"CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE PARA SISTEMAS DISCRETOS NO TEMPO COM CONTROLES LIMITADOS PELO ESTADO"

ETZEL RITTER VON STOCKERT

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por :

Presidente

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

MARÇO DE 1973

À Christina

AGRADECIMENTOS

Desejamos expressar nossa gratidão a todos que de uma forma ou de outra, contribuiram para a realização deste trabalho.

Em especial, queremos agradecer :

- Aos professores Richard J. Leake e José Antonio Ortega, pela sua valiosa orientação acadêmica.

- Aos nossos pais, Egbert Leopold Fritz von Stockert e Elfride Marianne von Stockert, que tanto lutaram por nós.

- a Yeda Carvalho Dias, pela sua dedicação no trabalho datilográfico.

SUMÁRIO

Este trabalho é um estudo de sistemas de controle ótimo, discretos no tempo, nos quais o controle é restringido pelo estado do sistema.

Inicialmente é feito um desenvolvimento rigoroso de condições necessárias e suficientes que devem ser satisfeitas pela solução ótima, usando-se para isto métodos de programação dinâmica. Em seguida é apresentado o "princípio do máximo" discreto dado por Cannon, Cullum e Polak [6]. Exemplos são dados, mostrando que o "princípio do máximo" usual não é satisfeito para problemas com controles restringidos pelo estado. É formulada então uma "hipótese de inclusão" mostrando uma classe de problemas que satisfazem o "princípio do máximo" usual.

Por último o teorema de Fritz-John é aplicado para obter condições necessárias para problemas com restrições da forma $R(x,u) \leq 0$ e um "princípio do máximo modificado" é apresentado. É mostrado ainda que sistemas lineares positivos, frequentemente encontrados em economia, satisfazem o "princípio do máximo modificado". Vários exemplos resolvidos em detalhe ilustram o texto.

ABSTRACT

This work is a study of discrete optimal control problems in which the control is restricted by the state of the system.

Initially, a rigorous self contained development of necessary and sufficient conditions is given through dynamic programming. This is followed by a development of the discrete maximum principle, presented in the manner of Cannon, Cullum and Polak [6]. Examples are given to show that the maximum principle usually does not hold in the case of state constrained controls and an "inclusion hypotheses" is given, demonstrating a class of problems where the usual maximum principle is valid.

The Fritz John Theorem is then applied to obtain necessary conditions for problems with constraints of the form $R(x,u) \leq 0$ and a modified maximum principle is defined for this class. It is shown that linear positive systems of a type frequently encountered in economic systems satisfy the modified maximum principle. A number of detailed examples are given throughout the text.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O nosso trabalho visa a resumir alguns resultados importantes e a fazer algumas extensões da moderna teoria de otimização de sistemas no tempo discretos, particularmente no que se refere a condições necessárias e suficientes que devem ser satisfeitas pelos sistemas com controles restringidos pelo estado. Usamos para isto os formalismos de programação dinâmica, programação matemática e controle ótimo. A referência principal para programação dinâmica é o livro de Bellman [1] e para programação matemática e controle ótimo o livro de Canon, Cullum e Polak [6]. A teoria na última referência é paralela à de controle ótimo contínuo, diferindo em certos pontos. Existem algumas dificuldades em sistemas discretos que não temos em sistemas contínuos e, por isso, o "princípio do máximo discreto" está atrasado em relação ao "princípio do máximo contínuo" cerca de dez anos.

No capítulo I, temos uma apresentação de programação dinâmica devida a Leake [15], onde conseguimos condições necessárias e suficientes. Dois exemplos ilustram o desenvolvimento da teoria, este feito sob condições bastante gerais. É exigido apenas que o conjunto de estados X seja subconjunto de um grupo comutativo. Na realidade, no desenvolvimento original feito por Leake, o conjunto de estados X podia ser qualquer. No entanto, preferimos restringir um pouco as condições para melhor identificação com os próximos capítulos.

No capítulo II, apresentamos primeiramente o problema de controle ótimo com convexidade direcional e o teorema do "princípio do máximo" dado por Canon, Cullum e Polak [6], que dá condições necessárias para a solução ótima. É feita então uma conjectura e, a seguir, exemplos de problemas de controle ótimo com os controles restringidos pelo estado são apresentados, mostrando que este princípio do máximo não é satisfeito em geral, para problemas deste tipo. A partir disto, sugerimos condições necessárias para o problema de controle ótimo com convexidade direcional e onde os controles são restringidos pelo estado. Um exemplo ilustrativo é apresentado no final.

No capítulo III, apresentamos um problema de controle ótimo onde o conjunto de restrição dos controles é dado por uma relação da forma $R_i(x_i,u_i) \leq 0$. Sugerimos um "princípio do máximo" para este tipo de problema e mostramos condições em que ele é satisfeito.

Seguem-se algumas conclusões e o apêndice, onde são apresentadas definições e teoremas que, de uma forma ou outra, são utilizados no texto.

CAPÍTULO I

§ 1 - Apresentação

Neste capítulo temos uma apresentação de programação dinâmica. Estudamos o problema de controle ótimo por realimentação. Conseguimos condições necessárias e suficientes para a solução ótima. Os conjuntos: de estados, de controles, de movimento e o alvo podem ser totalmente arbitrários. Entretanto, ao trabalharmos com um sistema dinâmico discreto da forma $x_{i+1} - x_i = f_i\ (x_i, u_i)$ temos de fazer a restrição de que o conjunto de estados seja um subconjunto de um grupo comutativo.

§ 2 - Programação Dinâmica

Seja Z representando o conjunto dos números inteiros, E o dos números reais, X um conjunto de estados arbitrário* não vazio, U um conjunto de controles arbitrário não vazio, $G \subset X \times Z$ um conjunto de movimento arbitrário não vazio e $S \subset G$ um alvo arbitrário não vazio.

Estudaremos o sistema

(1) $$x_{i+1} - x_i = f_i\ (x_i, v_i(x_i)) \qquad x_n = x$$

onde $x_i \in X$, n é tempo inicial,

$$v : G / S \longrightarrow U \quad \text{uma lei de controle de realimentação}$$

$$(x_i, i) \longmapsto v_i(x_i) = u_i$$

* X é subconjunto de um grupo comutativo

$$f_i : X \times U \longrightarrow X$$

$$(x_i\ ,\ u_i) \longmapsto f_i\ (x_i, u_i)$$

A solução de (1) é notada por

$$x_i = x_i(v) = x_i\ (v, x_n, n) \qquad\qquad i \geq n$$

Para enfatizar a arbitrariedade da natureza do estado de partida e para simplificar a notação, nós muitas vezes identificamos $x_n = x$. Vamos supor por razões físicas que para cada ponto $(x,n) \in G/S$ há um certo subconjunto não vazio $U_n(x) \subset U$, subconjunto este no qual estão obrigados a permanecer os valores dos controles. Além disto, para distinguir aqueles valores dos controles que asseguram que o próximo passo do movimento está no conjunto de movimento, definimos para cada $(x,n) \in G/S$

$$\Omega_n(x) = \{\ u \in U_n(x)\ /\ (x_n + f_n(x_n,u),\ n+1) \in G\ \}$$

Nós dizemos que uma lei de controle por realimentação v é admissível se e só se $v_n(x) \in U_n(x)$ para todo $(x,n) \in G/S$, e qualquer movimento $(\ x_i(v), i\ )$ que começa em G alcança S em um número finito de passos sem deixar G. Na realidade, da definição de admissível é necessário que $v_n\ (x) \in \Omega_n(x)$, visto que foi exigido que o passo do movimento também esteja em G. Deste modo, todos os conjuntos $\Omega_n(x)$ devem ser não vazios para que controles admissíveis existam. Em muitos casos encontrados na prática, a condição é também suficiente. Por exemplo:

<u>Lema 1-1</u>

Se G é limitado superiormente em Z (i.e. existe $\bar{n}$ tal que

$(x,n) \varepsilon G \Longrightarrow n \leq \bar{n})$, então :

v é admissível $\Longleftrightarrow$ $v_n(x) \;\varepsilon\; \Omega_n(x)$ para todo $(x,n) \;\varepsilon\; G/S \subset X \times Z$

Dem.

Sob as condições assumidas, todos os movimentos que começam em G devem deixar eventualmente G, mas somente o podem fazer via S. $\square$

Se v é admissível, o tempo final

$$N = N(v) = N\ (v,x,n)$$

é o menor inteiro $N \geq n$ tal que $(x_n(v),n) \;\varepsilon\; S$.

Para qualquer lei de controle admissível v, e $(x,n) \;\varepsilon\; G$ o índice de performance de v é dado por

$$J_n(x,v) = \lambda_N\ (x_N(v)) + \sum_{i=n}^{N-1} f_i^0\ (x_i(v),v_i\ (x_i(v)))$$

onde λ_i e f_i^0 são funções reais. O problema em questão é então o

Problema de controle por realimentação : Ache a função $V^0 : G \to E$ e uma admissível lei de controle por realimentação $v^0 : G \to U$ tal que para cada $(x,n) \;\varepsilon\; G$

$$V_n^0\ (x) = \min_{v \text{ admissível}} J_n(x,v) = J_n(x,v^0)$$

Estabeleceremos que se V^0 existe e a minimização abaixo indicada conduz a um controle admissível, então as condições necessárias e suficientes para otimização são as

Condições de Bellman

a) $V_n(x_n) = \min_{u \,\varepsilon\, \Omega_n(x)} \left[f_n^0(x_n,u) + V_{n+1}(x_n+f_n(x_n,u)) \right]$

para $(x_n,n) \;\varepsilon\; G/S$

b) $V_n(x_n) = \lambda_n(x_n)$ para $(x_n,n) \;\varepsilon\; S$

Se V é tal que o mínimo em u de $f_n^0(x,u) + V_{n+1}(x+f_n(x,u))$ existe para cada $(x,n) \;\varepsilon\; G/S$, este pode ocorrer em um ou mais pontos $u \;\varepsilon\; \Omega_n(x)$. Vamos especificar unicamente um destes como $u^0 = v_n(x,V)$.

Uma função $V : G \to E$ é dita uma <u>candidata</u> se e só se

a) $V_n(x) = \lambda_n(x)$ em S

b) Existe uma função minimizadora $v_n(x,V)$ associada a ela

c) $v(\ ,V)$ é uma admissível lei de controle por realimentação.

<u>Condições Necessárias e Suficientes</u>

Primeiro indicaremos um método sistemático para calcular o índice de performance em G para qualquer admissível lei de controle por realimentação v.

<u>Lema 2-1</u>

Se v é admissível, então W é a função de performance de v, $W_n(x) = J_n(x,v)$, em G se e só se

a) $W_n(x) = f_n^0(x,v_n(x)) + W_{n+1}(x+f_n(x,v_n(x)))$ em G/S

b) $W_n(x) = \lambda_n(x)$ em S

<u>Dem.</u>

Primeiro assumimos $W = J(\ ,v)$. Tomando adiante diferenças ao longo do movimento enquanto usamos a lei de controle v, nós temos para cada $(x,n) \in G/S$ e $x = x_n = x_n(v)$

$$-f_n^0(x,v_n(x)) = J_{n+1}(x_{n+1},v) - J_n(x_n,v) =$$

$$= W_{n+1}(x_{n+1}(v)) - W_n(x_n(v)) =$$

$$= W_{n+1}(x_n + f_n(x,v_n(x))) - W_n(x_n)$$

logo

$$W_n(x) = f_n^0(x,v_n(x)) + W_{n+1}(x + f_n(x,v_n(x)))$$

e temos o ítem a). Também para $(x,n) \in S$ temos $n \geq N$ e $W_n(x) = J_n(x,v) = \lambda_n(x)$ o que implica o ítem b).

Assumimos agora a) e b). Se $(x_i(v),i)$ é um movimento começando em $(x,n) \in G/S$ então

$$W_n(x) = W_N(x_N) - W_{n+1}(x_{n+1}) + W_n(x_n) - W_{n+2}(x_{n+2}) + W_{n+1}(x_{n+1}) - W_{n+3}(x_{n+3}) +$$

$$+ W_{n+2}(x_{n+2}) - \ldots - W_N(x_N) + W_{N-1}(x_{N-1}) =$$

$$= W_N(x_N) - \sum_{i=n}^{N-1} \Delta W_i(x_i) =$$

$$= \lambda_N(x_N) + \sum_{i=n}^{N-1} f_i^0(x_i(v),v_i(x_i)) = J_n(x,v)$$

e trivialmente temos $W_n(x) = J_n(x,v)$ se $(x,n) \in S$. $\square$

Observação : Note que a) e b) satisfazem as condições de Bellman excetuando-se a minimização .

Vamos mostrar agora que se V^0 existe, então V^0 é uma candidata e existe uma função $v(\ ,V^0)$ que é uma admissível lei de controle ótimo por realimentação.

Lema 3-1

Se V^0 existe, então V^0 é uma candidata e $V_n^0 = J_n(x,v(\ ,V^0))$ para todo $(x,n) \in G$. Em outras palavras, se V^0 existe, então minimizar $f_n^0\ (x,u) + V_{n+1}^0\ (x + f_n(x,u))$ nos conduz a uma lei de controle ótimo $v(\ ,V^0)=v^0$.

Dem.

Se V^0 existe, então há uma admissível lei de controle por realimentação v^0 tal que $V_n^0\ (x) = J_n(x,v^0)$ em G. Fica claro da definição que $V_n^0\ (x) = \lambda_n(x)$ em S. Vamos mostrar agora que para qualquer $(x,n) \in G/S$, $v_n^0(x)$ minimiza $f_n^0\ (x,u) + V_{n+1}(x + f_n(x,u))$ de tal forma que podemos colocar $v(\ ,V^0)=$ $= v^0$. Suponhamos o contrário, que existe

$$(x^*,n^*) \in G/S \quad \text{e} \quad u^* \in \Omega_{n^*}(x^*) \quad \text{tal que}$$

$$f_{n^*}^0(x^*,u^*) + V_{n^*+1}^0(x^* + f_{n^*}(x^*,u^*)) < f_{n^*}^0(x^*,v_{n^*}^0)) + V_{n^*+1}^0(x^*,v_{n^*}^0(x^*)))$$

mas pelo Lema 2-1 , isto implica que

$$f_{n^*}^0(x^*,u^*) + V_{n^*+1}^0(x^* + f_{n^*}(x^*,u^*)) < V_{n^*}^0(x^*)$$

e isto leva a uma contradição, pois isto implica que o controle

$$v_n^*(x) = \begin{cases} v_n^0\ (x) & \text{se} \quad (x,n) \neq (x^*,n^*) \\ \\ u^* & \text{se} \quad (x,n) = (x^*,n^*) \end{cases}$$

satisfaz a $J_{n^*}(x^*,v^*) < V^0_{n^*}(x^*)$. Segue que podemos colocar $v_n(x,V^0)=v_n^0\ (x)$ e $V_n^0\ (x) = J_n(x,v(\ ,V^0))$

Teorema 1-1

Se V^0 existe, então

$V_n(x) = V_n^0\ (x) \Longleftrightarrow V$ é um candidato e satisfaz às condições de Bellman.

Dem.

$\Longrightarrow$

Se $V^0 : G \to E$ existe,então pelo Lema 3 , V^0 é uma candidata e $V_n^0\ (x) = J_n(x,v(\ ,V^0))$ para todo $(x,n) \in G$ mas como $V_n(x)= V_n^0(x)$, então V também é uma candidata e

$$V_n(x) = V_n^0(x) = \min_{v \text{ admissível}} J_n(x,v) = *$$

mas então pelo Lema 2, temos que

$$* = \min_{v \text{ admissível}} \left[f_n^0\ (x,v) + V_{n+1}(x + f_n(x,v)) \right] =$$

$$= \min_{u \in \Omega_n(x)} \left[f_n^0\ (x,u) + V_{n+1}(x + f_n(x,u)) \right] \quad \text{em} \quad G/S$$

e

$$V_n(x) = \lambda_n(x) \quad \text{em} \quad S$$

logo V é uma candidata e satisfaz as condições de Bellman

$\Longleftarrow$

Para todo $(x,n) \in G/S$, nós temos

$$V_n^0(x) - V_n(x) = \min_{v \text{ admissível}} \left[J_n(x,v) - V_n(x) \right] =$$

$$= \min_{v \text{ admissível}} \left[\lambda_N(x_N) + \sum_{i=n}^{N-1} f_i^0 \, (x_i(v), v_i(x_i)) - V_n(x) \right] =$$

$$= \min_{v \text{ admissível}} \left[\lambda_N(x_N) + \sum_{i=n}^{N-1} f_i^0(x_i(v), v_i(x_i)) - V_N(x_N) + \sum_{i=n}^{N-1} \Delta V_i(x_i) \right] =$$

$$= \min_{v \text{ admissível}} \left[\sum_{i=n}^{N-1} f_i^0 \, (x_i(v), v_i(x_i) + V_{i+1}(x_i + f_i(x_i(v), v_i(x_i))) - \right.$$

$$\left. - V_i(x_i(v)) \right]$$

Como V é uma candidata, $v(\, ,V)$ é admissível, e as condições de Bellman nos dizem que

$$f_i^0 \, (x_i(v), v_i(x_i)) + V_{i+1}(x_i + f_i(x_i(v), v_i(x_i)) - V_i(x_i(v))$$

tem um mínimo igual a zero para cada $(x_i(v), i)$ ao longo do movimento. Segue que $V_n^0(x) - V_n(x) = 0$

$\square$

<u>Corolário</u>

Se o conjunto de movimento G é limitado em n e se V^0 existe, então $V : G \to E$ é igual a V^0 se e só se

i) $V_n(x) = \min\limits_{u \, \varepsilon \, \Omega_n(x)} \left[f_i^0 \; (x,u) + V_{n+1} \; (x+f_n(x,u)) \right]$ em G/S

ii) $V_N(x) = \lambda_N \; (x)$ em S .

Dem.

$\Longrightarrow$ Se $V=V^0$, então pelo Teorema 1-1, V satisfaz as condições de Bellman i.e.

$$V_n(x) = \min_{u \, \varepsilon \, \Omega_n(x)} \left[f_i^0 \; (x,u) + V_{n+1} \; (x + f_n(x,u)) \right] \quad \text{em } G/S$$

e

$V_N(x) = \lambda_N(x)$ em S já que G é limitado superiormente em n.

$\Longleftarrow$ Agora, se i) e ii) são satisfeitos, então, pelo Lema 1-1, v é admissível, então V é uma candidata e pelo Teorema 1-1, temos que $V = V^0$.

□

§ 3 - Exemplos

Exemplo 1

É dado o sistema dinâmico $x_{i+1} - x_i = u_i$ e mais

$J_n(x_n,v) = \sum\limits_{i=n}^{N-1} v_i(x_i) - x_i(v)$ com o conjunto de restrições para os controles,

sendo $U_i(x_i) = \{ u / \; 0 \leq u \leq x_i \; \}$ e o alvo $S = E$ é dado ainda que $n=0$, $N=4$ e $x_o = 1$. Pede-se para achar uma lei de controle por realimentação que minimize $J_n(x_n,v)$.

