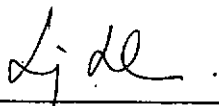


UMA ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO
h DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADA A PROBLEMAS
BI-DIMENSIONAIS REGIDOS PELA EQUAÇÃO DE CAMPO

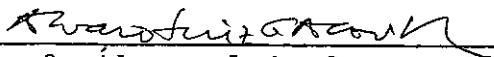
Paulo Roberto Maciel Lyra

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OB
TENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



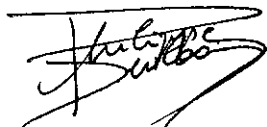
Prof. Luiz Landau, D.Sc.
(Presidente)



Prof. Álvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho
D.Sc.



Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.



Prof. Philippe Remy Bernard Devloo, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Setembro de 1988

LYRA, PAULO ROBERTO MACIEL

Uma Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo Versão h do Método dos Elementos Finitos Aplicada a Problemas Bi-Dimensionais Regidos pela Equação de Campo (Rio de Janeiro), 1988.

IX , 104 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1988)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Métodos dos Elementos Finitos 2. Refinamento Auto-Adaptativo versão h

I. COPPE/UFRJ II. Título (versão)

A meus pais,
Francisco Décio de Andrade Lyra
e Lilá Maciel Lyra

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer ao Professor Luiz Landau, meu orientador, que despertou em mim o interesse por esta área de pesquisa, me incentivou e assistiu durante a realização desta tese.

Uma palavra especial de agradecimento a Álvaro L. G. A. Coutinho e José L. D. Alves pela permanente disponibilidade em discutir e apresentar sugestões e pelo tratamento amigo dispensado.

Estendo estes agradecimentos aos Professores do Recife que sempre me estimularam, dentre os quais destaco especialmente os Professores Silvio Romero F. F. Lima, Jaime J. P. Cabral, José Almir Cirilo e meu tio Telmo F.R. Maciel.

Agradeço ainda aos meus familiares pelo carinho e estímulo por toda a vida.

A Silvana M. B. Afonso da Silva pela amizade e carinho sempre presentes.

A Ramiro B. Willmersdorf pela amizade e trocas de idéias no transcorrer deste trabalho.

Faço uma referência aos amigos da COPPE, professores, funcionários e estudantes, pelo bom convívio tornando o trabalho agradável.

A Gilberto Luziê de Souza pelo serviço de desenho e a Daisy Lima Pierucci pelo serviço de datilografia.

Finalmente expressei meu agradecimento ao CNPq pelo suporte financeiro desta pesquisa.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS RE-
QUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS (M.Sc.)

UMA ESTRATÉGIA DE REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO
VERSÃO h DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
APLICADA A PROBLEMAS BI-DIMENSIONAIS REGIDOS
PELA EQUAÇÃO DE CAMPO

Paulo Roberto Maciel Lyra

Setembro de 1988

ORIENTADOR: Prof. Luiz Landau

PROGRAMA: Engenharia Civil

Este trabalho tem como propósito o estudo da estratégia de refinamento auto-adaptativo versão h do Método dos Elementos Finitos (MEF) na análise de problemas bi-dimensionais lineares regidos pela equação de campo em regime permanente. Para tanto, é apresentada a estratégia de refinamento de malhas, bem como, a análise de erros a-posteriori envolvida no processo.

Utiliza-se a formulação de Galerkin do MEF, com elementos isoparamétricos bilineares, e na solução do sistema de equações emprega-se o Método dos Gradientes Conjugados Precondicionado.

Problemas representativos são analisados sendo os resultados obtidos comparados com soluções analíticas ou numéricas encontradas na literatura.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FUL-
FILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc.)

AN h SELF-ADAPTIVE FINITE ELEMENT METHOD
PROCEDURE FOR THE TWO-DIMENSIONAL LINEAR
POTENCIAL PROBLEMS

Paulo Roberto Maciel Lyra

September, 1988

THESIS SUPERVISOR: Prof. Luiz Landau

DEPARTMENT: Civil Engineering

In this work a self-adaptive refinement procedure (h-version) for the Finite Element Method (FEM) solution of two dimensional potential problems is studied.

The mesh refinement strategy and the a-posteriori error analysis are also discussed. The Galerkin formulation for FEM is utilized and the resulting system of equations is solved by Preconditioned Conjugate Gradients.

Several problems are analysed and results compared with the available analytical and numerical solutions.

ÍNDICE

| | Pág. |
|--|-----------|
| CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO..... | 1 |
| CAPÍTULO II - ANÁLISE DE ERROS..... | 3 |
| II.1 - Aspectos Gerais..... | 3 |
| II.2 - Conceitos Básicos..... | 4 |
| II.2.1 - O Método dos Elementos Finitos (MEF)..... | 4 |
| II.2.2 - Normas de Erro..... | 6 |
| II.2.3 - Estimativas de Erro..... | 7 |
| II.3 - A Medida de Erro Adotada..... | 8 |
| II.3.1 - O Problema Linear Elíptico..... | 8 |
| II.3.2 - Suavização dos Fluxos..... | 9 |
| II.3.3 - Estimativa e Indicador de Erro..... | 10 |
| II.3.4 - Validade das Medidas Adotadas..... | 13 |
| CAPÍTULO III - PROCEDIMENTOS ADAPTATIVOS..... | 15 |
| III.1 - Considerações Iniciais..... | 15 |
| III.2 - Métodos Auto-Adaptativos..... | 16 |
| III.2.1 - Versão r..... | 16 |
| III.2.2 - Versão p..... | 18 |
| III.2.3 - Versão h..... | 19 |
| III.2.4 - Versões Combinadas..... | 20 |
| III.2.5 - Critério de Otimização..... | 21 |
| III.3 - Convergência..... | 22 |

| | Pág. |
|--|------|
| CAPÍTULO IV - UM PROGRAMA AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO h... | 24 |
| IV.1 - Introdução..... | 24 |
| IV.2 - Obtenção do Novo Modelo..... | 24 |
| IV.2.1 - Refinamento dos Elementos..... | 25 |
| IV.2.2 - Garantia da Continuidade Inter-Elementos.... | 25 |
| IV.2.3 - Carregamento e Condições de Contorno..... | 29 |
| IV.3 - Estratégias de Refinamento..... | 29 |
| IV.3.1 - Critérios Baseados na Análise de Erros..... | 29 |
| IV.3.2 - Critérios Adicionais..... | 33 |
| IV.4 - Solução do Sistema de Equações..... | 39 |
| IV.5 - Estrutura de Dados Adicional..... | 40 |
| CAPÍTULO V - RESULTADOS NUMÉRICOS..... | 42 |
| V.1 - Introdução..... | 42 |
| V.2 - A Equação do Campo..... | 42 |
| V.3 - Aplicações..... | 45 |
| CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES..... | 87 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 91 |
| APÊNDICE A - INTERPRETAÇÃO DO MEF COMO UM PROCEDIMEN- TO DE MINIMIZAÇÃO DOS FLUXOS..... | 100 |
| APÊNDICE B - CRITÉRIO ÓTIMO..... | 103 |

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos tem sido intensamente utilizado na execução de projetos nos diversos ramos da Engenharia, constituindo-se na mais importante ferramenta para solução de problemas físicos governados por equações diferenciais.

Apesar da preocupação demonstrada desde seu início (COURANT [1]), a estimativa dos erros e a sua possível minimização não ocupavam posição de destaque na metodologia de análises via o Método dos Elementos Finitos.

Programas convencionais de análise não examinam a influência dos erros, inerentes à discretização sobre a solução obtida. Para contornar tal deficiência recorre-se na prática a uma seqüência de soluções para discretizações gradativamente mais refinadas, observando-se as variações sofridas pela solução entre duas etapas subseqüentes, até que tais variações reduzam-se a valores toleráveis. Tal procedimento demanda tempo e a sua eficiência está intimamente ligada à experiência do analista. As conseqüências disso são alto custo na análise, originado das diversas discretizações, sucessivas preparações de malhas, execuções e verificações, bem como a falta de critério para avaliar a confiabilidade dos resultados.

Atualmente, como resultado dos trabalhos primeiramente de BABUSKA e RHEINBOLDT [2, 3], seguidos entre outros, dos trabalhos de GAGO [4], GAGO et alii [5, 6], BABUSKA e SZABO [7], DEMKOWICZ et alii [8], têm-se subsídios para o desenvolvimento de procedimentos auto-adaptativos, ou seja, al-

goritmos capazes de minimizar os erros associados a uma solução de forma automática. Intensivas pesquisas são desenvolvidas na busca de solucionar os inúmeros problemas que persistem quanto as estratégias adaptativas e a análise de erros, assim como para suas efetivações nas aplicações da Engenharia.

Neste trabalho descreve-se o desenvolvimento e implementação de um procedimento auto-adaptativo do Método dos Elementos Finitos, onde a adaptação se dá através do refinamento dos elementos, versão h . Este procedimento é orientado por medidas de erro a-posteriori e estratégias de refinamento que definem a necessidade de um novo modelo até ser atingida a solução ótima dentro de uma tolerância desejada.

Sendo assim, apresentam-se alguns conceitos básicos referentes à análise e medidas de erros no Capítulo II. No Capítulo III, descrevem-se os principais aspectos dos processos adaptativos de refinamento de malhas, nas suas diversas modalidades. No Capítulo IV, trata-se a implementação da técnica de refinamento h . O Capítulo V contém diversas aplicações efetuadas, procurando-se fazer uma análise do desempenho dos procedimentos implementados. Finalmente, no Capítulo VI referem-se as conclusões alcançadas no decorrer deste trabalho. São expostas, ainda, sugestões para aperfeiçoamento e continuidade deste trabalho, bem como para pesquisas futuras.

CAPÍTULO II

ANÁLISE DE ERROS

II.1 - ASPECTOS GERAIS

Na utilização de Métodos Numéricos para obtenção da solução de determinado problema quatro são as aproximações introduzidas no processo, resultando em erros: a primeira aproximação deve-se às simplificações envolvidas na construção do modelo matemático para descrever o problema; em segundo, têm-se as aproximações e incertezas no fornecimento de informações para o modelo matemático (materiais, condições de contorno, carregamentos, etc.); em terceiro, as aproximações devidas à discretização de um problema fisicamente contínuo; e por fim, as aproximações causadas tendo-se em vista as operações em computadores serem efetuadas em aritmética finita.

Pode-se citar ainda como origem de erros a etapa de análise e interpretação dos resultados. No entanto, uma vez assegurada a confiabilidade da solução obtida, e tendo-se em vista as disponibilidades existentes hoje em termos de pós-processamento (computação gráfica, etc.) esses erros tendem a minimizar-se.

Neste capítulo são apresentadas inicialmente alguns conceitos fundamentais no estudo dos erros de discretização e em seguida a análise de erros adotada.

II.2 - CONCEITOS BÁSICOS

II.2.1 - O Método dos Elementos Finitos (MEF)

Seja o problema modelado matematicamente por

$$A(\phi) = L\phi - P = 0 \text{ no domínio } \Omega \quad (\text{II.1})$$

$$B(\phi) = M\phi - Q = 0 \text{ no contorno } \Gamma \quad (\text{II.2})$$

onde L e M são operadores diferenciais, P e Q são funções conhecidas e independentes de ϕ , a função incógnita do problema.

Tendo em vista as aproximações impostas na utilização de métodos discretos, a solução obtida $\hat{\phi}$ introduz resíduos r nas equações (II.1) e (II.2), desta forma tem-se

$$A(\hat{\phi}) = L\hat{\phi} - P = r_{\Omega} \neq 0 \quad (\text{II.3})$$

$$B(\hat{\phi}) = M\hat{\phi} - Q = r_{\Gamma} \neq 0 \quad (\text{II.4})$$

As equações algébricas aproximadas são então obtidas escrevendo-se (II.3) e (II.4) na forma integral

$$\int_{\Omega} V^T \cdot A(\hat{\phi}) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{V}^T \cdot B(\hat{\phi}) \, d\Gamma = 0 \quad (\text{II.5})$$

onde V e \bar{V} são funções de peso conhecidas.

O procedimento anterior é conhecido como Método dos Resíduos Ponderados. Efetuando-se a integração por partes da equação (II.5), tem-se

$$\int_{\Omega} G(V)^T C(\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} H(\bar{V})^T D(\hat{\phi}) d\Gamma = 0 \quad (\text{II.6})$$

onde C, D, G e H são operadores diferenciais, sendo C e D tais que contêm ordem de derivação menor que as existentes em A e B.

No MEF, onde o contínuo é discretizado em elementos unidos por pontos nodais, a solução aproximada $\hat{\phi}$ é expressa em função de seus valores nodais $\bar{\phi}_i$ como

$$\hat{\phi} \approx \bar{\phi} = \sum_{i=1}^{\text{NNOS}} N_i \bar{\phi}_i \quad (\text{II.7})$$

onde NNOS é o número de nós, $\bar{\phi}_i$ representa as incógnitas do problema e N_i as funções de interpolação. A escolha dessas funções assim como de V e \bar{V} pode ser a mais variada, desde que satisfaçam certos critérios de completude e continuidade (ZIENKIEWICZ e MORGAN [9]). Na formulação cinemática do MEF, quando se escolhe $V_j = N_j$, tem-se o Método de Galerkin.

Sendo as aproximações dadas em (II.7) efetuadas nos elementos, o sistema de equações algébricas, que representa o problema na sua forma discreta, é obtido somando-se as contribuições desses elementos nos pontos nodais. Para o caso de operadores diferenciais lineares as equações (II.5) ou (II.6) podem ser escritas em forma matricial, como

$$\tilde{K} \tilde{\bar{\phi}} = \tilde{F} \quad (\text{II.8})$$

onde \tilde{K} é genericamente conhecido como matriz de rigidez global, $\tilde{\bar{\phi}}$ e \tilde{F} são, respectivamente, vetores das incógnitas e das forças nodais globais.

II.2.2 - Normas de Erro

Para o problema dado pelas equações (II.1) e (II.2), o erro associado à utilização do MEF é dado pela diferença entre a solução exata e a solução aproximada

$$e = \phi - \hat{\phi} \quad (\text{II.9})$$

A equação (II.9) fornece uma medida pontual do erro. Para se medir o erro de forma global pode-se utilizar o conceito de norma (GOLUB e VAN LOAN [10]): um escalar associado a uma função ou matriz que propicia uma estimativa da sua magnitude e que satisfaz certas propriedades. A principal delas pode ser descrita como

$$||\tilde{K}|| \geq 0 \quad \text{e} \quad ||\tilde{K}|| = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \tilde{K} = \tilde{0} \quad (\text{II.10})$$

onde $||\tilde{K}||$ representa a norma de \tilde{K} .

Várias são as normas existentes. Neste trabalho, adota-se a norma de energia que pode ser definida para o erro como a medida integral

$$||e||_E^2 = \int_{\Omega} e^T L e \, d\Omega + \int_{\Gamma} e^T M e \, d\Gamma \quad (\text{II.11})$$

O nome norma de energia deve-se ao fato de que resolver um problema pelo MEF, através da formulação cinemática, consiste, fundamentalmente, em minimizar o funcional de energia potencial total associado.

Demonstra-se que (GAGO [4]), para problemas lineares elípticos, a energia do erro definida em (II.11) é igual ao erro na energia da solução, ou seja

$$||e||_E^2 = ||\phi||_E^2 - ||\hat{\phi}||_E^2 \quad (\text{II.12})$$

II.2.3 - Estimativas de Erros

Um limite superior para a norma de energia do erro pode ser determinado pela inequação (BABUSKA e SZABO [7])

$$||e||_E^2 \leq c \left(\frac{1}{\text{NGL}} \right)^\alpha \quad (\text{II.13})$$

onde NGL é o número de graus de liberdade, c é uma constante dependente do problema em questão e α é a taxa de convergência da norma de energia, que é função da estratégia pela qual NGL é incrementado.

Esse tipo de estimativa é conhecida como a-priori, uma vez que pode ser obtida anteriormente ao cálculo da solução. Do ponto de vista prático, essa medida não fornece um conhecimento detalhado do erro para um problema particular. Do ponto de vista teórico, mostra que o MEF é convergente quando NGL tende a infinito.

Por outro lado, estimativas de erro, avaliadas a partir de informações referentes a uma solução aproximada, denominam-se estimativas a-posteriori e foram introduzidas em 1978 por BABUSKA e RHEINBOLDT [3]. Essas estimativas podem ser obtidas utilizando-se a norma de energia (II.11), que é facilmente relacionada com os resíduos (II.14), os quais informam quão bem a equação original é satisfeita (GAGO [4]).

$$||e||_E^2 = \int_{\Omega} e^T r_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} e^T r_{\Gamma} d\Gamma \quad (\text{II.14})$$

As estimativas a-posteriori são obtidas através de uma única análise, sendo computadas localmente.

II.3 - A MEDIDA DE ERRO ADOTADA

II.3.1 - O Problema Linear Elíptico

Sendo L e M operadores diferenciais parciais (odp) lineares de segunda ordem, pode-se escrever

$$L\bar{\phi} - P = \underset{\sim}{S}^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{S} \bar{\phi} - \underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{0} \quad (\text{em } \Omega) \quad (\text{II.15})$$

$$\bar{\phi} - \bar{\phi}_D = \bar{\phi} - \bar{\phi}_D = \underset{\sim}{0} \quad (\text{em } \Gamma_1) \quad (\text{II.16.a})$$

$$M\bar{\phi} - Q = \underset{\sim}{S}_n^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{S} \bar{\phi} = \underset{\sim}{q} \quad (\text{em } \Gamma_2) \quad (\text{II.16.b})$$

onde o contorno Γ é tal que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Nessas equações $\underset{\sim}{S}$ é o operador que relaciona os gradientes das incógnitas nodais com as próprias incógnitas nodais, e o sub-índice n significa direção normal a Γ_2 . Desta forma pode-se escrever

$$\underset{\sim}{\nabla} \bar{\phi} = \underset{\sim}{S} \bar{\phi} \quad (\text{II.17})$$

onde $\underset{\sim}{\nabla}$ é o operador gradiente. Ainda nas equações (II.15) e (II.16) $\underset{\sim}{D}$ é a matriz de propriedades dos materiais e depende do fenômeno físico abordado. Finalmente $\bar{\phi}_D$ e $\underset{\sim}{q}$ são condições de contorno do problema.

Através da matriz $\underset{\sim}{D}$ pode-se definir:

$$\tilde{q} = \tilde{D} \tilde{\nabla} \tilde{\phi} = \tilde{D} \tilde{S} \tilde{\phi} \quad (\text{II.18})$$

que fisicamente representa as tensões em problemas de Elasticidade, os fluxos em problemas de Potencial, etc. Neste trabalho, o vetor acima será genericamente denominado fluxo.

Tendo em vista as aproximações dadas na equação (II.7) e a aplicação do Método de Galerkin, tem-se

$$\tilde{\phi} \approx \hat{\tilde{\phi}} = \tilde{N} \bar{\phi} \quad (\text{II.19})$$

$$\tilde{K} \bar{\phi} - \tilde{F} = \tilde{0} \quad (\text{II.20})$$

onde

$$\tilde{K} = \int_{\Omega} (\tilde{S} \tilde{N})^T \tilde{D} (\tilde{S} \tilde{N}) d\Omega \quad (\text{II.21})$$

$$\tilde{F} = \int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{P} d\Omega + \int_{\Gamma_2} \tilde{N}^T \tilde{q} d\Gamma \quad (\text{II.22})$$

e os fluxos são avaliados através de

$$\hat{\tilde{q}} = (\tilde{D} \tilde{S}) \hat{\tilde{\phi}} = (\tilde{D} \tilde{S} \tilde{N}) \bar{\phi} \quad (\text{II.23})$$

II.3.2 - Suavização dos Fluxos

O problema dado pelas equações (II.15) e (II.16), se resolvido na sua forma fraca (II.6), adotando-se para \tilde{N} funções de continuidade C^0 leva a um campo de fluxos descontínuos.

Muitas são as técnicas existentes para suavizar o campo de fluxos permitindo obter-se valores mais precisos. Esses procedimentos se justificam quando se interpreta o

MEF, formulação cinemática, como uma técnica de minimização dos erros nos fluxos conforme apresentado no Apêndice A.

Seja o fluxo suavizado $\hat{\tilde{q}}^*$ para o qual se assume o mesmo comportamento das incógnitas nodais (equação (II.19)), ou seja

$$\hat{\tilde{q}}^* = \tilde{N} \bar{\tilde{q}}^* \quad (\text{II.24})$$

onde $\bar{\tilde{q}}^*$ são os fluxos suavizados nodais, e $\hat{\tilde{q}}^*$ é tal que

$$\int_{\Omega} \tilde{N}^T (\hat{\tilde{q}}^* - \tilde{q}) \, d\Omega = 0 \quad (\text{II.25})$$

Substituindo-se as equações (II.23) e (II.24) em (II.25), tem-se

$$\bar{\tilde{q}}^* = \frac{\int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{D} \tilde{N} \, d\Omega}{\int_{\Omega} \tilde{N}^T \tilde{N} \, d\Omega} \bar{\tilde{\phi}} \quad (\text{II.26})$$

Se, em seguida à suavização local, for realizada a média nodal dos fluxos obtém-se um modelo completo e contínuo $\hat{\tilde{q}}^*$ em todo o domínio. Apresenta-se na Figura II.1 a natureza das aproximações dos fluxos para um problema com funções de interpolação \tilde{N} lineares.

II.3.3 - Estimativa e Indicador de Erro

O erro como foi definido na equação (II.9) pode ser avaliado em função de qualquer parâmetro desejado. Para as incógnitas nodais, tem-se

$$\tilde{e} = \phi - \hat{\phi} \quad (\text{II.27.a})$$

assim como, para os fluxos

$$\tilde{e}_q = q - \hat{q} \quad (\text{II.27.b})$$

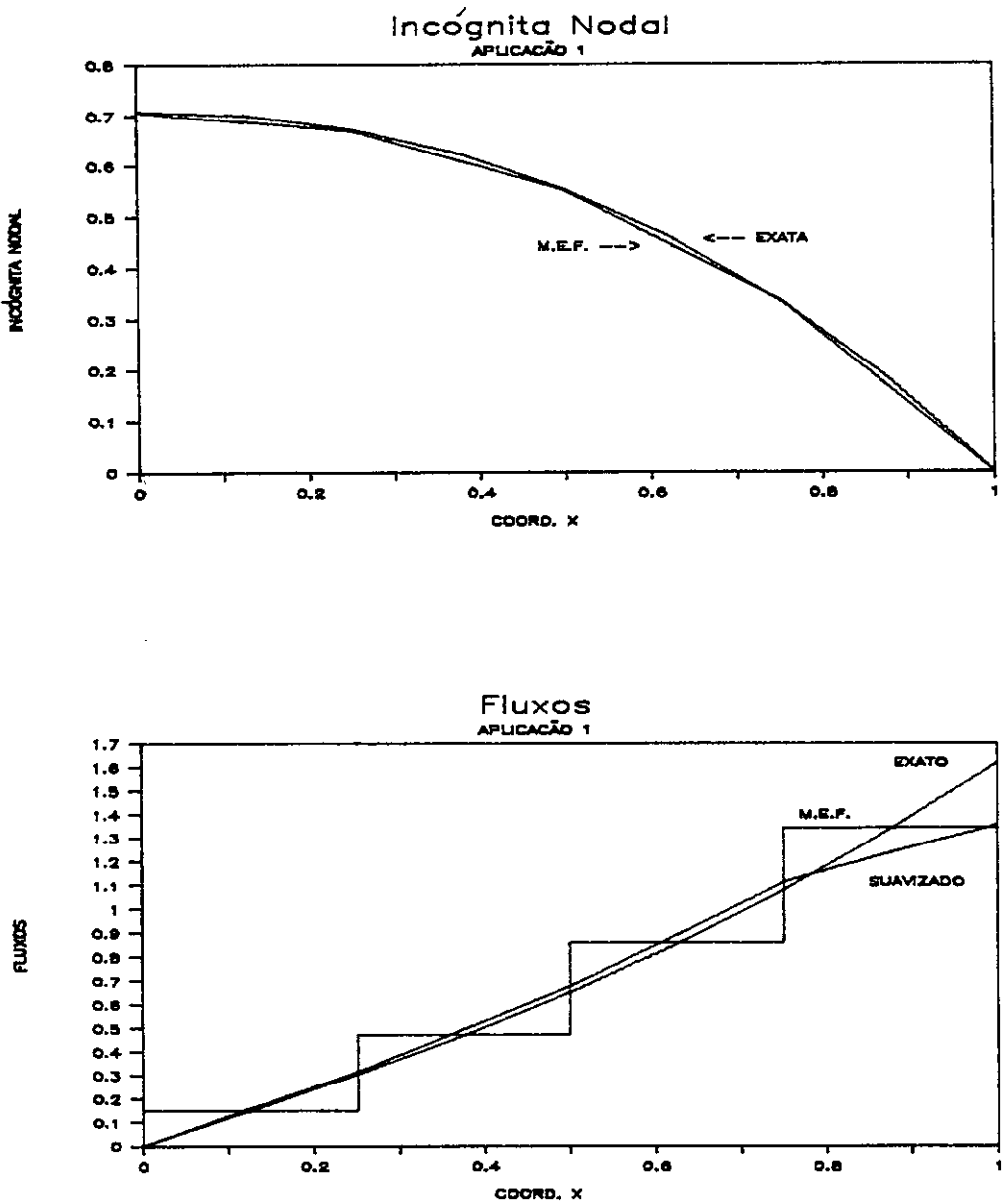


Fig. II.1 - Natureza dos fluxos em um problema com funções de interpolação lineares

Em termos de norma de energia pode-se escrever

$$||\tilde{e}||_E^2 = \int_{\Omega} \tilde{e}^T L \tilde{e} d\Omega = \int_{\Omega} (\tilde{S} \tilde{e})^T D (\tilde{S} \tilde{e}) d\Omega \quad (\text{II.28})$$

Tomando-se as equações (II.18), (II.23) e (II.27.b) pode-se escrever ainda

$$||\tilde{e}||_E^2 = \int_{\Omega} \tilde{e}_q^T D^{-1} \tilde{e}_q d\Omega \quad (\text{II.29})$$

Como foi demonstrado no item anterior \hat{q}^* é de fato uma melhor aproximação da solução exata, podendo ser usado para estimar o erro nos fluxos (ZIENKIEWICZ e ZHU [11])

$$\tilde{e}_q = \tilde{q} - \hat{q} \approx \hat{q}^* - \hat{q} \quad (\text{II.30})$$

Desta forma, a norma de energia é computada por

$$||\tilde{e}||_E^2 \approx \lambda^{(s)^2} = \int_{\Omega} (\hat{q}^* - \hat{q})^T D^{-1} (\hat{q}^* - \hat{q}) d\Omega \quad (\text{II.31})$$

A expressão anterior pode ser avaliada para cada elemento independentemente, fornecendo um indicador de erro, ou seja, permitindo que se tenha uma avaliação da distribuição dos erros.

Uma vez calculada a expressão (II.31) para cada elemento obtém-se a norma de energia do erro para todo o domínio, através de

$$\eta^{(s)^2} = \sum_{i=1}^{\text{NELM}} \lambda_i^{(s)^2} \quad (\text{II.32})$$

onde NELM é o número total de elementos do modelo.

II.3.4 - Validade das Medidas Adotadas

A maioria das estimativas encontradas na literatura é calculada através de duas parcelas: uma referente aos resíduos no interior dos elementos e outra que diz respeito à discontinuidade dos fluxos inter-elementos. A expressão a seguir é apresentada para a estimativa de erros (GAGO et alii [5])

$$\begin{aligned} \|\tilde{\epsilon}\|_E^2 \approx \sum_{i=1}^{NELM} \lambda_i (j)^2 &= \sum_{i=1}^{NELM} \left[\frac{h^2}{24\bar{D}p^2} \int_{\hat{\Omega}_i} r^2 d\Omega + \right. \\ &\left. + \frac{h}{24\bar{D}p} \int_{r_i} j^2 dr \right] \end{aligned} \quad (II.33)$$

onde h é o diâmetro do elemento, p a ordem da função de aproximação, j as discontinuidades dos fluxos entre os elementos e \bar{D} uma constante dependente da relação constitutiva do material. No caso de problemas de elasticidade, estado plano de tensão, com funções de aproximação lineares tem-se $\bar{D} = E/(1-\nu)$.

