 10^{-2}$	$-0,528 \times 10^{-2}$
25	DIR X	0,0417	0,0408	0,0417	0,0417
	DIR Y	$0,977 \times 10^{-5}$	$0,979 \times 10^{-5}$	$0,977 \times 10^{-5}$	$0,977 \times 10^{-5}$
	DIR Z	0,0417	0,0408	0,0417	0,0417
	ROT X	$0,261 \times 10^{-2}$	$0,253 \times 10^{-2}$	$0,261 \times 10^{-2}$	$0,261 \times 10^{-2}$
	ROT Y	$-0,355 \times 10^{-2}$	$-0,341 \times 10^{-2}$	$-0,355 \times 10^{-2}$	$-0,355 \times 10^{-2}$
	ROT Z	$-0,261 \times 10^{-2}$	$-0,253 \times 10^{-2}$	$-0,261 \times 10^{-2}$	$-0,261 \times 10^{-2}$

TABELA IV.11 - Deslocamentos para $\bar{\omega} = 0,1$ rd/s
Unidades: m, rd

BARRA/NÓ	ESFORÇO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
6 nó 10 (perna)	FX	771	736	771	771
	FY	0,366	0,361	0,366	0,366
	FZ	0,0150	0,0150	0,0150	0,0151
	MX	-0,309	-0,307	-0,309	-0,309
	MY	-0,0380	-0,0366	-0,0379	-0,0380
	MZ	2,13	2,32	2,13	2,13
17 nó 1 Barra Horizontal	FX	-0,706	-0,736	-0,712	-0,706
	FY	-0,300	-0,283	-0,300	-0,300
	FZ	0,0725	0,0691	0,0725	0,0725
	MX	0,181	0,172	0,181	0,181
	MY	-0,737	-0,701	-0,737	-0,737
	MZ	-2,60	-2,45	-2,60	-2,60
71 (nó 19) Contraven- tamento	FX	135	132	135	135
	FY	0,106	0,101	0,106	0,106
	FZ	-0,0423	-0,0404	-0,0423	-0,0423
	MX	0,265	0,255	0,265	0,265
	MY	0,329	0,316	0,329	0,329
	MZ	0,810	0,765	0,810	0,810

TABELA IV.12 - Esforços para $\bar{\omega} = 0,1 \text{ rd/s}$
Unidades: tf, mtf

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos com frequência de excitação próxima da ressonância.

NÓ	DIREÇÃO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE MÉTODO	COM CORREÇÃO DA BASE
1	DIR X	1,77	0,963	1,77	1,77
	DIR Y	-0,101 x10 ⁻³	0,101 x10 ⁻³	-0,106 x10 ⁻³	-0,102 x10 ⁻³
	DIR Z	1,77	0,963	1,77	1,77
	ROT X	0,0168	0,858 x10 ⁻²	0,0168	0,0168
	ROT Y	-0,614 x10 ⁻³	0,168 x10 ⁻³	0,613 x10 ⁻³	-0,614 x10 ⁻³
	ROT Z	-0,0168	-0,858 x10 ⁻²	-0,0618	-0,0618
17	DIR X	0,505	0,286	0,505	0,505
	DIR Y	0,268 x10 ⁻⁴	0,270 x10 ⁻⁴	0,255 x10 ⁻⁴	0,268 x10 ⁻⁴
	DIR Z	0,505	0,286	0,505	0,505
	ROT X	0,0121	0,688 x10 ⁻²	0,0121	0,0121
	ROT Y	-0,566 x10 ⁻²	-0,280 x10 ⁻²	-0,566 x10 ⁻²	-0,566 x10 ⁻²
	ROT Z	-0,0121	-0,688 x10 ⁻²	-0,0121	-0,0121
25	DIR X	0,0775	0,0493	0,0775	0,0775
	DIR Y	0,962 x10 ⁻⁵	0,979 x10 ⁻⁵	0,959 x10 ⁻⁵	0,961 x10 ⁻⁵
	DIR Z	0,0775	0,0493	0,0775	0,0775
	ROT X	0,580 x10 ⁻²	0,329 x10 ⁻²	0,580 x10 ⁻²	0,580 x10 ⁻²
	ROT Y	-0,917 x10 ⁻²	-0,475 x10 ⁻²	-0,917 x10 ⁻²	-0,917 x10 ⁻²
	ROT Z	-0,580 x10 ⁻²	-0,329 x10 ⁻²	-0,580 x10 ⁻²	-0,580 x10 ⁻²