Solução

Na nossa notação, temos :

$$f_i(x_i, v_i(x_i)) = u_i$$

$$f_i^0 \; (x_i(v), v_i(x_i(v))) = v_i(x_i) - x_i(v)$$

e

$$\lambda_i(x_i) = 0 \; .$$

As equações de Bellman para o problema são :

$$V_i(x_i) = \min_{0 \leq u \leq x_i} \left[u - x_i + V_{i+1}(x_i + f_i(x_i, u)) \right]$$

$$V_N(x_N) = 0$$

Para i=4, temos

$$V_4(x_4) = 0 \qquad \text{já que} \quad \lambda_4(x_4) = 0$$

para i=3, temos

$$V_3(x_3) = \min_{0 \leq u_3 \leq x_3} \left[u_3 - x_3 + V_4(x_3 + f_3(x_3, u)) \right] =$$

$$= \min_{0 \leq u_3 \leq x_3} \left[u_3 - x_3 + 0 \right] =$$

$$= \min_{0 \leq u_3 \leq x_3} \left[u_3 - x_3 \right] = - x_3$$

e

$$v_3^0 \; (x_3) = u_3 = 0$$

para i=2 , temos

$$V_2(x_2) = \min_{0 \le u_2 \le x_2} \left[u_2 - x_2 + V_3(x_2 + f_2(x_2,u)) \right] =$$

$$= \min_{0 \le u_2 \le x_2} \left[u_2 - x_2 + V_3\ (x_2 + u_2) \right] =$$

$$= \min_{0 \le u_2 \le x_2} \left[u_2 - x_2 - x_2 - u_2 \right] =$$

$$= \min_{0 \le u_2 \le x_2} \left[- 2x_2 \right] = - 2\ x_2$$

e

$v_2^0\ (x_2) = u_2$ é arbitrário

para i=1, temos

$$V_1(x_1) = \min_{0 \le u_1 \le x_1} \left[u_1 - x_1 + V_2(x_1 + f_1(x_1,u_1)) \right] =$$

$$= \min_{0 \le u_1 \le x_1} \left[u_1 - x_1 + V_2(x_1 + u_1) \right] =$$

$$= \min_{0 \le u_1 \le x_1} \left[u_1 - x_1 - 2x_1 - 2u_1 \right] =$$

$$= \min_{0 \le u_1 \le x_1} \left[-u_1 - 3x_1 \right] = -4x_1$$

e

$v_1^0\ (x_1) = u_1 = x_1$

Para $i=0$, temos

$$V_o(x_o) = \min_{o \le u_o \le x_o} \left[u_o - x_o + V_1(x_o + f_o(x_o,u_o)) \right] =$$

$$= \min_{o \le u_o \le x_o} \left[u_o - x_o + V_2(x_o + u_o) \right] =$$

$$= \min_{o \le u_o \le x_o} \left[u_o - x_o - 4x_o - 4u_o \right] =$$

$$= \min_{o \le u_o \le x_o} \left[-3u_o - 5x_o \right] = -8x_o$$

e

$$v_o^0 (x_o) = u_o = x_o$$

Como $x_o = 1$, temos então

$$v_o^0 (x_o) = u_o = x_o = 1$$

$$x_1 = x_o + u_o = 1 + 1 = 2$$

$$v_1^0 (x_1) = u_1 = x_1 = 2$$

$$x_2 = x_1 + u_1 = 2 + 2 = 4$$

$v_2^0 (x_2) = u_2$ arbitrário , fazemos então $u_2 = 1$

$$x_3 = x_2 + u_2 = 4 + 1 = 5$$

$$x_3^0 (x_3) = u_3 = 0$$

$$x_4 = x_3 + u_3 = 5$$

Temos então uma lei de controle ótimo por realimentação v^0, tal que

$$v_o^0\ (x_o) = 1 \qquad v_1^0\ (x_1) = 2 \qquad v_2^0\ (x_2) = 1 \qquad v_3^0\ (x_3) = 0$$

para a correspondente trajetória

$$x_o = 1 \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 5 \qquad x_4 = 5 \ .$$

Nosso próximo exemplo é um problema que foi abordado diferentemente por Bruckner e Wu [3] e por Leake e Richardson [16]. Usaremos a abordagem deste último, já que ela é condizente com a teoria até então aqui desenvolvida. A apresentação deste exemplo se justifica pelo fato de ele ser retomado adiante para estudo da verificação do princípio do máximo.

<u>Exemplo 2</u>

Dado o sistema dinâmico

$$x_{i+1}^1 - x_i^1 = -\frac{1}{2}\, x_i^1 + v_i^1\ (x_i)$$

$$x_{i+1}^2 - x_i^2 = \frac{1}{4}\, x_i^1 - v_i^2\ (x_i)$$

onde

$$x_i = (x_i^1\ ,\ x_i^2)\ \varepsilon\ X = E^2$$

e

$$v(x_i,i) = (v^1(x_i,i),\ v^2(x_i,i)) = (v_i^1(x_i),\ v_i^2(x_i)) = (u_i^1,u_i^2) = u_i\ \varepsilon\ E^2$$

Estamos interessados em maximizar x_N^2 . Fazemos então

$$J_n(x_n,v) = \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{4}\; x_i^1 - v_i^2(x_i)$$

$$\left(\text{já que} \quad \sum_{i=n}^{N-1} \frac{1}{4}\, x_i^1 - v_i^2(x_i) \;=\; \sum_{i=n}^{N-1} \Delta \;\; x_i^2 \;=\; x_N^2 - x_n^2 \right)$$

Também temos

$$G = \{ (x,i) \;/\; i \leq N \} \quad e \quad S = \{ (x,i) \;/\; i = N \}$$

O aspecto interessante aqui é o conjunto $U_i(x) = \Omega_i(x)$ que é dado por

$$U_i(x) = \{ u=(u^1,u^2) \;/\; |u^1| \leq 1,\; |u^2| \leq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{(x^1)^2}{1+(x^1)^2} \}$$

As equações de Bellman são

$$V_i(x_1) = \max_{u\, \varepsilon\, \Omega_i(x)} \left[\frac{1}{4}\, x_i^1 \;-\; u^2 + V_{i+1}(x_i + f_i(x_i,u)) \right]$$

$$V_N(x_N) = 0$$

Nós escolhemos maximizar em vez de minimizar neste problema para permitir uma fácil comparação com o exemplo estudado por Bruckner e Wu.

Notemos que $V_i^0\;(x_i) + x_n^2 \;=\; \max\, x_N^2$

Para $i = N-1$, nós temos

$$V_{N-1}^0(x_{N-1}) = \max_{u\, \varepsilon\, \Omega_i\,(x)} \left[\frac{1}{4}\, x_{N-1}^1 \;-\; u^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\, x_{N-1}^1 + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{(x_{N-1}^1)^2}{1+(x_{N-1}^1)^2}$$

e

$$\vartheta^{2}_{N-1}\,(x_{N-1}) \;=\; -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{(x^1_{N-1})^2}{1+(x^1_{N-1})^2}$$

$$v^{01}_{N-1}(x_{N-1}) \;=\; 0 \qquad \text{(Na realidade, } \overset{01}{v} \text{ é arbitrário)}$$

Para $i = N-2$

$$V^0_{N-2}(x_{N-2}) = \max_{u\,\varepsilon\,\Omega_{N-2}(x_{N-2})} \left[\frac{1}{4}\,x^1_{N-2} - u^2 + V_{N-1}(x_{N-2}+f_{N-2}(x_{N-2},u)) \right] =$$

$$= \max_{u\,\varepsilon\,\Omega_{N-2}(x_{N-2})} \left[\frac{1}{4}\,x^1_{N-2} - u^2 + V_{N-1}(x_{N-1}) \right] =$$

$$= \max_{u\,\varepsilon\,\Omega_{N-2}(x_{N-2})} \left[\frac{1}{4}\,x^1_{N-2} - u^2 + \frac{1}{4}\,x^1_{N-1} + 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \; \frac{(x^1_{N-1})^2}{1+(x^1_{N-1})^2} \right] =$$

$$= \max_{u\,\varepsilon\,\Omega_{N-2}(x_{N-2})} \left[\frac{1}{4}\;x^1_{N-2} - u^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\,x^1_{N-2} + u^1\right) + 1 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{\left(\frac{1}{2}\,x^1_{N-2} + u^1\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\,x^1_{N-2}+ u^1\right)^2} \right]$$

Um pequeno cálculo nos mostra que

$$V^0_{N-2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^1 + 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)\frac{(x^1)^2}{1+(x^1)^2} + \frac{15}{512} & \text{se } -\frac{3}{2} \le x^1 \le \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4}x^1 + 2 - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)\frac{(x^1)^2}{1+(x^1)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^1 + 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \cdot & \\ \qquad \cdot \frac{(\frac{1}{2}x^1+1)^2}{1+(\frac{1}{2}x^1+1)^2} & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$V^{01}_{N-2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^1 & \text{se } -\frac{3}{2} \le x^1 \le \frac{5}{4} \\ 1 & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

$$V^{02}_{N-2}(x) = -1 + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{(x^1)^2}{1+(x^1)^2}$$

Consideraremos agora o caso particular quando $n = 0$, $N = 2$ e $x_o = (x_o^1, x_o^2) = (0,0)$

Do resultado geral, temos

$$V^0(x_o.0) = V^0((0,0),0) = 2 + \frac{15}{512} = x_2^2 \text{ máximo}$$

Além disso, temos

$$u_o^1 = \frac{1}{4} \qquad u_o^2 = -1$$

$$x_1^1 = \frac{1}{2} x_o^1 + u_o^1 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x_1^2 = x_o^2 + \frac{1}{4} x_o^1 - u_o^2 = 0 + 0 - (-1) = 1$$

$$u_1^1 = \overset{01}{v_1} (x_1) = 0$$

$$u_1^2 = \overset{02}{v_1} (x_1) = -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{17}{16} \right)^2 \frac{(x_1^1)^2}{1 + (x_1^1)^2} = -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{17}{16} \right)^2 \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^2}{1 + \left(\frac{1}{4} \right)^2} =$$

$$= -1 + \frac{17}{512}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{2} x_1^1 + u_1^1 = \frac{1}{2} x_1^1 + u_1^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{8}$$

$$x_2^2 = x_1^2 + \frac{1}{4} x_1^1 - u_1^2 = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \left(-1 + \frac{17}{512} \right) = 1 + \frac{1}{16} + 1 - \frac{17}{512} =$$

$$= 2 + \frac{32-17}{512} = 2 + \frac{15}{512}$$

CAPÍTULO II

§ 1 - Apresentação

Neste capítulo, damos primeiramente o problema que é chamado por Canon, Cullum e Polak [6] de problema de controle ótimo com convexidade direcional, e o teorema do "princípio do máximo" por eles formulado. Em seguida, é feita uma conjectura a respeito da validade do "princípio do máximo" para problemas de controle ótimo com controles restringidos pelo estado. Três exemplos mostram que este "princípio do máximo" não é em geral satisfeito, para problemas deste tipo. Formulamos então o que chamamos de "Hipótese de Inclusão", e mostramos que acrescido desta hipótese, o problema de controle ótimo com convexidade direcional e controles restringidos pelo estado satisfaz o "princípio do máximo".

§ 2 - Princípio do Máximo

(2) Problema 1. Dado um sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i) \qquad i=0,1,\dots,k-1$$

onde $x_i \in E^n$ é o estado do sistema no tempo i , $u_i \in E^m$ é a entrada do sistema no tempo i , e f_i é uma função $f_i : E^n \times E^m \to E^n$. Achar uma sequência de controles $\hat{U} = (\hat{u}_o, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{k-1})$ e uma correspondente trajetória $\hat{X} = (\hat{x}_o, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$ que minimize a soma

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0(x_i, u_i)$$

onde $f_i^0 : E^n \times E^m \to E$. A minimização está sujeita a:

$$u_i \in U_i \quad E^m \qquad i = 0,1,\dots,k-1$$

$$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o'' \qquad \text{onde} \quad X_0' = \{ x / q_o(x) \leq 0 \}$$

$$X_o'' = \{ x / g_o(x) = 0 \}$$

$$\text{com} \quad q_o : E^n \to E^{m_o}$$

$$q_o : E^n \to E^{l_o}$$

$$x_k \in X_k = X_k' \cap X_k'' \qquad \text{onde} \quad X_k' = \{ x / q_k(x) \leq 0 \}$$

$$X_k'' = \{ x / g_k(x) = 0 \}$$

$$\text{com} \quad q_k : E^n \to E^{m_k}$$

$$g_k : E^n \to E^{l_k}$$

$$x_i \in X_i = X_i' \cap E^n = \{ x / q_i(x) \leq 0 \} \qquad i = 1,2,\dots,k-1$$

$$\text{com} \quad q_i : E^n \to E^{m_i}$$

Para obtenção de condições necessárias, acrescentamos as hipóteses.

<u>Hipóteses</u> - 1

A - Para $i = 0,1,\dots,k-1$ e para todo $u \in U_i$, as funções $f_i(\ ,u) : E^n \to E^n$ são continuamente diferenciáveis.

Seja $b_o = (-1,0,0\dots,0) \in E^{n+1}$ e para $i = 0,1,\dots,k-1$, definimos

$$F_i : E^n \times E^m \rightarrow E^{n+1}$$

$$(x_i,u_i) \mapsto (f_i^0(x_i,u_i)\ ,\ f_i(x_i,u_i)).$$

B - Para $i = 0,1,\ldots,k-1$ e para todo $x \in E^n$ os conjuntos $F_i(x,U_i)$ são b_o - convexos i.e. convexos na direção b_o (vide apêndice def.3).

C - As funções $g_o : E^n \rightarrow E^{l_o}$ e $g_k : E^n \rightarrow E^{l_k}$ são continuamente diferenciáveis e têm matrizes jacobianas $\dfrac{\partial\, g_o(x)}{\partial\, x}$ e $\dfrac{\partial\, g_k(x)}{\partial\, x}$ com posto máximo para todo $x \in X_o$ e X_k respectivamente.

D - Para todo $x \in X_i'$ e $i = 0,1,\ldots,k-1$ os gradientes das restrições ativas, $\nabla\, q_i^j\ (x)$, com $j \in I_i(x) = \{\ j/q_i^j\ (x) = 0\ \}$, são vetores linearmente independentes.

(3) Teorema 1-2 (Princípio do Máximo)

Se $(\hat{u}_o,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{k-1})$ é uma sequência de controles ótimos e $(\hat{x}_o,\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_k)$ é uma trajetória ótima para o problema-1, dado em (2), então existem vetores $p_o,p_1,\ldots,p_k$ em E^n, multiplicadores $\lambda_o,\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ com $\lambda_i \in E^{m_i}$ satisfazendo $\lambda_i \leq 0$, $\mu_o \in E^{l_o}$ e $\mu_k \in E^{l_k}$ e um escalar $p^0 \leq 0$ tal que: Não todos $p^0,p_o,p_1,\ldots,p_k,\mu_o,\mu_k$ são nulos.

Os vetores p_i satisfazem a equação

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\, x}\right]^T p_{i+1} + p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\, x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial\, x}\right]^T \lambda_i$$

$$i = 0,1,\ldots,k-1$$

No conjunto de partida X_o a condição de transversalidade

$$p_o = -\left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o \qquad \text{é satisfeita .}$$

No conjunto final X_k a condição de transversalidade

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k\ (\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k + \left[\frac{\partial q_k\ (\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \lambda_k \qquad \text{é satisfeita}$$

$$\left\langle \lambda_i, q_i(\hat{x}_i) \right\rangle = 0 \qquad\qquad i = 0,1,\ldots,k$$

Para $i = 0,1,\ldots,k-1$, o hamiltoniano

$$H : E^n \times E^m \times E^n \times E \times \{0,1,\ldots,k-1\} \to E$$

$$(x,\ u,\ p,\ p^0,\ i) \mapsto p^0 f_i^0(x,u) + \left\langle p, f_i(x,u) \right\rangle$$

satisfaz a condição de máximo

$$H(\hat{x}_i, \hat{u}_i, p_{i+1}, p^0, i) \geq H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i) \qquad \text{para todo } u_i \in U_i$$

Esta última relação é conhecida como "princípio do máximo".

Observação: No teorema $\mu_k = 0$ sempre que $g_k \equiv 0$.

Dem. 6 pág. 85 .

§ 3 - Uma Conjectura

Se temos um problema de controle ótimo formulado exatamente como o problema-1, dado em (2), só que os conjuntos de restrição dos valores dos controles, U_i, não dependem somente do tempo i mas também do estado do sistema no tempo i i.e. $U_i(x_i)$, pergunta-se: será que a solução ótima, $\hat{U}$ e $\hat{X}$, de um problema deste tipo satisfaz o princípio do máximo (3) i.e. o Hamiltoniano é maximizado para $\hat{u}_i$ para todo $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$? Além disto, se derivarmos deste problema um novo, onde $U_i = U_i(\hat{x}_i)$, pergunta-se se a nova solução, i.e., a do problema derivado, U^* e X^*, é igual à solução ótima do problema original.

Mostramos com exemplos que em geral o "princípio do máximo" não é satisfeito.

Exemplo 1

O Problema Original

Consideremos o sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = u_i \qquad i = 0,1,2$$

com $x_i \in E$, $u_i \in E$, onde queremos minimizar

$$J\ (X,U) = \sum_{i=0}^{2} f_i^0\ (x_i,u_i) = u_o + u_1$$

Na nossa notação temos : $k=3$, $f_i(x_i,u_i) = u_i$, $f_o^0(x_o,u_o) = u_o$, $f_1^0(x_1,u_1) = u_1$ e $f_2^0(x_2,u_2) = 0$.

Sujeito a :

$$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o'' \qquad \text{onde} \quad q_o : E \to E^{m_o}, \quad x \mapsto 0$$

$$g_o : E \to E, \quad x \mapsto x$$

logo

$$X_o' = \{x/q_o(x) \leq 0\} = E$$

$$X_o'' = \{x/g_o(x) = 0\} = \{0\}$$

então

$$X_o = \{0\}$$

$x_3 \in X_3 = X_3' \cap X_3''$ onde

$$q_3 : E \to E^{m_3}$$
$$x \mapsto 0$$

$$g_o : E \to E$$
$$x \mapsto x-3$$

logo

$$X_3' = \{x/q_3(x) \leq 0\} = E$$

$$X_3'' = \{x/g_3(x) = 0\} = \{3\}$$

então

$$X_3 = \{3\}$$

$x_i \in X_i = X_i' \cap E$ onde

$$q_i : E \to E^{m_i}$$
$$x \mapsto 0$$

então

$$X_i = \{\ x/q_i(x) \leq 0\ \} \cap E = E$$
$$i=1,2$$

Os conjuntos de restrição dos controles são:

$$U_o(x) = [-1,1]$$

$$U_1(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{se } x=1 \\ \{2\} & \text{se } x\neq 1 \end{cases}$$

$$U_2(x) = E$$

Temos então a solução.

Ora $x_o = 0$ e $u_o \in U_o(x)$ i.e. $u_o \in [-1,1]$. Como $x_1 = u_o$ temos que u_1 depende diretamente do valor de u_o. Se $u_o = 1$ então $x_1 = 1$ e $u_1 \in [-1,1]$ e como queremos minimizar $J(X,U)$ escolhemos obviamente $u_1 = -1$ e obtemos $J(X,U) = 0$. Mas se $u_o \in [-1,1)$ então $x_1 \in [-1,1)$ e logo $u_1 = 2$ e o valor mínimo conseguido é $J(X,U) = 1$, isto quando $u_o = -1$. Logo a solução ótima é dada por $\hat{x}_o = 0$, $\hat{u}_o = 1$, $\hat{x}_1 = 1$, $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \hat{u}_1 = 1 + (-1) = 0$; então com $\hat{u}_2 = 3$ obtemos $\hat{x}_3 = \hat{x}_2 + \hat{u}_2 = 0 + 3 = 3$.