Vários autores (BABUSKA e SZABO [7], GAGO [4]) constataram que a parcela correspondente às discontinuidades dos fluxos é em geral preponderante. Isso suporta a razoável estimativa da validade da solução do MEF pode ser alcançada desprezando-se a parcela referente aos resíduos na equação (II.33). Para o caso de funções de aproximação lineares escreve-se

$$\|\tilde{\epsilon}\|_E^2 \approx \sum_{i=1}^{NELM} \lambda_i (j)^2 = \sum_{i=1}^{NELM} \left[\frac{h}{24\bar{D}} \int_{r_i} j^2 dr \right] \quad (II.34)$$

Por outro lado, RANK e ZIENKIEWICZ [12] demonstram a equivalência entre as expressões (II.34) e (II.31) o que permite escrever

$$C_1 \lambda_i^{(j)} \leq \lambda_i^{(s)} \leq C_2 \lambda_i^{(j)} \quad (\text{II.35})$$

com $C_2 \geq C_1 > 0$.

A medida dada em (II.34) satisfaz a propriedade de matemática de ser simultaneamente uma estimativa inferior e superior da norma de energia do erro, ou seja, existe $C_4 \geq C_3 > 0$ tal que

$$C_3 \eta^{(j)} \leq ||\tilde{e}||_E \leq C_4 \eta^{(j)} \quad (\text{II.36})$$

na qual C_3 e C_4 são valores que tendem para 1 quando o erro tender para zero, isto é

$$\eta^{(j)} \rightarrow ||\tilde{e}||_E \text{ quando } ||\tilde{e}||_E \rightarrow 0 \quad (\text{II.37})$$

conforme mostrado por BABUSKA e RHEINBOLDT [2].

A confiabilidade das medidas dadas nas equações (II.31) e (II.32) é numericamente comprovada em extensivas aplicações (ZIENKIEWICZ et alii [11, 13]). O uso dessas equações é particularmente interessante no contexto de processos auto-adaptativos, uma vez que através da primeira determina-se onde deve ser efetuado o refinamento, e da segunda tem-se uma avaliação global do desempenho do modelo adotado.

CAPÍTULO III

PROCEDIMENTOS ADAPTATIVOS

III.1 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Um procedimento é dito adaptativo quando uma etapa de cálculo depende de informações fornecidas pela etapa anterior, e auto-adaptativo caso não haja iteração com o usuário para ativar o processo.

Os processos adaptativos do MEF têm origem nos trabalhos de OLIVEIRA [16], CARROL [17], TURCKE e McNEICE [18] e outros, que baseavam-se nos Princípios Variacionais e Métodos de Otimização Matemática. Foram no entanto, os trabalhos de BABUSKA e RHEINBOLDT [2, 3] que tornaram possível o desenvolvimento dos processos adaptativos da forma apresentada atualmente.

Vários são os parâmetros que podem ser adaptados: malha, posição e número ótimo de pontos de integração, modelo matemático, introdução de funções especiais modelando singularidades, etc.

Este capítulo tem por objetivo apresentar alguns dos processos de refinamento de malhas cujas etapas básicas podem ser sumarizadas através do algoritmo apresentado no Quadro (III.1).

QUADRO III.1 - Algoritmo de programa auto-adaptativo do MEF

PASSO 1 - Introduzir dados do problema e tolerância do erro desejada;

PASSO 2 - Gerar modelo inicial;

PASSO 3 - Resolver sistema de equações algébricas;

PASSO 4 - Analisar erros na solução (a-posteriori);

PASSO 5 - Se a solução estiver dentro da precisão desejada:

Então parar o processamento.

Senão gerar novo modelo e voltar ao passo 3;

III.2 - MÉTODOS AUTO-ADAPTATIVOS

Os esquemas de refinamento de malhas auto-adaptativos são subdivididos de acordo com o parâmetro que será adaptado. Apresenta-se a seguir as características de algumas possibilidades existentes. Para tal tome-se por base inicial a malha da Figura III.1.

III.2.1 - Versão r

A versão r baseia-se nos trabalhos iniciais do estudo de otimização de malhas (OLIVEIRA [16], CARROL [17] e outros) e consiste no enriquecimento da solução através da otimização da localização dos pontos nodais. Um exemplo da versão r pode ser visto na Figura III.2.

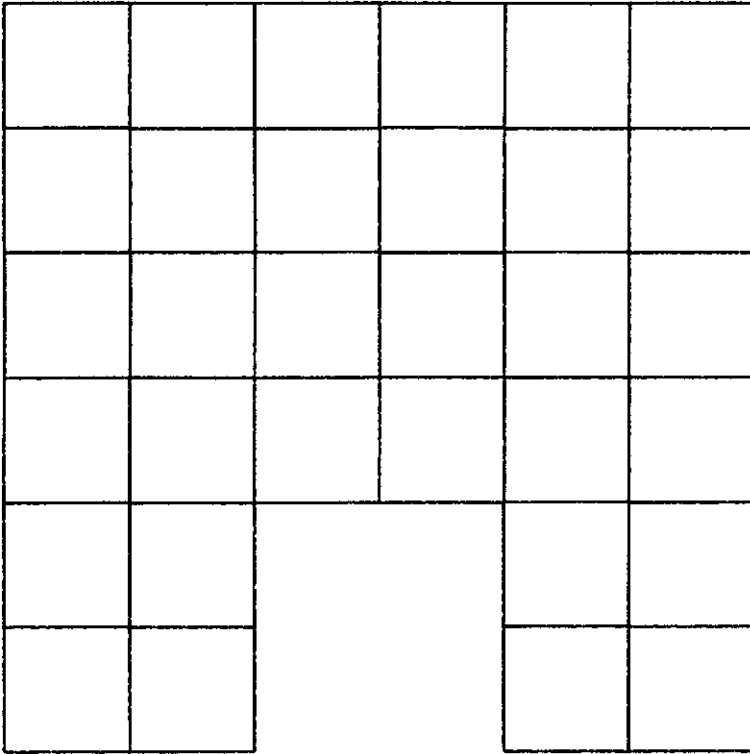


Fig. III.1 - Malha inicial

Nessa versão, uma vez que o número de graus de liberdade permanece inalterado, após vários estágios o processo estabiliza, ficando o erro nos elementos redistribuídos. Na maioria das vezes este procedimento leva a um menor valor médio dos erros. Estas reduções no erro são significativas em alguns casos, tais como, problemas de fluxo de Stokes (ODEN et alii [19]). Este processo possui dependência direta com o número de elementos da discretização inicial.

Para problemas bi e tridimensionais a estabilidade numérica deste procedimento pode ser comprometida em virtude das dificuldades de se garantir um bom condicionamento dos elementos. Uma outra abordagem consiste em regenerar

completamente a malha a cada nova adaptação, por meio de um sofisticado gerador de malhas e das informações da distribuição dos erros (PERAIRE et alii [20]). Esse procedimento permite um maior controle na obtenção do novo modelo, o que soluciona alguns dos problemas referentes ao condicionamento dos elementos.

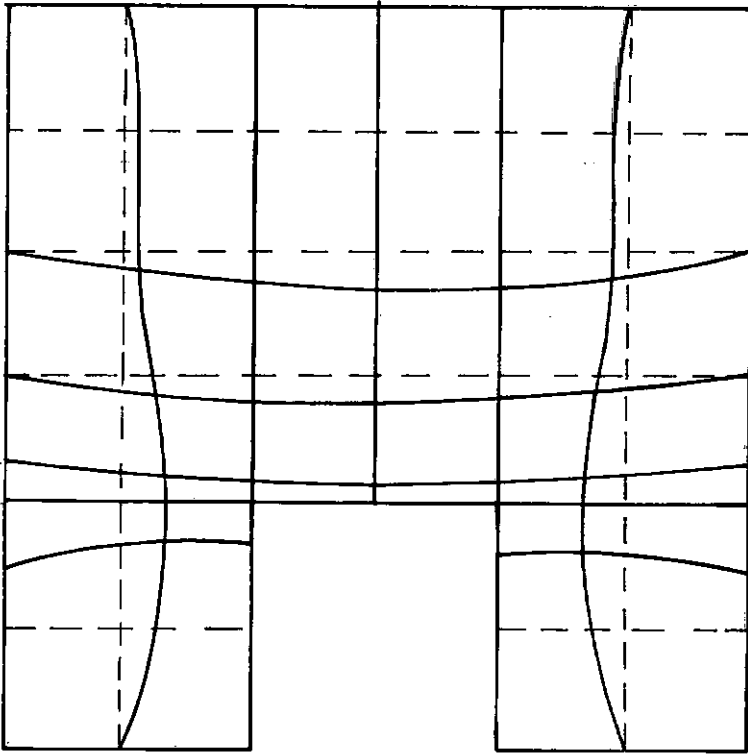


Fig. III.2 - Refinamento de malha r

III.2.2 - Versão p

Neste procedimento, a redução dos erros é alcançada aumentando-se o grau dos polinômios das funções de aproximação adotadas.

A versão p é, particularmente, atraente quando se faz uso de funções de interpolação hierárquicas, uma vez que as informações correspondentes a um nível de discretização são mantidas quando o problema é refinado. O uso da formulação hierárquica permite ainda a obtenção, de forma simples, da estimativa de erros na solução (ZIENKIEWICZ et alii [21]). A implementação da versão p fica então muito eficiente, obtendo-se altas taxas de convergência (GAGO [4], RIBEIRO [22], WILLMERSDORF [23]).

No entanto, para problemas onde a solução apresenta singularidade, a oscilação nos fluxos associada ao uso de funções de aproximação de alta ordem representa uma limitação no refinamento p (BABUSKA e NOOR [24]).

Exemplo do refinamento p pode ser visto na Figura III.3.

III.2.3 - Versão h

A versão h consiste na redução dos erros por meio da subdivisão dos elementos (CAREY [25]). Um exemplo da versão h pode ser visto na Figura III.4.

Na técnica de refinamento h a estabilidade numérica da solução é assegurada em qualquer nível de refinamento. Desta forma, a tolerância desejada é sempre alcançada.

O uso da versão h é, portanto, particularmente indicado na análise de problemas que apresentam singularidades acentuadas na solução (GAGO et alii [6]).

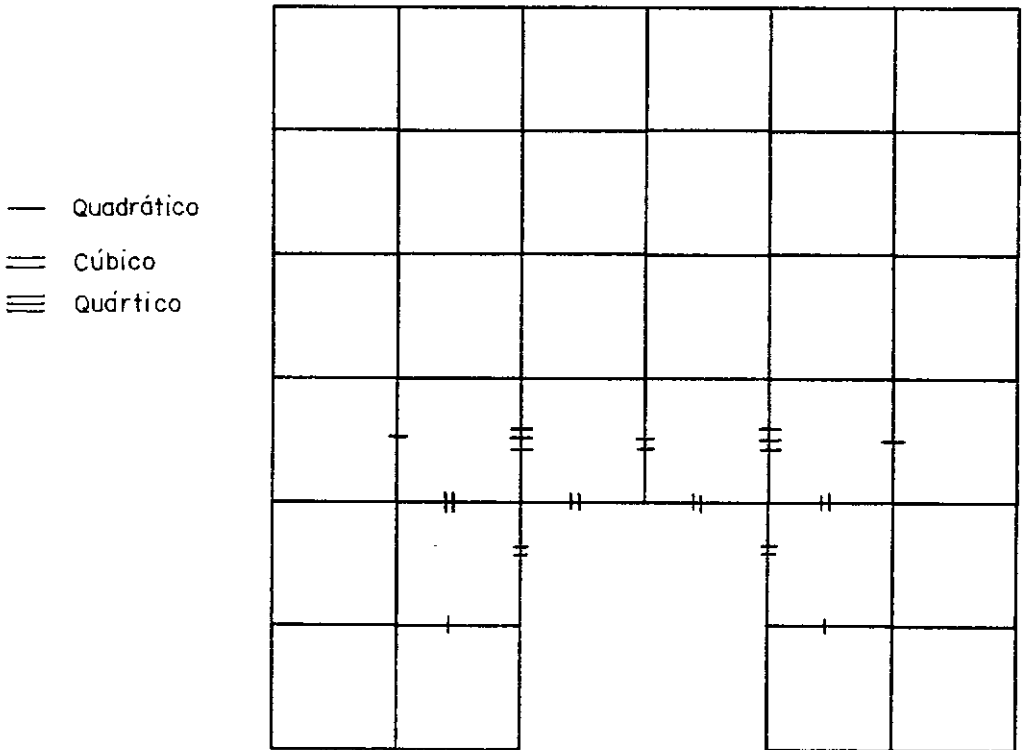


Fig. III.3 - Refinamento de malha p

É, ainda, extremamente conveniente o seu uso em problemas transientes, pois além do refinamento é possível se recorrer ao reagrupamento de elementos em regiões onde o erro se encontra abaixo da tolerância desejada (DEVLOO [26]).

III.2.4 - Versões Combinadas

Neste caso, tem-se a combinação das versões anteriores. Tem sido bastante pesquisado o procedimento h-p, no qual a estabilidade da versão h unida à boa convergência da versão p tem levado a resultados muito eficientes (DEVLOO [26]). Esta versão apresenta uma taxa de convergência exponencial mesmo em problemas com singularidades (GUO e BABUSKA [27]).

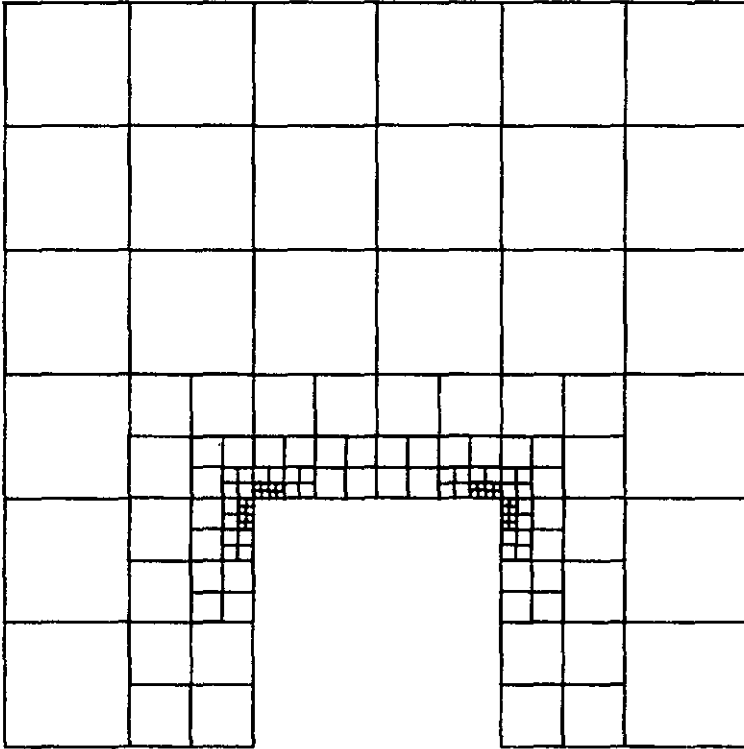


Fig. III.4 - Refinamento de malha h

Recentemente estudos têm sido efetuados com a estratégia h - r (ADJERID e FLAHERTY [28]) onde a possibilidade de refinamento e des-refinamento é incorporada em um procedimento do tipo r .

III.2.5 - Critério de Otimização

De uma maneira geral, um procedimento adaptativo pode ser definido como um problema de otimização da seguinte forma:

$$\text{Minimizar (através de adaptação) Máximo } ||e||_i \quad (\text{III.1})$$

$$i = 1, 2, \dots, \text{NELM}$$

onde $||e||_i$ é o indicador de erros no elemento i , NELM é o número total de elementos do modelo, variável na versão h .

O problema visto desta forma conduz à seguinte solução:

$$||e||_i = \text{constante } \forall i, i = 1, 2, \dots, \text{NELM} \quad (\text{III.2})$$

se não houver nenhuma restrição no procedimento auto-adaptativo. Obtém-se assim uma distribuição uniforme dos indicadores de erros sobre todos os elementos, o que representa um critério mais consistente que a simples minimização da estimativa de erros global.

No problema de Min/Max (KIKUCHI e TORIGAKI [29]) visto em (III.1) obtém-se uma equidistribuição dos erros no final da análise a menos de uma certa tolerância desejada. Esse critério se assemelha ao critério quasi-ótimo definido por OLIVEIRA [16] e TURCKE [18] e já se incorporou aos processos auto-adaptativos em geral. Apresenta-se no Apêndice B uma demonstração simplificada deste critério.

III.3 - CONVERGÊNCIA

Em um programa auto-adaptativo tem-se uma seqüência de soluções que devem ser convergentes, ou seja, a cada novo modelo deve-se ter uma solução mais próxima da exata. Sendo assim, a taxa de convergência da solução pode ser fator definitivo na escolha da versão a ser adotada.

Por sua vez, a convergência do processo esta intimamente relacionada à regularidade da solução exata do problema, ou seja, à presença ou não de singularidades.

Estudos realizados têm demonstrado uma taxa de convergência superior da versão p em relação à versão h , para malhas quasi-uniformes. Por outro lado, quando existem singularidades, a escolha da malha inicial bem como da precisão desejada são cruciais para o sucesso da versão p (BABUSKA e OH [30]). Também na versão r esses fatores são determinantes.

É geralmente difícil a definição de uma discretização inicial que elimine tais problemas, principalmente em situações que apresentam várias singularidades na solução. Além disso a precisão desejada é algo intrínseco à aplicação que se tem em vista. Assim, parece indispensável, apesar de sua baixa razão de convergência, o uso do procedimento h , que é capaz de minimizar erros cometidos na definição da malha inicial, e quando unido à versão $p(h-p)$ eliminar o efeito de poluição ou espalhamento do erro (BABUSKA e OH [30]) que ocorre na versão p em presença de singularidades.

CAPÍTULO IV

UM PROGRAMA AUTO-ADAPTATIVO VERSÃO h

IV.1 - INTRODUÇÃO

A elaboração e implementação de um programa auto-adaptativo, versão h do MEF, necessita, portanto, de uma análise de erros a cada solução que permita coordenar a adaptatividade do processo (Quadro III.1).

No que diz respeito a análise de erros apresentada no Capítulo II, sua implementação é conduzida de forma direta e imediata podendo ser incorporada em uma análise padrão via MEF, obtendo-se assim uma avaliação dos erros da solução sobre o domínio. No entanto, dotar o programa da capacidade de refinamento automático, objetivando o enriquecimento da solução, requer a incorporação de vários procedimentos, assim como, de uma estrutura de dados própria.

Ressalta-se, desde já, que apesar de implementadas em um programa para análise de problemas de potencial, a estrutura de dados, bem como, os algoritmos apresentados neste capítulo têm caráter geral, para uso em programas que tratam da solução numérica de equações diferenciais parciais elípticas lineares.

IV.2 - OBTENÇÃO DO NOVO MODELO

Para obtenção de um novo modelo as informações referentes à geometria e topologia, bem como, às condições de contorno e carregamento devem ser reestabelecidas tendo-se

por base o modelo existente.

IV.2.1 - Refinamento dos Elementos

O refinamento de um elemento em um número qualquer de subelementos implicaria na necessidade de uma estrutura de dados extremamente complexa. No entanto, adotando-se o refinamento do tipo bissecção, ou seja, a subdivisão do elemento em quatro novos, introduzindo-se nós intermediários nos lados do elemento original é possível a elaboração de procedimentos relativamente simples para obtenção das informações necessárias ao novo modelo. As etapas que devem ser executadas, para cada elemento, podem ser sintetizadas no Quadro IV.1.

- Passo 1 - Numerar novos nós;
- Passo 2 - Calcular coordenadas dos novos nós;
- Passo 3 - Obter todas as informações referentes à topologia dos novos elementos e corrigir, quando necessário, a topologia dos elementos já existentes no modelo;
- Passo 4 - Numerar novos graus de liberdade e determinar os nós irregulares;
- Passo 5 - Interpolar a solução referente ao modelo atual para as novas equações.

Quadro IV.1

IV.2.2 - Garantia da Continuidade Inter-Elementos

Os refinamentos conforme apresentado no item anterior implicam no aparecimento de nós irregulares (Figura IV.1). Uma etapa essencial no refinamento tipo h é a garantia da continuidade entre os elementos, assegurando assim a

conformidade dos mesmos e portanto a convergência do método.

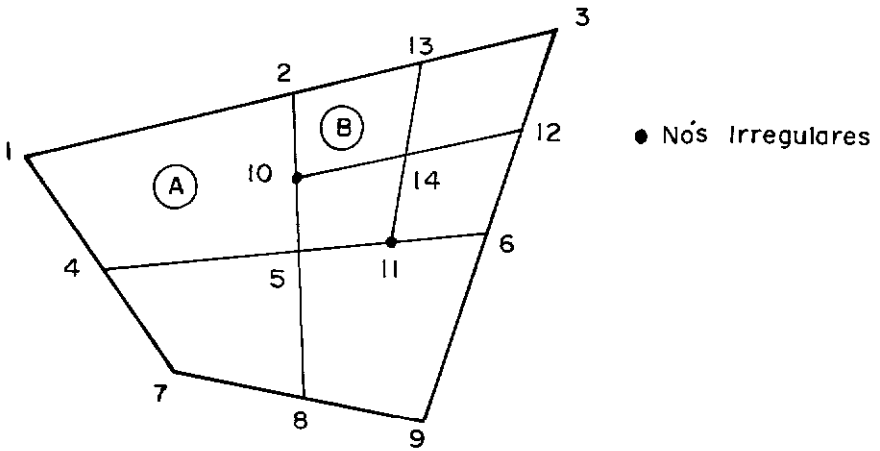


Fig. IV.1 - Refinamento tipo bissecção em um elemento isoparamétrico bi-linear

Várias são as formas para se assegurar a continuidade entre elementos: uso de elementos com funções hierárquicas; uso de elementos de transição, etc. (ZIENKIEWICZ e MORGAN [9]). Dentro do contexto da versão h do MEF, adotando-se elementos isoparamétricos bilineares, parece o mais indicado (DEMKOWICZ et alii [8]) impor restrições na incógnita do nó irregular. O referido procedimento pode ser feito a nível de elemento, introduzindo-se nas matrizes de rigidezes e nos vetores de carga as informações referentes à restrição conforme algoritmo dado no Quadro IV.2.

PARA I DE 1 ATÉ NELS FAZER

- Avaliar matriz de rigidez do elemento
- Avaliar vetor de cargas do elemento

SE o elemento possui nós irregulares

ENTÃO:- Obter matriz de permutação (\tilde{P})

- Corrigir arranjo que fornece as equações correspondentes aos elementos (arranjo LM)
- Corrigir matriz de rigidez ($\tilde{P}^T * K^e * \tilde{P}$)
- Corrigir vetor de cargas ($\tilde{P}^T * F^e$)

FIM DO SE;

FIM DO PARA.

Quadro IV.2

O arranjo LM contém então para o elemento B as equações correspondentes aos nós $[2_B, 5_A, 14_B, 13_B]$. A matriz de permutação \tilde{P} expressa a relação entre os graus de liberdade antigos e os novos. Para o elemento B tem-se

$$\begin{vmatrix} 2_B \\ 10_B \\ 14_B \\ 13_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2_B \\ 5_A \\ 14_B \\ 13_B \end{vmatrix} \quad (\text{IV.1})$$

Considere a situação ilustrada na Figura IV.1. Para o elemento A os graus de liberdade correspondentes, bem como, a geometria podem ser vistos na Figura IV.2.



(a) Geometria

(b) Graus de liberdade

Fig. IV.2 - Elemento A

Já para o elemento B que possui nó irregular, ver Figura IV.3.



(a) Geometria

(b) Graus de liberdade

Fig. IV.3 - Elemento B

Tendo em vista que a um nó irregular não correspondem equações, este é dito inativo. Uma vez sendo efetuado no vo refinamento esse pode passar a nó ativo. Deve-se então efetuar a correção também na solução por meio da transformação dada pela equação (IV.1). Obtém-se com isso o valor intermediário da incógnita nodal correspondente.

IV.2.3 - Carregamento e Condições de Contorno

Uma vez determinada uma nova discretização deve-se ter carregamento e condições de contorno correspondentes para se obter o novo modelo. A implementação efetuada no presente trabalho trata problemas tanto com carregamento nodal como de volume. Para as condições de contorno pode-se ter: incógnitas nodais prescritas, assim como, fluxo prescrito, avaliado por meio da integração na superfície correspondente.

Ressalta-se ainda, que as condições de convecção, bem como, as de irradiação também podem ser consideradas utilizando-se elementos escalares para a obtenção das matrizes adicionais.

As condições de contorno são, então, reconstituídas linearmente quando da existência de refinamento de elementos que se localizam no contorno.

IV.3 - ESTRATÉGIAS DE REFINAMENTO

IV.3.1 - Critérios Baseados na Análise de Erros

Para se obter o modelo ótimo como definido no Capítulo III (ver item III.2.5) é necessário a escolha de uma estratégia de refinamento dos elementos. Muitas são as possibilidades, a depender desta escolha tem-se uma taxa de convergência, um grau de confiabilidade dos resultados e um custo computacional correspondentes.

Dentre as diversas alternativas, implementou-se três delas nas quais tem-se como limitação, para o procedimento, a área mínima de um elemento refinado, sendo conseqüentemente o número total de elementos também limitado. A seguir descrevem-se estas alternativas. Nos critérios aqui apresentados adota-se para os elementos da malha inicial o nível um. Uma vez refinado, o elemento é subdividido em quatro novos elementos cujo nível é uma unidade maior que a do elemento que lhes originou. O nível máximo de refinamento em um elemento é N_{\max} .

- Alternativa 1:

Nesta alternativa define-se um parâmetro γ , com valor no intervalo $[0; 1]$, e avalia-se o indicador de erro máximo (λ_{\max}) do modelo, ficando o refinamento determinado conforme o procedimento apresentado no Quadro IV.3.

Passo 1 - Gerar modelo discreto;

Passo 2 - Resolver sistema de equações;

Passo 3 - Efetuar cálculo dos indicadores de erro (λ_i);

Passo 4 - Obter o indicador de erros máximo (λ_{\max});

Passo 5 - Determinar como refinável todo elemento no qual $\lambda_i \geq \gamma \lambda_{\max}$ e cujo nível é $< N_{\max}$;

Passo 6 - Se houver elementos para refinar:
 Então voltar ao Passo 1;

 Senão parar o processamento.

Quadro IV.3

- Alternativa 2:

Nesta alternativa utiliza-se a norma de energia média por elemento para definir a estratégia de refinamento (ZIENKIEWICZ e ZHU [11]) conforme apresenta-se a seguir:

Considere que ao final da análise tenha-se que

$$E \leq \bar{E} \quad (\text{IV.2})$$

onde E é a razão entre a estimativa do erro e a norma de energia do problema, avaliada por:

$$E = \frac{\eta}{(\eta^2 + \|\hat{\phi}\|_E^2)^{1/2}} \quad (\text{IV.3})$$

e \bar{E} a tolerância desejada.

Na expressão anterior o denominador representa a norma de energia total do problema.

Postulando-se que o erro encontra-se igualmente distribuído entre os elementos, tem-se

$$\lambda_i = \lambda_j \quad \forall i, j \quad (\text{IV.4})$$

onde λ_i e λ_j são os indicadores de erro de dois elementos distintos.

A norma de energia do erro pode ser obtida como

$$\eta^2 = \sum_{i=1}^{\text{NELM}} \lambda_i^2 = \text{NELM} * \lambda_i^2 \quad (\text{IV.5})$$

A expressão (IV.3) pode ser escrita na forma

$$E = \left| \frac{NELM * \lambda_i^2}{\eta^2 + ||\hat{\phi}||_E^2} \right|^{1/2} = \frac{\lambda_i}{\left| \frac{\eta^2 + ||\hat{\phi}||_E^2}{NELM} \right|^{1/2}} \quad (IV.6)$$

onde o denominador representa agora a norma de energia média por elemento (E_m). Sendo assim, a equação (IV.2) torna-se

$$\frac{\lambda_i}{E_m} \leq \bar{E} \quad (IV.7)$$

o que representa um valor limite por elemento, podendo ser usada para definir o refinamento de acordo com o esquema apresentado no Quadro IV.4.

- Passo 1 - Gerar modelo discreto;
- Passo 2 - Resolver sistema de equações;
- Passo 3 - Efetuar cálculo dos indicadores de erro (λ_i);
- Passo 4 - Computar a norma de energia média por elemento E_m ;
- Passo 5 - Determinar como refinável todo elemento no qual $[\lambda_i/E_m] > \bar{E}$ e cujo nível é $< N_{m\acute{a}x}$;
- Passo 6 - Se houver elementos para refinar:
 Então voltar ao Passo 1;
 Senão parar o processamento.