TABELA IV.13 - Deslocamentos para $\bar{\omega} = 0,3$ rd/s
Unidades: m, rd

BARRA/NÓ	ESFORÇO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	MÉTODO DE WILSON	COM CORREÇÃO DA BASE
6 nó 10	FX	2260	1160	2260	2260
	FY	0,538	0,371	0,538	0,538
	FZ	0,0157	0,0152	0,0157	0,0157
	MX	-0,366	-0,341	-0,367	-0,366
	MY	-0,0676	-0,0528	-0,0671	-0,0676
	MZ	-6,86	-0,849	-6,87	-6,86
17 nó 1	FX	-0,111	-1,12	-0,225	-0,111
	FY	-1,05	-0,496	-1,05	-1,05
	FZ	0,215	0,108	0,215	0,215
	MX	0,548	0,265	0,548	0,548
	MY	-2,25	-1,11	-2,25	-2,25
	MZ	-9,05	-4,27	-9,05	-9,05
71 nó 19	FX	286	174	286	286
	FY	0,353	0,193	0,354	0,353
	FZ	-0,0962	-0,0246	-0,0962	-0,0962
	MX	0,723	0,389	0,723	0,723
	MY	0,687	0,173	0,687	0,687
	MZ	2,92	1,54	2,92	2,92

TABELA IV.14 - Esforços para $\bar{\omega} = 0,3$ rd/s
 Unidades: tf, mtf

Nota-se que, tendo sido a redução de Guyan desenvolvida para a análise estática, os erros percentuais nos esforços são menores para a situação de baixa frequência (- 5,77%) do que a situação perto da ressonância (909,01%). O método de Wilson forneceu resultados aceitáveis para os esforços, excetuando-se o esforço normal, onde o erro foi de 102,70%. Finalmente, com a correção da base de transformação de subestrutura, obteve-se resultados corretos.

IV.5 - PÓRTICO PLANO

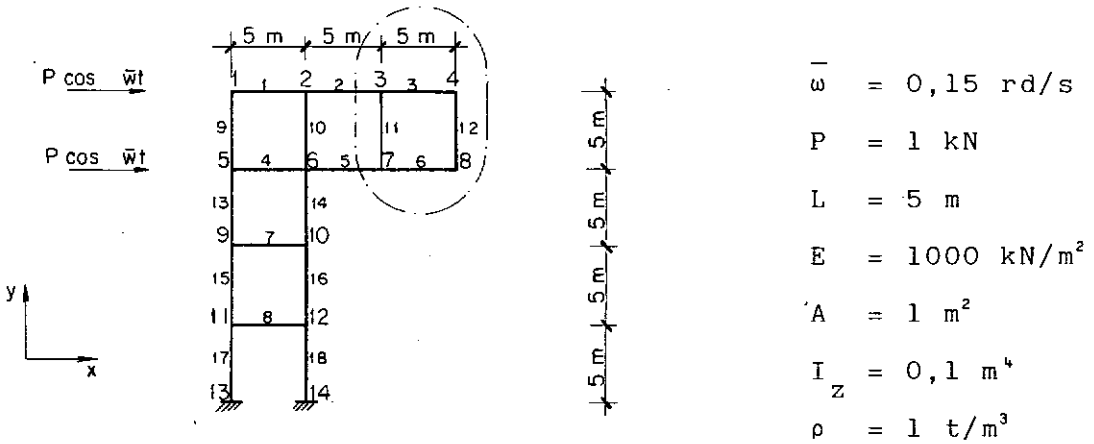


Fig. IV-4 (Pórtico Plano sem carga na subestrutura)

O exemplo acima possui cargas horizontais nos graus de liberdade independentes. Foram utilizados quatro vetores de Lanczos-Ritz para a transformação de coordenadas. Foi utilizada apenas uma frequência de excitação, aproximadamente igual à primeira frequência da estrutura.

Foram obtidos os seguintes resultados para os nós e barras mais significativos:

DESLOCAMENTO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	COM CORREÇÃO DA BASE
nó 1 DIR X	6,24	6,08	6,24
nó 1 DIR Y	0,318	0,309	0,318
nó 1 ROT X	- 0,199	- 0,192	- 0,199
nó 8 DIR X	4,74	4,63	4,74
nó 8 DIR Y	- 3,45	- 3,08	- 3,45
nó 8 ROT Z	- 0,315	- 0,291	- 0,315

TABELA IV.15 - Deslocamentos
 Unidades: m, rd

BARRA/NÓ		ESFORÇOS	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	COM CORREÇÃO DA BASE
1	1	FX	- 1,46	- 1,33	- 1,46
		FY	- 4,01	- 3,85	- 4,01
		MZ	- 9,33	- 8,95	- 9,33
5	7	FX	0,362	0,322	0,297
		FY	- 0,413	0,282	- 0,415
		MZ	0,230	- 1,07	0,228
17	11	FX	28,4	27,7	28,4
		FY	- 5,04	- 4,93	- 5,04
		MX	7,92	7,78	7,92

TABELA IV.16 - Esforços atuantes
Unidades: m, kN

Com exceção do esforço normal na barra 5, houve melhora nos demais resultados com a utilização da correção da base da subestrutura. Como não há cargas na subestruturas, não foram gerados vetores de base, forçando o método de Wilson resultados idênticos à redução de Guyan.

