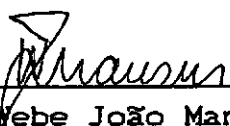


FORMULAÇÃO P-ADAPTATIVA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO
APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

Ramiro Brito Willmersdorf

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.) EM
ENGENHARIA CIVIL.

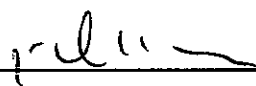
Aprovada por :



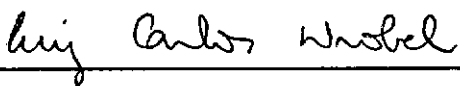
Prof. João Mansur
(Presidente)



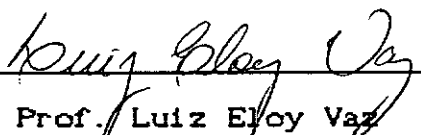
Prof. Fernando Venâncio Filho



Prof. José Claudio de Faria Telles



Prof. Luiz Carlos Wrobel



Prof. Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

Agosto - 1988

WILLMERSDORF, RAMIRO BRITO

Formulação p-Adaptativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicado a Problemas de Potencial (Rio de Janeiro) 1988.

viii, 109 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1896).

1. Elementos de Contorno.

2. Formulação p-adaptativa

I. COPPE/UFRJ.

II. Título (Série)

Dedico esta tese aos meus pais

Julio e Ana

AGRADECIMENTOS

Ao professor Webe João Mansur, pela orientação irrepre-
ensível, pela dedicação, esforço e paciência, e por ter sido
todo tempo um amigo e profissional exemplar.

Aos professores José Claudio de Faria Telles e Luiz
Carlos Wrobel, pelo interesse e incentivo.

Aos amigos Allan, Luiz, Marcelo, Paulo e Severino, pelo
apoio e pela confiança.

A todos os colegas da COPPE que propiciaram um ambiente
de trabalho intelectualmente estimulante. A gente sofre mas
a gente se diverte.

Ao Gilberto, por ter viabilizado as transparências e o
churrasco.

A minha família por tudo.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

FORMULAÇÃO p -ADAPTATIVA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
APLICADO A PROBLEMAS DE POTENCIAL

Ramiro Brito Willmersdorf

Agosto de 1988

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo desenvolver a formulação p -adaptativa do método dos elementos de contorno aplicado a problemas de potencial bidimensional estacionário.

No refinamento automático versão p são introduzidas seletivamente na discretização novas funções de interpolação hierárquicas, em função de informações obtidas na análise de erros.

Foram analisados problemas práticos que podem ser representados pela equação de Laplace. Os resultados foram comparados com soluções analíticas e soluções por outras técnicas numéricas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

**p-ADAPTIVE FORMULATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD
APPLIED TO POTENTIAL PROBLEMS**

Ramiro Brito Willmersdorf

August, 1988

Chairman: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work is concerned with the development of the p-adaptive version of the boundary element method applied to bidimensional steady state potential problems.

In the p version of automatic refinement, hierarquical shape functions are selectively inserted in the discretization, complying with error analysis.

Some potential problems are solved with this technique and the results are compared to analytical and numerical solutions.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO II - METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	06
II.1 - Problemas de Potencial	06
II.2 - Formulação Direta	08
II.3 - Discretização da Equação Integral	12
II.4 - Formulação Isoparamétrica	16
II.5 - Funções hierárquicas	18
II.6 - Formulação Hierárquica	24
CAPÍTULO III - REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO	28
CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE ERROS	36
CAPÍTULO V - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	44
V.1 - Introdução	44
V.2 - Estrutura de Dados	45
V.3 - Solução Fundamental	48
V.4 - Cálculo de coeficientes	51
V.5 - Resolução de sistemas de equações	53
V.6 - Novas Equações	57
V.7 - Análise de Erros	58
CAPÍTULO VI - APLICAÇÕES	59
VI.1 - Introdução	59
VI.2 - Exemplo 1	59
VI.3 - Exemplo 2 - Problema de Torção	70

VI.4 - Exemplo 3 - Problema de transferência de calor .	79
VI.5 - Exemplo 4 - Problema de Percolação	89
 CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES	 100
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 104

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O método dos elementos de contorno tem demonstrado ser uma técnica numérica eficiente para a solução de uma ampla classe de problemas de engenharia.

Este método baseia-se na transformação das equações diferenciais que descrevem o problema em equações integrais, expressas apenas no contorno da região analisada. As equações integrais são discretizadas, o que origina sistemas de equações algébricas cuja solução fornece o valor das incógnitas no contorno. Nos pontos internos do domínio, as incógnitas são calculadas a partir dos valores no contorno, através da integração numérica da equação integral.

Várias características contribuem para o bom desempenho do método. Como restringe-se a discretização ao contorno do problema, ocorre grande simplificação nos dados de entrada. O método apresenta também a capacidade de modelar apropriadamente regiões infinitas e semi-infinitas, e em geral fornece resultados com precisão equivalente para a incógnita e suas derivadas.

O método dos elementos de contorno pode, da mesma forma que o método dos elementos finitos, ser desenvolvido através da técnica de resíduos ponderados, o que evidencia a unidade entre as duas formulações. Estes métodos devem ser con-

siderados não como formulações competitivas, mas como ferramentas complementares, cada qual com campos de aplicação onde têm maior eficiência.

Uma introdução ao método dos elementos de contorno aplicado a problemas de potencial e elasticidade estática lineares foi publicada por BREBBIA [1] em 1978. Um livro mais abrangente, onde são tratados também problemas não lineares e dependentes do tempo foi publicado por BREBBIA, TELLES e WROBEL [2] em 1984. O rápido desenvolvimento obtido neste campo pode ser verificado nos anais das conferências específicas, por exemplo BEM [36].

A confiabilidade das soluções é um problema crucial para as técnicas de análise numérica. O método dos elementos de contorno, bem como o método dos elementos finitos convencional, não fornece informações sobre os erros decorrentes das aproximações efetuadas.

Para o método dos elementos finitos, no entanto, foi desenvolvido embasamento teórico rigoroso para a análise de erros (BABUSKA e RHEINBOLDT [3,4]). Isto permitiu grande desenvolvimento de procedimentos de estimativas de erros e refinamento automático de soluções (GAGO [5], ZIENKIEWICZ et al. [6], GAGO et al. [7,8]), denominados procedimentos auto-adaptativos. Tem sido obtidos grandes progressos no desenvolvimento das formulações auto-adaptativas do método dos elementos finitos, atualmente é possível obter-se soluções numéricas por elementos finitos com precisão

pré-especificada pelo analista (RIBEIRO [9], LYRA[10], GAGO[7]). Já existe bom volume de artigos publicados sobre este assunto, e as principais contribuições nesta área até 1986 foram relacionadas por BABUSKA e NOOR [11]. Em 1984 foi realizada a primeira conferência internacional exclusivamente dedicada as técnicas numéricas auto-adaptativas (ARFEC [12]).

As técnicas auto-adaptativas são potencialmente tão benéficas para o método dos elementos de contorno quanto para o método dos elementos finitos. Apesar disto, poucos resultados práticos têm sido reportados em elementos de contorno. Isto deve-se principalmente à falta de embasamento teórico para a análise de erros na solução numérica de equações integrais. Os resultados apresentados usualmente sofrem de falta de rigor matemático, o que coloca em dúvida sua generalidade.

A aplicação de técnicas numéricas auto-adaptativas em elementos de contorno para problemas de potencial estacionário foi tratada por CERROLAZA e ALARCON [13], LERA [14], ALARCON e REVERTER [15] E RANK [16,17]. Problemas elastostáticos lineares foram estudados por PARREIRA [18], RENCIS e MULLEN [19], e UMETAMI [20].

Existem basicamente três tipos de refinamento auto-adaptativo. A versão p procura melhorar a precisão da solução aumentando a ordem da interpolação nos elementos onde o erro é maior, conservando o número de elementos na

malha. Na versão h, a ordem da interpolação é mantida porém aumenta-se o número de elementos na malha, por subdivisão dos elementos críticos. Na versão r, varia-se apenas a posição dos nós, mantendo-se o número de graus de liberdade invariante. A combinação destas técnicas é viável (CRANK [17]) e pode levar a implementações cuja eficiência ultrapassa a de versões simples.

A versão p-adaptativa possui várias qualidades. Ela apresenta elevadas taxas de convergência, isto é, a taxa de variação do erro da solução em função do aumento do número de graus de liberdade é relativamente alta. Além disso, o refinamento p pode ser implementado de maneira eficiente com o uso de funções de forma hierárquicas (RIBEIRO [9]).

Neste trabalho apresenta-se uma implementação do método dos elementos de contorno p-adaptativo aplicado a problemas de potencial bidimensionais estacionários.

No capítulo II descreve-se os conceitos básicos e as formulações isoparamétrica e hierárquica do método dos elementos de contorno.

No capítulo III discute-se as características gerais do refinamento p-adaptativo e sua estreita vinculação com a formulação hierárquica.

No capítulo IV apresenta-se a análise de erros. São determinadas estimativas de erro suficientes para controlar

um processo auto-adaptativo.

As principais características do programa de computador desenvolvido a fim de verificar o desempenho da formulação p-adaptativa são comentados no capítulo V.

O capítulo VI contém as análises dos exemplos utilizados para testar a formulação.

Finalmente, no capítulo VII estão as conclusões gerais e sugestões para futuros estudos e continuidade deste trabalho.

CAPÍTULO II

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

II.1) Problemas de potencial

Neste trabalho foram estudados algoritmos para solução numérica de problemas cujo comportamento pode ser descrito pela equação de Laplace :

$$\nabla^2 u(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad (\text{II.1})$$

submetida às condições de contorno

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad x \in \Gamma_u \quad (\text{II.2})$$

$$q(x) = \frac{\partial u}{\partial n}(x) = \bar{q}(x) \quad x \in \Gamma_q \quad (\text{II.3})$$

onde x - representa o ponto de coordenadas x_1, x_2
 n - coordenada na direção da normal externa ao domínio
 Ω - domínio
 $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ - contorno de Ω

como pode ser observado na figura II.1.

O método dos elementos de contorno resolve o problema definido pelas equações (II.1), (II.2) e (II.3) através da transformação da equação diferencial (II.1), válida em $\Omega \cup \Gamma$, em uma equação integral definida no contorno Γ . O contorno é então discretizado em elementos nos quais supõe-

se conhecidas as variações de u e q , o que permite montar um sistema de equações algébricas lineares. A resolução deste sistema fornece uma solução aproximada para as incógnitas no contorno.

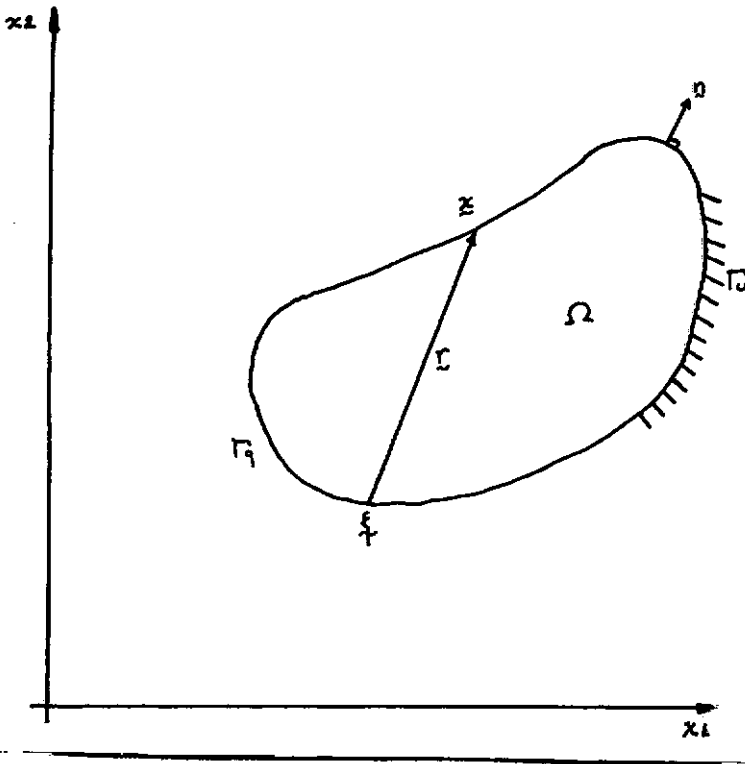


figura II.1 - Domínio

II.2) Formulação direta

O método dos elementos de contorno será desenvolvido a partir de uma expressão de resíduos ponderados. Assim torna-se aparente a relação entre esta e outras técnicas de análise numérica, em particular o método dos elementos finitos. A formulação por resíduos ponderados apresenta ainda a vantagem da generalidade, possibilitando a extensão do método a problemas mais complexos.

Admitindo que u e q sejam soluções aproximadas para o problema de potencial descrito pelas equações (II.1), (II.2) e (II.3), surgem 3 tipos de resíduos:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x) &= R & x \in \Omega \\ u(x) - \bar{u}(x) &= R_u & x \in \Gamma_u \\ q(x) - \bar{q}(x) &= R_q & x \in \Gamma_q \end{aligned} \quad (II.4)$$

A expressão de resíduos ponderados para este problema é (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2])

$$\int_{\Omega} R w \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} R_q w \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} R_u \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma \quad (II.5)$$

ou

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q}) w \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma \quad (II.6)$$

No método dos elementos finitos, modelo de deslocamentos, é usual adotar-se soluções aproximadas e funções de ponderação que satisfaçam as condições de contorno essen-

ciais. O erro R_u torna-se assim identicamente nulo. É normal ainda o emprego da formulação fraca da expressão de resíduos, reduzindo a ordem do operador diferencial pela aplicação do teorema de Gauss. Empregando como funções de ponderação w as mesmas funções u utilizadas na aproximação das incógnitas (técnica de Galerkin), a expressão (II.4) reduz-se a (ZIENKIEWICZ e MORGAN [21]) :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \delta u}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta u d\Gamma \quad (\text{II.7})$$

onde δ é o símbolo de variação e foi utilizada a convenção de somatório de Einstein. Esta expressão é a base da implementação numérica do método dos elementos finitos para equação de Laplace.

No método dos elementos de contorno, a solução aproximada u não necessariamente atende às condições de contorno essenciais. Através da formulação inversa da expressão de resíduos (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]) e do uso de funções de ponderação especiais, consegue-se eliminar a integral de domínio da expressão (II.6)

Denominando a função de ponderação de u^* , e supondo que u^* possua derivadas primeiras contínuas, a equação (II.6) pode ser reescrita para :

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u u^* d\Omega = \int_{\Gamma_q} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (\text{II.8})$$

onde $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$

Aplicando a fórmula de Green à integral de domínio, introduzindo as condições de contorno e cancelando os termos semelhantes, obtém-se (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2])

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* u d\Omega = - \int_{\Gamma_u} q u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_q} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u} q^* d\Gamma \quad (\text{II.9})$$

Supõe-se que a função de ponderação u^* seja solução da seguinte equação de Poisson

$$\nabla^2 u^*(\xi, x) = - \Delta(\xi, x) \quad (\text{II.10})$$

onde ξ e x são pontos do domínio Ω .

$\Delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac, definida por:

$$\begin{aligned} \Delta(\xi, x) &= 0 && \text{para } \xi \neq x \\ \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) d\Omega &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

A função delta de Dirac possui a propriedade :

$$\int_{\Omega} \Delta(\xi, x) f(x) d\Omega = f(\xi) \quad (\text{II.12})$$

Na literatura de elementos de contorno e da teoria de potencial (KELLOG [22]) os pontos ξ e x são denominados ponto fonte e ponto campo, respectivamente, e $u^*(\xi, x)$ é denominada solução fundamental.

Substituindo a equação (II.10) na expressão (II.9) elimina-se a integral de domínio através da propriedade (II.12), obtendo-se :

$$u(\xi) + \int_{\Gamma_q} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u}(x) q^*(\xi, x) d\Gamma = \\ \int_{\Gamma_u} q(x) u^*(\xi, x) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q}(x) u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (\text{II.13})$$

ou, genericamente

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(x) q^*(\xi, x) - q(x) u^*(\xi, x)] d\Gamma = 0 \quad (\text{II.14})$$

onde fica implícito que $u(x)$ e $q(x)$ assumem seus valores prescritos quando o ponto campo x estiver sobre Γ_u ou Γ_q , respectivamente.

A equação (II.14) relaciona o potencial no domínio com o fluxo e potencial no contorno. Levando o ponto fonte ξ para o contorno (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]), chega-se à equação

$$c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [u(x) q^*(\xi, x) - q(x) u^*(\xi, x)] d\Gamma = 0 \quad (\text{II.15})$$

onde ξ, x - pontos no contorno Γ
 $c(\xi)$ - constante relacionada à geometria do contorno no ponto fonte ξ . (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]).

A forma da solução fundamental depende do domínio e das condições de contorno da equação (II.10). Para domínios infinitos bi-dimensionais as expressões são

$$u^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (\text{II.16})$$

$$q^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi r} (r \cdot n) \quad (\text{II.17})$$

onde n é o vetor unitário normal externo ao contorno Γ
 $r = x - \xi$ (fig. II.1)
 $r = |r| = |x - \xi|$

II.3) Discretização da equação integral

Admitindo que o contorno Γ seja discretizado em N_e elementos, a equação integral (II.15) torna-se

$$c(\xi)u(\xi) + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} q(x) u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (\text{II.16})$$

Supõe-se também que dentro do elemento j , $u(x)$ e $q(x)$ sejam aproximadas da forma :

$$\begin{aligned}
 u_j(x) &= \sum_{k=0}^{m_{ju}} a_k^j N_k(x) \\
 q_j(x) &= \sum_{k=0}^{m_{jq}} b_k^j N_k(x) \quad x \in \Gamma_j \quad (\text{II.17})
 \end{aligned}$$

onde u_j potencial no elemento j
 q_j fluxo na direção normal no elemento j
 a_k^j, b_k^j parâmetros desconhecidos
 $N_k(x)$ funções de interpolação
 m_{ju}, m_{jq} ordens de interpolação

A equação (II.16) torna-se então, para ξ pertencente ao elemento Γ_i

$$\begin{aligned}
 c(\xi) \sum_{k=0}^{m_{ju}} a_k^i N_k(\xi) + \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{m_{ju}} a_k^j \int_{\Gamma_j} N_k(x) q^*(\xi, x) d\Gamma = \\
 \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{m_{jq}} b_k^j \int_{\Gamma_j} N_k(x) u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (\text{II.18})
 \end{aligned}$$

Como o método baseia-se na formulação inversa da expressão de resíduos ponderados, não é necessário que seja garantida continuidade de potencial ou suas derivadas entre elementos adjacentes, pois o operador diferencial do problema é aplicado sobre as funções de ponderação (equação II.9). A escolha das famílias de funções de interpolação pode assim ser feita com grande liberdade. É importante ressaltar que em princípio, cada elemento pode apresentar interpolações de ordens diferentes para u e q , bem como para a mesma grandeza entre elementos distintos.

Definindo agora

$$h_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(x) u^*(\xi, x) d\Gamma$$

e

$$g_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(x) q^*(\xi, x) d\Gamma \quad (\text{II.19})$$

onde

i refere-se ao ponto fonte ξ_i

j refere-se ao elemento j

k é a ordem da função de interpolação N_k

reescreve-se a equação (II.18) como

$$c(\xi) \sum_{k=0}^{mju} a_k^i N_k(\xi) + \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mju} h_{ij}^k a_k^j = \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mj q} g_{ij}^k b_k^j \quad (\text{II.20})$$

A contribuição do primeiro termo da equação (II.20) deve ser somada à parcela do somatório correspondente ao elemento que contém o ponto fonte ξ , e a equação simplifica-se para

$$\sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mju} \hat{h}_{ij}^k a_k^j = \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mj q} g_{ij}^k b_k^j \quad (\text{II.21})$$

$$\begin{aligned} \text{onde } \hat{h}_{ij}^k &= h_{ij}^k, & \text{se } j \text{ não contém o ponto fonte } \xi \\ \hat{h}_{ij}^k &= c(\xi) N_k(\xi) + h_{ij}^k & \text{se } j \text{ contém } \xi \end{aligned} \quad (\text{II.22})$$

Introduzindo-se as condições de contorno, a equação

integral discretizada assume a forma final

$$\sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^{m_{ju}} \hat{h}_{ij}^k a_k^j - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_{jq}} g_{ij}^k b_k^j =$$

$$\sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^{m_{jq}} g_{ij}^k \bar{b}_k^j - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_{ju}} \hat{h}_{ij}^k \bar{a}_k^j \quad (\text{II.23})$$

onde \bar{a}_k^j, \bar{b}_k^j valores prescritos no elemento j
 $\sum_{j \in \Gamma_q}$ indica somatório no contorno Γ_q
 $\sum_{j \in \Gamma_u}$ indica somatório no contorno Γ_u

Foi estabelecida uma equação algébrica para um ponto fonte ξ . Esta equação relaciona o potencial do ponto fonte com os potenciais e fluxos desconhecidos nos elementos de contorno. Repetindo esta equação para tantos pontos fonte distintos quantas forem as incógnitas da equação (II.23), monta-se um sistema de equações algébricas lineares da forma

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{F} \quad (\text{II.24})$$

cujo vetor solução $\underset{\sim}{X}$ contém os valores das incógnitas que anulam o resíduo nos pontos fonte.