Quadro IV.4

- Alternativa 3:

Tendo em vista a existência de elementos com dimensões variadas, torna-se conveniente adotar como fator de ponderação o volume do elemento (V_i) na definição da energia

média por elemento, ou seja

$$E_{m_i}^2 = \text{NELM} * \frac{V_i}{V_T} E_m^2 \quad (\text{IV.8})$$

onde V_T é o volume total do domínio em estudo.

Uma variante da alternativa 2 é então dada substituindo-se E_m por E_{m_i} no Quadro IV.4. Uma vez que são levadas em conta as dimensões dos elementos apenas nesta alternativa tem-se uma equidistribuição mais realista dos erros (LYRA et alii [32]).

IV.3.2 - Critérios Adicionais

Além dos refinamentos determinados pela análise de erros, alguns outros devem ser adotados objetivando: a) limitar a complexidade da estrutura de dados, b) garantir uma boa topologia da malha após sucessivos refinamentos, ou ainda, c) assegurar a equidistribuição dos erros em problemas cuja solução apresenta singularidades acentuadas.

Seja então NER , o número de elementos a serem refinados, inicialmente determinados pelo critério baseado na análise de erros, e armazenados no arranjo EREF. Apresentam-se a seguir os três critérios adicionais implementados:

- Critério Adicional 1:

Refinamentos sucessivos na malha através do esquema bissecção podem levar ao modelo da Figura IV.4, onde a garantia da continuidade entre os elementos implicaria na necessidade de uma estrutura de dados que permitisse lidar com

restrições generalizadas, ou seja, relacionar o valor de um determinado nó com n outros valores nodais.

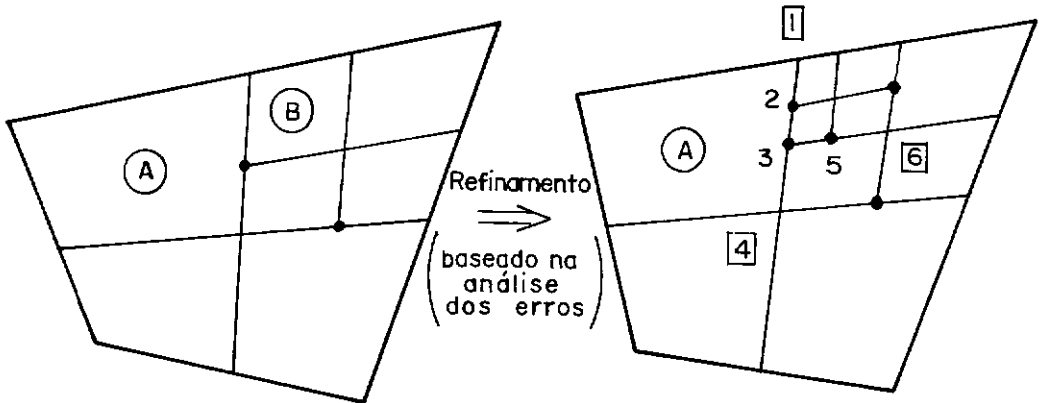


Fig. IV.4 - Modelo hipotético de malha 1

Na Figura IV.4 ter-se-ia, por exemplo, o valor da incógnita no nó 5 como função dos valores nos pontos nodais 1, 4 e 6. O procedimento apresentado no item IV.2.2 teria que ser modificado para permitir esse tratamento. A estrutura de dados que possibilita isso é muito complexa e pode ser evitada fazendo-se a limitação de apenas um nó irregular para cada lado do elemento (BANK [33]), conforme algoritmo apresentado no Quadro IV.5.

A utilização desse critério implica na inclusão do elemento A (Figura IV.4) no arranjo EREF, ou seja, entre aqueles a serem refinados.

- Critério Adicional 2:

Uma malha originada da aplicação do critério baseado na análise de erros juntamente com o critério apresentado no item anterior pode apresentar como configuração a ilustra

da na Figura IV.5.

```

ENQUANTO (I <= NER)
  PARA todos os vizinhos de EREF (I) FAÇA
    SE o vizinho possuir 2 ou mais nós irregulares:
      ENTÃO NER = NER + 1;
      EREF (NER) = vizinho;
    FIM DO SE;
  FIM DO PARA;
FIM DO ENQUANTO.

```

Quadro IV.5

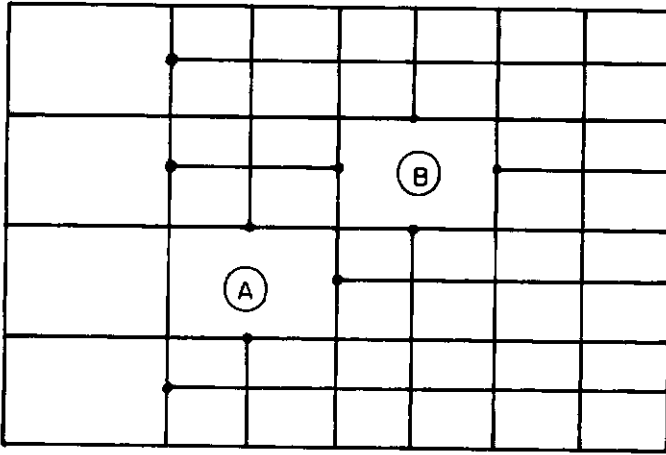


Fig. IV.5 - Modelo hipotético de malha 2

Um segundo critério pode ser adotado visando maior regularidade da malha, implicando ainda na redução de um grande número de nós irregulares. Para tal, basta limitar em no máximo dois nós irregulares fazendo fronteira com um elemento (BANK [33]) (Quadro IV.6).

```

ENQUANTO (I ≤ NER)
  PARA todos os vizinhos de EREF (I) FAÇA
    SE o vizinho possuir 3 ou 4 lados com nós irregulares:
      ENTÃO NER = NER + 1;
      EREF (NER) = vizinho;
    FIM DO SE;
  FIM DO PARA;
FIM DO ENQUANTO.

```

Quadro IV.6

Esse critério se aplicado à malha da Figura IV.5 determinaria os elementos A e B para serem refinados.

Os critérios adicionais 1 e 2 são de característica exclusivamente topológica. No entanto, o primeiro é indispensável diante da estrutura de dados utilizada, e o segundo opcional.

- Critério Adicional 3:

A utilização do critério da equidistribuição dos erros, para o domínio Ω , em problemas com singularidades acentuadas, implica em um número muito grande de refinamentos concentrados nas regiões próximas às singularidades até ser alcançada a tolerância desejada. Isso acarreta em última análise em: grande esforço computacional, malhas mal condicionadas, número considerável de refinamentos adicionais, etc.

Considere um problema com carga concentrada, cujo fluxo é dado pela função delta de Dirac. Tem-se solução porém com energia infinita no domínio (Ω). No entanto, tem-se

energia finita em um subdomínio $\Omega^* \subset \Omega$ no qual a região em volta da singularidade é excluída (ver Figura IV.6) (BABUSKA [34]).

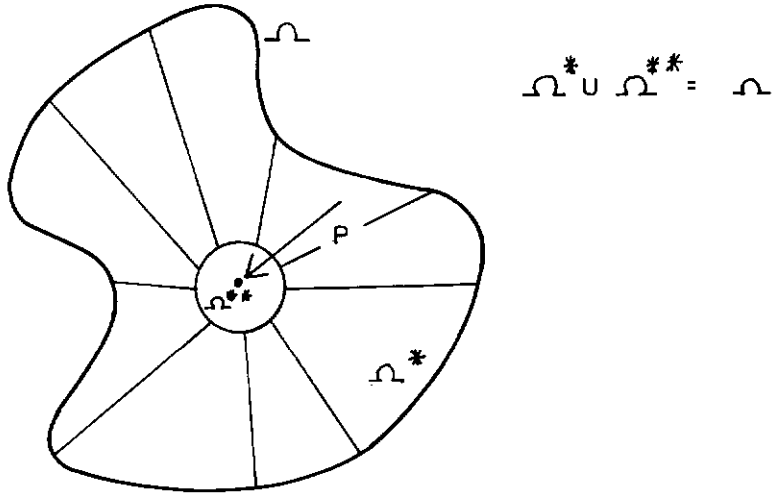


Fig. IV.6

Deve-se, portanto avaliar as medidas de erro em termos da norma da energia no domínio Ω^* , uma vez que para a versão h é demonstrado (NITSCHKE e A. H. SCHATZ [35]) que

$$\|e\|_{E(\Omega^*)} \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0 \quad (\text{IV.9})$$

A definição do domínio Ω^* , previamente, só seria possível em problemas cujo comportamento da solução é conhecido. De forma a assegurar que, ao final, todo elemento com indicador de erro acima do limite desejado tenha nível igual ao máximo (N_{\max}), pode-se adotar o procedimento apresentado no Quadro IV.7 (LYRA et alii [36]), no qual a convergência do erro total é avaliada como

$$RCONV = \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\eta_k} \quad (\text{IV.10})$$

onde k e $k-1$ referem-se respectivamente, ao modelo atual e o imediatamente anterior. O parâmetro $RCONV_{\min}$ é estabelecido externamente como a convergência mínima do erro total desejada.

```
PARA I de 1 ATÉ NER FAÇA
```

```
  SE Nível de EREF (I) =  $N_{\max}$ 
```

```
    ENTÃO SE  $RECONV \leq RCONV_{\min}$ 
```

```
      ENTÃO voltar ao critério de refinamento  
        do erro s/computar os elementos de  
        nível, igual a  $N_{\max}$ ;
```

```
    FIM DO SE;
```

```
  FIM DO SE;
```

```
FIM DO PARA.
```

Quadro IV.7

A utilização desse procedimento assegura apenas a equidistribuição dos erros para os elementos com níveis inferiores ao nível máximo. Um tratamento mais apropriado pode se fazer necessário em um problema específico, o que pode ser alcançado fazendo-se uma adaptação da função para os elementos do domínio Ω^{**} , usando-se funções próprias para o tratamento de singularidades. Ou ainda, fazer uso da versão h-p que apresenta taxa de convergência exponencial mesmo para esses problemas (RANK [37]).

Tendo-se definido todos os elementos que devem ser refinados, quer devido à análise dos erros quer em função da aplicação dos critérios adicionais apresentados, refina-se um a um os elementos conforme item IV.2. O refinamento é efetuado na ordem crescente dos níveis dos elementos.

IV.4 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

A etapa de resolução do sistema de equações algébricas é sempre de suma importância em qualquer problema. Tendo em vista, as sucessivas reavaliações existentes em um procedimento auto-adaptativo, bem como, as características particulares do mesmo sua importância torna-se ainda maior.

Num programa auto-adaptativo versão h do MEF tem-se uma natureza não regular da numeração nodal que provém do processo de refinamento automático. Isso leva à um aumento da largura de banda na matriz global do problema. Uma vez que a eficiência do uso de procedimentos diretos na solução do sistema de equações está diretamente relacionada à exploração desta característica (AXELSSON e BARKER [38]) a sua utilização parece imprópria. Aliado a isso, é facilmente observável que o uso de tais procedimentos implicaria em uma reavaliação completa da matriz do sistema a cada nova etapa do processo adaptativo.

Por outro lado, um processo de resolução iterativo não é influenciado pela numeração nodal, já que sua implementação pode ser feita na forma Elemento-por-Elemento (COUTINHO et alii [39]). Esse procedimento permite ainda tomar como vetor de partida, na resolução em uma determinada etapa, a solução obtida na etapa imediatamente anterior. Acelera-se assim a taxa de convergência do processo.

O uso de procedimentos iterativos apresenta-se também bastante atraente face às novas arquiteturas de computadores, onde podem ser exploradas as capacidades de vetorização e paralelização de processos, ORTEGA [40].

Empregou-se o Método dos Gradientes Conjugados com condicionamento de Jacobi (GOLUB e LOAN [10], ODEN e CAREY [41], COUTINHO et alii [39]) implementado na forma Elemento-por-Elemento.

IV.5 - ESTRUTURA DE DADOS ADICIONAL

Como pode ser visto, para a implementação dos procedimentos apresentados nos itens anteriores, faz-se necessário uma estrutura de dados adicionais às já existentes em um programa do MEF.

A escolha dessa estrutura de dados é de extrema importância uma vez que dela depende parte significativa do sucesso do programa.

Muitos são os fatores que influenciam na sua elaboração, tais como: algoritmo de solução, tratamento dos nós irregulares, memória disponível, etc. De um modo geral os fatores apresentados são conflitantes e qualquer escolha representa um compromisso. Dentre os fatores dois (DEVLOO [26]) devem ser destacados uma vez que são indispensáveis, pois são inerentes aos programas auto-adaptativos:

- 1º) A estrutura de dados deve independe da malha fornecida, ou seja, deve ser não-estruturada.
- 2º) A estrutura de dados deve ser tal que ao sofrer modificações durante o processo adaptativo permaneça estável, ou seja, deve ser robusta.

Tendo em vista as características e informações necessárias e baseando-se ainda em trabalhos tais como os de CAREY [25], BANK [33], RHEINBOLDT et alii [42], optou-se por um esquema que se assemelha à estrutura em árvore.

As informações referentes aos vizinhos dos elementos (LADO) e à história do refinamento (FILHO), bem como, às incidências dos novos elementos ficam determinadas em função das incidências do elemento que lhes originou (PAI), tendo em vista disposição local apresentada na Figura IV.7.

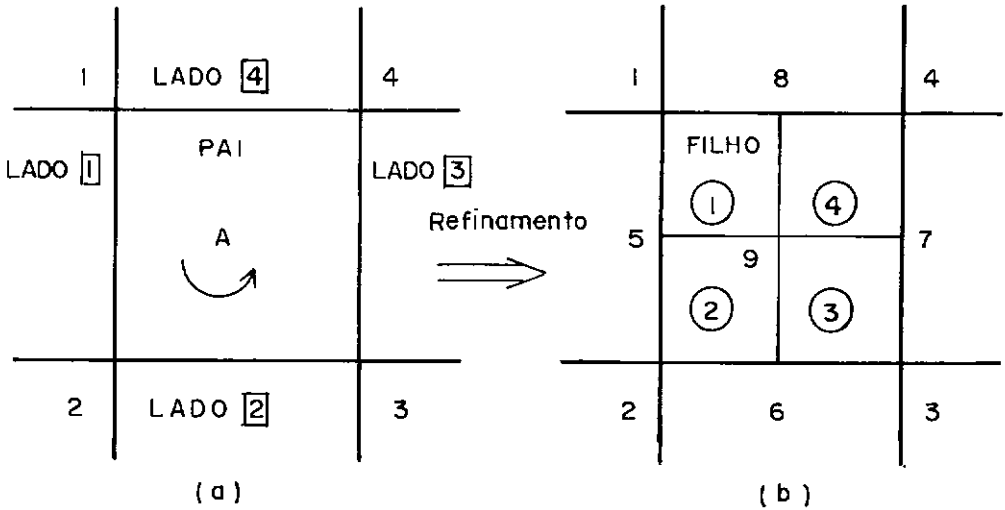


Figura IV.7

A informação referente ao nível de refinamento do elemento é armazenada em um arranjo (NÍVEL). É feito uso de um outro arranjo contendo a informação referente ao estado do nó, se regular ou não. Esse arranjo permite a utilização, de forma imediata, do modelo final obtido, no caso de se desejar reiniciar a análise. Tem-se ainda o arranjo (EREF) contendo os elementos a serem refinados.

CAPÍTULO V

RESULTADOS NUMÉRICOS

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo os procedimentos implementados são utilizados na solução de problemas bidimensionais lineares regidos pela equação geral de campo em regime permanente, procurando-se estudar as diversas características do processo de refinamento versão h do MEF.

Todas as análises foram efetuadas no computador Burroughs A10, do Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Os algoritmos foram escritos em linguagem FORTRAN sendo as variáveis reais declaradas com precisão dupla. As discretizações iniciais foram proposi-tadamente grosseiras para maior evidência do processo de refi-namento, e em todas as aplicações adotou-se tolerância de 10^{-6} na norma Euclidiana dos resíduos para a convergência do Método dos Gradientes Conjugados.

Utilizou-se ainda o programa SISPLOT (JACOB e EBECKEN [43]) como pós-processador gráfico, além de softwa-res aplicativos AUTO-CAD [44], SURFER [45] e LOTUS 1-2-3 [46] na obtenção dos gráficos e figuras apresentados.

V.2 - A EQUAÇÃO DO CAMPO

Inúmeros são os problemas práticos na Engenharia cujo modelo matemático pode ser descrito por uma E.D.P. elíp-tica originada da equação Geral de Campo. Sendo ϕ a função

incógnita do problema; K_x , K_y e p parâmetros dependentes do material que constitui o meio onde o fenômeno atua; escreve-se para problemas bidimensionais lineares no regime permanente essa equação como

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + p = 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega \quad (V.1)$$

Com condições de contorno dadas por:

- a) O valor da incógnita é conhecido no contorno (condição de contorno de Dirichlet ou essencial)

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_D \quad (V.2)$$

onde $\bar{\phi}$ é o valor da incógnita prescrita.

- b) Existe um carregamento de superfície no contorno (condição de contorno de Cauchy ou natural)

$$K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y + \bar{q} + h \phi = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_C \quad (V.3)$$

onde n_x e n_y são os cossenos diretores entre a normal externa ao domínio e os eixos x e y respectivamente. O valor do fluxo prescrito é representado por \bar{q} e h é o coeficiente de radiação ou de convecção.

Na Figura V.1 apresenta-se de forma esquemática o domínio e contorno em um problema bidimensional.

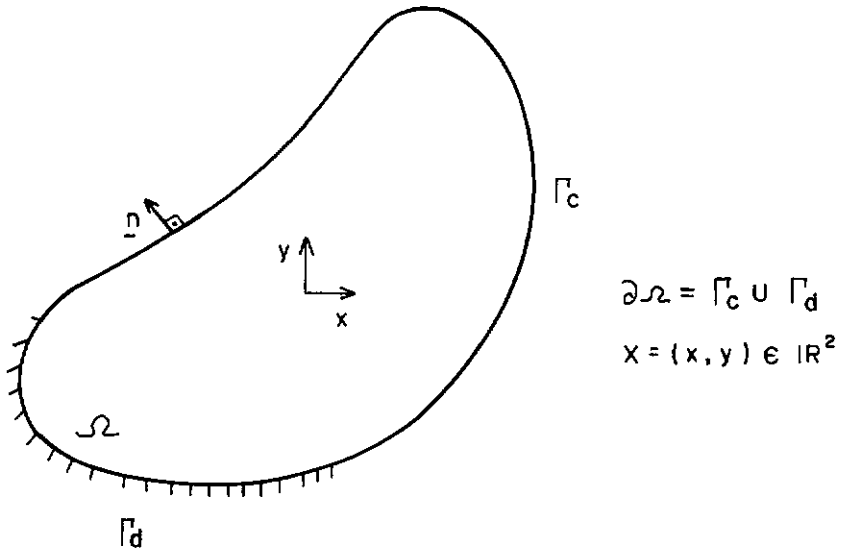


Fig. V.1 - Região bidimensional

Apresenta-se na Tabela V.1 (BATHE [47]) uma analogia entre alguns problemas físicos governados pela equação (V.1).

| PROBLEMA FÍSICO | INCÓGNITA (ϕ) | K_x, K_y | P |
|--|----------------------|-----------------------------------|---------------------------|
| Transferência de calor | Temperatura | Condutividade térmica | Geração interna de calor |
| Torção | Função de tensão | (módulo cisalhante) ⁻¹ | (-2) x (ângulo de torção) |
| Fluxo em meio poroso | Altura piezométrica | Condutividade hidráulica | Geração interna de fluxo |
| Fluxo inviscido, irrotacional e incompressível | Velocidade potencial | - | Fonte ou sumidouro |
| Condução elétrica | Voltagem | Condutividade elétrica | Fonte de corrente interna |

continua...

| PROBLEMA FÍSICO | INCÓGNITA (ϕ) | K_x, K_y | P |
|-----------------|----------------------|--------------|-----|
| Difusão de gás | Concentração | Difusividade | - |
| ... | ... | ... | ... |

Tabela V.1 - Problemas de campo

Vale ressaltar, que embora não tenha sido explorado, nas aplicações efetuadas, o programa desenvolvido permite a análise de problemas com condições prescritas de convecção ou de irradiação, bem como, problemas com materiais que possuem comportamento ortotrópico.

V.3 - APLICAÇÕES

Constitui-se em uma etapa de grande importância a análise de problemas modelo pois assegura que, pelo menos para uma certa classe de problemas, os procedimentos adotados fornecem resultados esperados. Com esse intuito estudou-se entre outros, alguns problemas que possuem soluções analíticas ou comportamento evidente.

Uma atenção maior é dada com relação aos fluxos pois representam uma aproximação de ordem superior.

- Aplicação 1: (Torção)

Seja a análise de um domínio quadrado, $-L < X < L$ e $-L < Y < L$, com material isotrópico ($K_x = K_y = K$), condições de contorno de Dirichlet, e regido pela equação de Poisson:

$$\Delta\phi = P \quad (V.4)$$

A solução analítica deste problema é dada através da série de Fourier (CARSLAW e JAEGER [49])

$$\phi = \frac{P(L^2 - X^2)}{2K} - \frac{16PL^2}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos[(2m+1)\pi X/2L] \cosh[(2m+1)\pi Y/2L]}{(2m+1)^3 \cosh[(2m+1)\pi/2]} \quad (V.5)$$

O problema descrito acima pode ser interpretado fisicamente como uma barra quadrada submetida a um momento torsor tal que $2G\theta = P$, onde θ é o ângulo de torção e G é o módulo de elasticidade no cisalhamento. O parâmetro ϕ é a função de tensão, conforme apresentado no Quadro V.1, que depende exclusivamente de X e Y . Esta formulação para o problema de torção deve-se a Prandtl (TIMOSHENKO e GOODIER [50]).

Para as análises apresentadas a seguir adotou-se: $L = 1$, $K = 1$, $P = 2.4$, assim como, 15% de tolerância para equidistribuição dos erros (γ ou \bar{E}), um nível máximo de refinamento (N_{\max}) igual a 10 e uma convergência mínima no erro total ($RCONV_{\min}$) de 10%

A história do refinamento para o caso em que se define um limite para a razão entre o indicador de erro e a norma de energia média por elemento (Alternativas 2 e 3 dadas em IV.3.1) pode ser vista na Figura V.2. No caso de se definir uma percentagem com relação ao indicador de erro máximo para determinar os refinamentos (Alternativa 1) tem-se para este problema o refinamento uniforme até ser atingido o nível máximo de refinamento adotado. Para a Alternativa 2 a solução é atingida na 6ª malha, com 225 equações, um er-

ro total de 7,5% e uma equidistribuição dos erros a menos de 8.6%. Para a alternativa 3 já ao final da quarta malha foi alcançada a solução dentro dos padrões desejados, tendo-se apenas 109 equações com um erro total de 11,1% e 14% para equidistribuição dos erros.

A evolução da norma de energia da estimativa, bem como, da norma do erro real para as seis malhas apresentadas pode ser vista no gráfico da Figura V.3, onde pode-se observar a taxa de convergência para este problema. Percebe-se que o gráfico é aproximadamente uma reta. Assumindo-se o comportamento dado na equação (II.13) na escala logarítmica tem-se que a declividade da curva caracteriza o valor do índice " α " (taxa de convergência).

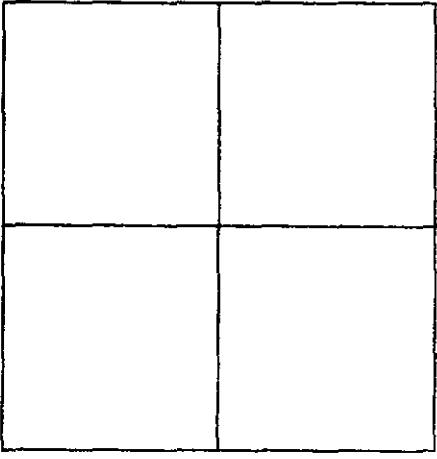
O afastamento entre a estimativa e o erro para um número de graus de liberdade igual a 109, quarta malha, deve-se ao fato da suavização não implicar em melhoria para os fluxos nos cantos (ver Figura II.1). Na quarta malha apenas a região do centro não deveria estar refinada. Apesar disso percebe-se a importância de levar em consideração as dimensões do elemento na definição dos elementos a serem refinados (Alternativa 3), basta analisar a Figura V.4 onde nenhuma melhora significativa é obtida após a quarta malha para tensão máxima cisalhante.

$$\tau_{\text{máx}} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{V.6})$$

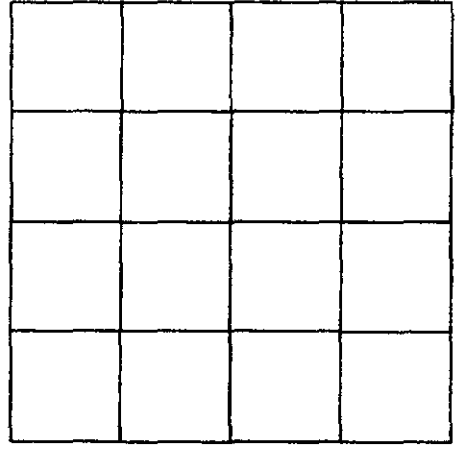
Uma vez que a solução apresentada ao final da análise refere-se aos fluxos suavizados, a estimativa é a favor da segurança. Neste problema, tem-se uma estimativa $\eta = 11,1\%$ (equação II.32) que é avaliada tendo em vista o fluxo suavizado (\hat{q}^*) e o fluxo do MEF (\hat{q}), um erro real

$||\tilde{e}||_E = 12,4\%$, ou seja, avaliado entre o fluxo exato (\underline{q}) e o fluxo do MEF ($\hat{\underline{q}}$). No entanto, tem-se 9% para o erro se avaliado tendo em vista o fluxo exato (\underline{q}) em relação ao fluxo suavizado ($\hat{\underline{q}}^*$).

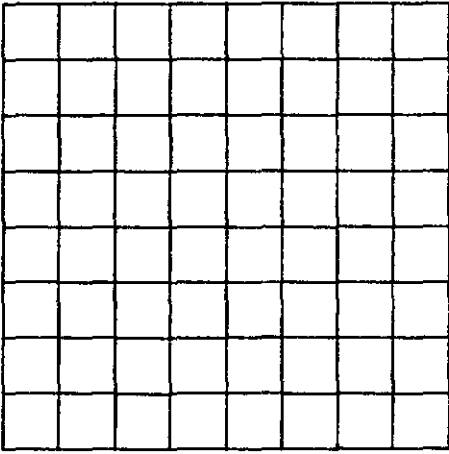
Para a incógnita no centro do domínio observa-se o comportamento apresentado na Tabela V.2.