Conseqüentemente, $\hat{U} = (1,-1,3)$ é uma sequência de controles ótimos, $\hat{X} = (0,1,0,3)$ é a sequência de estados correspondentes e $J(\hat{X},\hat{U}) = 1$.

O Problema Derivado

Temos o sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = u_i$$

com $x_i \in E$, $u_i \in E$ onde queremos minimizar

$$J(X,U) = \sum_{i=0}^{2} f_i^0(x_i,u_i) = u_o + u_i$$

novamente na nossa notação temos $k=3$, $f_i(x_i,u_i) = u_i$, $f_o^0(x_o,u_o) = u_o$, $f_1^0(x_1,u_1) = u_1$ e $f_2^0(x_2,u_2) = 0$

Sujeito a

$$x_o \in X_o = \{0\}$$

$$x_3 \in X_3 = \{3\}$$

$$x_i \in X_i = E \qquad i=1,2$$

Além disto, temos os conjuntos de restrição para os controles :

$$U_o = U_o(\hat{x}_o) = U_o(0) = [-1,1]$$

$$U_1 = U_1(\hat{x}_1) = U_1(1) = [-1,1]$$

$$U_2 = U_2(\hat{x}_2) = U_2(0) = E$$

Temos então a solução

Sendo $x_o = 0$ e como podemos tomar $u_o = -1$ teremos $x_1 = x_o + u_o = -1$. Temos que $u_1 \in U_1 = [-1,1]$, logo se tomamos $u_1 = -1$ obtemos $J(X,U) = -2$. Logo, a solução ótima do problema derivado é dada por $x^*_o = 0$, $u^*_o = -1$, $x^*_1 = -1$, $u^*_1 = -1$, $x^*_2 = x^*_1 + u^*_1 = -1 + (-1) = -2$; então com $u^*_2 = 5$ obtemos $x^*_3 = x^*_2 + u^*_2 = -2 + 5 = 3$.

Conseqüentemente

$U^* = (-1,-1,5)$ é uma sequência de controles ótimos para o problema derivado, $X^* = (0,-1,-2,3)$ uma correspondente trajetória ótima e $J(X^*,U^*) = -2$.

Mostremos agora que a solução ótima do problema original, $\hat{X}$ e $\hat{U}$, não satisfaz o princípio do máximo (3).

O Hamiltoniano

$$H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^0,i) = p^0 f^0_i(\hat{x}_i,u_i) + \langle p_{i+1}, f_i(\hat{x}_i,u_i)\rangle$$

deveria ser minimizado por $\hat{u}_i$ para todo $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$ com $\hat{U} = (1,-1,3)$ $\hat{X} = (0,1,0,3)$

$$U_o(x_o) = [-1,1]$$

$$U_1(x_1) = \begin{cases} [-1,1] & \text{se } x=1 \\ \{2\} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

$$U_2(x_2) = E$$

Desenvolvendo o Hamiltoniano para $i=0,1,2$, obtemos

$$H(\hat{x}_o,u_o,p_1,p^0,0) = p^0u_o + p_1u_o$$

(4) $$H(\hat{x}_1,u_1,p_2,p^0,1) = p^0u_1 + p_2u_1$$

$$H(\hat{x}_2,u_2,p_3,p^0,2) = p_3u_2$$

Mas como no nosso problema temos

a) $f_i(x_i,u_i) = u_i$ então $\dfrac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = 0$

b) $f_i^0(x_i,u_i) = \begin{cases} u_i & i=0,1 \\ 0 & i=2 \end{cases}$ então $\dfrac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = 0$

c) $q_i(x) \equiv 0$ então $\dfrac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x} = 0$

d) $g_o(x) = x$ então $\dfrac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} = 1$

e) $g_3(x) = x-3$ então $\dfrac{\partial g_3(\hat{x}_k)}{\partial x} = 1$

Mas como

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p^0\left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i$$

$i=0,1,2$

Então, de a), b) e c), temos

(5) $$p_i - p_{i+1} = 0 \qquad i=0,1,2$$

Além disto

$$p^0 = -\left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$$

Então, de d) , temos

(6) $$p_o = -\mu_o$$

E mais

$$p_3 = \left[\frac{\partial g_3(\hat{x}_3)}{\partial x}\right]^T \mu_3 + \left[\frac{\partial q_3(\hat{x}_3)}{\partial x}\right]^T \lambda_3$$

Então , de c) e e), temos

(7) $\quad p_3 = \mu_3$

Logo, de (5), (6), e (7), obtemos

(8) $\quad p_3 = p_2 = p_1 = p_o = \mu_3 = -\mu_o$

Observando então as equações (4) do Hamiltoniano, vemos que $\hat{u}_2$ teria que minimizar

$$H(\hat{x}_2,u_2,p_3,p^0,2) = p_3 u_2$$

mas isto só acontece se $p_3=0$. Logo, de (8) obtemos

$$p_3 = p_2 = p_1 = p_o = \mu_3 = -\mu_o = 0$$

Reescrevendo as equações (4), obtemos

$$H(\hat{x}_o,u_o,p_1,p^0,0) = p^0 u_o$$

$$H(\hat{x},u_1,p_2,p^0,1) = p^0 u_1$$

$$H(\hat{x}_2,u_2,p_3,p^0,2) = 0$$

Logo, se $\hat{u}_1 = -1$ maximiza

$$H(\hat{x}_1,u_1,p_2,p^0,1) = p^0 u_1$$

então $p^0 = -k$, $k>0$ pois $U_1(\hat{x}_1) = [-1,1]$

mas então $\hat{u}_o = 1$ não maximiza

$$H(\hat{x}_o,u_o,p_1,p^0,0) = p^0 u_o = -k\, u_o \quad , \quad k>0$$

pois $\quad U_o(\hat{x}_o) = [-1,1]$

Vale ressaltar que a minimização do Hamiltoniano não se dá , mesmo sendo convexos os conjuntos

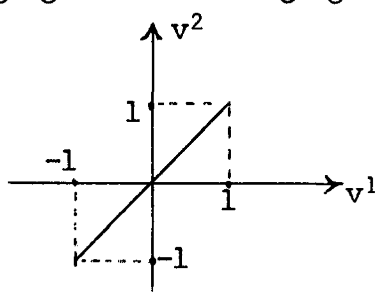
$$F_i(x_i,U_i(x_i)) = (f_i^0(x_i,U_i(x_i)),\ f_i(x_i,U_i(x_i)))$$

como o são, no caso, estes conjuntos no nosso problema, pois sendo

$$f_o(x_o,u_o) = u_o \qquad e \qquad f_o^0(x_o,u_o) = u_o$$

então

$$F_o(x_o,U_o(x_o)) = \{v/v = (u_o,u_o),\ u_o \in [-1,1]\}$$



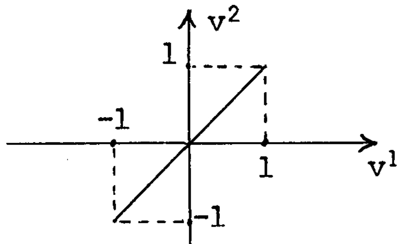
que é convexo

e $\quad f_1(x_1,u_1) = u_1 \qquad f_1^0(x_1,u_1) = u_1$

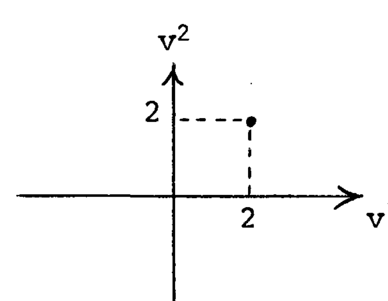
então

$$f_1(x_1,U_1(x_1)) = \begin{cases} \{v/v = (u_1,u_1),\ u_1 \in [-1,1]\} & \text{se } x_1=1 \\ \{v/v = (2,2)\} & \text{se } x_1 \neq 1 \end{cases}$$

$x_1=1$



$x_1 \neq 1$



que são convexos

Exemplo 2

O Problema Original

Consideremos agora o sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = u_i - 2 \qquad i=0,1$$

com $x_i \in E$, $u_i \in E$, onde queremos minimizar

$$J(X,U) = \sum_{i=0}^{1} f_i^0\,(x_i,u_i) = u_o$$

Na nossa notação, temos: $k=2$, $f_i(x_i,u_i) = u_i-2$, $f_o^0(x_o,u_o) = u_o$ e $f_1^0(x_1,u_1) = 0$

Sujeito a:

$$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o'' \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} q_o &: E \to E^{m_o} \\ & \quad x \mapsto 0 \\ g_o &: E \to E \\ & \quad x \mapsto x-1 \end{aligned}$$

logo

$$X_o' = \{x / q_o(x) \leq 0\} = E$$

$$X_o'' = \{x / g_o(x) = 0\} = \{1\}$$

então $X_o = \{1\}$

$$x_2 \in X_2 = X_2' \cap X_2'' \quad \text{onde} \quad \begin{aligned} q_2 &: E \to E^{m_2} \\ & \quad x \mapsto 0 \\ g_2 &: E \to E \\ & \quad x \mapsto 0 \end{aligned}$$

logo

$$X_2' = \{x / q_2(x) \leq 0\} = E$$

$$X_2'' = \{x / g_2(x) = 0\} = E$$

$x_1 \in X_1' = X_1' \cap E$

então

$$X_2 = E$$

onde $q_1 : E \to E^{m_1}$

$$x \mapsto 0$$

logo

$$X_1' = \{x / q_1(x) \leq 0\} = E$$

então

$$X_1 = E$$

Os conjuntos de restrição dos controles são dados por:

$$U_i(x_i) = \{u / 0 \leq u \leq x_i\} \quad i=0,1$$

Temos então a solução

Como $x_o = 1$, temos $x_1 = 1 + u_o - 2 = u_o - 1$ onde $u_o \in U_o(x_o) = U_o(1) =$ $= \{u/0 \leq u \leq 1\}$ se escolhemos $u_o \in [0,1)$ então $x_1 < 0$ e consequentemente $U_1(x_1) = \emptyset$ o que não pode acontecer logo, $\hat{u}_o = 1$ e $\hat{x}_1 = 0$. Temos então $u_1 \in U_1(\hat{x}_1) = U_1(0) = \{0\}$ logo, $\hat{u}_1 = 0$ e $\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \hat{u}_1 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$.

Então

$$\hat{U} = (1,0)$$

$$\hat{X} = (1,0,-2)$$

e

$$J(\hat{X},\hat{U}) = 1$$

<u>O Problema Derivado</u>

Temos o sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = u_i - 2 \qquad i=0,1$$

com $x_i \in E$, $u_i \in E$ onde queremos minimizar

$$J(X,U) = \sum_{i=0}^{1} f_i^0 (x_i,u_i) = u_o$$

Novamente temos: $k=2$, $f_i(x_i,u_i) = u_i - 2$, $f_o^0(x_o,u_o) = u_o$ e $f_1^0(x_1,u_1) =$ $= 0$

Sujeito a

$$x_o \in X_o = \{1\}$$
$$x_2 \in X_2 = E$$
$$x_1 \in X_1 = E$$

Além disto, temos os conjuntos de restrição para os controles:

$$U_o = U_o(\hat{x}_o) = U_o(1) = [0,1]$$
$$U_1 = U_1(\hat{x}_1) = U_1(0) = \{0\}$$

Temos então a solução

Sendo $x_o^* = 1$, podemos tomar $u_o^* = 0$ já que não há a possibilidade de U_i se tornar vazio como no problema original, pois $U_1 = \{0\}$ está fixo. Continuando temos $x_1^* = x_o^*+u_o^*-2 = 1+0-2 = -1$ e $u_1^* = 0$. Logo, $x_2^* = x_1^* + u_1^* - 2 =$ $= -1 + 0 - 2 = -3$.

Então

$$\mathcal{U}^* = (0,0) \qquad \mathcal{X}^* = (1,-1,-3)$$

e

$$J(\mathcal{X}^*,\mathcal{U}^*) = 0$$

Mostremos que também aqui a solução ótima do problema original, $\hat{\mathcal{X}}$ e $\hat{\mathcal{U}}$, não satisfaz o princípio do máximo (3).

Temos o Hamiltoniano

$$H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^0,i) = p^0 f_i^0(\hat{x}_i,u_i) + \left\langle p_{i+1}, f_i(\hat{x}_i,u_i)\right\rangle$$

que deve ser minimizado por $\hat{u}_i$ para todo $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$, com $\hat{\mathcal{U}} = (1,0)$

$\hat{\mathcal{X}} = (1,0,-2)$

$$U_i(\hat{x}_i) = \{u/0 \leq u \leq \hat{x}_i\}$$

Desenvolvendo o Hamiltoniano para $i=0,1$, obtemos

(9)
$$H(\hat{x}_o, u_o, p_1, p^0, 0) = p^0 u_o + p_1 [u_o - 2]$$

$$H(\hat{x}_1, u_1, p_2, p^0, 0) = p_2 [u_1 - 2]$$

Mas como no nosso problema temos:

a) $f_i(x_i, u_i) = u_i - 2$ então $\dfrac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} = 0$

b) $f_i^0(x_i, u_i) = \begin{cases} u_i & i=0 \\ 0 & i=1 \end{cases}$ então $\dfrac{\partial f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} = 0$

c) $q_i(x) = 0$ então $\dfrac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x} = 0$

d) $g_o(x) = x - 1$ então $\dfrac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} = 1$

e) $g_2(x) = 0$ então $\dfrac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial x} = 0$

Mas como

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p_o \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i$$

$i=0,1$

Então, de a), b) e c) , temos

(10) $$p_i - p_{i+1} = 0 \qquad i=0,1$$

Além disto

$$p^0 = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$$

Então de d), temos

(11) $\quad p_o = -\mu_o$

e mais

$$p_2 = \frac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial x}^T \mu_2 + \frac{\partial q_2(\hat{x}_2)}{\partial x}^T \lambda_2$$

Então, de c) e e), temos

(12) $\quad p_2 = 0$

Logo, de (10), (11), e (12), temos

(13) $\quad p_2 = p_1 = p_o = -\mu_o = 0$

e como $g_2 \equiv 0$, temos

(14) $\quad \mu_2 = 0$

Reescrevendo as equações (9), obtemos

$$H\ (\hat{x}_o, u_o, p_1, p^0, 0) \ = \ p^0 u_o$$

$$H\ (\hat{x}_1, u_1, p_2, p^0, 1) = 0$$

De (13) e (14) temos que $p^0 = k \quad k < 0$ já que $p^0, p_o, p_1,$ μ_o, μ_2 não são todos nulos . Mas então $\hat{u}_o = 1$ não maximiza

$$H(\hat{x}_o, u_o, p_1, k, 0) = k\ \mu_o$$

$$u_o \in U_o(x_o) = U_o(1) = [0,1\ ]$$

Exemplo 3

O nosso problema agora é o mesmo do exemplo 2 do capítulo I. Temos o sistema dinâmico dado por

$$x_{i+1} - x_i = \left(-\frac{1}{2}\ x_i^1 + u_i^1,\ \frac{1}{4}\ x_i^1 - u_i^2 \right) \quad i=0,1$$

com $x_i = (x_i^1, x_i^2) \in E^2$, $u_i = (u_i^1, u_i^2) \in E^2$, onde queremos minimizar

$$J(X,U) = \sum_{i=0}^{1} \frac{1}{4}\ x_i^1 - u_i^2$$

Na nossa notação temos então:

$k=2$, $f_i^0(x_i,u_i) = \frac{1}{4}\ x_i^1 - u_i^2$ e $f_i(x_i,u_i) = (f_i^1(x_i,u_i),\ f_i^2\ (x_i,u_i)) =$

$= \left(-\frac{1}{2}\ x_i^1 + u_i^1\ ,\ \frac{1}{4}\ x_i^1 - u_i^2 \right)$

Sujeito a :

$$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o'' \qquad \text{onde} \qquad q_o : E^2 \to E^{m_o}, \quad x \mapsto 0$$

$$g_o : E^2 \to E^2, \quad x \mapsto x$$

logo

$$X_o' = \{x / q_o(x) \leq 0\} = E^2$$

$$X_o'' = \{x / g_o(x) = 0\} = \{(0,0)\}$$

e então

$$X_o = \{(0,0)\}$$

Além disto

$$x_2 \in X_2 = X_2' \cap X_2'' \qquad \text{onde} \qquad q_2 : E^2 \to E^{m_2}, \quad x \mapsto 0$$

$$g_2 : E^2 \to E^2$$
$$x \mapsto 0$$

logo $\quad X_2' = \{x / g_2(x) \leq 0\} = E^2$

$$X_2'' = \{x / g_2(x) = 0\} = E^2$$

e então

$$X_2 = E^2$$

$x_1 \in X_1 = X_1' \cap E^2$ onde $\quad g_1 : E^2 \to E^{m_2}$

$$x \mapsto 0$$

logo

$$X_1' = \{x / g_1(x) \leq 0\} = E^2$$

e então

$$X_1 = E^2$$

Os conjuntos de restrições dos controles são:

$$U_i(x_i) = \{ (u_i^1, u_i^2) \ / \ |u_i^1| \leq 1, \ |u_i^2| \leq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{17}{16} \right)^2 \frac{(x_i^1)^2}{1 + (x_i^1)^2} \}$$

Como vimos no capítulo I, uma solução ótima do problema é:

$$\hat{U} = \{ (\frac{1}{4} , -1), \ (0, -1 + \frac{17}{512}) \}$$

$$\hat{X} = \{ (0,0), (\frac{1}{4}, 1), \ (\frac{1}{8} , 2 + \frac{15}{512}) \}$$

Vejamos agora se o princípio do máximo (3) é satisfeito.