Em contraste ao método dos elementos finitos, a matriz de coeficientes $\underset{\sim}{K}$ não é simétrica. Além disso, como cada ponto fonte está relacionado com todos os elementos, a matriz de coeficientes é cheia.

II.4) Formulação isoparamétrica

As implementações modernas do método dos elementos de contorno tem normalmente utilizado a formulação isoparamétrica, na qual a geometria, o fluxo e o potencial de cada elemento são aproximados por interpolações de mesma ordem. É usual também o emprego das funções de interpolação lagrangeanas, e escolher pontos fonte coincidentes com os nós das funções de interpolação.

Nas coordenadas naturais do elemento pode-se escrever para o elemento j

$$\begin{aligned} u_j(\eta) &= \sum_{k=0}^m a_k N_k(\eta) \\ q_j(\eta) &= \sum_{k=0}^m b_k N_k(\eta) \\ x_j(\eta) &= \sum_{k=0}^m c_k N_k(\eta) \end{aligned} \quad (II.25)$$

As funções lagrangeanas são da forma (ZIENKIEWICZ e MORGAN [21]) :

$$N_k(\eta) = \prod_{i=0, i \neq k}^m \frac{(\eta - \eta_i)}{(\eta_k - \eta_i)} \quad (II.26)$$

onde $\eta_i \Big|_{i=0, m}$ são as coordenadas naturais dos nós de $N_k(\eta)$

A principal propriedade das funções lagrangeanas é

$$N_k(\eta_i) = \delta_{ik} \quad (\text{II.27})$$

onde δ_{ik} é o delta de Kronecker.

Isto implica em

$$\begin{aligned} u_j(\eta_k) &= a_k^j = U_k^j \\ q_j(\eta_k) &= b_k^j = Q_k^j \\ x_{\sim j}(\eta_k) &= c_k^j = X_{\sim k}^j \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

e a equação (II.17) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} u_j(\eta) &= \sum_{k=0}^m U_k^j N_k(\eta) \\ q_j(\eta) &= \sum_{k=0}^m Q_k^j N_k(\eta) \\ x_{\sim j}(\eta) &= \sum_{k=0}^m X_{\sim k}^j N_k(\eta) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

e a equação (II.22) simplifica-se para

$$\begin{aligned} \hat{h}_{ij}^k &= h_{ij}^k && \text{se } j \text{ não contém o ponto fonte } \xi \\ \hat{h}_{ij}^k &= h_{ij}^k && \text{se } j \text{ contém } \xi, \text{ mas } \xi \text{ não coincide com } \eta_k \\ \hat{h}_{ij}^k &= c(\xi) + h_{ij}^k && \text{se } j \text{ contém } \xi, \text{ e } \xi \text{ coincide com } \eta_k \end{aligned}$$

A equação algébrica correspondente a um ponto fonte ξ é
então :

$$\sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^m \hat{h}_{ij}^k U_k^j - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^m g_{ij}^k Q_k^j =$$

$$\sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^m g_{ij}^k \bar{Q}_k^j - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^m \hat{h}_{ij}^k \bar{U}_k^j \quad (\text{II.30})$$

Os parâmetros a_k e b_k assumiram os valores das funções $u(x)$ e $q(x)$ nos pontos nodais devido à propriedade (II.27) e por ter sido forçada a coincidência entre pontos fonte e nós das funções de interpolação. Apesar da conveniência desta linha de ação, ela não é necessariamente inerente ao método dos elementos de contorno.

II.5) Funções hierárquicas

No contexto dos métodos numéricos p-adaptativos é essencial minimizar o esforço computacional necessário à obtenção de novas soluções. Neste aspecto, é importante que as funções de interpolação utilizadas em uma aproximação de ordem m não sejam modificadas quando tenta-se refinar a solução com a introdução de uma nova função de ordem $m + 1$. Isto é, se

$$u(x) = \sum_{k=0}^m a_k N_k(\eta) \quad (\text{II.31})$$

é refinada para

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m+1} a_k N_k(\eta) \quad (\text{II.32})$$

as funções $N_k(\eta)$, $k = 0..m$, devem ser iguais entre as

equações (II.31) e (II.32). As famílias de funções de interpolação que possuem esta propriedade são classificadas como funções hierárquicas.

Como pode-se facilmente observar da equação (II.26) e na figura (II.2), as funções lagrangeanas não são hierárquicas. Deste modo não são adequadas à implementação do método dos elementos de contorno p-adaptativo.

Para garantir que a primeira solução do processo p-adaptativo seja idêntica a solução com elementos lineares convencionais, utiliza-se famílias hierárquicas onde as funções de ordem 0 e 1 são obrigatoriamente

$$N_0(\eta) = \frac{1 - \eta}{2} \quad (II.33)$$

$$N_1(\eta) = \frac{1 + \eta}{2} \quad (II.34)$$

Desta forma aproveita-se a continuidade de potencial e fluxo, quando ocorrer, entre elementos adjacentes para reduzir o número de incógnitas da primeira solução.

Exige-se também que as funções de ordem superior a 1 sejam nulas nos extremos do elemento, isto é

$$N_0(-1) = 1$$

$$N_k(-1) = 0 \quad k \neq 0$$

$$e \quad N_1(1) = 1$$

$$N_k(1) = 0 \quad k \neq 1 \quad (II.35)$$

A interpolação fica então

$$u_j(\eta) = \sum_{k=0}^{m_j} a_k^j N_k(\eta)$$

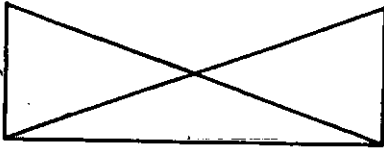
$$\begin{aligned} e \quad u_j(-1) &= u_0^j = a_0^j \\ u_j(1) &= u_1^j = a_1^j \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

portanto

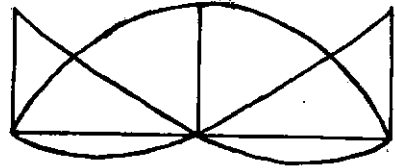
$$u(\eta) = u_0 N_0(\eta) + u_1 N_1(\eta) + \sum_{k=2}^{m_j} a_k^j N_k(\eta) \quad (\text{II.37})$$

Uma característica da interpolação por funções hierárquicas é que os parâmetros a_k , para $k > 1$, não necessariamente estão associados a variáveis nodais ou possuem significado físico. Isto não acarreta nenhum problema, pois a transformação dos parâmetros em valores nodais é imediata e está implícita na equação (II.37).

Várias famílias de funções hierárquicas estão em uso corrente. Destacam-se as utilizadas por RIBEIRO [9], os polinômios de Peano (ZIENKIEWICZ e MORGAN [21], ALARCON e REVERTER [15]), e as integrais dos polinômios de Legendre (GAGO [7], CERROLAZA e ALARCON [13], PARREIRA [18]). Mais recentemente foram testados polinômios de Chebyshev (DEVLOO [23]) e funções trigonométricas (WIBER e MÖLLER [24]).

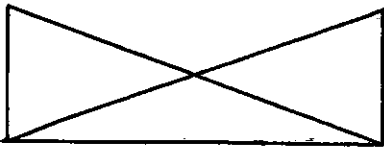


Linear

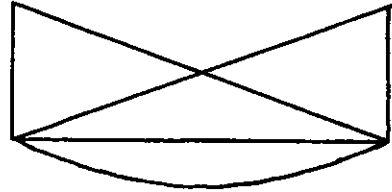


Quadrática

a)- Lagrangeanas



Linear



Quadrática

b)- Hierárquicas

figura II.2 - Funções de Interpolação

As funções de Peano são definidas por

$$\begin{aligned} N_k(\eta) &= \frac{\eta^{k-1}}{k!} & k \text{ par, } k \geq 2 \\ N_k(\eta) &= \frac{\eta^k - \eta}{k!} & k \text{ ímpar, } k \geq 3 \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Pode-se facilmente verificar que se na interpolação (II.37) são utilizadas-se funções de Peano, então

$$\left. \frac{d^k u}{d\eta^k}(\eta) \right|_{\eta=0} = a_k \quad k \geq 2 \quad (\text{II.39})$$

o que fornece um significado físico aos parâmetros a_k .

As funções de interpolação de Legendre são dadas pela integral em η dos polinômios de Legendre que são definidos por (SPIEGEL [25])

$$P_k(\eta) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{d\eta^k} (\eta^2 - 1)^k \quad k \geq 0 \quad (\text{II.40})$$

integrando em η para $k \geq 1$, obtem-se a família hierárquica (GAGO [7], CERROLAZA e ALARCON [13], PARREIRA [18])

$$N_k(\eta) = \frac{1}{2^{k-2} (k-1)!} \frac{d^{k-2}}{d\eta^{k-2}} (\eta^2 - 1)^{k-1} \quad (\text{II.41})$$

$$k \geq 2$$

As funções de Legendre (II.41) possuem a propriedade (II.35) e geralmente levam a sistemas de equações melhor

condicionados do que as funções de Peano (PARREIRA [18], ZIENKIEWICZ [6]).

Os polinômios de Chebyshev são dados pelas fórmulas (SPIEGEL [25])

$$\begin{aligned} T_0(\eta) &= 1 \\ T_1(\eta) &= \eta \\ T_k(\eta) &= 2\eta T_{k-1}(\eta) - T_{k-2}(\eta) \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

Sua principal vantagem é que os termos de ordem superior a 2 podem ser calculados muito eficientemente através da fórmula de recorrência. Bastam duas multiplicações e uma subtração para obter-se um novo termo em função dos anteriores. Os polinômios de Chebyshev, entretanto, não apresentam a propriedade (II.35), pois

$$\begin{aligned} T_k(1) &= 1 \\ T_k(-1) &= 1 \quad k \text{ par} \\ T_k(-1) &= -1 \quad k \text{ ímpar} \end{aligned} \quad (\text{II.43})$$

o que dificulta seu uso como funções hierárquicas.

DEVLOO [23] sugere uma família hierárquica baseada nos polinômios de Chebyshev da forma

$$\begin{aligned} N_k(\eta) &= T_k(\eta) - 1 \quad k \text{ par}, k \geq 2 \\ N_k(\eta) &= T_k(\eta) - \eta \quad k \text{ ímpar}, k \geq 3 \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

que mantém praticamente a mesma eficiência de cálculo dos polinômios não modificados.

Os polinômios de Legendre (II.40) comportam-se como os de Chebyshev nos extremos do elemento (equações II.43). Portanto são passíveis do mesmo tratamento, dando origem a uma família hierárquica descrita por

$$\begin{aligned} N_k(\eta) &= P_k(\eta) - 1 & k \text{ par}, k \geq 2 \\ N_k(\eta) &= P_k(\eta) - \eta & k \text{ ímpar}, k \geq 3 \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Como família hierárquica trigonométrica, pode-se adotar

$$\begin{aligned} N_k(\eta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}(k-1)\eta\right) & k \text{ par}, k \geq 2 \\ N_k(\eta) &= \sin\left(\pi(k-2)\eta\right) & k \text{ ímpar}, k \geq 3 \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

Neste trabalho foi comparado o desempenho das funções de Peano (II.38) e dos polinômios de Chebyshev (II.44) e Legendre (II.45) modificados, como proposto em (II.45).

II.6) Formulação hierárquica

A formulação hierárquica do método dos elementos de contorno difere da convencional pelo emprego de funções de forma hierárquicas. A equação algébrica para cada ponto fonte e o sistema de equações apresentam-se estruturados hierárquicamente.

Com a propriedade (II.37), pode-se escrever a equação (II.23) como

$$\sum_{j \in \Gamma_q} [\hat{h}_{ij}^0 \hat{h}_{ij}^1] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}_j + \sum_{j \in \Gamma_u} [g_{ij}^0 g_{ij}^1] \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix}_j +$$

$$\sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=2}^{mju} \hat{h}_{ij}^k a_k^j - \sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=2}^{mj q} g_{ij}^k b_k^j = f(\xi) \quad (\text{II.45})$$

onde

$$f(\xi) = - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{mju} \hat{h}_{ij}^k \bar{a}_k^j + \sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^{mj q} g_{ij}^k \bar{b}_k^j$$

Os termos em u_k e q_k correspondem a equação que seria montada se o problema fosse resolvido com a mesma malha, usando elementos lineares convencionais. Os termos de ordem superior em a_k e b_k não alteram os coeficientes de ordem de interpolação inferior, pois são calculados com funções hierárquicas.

A estrutura hierárquica desta equação é evidente. Ela pode ser admitida como uma equação para elementos lineares, modificada através da introdução de funções de interpolação de ordem superior. Organizando-se todas as equações do sistema desta forma obtém-se esta estrutura hierárquica refletida no sistema de equações algébricas, no qual pode-se identificar sub-matrizes associadas às soluções com elementos lineares e às soluções com graus de liberdade de ordem superior.

A formulação hierárquica permite grande flexibilidade no posicionamento dos pontos fonte. Para as funções lineares, os pontos fonte são posicionados nos extremos dos elementos, garantindo a continuidade de potencial e fluxo entre elementos adjacentes. Nos casos em que a continuidade não é desejada, por exemplo em pontos não suaves do contorno, desloca-se o ponto fonte para o interior do elemento, mantendo-se inalteradas as funções de interpolação. Este tratamento é similar ao proposto por MARQUES [26], para o caso de elementos lineares, sendo denominado tratamento de canto com elementos interpolados.

Os pontos fonte correspondentes a funções de ordem superior não estão associados a variáveis nodais. Seu posicionamento decorre portanto de outros fatores. Por exemplo, é aconselhável que os pontos fonte sejam localizados em pontos de máximos das funções de interpolação. Desta forma reforça-se a dominância da diagonal da matriz de coeficientes, melhorando seu condicionamento.

Deve-se evitar proximidade excessiva entre pontos fonte, e também entre pontos fonte e pontos de integração numérica, para evitar mau condicionamento do sistema de equações. A estratégia adotada será discutida no capítulo que trata da implementação computacional do método.

As funções de forma hierárquicas são as mais adequadas à implementação formulação p-adaptativa. No entanto, estes conceitos são independentes. É possível empregar funções de

interpolação convencionais no método p-adaptativo. Neste caso não é possível o reaproveitamento de cálculos prévios, e a formulação perde um dos principais atrativos, tornando-se pouco eficiente computacionalmente.

CAPÍTULO III

REFINAMENTO AUTO-ADAPTATIVO

O processo de refinamento auto adaptativo consiste em melhorar a precisão de uma solução introduzindo-se novos graus de liberdade no modelo e realizando soluções sucessivas. O enriquecimento da aproximação é determinado pelo comportamento do próprio problema. Os novos graus de liberdade são acrescentados automaticamente nas regiões onde a resposta esteja mal representada. As soluções obtidas por processos auto-adaptativos podem ser consideradas ótimas no sentido de que o erro é mínimo para o número de graus de liberdade empregado na discretização. Verifica-se também uma tendência à distribuição uniforme de erros, mostrando que cada elemento foi aproveitado em seu máximo potencial de aproximação.

Para alguns casos do método dos elementos finitos existem provas matemáticas formais das características favoráveis do refinamento auto-adaptativo (BABUSKA e RHEINBOLDT [3,4]). Para o método dos elementos de contorno, no entanto, o embasamento teórico ainda está incipiente. O desenvolvimento tem sido realizado com base em analogias aos processos utilizados no método dos elementos finitos, e sua validade só pode ser mostrada através de resultados numéricos.

Nos procedimentos p-adaptativos introduz-se novos graus

de liberdade aumentando o número e consequentemente a ordem das funções de interpolação das incógnitas. A partir de uma solução inicial do problema, realiza-se a análise de erros. É estimado o erro total da solução e são determinados os elementos nos quais o refinamento será mais eficaz. Se o erro total estimado for menor do que uma tolerância pré-estabelecida, a solução é considerada satisfatória e não realiza-se novo refinamento.

Caso contrário, são adicionadas novas funções na interpolação das incógnitas dos elementos indicados pela análise de erros. São montadas novas equações, correspondentes aos novos graus de liberdade e o sistema de equações ampliado é resolvido, fornecendo uma nova solução. Este procedimento é repetido até que o erro total estimado seja menor do que a tolerância estabelecida.

O corpo de um programa auto-adaptativo pode ser descrito por um algoritmo bastante simples (figura III.1).

A obtenção de soluções com erros dentro de tolerâncias pré-especificadas é uma das maiores vantagens dos métodos auto adaptativos. A versão p possui limitações de ordem prática na maior ordem admissível para as funções de interpolação. Além disso, em interpolações de ordem muito alta podem ocorrer oscilações que prejudicam os resultados.

```

Início
Entrada de dados
Montagem do sistema de equações da 1a solução
Resolução do 1o sistema de equações
Análise de erros
Saída de resultados
Enquanto não atingir tolerância faça
    Montagem de novas equações
    Resolução do sistema ampliado
    Análise de erros
    Saída de resultados
Fim
Fim

```

figura (III.1) - Refinamento auto-adaptativo

Em problemas com singularidades na resposta, o erro tende a concentrar-se nos elementos onde estas ocorrem. Estes elementos necessitam de interpolações de ordem elevada e para uma malha muito grosseira pode não ser possível representar adequadamente a singularidade. Assim um programa p-adaptativo pode ser incapaz de atingir a tolerância estabelecida. Quando este problema ocorre, a malha inicial deve ser mais refinada nas regiões onde ocorrem singularidades.

A vantagem do emprego de funções hierárquicas em um programa p-adaptativo é evidente. Os novos graus de liberdade introduzidos como funções hierárquicas não tem efeito sobre os coeficientes calculados previamente. Considerando por exemplo a contribuição de um elemento j onde o fluxo é prescrito para a equação algébrica de um ponto fon-

te, tem-se no termo das incógnitas

$$[\hat{h}_{ij}^0 \hat{h}_{ij}^1] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}_j + \sum_{k=2}^{mju} \hat{h}_{ij}^k a_k^j \quad (III.1)$$

e no termo independente

$$[g_{ij}^0 g_{ij}^1] \begin{bmatrix} \bar{q}_0 \\ \bar{q}_1 \end{bmatrix}_j + \sum_{k=2}^{mju} g_{ij}^k \bar{b}_k^j \quad (III.2)$$

Se a este elemento for acrescentado um grau de liberdade, na forma de uma função hierárquica, o termo das incógnitas fica

$$[\hat{h}_{ij}^0 \hat{h}_{ij}^1] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}_j + \sum_{k=2}^{mju+1} \hat{h}_{ij}^k a_k^j \quad (III.3)$$

e os coeficientes \hat{h}_{ij}^k , $k = 0..mju$, são iguais entre (III.1) e (III.3). Os coeficientes \hat{h}_{ij}^k não se alteram porque dependem apenas da geometria, que é invariante, e de $N_k(\xi)$. Como foi usada uma família hierárquica, as funções de ordem igual ou menor do que mju não são alteradas pela introdução da nova função. A contribuição no termo independente não é modificada, pois as condições de contorno são conhecidas e supostamente interpoladas com a precisão necessária.