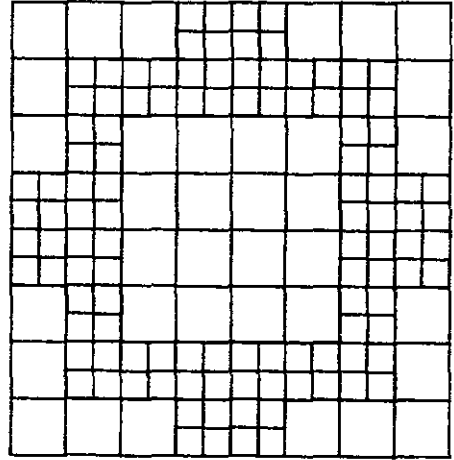
(a) Malha 1 (NGL = 1)



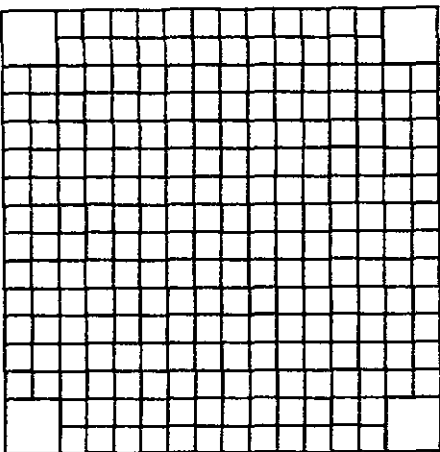
(b) Malha 2 (NGL = 9)



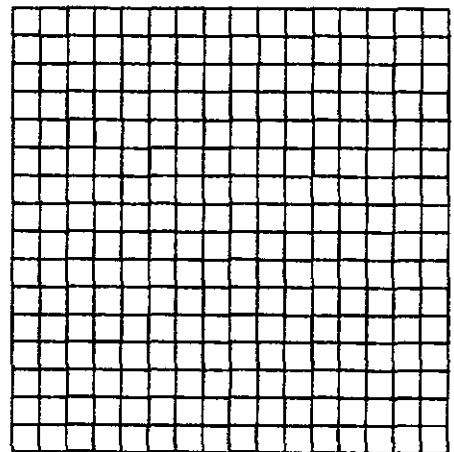
(c) Malha 3 (NGL = 49)



(d) Malha 4 (NGL = 109)



(e) Malha 5 (NGL = 213)



(f) Malha 6 (NGL = 225)

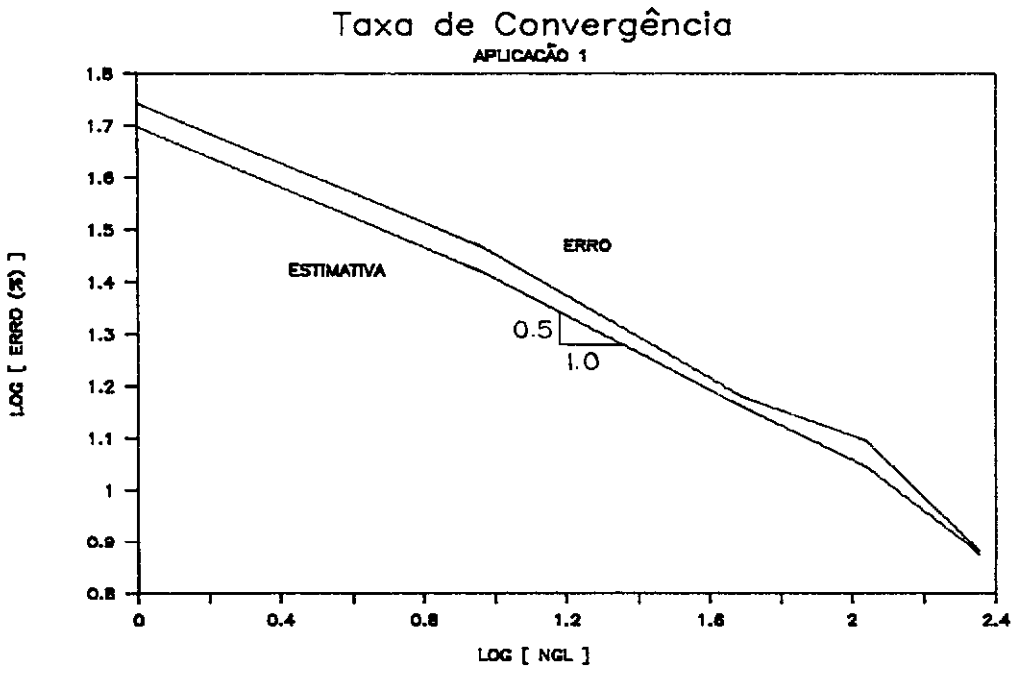


Figura V.3

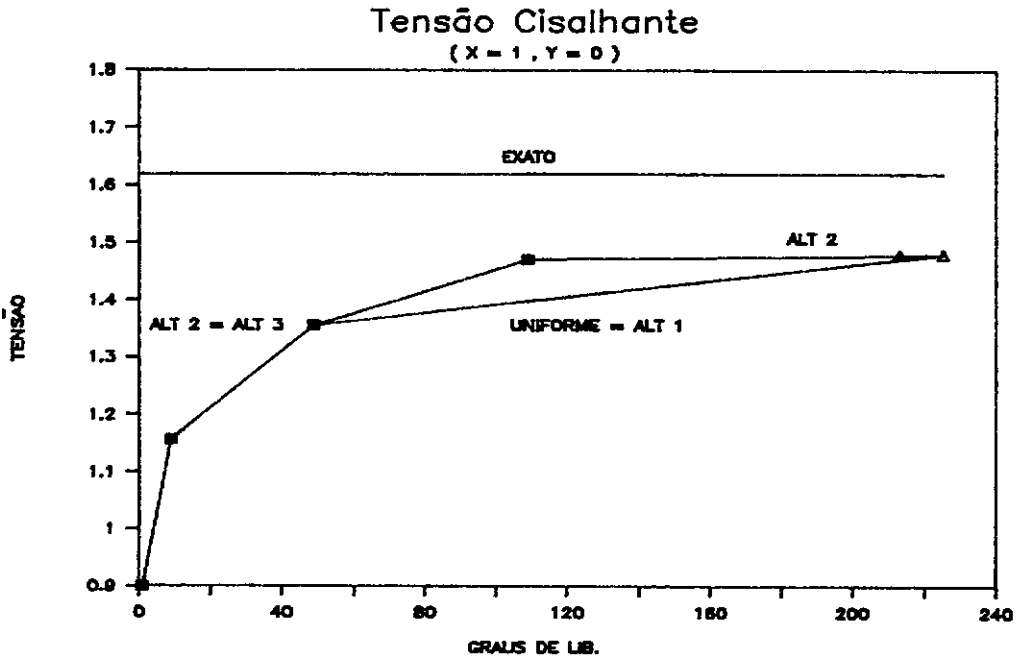


Figura V.4

| MALHA 1 | MALHA 2 | MALHA 3 | MALHA 4 | MALHA 5 | MALHA 6 | VALOR EXATO |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-------------|
| 0,9000 | 0,7457 | 0,7161 | 0,7149 | 0,7094 | 0,7094 | 0,7072 |

Tabela V.2 - Comportamento da incógnita ϕ

Tem-se valores bem próximos do exato mesmo para malhas relativamente grosseiras. Neste caso a solução obtida por meio do MEF é superconvergente nos nós (TONG [48]) já que as funções de aproximação para o elemento linear pertencem à família das funções que satisfazem a equação homogênea correspondente à equação (V.4) (ZIENKIEWICZ e MORGAN [9]).

- Aplicação 2 - (Condução de calor)

Seja a análise de um domínio quadrado com material isotrópico ($K_x = K_y = 1$), condições de contorno de Dirichlet, com uma fonte pontual de calor no centro deste domínio, regido pela equação de Laplace:

$$\Delta\phi = 0 \quad (V.7)$$

Adotou-se 7 como nível máximo de refinamento (N_{\max}), 20% para a tolerância na equidistribuição dos erros (γ ou \bar{E}), 5% para a convergência mínima no erro total ($RCONV_{\min}$) e como modelo inicial uma malha 2 x 2, ficando a origem do sistema de coordenadas no centro do domínio.

Nas Figuras V.5, V.6 e V.7 tem-se as malhas finais para as três alternativas.

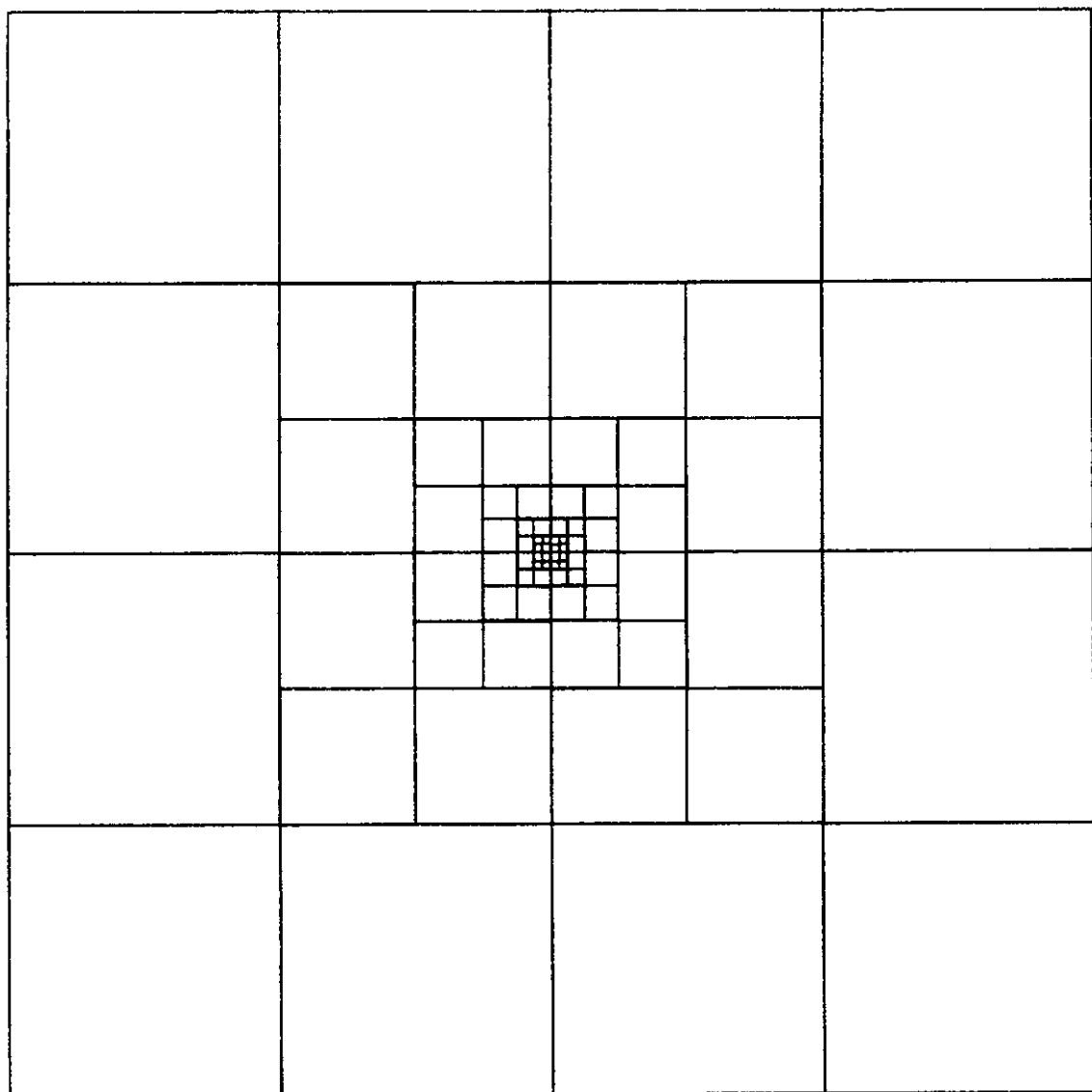


Figura V.5 - Alternativa 1 (7ª malha)

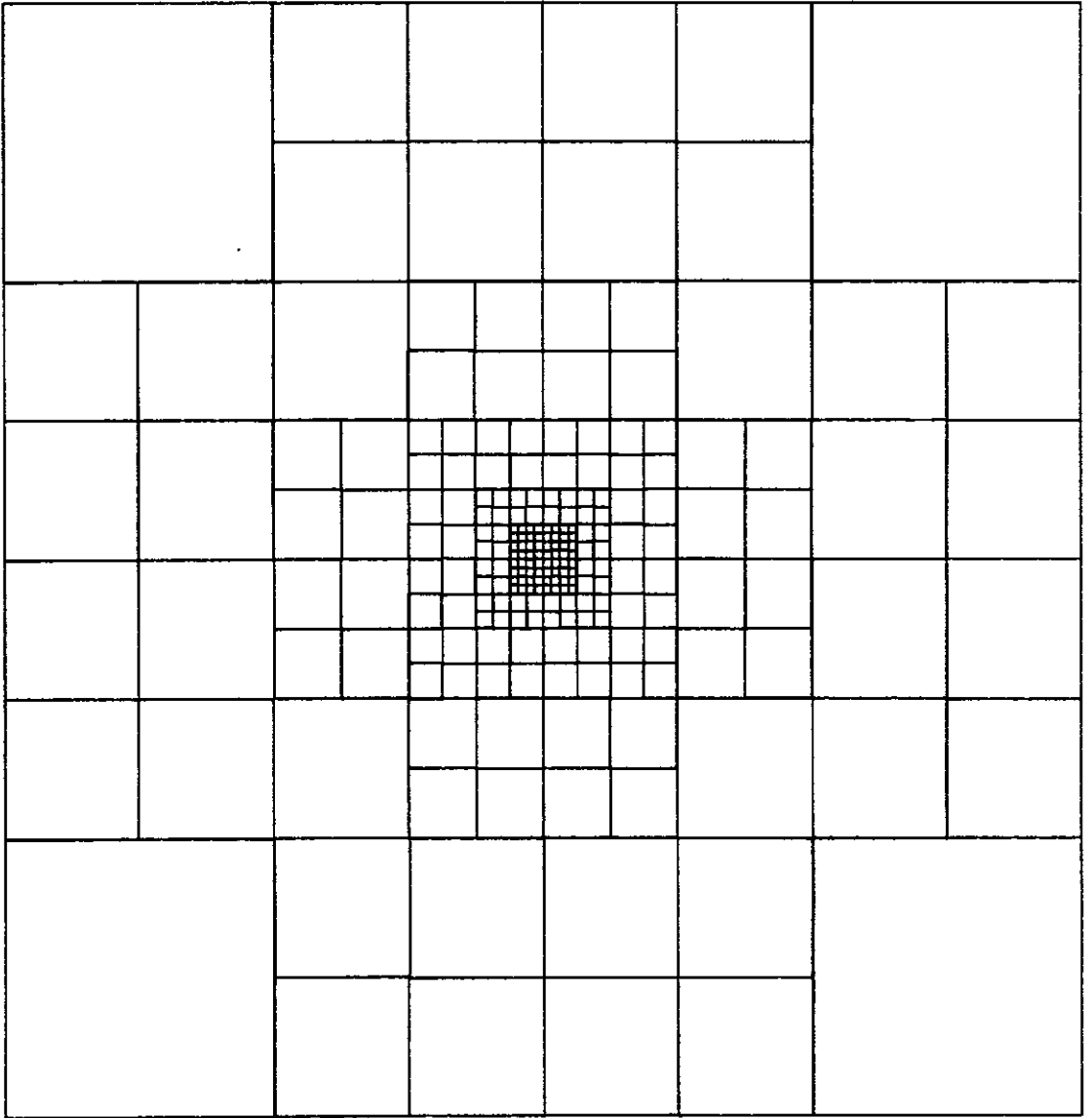


Figura V.6 - Alternativa 2 (7ª malha)

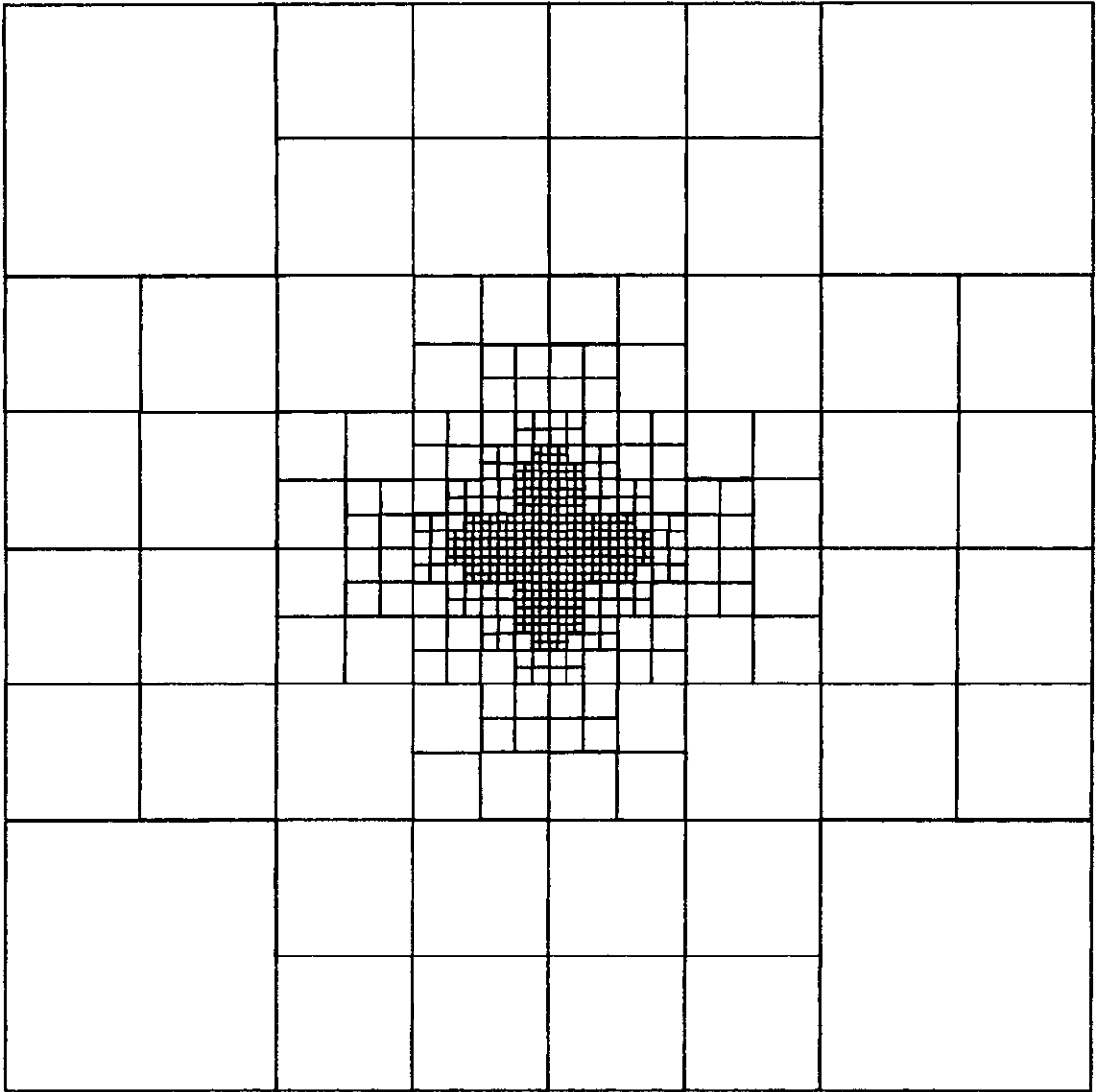


Figura V.7 - Alternativa 3 (8ª malha)

Para as alternativas 2 e 3 o critério, que visa as segurar a equidistribuição dos erros em problemas com singularidades acentuadas, foi acionado implicando, no caso da alternativa 3, em alguns refinamentos na região próxima à singularidade. Esses refinamentos adicionais podem ser visualizados através da comparação da malha final dada na Figura V.7 com a malha anterior a ativação do critério dada na Figura V.8.

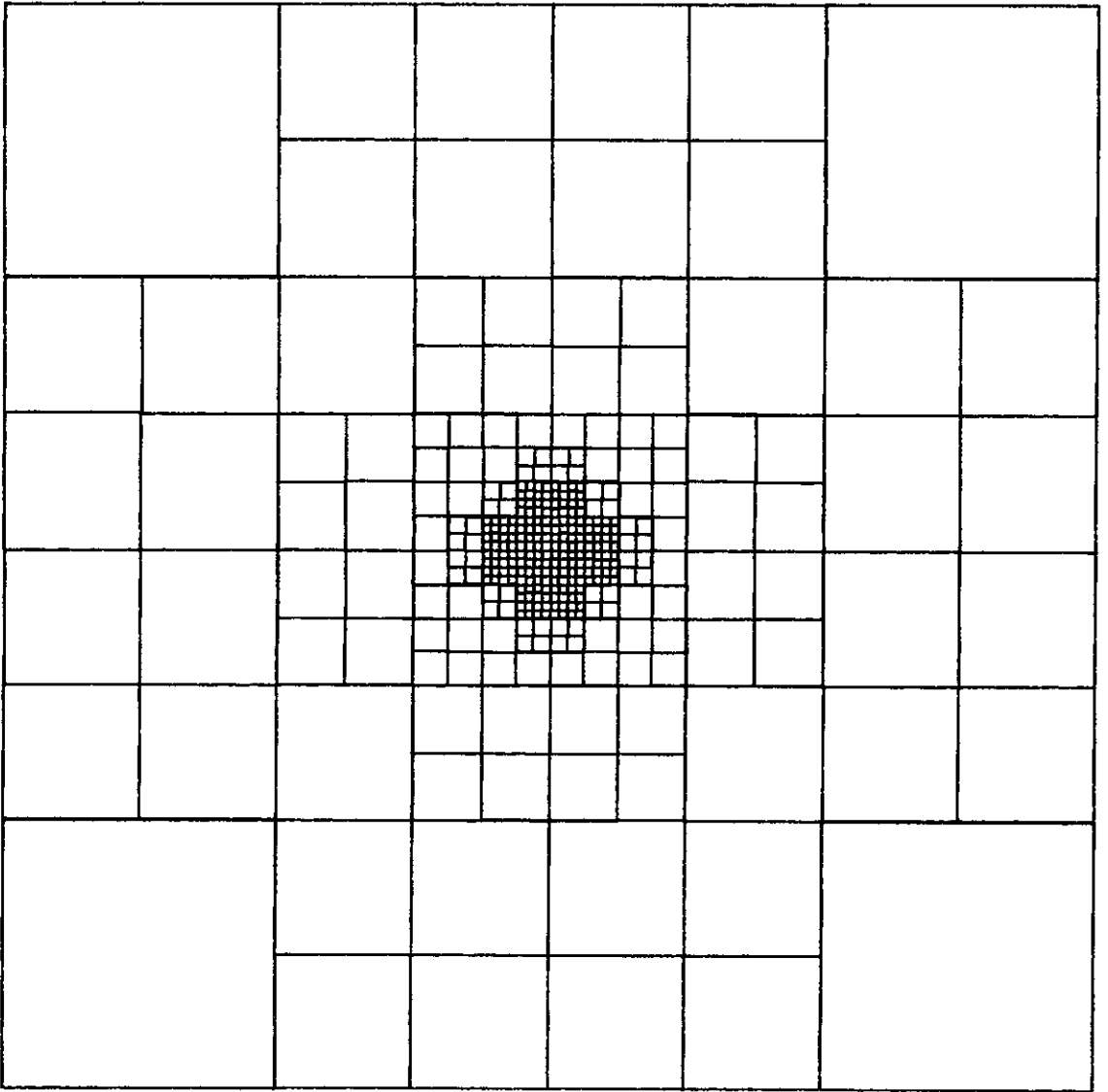


Figura V.8 - Alternativa 3 (7ª malha)

O comportamento da convergência para as três alternativas bem como para o refinamento uniforme pode ser visto na Figura V.9. O aumento na estimativa dos erros no início do processo deve-se ao fato da discretização inicial ser muito pobre, sendo também pobre a estimativa. Observa-se ainda, no refinamento uniforme, que a partir de uma certa etapa tem-se uma taxa de convergência quase nula, uma vez que já nesta etapa os erros concentram-se apenas na região central do domínio.

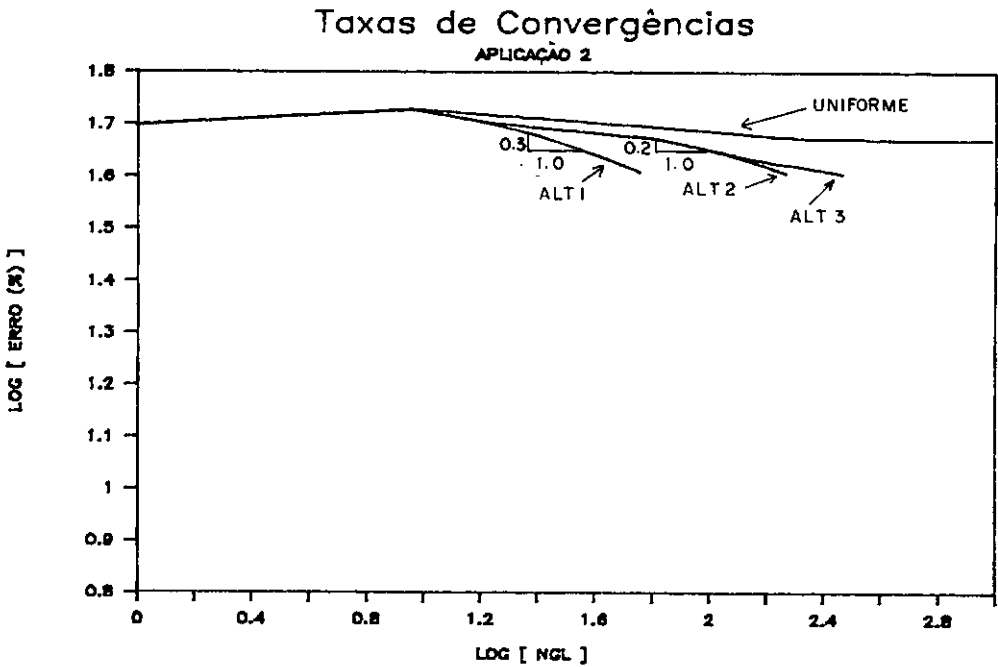


Figura V.9

A evolução da solução em termos dos fluxos para as três alternativas é vista nas Figuras V.10, V.11 e V.12. A alternativa 1 uma vez que concentra os refinamentos exclusivamente na vizinhança da singularidade apresenta maior taxa de convergência, tendo-se, no entanto, um resultado mais suave para as alternativas 2 e 3, sendo que na 3 tem-se uma equidistribuição do erro mais consistente.