Temos o Hamiltoniano

$$H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i) = p^0 f_i^{\,0}(\hat{x}_i, u_i) + \left\langle p_{i+1}, \ f_i(\hat{x}_i, u_i) \right\rangle =$$

$$= p^0\left[\frac{1}{4}\,\hat{x}_i^1 - u_i^2\right] + p_{i+1}^1\left[-\frac{1}{2}\,\hat{x}_i^1 + u_i^1\right] + p_{i+1}^2\left[\frac{1}{4}\,\hat{x}_i^1 - u_i^2\right]$$

Mas no nosso problema temos:

a) $f_i(x_i,u_i) = \left(-\frac{1}{2}\,x_i^1 + u_i^1,\ \frac{1}{4}\,x_i^1 - u_i^2\right)$ então

$$\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_i^1(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f_i^1(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial f_i^2(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f_i^2(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

b) $f_i^0(x_i,u_i) = \frac{1}{4}\,x_i^1 - u_i^2$ então

$$\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x^1} \\ \\ \dfrac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $q_i(x) = 0$ então $\dfrac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x} = 0$

d) $g_o(x) = (g_o^1(x),\ g_o^2(x)) = (x^1,x^2) = x$ então

$$\frac{x g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_o^1(\hat{x}_o)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g_o^1(\hat{x}_o)}{\partial x^2} \\ \\ \dfrac{\partial g_o^2(\hat{x}_o)}{\partial x^1} & \dfrac{\partial g_o^2(\hat{x}_o)}{\partial x^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $g_2(x) \equiv 0$ então $\dfrac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial x} = 0$

mas como

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i \quad , \; i=0,1$$

então, de a), b) e c) temos

(13) $$p_i - p_{i+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_{i+1} + p^0 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad i=0,1$$

além disto

$$p^0 = -\left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$$

Então, de d), temos

(14) $p^0 = -\mu_o$

e mais

$$p_2 = \left[\frac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial x}\right]^T \mu_2 + \left[\frac{\partial q_2(\hat{x}_2)}{\partial x}\right]^T \lambda_2$$

Então, de c) e e), temos

(15) $p_2 = 0 = (0,0)$

(16) Por outro lado, como $g_2 \equiv 0$ temos $\mu_2 = 0$. Consequentemente, se tivermos $p^0 = 0$ então de (13) , (14), (15) e (16) teríamos

$$p_o = p_1 = p_2 = \mu_o = 0 \quad \text{e} \quad \mu_2 = 0$$

o que resultaria numa impossibilidade, já que p^0, p_o, p_1,p_2,μ_o,μ_2 não são todos nulos. Então, tomemos $p^0 = -1$. Segue-se de (13) que

(17) $$p_i^1 - p_{i+1}^1 = -\frac{1}{2}\, p_{i+1}^1 + \frac{1}{4}\, p_{i+1}^2 - \frac{1}{4}$$

$$p_i^2 - p_{i+1}^2 = 0$$

mas de (15) temos que $p_2^1 = p_2^2 = 0$ logo, segue-se que $p_o^2 = p_1^2 = p_2^2 = 0$, e de (17) segue-se que

$$p_i^1 = \frac{1}{2}\, p_{i+1}^1 - \frac{1}{4}$$

Logo, temos

$$p_1^1 = -\frac{1}{4}$$

$$p_o^1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$$

Temos então que o Hamiltoniano se reescreve como

$$H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i) = -\frac{1}{4}\,\hat{x}_i^1 + u_i^2 + p_{i+1}^1\left[-\frac{1}{2}\,\hat{x}_i^1 + u_i^1\right] \quad i=0,1$$

Lembremos que

$$U_o(\hat{x}_o) = U_o((0,0)) = \{u_o = (u_o^1, u_o^2) \;/\; |u_o^1| \leq 1 \;,\; |u_o^2| \leq 1\}$$

$$U_1(\hat{x}_1) = U_1\left(\left(\frac{1}{4}, 1\right)\right) = \{u_1 = (u_1^1, u_1^2) \;/\; |u_1^1| \leq 1,\; |u_1^2| \leq 1 - \frac{17}{512}\}$$

Desenvolvendo o Hamiltoniano para $i=0,1$ temos

$$H(\hat{x}_o, u_o, p_1, -1, o) = u_o^2 + \left(-\frac{3}{8}\right) u_o^1$$

que é maximizado para $u_o^2 = 1$ e $u_o^1 = -1$ e

$$H(\hat{x}_1, u_1, p_2, -1, 1) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + u_1^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + u_1^1\right]$$

que é maximizado para $u_1^2 = 1 - \dfrac{17}{512}$ e $u_1^1 = -1$

Logo, novamente a sequência dos controles ótimos $\mathcal{U} = \left(\left(\frac{1}{4}, -1\right), \left(0, -1 + \frac{17}{512}\right)\right)$ não maximiza o Hamiltoniano.

§ 4 - Condições Necessárias para o Problema com $U_i(x_i)$.

Queremos agora estabelecer condições necessárias para o problema -1, onde os conjuntos de restrições dos valores dos controles dependem também do estado. Reescrevemos o problema -1 como problema -2 e formulamos a hipótese de inclusão em (23).

(18) Problema -2 . Dado um sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i,u_i) \qquad i=0,1,\dots,k-1$$

onde $x_i \in E^n$ é o estado do sistema no tempo i, $u_i \in E^m$ é a entrada do sistema no tempo i ,e f_i uma função

$$f_i : E^n \times E^m \to E^n \quad .$$

Achar uma sequência $\hat{U} = (\hat{u}_o,\hat{u}_1,\dots,\hat{u}_{k-1})$ e uma correspondente trajetória $\hat{X} = (\hat{x},\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_k)$ que minimize a soma

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0\,(x_i,u_i)$$

onde $f_i^0 : E^n \times E^m \to E$. A minimização está sujeita a:

$$u_i \in U_i(x_i) \subset E^m \qquad i=0,1,\dots,k-1$$

$$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o'' \qquad \text{onde } X_o' = \{x/q_o(x) \leq 0\}$$

$$X_o'' = \{x/g_o(x) = 0\}$$

com

$$q_o : E^n \to E^{m_o}$$

$$g_o : E^n \mapsto E^{l_o}$$

$$x_k \in X_k = X'_k \cap X''_k \qquad \text{onde} \qquad X'_k = \{x / g_k(x) \leq 0\}$$

$$X''_k = \{x / g_k(x) = 0\}$$

$$\text{com} \qquad q_k : E^n \to E^{m_k}$$

$$g_k : E^n \mapsto E^{l_k}$$

$$x_i \in X_i = X'_i \cap E^n = \{x / q_i(x) \leq 0\} \qquad i=1,2,\ldots,k-1$$

$$\text{com} \qquad q_i : E^n \to E^{m_i}$$

$$x \mapsto (q_i^1(x), \ldots, q_i^j(x) \ldots, q_i^{m_i}(x))$$

Cabe aqui observar que a única diferença entre o problema -1, formulado em (2), e o problema -2, formulado em (18), é que os conjuntos de restrição dos controles dependem também do estado i.e. $U_i(x_i)$.

Para obtenção de condições necessárias acrescentamos as hipóteses.

Hipóteses-2

(19) A - Para cada $i=0,1,\ldots,k-1$ e todo $u \in U_i(x_i)$ as funções

$f_i(\ \ ,u) : E^n \to E^n$

são continuamente diferenciáveis.

Seja $b_o = (-1,0,\ldots,0) \in E^{n+1}$ e para todo $i=0,1,\ldots,k-1$, definimos

$F_i : E^n \times E^m \to E^{n+1}$

$(x,u) \mapsto (f_i^0(x,u), f_i(x,u))$

(20) B - Para $i=0,1,\dots,k-1$ e para todo $x \in E^n$, os conjuntos

$$F_i(x,U_i(x)) \subset E^{n+1}$$

são b_o - convexos (Vide apêndice, Def.3).

(21) C - As funções $g_o : E^n \to E^{l_o}$ e $g_k : E^n \to E^{l_k}$ são continuamente diferenciáveis e têm matrizes jacobianas $\dfrac{\partial\, g_o(x)}{\partial\, x}$ e $\dfrac{\partial\, g_k(x)}{\partial\, x}$ com posto máximo para todo $x \in X_o$ e $x \in X_k$ respectivamente.

(22) D - Para todo $x \in X_i'$ e $i=0,1,\dots,k$ os gradientes das restrições ativas, $\nabla\, q_i^j(x)$, com $j \in I_i(x) = \{j/q_i^j(x) = 0\}$ são vetores linearmente independentes.

Hipótese de Inclusão

Se $\hat{X} = (\hat{x},\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_k)$ é uma trajetória ótima do problema formulado em (18), então

(23) $$\text{co}\, F_i(x_i,U_i(\hat{x}_i)) \subset \text{co}\, F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) \quad \text{para todo} \quad x_i \in X_i .$$

Observemos que o conjunto de Hipóteses -1 é igual ao conjunto de Hipóteses -2 a menos dos conjuntos de restrição dos controles $U_i(x_i)$.

No conjunto de Hipóteses -2 ítem B, a exigência dos conjuntos $F_i(x,U_i,(x)) \subset E^{n+1}$ serem b_o-convexos implica que para todos $F_i(x,u')$ e $F_i(x,u")$ em $F_i(x,U_i(x))$, (logo u', $u" \in U_i(x)$) e $0 \leq \lambda \leq 1$ temos

$$\lambda F_i(x,u') + (1-\lambda)F_i(x,u") \;\in\; \text{co}\, F_i(x,U_i(x))$$

logo existe um $u(\lambda) \in U_i(x)$ tal que

$$F_i(x,u(\lambda)) = \lambda F_i(x,u') + (\lambda-1)F_i(x,u") + \beta b_o\,, \qquad \beta \geq 0$$

Então temos

$$f_i(x,u(\lambda)) = \lambda f_i(x,u') + (\lambda-1)\ f_i(x,u'')$$

e

$$f_i^0(x,u(\lambda)) \leq \lambda f_i^0(x,u') + (\lambda-1)\ f_i^0(x,u'')$$

Por sua vez, na hipótese de inclusão podemos observar que, se $U_i(x_i) \subset U_i(\hat{x}_i)$ para todo $x_i \in X_i$ então $F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i)) \subset F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$ para todo $x_i \in X_i$, e esta última relação implica (23). Logo teríamos outras maneiras de formular a hipótese de inclusão.

(24) Teorema 2-2 (Princípio do Máximo)

Se $(\hat{u}_o, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ é uma sequência de controles ótimos e $(\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)$ é uma trajetória correspondente para o problema de controle ótimo descrito em (18), então existem vetores $p_o, p_1, \ldots, p_k$ em E^n, multiplicadores $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ com $\lambda_i \in E^{m_i}$ satisfazendo $\lambda_i \leq 0$ $i=1,2,\ldots,k$, $\mu_o \in E^{l_o}$ e $\mu_k \in E^{l_k}$ e um escalar $p^o \leq 0$ tal que:

Nem todos p^0, p_o, $p_1, \ldots, p_k$, μ_o, μ_k são nulos .

Os vetores p_i satisfazem a equação

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p^0 \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right] \lambda_i$$

$$i=0,1,\ldots,k-1$$

No conjunto de partida X_o a condição de transversalidade

$$p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o \qquad \text{é satisfeita.}$$

No conjunto final X_k a condição de transversalidade

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k + \left[\frac{\partial q_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \lambda_k \quad \text{é satisfeita}$$

$$\left\langle \lambda_i, q_i(\hat{x}_i) \right\rangle = 0 \qquad i=0,1,\ldots,k$$

Para $i=0,1,\ldots,k-1$ o Hamiltoniano

$$H : E^n \times E^m \times E \times \{0,1,\ldots,k-1\} \to E$$

$$(x, u, p, p^0, i) \to p^0 \; f_i^0(x,u) + \left\langle p, f_i(x,u) \right\rangle$$

satisfaz a condição de máximo .

(25) $\quad H(\hat{x}_i,\hat{u}_i,p_{i+1},p^0,i) \geq H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^0,1)$ para todo $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$

A esta última relação nós nos referimos como "princípio do máximo".

Observação 1 - No teorema $\mu_k = 0$ sempre que $g_k \equiv 0$.

Observação 2 - O princípio do máximo formulado aqui é exatamente o mesmo que o formulado em (3), só que se exige (23).

Para demonstrar o teorema 2-2, primeiro transformamos o problema-2, dado em (18), em um problema de programação matemática. A seguir introduzimos um conjunto Ω' que será usado com a extensão do Teorema Fundamental (Vide apêndice, Teorema 3). Por último, mostramos que o conjunto $C(\hat{z},\Omega')$ é uma aproximação cônica do conjunto Ω' em $\hat{z}$ (Vide apêndice, def.11).

Transformemos então agora o problema de controle ótimo dado em (18) em um da forma do problema básico (Vide apêndice , def.4).

Para $i=0,1,\ldots,k-1$ seja $\underline{v}_i = (v_i^0, v_i) \in E^{n+1}$ onde $v_i = (v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^n) \in E^n$. Então a equação

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i) \qquad i=0,1,\ldots,k$$

é equivalente a

$$x_{i+1} - x_i = v_i \qquad \text{com} \qquad v_i \in f_i(x_i, U_i(x_i)) \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

Finalmente seja

$$z = (x_o, x_1, \ldots, x_k, v_o, v_1, \ldots, v_{k-1}) \in E^{n(k+1)+k(n+1)}$$

podemos então definir as funções f e r e o conjunto de restrições Ω como:

(26) $$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i^0$$

(27) $$r(z) = \begin{bmatrix} x_1 - x_o - v_o \\ x_2 - x_1 - v_1 \\ \vdots \\ x_k - x_{k-1} - v_{k-1} \\ g_o(x_o) \\ g_k(x_k) \end{bmatrix} = 0$$

(28) $$\Omega = \{ z = (x_o, x_1, \ldots, x_k, \underline{v}_o, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}) \;/\; x_i \in X_i^! \;,\; i=0,1,\ldots,k$$

$$\text{e } \underline{v}_i \in F_i(x_i, U_i(x_i)) \;,\; i=0,1,\ldots,k-1 \}$$

Assim em Ω os $\underline{v}_i$'s estão restringidos por $x_i \in X_i^!$ e pe los $U_i(x_i)$. Observemos também que para $z \in \Omega$, $v_i^0 = f_i^0(x_i,u_i)$ para algum $x_i \in X_i'$ e $u_i \in U_i(x_i)$. Logo, pela definição da função f temos

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} v_i^0 = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0\,(x_i,u_i) \qquad z \in \Omega$$

Introduzimos agora um conjunto Ω' que será usado com a extensão do Teorema Fundamental (Vide apêndice, Teorema 3).

Seja

(29) $$\Omega' = \{z = (x_o,x_1,\ldots,x_k,\underline{v}_o,\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_{k-1}) \;/$$

$$x_i \in X_i' \quad , \; i=0,1,\ldots,k$$

$$\text{e} \qquad \underline{v}_i \in \text{co}\, F_i(x_i,U_i(x_i)) \quad , \quad i=0,1,\ldots,k-1\,\}$$

Lema 1-2

O conjunto Ω' satisfaz as hipóteses da extensão do Teorema Fundamental em relação a Ω, f e r.

Dem.

Seja $z^* = (x_o^*,x_1^*,\ldots,x_k^*,\underline{v}_o^*,\underline{v}_1^*,\ldots,\underline{v}_{k-1}^*) \;\in\; \Omega'$

mas como os conjuntos $F_i(x_i^*,U_i(x_i^*))$ são b_o-convexos e $\underline{v}_i^* \in \text{co}\, F_i(x_i^*,U_i(x_i^*)) \subset$
$\subset E^{n+1} \quad i=0,1,\ldots,k-1$

temos que existem

$$\tilde{\underline{v}}_i \in F_i(x_i^*,U_i(x_i^*)) \quad , \; i=0,1,\ldots,k-1$$

tais que

$$\tilde{\underline{v}}_i = \underline{v}_i^* + \beta\, b_o \qquad , \; \beta \geq 0$$

logo

$$\tilde{v}_i = v_i^* \quad \text{e} \quad \tilde{v}_i^0 \leq v_i^{*0} \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

Então para

$$\tilde{z} = (x_o^*, x_1^*, \ldots, x_k^*, \underline{\tilde{v}}_o, \underline{\tilde{v}}_1, \ldots, \underline{\tilde{v}}_{k-1}) \qquad \text{temos}$$

$$r(\tilde{z}) = \begin{bmatrix} x_1^* - x_o^* - \tilde{v}_o \\ x_2^* - x_1^* - \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ x_k^* - x_{k-1}^* - \tilde{v}_{k-1} \\ g_o\,(x^*_o) \\ g_k\,(x_k^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^* - x_o^* - v_o^* \\ x_2^* - x_1^* - v_1^* \\ \vdots \\ x_k^* - x_{k-1}^* - v_{k-1}^* \\ g_o(x_o^*) \\ g_k(x^*_k) \end{bmatrix} = r(z^*)$$

e

$$f(\tilde{z}) = \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{v}_i^0 \leq \sum_{i=0}^{k-1} v_i^{*0} = f(z^*) \; .$$

Logo, o conjunto Ω' satisfaz as hipóteses da extensão do Teorema Fundamental em relação a Ω, f e r.

□

<u>Lema 2-2</u>

Suponhamos que $\hat{z} = (\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k, \underline{\hat{v}}_o, \underline{\hat{v}}_1, \ldots, \underline{\hat{v}}_{k-1})$ seja uma solução ótima do problema -2, dado em (18), i.e. $(\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k)$ é uma trajetória ótima e $\underline{\hat{v}}_i = F_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)$ para $i=0,1,\ldots,k-1$ onde $(\hat{u}_o, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ é uma sequência de controles ótimos. Além disto, assumimos as hipóteses dadas em (19) e (20). Então o conjunto

$$C\,(\hat{z},\Omega') = \{\delta z = (\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_k, \delta\underline{v}_o, \delta\underline{v}_1, \ldots, \delta\underline{v}_{k-1}) \;/$$

$$\delta x_i \in I\,C\,(\hat{x}_i, X_i')\,)$$

$$e \quad (\delta \underline{v}_i - \left[\frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right] \delta x_i) \in R\,C\,(\hat{v}_i, co\, F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))\}$$

é uma aproximação cônica do conjunto Ω' em $\hat{z}$ (Vide apêndice, Def.11).

Dem :

Em primeiro lugar, devemos mostrar que $C(\hat{z},\Omega')$ é um cone convexo. Seja então um vetor não nulo $\delta z \in C(\hat{z},\Omega')$, e $\lambda \geq 0$ um escalar arbitrário, então

$$\lambda\ \delta x_i \ \in\ I\,C\,(\hat{x}_i, X_i') \quad \text{já que}$$

$$\left\langle \nabla q_i^j(\hat{x}_i),\ \lambda\, \delta x_i \right\rangle = \lambda \left\langle \nabla q_i^j(\hat{x}_i),\ \delta x_i \right\rangle < 0$$

e

$$\left[\lambda\ \delta \underline{v}_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\ \lambda\ \delta x_i\right] \in R\,C(\underline{\hat{v}}_i,\ co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$$

pois se

$$\left[\delta \underline{v}_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\ \delta x_i\right] \in R\,C(\underline{\hat{v}}_i, co\, F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$$

então existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\underline{\hat{v}}_i + \alpha\left[\delta\, \underline{v}_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\ \delta\, x_i\right] \in co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$$

para todo $\alpha \in [0, \varepsilon]$. Então se tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\lambda}$ temos que

$$\underline{\hat{v}}_i + \alpha\left[\lambda\ \delta\, \underline{v}_i - \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\ \lambda\ \delta\, x_i\right] \in co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$$

para todo $\alpha \in [0, \varepsilon_1]$ logo (30) é verdadeira. Temos então, se $\delta z \in C(\hat{z},\Omega')$ então $\lambda\ \delta z \in C(\hat{z},\Omega')$ para $\lambda \geq 0$ i.e. $C(\hat{z},\Omega')$ é um cone. Mostremos agora que ele é convexo. Usando o Teorema 2 do apêndice, mostremos que $\delta z' + \delta z'' \in C(\hat{z},\Omega')$ se $\delta z'$ e $\delta z''$ estão em $C(\hat{z},\Omega')$. Temos então que $\delta x_i'$ e $\delta x_i''$ estão em $I\,C(\hat{x}, X_i')$ mas como

$$\left\langle \nabla q^i(\hat{z}), \delta x_i' + \delta x_i'' \right\rangle = \left\langle \nabla q^i(\hat{z}), \delta x_i' \right\rangle + \left\langle \nabla q^i(\hat{z}), \delta x_i'' \right\rangle < 0$$

(31) então $\delta x_i' + \delta x_i'' \;\varepsilon\; I\,C(\hat{x}_i, X_i')$

Por outro lado, temos também $\delta \underline{v}_i'$ e $\delta \underline{v}_i''$ pertencentes a $R\,C\,(\underline{\hat{v}}_i,\ co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$ que é uma aproximação cônica de primeira espécie(Vide proposição 2, apêndice) logo, um cone convexo. Então, pelo Teorema 2 do Apêndice

(32) $\delta \underline{v}_i' + \delta \underline{v}_i'' \;\varepsilon\; R\,C(\underline{\hat{v}}_i,\ co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$

então, de (31) e (32) temos que $\delta z' + \delta z'' \;\varepsilon\; C(\hat{z}, \Omega')$, logo $C(\hat{z}, \Omega')$ é um cone convexo.