A estrutura hierárquica do sistema de equações é aproveitada naturalmente. As linhas e colunas correspondentes a graus de liberdade de ordem superior são montadas apenas quando a análise de erros indica que são necessárias. Considerando uma solução com n graus de liberdade que seja refinada para $n + m$ graus de liberdade, pode-se representar

o sistema de equações da seguinte forma :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline K_{\sim nn} & K_{\sim nm} \\ \hline K_{\sim mn} & K_{\sim mm} \\ \hline \end{array}
 \begin{array}{|c|} \hline X_{\sim n} \\ \hline X_{\sim m} \\ \hline \end{array}
 =
 \begin{array}{|c|} \hline F_{\sim n} \\ \hline F_{\sim m} \\ \hline \end{array}$$

No método dos elementos de contorno p-adaptativo pode-se fazer as associações

$K_{\sim nn}$	pontos fonte e funções de interpolação prévias
$K_{\sim nm}$	pontos fonte prévios, novas funções
$K_{\sim mn}$	novos pontos fonte, funções prévias
$K_{\sim mm}$	novos pontos fonte, novas funções
$X_{\sim n}$	incógnitas solução anterior
$X_{\sim m}$	novas incógnitas
$F_{\sim n}$	vetor independente solução anterior
$F_{\sim m}$	novos termos do vetor independente

Para que o método seja computacionalmente eficiente, é importante aproveitar a triangularização de $K_{\sim nn}$ realizada na solução anterior. No método dos elementos finitos é usual o emprego de técnicas iterativas para a resolução do sistema ampliado (RIBEIRO [9]).

A matriz de coeficientes do método dos elementos de contorno não apresenta propriedades adequadas às técnicas iterativas de solução usualmente empregadas no método dos

elementos finitos. UMETAMI [20] observou que a convergência com métodos iterativos é fortemente influenciada pela família de funções hierárquicas empregada, devido ao seu efeito sobre o condicionamento da matriz de coeficientes. Outros autores (RENCIS e MULLEN [33]) obtiveram resultados decepcionantes com métodos iterativos de resolução de sistemas de equações, fora do contexto de métodos auto adaptativos. Este campo no entanto tem sido amplamente pesquisado, pois as técnicas iterativas de solução possuem características interessantes, em particular quando combinadas com procedimentos auto-adaptativos.

Neste trabalho foi utilizado um método direto de solução baseado na eliminação gaussiana. A cada nova solução opera-se apenas sobre os novos termos, aproveitando integralmente a triangularização anterior. A técnica consiste em realizar a eliminação sobre os termos adicionais da matriz ampliada, ignorando a submatriz correspondente à solução anterior. Alguns coeficientes necessários para a triangularização dos novos termos pertencem a submatriz anterior, e são calculados durante a eliminação anterior.

Depois de cada solução realiza-se a análise de erros. Determinam-se indicadores de erro, que são quantidades associadas a cada possível novo grau de liberdade, e um estimador de erro, que é uma quantidade global. Os indicadores de erro fornecem uma estimativa sobre a distribuição relativa do erro na discretização. O estimador de erro é uma avaliação aproximada do erro global da solução.

Em processos p-adaptativos, pode-se usar um critério de refinamento bastante simples (RIBEIRO [9], ZIENKIEWICZ [6]). Calcula-se os indicadores de erro para os possíveis novos graus de liberdade e são refinados todos os elementos em que o indicador seja maior do que uma dada fração do maior indicador da solução. Isto é, são refinados todos os elementos em que

$$\lambda_j \geq \alpha \lambda_{\max} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{III.4})$$

onde λ_j indicador de erro do elemento j
 λ_{\max} maior indicador na solução atual
 α constante fornecida pelo usuário

A constante α controla o número de graus de liberdade introduzidos a cada solução. Para $\alpha = 0$ ocorre refinamento completo, isto é, refina-se todos os elementos e perde-se a característica auto-adaptativa da solução. Para $\alpha = 1$ é refinado apenas o elemento que possui o maior indicador de erro. A taxa de convergência neste caso é ótima, porém o custo de um grande número de soluções pode tornar-se excessivo.

O valor ideal para α é dependente do problema. No entanto, seu valor não é crítico no sentido de que α não influencia na precisão da solução e obtem-se boas taxas de convergência com α dentro de uma larga faixa. Tem sido

utilizado

$$0.25 \leq \alpha \leq 0.75$$

(III.5)

com bons resultados.

A escolha da malha inicial não é tão importante nos métodos auto-adaptativo quanto nos métodos convencionais. No entanto, é essencial que a geometria e as condições de contorno sejam bem representadas, sob pena de introduzir-se erros de modelação que o refinamento auto-adaptativo não pode corrigir.

O método p-adaptativo é particularmente adequado a modelar condições de contorno complexas, pois a incógnita e a grandeza prescrita têm interpolações independentes. A malha inicial influencia no número de novas soluções necessárias para alcançar a tolerância pré-estabelecida, e portanto no custo final da solução. A experiência do usuário continua sendo então um fator importante no custo da solução.

O efeito da malha inicial sobre o erro total da solução é bem menor. Não ocorrendo problemas de oscilação ou saturação nas interpolações de ordem alta, o erro na solução final é pouco afetado pela malha inicial. Os métodos de solução auto-adaptativos mostram-se assim ferramentas poderosas nas mãos de usuários experientes, e são menos sensíveis a inexperiência do que os métodos de análise convencionais.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE ERROS

A análise de erros é a fase matematicamente mais complexa de um processo auto-adaptativo. Para o método dos elementos finitos, existe uma teoria de erros bem desenvolvida (BABUSKA e RHEINBOLDT[3,4]). Para o método dos elementos de contorno, no entanto, a teoria de estimativas de erro a-posteriori têm sido pouco pesquisada (WENDLAND [27], RANK[17]). Os algoritmos tem sido desenvolvidos por argumentação heurística e por analogia a elementos finitos, porém os bons resultados obtidos indicam que esta é uma área promissora, que deve merecer a atenção de pesquisadores com inclinação mais matemática.

Existem três classes de erro em uma solução numérica. O primeiro e mais importante ocorre quando o modelo matemático contínuo é discretizado. Este é o erro que tenta-se minimizar através do refinamento auto-adaptativo. O erro de discretização é a diferença ponto a ponto entre a solução exata e a aproximada, e só pode ser calculado efetivamente quando a solução exata está disponível. Será mostrado entretanto que no método dos elementos de contorno é possível obter-se estimativas deste erro, suficientes para controlar processos auto-adaptativos.

Os erros de origem numérica, como erros de arredondamento, são decorrentes da precisão finita utilizada em computadores digitais. Estes erros são de estimativa

difícil, mas podem ser mantidos dentro de limites toleráveis através da elaboração cuidadosa dos algoritmos numéricos. Finalmente existem os erros oriundos das simplificações envolvidas no estabelecimento dos modelos matemáticos. Estas simplificações são inerentes aos métodos numéricos, e a sofisticação do modelo é determinada de modo a que sejam obtidas boas soluções com o mínimo custo.

As estimativas de erro podem ser a-priori ou a-posteriori. As estimativas a-priori são baseadas no conhecimento prévio das características da solução, e fornecem informações qualitativas sobre a taxa de convergência quando o número de graus de liberdade tende a infinito. Por exemplo, admite-se que o erro em uma discretização seja da forma

$$\| e \| = C h^{\alpha} \quad (\text{IV.1})$$

quando h tende a zero,

onde	h	"diâmetro" do elemento
	$\ e \ $	norma do erro da solução
	C, α	constantes positivas

Em geral não é possível obter-se estimativas do erro local da solução de um problema específico empregando apenas estimativas a-priori. Ainda assim, elas podem ser úteis em um esquema de extrapolação (RENCIS e MULLEN[19], BABUSKA e NOOR[11]).

Estimativas de erro a-posteriori são calculadas com in-

formações obtidas durante o processo de solução. Desta forma, são consideradas as características individuais e pode-se obter boas estimativas para o erro de um problema particular. As estimativas a-posteriori geralmente baseiam-se no cálculo dos resíduos das soluções aproximadas.

O conceito básico na estimativa de erros a-posteriori consiste em relacionar o resíduo das soluções aproximadas com o erro destas soluções, conforme proposto por ZIENKIEWICZ [6] para elementos finitos

Admite-se soluções aproximadas para $u(x)$ e $q(x)$:

$$u_j(x) \simeq \tilde{u}_j(x) = \sum_{k=0}^{m_{ju}} a_k^j N_k(x) \quad x \in \Gamma_q \quad (IV.2)$$

$$q_j(x) \simeq \tilde{q}_j(x) = \sum_{k=0}^{m_{jq}} b_k^j N_k(x) \quad x \in \Gamma_u \quad (IV.3)$$

A equação integral (II.9) para o problema de potencial torna-se :

$$r(\xi) = c\tilde{u}(\xi) + \int_{\Gamma_q} \tilde{u}(x) q^*(\xi, x) d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \tilde{u}(x) q^*(\xi, x) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \tilde{q}(x) u^*(\xi, x) d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \tilde{q}(x) u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (IV.4)$$

onde o ponto fonte ξ foi suposto localizar-se em Γ_q , o que pode ser feito sem perda de generalidade.

As soluções aproximadas $\tilde{u}(x)$ e $\tilde{q}(x)$ não satisfazem exa-

tamente a equação integral (II.9), o que origina o resíduo $r(\xi)$. O resíduo é nulo nos pontos de colocação, pois esta condição é imposta no estabelecimento do sistema de equações (II.24). Em qualquer ponto do contorno, o resíduo pode ser calculado através da forma discretizada da equação (IV.4), isto é :

$$r(\xi) = \sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^{m_{ju}} \hat{h}_{ij}^k \tilde{a}_{jk}^j - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_{jq}} g_{ij}^k \tilde{b}_{jk}^j + \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_{ju}} \hat{h}_{ij}^k \bar{a}_{jk}^j - \sum_{j \in \Gamma_q} \sum_{k=0}^{m_{jq}} g_{ij}^k \bar{b}_{jk}^j \quad (IV.5)$$

RANK [16] propõe que os indicadores de erro sejam calculados por :

$$\lambda_j = \int_{\Gamma_j} \left[r(\eta) + \frac{\partial r}{\partial s}(\eta) \right]^2 d\Gamma \quad (IV.6)$$

baseado em um teorema (RANK [16]) que limita a norma do erro em um espaço de Sobolev H^r em função do resíduo da solução.

Com base na expressão (IV.6), neste trabalho foi empregado como indicador de erro a expressão

$$\lambda_j = \int_{\Gamma_j} r(\eta)^2 d\Gamma \quad (IV.7)$$

A integração desta expressão é realizada numericamente, pois a variação do resíduo ao longo do elemento é arbitrária.

O refinamento auto-adaptativo necessita de um critério de parada. Neste trabalho utilizou-se o somatório dos indicadores em todos os elementos, o que equivale à integração do quadrado do resíduo ao longo do contorno. Para a solução exata, esta integral é nula, e o refinamento é interrompido quando esta integral for menor do que uma tolerância pré-estabelecida, isto é, quando

$$\int_{\Gamma} r(\eta)^2 d\Gamma < \text{TOL} \quad (\text{IV.8})$$

onde TOL é uma tolerância estabelecida pelo usuário.

A expressão (IV.8) não é adimensional. Para que seja possível fornecer uma tolerância invariante em relação ao sistema de unidades empregado no problema, a expressão (IV.8) foi modificada para :

$$\frac{\int_{\Gamma} r(\eta)^2 d\Gamma}{L \int_{\Gamma} u(x) q(x) d\Gamma} < \text{TOL} \quad (\text{IV.9})$$

onde L é o perímetro do contorno Γ

$$\int_{\Gamma} u(x) q(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{u}(x) q(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} u(x) \bar{q}(x) d\Gamma$$

$u(x)$ e $q(x)$ são as soluções aproximadas

A solução fundamental u^* é adimensional. Desta forma o

termo a esquerda da expressão (VI.9) também será adimensional, e foi empregado como estimador de erro.

Outros critérios de parada acessórios podem ser empregados. Por exemplo, pode-se acompanhar a convergência das soluções aproximadas e interromper o refinamento quando a diferença entre soluções sucessivas for menor do que uma tolerância pré-estabelecida.

Pode-se também verificar a convergência da integral do quadrado do resíduo ao longo do contorno. Será mostrado no capítulo VI que a interpretação destes resultados não é trivial. A relação entre estes critérios de parada e o erro real da solução ainda não está bem definida, em contraste ao que ocorre com elementos finitos.

Os critérios de parada acessórios são úteis para evitar que o refinamento p-adaptativo efetue soluções que não melhoram significativamente a precisão das respostas. Isto pode ocorrer, por exemplo, em problemas com singularidades se forem estabelecidas tolerâncias excessivamente baixas. Nestes casos, depois que os elementos com singularidades atingem a maior ordem permissível para as funções de interpolação, o potencial de aproximação da malha original foi esgotado. Para obter-se soluções mais precisas é necessário subdividir os elementos originais.

O cálculo do resíduo em um ponto é uma operação relativamente cara. Seu custo é equivalente ao da montagem

de uma nova equação na matriz de coeficientes do sistema. O cálculo dos indicadores (IV.8) exige a integração do resíduo ao longo do elemento, o que encarece ainda mais a análise de erros, pois torna-se necessário avaliar o resíduo em vários pontos de cada elemento.

O custo elevado não inviabiliza o método porque os elementos p-adaptativos representam bem comportamentos complexos das incógnitas. A discretização do contorno é feita então com relativamente poucos elementos, em comparação a uma discretização com elementos convencionais. O cálculo dos indicadores, apesar de caro, é feito para relativamente poucos elementos, tornando o custo da análise de erros aceitável.

Para problemas de grande porte, o tempo de resolução do sistema de equações é preponderante no custo da solução. O processo auto-adaptativo evita que equações desnecessárias sejam montadas, e a economia decorrente é outro fator que justifica o custo da análise de erros.

No método dos elementos finitos trabalha-se com operadores diferenciais. O cálculo de resíduos pode ser feito de maneira local (RIBEIRO [9]). Em elementos de contorno, os operadores são integrais, e cálculo do resíduo em um ponto implica em uma integração ao longo de todo o contorno (IV.6). Isto faz com que o cálculo de indicadores em elementos finitos seja relativamente mais eficiente do que em elementos de contorno. Outra vantagem do método dos ele-

mentos finitos é que por ser uma técnica de Galerkin a integração do resíduo ao longo do elemento fica implícita nas expressões dos indicadores.

O método dos elementos de contorno também pode ser implementado por uma técnica de Galerkin (PAULA [34], MARQUES [26]), e os indicadores de erro para este caso também não requerem integração explícita do resíduo (UMETAMI[20]). Esta técnica no entanto requer integrações numéricas duplas em problemas unidimensionais portanto mais caras do que no método dos elementos de contorno por colocação (UMETAMI[20], MARQUES [26]), e deve-se estudar cuidadosamente o problema para verificar se a economia na análise de erros justifica o custo de montagem de coeficientes muito mais alto.

CAPÍTULO V

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

V.1) Introdução

O método dos elementos de contorno p-adaptativo foi implementado em microcomputador na linguagem Pascal. O programa resolve problemas de potencial bidimensionais estacionários, e possui aproximadamente 3000 linhas de código fonte e 60K bytes de código executável. Durante a elaboração do programa procurou-se aplicar técnicas modernas de programação e gerenciamento de memória, obtendo-se um programa organizado e eficiente no emprego de recursos computacionais.

A discretização do contorno é feita com elementos retos. As ordens de interpolação para as incógnitas e condições de contorno são independentes, e podem variar entre elementos distintos. Na primeira solução, as incógnitas são interpoladas linearmente em todos os elementos, e a ordem de interpolação é incrementada sequencialmente nos elementos indicados na análise de erros.

A linguagem Pascal apresenta várias vantagens no desenvolvimento de programas de pequeno e médio porte. A simplicidade, a estruturação natural do código e dos dados e os ambientes de desenvolvimento de alta qualidade permitem grande produtividade e estimulam a criatividade do programador. Além disso, a portabilidade de um programa em Pascal

é equivalente a de outras linguagens comuns à programação científica. O principal problema da linguagem Pascal é seu relativo desconhecimento no meio da engenharia.

V.2) Estrutura de dados

Estruturar dados significa, resumidamente, organizar as variáveis do programa de tal maneira que as grandezas relacionadas logicamente fiquem agrupadas. As únicas estruturas de dados disponíveis em FORTRAN são vetores uni ou multi-dimensionais, o que restringe grandemente a liberdade do programador.

Em linguagens mais modernas, o programador pode definir estruturas de dados muito mais versáteis. Em Pascal, por exemplo, pode-se definir tipos de variáveis em função dos tipos primitivos da linguagem, criando variáveis que sejam mais adequadas a cada problema específico. Pode-se também definir estruturas compostas por variáveis de tipos diferentes, que são chamados "records" em Pascal e "structures" na linguagem C.

Nesta implementação, por exemplo, o armazenamento de informações foi organizado em função dos elementos. Foi definido um tipo estruturado que concentra os principais dados de cada elemento. A definição deste tipo é :

```

elemento = record
    numero          : integer ;
    conectividade   : array[ 0..1 ] of node ;
    comprimento     : double ;
    tipo_con        : cond_type ;
    ordem_CC        : integer ;
    ordem_atual     : integer ;
    indicador       : double ;
    glnum           : array[ 0.. 1 ] of integer ;
    offset          : integer ;
    proximo         : pointer_to_element ;
end ;

```

A maior parte dos componentes desta estrutura é auto-explicativo. A função de alguns componentes menos óbvios é :

```

tipo_con - tipo da condição de contorno
ordem_CC - ordem da condição de contorno
ordem_atual - ordem da interpolação da incógnita
indicador - indicador de erro

glnum - matriz de 2 componentes que contém o
        número das equações correspondentes às
        funções lineares.

offset - número da equação a partir da qual
        estão montadas as equações correspon-
        dentes às funções de ordem superior.

próximo - apontador para o próximo elemento na
        lista de elementos

```

Em uma variável estruturada como um elemento, pode-se acessar cada campo individualmente ou trabalhar com a variável completa. Quando um elemento é passado para uma subrotina, automaticamente permite-se acesso a seus dados,

enquanto o acesso a informações de outros elementos permanece bloqueado. Este tipo de programação é intrinsecamente seguro, pois é muito difícil alterar dados inadvertidamente.

A área de armazenamento na memória central requerida para um problema específico só pode ser determinada durante a execução do programa. Alocando-se memória no tempo de execução reserva-se apenas a quantidade de memória estritamente necessária a cada problema. Isto permite que o programa seja executado em máquinas diferentes aproveitando ao máximo a memória disponível em cada uma.

Nesta implementação o armazenamento de dados é realizado em listas simplesmente encadeadas (TENENBAUM e AUGENSTEIN [28], SCHIMTZ e TELES [29]). Esta é uma das estruturas de tamanho variável mais simples, porém é versátil e pode ser facilmente programada em linguagens que permitem alocação dinâmica de memória (Pascal e C, por exemplo). Os itens de uma lista simplesmente encadeada só podem ser acessados sequencialmente, a partir da raiz da lista, pois o acesso a cada item é feito por um apontador contido no item anterior (SCHIMTZ e TELES[29]). Isto não causou dificuldades no desenvolvimento porque em programas de análise numérica grande parte do acesso aos dados é feito de forma sequencial.

V.3) Solução fundamental

A solução fundamental para problemas de potencial bi-dimensional, considerando domínio infinito é (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2])

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (V.1)$$

onde r é a distância entre ξ e x .

Em geral, esta expressão é introduzida literalmente nos programas de computador. Estes programas apresentam uma propriedade indesejável, as respostas dos problemas variam com mudanças nos sistemas de unidades por um fator diferente do fator de conversão entre as unidades adotadas.

Isto acontece porque o logaritmo na expressão (V.1) deve ser aplicado a uma termo adimensional. Assim, supõe-se que a constante 1 na solução fundamental apresente implicitamente dimensão de comprimento. Entretanto, quando altera-se a unidade de comprimento, o valor numérico de $\ln(1/r)$ também muda.

Por exemplo, pode-se supor que o mesmo problema seja resolvido com dois sistemas de unidades, A e B, e que no sistema A a unidade de comprimento seja α vezes a unidade de comprimento em B, isto é :

$$r_A = \alpha r_B \quad (V.2)$$

onde o subscrito indica qual sistema de unidades esta sendo empregado.