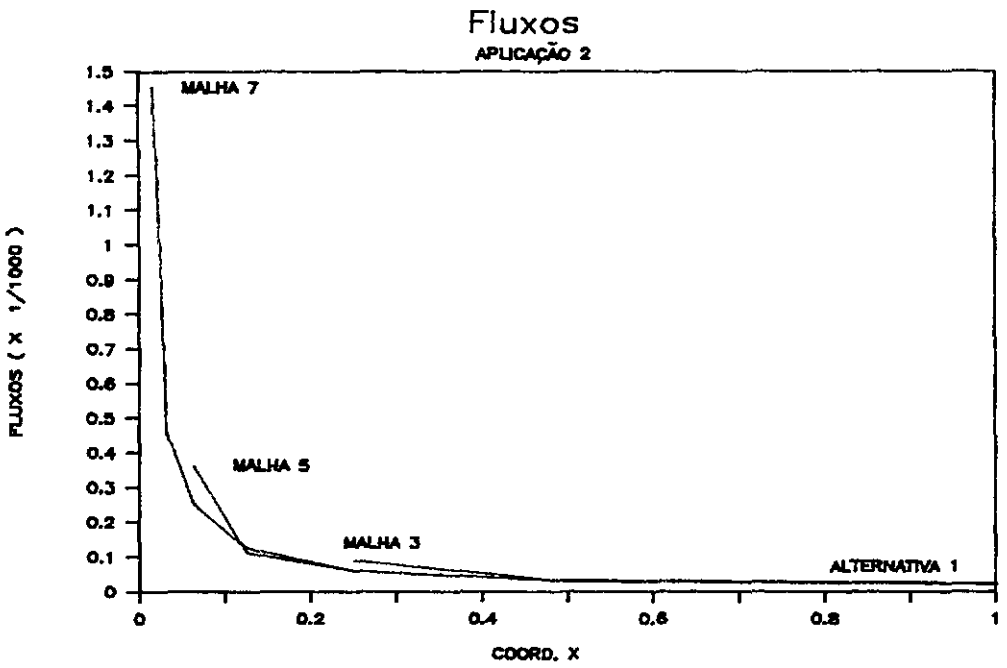


Figura V.10 - Alternativa 1

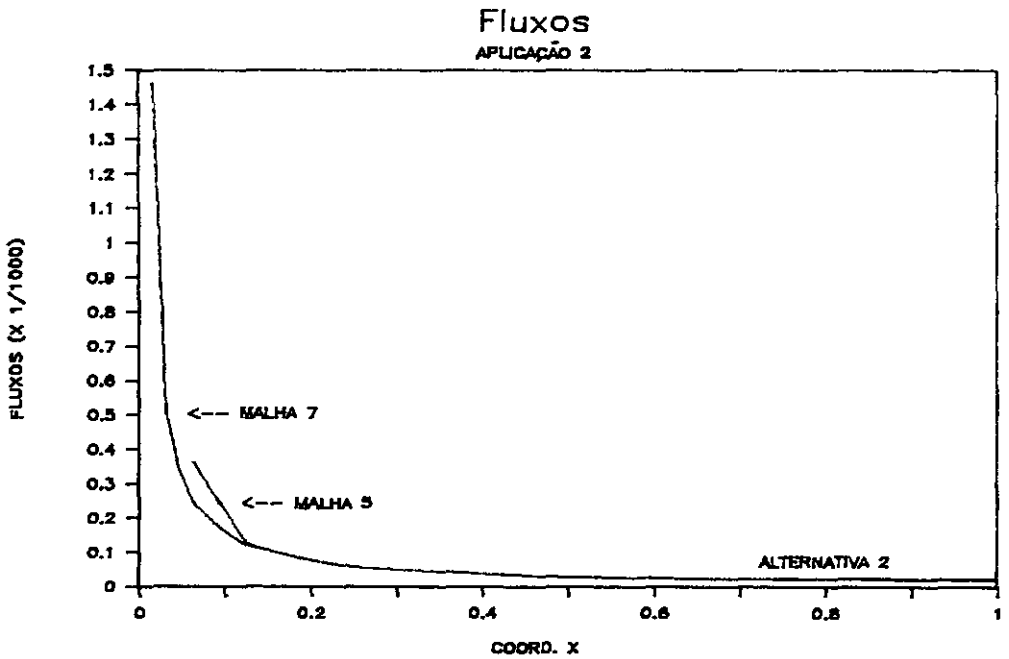


Figura V.11 - Alternativa 2

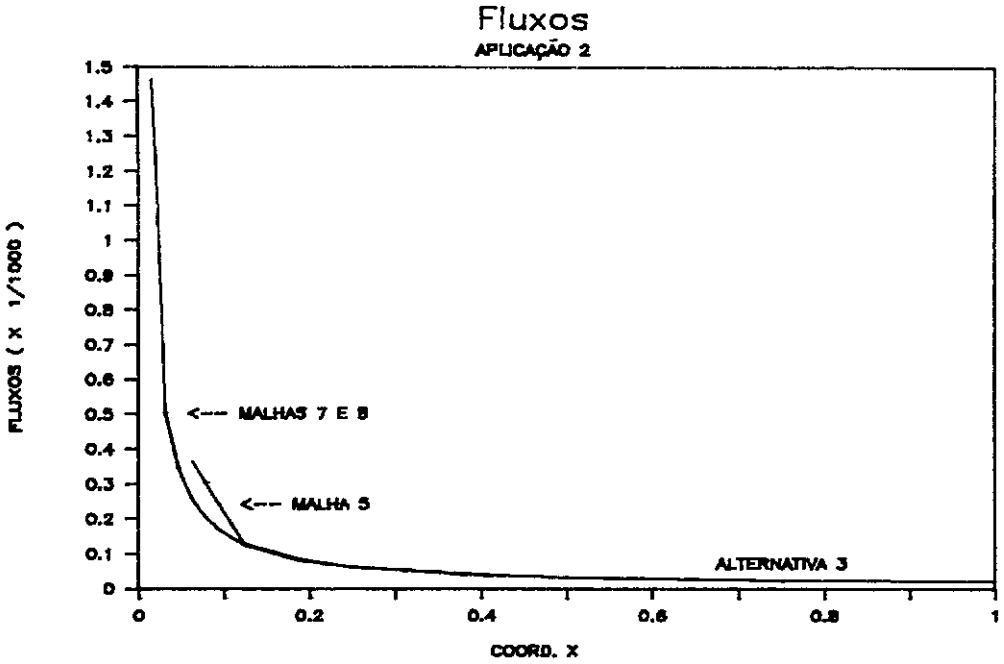


Figura V.12 - Alternativa 3

Na Figura V.13 apresenta-se a evolução das soluções em termos das incógnitas do problema para a alternativa 3 e na Figura V.14 a taxa de convergência considerando-se ou não o critério adicional referente a problemas com singularidades.

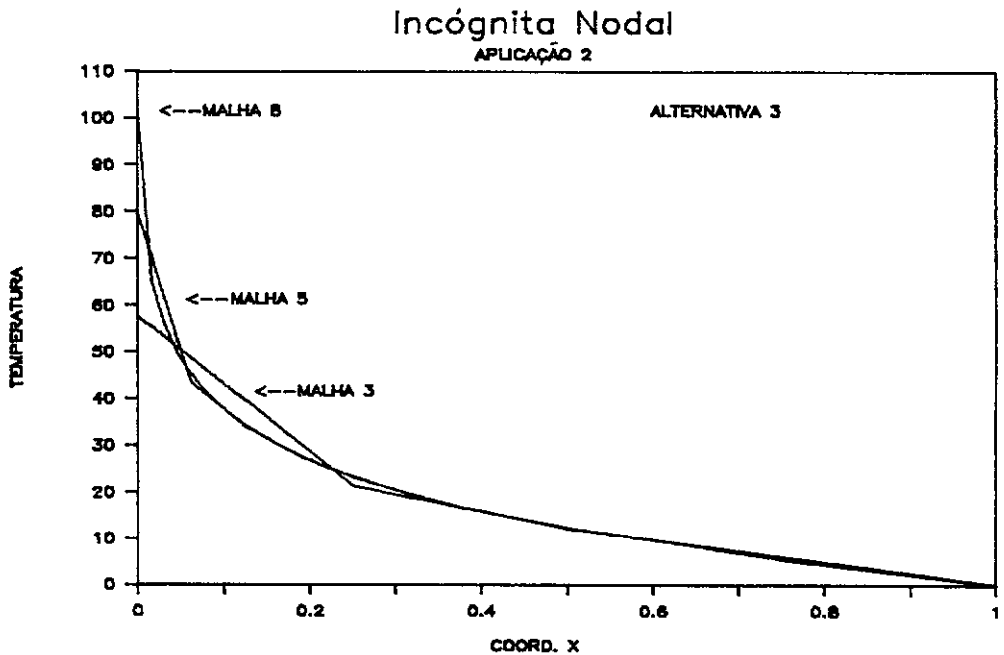


Figura V.13

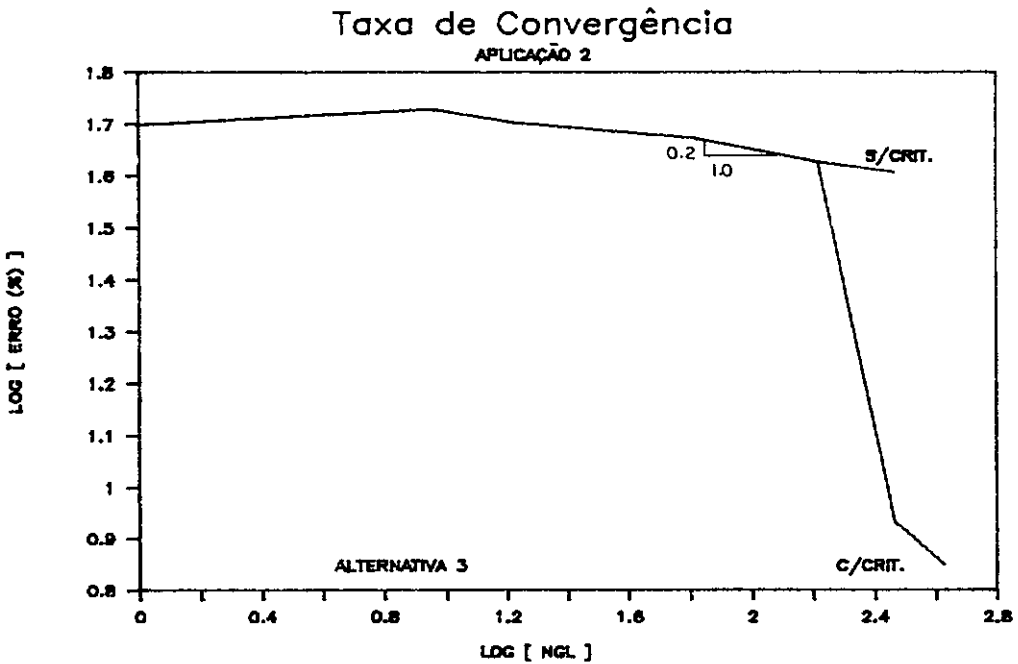


Figura V.14

Percebe-se na Figura V.14 que a solução já se encontra dentro dos padrões desejados uma vez excluída a região próxima a singularidade. Para a alternativa 2 tem-se um comportamento inteiramente semelhante ao da alternativa 3. Já para a alternativa 1, a utilização do critério adicional referente a problemas com singularidade não tem sentido pois o processo só cessaria quando todos os elementos possuísem ordem de refinamento igual a $N_{\text{máx}}$, ou seja, uma malha uniforme. Isso devido ao fato da alternativa 1 definir os refinamentos em função do indicador de erros máximo ($\lambda_{\text{máx}}$) do modelo, que no caso da utilização do critério adicional exclui os elementos de ordem igual a $N_{\text{máx}}$.

- Aplicação 3: (Fluxo em meio poroso)

Os problemas de fluxo em meios porosos obedecendo à lei de Darcy, são também governados pela equação de Laplace. Seja então o problema de percolação sobre a base de uma barragem, esquematicamente apresentado na Figura V.15.

A incógnita H representa a altura piezométrica e a constante K a condutividade hidráulica que é função da permeabilidade do meio e das propriedades do fluido. Utilizando-se a condição de simetria do problema o domínio foi discretizado, na direção horizontal, até uma distância igual a dez vezes a espessura da camada permeável (direção vertical) procurando-se assim representar o infinito onde o fluxo deve ser nulo.

Nas análises que serão apresentadas a seguir adotou-se 20% para a tolerância na equidistribuição dos erros, um nível máximo de refinamento de 6, uma convergência mínima para o erro total de 15% e como malha inicial a representada na Figura V.16.

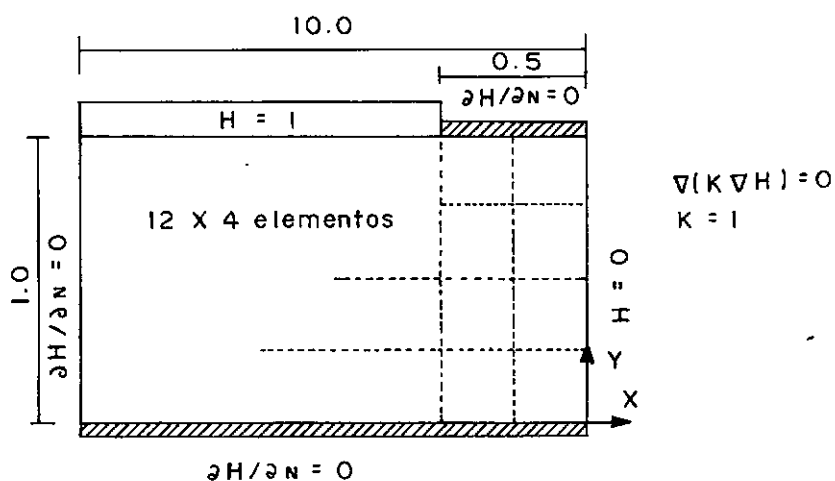


Figura V.15 - Descrição do problema

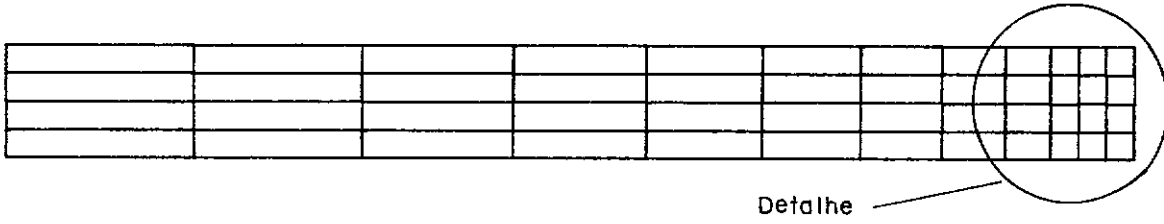


Figura V.16 - Malha inicial

As taxas de convergência obtidas fazendo-se uso das três alternativas de refinamento podem ser vistas na Figura V.17.

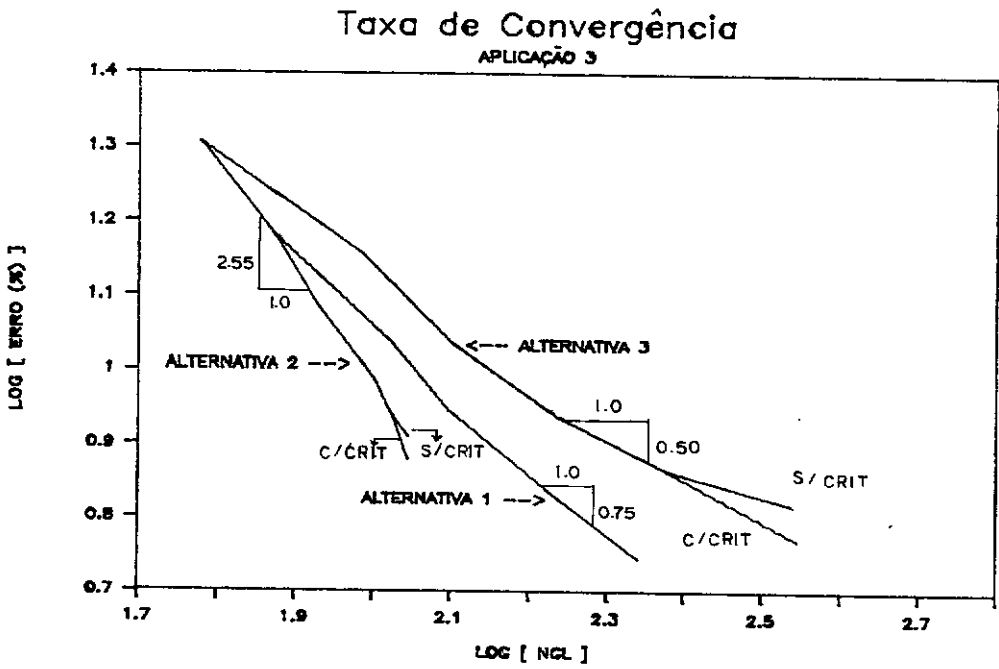


Figura V.17

Nas alternativas 2 e 3 foi feito uso do critério adicional que se refere a problemas com singularidades, porém nenhum refinamento se fez necessário. Tem-se portanto, que a excessão da região composta pelos elementos de nível mais alto de refinamento, a equidistribuição dos erros está assegurada, dentro da tolerância estabelecida.

A baixa taxa de convergência da alternativa 3, se comparada com as demais, deve-se neste problema ao fato de ter sido necessário discretizar um domínio muito grande para simular as condições do infinito. Para a região em detalhe na Figura V.16, apresenta-se nas Figuras V.18, V.19 e V.20 as malhas finais encontradas fazendo-se uso das três estratégias de refinamento.

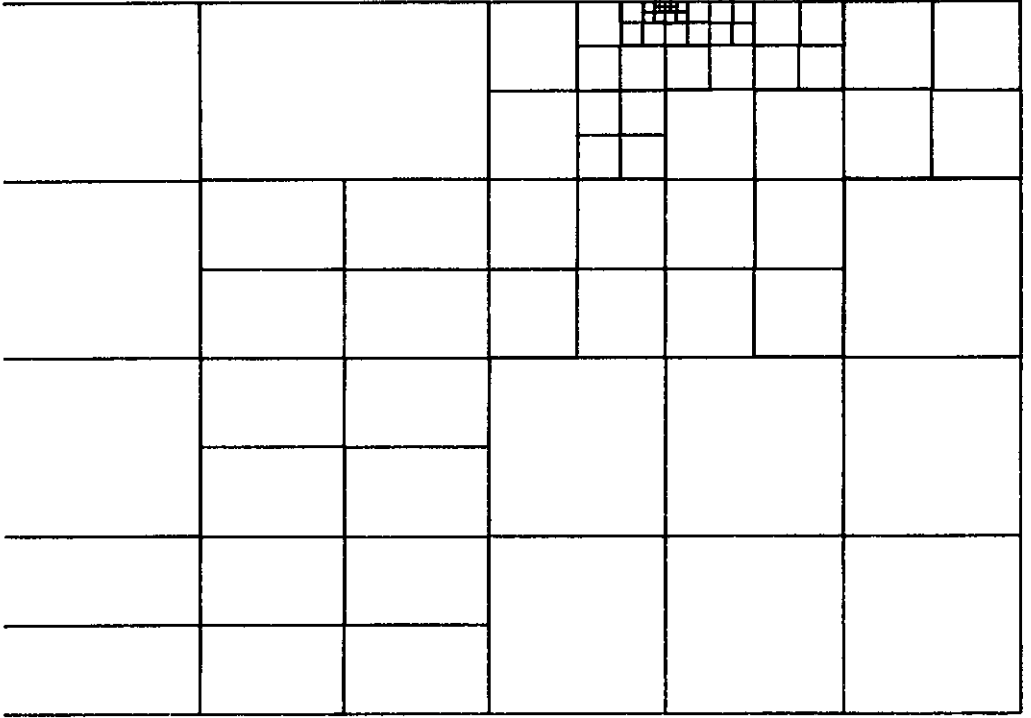


Figura V.18 - Alternativa 1

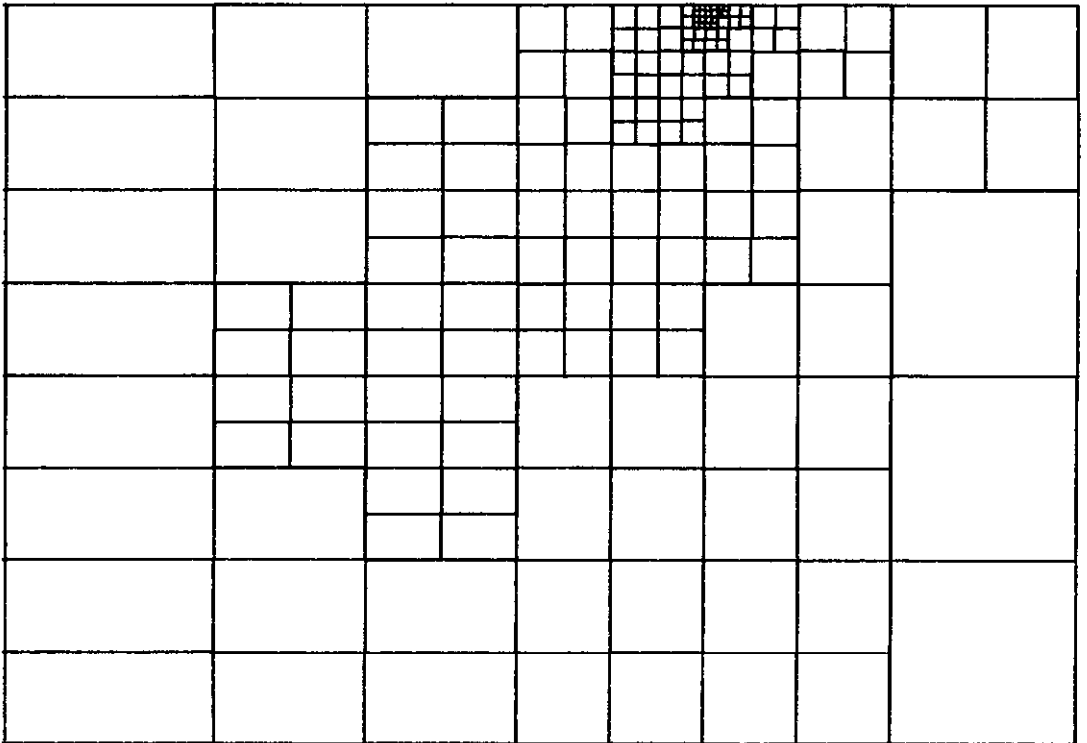


Figura V.19 - Alternativa 2

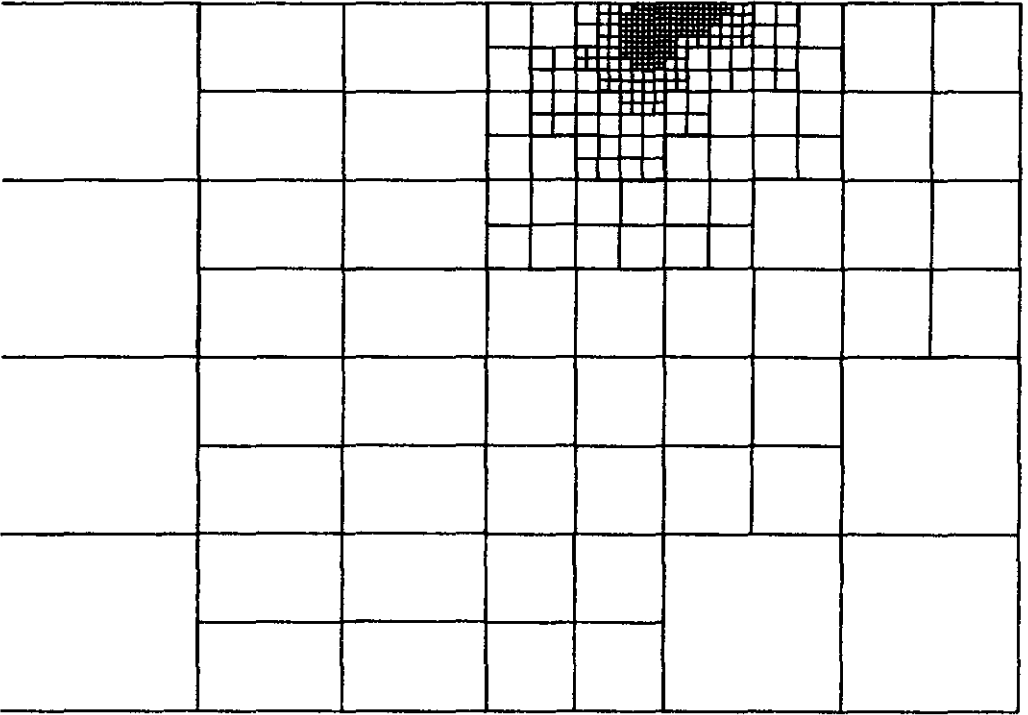


Figura V.20 - Alternativa 3

Apesar da taxa de convergência inferior apresentada pela alternativa 3, tendo em vista a sua maior consistência, esta foi adotada na obtenção dos resultados que se apresentam a seguir. A evolução da solução em termos das alturas piezométricas ao longo da base da barragem, bem como, dos fluxos na direção Y à esquerda da barragem são apresentadas na Figura V.21. Os resultados analíticos deste problema encontram-se no trabalho do CHENG [51].

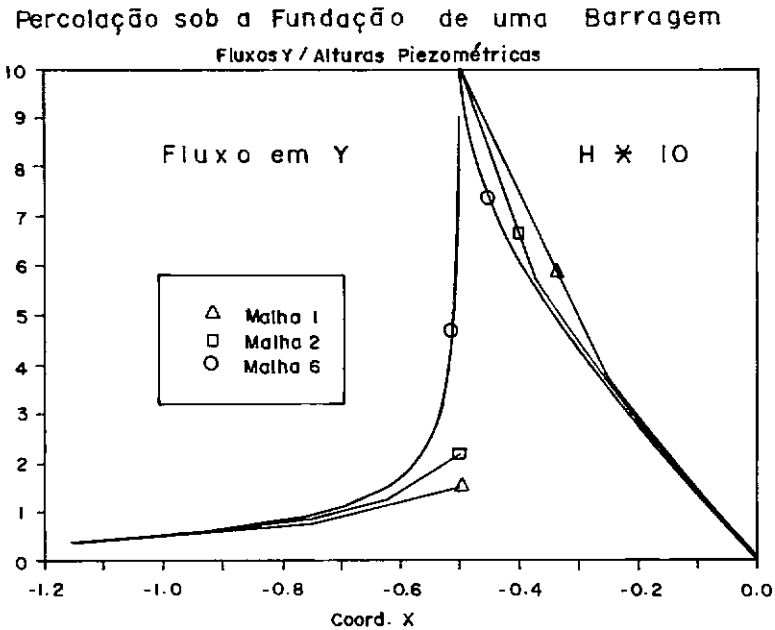
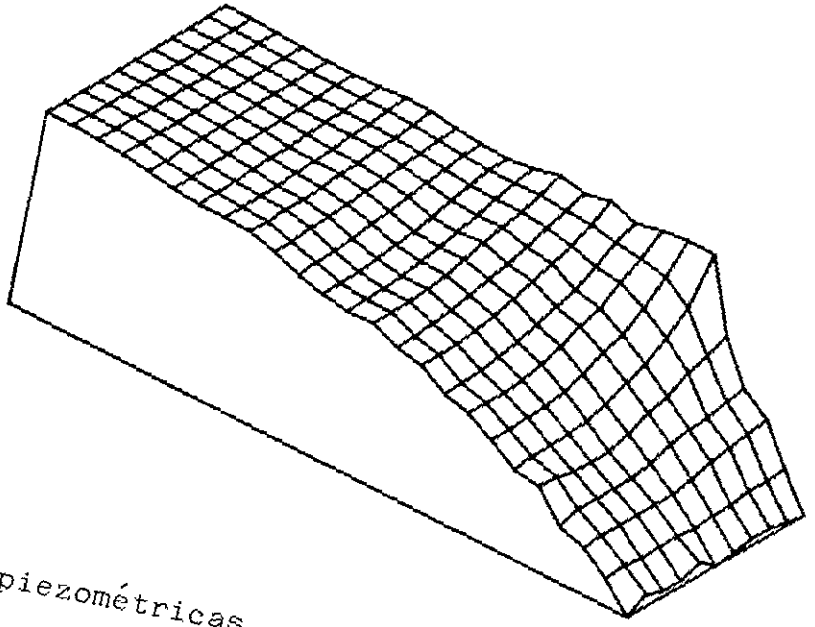


Figura V.21

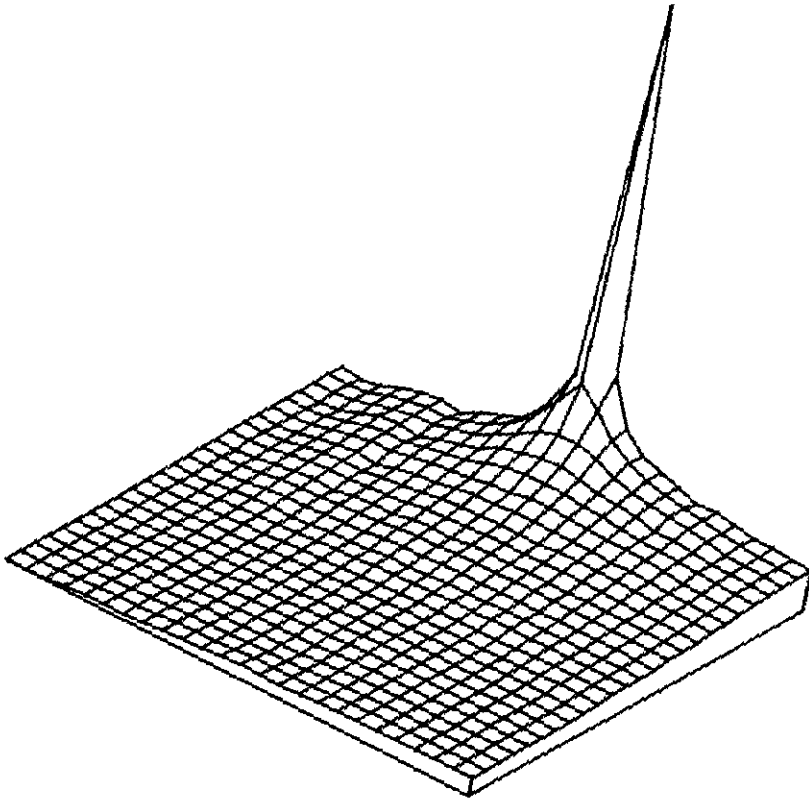
Para a sexta malha na Figura V.22 visualiza-se o comportamento das alturas piezométricas e dos fluxos.

Procurou-se também neste problema analisar, de forma preliminar, o comportamento da versão h com relação a alguns dos parâmetros determinantes na etapa de resolução do sistema de equações. Para tal apresenta-se a Tabela V.3.

Na tabela apresentada percebe-se a perda quase que total da característica de banda, o que por si só pode tornar inconveniente a utilização de um método direto de resolução de sistema de equações. Nota-se ainda, para este problema, que a utilização da solução obtida em uma etapa de refinamento como partida para a nova etapa de solução permite reduzir o número de iterações, acelerando-se portanto a convergência do processo.