Finalmente para toda coleção finita $\{\delta z_1, \ldots, \delta z_p\}$ de vetores linearmente independentes em $C(\hat{z}, \Omega')$ temos que exibir um $\varepsilon > 0$ e uma função contínua ξ

$$\xi : co\ \{\hat{z}, \hat{z} + \varepsilon\delta z_1, \ldots, \hat{z} + \varepsilon\delta z_p\} \to \Omega'$$

tal que

$$\xi\ (\hat{z} + \delta z) = \hat{z} + \delta z + 0(\delta z)$$

onde $\lim\limits_{||\delta z|| \to 0} \dfrac{||0(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$

Seja então $\delta z_1, \delta z_2, \ldots, \delta z_p$ uma coleção finita de vetores linearmente independentes em $C(\hat{z}, \Omega')$ com

$$\delta z_j = (\delta x_{oj}, \delta x_{1j}, \ldots, \delta x_{kj}, \delta \underline{v}_{oj}, \delta \underline{v}_{1j}, \ldots, \delta \underline{v}_{(k-1)j})$$

logo, pela definição de $C(\hat{z}, \Omega')$, temos que

$$\delta x_{ij} \;\varepsilon\; I\,C(\hat{x}_i, X_i')\ ,\quad i=0,1,\ldots,k \quad e \quad j=1,2,\ldots,p$$

e

$$\delta \underline{v}_{ij} = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \delta x_{ij} + (\underline{v}_{ij} - \hat{v}_i) \qquad \begin{array}{l} i=0,1,\ldots,k-1 \\ j=1,2,\ldots,p \end{array}$$

onde

$(\underline{v}_{ij} - \hat{v}_i) \in R\,C\,(\hat{\underline{v}}_i, co\, F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$. Como os cones internos $I\,C\,(\hat{x}_i,X_i')$ e os cones radiais $R\,C\,(\hat{v}_i,\, co\, F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$ são aproximações cônicas de primeira espécie (apêndice, proposição 2, teorema 4) então para a coleção $\{\delta x_{i1},\delta x_{i2},\ldots,\delta x_{ip}\}$ de vetores linearmente independentes em $IC(\hat{x}_i,X_i')$ e para a coleção $\{\underline{v}_{i1} - \hat{\underline{v}}_i, \underline{v}_{i2},\ldots,\underline{v}_{ip} - \hat{\underline{v}}_i\}$ de vetores linearmente independentes em $RC(\hat{\underline{v}}_i, coF_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)))$ então existe $E>0$ tal que

$$co\{\hat{x}_i,\hat{x}_i + E\delta x_{i1},\hat{x}_i + E\delta x_{i2},\ldots,\hat{x}_i + E\delta x_{ip}\} \subset X_i'$$

e

$$co\{\hat{\underline{v}}_i,\hat{\underline{v}}_i + E(\underline{v}_{i1} - \hat{\underline{v}}_i),\hat{\underline{v}}_i + E\,(\underline{v}_{i2} - \hat{\underline{v}}_i),\ldots,\hat{\underline{v}}_i + E(\underline{v}_{ip} - \hat{\underline{v}}_i)\} \subset$$

$$\subset \quad co\, F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$$

Conseqüentemente, pela proposição 1 do apêndice para quaisquer escalares $\mu^1, \mu^2,\ldots,\mu^p$ satisfazendo $\mu^j \geq 0$ $j=1,2,\ldots,p$ e $\sum_{j=1}^{p} \mu^j \leq 1$ temos

$$\hat{x}_i + E \sum_{j=1}^{p} \mu^j\, \delta x_{ij} \quad \varepsilon \quad X_i' \qquad i=0,1,\ldots,k$$

e

$$\hat{\underline{v}}_i + E \sum_{j=1}^{p} \mu^j (\underline{v}_{ij} - \hat{\underline{v}}_i) \quad \varepsilon \quad co\, F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) \qquad i=0,1,\ldots,k$$

Nós afirmamos que o acima citado $E>0$ serve para nosso propósito e portanto passamos à construção da função ξ. (Justificamos a afirmativa no processo de construção).

Construiremos a função ξ em duas etapas. Primeiro obteremos uma representação para os vetores $z = \hat{z} + \delta z$ pertencentes a $co\ \{\hat{z}, \hat{z} + E\delta z_1, \ldots, \hat{z} + E\delta z_p\}$ em termos dos vetores em X_i' e em $F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$. Então, como sabemos que a função ξ tem de ter uma expansão da forma $\xi\ (\hat{z} + \delta z) = \hat{z} + \delta z + 0(\delta z)$ definimos ξ de maneira que a parte linear tenha a representação obtida na primeira etapa e, além do mais, $\xi(\hat{z} + \delta z) \in \Omega'$.

Seja $C = co\ \{\hat{z}, \hat{z} + E\delta z_1, \hat{z} + E\delta z_2, \ldots, \hat{z} + E\delta z_p\}$. Então para qualquer $z \in C$ temos

$$z = \hat{z} + E \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \quad \delta z_j \ , \ \mu^j(z) \geq 0 \quad , \ \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \leq 1$$

(33) logo $\quad \delta z = z - \hat{z} = E \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \quad \delta z_j$.

Além do mais, como os vetores δz_j são linearmente independentes para cada $z \in C$ os escalares $\mu^j(z)$ $j=1,2,\ldots,p$ são univocamente determinados por (33).

Agora, como $(\underline{v}_{ij} - \hat{\underline{v}}_i) \in R\ C(\hat{\underline{v}}_i,\ co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)))$, temos que:

$$\hat{\underline{v}}_i + E \sum_{k=1}^{p} \mu^k(\underline{v}_{ik} - \hat{\underline{v}}_i) \in co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$$

para quaisquer escalares $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^p$ satisfazendo $\mu^k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^{p} \mu^k \leq 1$. Logo se tomamos $\mu^j = 1$ e $\mu^k = 0$ para $k \neq j$ então

$$\hat{\underline{v}}_i + E\ (\underline{v}_{ij} - \hat{\underline{v}}_i) \quad \in \quad co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)) \quad , \qquad \begin{array}{l} i=0,1,\ldots,k-1 \\ j=1,2,\ldots,p \end{array}$$

Logo como $\hat{\underline{v}}_i + E\ (\underline{v}_{ij} - \hat{\underline{v}}_i) \in co\ F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$ existem para cada $i=0,1,\ldots,k-1$ e $j=1,2,\ldots,p$, $u_{ij}^{\alpha} \in U_i(\hat{x}_i)$ com $\alpha=1,2,\ldots,s_i$ tais que:

$$\underline{\hat{v}}_i + E\,(\underline{v}_{ij} - \underline{\hat{v}}_i) = \sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^\alpha\, F_i(\hat{x}_i, u_{ij}^\alpha)$$

com $i=0,1,\ldots,k-1$ $j=1,2,\ldots,p$ e onde $\lambda_i^\alpha \geq 0$ e $\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^\alpha = 1$. Conseqüentemente, para qualquer $\delta z = (\delta x_o, \delta x_1, \ldots, \delta x_k, \delta\underline{v}_o, \ldots, \delta\underline{v}_{k-1}) = z - \hat{z}$ onde $z \in C$, temos

$$\delta x_i = E \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\; \delta x_{ij} \qquad i=0,1,\ldots,k-1 \tag{34}$$

e

$$\delta\underline{v}_i = \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\, x}\, \delta x_i + E \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\; (\underline{v}_{ij} - \underline{\hat{v}}_i) = \tag{35}$$

$$= \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\, x}\, \delta x_i + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^\alpha\, F_i(\hat{x}_i, u_{ij}^\alpha) - \underline{\hat{v}}_i \right]$$

$$i=0,1,\ldots,k-1$$

As expressões (34) e (35) nos dão a desejada representação de vetores em C em termos de vetores em X_i' e em $F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$.

Definiremos agora a função $\xi : C \to \Omega'$. Seja $z=(x_o, x_1, \ldots, x_k, \underline{v}_o, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}) \in C$ um vetor arbitrário e $\delta z = z - \hat{z}$ então

$$\xi = (y_o, y_1, \ldots, y_k, \underline{w}_o, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-1})$$

onde $y_i(z) = x_i$ $\quad i=0,1,\ldots,k$

e

$$\underline{w}_i(z) = F_i(x_i,\hat{u}_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^\alpha\, F_i(x_i, u_{ij}^\alpha) - F_i(x_i,\hat{u}_i) \right]$$

onde os $\mu^j(z)$'s estão univocamente determinados por (33).

Em primeiro lugar, observamos que por construção, para todo $z = (x_o, x_1, \ldots, x_k, \underline{v}_o, \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{k-1}) \in C$ temos $x_i \in X_i'$ para $i=0,1,\ldots,k$ logo

$y_i(z) \in X_i'$. Por outro lado temos a hipótese de inclusão

(36) $\quad co\, F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i)) \subset co\, F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$

Logo, como os controles u_{ij}^{α} estão em $U_i(\hat{x}_i)$ e os escalares $\mu^j(z)$ satisfazem $\mu^j(z) \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \leq 1$ é claro que $\underline{w}_i(z) \in co\, F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i))$ pois

$$\underline{w}_i(z) = F_i(x_i, \hat{u}_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^{\alpha} F_i(x_i, u_{ij}^{\alpha}) - F_i(x_i, \hat{u}_i) \right] =$$

$$= F_i(x_i, \hat{u}_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^{\alpha} F_i(x_i, u_{ij}^{\alpha}) - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\, F_i(x_i, \hat{u}_i) =$$

$$= (1 - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)) F_i(x_i, \hat{u}_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^{\alpha} F_i(x_i, u_{ij}^{\alpha})$$

mas

$$\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^{\alpha} = 1 \qquad \text{logo}$$

$$(1 - \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^{\alpha} = 1$$

então $\underline{w}_i(z)$ é uma combinação convexa de elementos de $F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i))$ logo, $\underline{w}_i(z) \in co\, F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i))$ e por (36) temos $\underline{w}_i(z) \in co\, F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$.

Então a função ξ é realmente de C em Ω' por construção. Temos que mostrar ainda que ξ pode ser escrita da forma $\xi(\hat{z} + \delta z) = \hat{z} + \delta z + 0(\delta z)$. Seja então

$$\mu(z) = (\mu^1(z), \mu^2(z), \ldots, \mu^p(z)) = \begin{bmatrix} \mu^1(z) \\ \mu^2(z) \\ \vdots \\ \mu^p(z) \end{bmatrix}$$

Mas já sabemos de (33) que para $z \in C$ temos

$$\delta z = z - \hat{z} = \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z)\ E\ \delta z_j$$

logo

$$z - \hat{z} = \begin{bmatrix} E\,\delta\, z_1 & E\,\delta\, z_p & \dots & E\,\delta\, z_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^1(z) \\ \mu^2(z) \\ \vdots \\ \mu^p(z) \end{bmatrix}$$

então $z - \hat{z} = A\,\mu(z)$ onde $A = \begin{bmatrix} E\,\delta\, z_1 & E\,\delta\, z_2 & \dots & E\,\delta\, z_p \end{bmatrix}$. Mostremos que A é injetiva pois daí podemos garantir uma inversa à esquerda para A (Vide apêndice, proposição 3).

Seja $Aa = y$ $Ab = y$ então $A(a-b) = 0$ i.e.

$E\ \delta z_1(a^1 - b^1) + \dots + E\ \delta z_p(a^p - b^p) = 0$ mas os δz_i's são linearmente independentes, logo $(a^i - b^i) = 0$ $i=1,2,\dots,p$ i.e. $a=b$ e então A é injetiva. Conseqüentemente podemos garantir que existe Y inversa à esquerda de A, tal que

(37) $\quad Y(z - \hat{z}) = \mu(z) \quad$ ou $\quad Y\delta z = \mu(z)$

Seja agora $Z_i(z)$ uma matriz com p colunas onde a j-ésima coluna desta matriz é dada por

(38) $$\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^\alpha F_i(x_i, u_{ij}^\alpha) - F_i(x_i, \hat{u}_i)$$

então

$$Z_i(z) = \begin{bmatrix} Z_i^1(x) & Z_i^2(z) & \dots & Z_i^p(z) \end{bmatrix}$$

onde $Z_i^j(z) = (38)$. Mas da definição da função ξ temos que

$$\underline{w}_i(z) = F_i(x_i, \hat{u}_i) + \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{s_i} \lambda_i^\alpha F_i(x_i, u_{ij}^\alpha) - F_i(x_i, \hat{u}_i) \right]$$

então podemos substituir os somatórios da equação anterior por Y e Z_i , logo

$$\underline{w}_i(z) = F_i(x_i,\hat{u}_i) + Z_i(z)\ \mu(z)$$

então temos

$$\underline{w}_i(\hat{z} + \delta z) = F_i(\hat{x}_i + \delta x_i,\hat{u}_i) + Z_i(\hat{z} + \delta z)\ \mu(\hat{z} + \delta z)$$

e usando (37), obtemos

$$\underline{w}_i(\hat{z} + \delta z) = F_i(\hat{x}_i + \delta x_i,\hat{u}_i) + Z_i(\hat{z} + \delta z)\ Y\delta z.$$

Agora, por outro lado, temos que as funções

$$f_i^0 : E^n \times E^m \to E \qquad e \qquad F_i(\ ,u) : E^n \to E^n$$

são continuamente diferenciáveis. Logo, podemos escrever

(39) $$F_i(\hat{x}_i + \delta x_i,\hat{u}_i) = F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \left[\frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\ x}\right]\delta x_i + \bar{0}_i(\delta x_i)$$

onde

$$\lim_{||\delta x_i||\to 0} \frac{||\bar{0}_i(\delta x_i||}{||\delta x_i||} = 0$$

Além disto, temos

(40) $$Z_i(\hat{z} + \delta z)\ Y\delta z = Z_i(\hat{z})\ Y\delta z + \bar{\bar{0}}_i(\delta z)$$

pois

$$Z_i(\hat{z} + \delta z)\ Y\delta z = \left[Z_i^1(\hat{z} + \delta z)\ \dots\ Z_i^p(\hat{z} + \delta z)\right]\ Y\delta z =$$

$$= \begin{bmatrix} Z_i^{11}(\hat{z}+\delta z)\ \dots.\ Z_i^{1p}(\hat{z}+\delta z) \\ \vdots \\ Z_i^{(n+1)1}(\hat{z}+\delta z)\ \dots Z_i^{(n+1)p}(\hat{z}+\delta z) \end{bmatrix} Y\delta z$$

Observemos que um elemento genérico da matriz Z_i, $Z_i^{jk}(\hat{z}+\delta z)$ se decompõe como

$$Z_i^{jk}(\hat{z}+\delta z) = Z_i^{jk}(\hat{z}) + \left[\frac{\partial Z_i^{jk}(\hat{z})}{\partial z}\right] \delta z + O_i^{jk}(\delta z)$$

onde

$$\lim_{||\delta z||\to 0} \frac{||O_i^{jk}(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

Observemos também que se A_i é a matriz formada pelos elementos da forma $a^{jk} = \left[\frac{\partial Z_i^{jk}(\hat{z})}{\partial z}\right] \delta z$ e $O_i^{!}(\delta z)$ é a matriz formada pelos ele - tos $O^{jk}(\delta z)$ então

$$Z_i(\hat{z} + \delta z)\; Y\delta z = Z_i(\hat{z})\; Y\delta z + A_i Y\delta z + O_i^{!}(\delta z)\; Y\delta z \quad .$$

Temos também que

$$\lim_{||\delta z||\to 0} \frac{||A_i Y\delta z||}{||\delta z||} \leq \lim_{||\delta z||\to 0} \frac{||A||\;||Y||\;||\delta z||}{||\delta z||} =$$

$$= \lim_{||\delta z||\to 0} ||A||\;||Y|| \leq \lim_{||\delta z||\to 0} \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{p} \left|\left| \frac{\partial Z_i^{jk}}{\partial z}\right|\right| \; ||\delta z|| \; ||Y|| =$$

$$= 0$$

Então, se notamos $\bar{\bar{O}}_i(\delta z) = A_i Y\delta z + O_i^{!}\;(\delta z) Y\delta z$, temos

$$Z_i(\hat{z} + \delta z) = Z_i(\hat{z}) Y\delta z + \bar{\bar{O}}_i(\delta z)$$

onde

$$\lim_{||\delta z||\to 0} \frac{||\bar{\bar{O}}_i(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

Então, usando (39) e (40), podemos escrever

$$\underline{W}_i(\hat{z}+\delta z) = F_i(\hat{x}_i + \delta x_i, \hat{u}_i) + Z_i(\hat{z} + \delta z)\; Y\delta z =$$

$$= F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \delta x_i + \bar{O}_i(\delta z) + Z_i(\hat{z})\; Y\delta z + \bar{\bar{O}}_i(\delta z) =$$

$$= F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \delta x_i + Z_i(\hat{z})\; Y\delta z + O_i(\delta z)$$

onde $O_i(\delta z) = \bar{O}_i(\delta z) + \bar{\bar{O}}_i(\delta z)$. Então temos

$$(41) \qquad \underline{W}_i(\hat{z} + \delta z) = F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\,\delta x_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} \mu^j(z) \left[\sum_{\alpha=1}^{si} \lambda_i^\alpha F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_{ij}) - F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \right] + O_i(\delta z)$$

onde

$$\lim_{||\delta z||\to 0} \frac{||O_i(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

Logo, para qualquer $z = \hat{z} + \delta z \in C$ temos

$$\xi(\hat{z} + \delta z) = (y_o(\hat{z} + \delta z),\ldots,y_k(\hat{z} + \delta z),\, \underline{w}_o(\hat{z} + \delta z),\ldots,\underline{w}_{k-1}(\hat{z} + \delta z))$$

(42) mas $y_i(\hat{z} + \delta z) = \hat{x}_i + \delta x_i \qquad i=0,1,\ldots,k$

e de (41) e de (35) temos que

(43) $\underline{w}_i(\hat{z} + \delta z) = \hat{\underline{v}}_i + \delta v_i + O_i(\delta z) \qquad i=0,1,\ldots,k-1$

logo, de (42) e (43), temos que a função ξ se decompõe em

$$\xi\,(\hat{z} + \delta z) = \hat{z} + \delta z + O(\delta z)$$

onde

$$\lim_{||\delta z||\to 0} \frac{||O(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

e consequentemente, temos que $C(\hat{z},\Omega')$ é uma aproximação cônica do conjunto Ω' em $\hat{z}$.

□

Logo, agora temos que o conjunto Ω' definido em (29) satisfaz as condições da extensão do teorema fundamental (Apêndice, Teorema 3) em relação ao conjunto Ω definido em (28) e em relação às funções f e r definidas em (26) e (27). Além disto, o conjunto $C(\hat{z},\Omega')$ é uma aproximação cônica de Ω'

em $\hat{z}$. Concluímos então da extensão do teorema fundamental que existe um vetor não nulo $\Psi = (p^0, \Pi)$, com $p^0 \leq 0$ e $\Pi = (-p_1, -p_2, \ldots, -p_k, \mu_o, \mu_k)$ onde $p^0 \in E$, $p_i \in E^n$, $\mu_o \in E^{l_o}$ e $\mu_k \in E^{l_k}$ tal que

$$\left\langle \Psi \, , \, \frac{\partial F(\hat{z})}{\partial x} \, \delta z \right\rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \delta z \in C(\hat{z}, \Omega') \quad \text{e} \quad \text{onde}$$

$$F(z) = \begin{bmatrix} f(z) \\ \\ r(z) \end{bmatrix}$$

então

$$p^0 \left\langle \nabla f(\hat{z}), \delta z \right\rangle + \left\langle \Pi \, ; \, \frac{\partial r(\hat{z})}{\partial z} \, \delta z \right\rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \delta z \in C(\hat{z}, \Omega'). \tag{44}$$

Substituindo então f e r em (44), temos para todo $\delta z \in$ $\in C(\hat{z}, \Omega')$:

$$p^0 \sum_{i=0}^{k-1} \delta v_i^0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left\langle - p_{i+1} \, , \, (\delta x_{i+1} - \delta x_i - \delta v_i) \right\rangle + \left\langle \mu_o, \frac{\partial g_o(x_o)}{\partial x} \, \delta x_o \right\rangle + \tag{45}$$

$$+ \left\langle \mu_k, \frac{\partial g_k(x_k)}{\partial x} \, \delta x_k \right\rangle \leq 0$$

Estamos agora em condições de demonstrar o Teorema 2-2 .