No sistema A, a solução fundamental é :

$$u_A^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_A} \right) \quad (V.3)$$

e no sistema B

$$u_B^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_A} \right) + \frac{1}{2\pi} \ln(\alpha) \quad (V.4)$$

Comparando as equações (V.4) e (V.3) verifica-se que a mudança nas unidades de comprimento equivale a adição de uma constante à solução fundamental original.

O efeito na resposta da mudança de unidades pode ser determinado analisando-se a equação integral (II.15) nos dois sistemas de unidades. No sistema A, a equação é :

$$cu(\xi) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) u_A^*(\xi, x) d\Gamma \quad (V.5)$$

e no sistema B

$$cu(\xi) + \int_{\Gamma} u(x) q^*(\xi, x) d\Gamma = \int_{\Gamma} q(x) u_A^*(\xi, x) d\Gamma + \int_{\Gamma} q(x) k d\Gamma \quad (V.6)$$

onde $k = \frac{1}{2\pi} \ln(\alpha)$

$$q^* = \frac{\partial u_A^*}{\partial n} = \frac{\partial u_B^*}{\partial n}$$

As equações (V.6) e (V.5) diferem pelo termo

$$k \int_{\Gamma} q(x) \, d\Gamma \quad (V.7)$$

que para k diferente de zero só é nulo quando a integral de $q(x)$ ao longo do contorno for identicamente nula, isto é, quando a solução estiver equilibrada.

O método dos elementos de contorno não garante equilíbrio na solução, porém quando a resposta tende à solução exata, a solução tende ao equilíbrio e conseqüentemente, o termo (V.7) tende a zero. Em programas com elementos de contorno isoparamétricos, o efeito da mudança de unidades é praticamente imperceptível. As discretizações empregadas geralmente fornecem soluções suficientemente equilibradas tais que o termo (V.7) é desprezível.

Nas formulações auto-adaptativas este efeito é importante. O processo de solução usualmente parte de discretizações grosseiras, cujas respostas são relativamente desequilibradas. Mudanças de unidades podem fazer então com que o refinamento ocorra de modo diferente para o mesmo problema.

O cálculo de indicadores de erro baseia-se na integração do resíduo ao longo dos elementos (equação IV.7). Mudanças de unidades de comprimento fazem com que os indica-

dores sejam modificados, alterando seus valores relativos. O critério de refinamento (III.4) pode então levar a resultados distintos para o mesmo problema.

Para evitar esta dependência do sistema de unidades, a solução fundamental foi modificada, a fim de tornar o termo do logaritmo efetivamente adimensional. Foi adotada como solução fundamental a seguinte expressão :

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{\bar{\Gamma}}{r} \right) \quad (V.8)$$

onde $\bar{\Gamma}$ é o comprimento médio dos elementos da malha.

V.4) Cálculo de coeficientes

O cálculo dos coeficientes de influência h_{ij}^k e g_{ij}^k é crítico na eficiência computacional de um programa de elementos de contorno. Deve-se calcular as integrais

$$h_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(x) q^*(\xi, x) d\Gamma \quad (V.9)$$

e

$$g_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(x) u^*(\xi, x) d\Gamma \quad (V.10)$$

A determinação de expressões analíticas para estas integrais, considerando elementos unidimensionais retos, é viável, mesmo para funções de forma N_k de ordem alta. CRANK

[17]). A integração numérica no entanto apresenta a vantagem da generalidade, e foi a técnica empregada. Utilizou-se a quadratura gaussiana com número de pontos variável em função da distância entre o ponto fonte e o elemento integrado (integração seletiva).

A integração numérica das expressões (V.9) e (V.10) apresenta dificuldades quando o ponto fonte está sobre ou muito próximo ao elemento integrado. Nestes casos, as funções $u^*(\xi, x)$ e $q^*(\xi, x)$ tornam-se singulares ou quase singulares, e a quadratura gaussiana convencional requer muitos pontos de integração para a obtenção de resultados precisos.

Este problema foi resolvido com a transformação de variáveis cúbica proposta por TELLES[30], que possibilita a integração numérica eficiente de funções singulares ou quase singulares. A transformação é aplicada sobre as coordenadas naturais do elemento, e é da forma

$$\gamma = a\eta^3 + b\eta^2 + c\eta + d \quad (V.11)$$

onde	η	coordenada natural do elemento
	γ	coordenada transformada
	a, b, c, d	parâmetros dependentes da posição relativa entre o ponto fonte e o elemento integrado (TELLES[30])

O acoplamento da transformação cúbica e da integração

seletiva permite uma expressiva redução no custo computacional do cálculo dos coeficientes de influência, e consequentemente no custo final da análise.

V.5) Resolução dos sistemas de equações

Há duas situações distintas onde são resolvidos sistemas de equações. Na primeira solução, correspondente a elementos lineares, resolve-se um sistema de equações convencional, empregando a eliminação gaussiana. Nas soluções posteriores, resolve-se sistemas de equações ampliados, com novas equações correspondentes aos graus de liberdade introduzidos, aproveitando a triangularização efetuada na solução anterior.

A estratégia de resolução dos sistemas de equações ampliados é, basicamente, aplicar a eliminação gaussiana à matriz ampliada, ignorando os termos já triangularizados na solução anterior. Isto pode ser feito porque os pivôs necessários à triangularização dos novos termos são resultados intermediários da eliminação anterior, e ficam automaticamente armazenados na submatriz triangular inferior da matriz de coeficientes da solução anterior.

O processo adaptativo é controlado através das variáveis INICIO e TAMANHO (figura V.1). A variável INICIO indica o número da equação onde é iniciada a eliminação, e

TAMANHO contém o número total de equações para cada solução. Em cada solução, INICIO é atualizada para o tamanho da solução anterior mais um, e TAMANHO é atualizada para o tamanho anterior mais o número de novas equações da solução. O algoritmo de solução dos sistemas ampliados é descrito a seguir :

```

AdapSolv( INICIO, TAMANHO ) ;
para nível : 1 até INICIO - 2 faça
    para linha := nível + 1 até INICIO faça
        para coluna := INICIO até TAMANHO faça
            Elim( linha, coluna, nível ) ;
        Fim ;
    Fim ;
para linha := INICIO até TAMANHO faça
    para coluna := nível + 1 até TAMANHO faça
        Elim( linha, coluna, nível ) ;
    Fim ;
Fim ;
para nível := INICIO até TAMANHO - 1 faça
    Pivotamento ;
    para linha := nível + 1 até TAMANHO faça
        para coluna := nível + 1 até TAMANHO faça
            Elim( linha, coluna, nível ) ;
        Fim ;
    Fim ;
Fim ;
Retro-Substituição ;
Fim ;

```

Elim (linha, coluna, nível) é a operação básica eliminação gaussiana , que pode ser representada por :

Elim(i, j, n) ;

$K[i, j] := K[i, j] - \frac{K[i, n]}{K[n, n]} * K[n, j] ;$

Fim ;

O vetor independente também deve ser modificado durante a eliminação. O procedimento é idêntico ao realizado sobre os coeficientes da matriz K, e não foi representado no algoritmo para simplificá-lo.

O algoritmo de solução necessita que as novas equações sejam acrescentadas sequencialmente ao sistema (figura V.2 a). Este não é o caso, pois as novas equações surgem em função da análise de erros, e suas posições físicas no sistema de equações dependem do número do elemento e da ordem da função de interpolação correspondente (figura V.2 b). Este problema foi resolvido com a introdução de dois vetores apontadores, um para linhas, outro para colunas, que mapeiam a organização lógica (figura V.2 a) no arranjo físico (figura V.2 b).

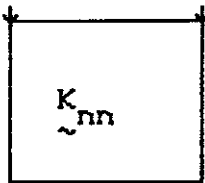
Desta maneira, durante a resolução dos sistemas de equações, todo acesso a coeficientes deve ser realizado por meio dos vetores apontadores, por exemplo,

$K[al[linha], ac[coluna]]$

onde al e ac são os vetores apontadores para linhas e colunas, respectivamente.

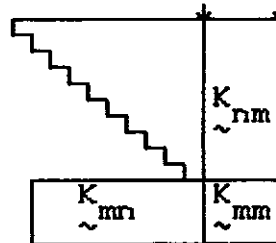
Foram utilizados dois vetores porque o vetor apontador para linhas é utilizado no pivotamento. Na eliminação gaussiana, o pivotamento é importante para a estabilidade da resolução do sistema. Obviamente, só é possível realizar pivotamento parcial, entre novas equações de cada solução, pois as anteriores já foram triangularizadas e as novas ainda não foram montadas. O pivotamento é realizado sem movimento físico de coeficientes, são trocados apenas os componentes do vetor apontador correspondentes as linhas que devem ser trocadas

INICIO TAMANHO



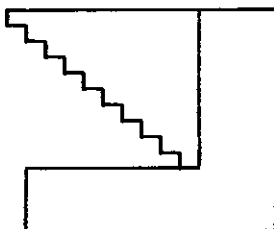
(a)

INICIO TAMANHO

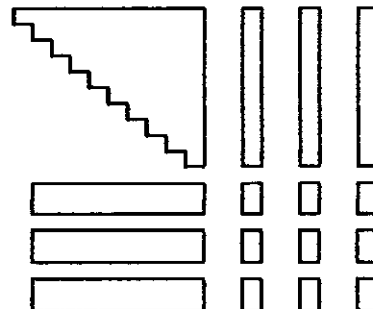


(b)

figura V.1 Matriz de coeficientes



(a) Lógica



(b) Física

figura V.2 Organização dos coeficientes

V.6) Novas equações

A cada nova solução são acrescentadas equações ao sistema. Para montar uma nova equação é necessário escolher a posição do ponto fonte. No método dos elementos de contorno hierárquico os pontos fonte não estão associados a nós, e podem em princípio ser posicionados em qualquer ponto do contorno não coincidente com outro ponto fonte. Na prática, os pontos fonte são colocados no elemento que está sendo refinado, de preferência próximos aos máximos das funções de interpolação correspondentes.

O posicionamento dos pontos fonte foi realizado de maneira muito simples, que contudo fornece resultados satisfatórios. Criou-se uma tabela para a coordenada natural do ponto fonte em função da ordem da função de interpolação correspondente. Esta técnica claramente não leva em consideração características específicas da solução, mas isto não parece comprometer a precisão dos resultados. O verdadeiro efeito do posicionamento do ponto fonte na precisão da resposta, considerando que são usadas funções de interpolação de ordem alta e transformação cúbica de variáveis, é um problema complexo que não foi tratado neste trabalho.

V.7) Análise de erros

O cálculo de indicadores de erro requer integração do resíduo ao longo de cada elemento (equação IV.7). Foi utilizada integração por quadratura gaussiana, com número de pontos de Gauss igual em todos os elementos e mantido fixo em todas as soluções.

Como o cálculo do resíduo em um ponto fonte é relativamente caro, aproveitou-se o fato do resíduo ser calculado sempre nos mesmos pontos para tornar mais eficiente a determinação dos indicadores de erro. Antes do refinamento auto-adaptativo, são calculados todos os coeficientes da equação (IV.3) para todos os pontos de integração do resíduo. Os coeficientes são então armazenados em um arquivo sequencial em memória secundária.

Desta forma, os coeficientes são calculados apenas uma vez, e reaproveitados em todas soluções adaptativas. O verdadeiro efeito sobre a velocidade de execução do programa depende, obviamente, da relação entre o tempo gasto no sistema de entrada e saída e o tempo de cálculo do resíduo. Para a configuração particular onde o programa foi desenvolvido (micro-computador, co-processador de ponto flutuante e disco rígido), a gravação de coeficientes em memória secundária é mais vantajosa.

CAPÍTULO VI

Aplicações

VI.1) Introdução

Neste capítulo apresenta-se exemplos de problemas de potencial resolvidos pelo programa desenvolvido nesta tese.

São discutidos problemas cujo comportamento da solução é suave e problemas que possuem singularidades nas respostas, potencialmente mais complexos para a formulação p-adaptativa.

Verificou-se de modo geral o excelente poder de aproximação dos elementos de contorno p-adaptativos, que evidencia-se no pequeno número de elementos empregados nas discretizações.

VI.1) Exemplo 1

A fim de determinar a precisão das respostas fornecidas pelo programa, foram resolvidos exemplos constituídos por funções conhecidas que atendem a equação de Laplace (equação II.1).

Para o primeiro teste, foi utilizada a função :

$$u(x,y) = x^3 - 3 \times y^2 \quad (VI.1)$$

no domínio $0 \leq x \leq 3$

$0 \leq y \leq 3$

Pode-se verificar facilmente que o laplaciano desta função é nulo.

A malha empregada na solução deste problema foi a mais simples possível, com apenas 4 elementos (figura VI.1).

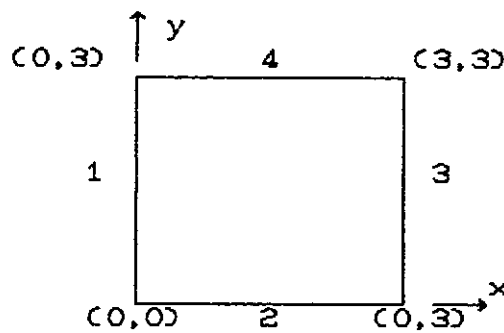


figura VI.1 - Malha de elementos de contorno para exemplo 1

O potencial e o fluxo na direção normal podem ser facilmente calculados a partir da função (VI.1) para os quatro elementos da malha (tabela VI.1).

elem.	u	$\frac{\partial u}{\partial n}$
1	0	$3y^2$
2	x^3	0
3	$27 - 9y^2$	$27 - 3y^2$
4	$x^3 - 27x$	$-18x$

tabela VI.1 Solução exata

Com esta função foram resolvidos os problemas de Dirichlet (potencial prescrito ao longo de todo contorno) e

Cauchy (condições de contorno mistas).

Como as interpolações para incógnitas e condições de contorno são independentes, é possível representar exatamente os valores prescritos em cada elemento (tabela VI.2).

problema	Dirichlet		Cauchy	
elemento	tipo	ordem	tipo	ordem
1	\bar{u}	1	\bar{u}	1
2	\bar{u}	3	\bar{q}	1
3	\bar{u}	2	\bar{q}	2
4	\bar{u}	3	\bar{q}	1

\bar{u} - potencial prescrito

\bar{q} - fluxo prescrito

tabela VI.2 Tipo e ordem das condições de contorno

As condições de contorno estão representadas graficamente nas figuras (VI.2) e (VI.3). Na figura (VI.3), problema de Cauchy, está explicitado também o tipo da condição prescrita em cada elemento.

Nas figuras deste exemplo o contorno foi linearizado, isto é, no eixo X dos gráficos está representada a coordenada natural dos elementos, e os elementos foram alinhados sequencialmente a partir do primeiro.

As tabelas (VI.3) e (VI.4) apresentam o resultado da análise de erros.

Os resultados da análise de erros podem ser melhor interpretados nas tabelas (VI.5) e (VI.6), que contém a relação percentual entre cada indicador e o maior indicador da solução, calculada a partir das tabelas (VI.3) e (VI.4).

	Elemento 1	2	3	4
Sol. 1	2,895	$8,406 \times 10^{-4}$	3,016	$2,025 \times 10^{-3}$
2	$6,015 \times 10^{-4}$	$5,271 \times 10^{-5}$	$3,205 \times 10^{-3}$	$2,574 \times 10^{-5}$

tabela VI.3 Indicadores de erro para problema de Dirichlet.

	Elemento 1	2	3	4
Sol. 1	7,145	42,23	142,7	41,41
2	3,862	23,79	0,0293	23,18
3	1,986	0,4683	$2,023 \times 10^{-3}$	0,4449
4	$4,962 \times 10^{-3}$	0,4018	$1,971 \times 10^{-3}$	$3,782 \times 10^{-3}$
5	$1,029 \times 10^{-3}$	$2,411 \times 10^{-7}$	$3,358 \times 10^{-3}$	$1,230 \times 10^{-2}$

tabela VI.4 Indicadores de erro para Problema de Cauchy

	Elemento 1	2	3	4
Sol. 1	95,99	$2,79 \times 10^{-2}$	100,0	$6,714 \times 10^{-2}$
2	18,77	1,644	100,0	0,8031

tabela VI.5 Indicação relativa - Dirichlet

PROBLEMA DE DIRICHLET

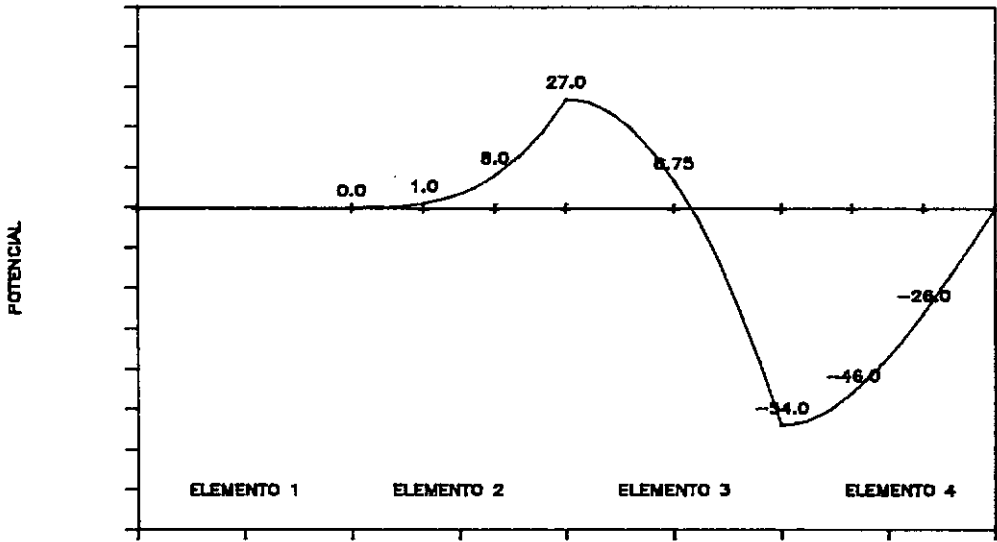


figura VI.2 - Condições de Contorno

PROBLEMA DE CAUCHY

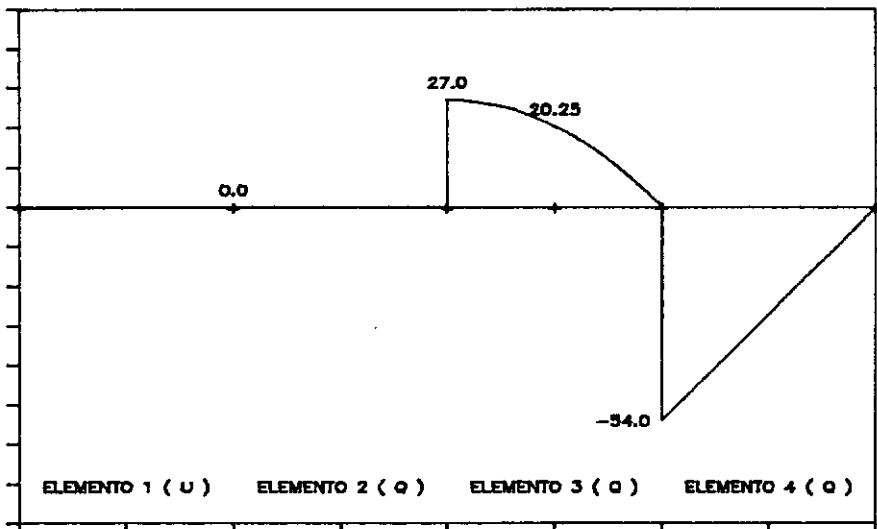


figura VI.3 - Condições de Contorno

Foi empregado o critério de refinamento (III.5), com a constante α igual a 0.5. A história do refinamento pode ser deduzida das tabelas (VI.5) e (VI.6), pois são refinados todos elementos cujos indicadores relativos sejam maiores do que 50% .

	Elemento 1	2	3	4
Sol.1	5,007	29,59	100,0	29,01
2	16,23	100,0	0,1232	97,46
3	100,0	23,58	0,1019	22,40
4	1,235	100,0	0,4905	0,9413
5	8,363	$1,960 \times 10^{-3}$	27,29	100,0

tabela VI.6 Indicação relativa - Cauchy

Para o problema de Dirichlet, as incógnitas são os fluxos da tabela (VI.1). Nos elementos 1 e 3 a solução exata é quadrática. Após a primeira solução, com elementos lineares, a análise de erros indica que estes elementos devem ser refinados (tabela VI.5). A segunda solução é realizada com os elementos 1 e 3 quadráticos.