IV.6 - PÓRTICO EM "L" INVERTIDO SEM CARGA NA SUBESTRUTURA

Foi estudado o mesmo pórtico do item IV.2 com a carga aplicada em nó fora da subestrutura

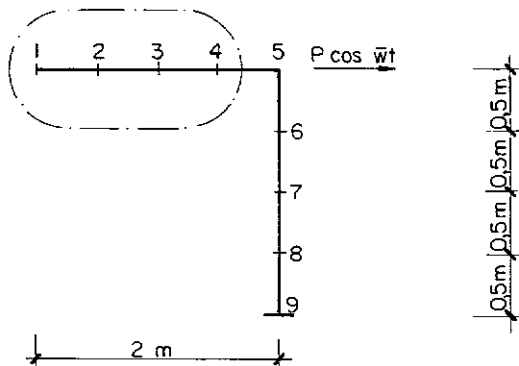


Fig. IV-5 (Pórtico em "L" sem carga na subestrutura)

Foram utilizados quatro vetores de Lanczos-Ritz para base de transformação de coordenadas. A frequência de excitação aplicada foi $\bar{\omega} = 2,2$ rd/s.

Foram obtidos os seguintes resultados para esforços e deslocamentos:

NÓ	DIREÇÃO	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	COM CORREÇÃO DA BASE
1	X	0,0607	0,578	0,0607
1	Y	0,106	0,0935	0,106
1	RZ	-0,0538	-0,0463	-0,0538
5	RZ	-0,0484	-0,0463	-0,0484

TABELA IV.17 - Deslocamentos
Unidades: m, rd

BARRA/NÓ	ESFORÇOS	MODELO COMPLETO	REDUÇÃO DE GUYAN	COM CORREÇÃO DA BASE
1 nó 1	Normal	0,0734	0,0	0,0733
1 nó 1	Cortante	0,128	$-0,533 \times 10^{-14}$	0,128
4 nó 5	Momento	0,699	$0,178 \times 10^{14}$	0,699

TABELA IV.18 - Esforços
Unidades: kN, mkN

Neste caso, as conclusões são semelhantes às do exemplo IV.2. A utilização de uma base de transformação de coordenadas da subestrutura que leva em conta as forças de inércia nela atuantes não obriga à utilização do método de Wilson. No caso, na ausência do carregamento na subestrutura, foram utilizadas apenas as forças de inércia para geração da base da subestrutura.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Apresentam-se aqui as conclusões baseadas nos resultados do capítulo anterior.

A análise através da redução de Guyan fornece bons resultados para baixas frequências de excitação, quando o fator de amplificação dinâmica é baixo, isto é, a resposta é predominantemente estática. Para valores mais altos de frequência de excitação, os resultados não são confiáveis.

Devido ao fato de este processo ter sido desenvolvido para a análise estática, a imprecisão na condensação da matriz de massa torna-se mais evidente quando há massas concentradas na subestrutura, implicando em perda de confiabilidade nos resultados mesmo para baixas frequências de excitação.

O método de Wilson fornece bons resultados para frequências de excitação mais altas, em torno da frequência de ressonância, onde as forças de inércia que surgem na subestrutura não são significativas.

Para frequência de excitação mais altas, da ordem de 10 vezes a primeira frequência natural, ou para casos em que os vetores de Lanczos-Ritz gerados a partir do carregamento da subestrutura sejam ortogonais aos vetores de Lanczos-Ritz da estrutura condensada, faz-se necessário gerar outra base de vetores para a subestrutura, a fim de levar em conta as forças de inércia nela atuantes. A utilização deste procedimento fornece resultados confiáveis nos casos citados, visto que leva em conta a distribuição

espacial das cargas externas e cargas de inércia na subestrutura.

A obtenção de um procedimento confiável para efetuar a condensação de graus de liberdade na análise dinâmica permite a utilização efetiva da subestruturação em projetos de estruturas submetidas a cargas variáveis no tempo, viabilizando a condensação de partes na estrutura para análise posterior e permitindo a utilização da mesma sistemática de projeto usualmente empregada na análise estática.