<u>Dem.</u>

As hipóteses C e D dadas em (21) e (22) respectivamente, nos garantem que nem todos os p^0 , p_0 , p_1 , ... , p_k , μ_o , μ_k são nulos. Provemos agora (25). Suponhamos que

$$\delta z = (0, 0, \ldots, 0, \delta \underline{v}_i, 0, \ldots, 0) \in C(\hat{z}, \Omega')$$

então de (45), temos

$$p^0 \delta v_i^0 + \left\langle p_{i+1}, \delta v_i \right\rangle \leq 0 \quad \text{para todo} \quad \delta \underline{v}_i \in R\,C(\hat{\underline{v}}_i, \text{co}\, F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i)) \,.. \tag{46}$$

Mas $F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i)) \subset \text{co}\, F_i(x_i, U_i(\hat{x}_i)) \subset \text{co}\, F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i)) \subset RC(\hat{\underline{v}}_i, \text{co}\, F_i(\hat{x}_i, U_i(\hat{x}_i))$

logo, de (46) obtemos

(47) $$p^0\left[f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i) - f_i^0(\hat{x}_i,u_i)\right] + \left\langle p_{i+1},\ f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) - f_i(x_i,u_i)\right\rangle \geq 0$$

que é uma expansão de (25). Observemos que a aderência do conjunto

$$RC(\hat{\underline{v}}_i,\ co\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i)) + \{\ \hat{\underline{v}}_i\ \}$$

contém o conjunto $co\ F_i(\hat{x}_i,U_i(\hat{x}_i))$; como este último é convexo e (47) vale para todo $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$ temos que (25) é verdadeira.

Seja agora $\delta z = (0,0,\ldots,0,\delta x_k,0,0,\ldots,0)$ com $\delta x_k \in \overline{IC}(x_k,X_k')$. Então (45) nos dá a relação

$$\left\langle -p_k + \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k,\ \delta x_k\right\rangle \leq 0$$

para todo $\delta x_k \in \overline{IC}(\hat{x}_k,X_k')$, isto é, para todo δx_k satisfazendo $\left[\frac{\partial q_k^j(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]\delta x_k \leq 0$, com $q_k^j(\hat{x}_k) = 0$ e $j \in \{1,2,\ldots,m_k\}$. Aplicando o lema de Farkas (Apêndice, proposição 4), temos que existe um vetor em E^{m_k} tal que

$$-p_k + \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k = -\left[\frac{\partial q_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \lambda_k$$

e

$$\left\langle \lambda_k,\ q_k(\hat{x}_k)\right\rangle = 0\ ,\ \text{isto é}$$

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k + \left[\frac{\partial q_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \lambda_k$$

e

$$\left\langle \lambda_k, q_k, (\hat{x}_k)\right\rangle = 0$$

Analogamente, seja $\delta z = (0,0,\ldots,\delta x_i,0,\ldots,\delta\underline{v}_i,0,\ldots,0)$ um vetor de $C(\hat{z},\Omega')$ $i \neq k$ com

$$\delta\underline{v}_i = \left[\frac{\partial F_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]\delta x_i$$

Então, de (45), temos:

$$\left\langle p^0 \frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}, \delta x_i \right\rangle + \left\langle p_{i+1}, \frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} \delta x_i \right\rangle + \left\langle p_{i+1}, \delta x_i \right\rangle -$$

$$- \left\langle p_i, \delta x_i \right\rangle \leq 0$$

para todo $\partial x_i \in \overline{IC}(\hat{x}_i, X_i')$, isto é, para todo δx_i satisfazendo $\left[\frac{\partial q_i^j(\hat{x}_i)}{\partial x_i}\right] \partial x_i \leq 0$, onde $q_i^j(\hat{x}_i) = 0$ para $j \in \{1,2,\ldots,m_i\}$. Aplicando novamente o Lema de Farkas, obtemos

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i$$

$$i=0,1,\ldots,k-1$$

e

$$\left\langle \lambda_i, q_i(\hat{x}_i) \right\rangle = 0 \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

Finalmente $p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$ é simplesmente uma definição constante.

□

<u>Exemplo 4</u>

Dado o sistema dinâmico descrito pela equação

$$x_{i+1} - x_i = (u_i)^2 - 1$$

com $x_i \in E$, $u_i \in E$, onde queremos minimizar

$$J(X,U) = \sum_{i=0}^{1} f_i^0(x_i,u_i) = (u_o)^2$$

Na nossa notação temos: $k=2$, $f_i(x_i,u_i) = (u_i)^2 - 1$, $f_o^0\ (x_o,u_o) = u_o^2$ e $f_1^0\ (x_1,u_1) = 0$

Sujeito a :

$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o''$ onde $q_o : E \to E^{m_o}$, $x \to 0$

$g_o : E \to E$, $x \to x-1$

logo

$X_o' = \{x/q_o(x) \leq 0\} = E$

$X_o'' = \{x/g_o(x) = 0\} = \{1\}$

então

$X_o = \{1\}$

$x_2 \in X_2 = X_2' \cap X_3''$ onde $q_2 : E \to E$, $x \to 0$

$g_2 : E \to E$, $x \to 0$

logo

$X_2' = \{x/q_2(x) \leq 0\} = E$

$X'' = \{x/g_2(x) = 0\} = E$

então

$X_2 = E$

$$x_1 \in X_1 = X_1' \cap E \qquad \text{onde} \qquad q_1 : E \to E^{m_1}$$
$$x \to 0$$

logo

$$X_1' = \{x/q_1(x) \leq 0\} = E$$

então

$$X_1 = E$$

Os conjuntos de restrição dos controles são

$$U_i(x_i) = \{u/ -|x_i| \leq u \leq |x_i|\}$$

Temos então a solução.

Como $x_o = 1$ temos que $u_o \in U_o(1) = \{u/-1 \leq u \leq 1\}$. Logo, se tomamos $u_o = 0$ temos $x_1 = x_o + (u_o)^2 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$ e $u_1 \in U_1(0) = \{u/0 \leq u \leq 0\} = \{0\}$. Então, $x_2 = x_1 + (u_1)^2 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$. Conseqüentemente temos

$$\hat{U} = (0,0) \qquad \hat{X} = (1,0,-1)$$

e

$$J(\hat{U}, \hat{X}) = 0$$

Observemos que, quando fixamos as restrições dos controles para cada i, $U_i = U_i(\hat{x}_i))$, i.e. quando formulamos o problema derivado, ele admite a mesma solução i.e. $U^* = (0,0)$ e $X^* = (1,0,-1)$ como solução ótima. Senão vejamos, temos que

$$U_o = U_o(\hat{x}_o) = U_o(1) = \{u/-1 \leq u \leq 1\} = [-1,1]$$

$$U_1 = U_1(\hat{x}_1) = U_1(0) = \{u/0 \leq u \leq 0\} = \{0\}$$

e como $x_o^* = 1$ temos $u_o^* = 0 \in U_o$, já que queremos minimizar $J(X,U) = (u_o)^2$.

A seguir obtemos $x_1^* = x_o^* + (u_o^*)^2 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0$ e $u_1^* = 0$, então $x_2^* =$ $= x_1^* + (u_1^*)^2 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1$.

então

$$\mathcal{U}^* = (0,0) = \hat{\mathcal{U}} \qquad \text{e} \qquad X^* = (1,0,-1) = \hat{X}$$

Além do mais, temos que a solução ótima, $\hat{X}$ e $\hat{\mathcal{U}}$, satisfaz o "princípio do máximo"(25) .

Temos o Hamiltoniano

$$H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^0,i) = p^0 f_i^0(\hat{x},u_i) + \left\langle p_{i+1},\ f_i(\hat{x}_i,u_i)\right\rangle$$

que deve ser maximizado por $\hat{u}_i$, para todo $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$. Mas no nosso problema temos

a) $f_i(x_i,u_i) = (u_i)^2 - 1$ então $\dfrac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = 0$

b) $f_i^0(x_i,u_i) = \begin{cases} (u_o)^2 & \text{se } i=0 \\ 0 & \text{se } i=1 \end{cases}$ então $\dfrac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = 0$

c) $q_i(x) \equiv 0$ então $\dfrac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x} = 0$

d) $g_o(x) = x - 1$ então $\dfrac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} = 1$

e) $g_2(x) = 0$ então $\dfrac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial x} = 0$

Mas como

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p_o \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i \qquad i=0,1$$

então de a), b) e c) temos

(48) $\quad p_i - p_{i+1} = 0 \qquad i=0,1,$

além disto

$$p^0 = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} \right]^T \mu_o$$

então de d) temos

(49) $\quad p_o = - \mu_o$

e mais

$$p_2 = \left[\frac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial x} \right]^T \mu_2 + \left[\frac{\partial q_2(\hat{x}_2)}{\partial x} \right]^T \lambda_2$$

então de c) e e), temos

(50) $\quad p_2 = 0$

logo, de (48), (49) e (50) temos

(51) $\quad p_2 = p_1 = p_o = - \mu_o = 0$

(52) e como $g_2 \equiv 0$ temos $\mu_2 = 0$

Temos então que o Hamiltoniano se escreve para $i=0,1$ como

(53) $\quad H(\hat{x}_o, u_o, p_1, p^0, 0) = p^0 (u_o)^2$

(54) $\quad H(\hat{x}_1, u_1, p_2, p^0, 1) = 0$

então como $p^0 < 0$, já que por (51) e (52) $p_2 = p_1 = p_o = - \mu_o = \mu_2 = 0$, temos que $\hat{u}_o = 0$ maximiza (53) e $\hat{u}_1 = 0$ maximiza (54). Isto é, o princípio do máximo é satisfeito.

Vale a pena observar ainda que neste problema $U_i(\hat{x}_i) \subset U_i(x_i)$ para todo x_i que satisfaz $x_{i+1} - x_i = (u_i)^2 - 1$, pois

$$U_o(\hat{x}_o) = U_o(1) \subset U_o(x_o) = U_o(1) \quad \text{já que} \quad X_o = \{1\}$$

e

$$U_1(\hat{x}_1) = U_1(0) = \{0\} \subset U_1(x_1) = \{u/ - |x_1| \leq u \leq |x_1|\} = *$$

mas $x_1 = x_o + (u_o)^2 - 1 = 1 + (u_o)^2 - 1 = (u_o)^2$

logo

$$* = \{u/-(u_o)^2 \leq u \leq (u_o)^2\} = ** \qquad \text{mas}$$

$$u_o \in U_o(x_o) = U_o(1) = \{u/-1 \leq u \leq 1\} = [-1,1]$$

logo

$$** = \{u/-1 \leq u \leq 1\} = [-1,1]$$

CAPÍTULO III

§ 1 - Apresentação

Apresentamos agora um problema de controle ótimo onde os conjuntos de restrição dos controles, $U_i(x_i)$ são descritos por uma desigualdade do tipo $R_i(x_i,u) \leq 0$, onde R_i é uma função continuamente diferenciável. Sugerimos a seguir um "princípio do máximo modificado" para este tipo de problema e damos condições em que ele é satisfeito. Finalmente, retomamos o exemplo 3 do capítulo II e mostramos que ele satisfaz o "princípio do máximo modificado".

§ 2 - Princípio do Máximo Modificado

(55) Problema : Consideremos um sistema dinâmico descrito pela equação

(56) $$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i,u_i) \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

onde $x_i \in E^n$ é o estado do sistema no tempo i, $u_i \in E^m$ é a entrada do sistema no tempo i, e f_i uma função $f_i : E^n \times E^m \to E^n$. Achar uma sequência $\hat{U} = (\hat{u}_o,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{k-1})$ e uma correspondente trajetória $\hat{X} = (\hat{x}_o,\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_k)$ satisfazendo (56) que minimize a soma

$$\sum_{i=0}^{k-1} f_i^0 \, (x_i,u_i)$$

onde $f_i^0 : E^n \times E^m \to E \qquad i=0,1,\ldots,k-1$

A minimização está sujeita às seguintes restrições:

$$u_i \in U_i(x_i) = \{u/R_i(x_i,u) \leq 0 \} \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

onde $R_i : E^n \times E^m \to E^{w_i}$

$$x_o \in X_o = X_o' \cap X_o'' \qquad \text{onde} \qquad X_o' = \{x / q_o(x) \le 0\}$$

$$X_o'' = \{x / g_o(x) = 0\}$$

$$\text{com} \qquad q_o : E^n \to E^{m_o}$$

$$g_o : E^n \to E^{l_o}$$

$$x_k \in X_k = X_k' \cap X_k'' \qquad \text{onde} \qquad X_k' = \{x / q_k(x) \le 0\}$$

$$X_k'' = \{x / g_k(x) = 0\}$$

$$\text{com} \qquad q_k : E^n \to E^{m_k}$$

$$g_k : E^n \to E^{l_k}$$

$$x_i \in X_i = X_i' \cap E^n = \{x / q_i(x) \le 0\} \qquad i=1,2,\ldots,k-1$$

$$\text{com} \qquad q_i : E^n \to E^{m_i}$$

Além disto, as funções f_i, f_i^0, R_i, q_i, g_o e g_k são continuamente diferenciáveis.

Teorema 1 - 4

Se $\hat{z} = (\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k, \hat{u}_o, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ é uma solução ótima do problema descrito em (55), então existem vetores $p_o, p_1, \ldots, p_k$ em E^n, $\mu_o \in E^{m_o}$, $\mu_k \in E^{m_k}$, $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ onde $\lambda_i \in E^{m_i}$ e $\lambda_i \le 0$ $(i=0,1,\ldots,k)$, $\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ onde $\gamma_i \le 0$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$ e um escalar $p^0 \in E$ $p^0 \le 0$, tal que :

não todos $p_o, p_1, \ldots, p_k, \mu_o, \mu_k, \lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$, p^0 são nulos.

(57) $$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T \gamma_i \,, \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

(58) $$p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$$

(59) $$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k + \left[\frac{\partial q_k(x_k)}{\partial x}\right]^T \lambda_k$$

(60) $$p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T \gamma_i = 0$$
$$i=0,1,\ldots,k-1$$

(61) $$\left\langle \lambda_i, q_i(\hat{x}_i) \right\rangle = 0 \qquad i=0,1,\ldots,k$$

(62) $$\left\langle \gamma_i \,,\, R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \right\rangle = 0 \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

Dem.

Podemos transformar o problema dado em (55) em um problema da forma: minimize $f(z)$ sujeito a $r(z) = 0$ e $z \in \Omega = \{z/Q(z) \leq 0,\ R(z) \leq 0\}$ (Vide apêndice, Def.14) .

Fazemos então as identificações

$$z = (x_o,x_1,\ldots,x_k,u_o,u_1,\ldots,u_{k-1}) \in E^{n(k+1)+mk} = E^v$$

e sejam f, r, Q e R definidas por:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k-1} f_i^0 \,(x_i, u_i)$$

então $f : E^v \to E$

$$r(z) = \begin{bmatrix} x_1 - x_o - f_o(x_o,u_o) \\ x_2 - x_1 - f_1(x_1,u_1) \\ \vdots \\ x_k - x_{k-1} - f_{k-1}(x_{k-1},u_{k-1}) \\ g_o(x_o) \\ g_k(x_k) \end{bmatrix} = 0$$

então $r : E^v \to E^{nk + l_o + l_k} = E^l$

$$Q(z) = \begin{bmatrix} q_o(x_o) \\ q_i(x_1) \\ \vdots \\ q_k(x_k) \end{bmatrix}$$

então $Q : E^v \to E^{m_o} \times E^{m_1} \times \ldots \times E^{m_k} = E^s$

$$R(z) = \begin{bmatrix} R_o(x_o,u_o) \\ R_1(x_1,u_1) \\ \vdots \\ R_{k-1}(x_{k-1},u_{k-1}) \end{bmatrix} \leq 0$$

então $R : E^v \to E^{w_o} \times E^{w_1} \times \ldots \times E^{w_{k-1}} = E^w$

e Ω é definido por $\Omega = \{z / Q(z) \leq 0 \ , \ R(z) \leq 0\}$

Pelo teorema de Fritz John (Vide apêndice, teorema 5), temos que existem um escalar ψ^0 , um vetor $\psi \in E^l$, um vetor $\lambda \in E^s$ e um vetor $\gamma \in E^w$ tal que :

(63) $$\left[\frac{\partial f(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \psi^0 + \left[\frac{\partial r(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \psi + \left[\frac{\partial Q(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \lambda + \left[\frac{\partial R(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \gamma = 0$$

$$\langle \lambda, Q(\hat{z}) \rangle = 0$$

$$\langle \gamma, R(\hat{z}) \rangle = 0$$

Observemos que podemos escrever

$$\psi \in E^l = \underbrace{E^n \times E^n \times \ldots \times E^n}_{k} \times E^{m_o} \times E^{m_k}$$

(64) i.e. $\psi = (-p_1, -p_2, \ldots, -p_k, \mu_o, \mu_k)$

onde $p_i \in E^n$ $i=1,2,\ldots,k$

$\mu_o \in E^{m_o}$ e $\mu_k \in E^{m_k}$

(65) $\lambda \in E^s = E^{m_o} \times E^{m_1} \times \ldots \times E^{m_k}$

i.e. $\lambda = (\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$

onde $\lambda_i \in E^{m_i}$ $i=0,1,\ldots,k$

(66) $\gamma \in E^w = E^{w_o} \times E^{w_1} \times \ldots \times E^{w_{k-1}}$

i.e $\gamma = (\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1})$

onde $\gamma_i \in E^{w_i}$ $i=0,1,\ldots,k-1$

(67) além disto escrevemos $\psi^0 = p^0$

Se então resolvemos a equação (63) usando (64), (65), (66) e (67), obtemos

$$p_i - p_{i+1} = \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T p_{i+1} + p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial x}\right]^T \lambda_i +$$

$$+ \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T \gamma_i \quad , \quad i=0,1,\ldots,k-1$$

$$p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x}\right]^T \mu_o$$

$$p_k = \left[\frac{\partial g_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \mu_k + \left[\frac{\partial q_k(\hat{x}_k)}{\partial x}\right]^T \lambda_k$$

$$p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x}\right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^T \gamma_i = 0$$

$$i=0,1,\ldots,k-1$$

e resolvendo $\langle \lambda, Q(\hat{z}) \rangle = 0$ e $\langle \gamma, R(\hat{z}) \rangle = 0$ obtemos

$$\langle \lambda_i, q_i(\hat{x}_i) \rangle = 0 \qquad i=0,1,\ldots,k$$

$$\langle \gamma_i, R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i) \rangle = 0 \qquad i=0,1,\ldots,k-1$$

$\square$

<u>Corolário 1 - 4</u>

Se $\hat{z} = (\hat{x}_o,\hat{x}_1,\ldots,\hat{x}_k,\hat{u}_o,\hat{u}_1,\ldots,\hat{u}_{k-1})$ é uma solução ótima do problema descrito em (55), se

$\left[\dfrac{\partial R^T(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial u}\right]^{-1}$ existe, se $g_k \equiv 0$, se $q_i \equiv 0$ $(i=0,1,\ldots k)$ então existem vetores $p_o, p_1, \dots, p_k$ em E^n, $\mu_o \in E^n$ e $p^0 \in E$ tal que:

não todos $p_o, p_1, \dots, p_k, \mu_o, p^0$ são nulos

(68) $$p_i - p_{i+1} = \left[\left[\frac{\partial f_i^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial R^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right] \left[\frac{\partial R^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f_i^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right] \right] p_{i+1} +$$

$$+ \left[\left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} \right]^T - \left[\frac{\partial R^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial R^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^{-1} \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T \right] p_o$$

$i=0,1,\dots,k-1$

(69) $$p_o = - \left[\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial x} \right]^T \mu_o$$

(70) $$p_k = 0$$

<u>Dem.</u>

Se $\left[\frac{\partial R^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^{-1}$ existe, então de (60) obtemos

(71) $$\gamma_i = \left[\frac{\partial R^T(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^{-1} \left[p_o \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T p_{i+1} \right]$$

Se agora substituimos (71) em (50), obtemos (57). De (58) temos (69). Por hipótese temos também $g_k \equiv 0$ e $q_k \equiv 0$, então de (59) segue $p_k = 0$.