Para o problema de Cauchy, as incógnitas são o fluxo no elemento 1 e os potenciais nos elementos 2, 3 e 4. Na segunda solução é refinado o elemento 3. Na terceira são refinados os elementos 2 e 4. Na quarta solução é refinado o elemento 1 e a malha fica então com todos elementos quadráticos. Finalmente, na última solução, são refinados os elementos 2 e 4, que passam a ter interpolações cúbicas. A configuração da malha final corresponde assim à solução exata.

O refinamento p-adaptativo foi interrompido pelo usuário quando a solução atingiu a configuração da solução exata. Desta forma pode-se obter um primeiro parâmetro para o estabelecimento de tolerâncias de parada, observando-se os estimadores de erro que correspondem à solução exata. Os estimadores de erro nas soluções finais foram :

$$\text{Dirichlet} - 1,312 \times 10^{-7}$$

$$\text{Cauchy} - 3,410 \times 10^{-7}$$

Nas figuras (VI.4) estão representadas as malhas finais para os dois problemas.

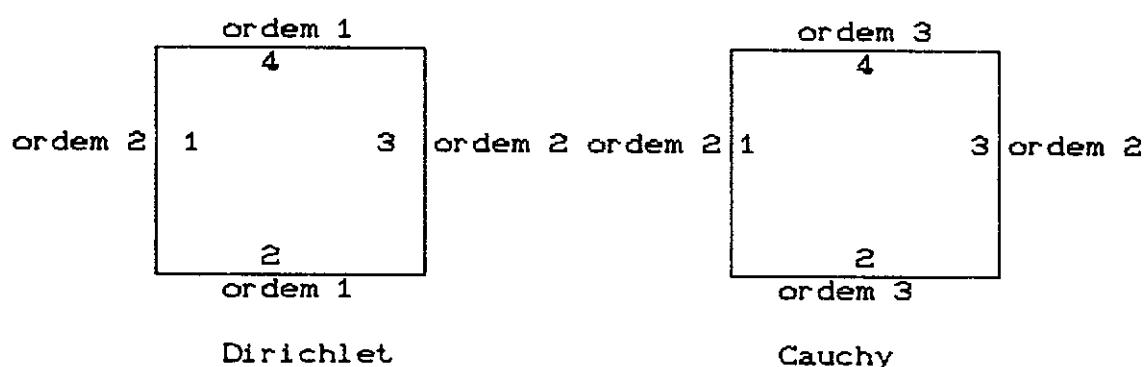


figura VI.4) Ordens de interpolação finais

Nas figuras (VI.5) (VI.6) são mostradas para os problemas de Dirichlet e Cauchy, as soluções exatas, a primeira e a última soluções p-adaptativas. Pode-se verificar que, a menos da resolução do equipamento de saída gráfica, as soluções finais e exatas coincidem. Para melhor avaliação da precisão dos resultados, deve-se analisar as tabelas (VI.7) e (VI.8). Na figura (VI.5) não foram mostrados os elementos 2 e 4 porque a solução exata é linear

e as respostas coincidem praticamente desde a primeira solução.

Elm.	Tipo	η	Exata	p-Adap.
1	q	-1	27,00	27,059
		0	6,75	6,7447
		1	0,00	0,0096
2	q	-1	0,00	0,058
		1	0,00	-0,022
3	q	-1	27,00	27,070
		0	20,25	20,231
		1	0,00	0,1023
4	q	-1	-54,00	-54,054
		1	0,00	-0,0087

tabela VI.7 Soluções - Dirichlet

O potencial foi calculado para 11 pontos internos regularmente distribuídos sobre a reta $x = y$. Novamente obteve-se excelentes resultados, como pode ser constatado na figura (VI.7) e tabela (VI.9).

Neste exemplo empregou-se as funções de interpolação de Peano (II.38). Os quatro elementos foram interpolados nos nós inicial e final, isto é, para cada canto foram montadas duas equações, uma para cada elemento. A coordenada natural dos pontos fonte correspondentes às funções lineares foi $\eta = 0,934$.

PROBLEMA DE DIRICHLET

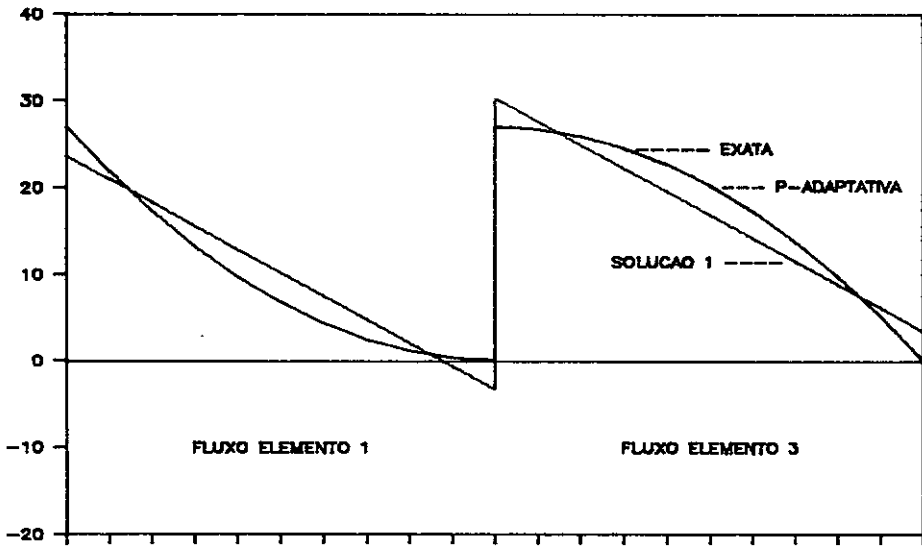


figura VI.5 - Soluções

PROBLEMA DE CAUCHY

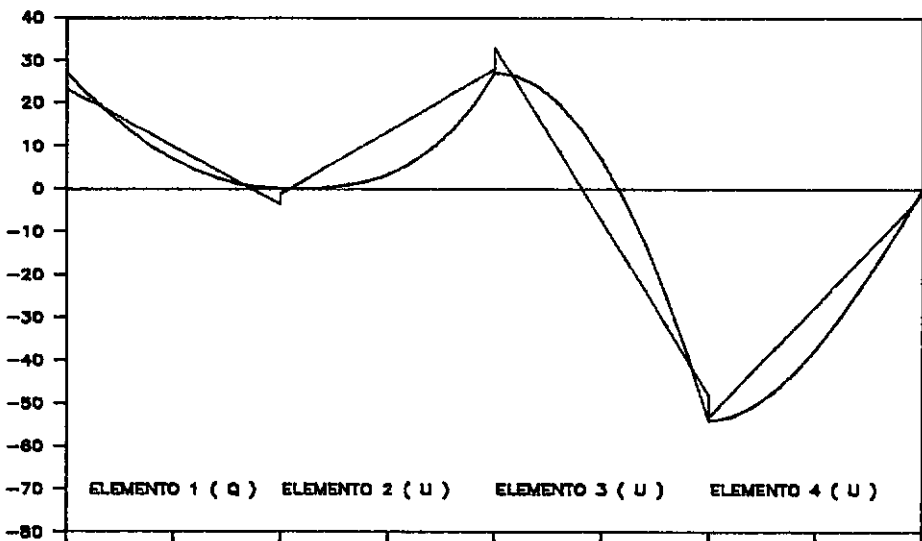


figura VI.6 - Soluções

Elm.	Tipo	η	Exata	p-Adap.
1	q	-1	27,00	27,004
		0	6,75	6,7504
		1	0,00	-0,0046
2	u	-1	0,00	0,0001
		-1/3	1,00	1,0051
		1/3	8,00	8,0099
		1	27,00	27,007
3	u	-1	27,00	26,997
		0	6,75	6,7843
		1	-54,00	-53,984
4	u	-1	-54,00	-54,035
		-1/3	-46,00	-45,864
		1/3	-26,00	-26,142
		1	0,00	0,0826

tabela VI.8 Solução exata X p-Adaptativa - Cauchy

Ponto	X	Exata	p-Adap.
1	0,25	-0,03125	-0,0245
2	0,50	-0,25	-0,2446
3	0,75	-0,84375	-0,8392
4	1,00	-2,00	-1,9963
5	1,25	-3,90625	-3,9034
6	1,50	-6,75	-6,7482
7	1,75	-10,7187	-10,718
8	2,00	-16,00	-16,000
9	2,25	-22,7812	-22,782
10	2,50	-31,25	-31,251
11	2,75	-41,5937	-41,592

Solução exata : $u_i = -2x^3$

tabela VI.9 Potencial nos pontos internos

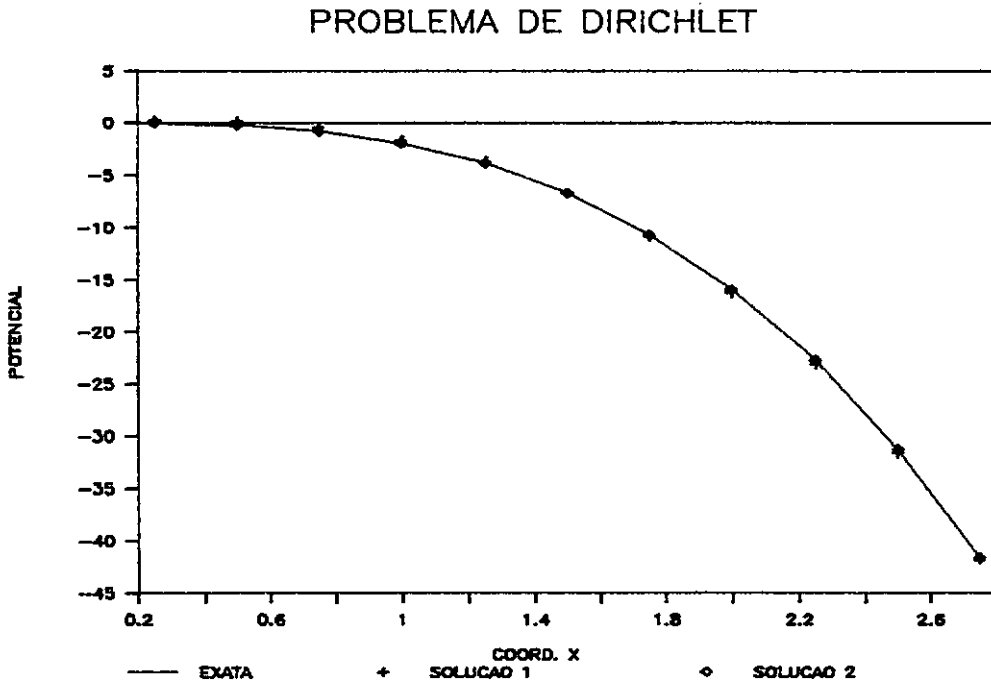


figura VI.7 - Potencial nos pontos
internos

Apesar de sua grande simplicidade, este exemplo foi muito importante para validação da formulação adotada e do programa desenvolvido.

VI.3) Exemplo 2 - Problema de torção

Como segundo exemplo, foi testada uma aplicação prática para a equação de Laplace, a resolução de problemas de torção em barras com eixo reto e seção arbitrária.

Baseando-se no princípio da estacionaridade da energia complementar total, este problema pode ser formulado por (DYM e SHAMES [32]) :

$$\begin{aligned}\nabla^2 \psi(x) &= -2 & x \in \Omega \\ \psi &= 0 & x \in \Gamma\end{aligned}\quad (\text{VI.2})$$

e

$$M = 2 G \theta \int_{\Omega} \psi \, d\Omega \quad (\text{VI.3})$$

onde

- ψ função de tensão
- M momento de torção
- G módulo de elasticidade transversal
- θ ângulo de torção por unidade de comprimento

Para que este problema pudesse ser analisado como um problema de potencial, foi empregada a transformação de variáveis

$$\psi = u - \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \quad (\text{VI.4})$$

assim

$$\nabla^2 \psi = \nabla^2 u - 2 \quad (\text{VI.5})$$

e substituindo a expressão (VI.5) na equação de Poisson (VI.2), obtem-se :

$$\nabla^2 u = 0 \quad x \in \Omega \quad (\text{VI.6})$$

e as condições de contorno tornam-se

$$u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \quad x \in \Gamma \equiv \Gamma_u \quad (\text{VI.7})$$

As expressões (VI.6) e (VI.7) descrevem um problema de potencial. Esta formulação foi aplicada na determinação do momento de torção unitário

$$\frac{M}{G \theta} \quad (\text{VI.8})$$

para uma barra com seção retangular (figura VI.8). O cálculo do momento requer a integração da função ψ no domínio (equação VI.3).

Foi utilizada integração numérica por quadratura gaussiana. A função u foi calculada em pontos internos, correspondentes aos pontos de Gauss para o domínio Ω . Em seguida, foi feita a transformação de variáveis inversa, determinando-se ψ em cada ponto interno. Multiplicando-se os valores de ψ pelos pesos de Gauss foi determinado o momento unitário. Este procedimento foi repetido a cada solução.

O domínio e as condições de contorno são simétricos em relação a x e y . Consequentemente, a solução exata também é simétrica em relação aos eixos coordenados.

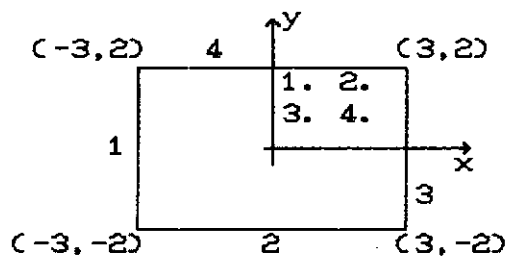


figura VI.8 - Discretização para problema de torção

As condições de contorno, dadas pela equação (VI.7), são quadráticas, e são dadas em função das coordenadas naturais dos elementos na tabela (VI.10).

η	Elementos 1 e 3	Elementos 2 e 4
-1	6,5	6,5
0	4,5	2,0
1	6,5	6,5

tabela VI.10 - Valores de u prescrito no contorno

A função u foi calculada em quatro pontos internos (figura VI.8). Aproveitando-se a dupla simetria da solução, é possível realizar integração de Gauss equivalente a integração com dezesseis pontos. As coordenadas dos pontos internos são dadas na tabela (VI.11), onde χ_i são as coordenadas naturais dos pontos de Gauss para integração unidimensional com quatro pontos.

A sequência de soluções efetuadas pelo refinamento p-adaptativo pode ser estudada na figura (VI.9). Em cada solução estão representados as ordens de interpolação de cada elemento e o número de graus de liberdade total da solução.

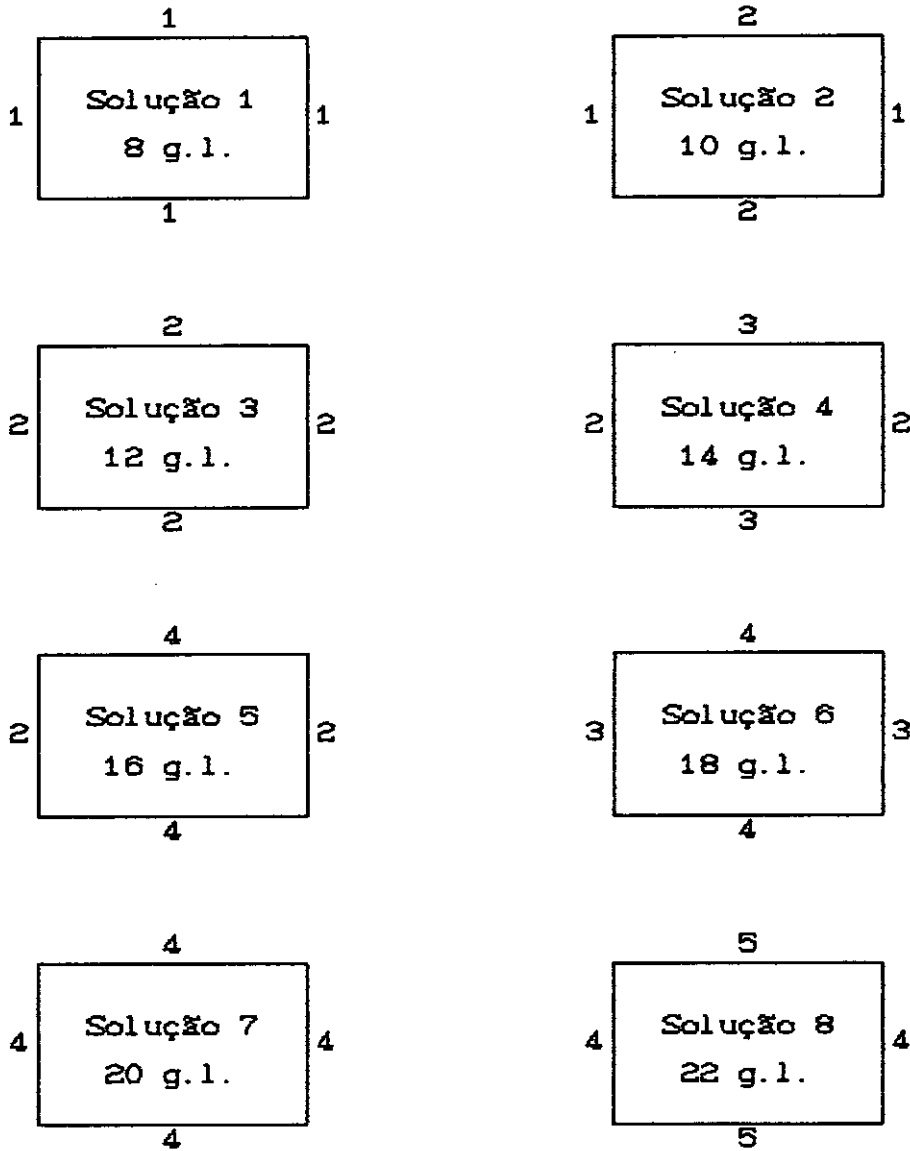


figura VI.9 Sequência de refinamento

O momento de torção unitário calculado para cada solução é mostrado na figura (VI.10), na qual também está representada a solução analítica por série trigonométrica (TIMOSHENKO e YOUNG [32]). A solução analítica é da forma

$$\frac{M}{G\theta} = K_1 a^3 b$$

onde K_1 constante tabelada
 a menor lado
 b maior lado

para $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$; $K_1 = 0,196$ (TIMOSHENKO e YOUNG [32])

portanto

$$\frac{M}{G \theta} = 0,196 * (4)^3 * 6 = 75,3$$

Pode-se observar que o momento calculado por elementos de contorno p-adaptativos converge rapidamente para a solução exata.

ponto	X	Y	
1	$3 \chi_1$	$2 \chi_2$	$\chi_1 = 0,3399810436$
2	$3 \chi_2$	$2 \chi_2$	
3	$3 \chi_1$	$2 \chi_1$	$\chi_2 = 0,8611363116$
4	$3 \chi_2$	$2 \chi_1$	

tabela VI.11 Coordenadas dos pontos internos

Na figura (VI.11) é mostrada a variação do estimador de erro em função do número de equações do sistema. No gráfico do momento de torção, figura (VI.10), percebe-se que a convergência da solução não é monotônica. No gráfico do estimador, figura (VI.11) este fenômeno pode ser visto com maior clareza. Nota-se que das soluções 3 para 4 (12 para 14 equações) e 5 para 6 (16 para 18 equações), o estimador de erro aumenta quando a solução é refinada.

Este comportamento anômalo é facilmente explicável. Como o problema é duplamente simétrico, a solução exata do problema em todos os elementos é dada por funções pares, em relação à origem do sistema de coordenadas naturais do elemento. Na família de funções de interpolação, todas as funções de ordem ímpar (exceto N_1), são funções ímpares em relação às coordenadas naturais. Então, quando a família de funções de interpolação é utilizada para interpolar uma função par, os coeficientes das funções ímpares são nulos, e elas não contribuem para melhorar a aproximação.

Comparando-se as figuras (VI.11) e (VI.9), percebe-se que o aumento no resíduo ocorreu quando a ordem de interpolação em algum elemento passou de ordem par para ordem ímpar.

Como as funções de ordem ímpar não contribuem na aproximação, deveriam aparecer patamares horizontais no gráfico do estimador, que no entanto aumenta. Isto acontece devido a uma particularidade do programa implementado.