A utilização desta técnica permitirá o acesso a uma vasta gama de aplicações que anteriormente ficaram restritas à análise estática, tais como:

- . Redução do número de graus de liberdade da estrutura para a execução de análises repetitivas, como por exemplo, o cálculo da fadiga e vida útil.
- . Geração de superelementos em vários níveis, permitindo aumento considerável na capacidade de análise.
- . Análise de estruturas com não linearidades localizadas, através da condensação das regiões de comportamento linear.
- . Geração automática de superelementos com vistas a aplicações de técnicas de processamento paralelo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) HURTY, W. C. - Vibration of Structural Systems by Component Mode Synthesis - **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, Vol. 86, pp. 51-69, (1960).
- (2) HURTY, W. C. - Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Mode Synthesis - **AIAA Journal**, Vol. 3, pp. 678-685, (1965).
- (3) GLADWELL, G. M. L. - Branch Mode Analysis of Vibration Systems - **Journal of Sound and Vibration**, Vol. 1, pp. 41-59, (1964).
- (4) BENFIELD, W. A. e HRUDA, R. F. - Vibration Analysis of Structures by Component Mode Substitution - **AIAA Journal**, Vol. 9, pp. 1255-1261, (1971).
- (5) GUYAN, R. J. - Reduction of Stiffness and Mass Matrices - **AIAA Journal**, Vol. 3, p. 380, (1965).
- (6) MACNEIL, R. - A Hybrid Method of Component Mode Synthesis - **Computers & Structures**, Vol. 1, pp. 581-601, (1971)
- (7) CRAIG, R. R. e BAMPION, M. C. C. - Coupling of Substructures for Dynamic Analysis - **AIAA Journal**, Vol. 6, pp. 1313-1319, (1968).
- (8) CRAIG, R. R. e CHANG, C. J. - Free Interface Methods of Substructure Coupling for Dynamic Analysis - **AIAA Journal**, Vol. 14, pp. 1633-1635, (1976).

- (9) LEUNG, A. Y. - An Accurate Method of Dynamic Condensation in Structural Analysis - **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 12, pp. 1705-1715, (1978).
- (10) PAZ, M. - Practical Reduction of Structural Eigen Problems - **Journal of Structural Engineering**, Vol. 109, pp. 2591-2599, (1983).
- (11) WILSON, E. L., YUAN, M. W. e DICKENS, J. M. - Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors - **Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, Vol. 10, pp. 813-821, (1982).
- (12) LIMA, E. C. P., LANDAU, L., EBECKEN, N. F. F. e ELLWANGER, G. B. - Nonlinear Dynamic Analysis of a Jacket-Type Platform by Ritz Mode Superposition Method - **OTC5030**, (1985).
- (13) COUTINHO, A. L. G. A., LANDAU, L., LIMA, E. C. P. e EBECKEN, N. F. F. - The Application of the Lanczos Mode Superposition Method in Dynamic Analysis of Offshore Structures - **Computers & Structures**, Vol. 25, pp. 615-625, (1987).
- (14) WILSON, E. L. e BAYO, E. P. - Use of Special Ritz Vectors in Dynamic Substructure Analysis - **Journal of Structural Engineering**, Vol. 112, pp. 1944-1954, (1988).
- (15) BATHE, K. J. - **Finite Element Procedures in Engineering Analysis** - Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1982).

- (16) MILLER, c. A. - Dynamic Reduction of Structural Models - **Journal of the Structural Division**, Vol. 106, pp. 2097-2108, (1980).
- (17) PAZ, M. - Dynamic Condensation - **AIAA Journal**, Vol. 22, pp. 724-727, (1983).
- (18) LEUNG, A. Y. - An Accurate Method of Dynamic Substructuring with Simplified Computation - **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 14, pp. 1241-1250, (1979).
- (19) TORRES, A. L. F. L. e LIMA, E. C. P. - A Contribuição dos Modos Superiores na Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas - **2º Simpósio Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão**, Salvador, Vol. 2, pp. 355-372, (1982).
- (20) LIMA, E. C. P., LORANE, DINA- **Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas** - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, (1979).
- (21) PAZ, M. - **Structural Dynamics - Theory and Computation**, Nova York, Van Nostrand, (1985).
- (22) SIMON, H. D. - The Lanczos Algorithm with Partial Reorthogonalization - **Mathematics of Computation**, Vol. 42, N. 165, pp. 115-142, (1984).
- (23) LIMA, E. C. P., COUTINHO, A. L. G. A., LANDAU, L. e EBECKEN, N. F. F. - A Utilização dos Vetores de Lanczos-Ritz para a Transformação de Coordenadas em Análise Dinâmica de Estruturas, **Revista Brasileira de Engenharia - Caderno de Engenharia Estrutural**, Vol. 3, pp. 49-69, (1985).

- (24) CYSNE, L. - **Determinação das Características Dinâmicas das Estruturas Através de Subestruturação e Redução de Graus de Liberdade** - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, (1986).