(a) Alturas piezométricas



Fluxos

a v.22 - Comportamento da solução

| MALHA | NEQ | BANDA | NÚMERO DE ITERAÇÕES DO MGC | |
|-------|-----|-------|----------------------------|------------------------|
| | | | $X_i^0 = b$ | $X_i^0 = b - KX_{i-1}$ |
| 1 | 60 | 14 | 34 | 34 |
| 2 | 97 | 63 | 38 | 31 |
| 3 | 127 | 107 | 43 | 32 |
| 4 | 173 | 147 | 46 | 35 |
| 5 | 238 | 204 | 53 | 40 |
| 6 | 352 | 298 | 65 | 49 |

Tabela V.3 (Tolerância = 10^{-6})

- Aplicação 4 (Fluxo com obstáculo)

Seja o problema descrito na Figura V.23, que representa um fluxo em volta de um obstáculo quadrado contido entre duas superfícies impermeáveis (KELLY et alii [52]).

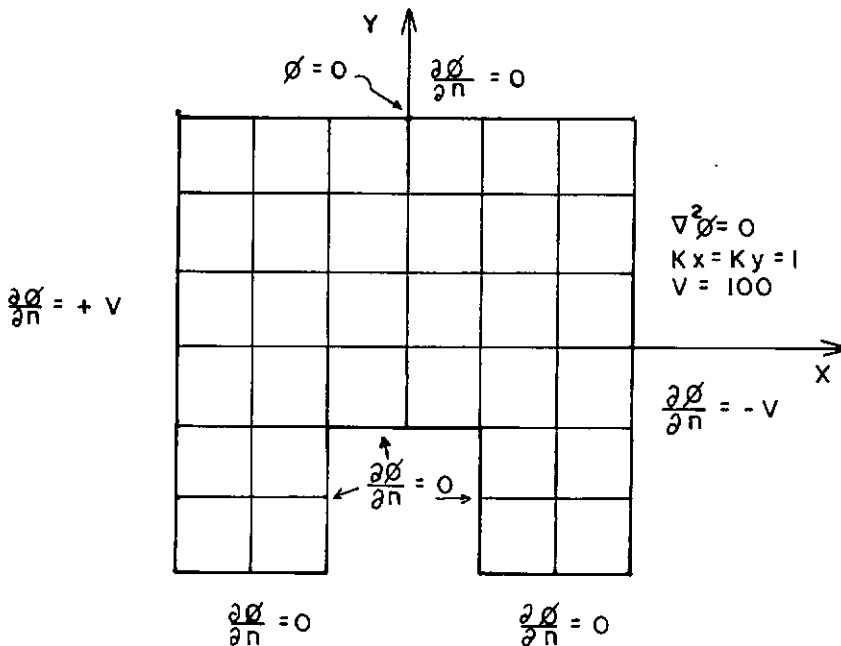


Figura V.23 - Descrição do problema e discretização inicial

Na análise deste problema adotou-se 15% para a tolerância na equidistribuição dos erros, um nível máximo de refinamento de 5 e uma razão de convergência mínima de 10% para o erro total. Como malha inicial adotou-se a apresentada na Figura V.23.

As malhas obtidas ao final da análise, para as alternativas de refinamento estudadas, encontram-se nas Figuras V.24, V.25 e V.26.

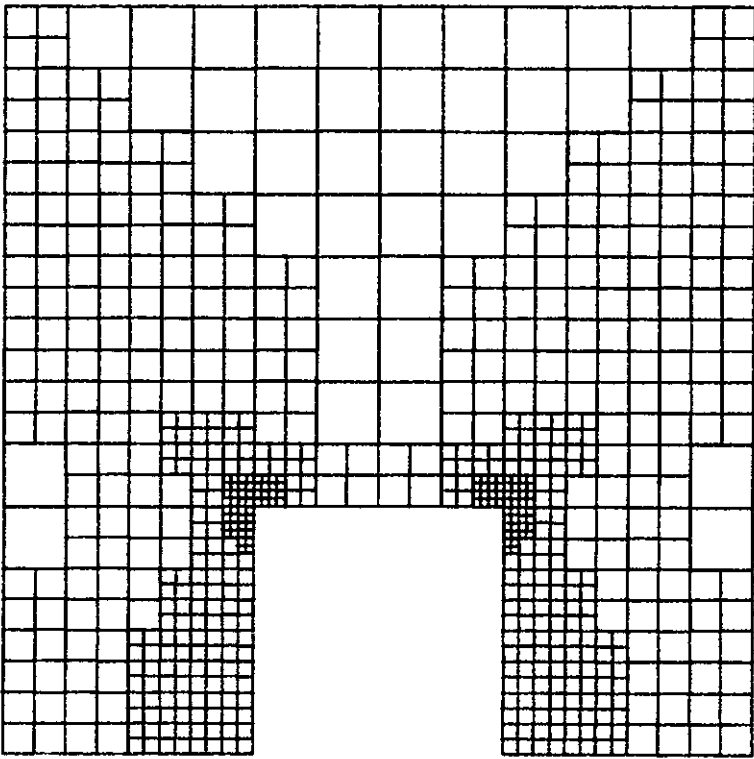


Figura V.24 - Alternativa 1 (5ª malha)

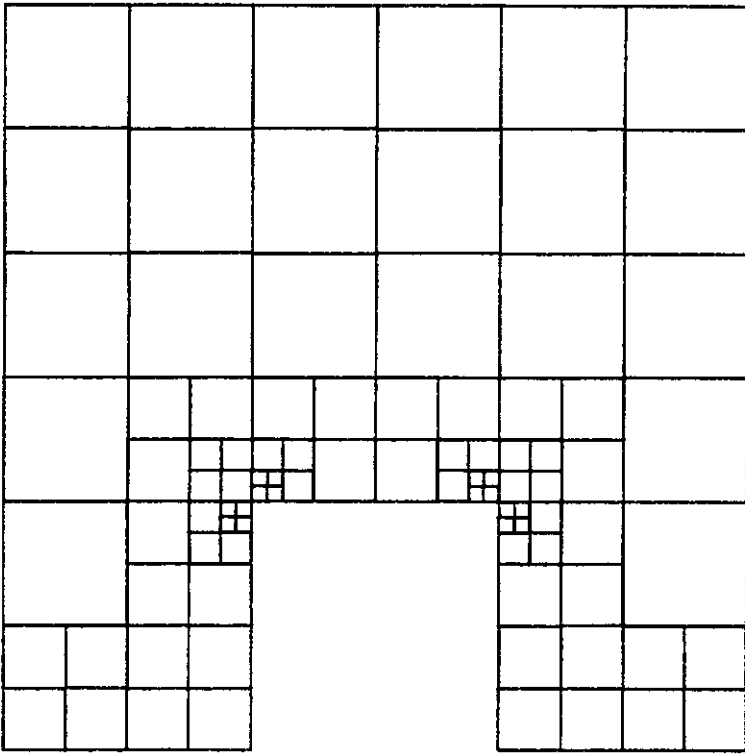


Figura V.25 - Alternativa 2 (5ª malha)

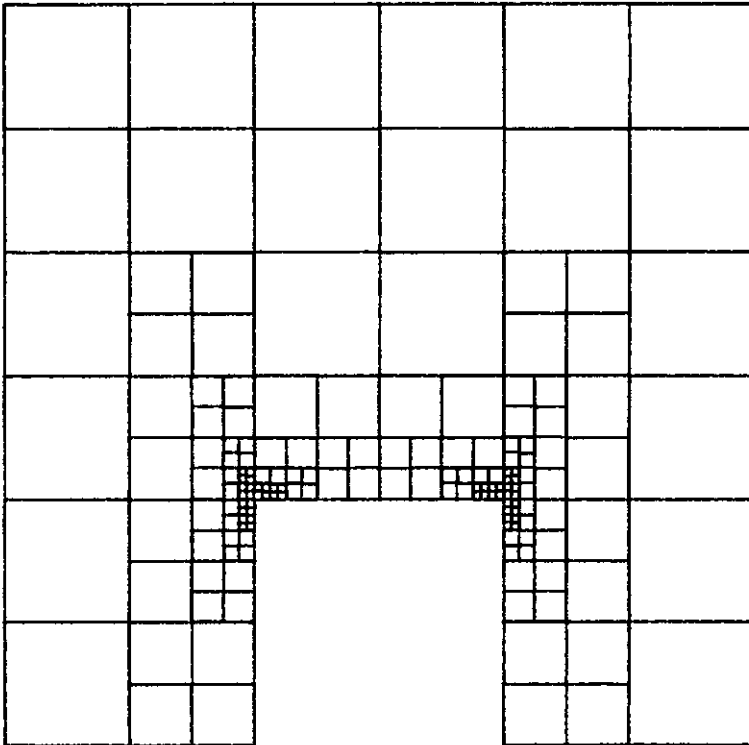


Figura V.26 - Alternativa 3 (6ª malha)

Nas alternativas 2 e 3 o critério adicional relacionado à problemas com singularidades foi acionado não havendo necessidade para a alternativa 2 de nenhum refinamento.

A existência do obstáculo perturba o comportamento quer do fluxo quer do potencial (ϕ) nas proximidades do mesmo. Essa mudança de comportamento pode ser percebida através dos resultados apresentados nas Figuras V.27 e V.28, onde o potencial, bem como, o fluxo na direção X são traçados ao longo de sucessivas retas ($Y = 1,5; 0,0; -0,5$) na direção X conforme explicitado nas figuras.

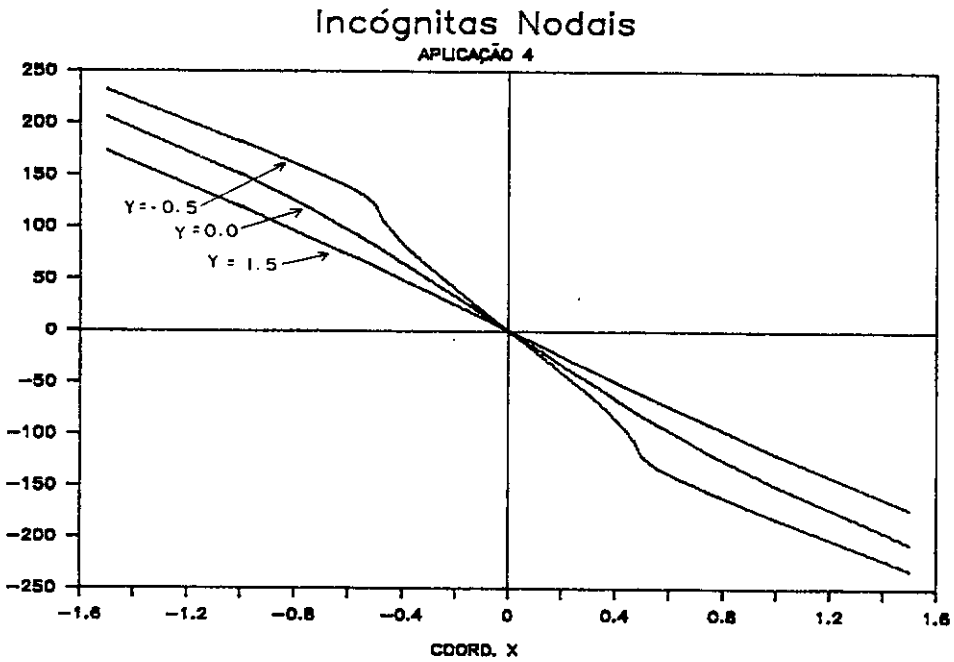


Figura V.27 - Comportamento do potencial (ϕ)

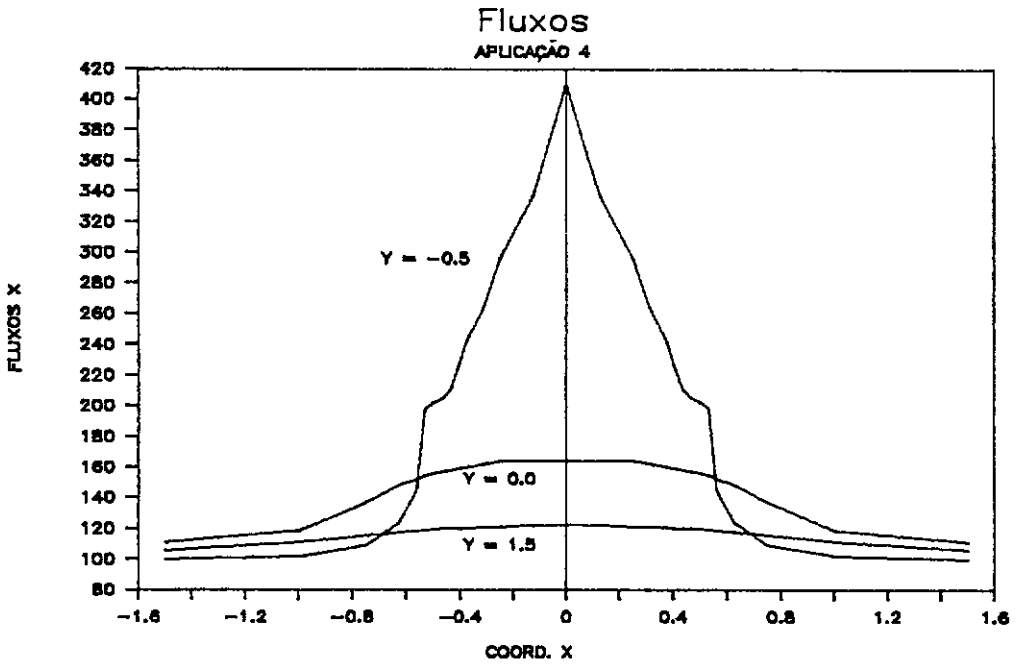


Figura V.28 - Comportamento dos fluxos $(-\frac{\partial \phi}{\partial x})$

Apresenta-se na Figura V.29 a evolução da solução em termos da incógnita ϕ , ao longo da direção X coincidente com o obstáculo ($Y = -0,5$). O fluxo X ao longo da mesma reta pode ser visualizado na Figura V.30. Onde para a sexta malha já fica caracterizada a singularidade proveniente da forma angular do obstáculo.

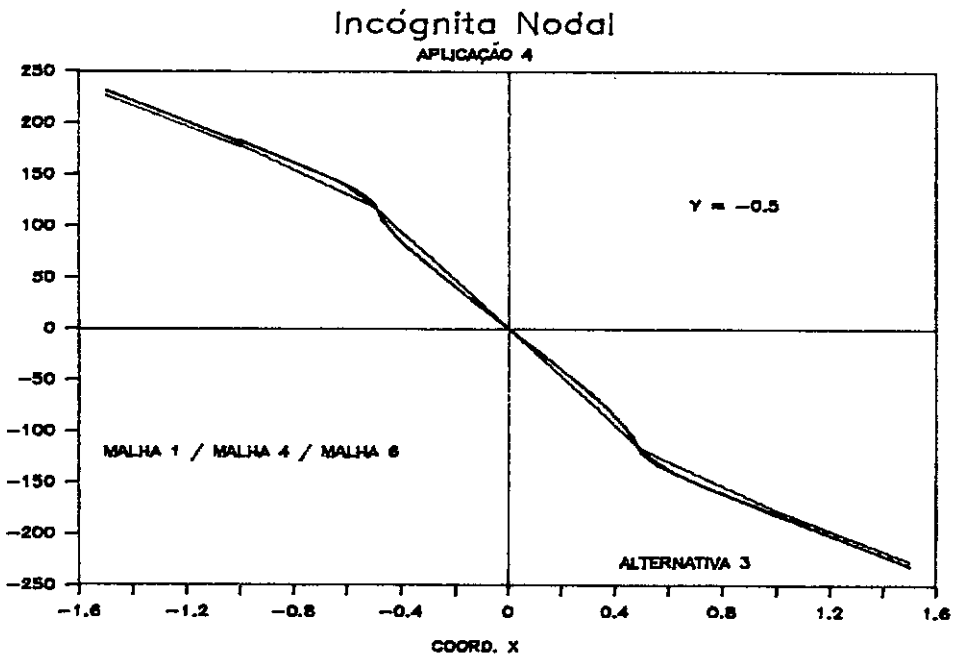


Figura V.29

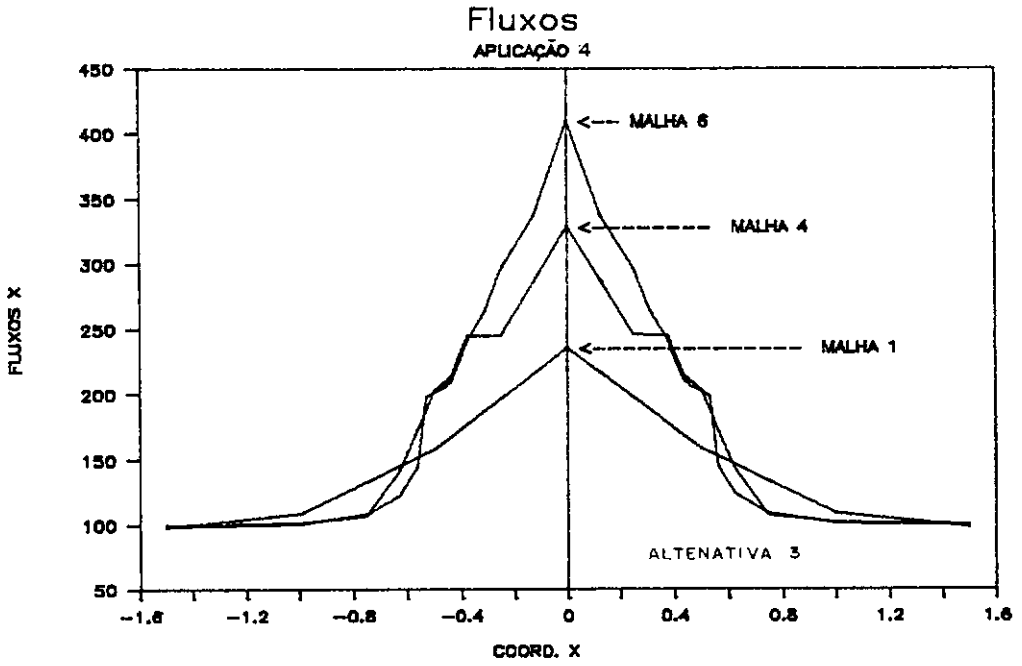


Figura V.30

Apresenta-se na Figura V.31 as taxas de convergências encontradas.

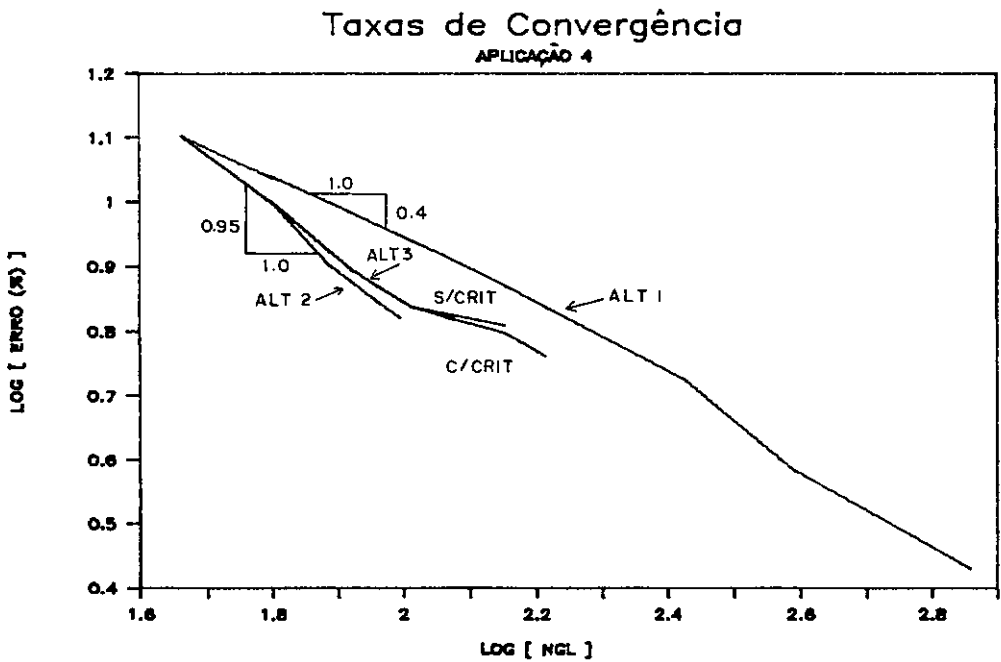


Figura V.31

Com o intuito de verificar a influência da escolha do valor de γ na convergência do processo foram realizadas análises variando-se sucessivamente esse valor. Observou-se o aumento da taxa de convergência a medida que o valor de γ se torna maior, porém neste problema a partir de um valor γ aproximadamente de 0,40 já não mais se verificou esse aumento, permanecendo a taxa praticamente idêntica independente do valor de γ adotado. Tal comportamento pode ser visto na Figura V.32.

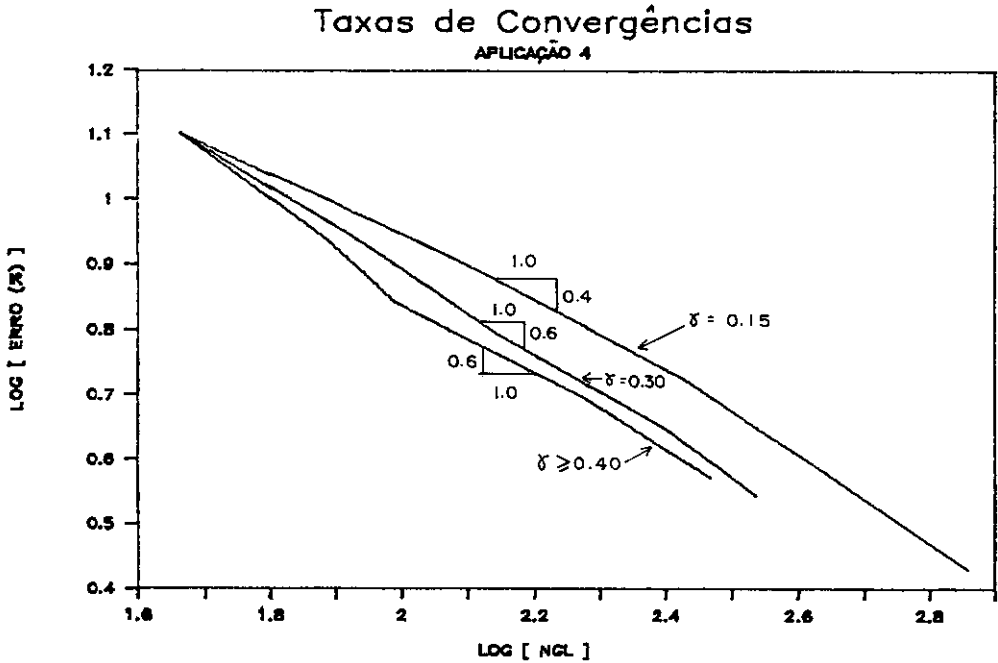


Figura V.32

- Aplicação 5 (Condução de calor)

Considere o problema descrito de forma esquemática na Figura V.33.

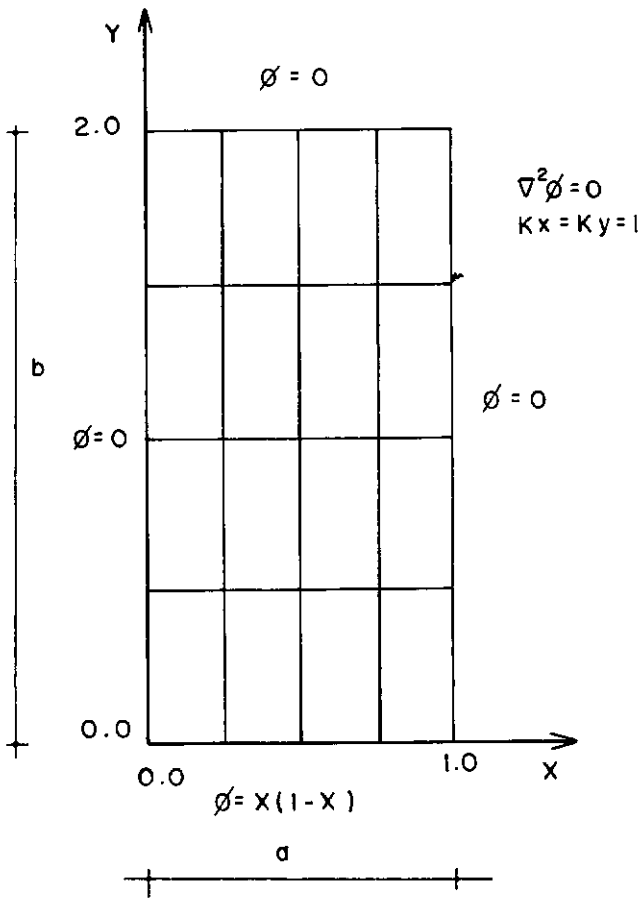


Figura V.33 - Descrição do problema e discretização inicial

Esse problema possui solução analítica dada em série (JIANG e CAREY [53]):

$$\phi_x = \sum_{m=1,2,\dots} \frac{8}{(m\pi)^2} \cdot \frac{e^{-m\pi y}}{1-e^{-2m\pi b}} \cdot [1 - e^{-2m\pi(b-y)}] \cdot \cos(m\pi X) \quad (V.8)$$

$$\phi_y = \sum_{m=1,2,\dots} \frac{8}{(m\pi)^2} \cdot \frac{e^{-m\pi y}}{1-e^{-2m\pi b}} \cdot [1 - e^{-2m\pi(b-y)}] \cdot \text{sen}(m\pi X)$$

onde ϕ_x , ϕ_y são, respectivamente, os fluxos nas direções X e Y. A equação dada na Figura V.33 governa a condição de calor em regime permanente. Nos resultados apresentados a seguir adotou-se para efeito da estratégia de refinamento uma tolerância de 10% na equidistribuição dos erros, e um

nível máximo (N_{\max}) permitido igual a 4. Além disso adotou-se uma convergência global mínima desejada ($RCONV_{\min}$) de 10%.

Utilizando-se o critério de refinamento dado na alternativa 3 obteve-se ao final da quarta etapa de refinamento a malha apresentada na Figura V.34. A evolução dos fluxos totais para esse caso pode ser vista nas Figuras V.35 e V.36.