O posicionamento dos pontos fonte para as funções de ordem superior é dado por uma matriz que relaciona a coordenada natural do ponto fonte com a ordem da função de interpolação correspondente, parcialmente reproduzida na tabela (VI.11).

Analisando-se na figura (VI.9) o que ocorre quando a solução 3 é refinada, verifica-se que os elementos 2 e 4

passam de interpolações quadráticas para cúbicas. Então nestes dois elementos são introduzidos novos pontos fonte, com coordenada natural $\eta = -0,5$ (tabela VI.11). No elemento 2, $\eta = -0,5$ corresponde a $x = 1,5$, mas no elemento 3, a $x = -1,5$.

ordem N_k	η
2	0,00
3	-0,50
4	0,50
5	-0,25
6	0,25

tabela VI.11 - Posição dos pontos fonte

As posições dos pontos fonte fazem com que a discretização fique assimétrica, o que perturba a solução. Quando os elementos 2 e 4 são novamente refinados, na solução 5, a simetria do problema é restaurada, pois os novos pontos fonte são introduzidos com $\eta = 0,5$ (tabela VI.11, para ordem = 4). Este problema pode ser verificado, por exemplo, comparando-se as respostas no elemento 2 para as soluções 4 e 5, conforme mostrado na tabela (VI.12).

Como a solução exata é simétrica, os valores da tabela (VI.12) deveriam ser iguais para $\pm \eta$. Isto claramente não acontece para a solução 4.

η	Sol. 4	Sol. 5
-1,0	1,4950	1,6638
-0,5	-0,9334	-0,9313
0,0	-1,4823	-1,3813
0,5	-0,6368	0,9313
1,0	1,0940	1,6638

tabela VI.12 - $\frac{\partial u}{\partial n}$ no elemento 2

Este comportamento pode ocorrer em todos os problemas simétricos que forem resolvidos com este programa, porém pode-se diminuir seu efeito com o refinamento da malha.

A momento de torção calculado com a solução 8 foi :

$$M = 75,114$$

para um erro percentual em relação ao momento exato M_0 de :

$$\frac{M - M_0}{M_0} 100 = -0,247 \%$$

Foram utilizados 4 elementos interpolados nos nós inicial e final, com a coordenada dos pontos fonte das funções lineares igual a 0,934. A família hierárquica empregada foi a de Peano (II.38). Na solução final, com 22 equações, o estimador de erro calculado foi

$$\text{Estimador} = 3,289 \times 10^{-7}$$

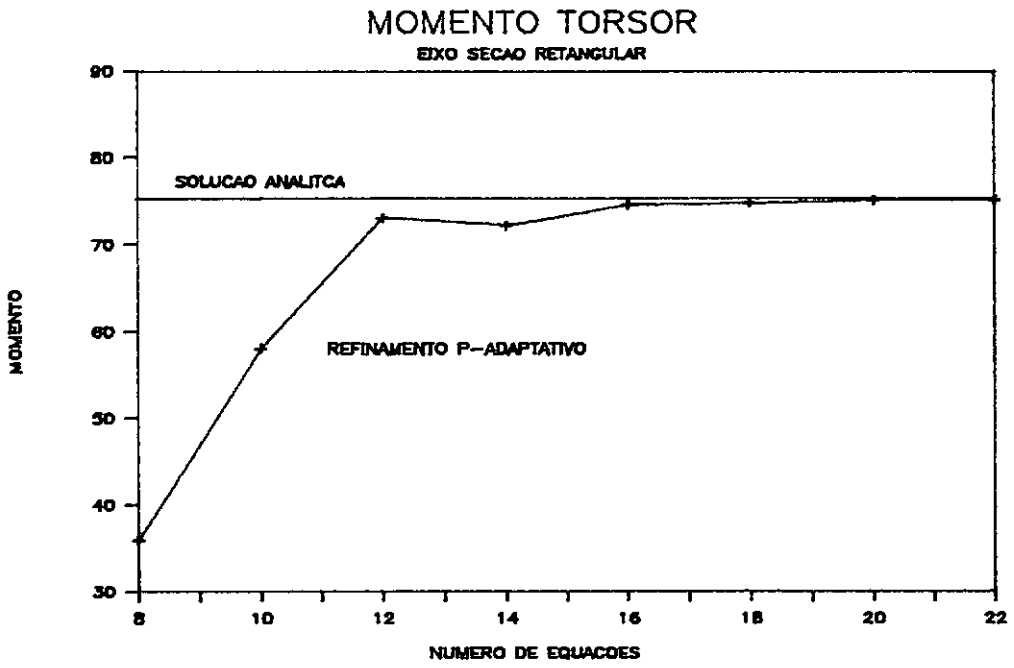


figura VI.10

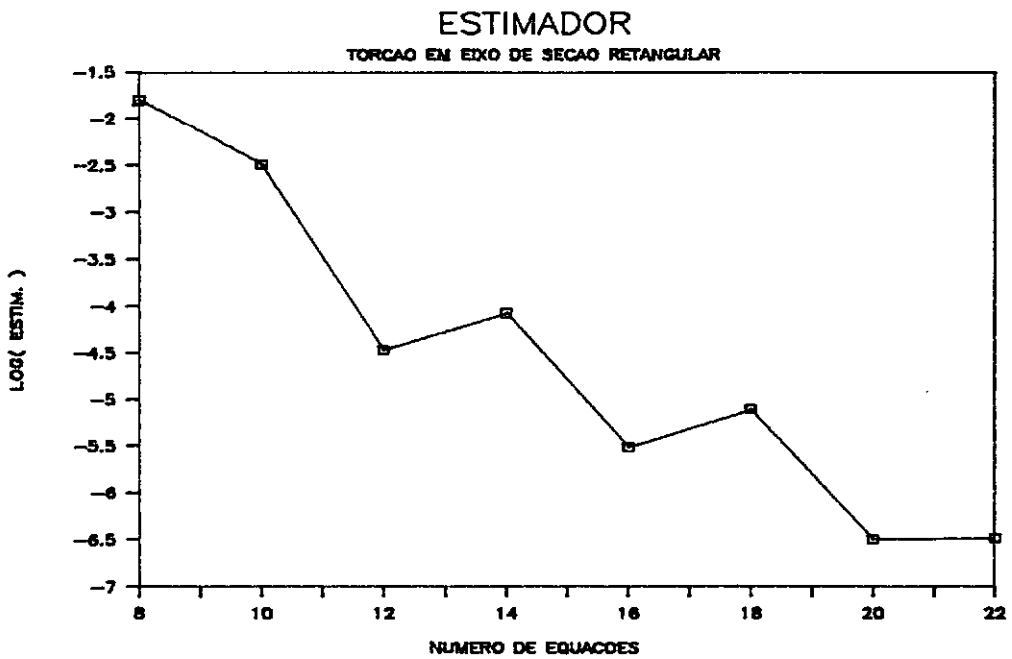


figura VI.11

VI.4) Exemplo 3 - Transferência de calor

Como terceiro exemplo foi analisado um problema de transferência de calor em domínio semi-circular, com condições de contorno prescritas de modo a causar uma singularidade na resposta (figura VI.12).

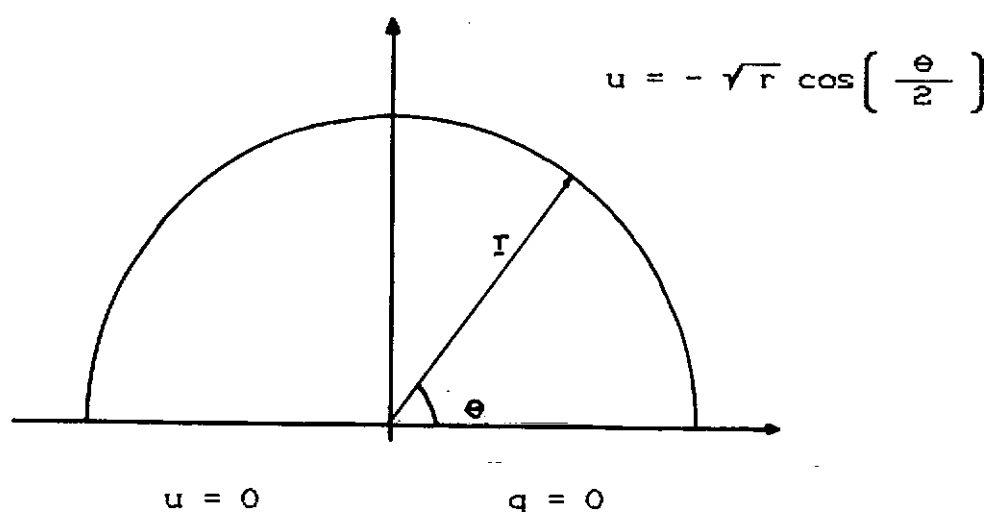


figura VI.12 Problema de transferência de calor

A solução analítica para este problema é

$$u(r, \theta) = -\sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (\text{VI.9})$$

e o fluxo na direção normal no elemento δ (figura VI.13) é:

$$q = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \quad (\text{VI.10})$$

que possui uma singularidade na origem.

Na discretização com elementos de contorno (figura VI.13) procurou-se seguir a filosofia dos métodos auto-adaptativos, empregando o menor número de elementos suficiente para representar adequadamente a geometria e condições de contorno.

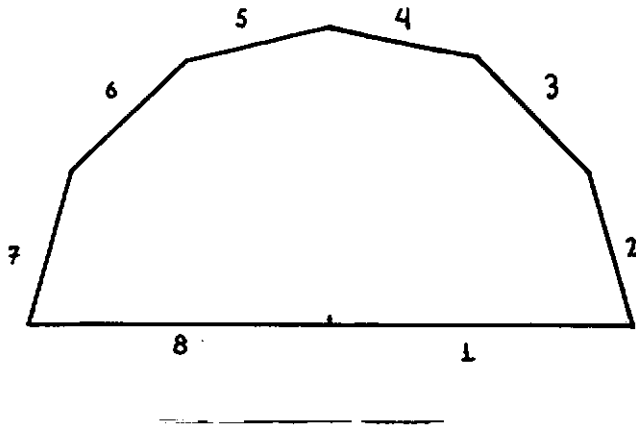


figura VI.13 Malha de elementos de contorno

A fim de que as condições de contorno fossem bem representadas, nos elementos 2 até 7, onde o potencial prescrito é cossenoidal, foi utilizada interpolação quadrática na prescrição dos valores. As condições de contorno estão sumarizadas na tabela (VI.13).

A sequência de refinamento p-adaptativo está resumida na tabela (VI.14).

Como era esperado, o refinamento concentrou-se nos elementos 8 e 1. No elemento 8 a solução analítica é singular e requer ordem de interpolação muito alta. A

solução analítica no elemento 1 é da forma \sqrt{r} . Esta função não é singular, porém possui uma assíntota vertical na origem. Nenhum polinômio possui assíntotas verticais, portanto a interpolação deste tipo de função é relativamente difícil.

elem.	tipo	η	Valor
1	\bar{q}	-1	0,0
		1	0,0
2	\bar{u}	-1	-1,4142
		0	-1,3780
		1	-1,3660
3	\bar{u}	-1	-1,3660
		0	-1,3065
		1	-1,2247
4	\bar{u}	-1	-1,2247
		0	-1,1027
		1	-1,0000
5	\bar{u}	-1	-1,0000
		0	-0,8461
		1	-0,7071
6	\bar{u}	-1	-0,7071
		0	-0,5319
		1	-0,3660
7	\bar{u}	-1	-0,3660
		0	-0,1814
		1	-0,0000
8	\bar{u}	-1	-0,0000
		1	-0,0000

\bar{u} - potencial prescrito

\bar{q} - fluxo prescrito

tabela VI.13 Condições de contorno

A solução final no elemento 8, com interpolação de ordem 10 e algumas soluções intermediárias são mostradas junto a solução analítica na figura (VI.14). Na figura

(VI.15), a solução final esta destacada contra a solução analítica.

Elemento									
Sol.	1	2	3	4	5	6	7	8	nº Eq.
1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
2	1	1	1	1	1	1	1	2	17
3	2	1	1	1	1	1	1	2	18
4	2	1	1	1	1	1	1	3	19
5	3	1	1	1	1	1	1	4	21
6	4	1	1	1	1	1	1	5	23
7	4	1	1	1	1	1	1	6	24
8	4	1	1	1	1	1	1	7	26
9	5	1	2	1	1	1	1	8	28
10	6	1	2	1	1	1	1	9	30
11	7	1	2	1	1	1	1	10	32
12	7	2	2	1	1	1	2	10	34
13	8	2	2	1	1	1	3	10	37

tabela VI.14 Ordens de interpolação das incógnitas

É interessante observar que na figura (VI.15) é mostrado apenas um elemento. As respostas coincidem praticamente até $x = -0,3$, e a resposta numérica indica bastante bem o comportamento da singularidade. De maneira até um pouco surpreendente, a solução p-adaptativa não apresenta oscilações, apesar da alta ordem de interpolação.

O potencial no elemento 1 esta mostrado na figura (VI.16). Pode-se notar que para a última solução, há coincidência sobre quase todo o elemento. No entanto ocorre uma anomalia na região próxima a origem.

O potencial prescrito no elemento adjacente a 1, elemento 8, é nulo. Como o potencial é contínuo, o potencial calculado no elemento 1 deveria ser zero na origem, como mostra a solução analítica (figura VI.16).

As soluções p-adaptativas convergiram para um valor diferente de zero na origem. Obviamente, isto só pode ocorrer porque foram empregados elementos interpolados (descontínuos). Os elementos interpolados são necessários porque o fluxo é descontínuo na origem.

O ponto fonte que seria colocado na origem foi deslocado para o interior do elemento. A equação montada para este ponto obriga o resíduo a ser nulo no ponto de colocação deslocado. Desta forma a solução aproximada tende a ser igual à solução exata no ponto de colocação. Isto pode ser verificado observando-se que na figura (VI.16), a coordenada natural do ponto fonte é $\eta_i = -0,934$, o que corresponde a $x = 0,132$. Este é aproximadamente o ponto onde as soluções aproximadas interceptam a curva da solução exata na figura (VI.16).

Este mesmo exemplo foi resolvido com a coordenada natural do ponto fonte $\eta_i = 0,99$. O potencial calculado no elemento 1 é comparado com a solução exata e a solução aproximada com $\eta_i = 0,934$ na figura (VI.17).

Confirmando a hipótese anterior, verifica-se que com o ponto fonte mais próximo da origem, o potencial calculado aproxima-se de zero. Entretanto, observa-se também que a solução com $\eta_i = 0,934$ está mais próxima da solução exata por um comprimento maior do elemento 1.

Constata-se assim que esta anomalia pode ser controlada de duas maneiras, aproximando-se o ponto fonte do extremo do elemento, ou refinando a malha, que produz o mesmo efeito. Este fenômeno é um defeito localizado da solução, e não é característica do refinamento p-adaptativo. Ele é causado pelo tipo de elemento descontínuo utilizado. O problema torna-se mais aparente no refinamento p-adaptativo devido ao tamanho relativamente grande dos elementos empregados na discretização.

Foi calculado o potencial em 9 pontos internos regularmente distribuídos sobre o raio para $\theta = 90^\circ$. Os resultados são mostrados na figura (VI.18), onde verifica-se mais uma vez bons resultados.

O estimador de erro para a solução final com $\eta_i = 0,934$ foi

$$\text{Estimador} = 2,925 \times 10^{-7}$$

e a evolução do estimador em função do número de graus de liberdade do sistema está mostrada na figura (VI.19). O refinamento p-adaptativo foi interrompido quando o programa tentou refinar o elemento 8 quando este já havia atingido a ordem máxima de interpolação permissível.

Analisando-se a figura (VI.19), percebe-se que o estimador de erro não tinha atingido um patamar. Isto significa que a malha ainda suportaria refinamento p , e a precisão da resposta foi limitada pela maior ordem de interpolação admissível.

Este exemplo foi resolvido com as funções de Peano (II.38) e Chebyshev (II.44). Até a solução número 10, as duas famílias forneceram resultados absolutamente idênticos. Na solução número 11, no entanto, quando o elemento 8 foi refinado para ordem 10, a rotina de solução de sistemas de equações interrompeu a execução indicando que a matriz de coeficientes formada com funções de Peano era singular. Com os polinômios de Chebyshev, o programa terminou normalmente.

Isto indica que as funções de Peano levam a matrizes de coeficientes pior condicionadas do que os polinômios de Chebyshev. Quando se espera interpolações de ordem muito alta na resposta, as funções de Peano não são as mais recomendáveis.