$\square$

<u>Definição</u> (Princípio do Máximo Modificado)

Se $\hat{z} = (\hat{x}_o, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k, \hat{u}_o, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{k-1})$ é uma solução ótima do problema definido em (55) dizemos que o princípio do máximo modificado é sa tisfeito se existem vetores $p_o, p_1, \ldots, p_k$ em E^n, $\mu_o \in E^{m_o}$, $\mu_k \in E^{m_k}$, $\lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ onde $\lambda_i \in E^{m_i}$ e $\lambda_i \leq 0$ $(i=0,1,\ldots,k)$, $\gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ onde $\gamma_i \in E^{w_i}$ e $\gamma_i \leq 0$ $(i=0,1,\ldots,k-1)$ e um escalar $p^0 \in E$, $p^0 \leq 0$, tal que :

não todos $p_o, p_1, \ldots, p_k, p_k, \mu_o, \mu_k, \lambda_o, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}, p^0$ são nulos.

As relações (57), (58), (59), (61) e (62) do teorema 1-4 são satisfeitas, e além disto o Hamiltoniano é maximizado por $\hat{u}_i$ para todo u_i tal que $R_i(\hat{x}_i, u_i) \leq 0$ i.e.

$$H(\hat{x}_i, \hat{u}_i, p_{i+1}, p^0, i) = \max_{u_i \in U_i(\hat{x}_i)} H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i)$$

$$i=0,1,\ldots,k-1$$

<u>Proposição 1-4</u>

Suponha que f_i, f_i^0, R_i, q_i, g_o, g_k são continuamente diferenciáveis e seja $\hat{z} = (\hat{x}_o, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k, \hat{u}_o, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{k-1})$ uma solução ótima do problema definido em (55) e p^0, p_o, $p_1, \ldots, p_k$ definidos pelo teorema 1-4. Suponhamos que sejam satisfeitas as relações $p^0 \leq 0$ $p_i \leq 0$ $i=0,1,\ldots,k$. Além disto, se f_i^0 é convexa em u para $i=0,1,\ldots,k-1$, f_i^j são convexas em u para $j=1,2,\ldots,n$ (componentes da função $f_i : E^n \times E^m \to E^n$) $i=1,2,\ldots,k-1$, e se R_i^j é convexa em u $j=1,2,\ldots,w_i$. Então o princípio do máximo modificado é satisfeito pela solução ótima $\hat{z}$, i.e. o Hamiltoniano é maximizado por $\hat{u}_i$ para todo u_i tal que $R_i(\hat{x}_i, u_i) \leq 0$.

<u>Dem.</u>

Seja

$$H_i(\hat{x}_i, u, p_{i+1}, p^0, i) = p^0 f_i^0(\hat{x}_i, u) + \left\langle p_{i+1}, f_i(\hat{x}_i, u) \right\rangle$$

ou

$$H_i = p^0 f_i^0 + p_{i+1}^1 \; f_i^1 \; + \ldots + p_{i+1}^n \; f_i^n \; .$$

Então H_i é uma função côncava. Se agora definimos

(72) $\quad T_i(u) = - H_i(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i)$

então, T_i é uma função convexa. Identificamos também

(73) $\quad S_i(u) = R_i(\hat{x}_i, u) \leq 0$

O teorema 1-4 nos diz que existe um vetor

$\gamma_i = (\gamma_i^1, \gamma_i^2, \ldots, \gamma_i^{w_i}) \in E^{w_i}$ tal que

$$p^0 \left[\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T + \left[\frac{\partial f_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T p_{i+1} + \left[\frac{\partial R_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T \gamma_i = 0$$

ou usando (72) e (73)

(74) $$- \left[\frac{\partial T_i(\hat{u})}{\partial u} \right]^T + \left[\frac{\partial S_i(\hat{u}_i)}{\partial u} \right]^T \gamma_i = 0$$

além disto

$$\gamma_i^j \; R_i^j \; (\hat{x}_i, \hat{u}_i) \leq 0 \qquad j=1,2,\ldots,w_i$$

ou usando (73)

(75) $\quad \gamma_i^j \; S_i^j \; (\hat{u}_i) = 0 \qquad j=1,2,\ldots,w_i$

Mas então as funções T_i, S_i e as relações (74) e (75) satisfazem as hipóteses do teorema 6 do apêndice, então garantimos que $\hat{u}_i$ é uma solução ótima i.e.

$$T(\hat{u}_i) \leq T(u_i)$$

$$H_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i, p_{i+1}, p^0, i) \geq H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i)$$

para todo $u_i \in U_i(x_i)$ $\square$

§ 3 EXEMPLOS

Exemplo 1

O problema é o mesmo do exemplo 2 do capítulo I e exemplo 3 do capítulo II. Mostremos que este problema satisfaz o princípio do máximo modificado. Vamos reescrevê-lo introduzindo a função R.

Temos o sistema dinâmico dado por

$$x_{i+1} - x_i = \left(-\frac{1}{2} x_i^1 + u_i^1 \; , \; \frac{1}{4} x_i^1 - u_i^2 \right) \qquad i=0,1$$

com $x_i = (x_i^1, x_i^2) \in E^2$, $u_i = (u_i^1, u_i^2) \in E^2$, onde queremos minimizar

$$J(X,U) = \sum_{i=0}^{1} \frac{1}{4} x_i^1 - u_i^2 \quad .$$

Na nossa notação temos : $k = 2$, $f_i^0(x_i, u_i) = \frac{1}{4} x_i^1 - u_i^2$ e $f_i(x_i, u_i^2)$

A minimização está sujeita a:

$$x_o \in X_o = \{(0,0)\}$$

$$x_2 \in X_2 = E^2$$

$$x_1 \in X_1 = E^2$$

$$q_i \equiv 0 \qquad i=0,1,2$$

$$g_o(x) = x \qquad \text{e} \qquad g_i = 0 \qquad i=1,2$$

Os conjuntos de restrição dos controles serão reescritos como

$$U_i(x_i) = \{u / R_i(x_i, u) \leq 0\}$$

onde a função $R_i : E^4 \to E^4$ é dada por

$$R_i(x_i,u_i) = \begin{bmatrix} u^1 - 1 \\ -u^1 - 1 \\ u^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \dfrac{(x_i^1)^2}{1+(x_i^1)^2} \\ -u^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \dfrac{(x_i^1)^2}{1+(x_i^1)^2} \end{bmatrix}$$

Como já vimos anteriormente

$$\hat{U} = \{ (\tfrac{1}{4} , -1) , \ (0, -1 + \tfrac{17}{512}) \}$$

$$\hat{X} = \{ (0,0) , (\tfrac{1}{4} , 1) , (\tfrac{1}{8} , 2 + \tfrac{15}{512}) \}$$

é uma solução ótima do problema.

Vejamos agora se o princípio do máximo modificado é satisfeito.

Temos o Hamiltoniano

$$H(\hat{x}_i,u_i,p_{i+1},p^0,i) = p^0 f_i^0(\hat{x}_i,u_i) + \left\langle p_{i+1}, f_i(\hat{x}_i,u_i)\right\rangle =$$

$$= p^0\left(\tfrac{1}{4} x_i^1 - u_i^2 \right) + p_{i+1}^1 \left(- \tfrac{1}{2} \hat{x}_i^1 + u_i^1 \right) + p_{i+1}^2 \left(\tfrac{1}{4} \hat{x}_i^1 - u_i^2 \right)$$

Mas já foi visto nos exemplos citados que:

a) $$\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\ x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) $$\frac{\partial q_i(\hat{x}_i)}{\partial\ x} = 0$$

d) $$\frac{\partial g_o(\hat{x}_o)}{\partial\ x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $$\frac{\partial g_2(\hat{x}_2)}{\partial\ x} = 0$$

Além disto, temos

f) $$\frac{\partial f_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\ u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

g) $$\frac{\partial f_i^0(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\ u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

h) $$\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\ x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \dfrac{2\hat{x}_i^1}{(1+(\hat{x}_i^1)^2)^2} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \dfrac{2\,\hat{x}_i^1}{(1+(\hat{x}_i^1)^2)^2} & 0 \end{bmatrix}$$

i) $$\frac{\partial R_i(\hat{x}_i,\hat{u}_i)}{\partial\ u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Mas então usando (57) e a), b),c) e h) temos

$$(76) \qquad p_i - p_{i+1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} p_{i+1} + p^0 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}(\frac{17}{16})^2 \dfrac{2\hat{x}_i^1}{(1+(\hat{x}_i^1)^2)^2} & \frac{1}{2}(\frac{17}{16})^2 \dfrac{2\hat{x}_i^1}{(1+(x_i^1)^2)^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

além disto, usando (58) e d) temos

$$(77) \qquad p^0 = -\mu_o$$

usando (59), c) e e) temos

$$(78) \qquad p_2 = (0,0)$$

usando (60), f) , g) e i) temos

$$(79) \qquad p^0 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} p_{i+1} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \gamma_i = 0$$

e finalmente usando (62), temos

$$(80) \qquad \gamma_i^1 R_i^1(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \gamma_i^2 R_i^2(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \gamma_i^3 R_i^3(\hat{x}_i,\hat{u}_i) + \gamma_i^4 R_i^4(\hat{x}_i,\hat{u}_i) = 0$$

De (76) temos

$$(81) \qquad p_i^1 - p_{i+1}^1 = -\frac{1}{2} p_{i+1}^1 + \frac{1}{4} p^0 + \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{2\hat{x}_i^1}{(1 + (\hat{x}_i^1)^2)^2} \gamma_i^3 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{17}{16}\right)^2 \frac{2\hat{x}_i^1}{(1 + (\hat{x}_i^1)^2)^2} \gamma_i^4$$

e

$$(82) \qquad p_i^2 - p_{i+1}^2 = 0$$

De (82) e (78) temos

$$(83) \qquad p_2^2 = p_1^2 = p_o^2 = 0$$

De (79) temos

$$(84) \qquad p_{i+1}^1 + \gamma_i^1 - \gamma_i^2 = 0$$

$$(85) \qquad - p^0 + \gamma_i^3 - \gamma_i^4 = 0$$

Escrevendo (81) para $i=1$ e lembrando que $\hat{x}_1^1 = \frac{1}{4}$ e $p_2^1 = 0$ temos

$$(86) \qquad p_1^1 = \frac{1}{4} p^0 + \frac{1}{4} (\gamma_1^3 + \gamma_1^4)$$

Escrevendo (81) para $i=0$ e lembrando que $\hat{x}_o^1 = 0$ temos

$$(87) \qquad p_o^1 = \frac{1}{2} p_1^1 + \frac{1}{4} p^0$$

Substituindo (85) em (86) obtemos

$$(88) \qquad p_1^1 = \frac{1}{2} \gamma_1^3$$

e substituindo (85) escrito para $i=1$ e (88) em (87) temos

$$(89) \qquad p_o^1 = - \frac{1}{4} \gamma_1^4$$

Reescrevendo (80) para $i=0,1$ obtemos

(90) $\quad -\frac{3}{4}\ \gamma_o^1 - \frac{5}{4}\ \gamma_o^2\ -\ \gamma_o^3\ = 0$

(91) $\quad -\ \gamma_1^1\ -\ \gamma_1^2\ + 2\ (-1 + \frac{17}{512})\ \gamma_1^3\ =\ 0$

Temos então que os vetores

$p_i = 0 \qquad i=0,1,2$

$p^0 = 0$

$\mu_o = 0$

$\mu_k = 0$

$\gamma_1 = 0$

$\gamma_o = (\ \gamma_o^{'},\ \gamma_o^2,\ \gamma_o^3,\ \gamma_o^4)$ satisfazendo a relação

$$-\frac{3}{4}\ \gamma_o^1\ - \frac{5}{4}\gamma_o^2\ - 2\ \gamma_o^3\ =\ 0$$ (excluindo a solução trivial)

satisfazem a (57), (58), (59), (61) e (62) e o Hamiltoniano $H(\hat{x}_i,\ u_i,\ p_{i+1},\ p^0,\ i)\ =\ 0$ é maximizado por $\hat{U}$, $\hat{X}$. Logo o princípio do máximo modificado é satisfeito.

Exemplo 2

Vamos agora mostrar que o princípio do máximo modificado é satisfeito por uma classe de problemas lineares positivos, que são frequentemente encontrados em sistemas econômicos.

Comecemos com uma formulação de programação dinâmica.

(92) É dado o sistema

$$x_{i+1} = (A + I)\, x_i + Bu_i$$

e mais

$$J_n(x,v) = \sum_{i=n}^{k-1} \langle \emptyset, u_i \rangle - \langle \theta, x_i \rangle$$

com o conjunto de restrições para os controles sendo

$$U_i(x_i) = \{u/0 \le u_i \le Dx_i\} \quad .$$

Assumiremos no nosso problema que as matrizes D, A+I e B tem elementos não negativos, e além disto teremos também $x_n \geq 0$. Então, das Condições de Bellman é necessário e suficiente que

(93) $$V_n(x) = \min_{0 \le u \le Dx} \left[\langle \emptyset, u \rangle - \langle \theta, x \rangle + V_{n+1}((A+I)x + Bu) \right]$$

Assumimos que $V_n(x) = -\langle p_n, x \rangle$ e $p_k = 0$

Então

$$V_n(x) = -\langle (A^T+I)\, p_{n+1} + \theta, x \rangle + \min_{0 \le x \le Dx} \langle \emptyset - B^T p_{n+1}, u \rangle$$

(94) se definimos $a_n = \emptyset - B^T p_{n+1}$ temos que o controle ótimo é atingido se e só se

(95) $$u^j = \begin{cases} (Dx)^j & \text{se } a_n^j < 0 \\ 0 & \text{se } a_n^j > 0 \end{cases}$$

e mais

$$\min_{0 \le u \le Dx} \langle \emptyset - B^T p_{n+1}, u \rangle = \min_{0 \le u \le Dx} \langle a_n, u \rangle = \langle \beta_n, Dx \rangle = \langle D^T \beta_n, x \rangle$$

onde

$$(96) \qquad \beta_n^j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_n^j \geq 0 \\ a_n^j & \text{se} \quad a_n^j < 0 \end{cases}$$

Portanto

$$\dot{V}_n(x) = \left\langle (A^T+I)p_{n+1} + \theta, x \right\rangle + \left\langle D^T\beta_n, x \right\rangle = -\left\langle p_n, x \right\rangle$$

e assim nossa hipótese de que $V_n(x)$ é da forma

$V_n(x) = - p_n, x$ é correta , onde p_n deve satisfazer a

$$(97) \qquad p_n = (A^T+I)p_{n+1} + \theta - D^T\beta_n \quad , \quad p_k = 0 \quad .$$

Consideremos agora o problema apresentado em (92) e verifiquemos se ele satisfaz o princípio do máximo modificado. Reescrevendo então o problema temos :

Dado o sistema dinâmico

$$x_{i+1} - x_i = Ax_i + Bu_i$$

onde queremos minimizar a soma

$$J = \sum_{i=0}^{k-1} \left\langle \emptyset, u_i \right\rangle - \left\langle \theta, x_i \right\rangle$$

onde $A+I \geq 0$ e $B \geq 0$.

A minimização está sujeita a :

$$u \in U_i(x) = \{u / R_i(x_i, u) \leq 0\}$$

onde $\quad R = \begin{bmatrix} -u \\ u - Dx \end{bmatrix}$

Suponhamos agora que $\hat{u}_i$ e $\hat{x}_i$ são uma solução ótima. As condições para que o "princípio do máximo modificado" seja satisfeito são: Existam multiplicadores $p_o, p_1, \ldots, p_o, \gamma_o, \gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ onde $\gamma_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$, e um escalar p^0 tais que :

(98) $\qquad p_i - p_{i+1} = A^T p_{i+1} - p^0\theta - D^T\beta_i$

(99) $\qquad p_k = 0$

(100) $\qquad p^0\emptyset + B^T p_{i+1} - \alpha_i + \beta_i = 0$

(101) $\qquad \alpha_i \leq 0 \qquad \beta_i \leq 0 \qquad p^0 \leq 0$

(102) $\qquad \left\langle \gamma_i, R_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \right\rangle = 0$

(103) $\qquad H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i) = \left\langle (A+I)\hat{x}_i + Bu_i, p_{i+1} \right\rangle + p_o \left\langle \emptyset, u_i \right\rangle - p^0 \left\langle \theta, \hat{x}_i \right\rangle$

é maximizado por $\hat{u}_i$, $u_i \in U_i(\hat{x}_i)$.

Vamos então definir p_i, β_i, a_i como em (96), (95) e (94) respectivamente

(104) $\qquad p_i = (A^T+I)p_{i+1} + \theta - D^T\beta_i \qquad , \qquad p_k = 0$

(105) $\qquad \beta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a_n^j \geq 0 \\ a_n^j & \text{se} \quad a_n^j < 0 \end{cases}$

(106) $\qquad a_i = \emptyset - B^T p_{i+1}$

$$\text{(107)} \qquad \alpha_i = \begin{cases} -a_i^j & \text{se} \quad a_i^j \geq 0 \\ 0 & \text{se} \quad a_i^j < 0 \end{cases}$$

$$\text{(108)} \qquad p^0 = -1$$

Logo temos que (98) e (99) seguem de (104); (100) e (101) seguem de (105); (106), (107) e (108) de (95), (105) e (107) temos

$$\left\langle \gamma_i, R_i(\hat{x}_i, \hat{u}_i) \right\rangle = -\left\langle \alpha_i, \hat{u}_i \right\rangle + \left\langle \beta_i, \hat{u}_i - D\hat{x}_i \right\rangle = 0$$

isto é, (102), e desde que $p^0 = -1$ temos que

$$H(\hat{x}_i, u_i, p_{i+1}, p^0, i) = \left\langle \emptyset - B^T p_{i+1}, u_i \right\rangle - \left\langle (A^T + I) + \theta, \hat{x}_i \right\rangle$$

mas sabemos que $-H$ é minimizado usando (93), logo H é maximizado para $u_i \in U_i(\hat{x}_i) = \{u_i / 0 \leq u_i \leq D\hat{x}_i\}$.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES

O artigo de Bruckner e Wu 3 é o único, dos que estavam à nossa disposição, que trata do problema de sistemas discretos no tempo. Pareceu-nos, no entanto, que algumas funções neste artigo não estão bem definidas e por outro lado, certos requisitos para existência de funções inversas não são respeitados. Porém idéias interessantes para formulação do "princípio do máximo" são ali apresentadas.