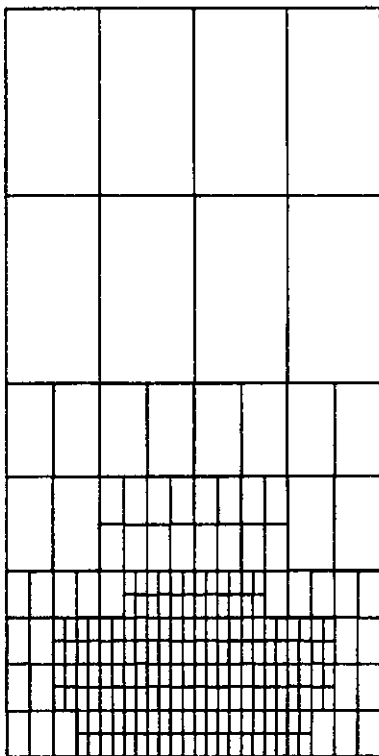
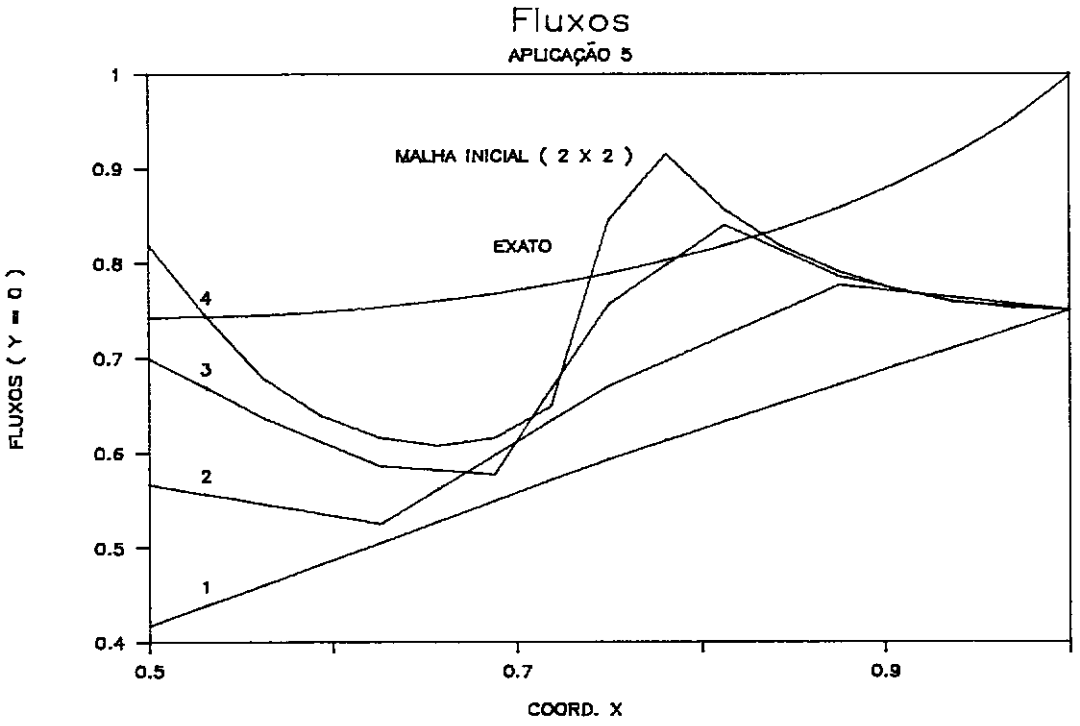
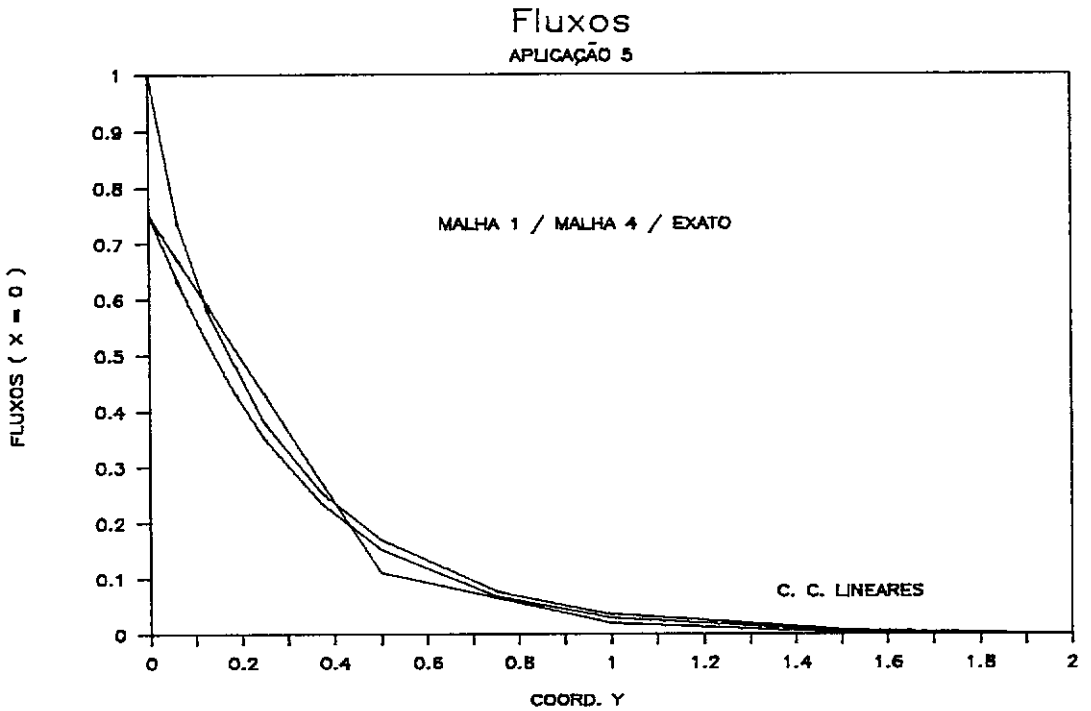


Figura V.34 - Malha 4

Figura V.35 - Fluxos totais para $Y = 0$ Figura V.36 - Fluxos totais para $X = 0$

Os resultados obtidos nos sucessivos refinamentos não convergem para o valor exato do problema. Isso se deve a uma discretização inicial muito pobre na representação da condição de contorno por meio de elementos lineares. Na Figura V.37 percebe-se que para uma discretização inicial que representa melhor as condições de contorno tem-se valores mais precisos para os fluxos, embora ainda apresentando oscilações.

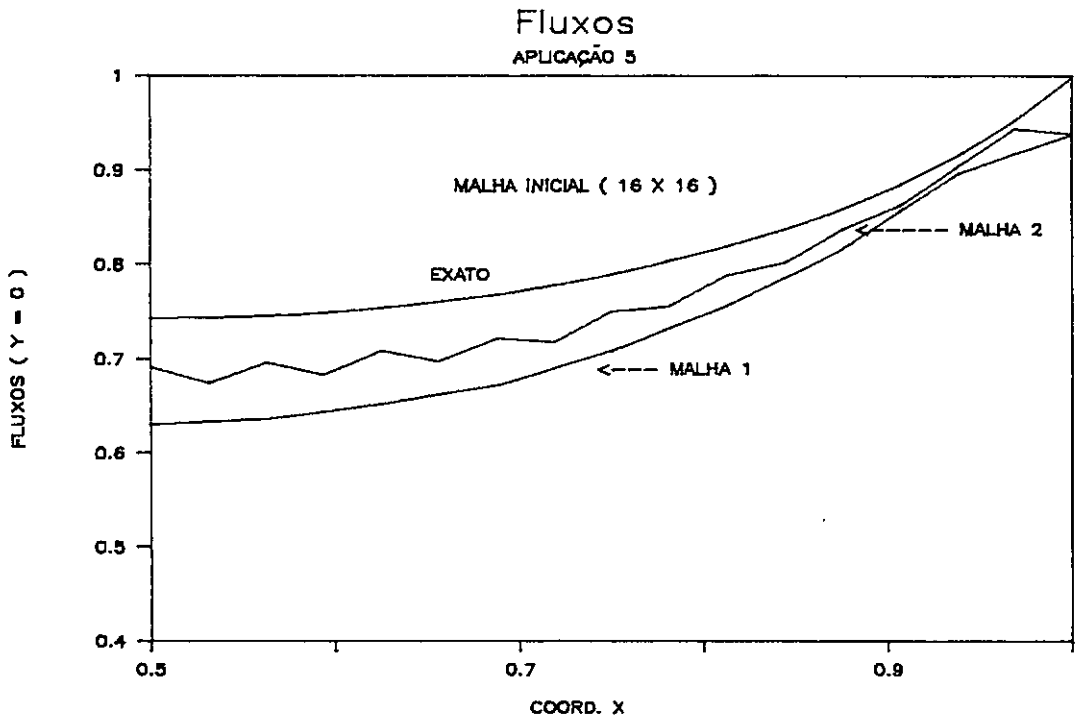


Figura V.37 - Fluxos totais para $Y = 0$

O que se tem em verdade é que após o primeiro refinamento o modelo obtido não mais corresponde ao problema inicial. Isso se deve ao fato da adaptação ser efetuada linearmente, sendo no entanto as condições de contorno deste problema quadráticas. Vale ainda ressaltar que para distâncias razoáveis do carregamento aplicado tem-se uma melhoria dos resultados com o refinamento (Figura V.36).

Considere-se agora o mesmo problema, no entanto com as condições de contorno adaptadas quadraticamente. A evolução da solução em termos de fluxos pode ser vista nas Figuras V.38 e V.39.

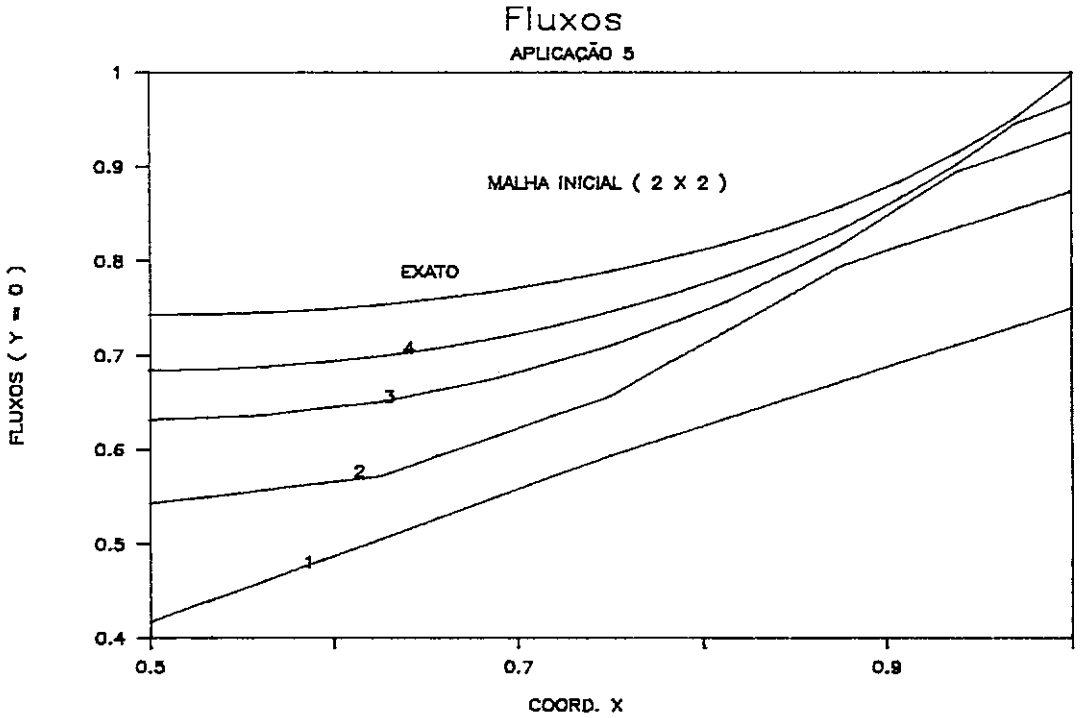
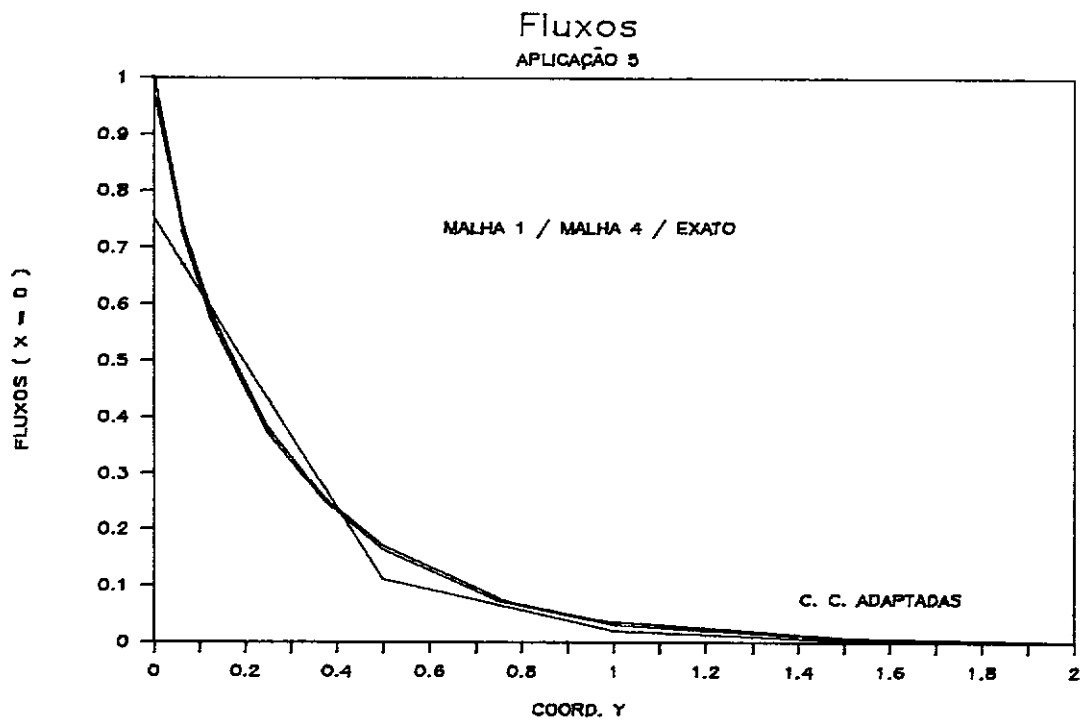
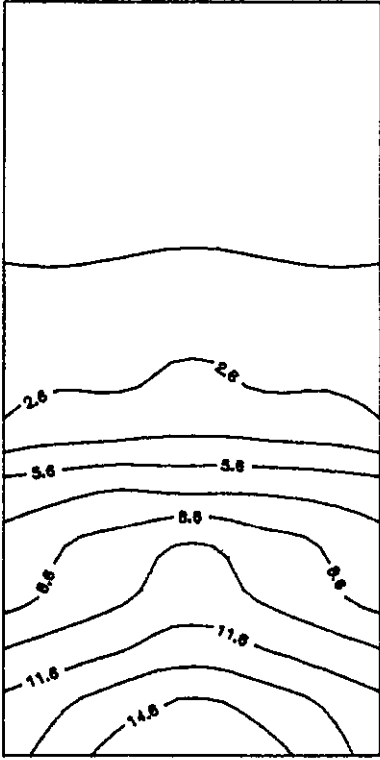


Figura V.38 - Fluxos totais para $Y = 0$

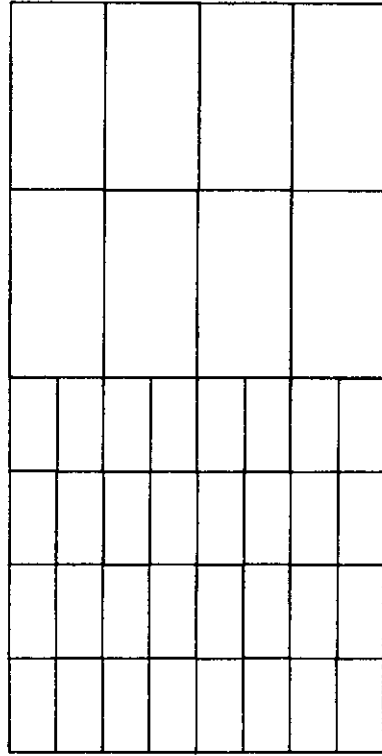
Ao final da quarta malha tem-se uma equidistribuição dos erros da ordem de 16% e um erro total estimado de 5,47%. Para se alcançar a convergência dentro da tolerância pré-especificada foram necessárias 5 (cinco) etapas de refinamento obtendo-se ao final um erro total estimado de 4,38%.

A história do refinamento das malhas bem como dos erros reais, para a alternativa 3, pode ser vista na Figura V.40.

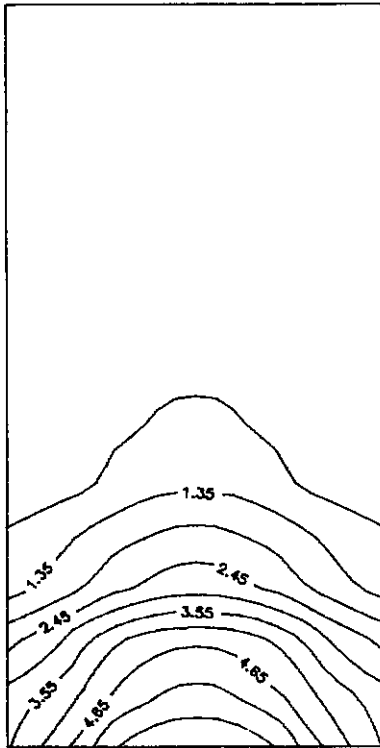
Figura V.39 - Fluxos totais para $X = 0$



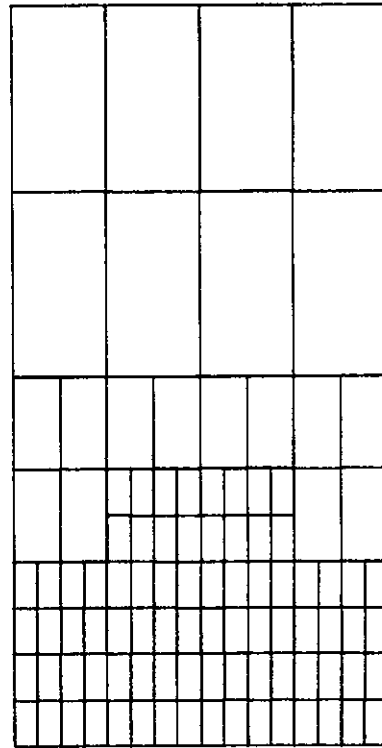
(a) Iso-erro 1



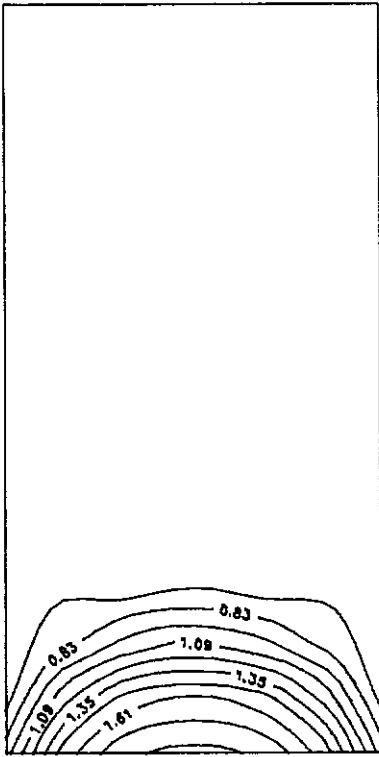
(b) Malha 2



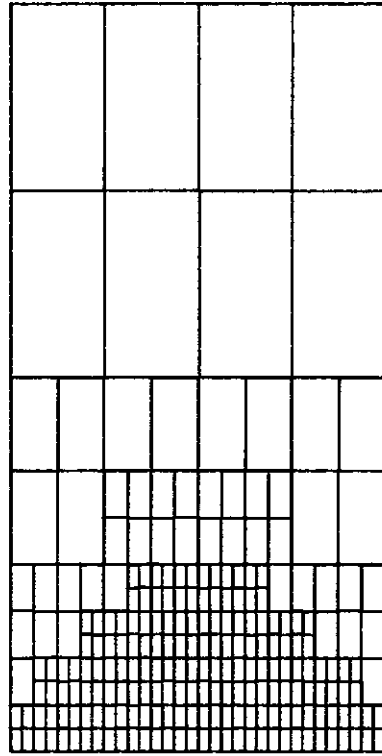
(c) Iso-erro 2



(d) Malha 3



(e) Iso-erro 3



(f) Malha 4

Figura V.40 - História do refinamento

Os Iso-erros apresentados foram obtidos fazendo-se uso dos erros reais para as malhas refinadas através da estimativa. O gráfico da Figura V.41 demonstra ser o valor estimado para o erro muito próximo do erro real. Ao final da quarta malha o erro total é 5,7% com uma equidistribuição da ordem de 17,5%. Ressalta-se ainda que o erro avaliado para o fluxo ao final da análise é menor que o apresentado, uma vez que os resultados são dados em termos de fluxos suavizados. Para a malha 4 ao se avaliar o erro entre os fluxos suavizados e o exato obtém-se 3,1% de erro total, demonstrando ser a estimativa dada, em termos de fluxos, a favor da segurança.

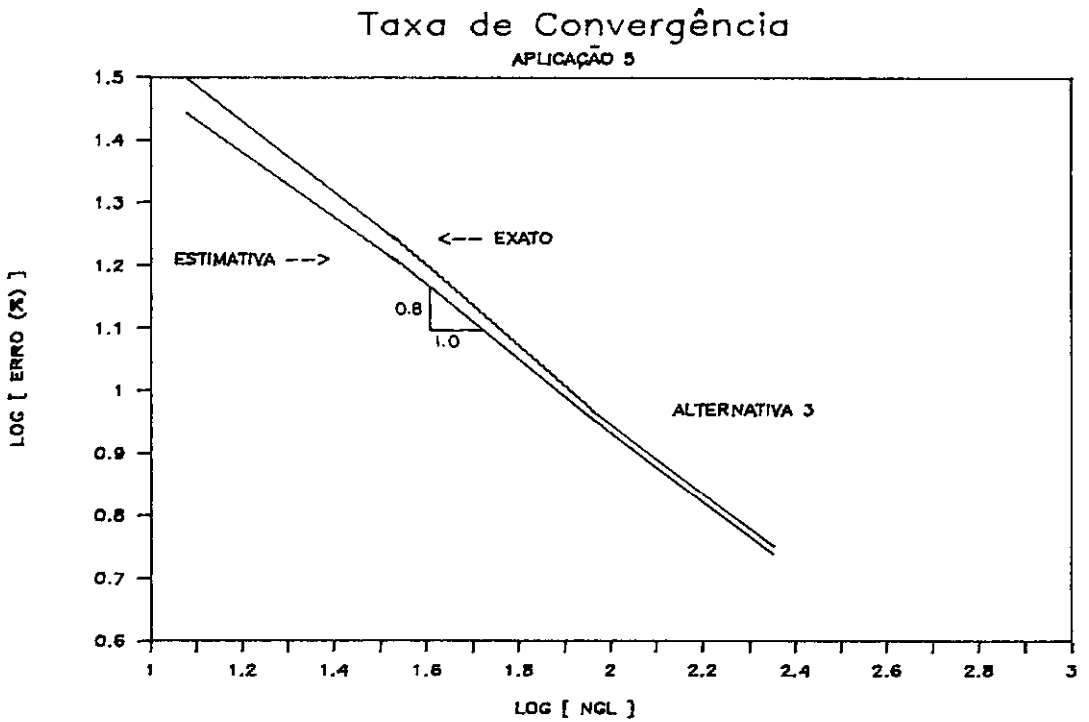


Figura V.41 - Taxa de convergência estimada x exata

Também a nível local pode-se perceber o bom desempenho da estimativa adotada, bem como, a observação feita no parágrafo anterior. A Tabela V.4 mostra para os elementos da quarta malha, dados na Figura V.42 as normas de energia dos mesmos.

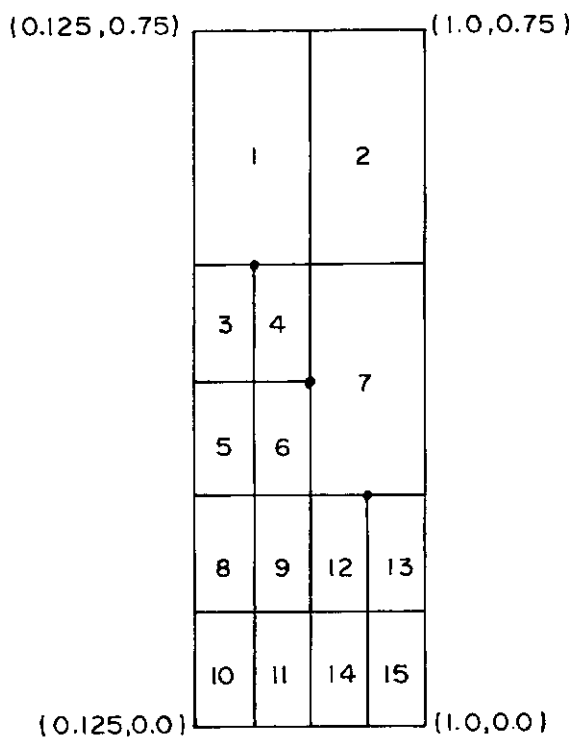


Figura V.42 - Detalhe da 4ª malha

| ELEMENTO | NORMA DE ENERGIA DO ERRO (10^{-6}) | | |
|----------|--|--------------------------|--------------------------|
| | SOL.E.F. x SOL.SUAV. | SOL.E.F. x SOL. EXATA | SOL.SUAV.x SOL. EXATA |
| 1 | 5.2879 | 5.5557 | 0.3453 |
| 2 | 1.2650 | 0.8004 | 0.4354 |
| 3 | 1.1238 | 1.2486 | 0.6829 |
| 4 | 0.3777 | 1.8236 | 1.3400 |
| 5 | 1.9762 | 1.8564 | 0.2613 |
| 6 | 1.7782 | 1.8683 | 0.5636 |
| 7 | 2.2032 | 2.7179 | 0.2888 |
| 8 | 4.5783 | 3.7693 | 0.4447 |
| 9 | 3.3993 | 2.6800 | 0.4049 |
| 10 | 6.5726 | 8.6346 | 5.2499 |
| 11 | 5.0936 | 7.4048 | 4.2663 |
| 12 | 1.7310 | 1.2061 | 0.7657 |
| 13 | 0.4138 | 0.3442 | 0.7030 |

continua...

| ELEMENTO | NORMA DE ENERGIA DO ERRO (10^{-6}) | | |
|----------|--|--------------------------|--------------------------|
| | SOL.E.F. x SOL.SUAV. | SOL.E.F. x SOL. EXATA | SOL.SUAV.x SOL. EXATA |
| 14 | 3.1712 | 5.2801 | 2.8995 |
| 15 | 1.4422 | 2.1531 | 0.9035 |

Tabela V.4 - Estudo da norma de energia do erro para os elementos dados na Figura V.42

Um estudo da taxa de convergência para as três alternativas de refinamento apresentadas no item IV.3.1, assim como, da convergência da versão h adaptativa e uniforme pode ser vista nas Figuras V.43 e V.44.