FLUXO NO ELEMENTO 8

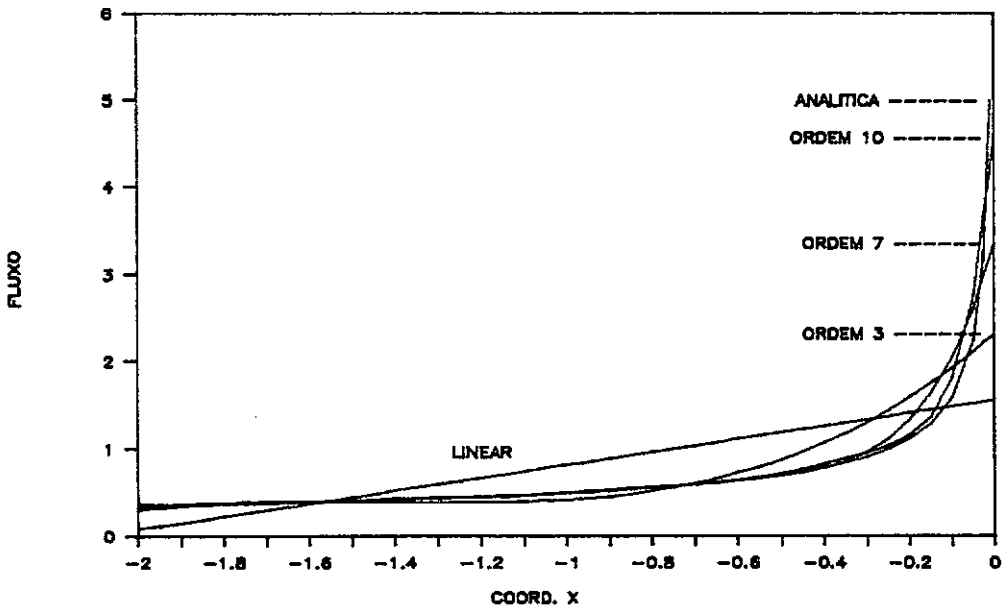


figura VI.14

FLUXO NO ELEMENTO 8

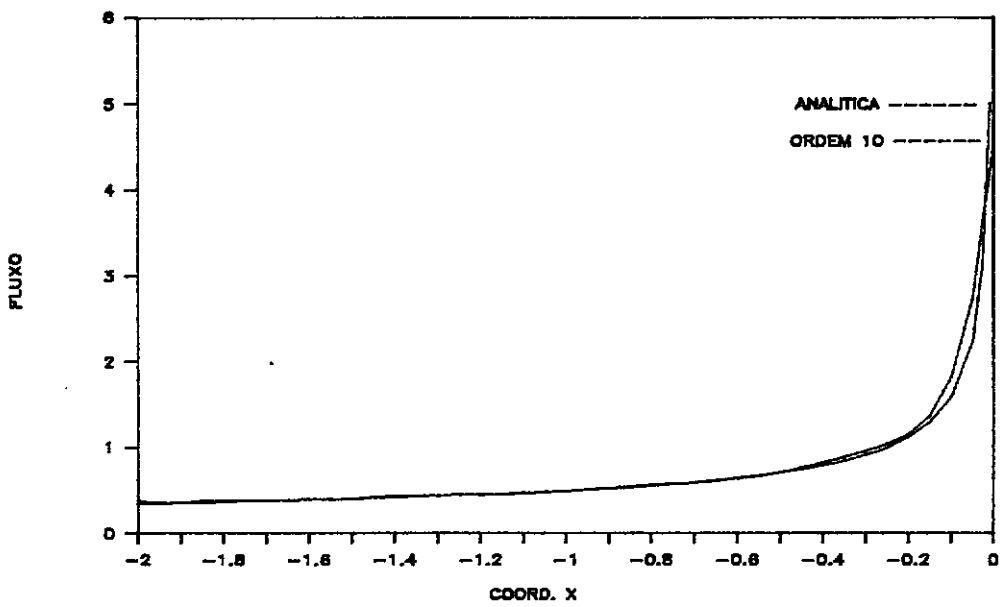


figura VI.15

POTENCIAL NO ELEMENTO 1

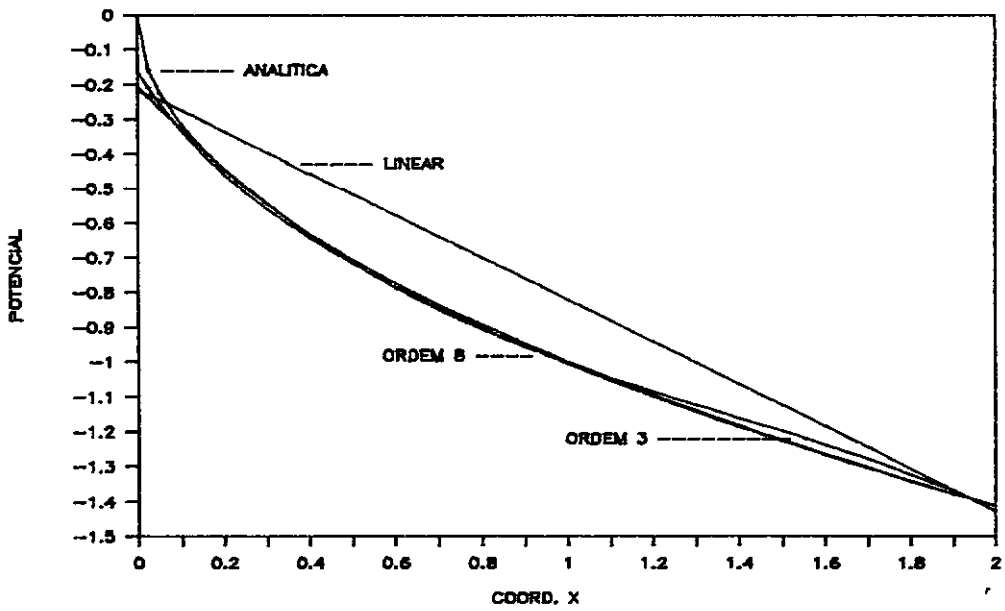


figura VI.16

POTENCIAL NO ELEMENTO 1

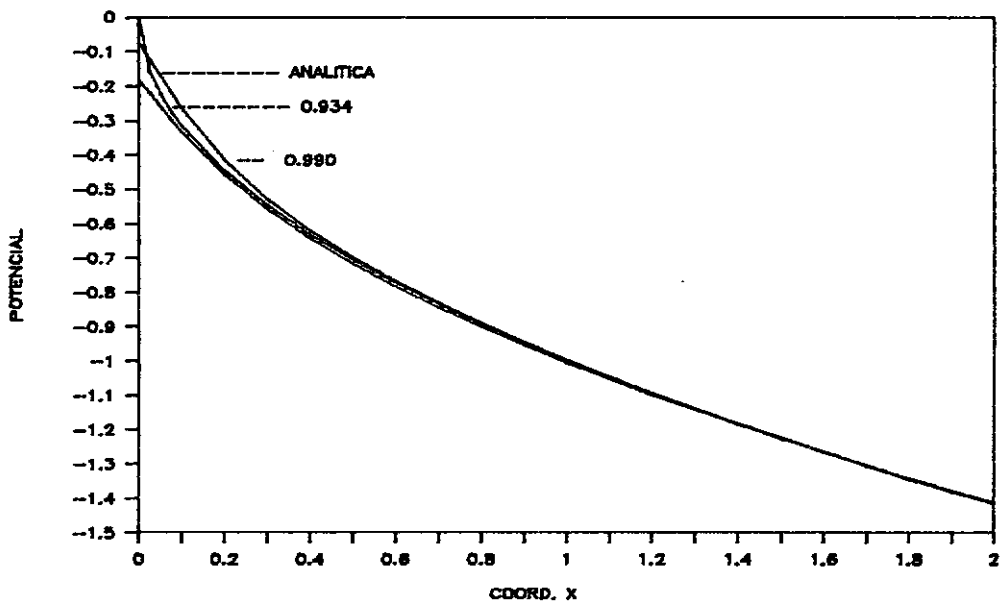


figura VI.17

EXEMPLO 3

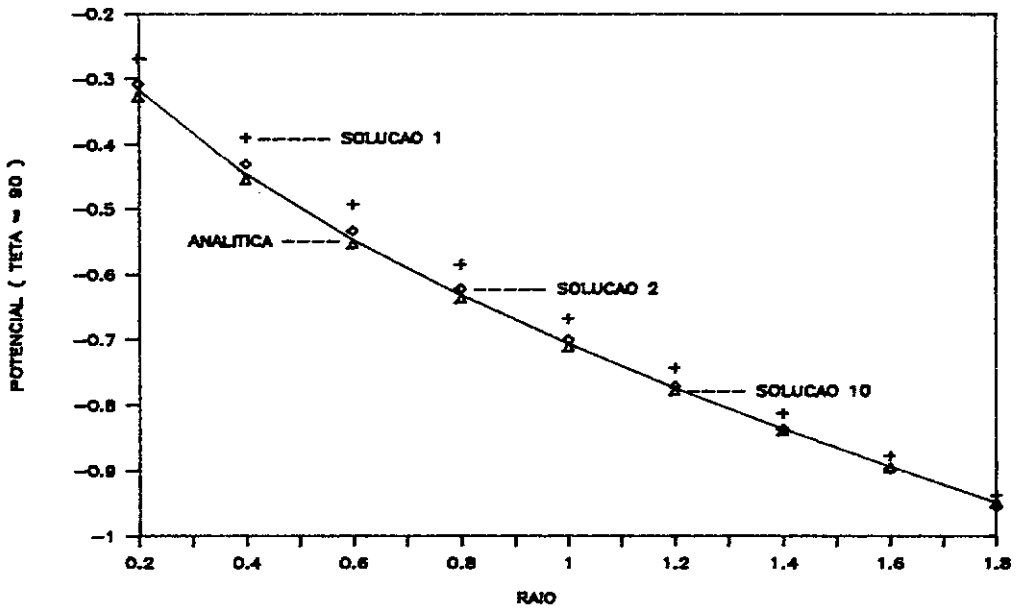


figura VI.18 - Potencial nos pontos internos

EXEMPLO 3

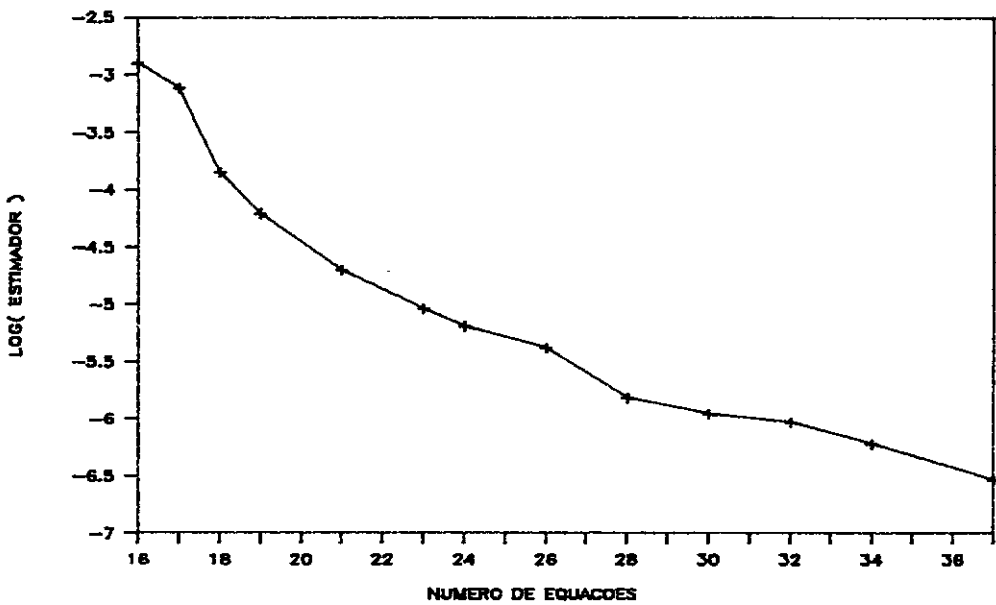


figura VI.19 - Estimador de erro

VI.5) Exemplo 4 - Percolação sob barragem

Neste exemplo, foi analisado um problema de percolação, mostrado na figura (VI.20), com condutividade hidráulica constante.

O problema de percolação é descrito pela equação

$$\nabla(k\nabla H) = 0 \quad (\text{VI.9})$$

onde k condutividade hidráulica

H altura piezométrica

Para k constante a equação (VI.9) reduz-se à equação de Laplace :

$$\nabla^2 H = 0 \quad (\text{VI.10})$$

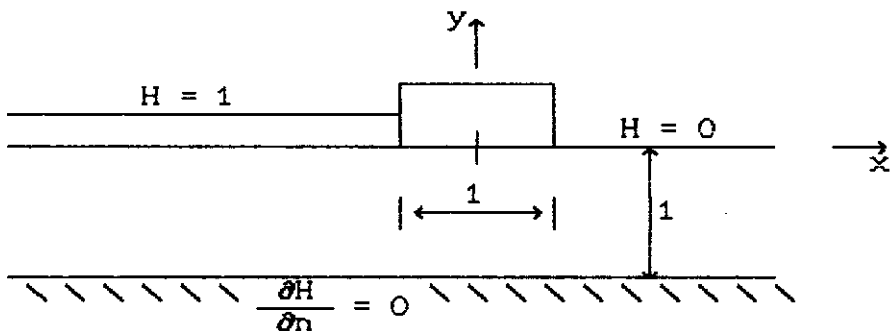


figura VI.20 - Problema de percolação

Na discretização com elementos de contorno, o domínio foi truncado em $x = -7,0$, onde foi aplicada a condição de fluxo nulo. Sobre o eixo y , foi considerada a condição $H = 0$. A barragem impermeável está representada pelo

elemento 1 (figura VI.21). Verificou-se nos resultados que a região considerada foi suficiente para simular o domínio infinito na direção horizontal.

• A mudança abrupta nas condições de contorno causadas pela barragem faz com que o fluxo no elemento 2 possua uma singularidade em $x = -0,5$.

Mesmo sabendo-se desta característica da solução, foi empregada uma discretização quase uniforme, a fim de realçar o desempenho do método auto-adaptativo mesmo para uma malha inicial relativamente grosseira.

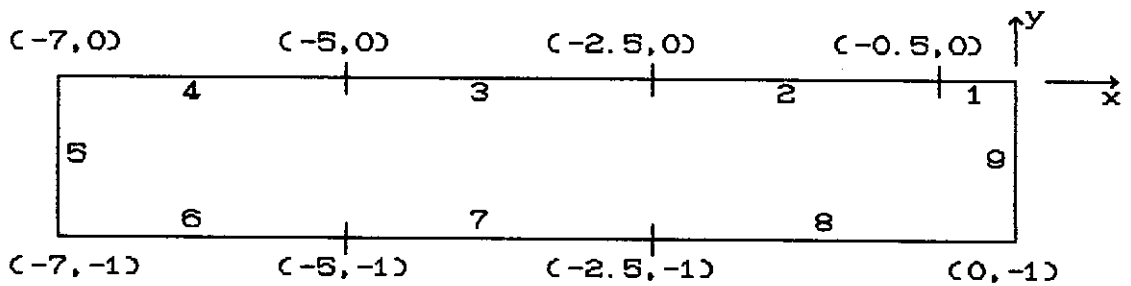


figura VI.21 - Malha de elementos de contorno

As condições de contorno são resumidas na tabela (VI.15).

A sequência de refinamento (figura VI.22) confirma o comportamento esperado para a resposta, pois o elemento 2 é o que atinge maior ordem de interpolação mais rapidamente. Na figura VI.22 são mostradas para cada solução a ordem de

interpolação da incógnita e o número de graus de liberdade do sistema.

Elm.	Tipo	η	Valor
1	\bar{q}	-1	0,0
		1	0,0
2	\bar{u}	-1	1,0
		1	1,0
3	\bar{u}	-1	1,0
		1	1,0
4	\bar{u}	-1	1,0
		1	1,0
5	\bar{q}	-1	0,0
		1	0,0
6	\bar{q}	-1	0,0
		1	0,0
7	\bar{q}	-1	0,0
		1	0,0
8	\bar{q}	-1	0,0
		1	0,0
9	\bar{u}	-1	0,0
		1	0,0

tabela VI.15 - Condições de contorno

Na figura (VI.23) mostra-se o fluxo nos elementos 2 e 3 para as três primeiras soluções. Na interface entre eles, ocorre uma oscilação, mais acentuada quando a interpolação do elemento 2 é cúbica do que quando é quadrática. Este comportamento repete-se para todas as interpolações de ordem ímpar, como pode-se verificar na figura (VI.24) que mostra a solução número 10, com interpolação cúbica para o elemento 3 e de ordem 9 para o elemento 2.