As condições necessárias e suficientes apresentadas na parte de programação dinâmica são talvez de difícil operabilidade. Por outro lado, quando formulamos a "hipótese de inclusão", obtemos um princípio do máximo", mas ficamos temerosos quanto à forte restrição da hipótese. Já no "princípio do máximo modificado", com o surgimento dos termos $\frac{\partial R_i}{\partial x}$ e $\frac{\partial R_i}{\partial u}$ nas equações, achamos que a classe de problemas que satisfazem o princípio foi bastante aumentada. Achamos no entanto que uma outra classe de problemas com restrições lineares positivas, se acrescentados requisitos de convexidade direcional e convexidade para a função R, satisfará o "princípio do máximo modificado". Fica esta sugestão para pesquisas futuras, pois para a ciência, já o disse Cajal, " não há pequenos e grandes assuntos e, muito menos, assuntos esgotados, como pensam alguns. O que há são homens esgotados diante dos assuntos..."

APÊNDICE

Def.1 - O envoltório convexo de um número finito de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em E^n é definido como o conjunto

$$\{ x/x = \sum_{i=1}^{k} \mu^i x_i \ , \ \mu^i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{k} \mu^i = 1 \}$$

e é notado por co $\{ x_1, x_2, \ldots, x_k \}$

Def. 2 - O envoltório convexo de um conjunto $A \subset E^n$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém A. O envoltório convexo de A é notado por co A .

Teorema 1

O envoltório convexo de um conjunto $A \subset E^n$ consiste de todas as combinações convexas finitas de A i.e.

$$\text{co } A = \{x/x = \sum_{i=1}^{k} \mu^i a_i , \sum_{i=1}^{k} \mu^i \geq 0 \ , \ k \text{ inteiro positivo e } a_i \in A \}$$

Dem.

[13] pág. 177.

Proposição 1

Se $A = \{\hat{x}, \hat{x} + x_1, \hat{x} + x_2, \ldots, \hat{x} + x_k \}$ são pontos de E^n então

$$\text{co } A = \{x/x = \hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i x_i , \ \mu^i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{k} \mu^i \leq 1\}$$

Dem.

Se $x \in \mathrm{co}\, A$ então $x = \mu^0\hat{x} + \sum_{i=1}^{k} \mu^i(\hat{x} + x_i)$

onde $\mu^i \geq 0 \quad i=0,1,\ldots,k \qquad e \ \sum_{i=0}^{k} \mu^i = 1$

logo

$$x = \sum_{i=0}^{k} \mu^i\hat{x} + \sum_{i=0}^{k} \mu^i x_i = \hat{x} + \sum_{i=0}^{k} \mu^i x_i$$

$\square$

Def. 3

Seja e um vetor qualquer em E^n. Um conjunto $S \subset E^n$ é dito e-convexo ou convexo segundo a direção e se para todo vetor $z' \in \mathrm{co}\, S$, envoltório convexo de S, $\exists$ um vetor $z \in S$ tal que

$$z = z' + \beta e \qquad \beta \geq 0$$

Def. 4 - O Problema Básico

Dada uma função continuamente diferenciável

$$f : E^n \to E$$

uma outra função também continuamente diferenciável

$$r : E^n \to E^m$$

e um subconjunto $\Omega \subset E^n$. Achar um vetor $\hat{z} \in E^n$ satisfazendo

$$\hat{z} \in \Omega \qquad r(\hat{z}) = 0$$

tal que $f(\hat{z}) \leq f(z)$ para qualquer z que satisfaça $z \in \Omega$, $r(z) = 0$.

Def. 5

Um cone C em E^n é um conjunto de pontos tais que se $x \in C$ então $\alpha x \in C$ para todo $\alpha \geq 0$.

Def. 6

Um cone C com vértice x_o é definido como um conjunto de pontos C tal que

$C - \{x_o\} = \{ z/z + x_o \in C \} = \{ z - x_o \in C \}$ seja um cone .

Def. 7

Um cone C é dito convexo se C é um conjunto convexo.

Teorema 2

Um cone C é convexo se e só se $x_1 + x_2 \in C$ sempre que $x_1, x_2 \in C$.

Dem.

[6] pág. 241 .

Def. 8

O cone radial a Ω em $\hat{z} \in \Omega$ denotado por $RC(\hat{z},\Omega)$ é o conjunto de todos os vetores δz para os quais existe um $E > 0$ tal que $(\hat{z} + \alpha\delta z) \in \Omega$ para todo $\alpha \in [0,E]$.

Def. 9

Um cone convexo denotado por $C(\hat{z},\Omega)$ E^n é chamado uma aproxima-

<u>ção cônica de $1^{\underline{a}}$ espécie</u> do conjunto Ω em $\hat{z} \varepsilon \Omega$ para toda coleção $\{\delta z_1, \delta z_2, \ldots, \delta z_k\}$ de vetores linearmente independentes em $C(\hat{z},\Omega)$ existe um $E > 0$, dependendo talvez de $\hat{z}, \delta z_1, \ldots, \delta z_k$, tal que o envoltório convexo

$$co\ \{\hat{z},\ \hat{z} + E\delta z_1, \ldots, \hat{z} + E\delta z_k\} \subset \Omega$$

<u>Def. 10</u>

Um cone convexo $C(\hat{z},\Omega) \subset E^n$ é chamado uma <u>aproximação cônica de $2^{\underline{a}}$ espécie</u> do conjunto Ω em $\hat{z} \varepsilon \Omega$ para qualquer coleção linearmente independente de vetores $\{\delta z_1, \delta z_2, \ldots, \delta z_k\}$ em $C(\tilde{z},\Omega)$ existe um $E > 0$, dependendo talvez de $\hat{z}, \delta z_1, \delta z_2, \ldots, \delta z_k$, e uma função contínua

$$\xi : co\ \{\hat{z},\ \hat{z} + E\delta z_1,\ \hat{z} + E\delta z_2, \ldots, \hat{z} + E\delta z_k\} \to \Omega$$

tal que

$$\xi\ (\hat{z} + \delta z) = \hat{z} + \delta z + 0(\delta z)$$

onde

$$\lim_{||\delta z|| \to 0} \frac{||0(\delta z)||}{||\delta z||} = 0$$

<u>Def. 11</u>

Quando não mencionamos especificamente que aproximação cônica é $C(\hat{z},\Omega)$ i.e. , quando dizemos que $C(\hat{z},\Omega)$ é uma <u>aproximação cônica</u> do conjunto Ω em $\hat{z} \varepsilon \Omega$, entendemos que $C(\hat{z},\Omega)$ é uma aproximação cônica de $2^{\underline{a}}$ espécie.

<u>Teorema 3</u> (Extensão do Teorema Fundamental)

Seja Ω' E^n um conjunto qualquer com a propriedade que para todo $z' \varepsilon \Omega'$ existe um $z \varepsilon \Omega$ satisfazendo

$$r(z) = r(z') \quad e \quad f(z) \leq f(z')$$

(o conjunto Ω e as funções r e f são as do problema básico, apêndice Def.4)

Se $\hat{z}$ é uma solução ótima do problema básico, se $\hat{z} \in \Omega'$ e se $C(\hat{z},\Omega')$ é uma aproximação cônica (apêndice Def.11) de Ω' em $\hat{z}$, então existe um vetor não nulo

$\psi = (\psi^0, \psi^1, \ldots, \psi^m) \in E^{m+1}$ com $\psi^0 \leq 0$ tal que para todo $\delta z \in C(\hat{z},\Omega')$

$$\left\langle \psi \, , \, \frac{\partial F(\hat{z})}{\partial z} \, \delta z \right\rangle \leq 0$$

onde $F : E^n \to E^{m+1}$

$$z \mapsto (f(z), r(z)) \quad .$$

Def. 12

Para todo $\hat{z} \in \Omega = \{ z / q(z) \leq 0 \; , \; i=1,2,\ldots,k \}$ o conjunto de índices ativos em $\hat{z}$, $I(\hat{z})$, é definido por

$$I(\hat{z}) = \{ i / q^i(\hat{z}) = 0 \quad , \quad i \in \{1,2,\ldots,k\}\}$$

Def. 13

Seja $\Omega = \{z/q(z) \leq 0 \}$ onde $q : E^n \to E^k$ é continuamente diferenciável. Para qualquer $\hat{z} \in \Omega$ o cone interno a Ω em $\hat{z}$, denotado por $I\,C\,(\hat{z},\Omega)$ é definido por

$$I\,C\,(\hat{z},\Omega) = \{\delta z / \left\langle \nabla q^i(\hat{z}), \delta z \right\rangle < 0 \quad \text{para todo} \quad i \in I(\hat{z})\} \cup \{0\}$$

Proposição 2

Seja $\Omega \subset E^n$ convexo. Então $RC(\hat{z},\Omega)$, $\hat{z} \in \Omega$ é uma aproximação cônica de $1^{\underline{a}}$ espécie. Além do mais $RC(\hat{z},\Omega) = \{\delta z / \delta z = \lambda(z-\hat{z}),\ \lambda \geq 0\ ,\ z \in \Omega\}$

Dem.

[6] pág. 24 .

Teorema 4

Seja $\Omega = \{z/q(2) \leq 0\}$ onde $q : E^n \to E^k$ é continuamente diferenciável. Se o cone interno a Ω , $IC(\hat{z},\Omega)$, em $\hat{z} \in \Omega$ não é a origem, então o cone interno $IC(\hat{z},\Omega)$ é uma aproximação cônica de primeira espécie, além disto

$$\overline{IC}(\hat{z},\Omega) = \{\delta z / \ \nabla q^i(\hat{z}),\ \delta z \ \leq 0 \quad ,\ i \in I(\hat{z})\}$$

Dem.

[6] pág. 61 .

Proposição 3

Uma transformação linear $L : E \to F$ é injetiva se e só se tem uma inversa à esquerda.

Dem.

[9] pág. 52 .

Def. 14

Seja o problema : São dadas as funções $f : E^v \to E$, $r : E^v \to E^1$, $Q : E^v \to E^s$ e $R : E^v \to E^w$ continuamente diferenciáveis. Achar um vetor $\hat{z} \in E^v$ satisfazendo

$$\hat{z} \in \Omega = \{z/Q(z) \leq 0 \quad ,\ R(z) \leq 0\}$$

$r(\hat{z}) = 0$

tal que $f(\hat{z}) \leq f(z)$ para todo $z \in E^v$ tal que $z \in \Omega$ e $r(z) = 0$.

Teorema 5 (Fritz John)

Se $\hat{z}$ é uma solução ótima do problema dado na Def.14, então existe um escalar ψ^0 e vetores $\Psi \in E^1$, $\lambda \in E^s$ e $\gamma \in E^w$ com $\gamma^0 \leq 0$, $\Psi \leq 0$, $\lambda \leq 0$, onde $\psi^0, \Psi, \lambda, \gamma$ não são todos nulos tal que :

$$\left[\frac{\partial f(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \psi^0 + \left[\frac{\partial r(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \Psi + \left[\frac{\partial Q(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \lambda + \left[\frac{\partial R(\hat{z})}{\partial z}\right]^T \gamma = 0$$

$\langle \lambda , Q(\hat{z}) \rangle = 0$

$\langle \gamma , R(\hat{z}) \rangle = 0$

Dem. [18]

Teorema 6

Consideremos o problema minimize $T(z)$ sujeito a $r(z) = 0$ e $S(z) \leq 0$ e suponhamos que $T : E^n \to E$ é convexa e $S^i : E^n \to E$ $i=1,2,\ldots,w$ (componentes da função $S : E^n \to E^w$) seja convexa. Se $\hat{z} \in E^n$ satisfaz as restrições $r(\hat{z}) = 0$ $S(\hat{z}) \leq 0$ e se existem vetores $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \ldots, \lambda^m) \in E^m$ e $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \ldots, \gamma^w) \in E^w$ com $\gamma^i \leq 0$ para $i=1,2,\ldots,k$ tal que

$$- \nabla T(\hat{z}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda^i \nabla r^i(z) + \sum_{i=1}^{k} \gamma^i \nabla S^i(\hat{z}) = 0$$

e

$$\gamma^i S^i(\hat{z}) = 0 \qquad i=1,2,\ldots,k$$

então $\hat{z}$ é uma solução ótima i.e. $T(\hat{z}) \leq T(z)$ para qualquer z tal que $r(z) = 0$ e $S(z) \leq 0$.

Dem. [6] pág. 70 .

Proposição 4 (Lema de Farkas)

Se $a_1, \ldots, a_k$ e b são um conjunto finito de E^n, então $b, x \leq 0$ para todo $x \in E^n$ satisfazendo $a_i, x \leq 0$ $i=1,2,\ldots,k$ se e só se

$$b = \sum_{i=1}^{k} \mu^i a_i \ , \text{ com } \mu^i \geq 0 \quad \text{para } i=1,2,\ldots,k$$

Dem. [6] pág. 250 .

GLOSSÁRIO E SÍMBOLOS

I - Convenções Gerais

E^n - Denota o espaço euclidiano das n-uplas ordenadas de números reais. Se x é um vetor de E^n então escreveremos $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Quando uma n-upla $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ é um vetor de E^n, muitas vezes a tratamos como um vetor coluna em multiplicações matriciais.

E - Identificamos $E^1 = E$ com os números reais

Como norma de um vetor em E^n usamos a aplicação

$$
\begin{aligned}
||.|| : E^n &\to E \\
x &\mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|
\end{aligned}
$$

Como produto interno de dois vetores de E^n usamos aplicação

$$
\begin{aligned}
\langle\ ,\ \rangle : E^n \times E^n &\to E \\
(x\ ,\ y) &\to \sum_{i=1}^{n} x^i y^i
\end{aligned}
$$

II - Símbolos e Abreviações

Z - Conjunto dos números inteiros

$A \subset B$ - A é subconjunto de B

$A \times B$ - Produto cartesiano de A por B

A/B - Conjunto dos pontos que estão em A mas não em B

$x \in A$ - x pertence a A

$f : A \to B$ - f é uma função de A em B que leva x em $f(x)$
$x \mapsto f(x)$

$\Longleftrightarrow$ - se e só se

co A - Envoltório convexo de A. Def. 2, apêndice

$RC(\hat{z},\Omega)$ - Cone radial . Def.8, apêndice

$IC(\hat{z},\Omega)$ - Cone interno. Def. 13, apêndice

$\overline{IC}(\hat{z},\Omega)$ - Aderência do cone interno

A^T - Matriz transposta da matriz A

A^{-1} - Inversa da matriz A

$||x||$ - Norma do vetor x

$\langle x,y\rangle$ - Produto de x por y

III - Símbolos com Significação Especial

X - Conjunto de estados

U - Conjunto de controles

x_i - Estado do sistema dinâmico no instante i

u_i - Entrada do sistema no instante i

$u \leq 0$ - Um vetor $u \in E^n$ é dito menor que zero se e só se $u^i \leq 0$ para todo $i = 1,2,\ldots, n$ (u^i é a i-ésima componente de u) .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 BELLMAN, Richard . Dynamic Programming , New Jersey, Princeton University Press, 1957. 337 p.

2 BERKOVITZ, L.D. and DREYFUS, S.E. The Equivalence of Some Necessary Conditions for Optimal Control in Problems with Bounded State Variables. Journal of Mathematical Analysis and Applications , vol. 10, 275-283, 1965.

3 BRUCKNER, I. and WU, S. A Maximum Principle for Discrete Systems with Control Variable Inequality Constrains. Proc. Sixth Annual Allerton Conference on Circuits and Systems Theory, 475 - 484 , 1968.

4 BRYSON, A.E. , DENHAM, W.F. and DREYFUS ,S.E. Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I : Necessary Conditions for Extremal Solutions . AIAA Journal , vol 1, 2544-2550, 1963.

5 BRYSON, A.E. and HO, Yu-Chi. Applied Optimal Control , Walthan, Massachusetts, Blaisdell Publishing Company, 1969. 481 p.

6 CANON, Michael D., CULLUM, Clifton D. and POLAK, Eligah . Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, New York, McGraw-Hill, 1970. 285 p.

7 DOBELL, A.R. and HO, Y.C. Optimal Investment Policy: An example of a Control Problem in Economic Theory , IEEE Transactions on Automatic Control , Vol. AC - 12 , Nº 1, 4 - 14 , February 1967.

8 DREYFUS, S.E. Variational Problems with Inequality Constrains . Journal of Mathematical Analysis and Applications , vol. 4, 297 - 308, 1962.

9 GREUB, Werner H. Linear Algebra , New York, Springer, 3rd edition, 1967.

10 JACOBSON, D.H. and LELE, M.M . A Proof of the Convergence of the Kelley-Bryson Penalty Function Technique for State-Constrained Control Problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications 26 , 163 - 169 , 1969.

11 .... New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State-Variable Inequality Constraints. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 , 255 - 284 , 1971.

12 .... A Transformation Technique for Optimal Control Problems with a State Variable Inequality Constraint. IEEE Transactions on Automatic Control , vol. AC - 14 , Nº 5 , 457 - 464 , October 1969 .

13 KÖTHE, Gottfried . Topologische Lineare Raüme , Berlin, Springer, 2ª edição, 1966 . 456 p.

14 LASDON, L.S. , WAREN, A.D. and RICE, R.K. An Interior Penalty Method for Inequality Constrained Optimal Control Problems . IEEE Transactions on Automatic Control , vol. AC - 12, nº 4, 388 - 395 , August 1967.

15 LEAKE, J.R. Discrete - Time Systems Analysis , Indiana, University of Notre Dame, 1971. 537 p.

16 LEAKE, J.R. and RICHARDSON , M.H. Discrete-Time Systems Optimization on Arbitrary Sets and Finite Dimensional Spaces , Indiana, University of Notre Dame, 1969. 64 p.

17 LIMA, Elon l. Análise no Espaço R^n , Brasília , Ed. Universidade de Brasília, São Paulo, Ed. E.Blucher, 1970. 97 p.

18 MANGASARIAN, O.L. Nonlinear Programming , New York, McGraw-Hill, 1969 .

19 MCGILL, Robert . Optimal Control, Inequality State Constraints and teh Generalized Newton-Raphson Algorithm. Journal SIAM Control , Vol. 3, Nº 2, 291 - 298 , 1965.

20 MCINTYRE, J. and PAIEWONSKY, B. On Optimal Control with Bounded State Variables. Advances in Control Systems , vol 5, 389 - 419 , 1967.

21 ORTEGA, José A. Programação Contínua : Propriedades das Soluções, Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, COPPE, 1971. 74 p.

22 PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANSKII, V.G., GRAMKRELIDZE, R.V. and MISHCHENKO, E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processus , New York, John Wiley and Sons, 3ª edição, 1965. 360 p.

23 SCHWARTZ, Laurent. Cours d'Analyse , vol. I e II, Paris, Herman, 1967 . 830 p.

24 SPEYER, J.L. Nonlinear Feedback Solution to a Bounded Brachistochrone Problem in a Reduced State Space. IEEE Trans. Automatic Control , vol. AC - 12, 90 - 94 , February 1967.

25 TAYLOR, J.G. Comments on a Multiplier Condition for Problems with State Variable Inequality Constraints. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC - 17, Nº 5, 743 - 744 , October 1971.