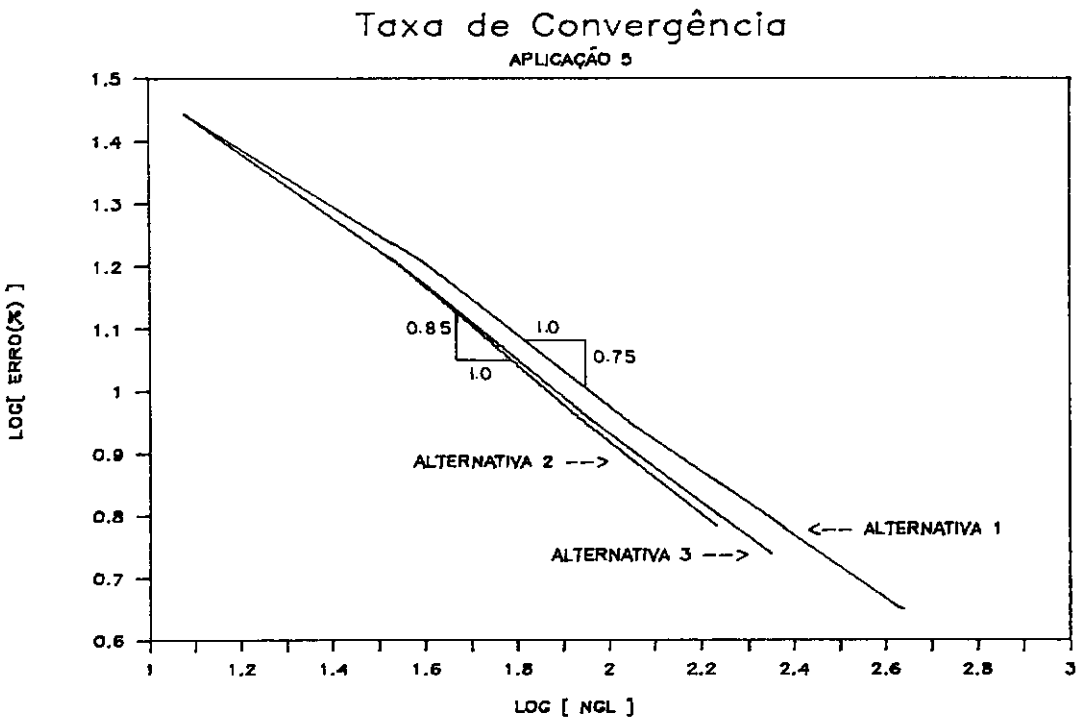


Figura V.43

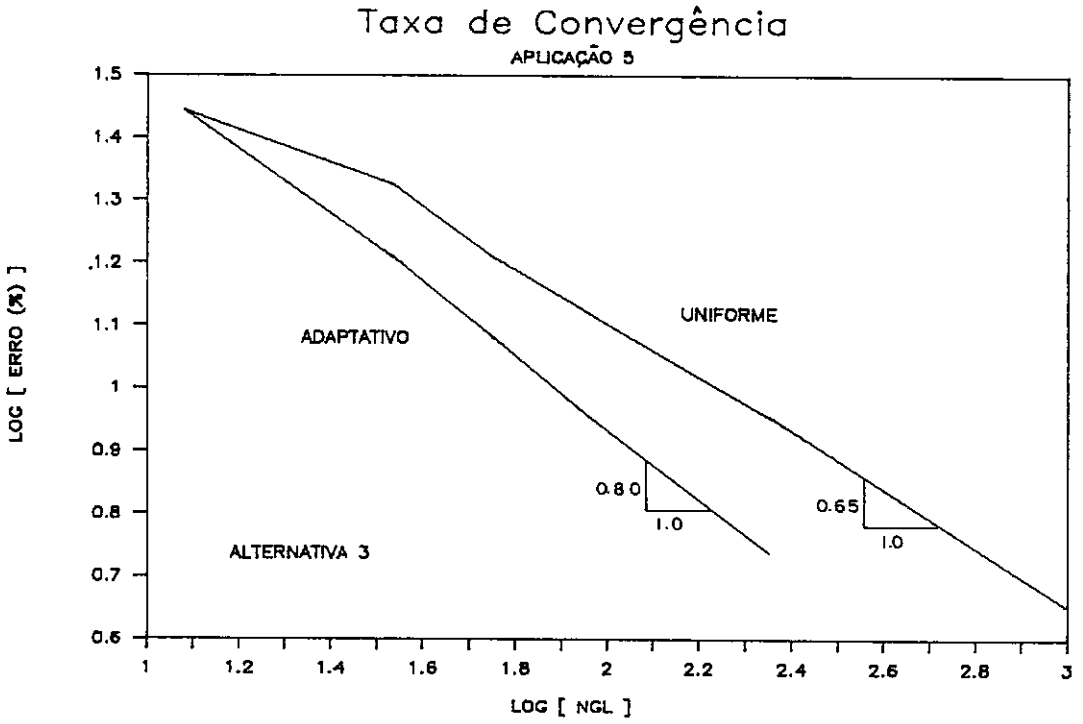
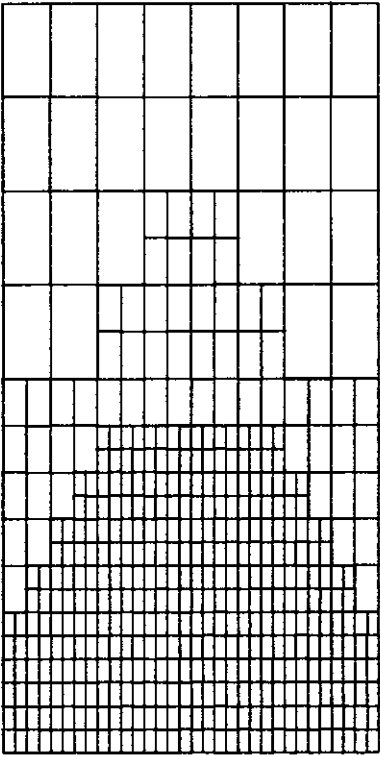
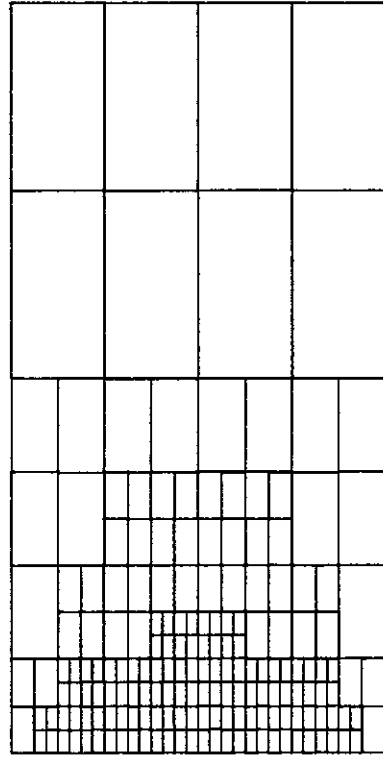


Figura V.44

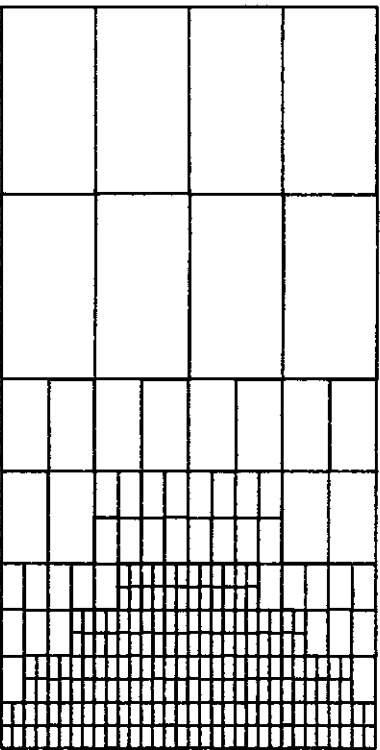
Percebe-se através destes gráficos uma taxa de convergência melhor para as alternativas 2 e 3 em relação a alternativa 1. As malhas ao final da quarta etapa de refinamento, para as três alternativas, assim como, para o caso em que a adaptação é feita através da medida do erro real com a alternativa 3 são apresentadas na Figura V.45.



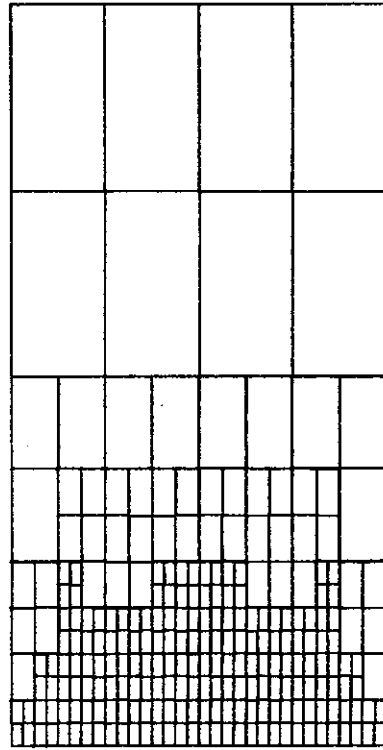
(a) Alternativa 1



(b) Alternativa 2



(c) Alternativa 3



(d) Erro exato

Figura V.45 - Malhas finais

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

O tópico referente a refinamento de malhas para o Método dos Elementos Finitos tem recebido grande atenção nos últimos anos. Pesquisas têm sido feitas tanto com relação às bases teóricas do problema como em termos da implementação dessas técnicas numéricas. Tendo sido discutido alguns aspectos referentes à análise de erros e adaptação versão h , algumas conclusões gerais, bem como, possíveis expansões e melhoramentos no trabalho realizado são apresentadas.

Sabe-se que um dos principais problemas relacionado ao uso do MEF se encontra na definição e preparação do modelo discreto. Ainda com relação a esse modelo está a interpretação dos resultados, onde uma medida da confiabilidade se faz importante não ficando apenas à cargo da experiência e intuição do analista.

Este trabalho se propôs então, a estudar um procedimento auto-adaptativo versão h do MEF, cujo objetivo é melhorar a capacidade da discretização de descrever a resposta do problema analisado fornecendo ainda uma medida da certeza dos resultados.

A análise de erros adotada, além de ter fornecido resultados muito bons para os problemas estudados, pode ser implementada de forma imediata, tendo um custo associado muito baixo se comparado com o custo total da análise. Sendo a sua utilização também eficiente para problemas não-lineares e dinâmicos (ZIENKIEWICZ et alii [13]).

Na determinação do novo modelo o uso do refinamento do elemento tipo bissecção apesar dos bons resultados que se obtêm trás uma dependência direta com o modelo inicial, não permitindo uma flexibilidade na correção de falhas no modelo inicial. O desenvolvimento de estruturas de dados que permita tratar restrições generalizadas, a associação da geração de malhas com os processos adaptativos, ou ainda, a combinação das versões r e h solucionaria esse problema (LAS CASAS [54]).

Dentre as alternativas para definição dos refinamentos ressalta-se a menor dependência com relação a experiência na escolha dos parâmetros de tolerância apresentada pelas opções que usam a taxa máxima do erro a nível de elementos (Alternativas 2 e 3), e ainda a maior consistência ao final quando as dimensões dos elementos são consideradas. Os critérios adicionais topológicos, para as aplicações efetuadas, pouco se fizeram necessário, o que é muito importante pois caso contrário a eficiência, bem como, a justificativa da versão h ficariam comprometidas. O critério adicional apresentado para problemas com soluções singulares demonstrou resultados satisfatórios para os estudos realizados. Porém estudos mais detalhados nesta área fazem-se necessários. A redefinição do modelo ótimo nesses casos, a utilização de funções apropriadas para o tratamento de singularidades ou a combinação das versões h e p são algumas das possibilidades que hoje vêm sendo estudadas.

A utilização dos resultados obtidos em uma etapa de refinamento para acelerar o processo iterativo de resolução do sistema de equações fornece resultados significativos, principalmente quando do mau condicionamento e do aumento do número de graus de liberdade do modelo. Estudo de outras

técnicas de resolução de sistema de equações, tais como o Método de Lanczos devem ser testadas. A natureza das malhas resultantes do refinamento, bem como, a estrutura de dados adotada colocam as técnicas de multigrid como candidatos mais apropriados. Muito atraente também parece ser a técnica de eliminação dos elementos que correspondem às equações com resíduos abaixo da tolerância apresentada por DEVLOO [26], conseguindo-se com isso reduções significativas no tempo de processamento.

A adaptação linear das condições de contorno e geometria na versão h constitui-se em uma limitação desse procedimento. A utilização de uma adaptação de ordem superior se faz necessária em determinados problemas (LYRA et alii [55]), porém ainda assim modificações no modelo ao longo do processo ou mesmo a redefinição da geometria e condições de contorno podem ser necessárias, uma medida conveniente pode ser obtida através da associação dos sistemas de computação iterativa (CAD) com as estratégias adaptativas (SHEPARD [56]).

A estrutura de dados e procedimentos apresentados é inteiramente compatível para o desenvolvimento de programas em outras áreas da análise numérica tais como estudo de problemas axissimétricos, de elasticidade ou não lineares. Com a estrutura de dados adotada pode-se ainda, por meio do desenvolvimento de alguns procedimentos dotar o programa da capacidade de desrefinamento em regiões que apresentam erro abaixo da tolerância desejada, isso adequando o programa também para a análise transiente.

Nos estudos apresentados relacionou-se a performance do procedimento através da verificação da convergência da estimativa de erros totais versus o número de graus de liberdade do modelo, o que permite apenas uma idéia do desempenho já que muitos outros fatores não são levados em conta. Esses fatores possuem natureza distintas sendo muito difícil comparações. Estudos deste tipo não foram realizados apesar de sua importância no sentido de demonstrar a eficiência dos procedimentos auto-adaptativos.

As estimativas de erros quando usadas nos procedimentos adaptativos ignoram a continuidade dos erros entre os elementos, ou seja, não consideram o efeito conjunto quando da definição dos refinamentos. Não se tem, também, uma interpretação do erro, de maneira imediata, em termos pontuais, uma vez que os resultados são dados em termo de normas. O estudo desses problemas e ainda a necessidade de medidas de erro mais precisas e gerais constituem algumas das motivações hoje na área do estudo dos erros de discretização quer do ponto de vista matemático ou da engenharia.

Estudo das combinações entre as estratégias de refinamento, enfocando questões como implementação e definição de quando e onde determinada estratégia deve ser usada representa um campo aberto para trabalhos futuros. Também aberto à estudos está a integração das idéias pertinentes aos processos auto-adaptativos nos sistemas de computação assistida o que representa um passo importante na concepção de uma técnica inteiramente automatizada, de modelagem via elementos finitos, constituindo-se nos chamados sistemas especialistas. É ainda extremamente atraente o desenvolvimento de algoritmos adaptativos voltados para utilização nas novas gerações de computadores onde a vetorização e paralelização de processos é possível.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] COURANT, R. - "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration", **Bulletin of the AMS**, Vol. 48, pp. 1-43, (1943).
- [2] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W. C. - "A-posteriori Error Estimates for the Finite Element Method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 12, pp. 1597-1615 (1978).
- [3] BABUSKA, I. and RHEINBOLDT, W.C. - "Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations", **SIAM J. Numer. Anal.**, Vol. 15, pp. 736-754 (1978).
- [4] GAGO, J. P. de S. R. - **A-posteriori Error Analysis and Adaptivity for the Finite Element Method**, Ph.D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea (1982).
- [5] GAGO, J. P. de S. R., KELLY, D. W., ZIENKIEWICZ, O. C. and BABUSKA, I. - "A-posteriori Error Analysis and Adaptivity Processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 19, pp. 1513-1619 (1983).
- [6] GAGO, J. P. de S. R., KELLY, D. W., ZIENKIEWICZ, O. C. and BABUSKA, I. - "A-posteriori Error Analysis and Adaptivity Processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 19, pp. 1621-1656 (1983).

- [7] BABUSKA, I. and SZABO, B. A - "On the Rates of Convergence of the Finite Element Method", **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 18, pp. 323-341 (1982).
- [8] DEMKOWICZ, L., DEVLOO, P. and ODEN, J. T. - "On an h-Type Mesh Refinement Strategy Based on Minimization of Interpolation Errors", **Computer Methods in Appl. Mech. and Engng.**, Vol. 35, pp. 67-90 (1985).
- [9] ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K. - **Finite Elements and Approximation**, Wiley-Interscience, New York (1983).
- [10] GOLUB, G. H. and LOAN, C. F. V. - **Matrix Computations** - The Johns Hopkins University Press (1983).
- [11] ZIENKIEWICZ, O. C. and ZHU, J. Z. - "A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", **Int. J. Numer. Methods Engng.**, Vol. 24, pp. 337-357 (1987).
- [12] RANK, E. and ZIENKIEWICZ, O. C. - "A Simple Error Estimator in the Finite Element Method", **Communication in Applied Numerical Methods**, Vol. 3, pp. 243-249 (1987).
- [13] ZIENKIEWICZ, O. C., LIU, Y. C. and HUANG, G. C. - "Error Estimation and Adaptivity in Flow Formulation for Forming Problems", **Int. J. Numer. Method Engng.**, Vol. 25, pp. 23-42 (1988).

- [14] HINTON, E. and CAMPBELL, J. S. - "Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method", **Int. J. Numer. Methods Engng.**, Vol. 8, pp. 461-480 (1974).
- [15] HERMANN, L. R. - "Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure", **J. ASCE**, Vol. 18, pp. 1330-1335 (1972).
- [16] OLIVEIRA, E. R. de A. - "Theoretical Foundations of the Finite Element Method", **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 4 (1968).
- [17] CARROLL, W. E. - "A Theorem for Finite Element Idealization", **Int. J. of Solids and Structures**, Vol. 9, (1973).
- [18] TURCKE, D. J. and MCNEICE, G. M. - "Guidelines for Selecting Finite Element Grids Based on an Optimization Study", **Computers and Structures**, Vol. 4, pp. 499-519 (1974).
- [19] ODEN, J. T., DEMKOWICZ, L., STROBOULIS, T. and DEVLOO, P. - "Adaptive Methods for Problems in Solid and Fluid Mechanics", **Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations**, Eds. I. Babuska, O. C., Zienkiewicz, J. P. de S. R., Gago and E. R. de A. Oliveira, John Wiley & Sons, pp. 249-280 (1986).

- [20] PERAIRE, J., VAHDATI, M., MORGAN, K. and ZIENKIEWICZ, O. C. - "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computations", **CR/R/544/86**, Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea (1986), **to be published J. Comp. Phys.**
- [21] ZIENKIEWICZ, O. C., GAGO, J. P. de S. R. and KELLY, D. W. - "The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis", **Computers & Structures**, Vol. 16, nº 1-4, pp. 53-65 (1983)
- [22] RIBEIRO, F. L. B. - **Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento Auto-Adaptativo Versão P Aplicado à Problemas de Elasticidade**, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1986).
- [23] WILLMERSDORF, R. B. - **Formulação p-Adaptativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Potencial**, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro (1988).
- [24] BABUSKA, I. and NOOR, A. K. - "Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions", **Technical Note BN-104**, Institute for Physical Science and Technology, University of Maryland (1986).
- [25] CAREY, G. F. - "A Mesh-Refinement Scheme for Finite Element Computations", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 7, pp. 93-105(1976).
- [26] DEVLOO, P. R. B. - **An H-P Adaptative Finite Element Method for Steady Compressible Flow**, Ph.D. Thesis, University of Texas, Austin (1987).

- [27] GUO, B. and BABUSKA, I. - "The H-P Version of the Finite Element Method: Part 1 - The Basic Approximation Results", **Computational Mechanics**, Vol. 1, pp. 21-41 (1986).
- [28] ADJERID, S. and FLAHERTY, J. E. - "A Moving Finite Element Method for Time Dependent Partial Differential Equations with Error Estimation and Refinement", **Submitted to SIAM Journal on Numerical Analysis** (1986).
- [29] KIKUCHI, N. and TORIGAKI, T. - "Adaptive Finite Element Methods in Computer Aided Engineering" - **ABCM**, UFSC, pág. 39-61 (1987).
- [30] BABUSKA, I. and OH, HAE-SOO - "Pollution Problem of the p-and h-p Versions of the Finite Element Method", **Communications in Applied Numerical Methods**, Vol. 3, pp. 553-561 (1987).
- [31] DEVLOO, P., ODEN, J. T. and STROUBOULIS, T. - "Implementation of an Adaptive Refinement Technique for the SUPG Algorithm", **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Vol. 61, pp. 339-358 (1987).
- [32] LYRA, P. R. M., COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D. and LANDAU, L. - "H-Adaptive Mesh Refinement Procedures for Finite Elemento Analysis" - **Pan American Congress of Applied Mechanics**, Rio de Janeiro, janeiro (1989), a ser apresentado.

- [33] BANK, R. - "The Efficient Implementation of Local Mesh Refinement Algorithms" - **Adaptive Computational Methods for Partial Differential Equations**, Eds. I. Babuska, J. Chandra, J. E. Flaherty, SIAM Publications, Philadelphia (1983).
- [34] BABUSKA, I. - "Are High Degree Elements Preferable? Some Aspects of the h and h-p Version of the Finite Element Method" - **Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design**, Eds. Pande G. N. & Middleton, J., Numeta, Vol. 1, Section S1 (1987).
- [35] NITSCHKE, J. A. and A. H. SCHARTZ - "Interior Estimates for Ritz-Galerkin Methods" - **Math. Comp.**, Vol. 28, pp. 937-958 (1974).
- [36] LYRA, P. R. M., COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D. e LANDAU, L. - "A Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo Versão-h para o Método dos Elementos Finitos" - **XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, Ouro Preto, Agosto (1988).
- [37] RANK, E. - "An Adaptive H-P Version in the Finite Element Method" - **Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design**, Eds. Pande G. N. & Middleton, J., Numeta, Vol. 1, Section S11 (1987).
- [38] AXELSSON, O., BARKER, V. A. - **Finite Element Solution of Boundary Value Problems: Theory and Computation** - Academic Press, Inc., Orlando (1984).

- [39] COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., LANDAU, L. e EBECKEN, N. F. F. - "Um Procedimento Elemento-por-Elemento para a Solução de Grandes Sistemas de Equações do MEF Através do Método dos Gradientes Conjugados" - **6º Congresso Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia**, São Carlos (1986).
- [40] ORTEGA, J. M. - **Introduction to Parallel and Vector Solution of Linear Systems** - Plenum Press, New York and London (1988).
- [41] CAREY, G. F., J. T. ODEN - **Finite Element: Computational Aspects** - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1983).
- [42] RHEINBOLDT, W. C. and MESZTENYI, C. K. - "On Data Structure for Adaptive Finite Element Mesh Refinements" - ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 6, nº 2, pp. 166-187 (1980).
- [43] JACOB, B. P. e EBECKEN, N. F. F. - "Um Sistema Pré e Pós-Processador Gráfico para Análise Estrutural" - **Colloquia**, Vol. 4, pp. 43-56, Porto Alegre (1987).
- [44] **AUTO-CAD Reference Manual** - Autodesk Inc., (1986).
- [45] **SURFER Information Manual**, Golden Software, Inc., Colorado.
- [46] **LOTUS 1-2-3** - Lotus Development Corporation (1984).

- [47] BATHE, K. J. - **Finite Element Procedures in Engineering Analysis** - Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1982).
- [48] TONG, P. - "Exact Solutions of Certain Problems by the F.E.M." - AIAA Journal, Vol. 7, pp. 179-180 (1969).
- [49] CARSLAW, H. S. and JAEGER, J. C. - **Conduction of Heat in Solids** - Oxford at the Clarendon Press, Second Edition (1978).
- [50] TIMOSHENKO e GOODIER - **Teoria da Elasticidade** - Editora Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro, (1980).
- [51] CHENG, A. H. D. - "Darcy's Flow With Variable Permeability: A Boundary Integral Solution" - **Water Resources Research**, Vol. 20, nº 7, pp. 980-984, (1984).
- [52] KELLY, D. W., MILLS, R. J., REIZES, J. A. and MILLER, A. D. - "A Posteriori Estimates of the Solution Error Caused by Discretization in Finite Element, Finite Difference and Boundary Element Methods" - **Int. J. for Numerical Methods in Engineering**, Vol. 24, pp. 1921-1939, (1987).
- [53] JIANG, B. N. and CAREY, G. F. - "Adaptive Refinement for Least-Squares Finite Elements With Element-by-Element Conjugate Gradient Solution" - **Int. J. Num. Methods Engng.**, Vol. 24, pp. 569-581), (1987).

- [54] L. A. S. CASAS, E. B. - **R-H Mesh Improvement Algorithms for the Finite Element Method**, Ph.D. Thesis, Purdue University, (1988).
- [55] LYRA, P. R. M., COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D. e LANDAU, L. - "Uma Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo Versão h no Método dos Elementos Finitos, IX Congreso Latinoamericano e Ibérico sobre Métodos Computacionales para Ingenieria, Cordoba, Argentina (1988), a ser apresentado.
- [56] SHEPHARD, M. S. - "Adaptive Finite Element Analysis and CAD" - **Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations**, Eds. i. Balanska, O. C. Zienkiewicz, J. P. de S. R. Gago and E. R. de A. Oliveira, John Wiley & Sons, pp. 205-225 (1986).

APÊNDICE A

INTERPRETAÇÃO DO MEF COMO UM PROCEDIMENTO DE MINIMIZAÇÃO DOS FLUXOS

A energia potencial total no problema definido pelas equações (II.15) e (II.16) é dada por

$$\bar{\pi} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \hat{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{q}} \, d\Omega - \tilde{\mathbf{F}}^T \hat{\phi} \quad (\text{A.1})$$

Minimizando-se o funcional $\bar{\pi}$ e aplicando-se funções de aproximação do MEF com continuidade C^0 encontra-se uma distribuição de fluxos em torno de um ponto nodal conforme apresentado na Figura A.1.

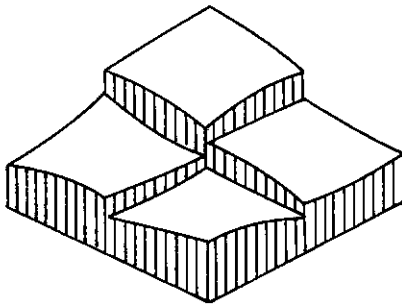


Fig. A.1 - Descontinuidade dos fluxos em um ponto nodal

Considerando-se pequenas variações em incógnitas virtuais $d\hat{\phi}$ arbitrárias escreve-se

$$\int_{\Omega} [d(\tilde{\nabla}\hat{\phi})]^T \tilde{\mathbf{q}} \, d\Omega = \tilde{\mathbf{F}}^T d\hat{\phi} \quad (\text{A.2})$$

A equação (A.1) pode ser reescrita na forma

$$\bar{\pi} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \hat{\underline{q}}^T \underline{D}^{-1} \underline{q} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{q}^T \underline{\nabla} \hat{\phi} \, d\Omega \quad (\text{A.3})$$

ou ainda, tendo-se em vista que $\hat{\underline{q}} = \underline{D} \underline{\nabla} \hat{\phi}$

$$\bar{\pi} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \hat{\underline{q}}^T \underline{D}^{-1} \hat{\underline{q}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{q}^T \underline{D}^{-1} \hat{\underline{q}} \, d\Omega \quad (\text{A.4})$$

Supondo-se o problema isotrópico, onde \underline{D} é uma matriz simétrica, pode-se também escrever a expressão (A.4) como

$$\bar{\pi} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} [\hat{\underline{q}} - \underline{q}]^T \underline{D}^{-1} [\hat{\underline{q}} - \underline{q}] \, d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{D}^{-1} \underline{q} \, d\Omega \quad (\text{A.5})$$

onde a segunda parcela é constante, uma vez que $\int_{\Omega} \underline{q}^T \underline{D}^{-1} \underline{q} \, d\Omega$ independe das incógnitas nodais.

Sendo assim, minimizar o funcional $\bar{\pi}$ com relação às incógnitas nodais pode ser interpretado como um procedimento de mínimos quadrados dos erros nos fluxos. O desenvolvimento acima é apresentado por HINTON e CAMPBELL [13].

Aproximações que minimizam o quadrado dos erros tendem a oscilar em torno do valor exato. Logo, nos fluxos obtidos em uma análise via MEF espera-se tal comportamento. Deve-se efetuar uma suavização para obtenção de melhores resultados (HERMAN [14]). Tem-se agora como distribuição de fluxos em torno de um ponto nodal a apresentada na Figura A.2.

Fica, portanto, realçada a validade do uso de técnicas de suavização de fluxos, bem como, o uso da equação (II.31) na avaliação do erro na solução.

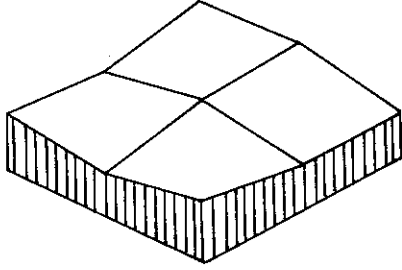


Fig. A.2 - Fluxos suavizados em um ponto nodal

APÊNDICE B

CRITÉRIO ÓTIMO

Supondo-se uma malha suficientemente fina pode-se escrever o funcional do erro $\tilde{\pi}$ como

$$\pi = \int_{\Omega} w h^2 \partial x \partial y \quad (\text{B.1})$$

onde w é uma combinação apropriada dos quadrados das derivadas da incógnita do problema e $h = h(x, y)$ é uma função da densidade de malha que fornece o diâmetro do elemento no ponto (x, y) .

A minimização do funcional $\tilde{\pi}$ dado em (B.1) leva ao resultado trivial $h \equiv 0$, ou seja quando o tamanho dos elementos tender para zero o erro também tende. Em termos práticos o que se deseja é minimizar o erro dentro de um custo especificado. Esta restrição pode ser convenientemente representada através da fixação do número máximo de elementos na malha:

$$\text{NEMAX} = \int_{\Omega} \frac{1}{h^2(x,y)} \partial x \partial y \quad (\text{B.2})$$

Impondo-se a restrição ao funcional $\tilde{\pi}$ através do multiplicador de Lagrange (α), tem-se,

$$\pi = \int_{\Omega} h^2 \omega \partial x \partial y + \alpha \cdot \left[\int_{\Omega} \frac{1}{h^2} \partial x \partial y - \text{NEMAX} \right] \quad (\text{B.3})$$

Cuja minimização implica em

$$\bar{\pi}(h) \delta h = \int_{\Omega} 2h \delta h w \partial_x \partial_y + \alpha \int_{\Omega} - \frac{2\delta h}{h^3} \partial_x \partial_y = 0 \quad (\text{B.4})$$

ou ainda

$$\bar{\pi}(h) \delta h = \int_{\Omega} 2\delta h \left[h.w - \frac{\alpha}{h^3} \right] \partial_x \partial_y = 0 \quad (\text{B.5})$$

Como a integral dada em (B.5) deve ser nula para qualquer variação δh , o integrando também deve ser, logo

$$hw - \frac{\alpha}{h^3} = 0 \rightarrow h^4 w = \alpha \quad (\text{B.6})$$

Integrando-se agora a equação (B.6) sobre um elemento i , ou seja

$$\int_{\Omega_i} h_i^4 w \partial_x \partial_y = \int_{\Omega_i} \alpha \partial_x \partial_y = \alpha \cdot h_i^2 \quad (\text{B.7})$$

Tem-se para qualquer elemento

$$\int_{\Omega} h^2 w \partial_x \partial_y = \alpha = \text{constante} \quad (\text{B.8})$$

A expressão acima significa que o erro em todos os elementos deve ser igual. Esse critério é denominado Princípio da Equidistribuição dos Erros. Maiores detalhes sobre esta demonstração podem ser encontrados em DEVLOO et alii [31].