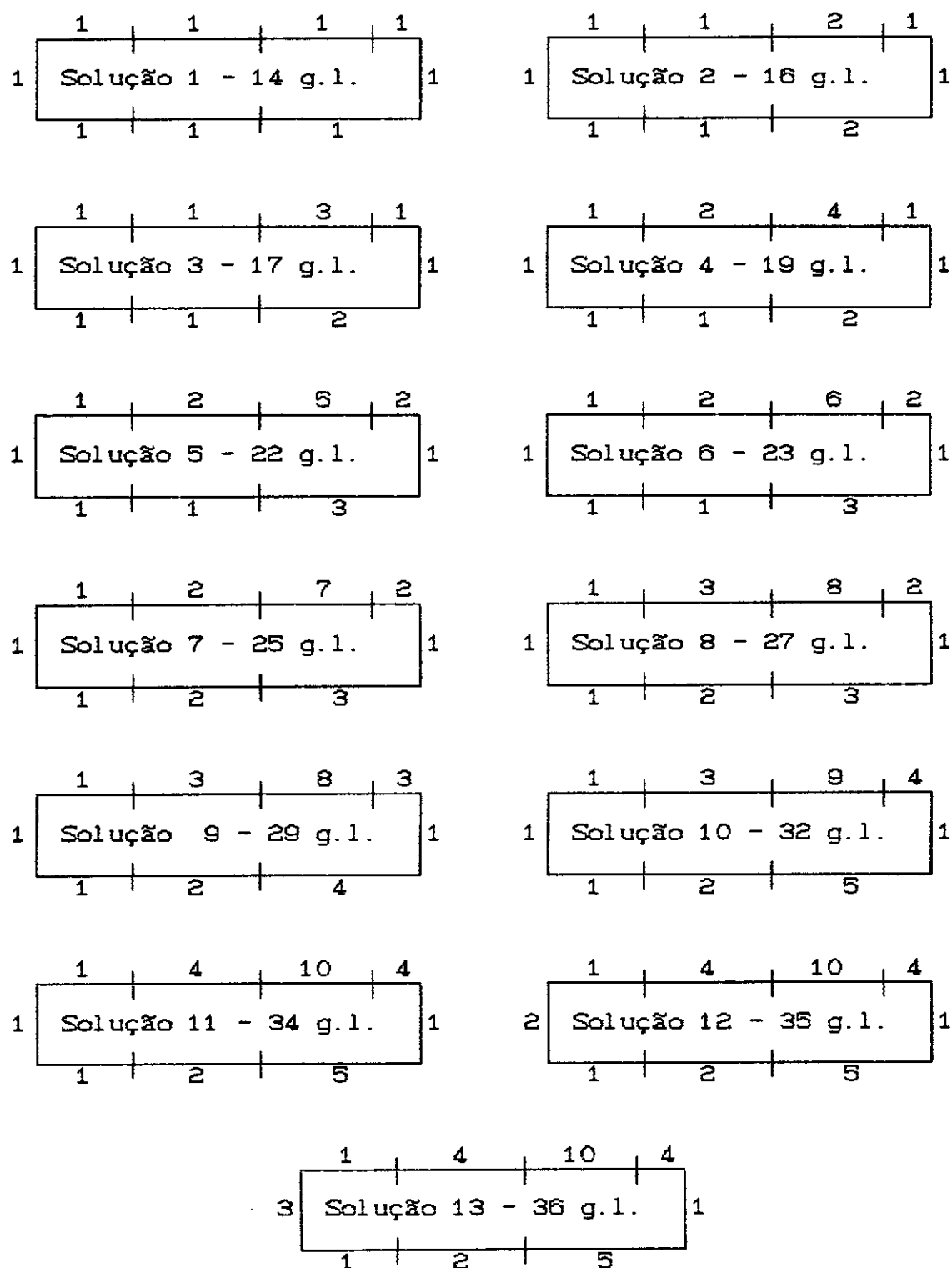


figura VI.22 Sequência de refinamento

FLUXO NOS ELEMENTOS 2 E 3

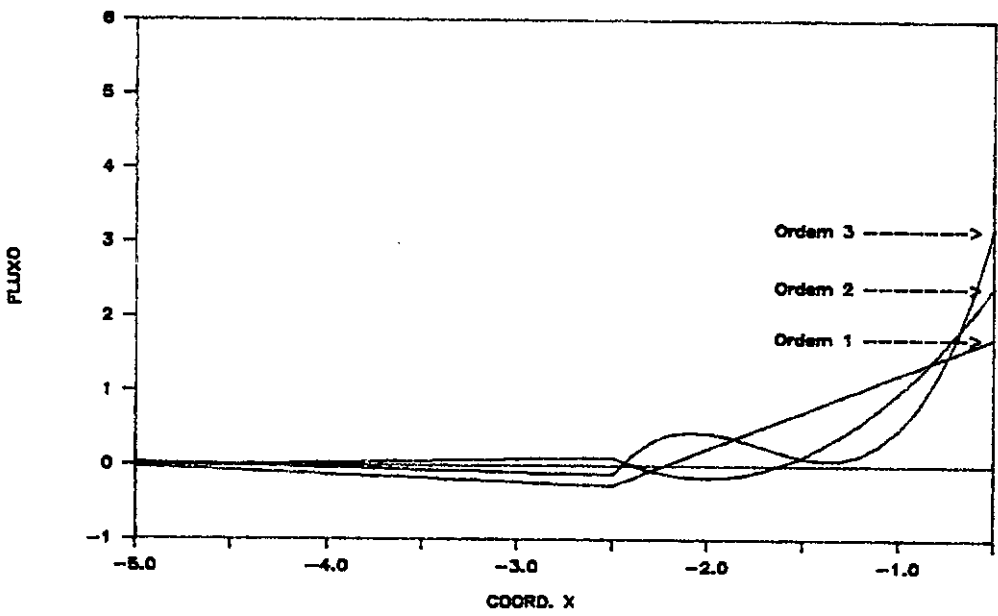


figura VI.23 - Soluções 1, 2 e 3

FLUXO NOS ELEMENTOS 2 E 3

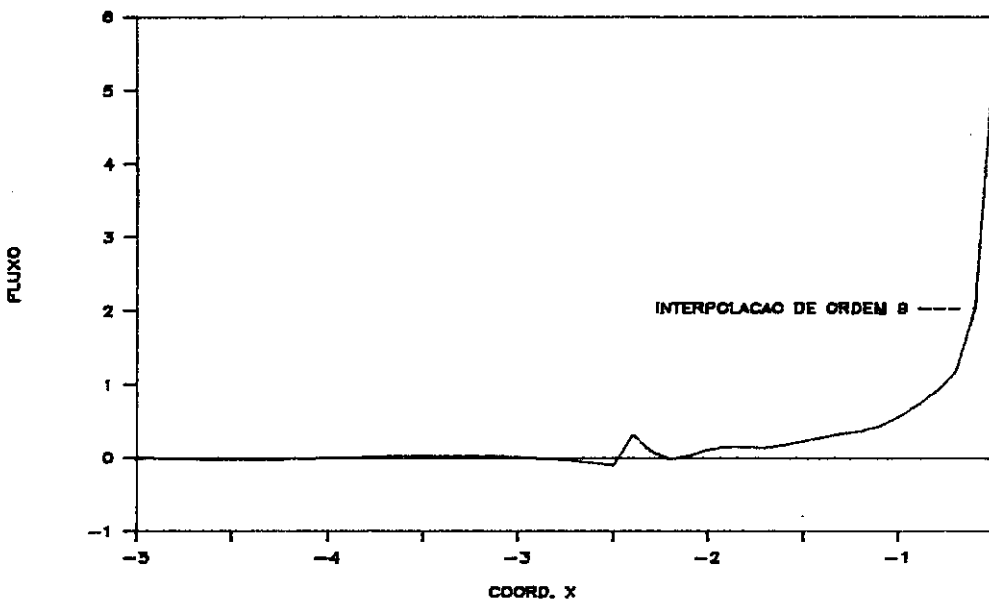


figura VI.24 - Solução 10

FLUXO NOS ELEMENTOS 2 E 3

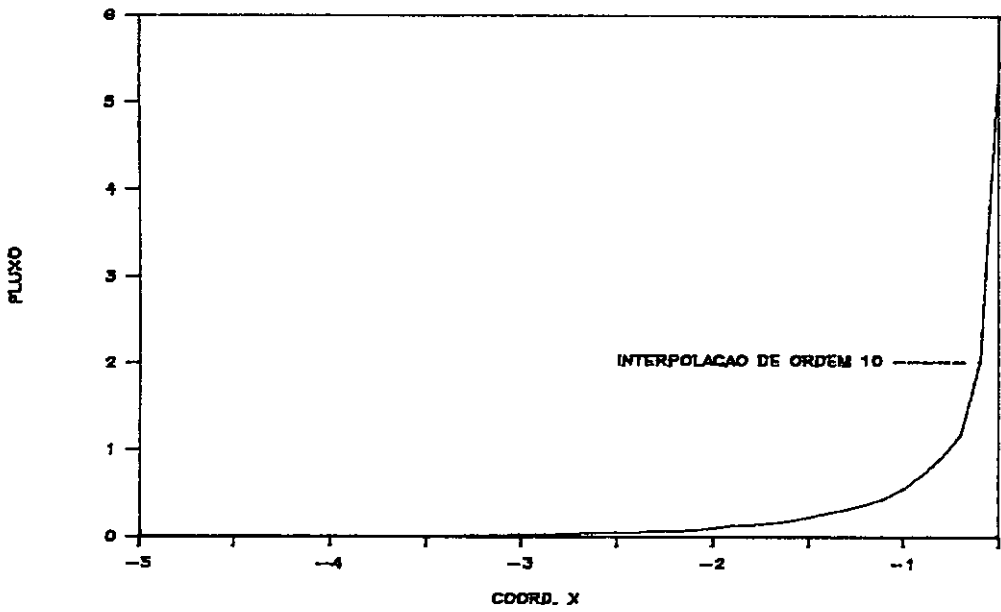


figura VI.25 - Solução 11

FLUXO NO ELEMENTO 2

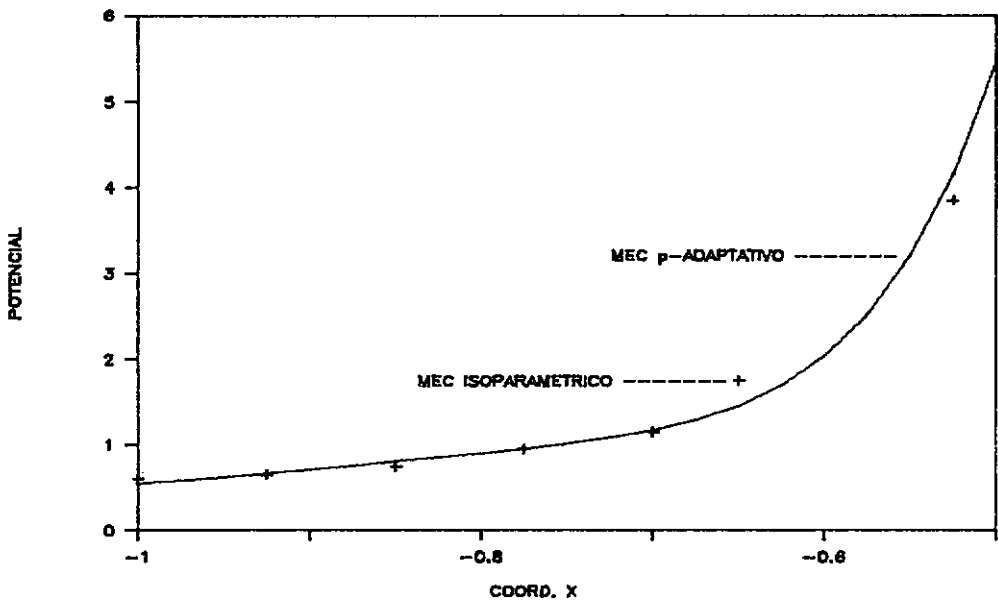


figura VI.26 - p-Adaptativo X isoparamétrico

As interpolações de ordem par, no entanto, tendem a fornecer respostas suaves na interface entre os elementos 2 e 3. Na figura (VI.25), é mostrada a solução 11, com interpolação de ordem 10 para o elemento 2 e de ordem 4 para o elemento 3. O aspecto da resposta é muito bom, não apresentando oscilações.

Deve-se observar que a resposta final no elemento 3 é relativamente simples, não se justificando a princípio a interpolação de quarta ordem. Esta distorção é causada pelo elemento vizinho, elemento 2, que devido a singularidade, perturba a resposta no elemento 3. Para acompanhar a oscilação na interface, o elemento 3 tem que passar por ordens de interpolação mais altas do que o necessário na resposta final.

Na figura (VI.26) estão comparadas a solução obtida por elementos de contorno p-adaptativos, e a solução obtida por CHENG [35].

CHENG [35] empregou 25 elementos de contorno iso-paramétricos quadráticos, com dois elementos do tipo quarter-point para o tratamento da singularidade.

É aparente a boa concordância entre as soluções, destacando-se o pequeno número de graus de liberdade necessários ao método dos elementos de contorno p-adaptativo.

Na figura (VI.27) está representado o potencial nos elementos 7 e 8. O comportamento da solução final corresponde ao esperado. O potencial varia rapidamente do valor no infinito, 1, para o valor prescrito sobre o eixo x , 0.

O potencial no elemento 1, sob a barragem, apresentou o mesmo fenômeno comentado no exemplo anterior para elementos descontínuos (figura VI.28). As soluções aproximadas não convergiram para o valor prescrito em $x = -0,5$. Para melhorar a resposta neste ponto é necessário refinar a malha ou aproximar o ponto fonte do extremo do elemento.

A variação do estimador em função do número de graus de liberdade apresentou comportamento anormal (figura VI.29). Existe um patamar entre as soluções 6 e 7 (23 para 25 graus de liberdade), e o resíduo aumenta consideravelmente entre as soluções 9 e 10 (29 para 32 graus de liberdade). Estes defeitos são provavelmente decorrentes das oscilações na resposta dos elementos 2 e 3. Como na discretização são utilizados relativamente poucos elementos, qualquer refinamento desnecessário produz efeito considerável na curva do resíduo.

O estimador de erro para a solução final foi:

$$\text{Estimador} = 1,752 \times 10^{-6}$$

Este exemplo foi analisado com as funções de Peano (II.38), as funções de Chebyshev (II.44) e as funções de Legendre (II.45).

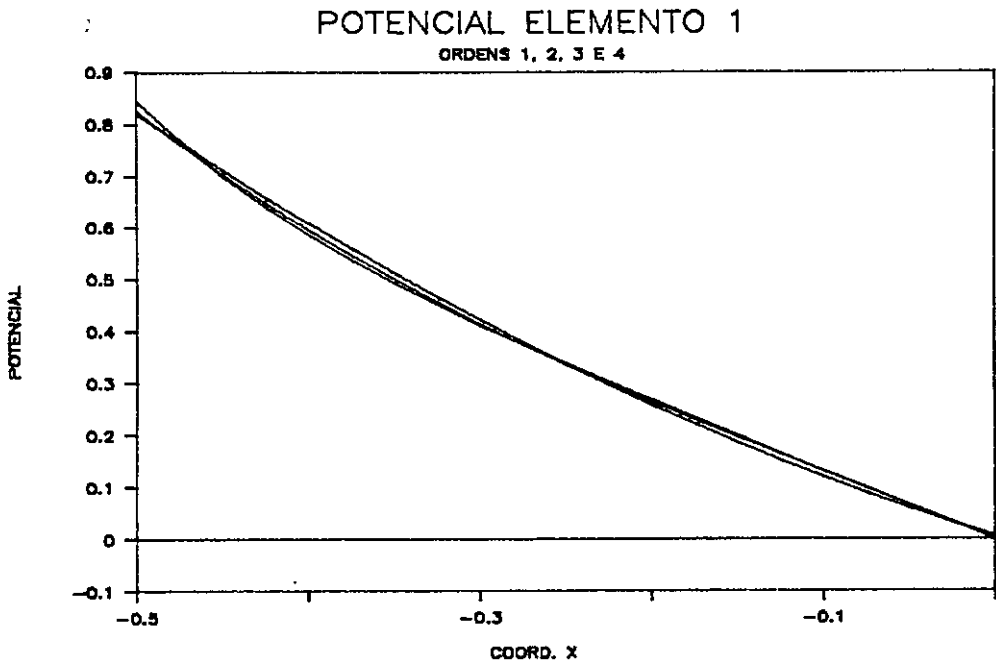


figura VI.27

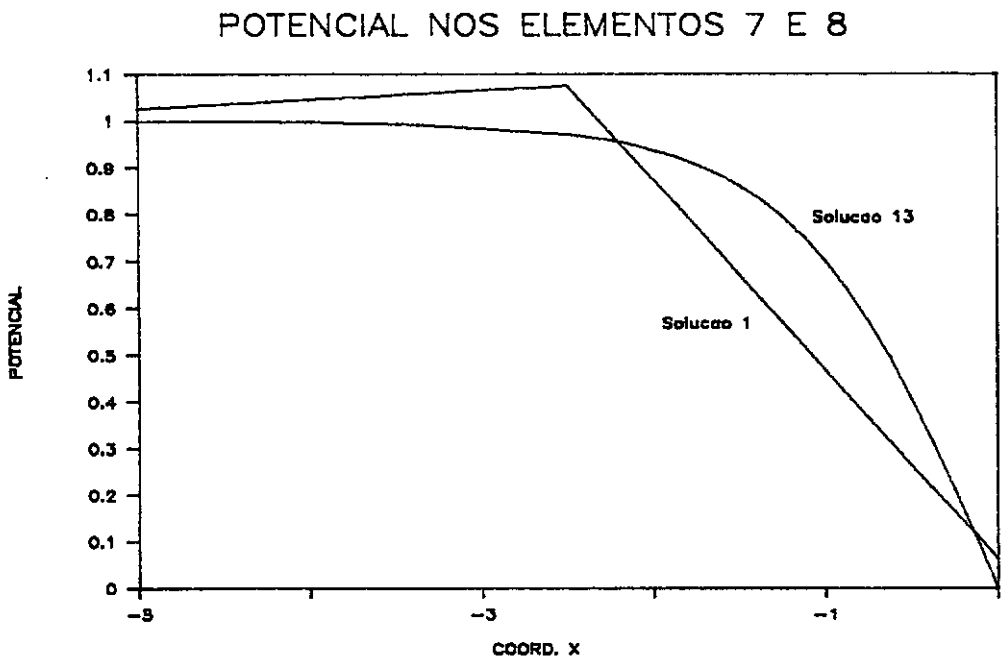


figura VI.28

ESTIMADOR DE ERRO

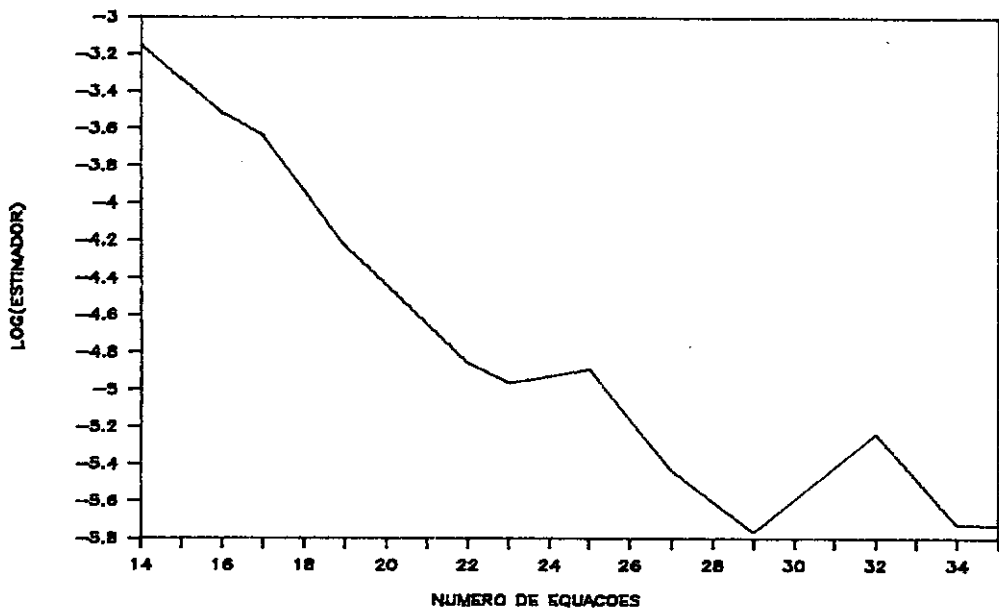


figura VI.29

A solução com funções de Peano novamente foi interrompida na resolução do sistema de equações, quando tentava-se refinar o elemento 2 para ordem 10. Até esta ordem, os resultados das três famílias hierárquicas coincidem. As soluções com funções de Chebyshev e Legendre terminaram normalmente, e forneceram os mesmos resultados numéricos. Mais uma vez as funções de Peano mostraram-se pouco recomendáveis para interpolações de ordem muito alta, provavelmente devido ao pior condicionamento da matriz de coeficientes.

A diferença no tempo de execução entre as funções de Chebyshev e Legendre, para as operações que são efetivamente influenciadas pelo tempo de cálculo das funções de interpolação, como por exemplo, cálculo de coeficientes, é bastante pequena, da ordem de 5 por cento em favor das funções de Chebyshev.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

A precisão dos resultados obtidos por técnicas convencionais de análise numérica, como o método dos elementos de contorno e dos elementos finitos, é fortemente influenciada pela discretização fornecida pelo analista. Consequentemente, a experiência prévia do usuário é um fator preponderante na qualidade da análise. As técnicas auto-adaptativas foram desenvolvidas com o intuito de diminuir esta sensibilidade a níveis razoáveis.

Foi constatado neste trabalho que o método dos elementos de contorno adequa-se a implementação de técnicas auto-adaptativas. Uma das principais características do método, a simplicidade da entrada de dados, é reforçada pela formulação auto-adaptativa, pois tende-se a empregar malhas relativamente grosseiras, suficientes apenas para representar bem a geometria e condições de contorno.

Na versão p-adaptativa do método dos elementos de contorno, as incógnitas, geometria e condições de contorno são aproximadas independentemente. Em relação a formulação convencional do método, com elementos isoparamétricos, a versão p difere por apresentar uma fase de análise de erros, que fornece informações para controlar soluções sucessivas, nas quais a discretização é refinada através da introdução de novas funções de interpolação.

Verificou-se que foi possível empregar interpolações de ordem muito alta. Em problemas nos quais a resposta apresentou comportamento complexo, chegaram a ser utilizadas interpolações polinomiais de grau dez. As respostas numéricas mostraram excelente concordância com soluções analíticas e com soluções por elementos de contorno convencionais.

O usuário do método dos elementos de contorno não auto-adaptativo dispõe de poucas alternativas para avaliação da confiabilidade dos resultados da análise. Quando são utilizados elementos descontínuos, pode-se verificar os valores dos fluxos em elementos vizinhos, porém a determinação da relação entre os descontinuidade de fluxo e o erro da solução não é um assunto trivial em elementos de contorno.

A técnica mais viável para avaliação da qualidade de soluções tem sido a repetição da análise com discretizações mais refinadas, até que a resposta atinja um valor estacionário. Claramente, este procedimento é muito dispendioso, tanto em termos de custo computacional quanto em termos de esforço do analista, que tem multiplicado seu trabalho de estabelecimento de malhas. As técnicas auto-adaptativas são, de certa forma, automatizações deste procedimento.

O que torna o procedimento auto-adaptativo versão p atraente, além do fato de dispensar a interação com o usuário, é a formulação hierárquica. O emprego de funções hierárquicas permite o aproveitamento de grande parte do

esforço computacional despendido em uma solução nas soluções posteriores.

A análise de erros no método dos elementos de contorno é um assunto ainda em estágio inicial de desenvolvimento. Verificou-se que os indicadores de erro utilizados neste trabalho apresentaram bom desempenho em todos os exemplos testados. A grandeza utilizada como estimador de erro, no entanto, forneceu resultados de difícil avaliação.

O programa de computador desenvolvido nesta tese é bastante simples, destinado primordialmente a verificar o desempenho da formulação p-adaptativa. Alguns aspectos das implementações modernas do método dos elementos de contorno isoparamétrico não foram considerados por questões de tempo. Por exemplo, não foi feita a consideração de simetria proposta por BREBBIA, TELLES e WROBEL [2], que permite a análise de problemas simétricos sem discretização dos eixos de simetria. Também não foram implementadas cargas de volume, que podem ser tratadas de várias maneiras. A eliminação destas omissões aumentaria a funcionalidade do programa desenvolvido.

Uma modificação muito importante seria a introdução de elementos com interpolação para geometria superior a linear. Isto permitiria melhor aproximação de contornos curvos e poderia levar a soluções mais precisas e talvez até mais econômicas, pois as malhas para problemas curvos poderiam utilizar um número menor de elementos.

A extensão desta formulação para problemas de potencial mais complexos, por exemplo, tridimensionais, transientes e não lineares, é um campo de trabalho muito promissor.

Em problemas de grande porte, o tempo de análise é dominado pela resolução dos sistemas de equações. Nas versões auto-adaptativas do método dos elementos finitos, as técnicas iterativas de solução são muito eficientes, pois a solução anterior fornece um vetor de partida muito bom para cada nova solução. Apenas recentemente foram apresentadas técnicas iterativas para elementos de contorno que podem ser consideradas competitivas com métodos diretos de solução. Caso confirme-se o bom desempenho destas novas técnicas, os métodos iterativos de solução podem tornar-se alternativas muito interessantes no contexto das formulações auto-adaptativas.

Verificou-se em alguns exemplos que o refinamento p pode não ser suficiente para atingir tolerâncias muito baixas. Isto sugere que, da mesma forma que no método dos elementos finitos, a combinação das técnicas de refinamento, por exemplo o refinamento hp, pode ser a formulação auto-adaptativa mais eficaz.

Finalmente, sugere-se a extensão da formulação p-adaptativa a problemas de elasticidade, onde espera-se o mesmo bom desempenho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BREBBIA, C. A. - The Boundary Element Method for Engineers - Pentech Press, London (1978).

- [2] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., WROBEL, L., C. - Boundary Elements. Thechniques - Springer Verlag, Berlim (1984).

- [3] BABUSKA, I., RHEINBOLDT, W. C. - "A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1597-1615 (1978).

- [4] BABUSKA, I., RHEINBOLDT, W. C. - "Adaptive Approaches and Reliability Estimations in Finite Element Analisis" - Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 17/18, pp. 519-540 (1979).

- [5] GAGO, J. P. de S. R. - A-Posteriori Error Analisis and Adaptivity for the Finite Element Method - Ph. D. Thesis, University of Wales, Swansea (1982).

- [6] ZIENKIEWICZ, O. C., GAGO, J. P. de S. R., KELLY, D. W., - "The Hierarquical Concept in finite Element Analisis" - Computers and Structures, vol 16, pp. 53-65 (1983).

- [7] GAGO, J. P. de S. R., KELLY, D. W., ZIENKIEWICZ,

O. C., BABUSKA, I. "A Posteriori Error Analysis and Adaptive processes in the Finite Element Method: Part I - Error Analysis" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 19, pp. 1593-1619, (1983).

- [8] GAGO, J. P. de S. R., KELLY, D. W., ZIENKIEWICZ, O. C., BABUSKA, I. "A Posteriori Error Analysis and Adaptive processes in the Finite Element Method: Part II - Adaptive Mesh Refinement" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 19, pp. 1593-1619, (1983).

- [9] RIBEIRO, F. L. B. - Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos : Refinamento auto-adaptativo versão p aplicado a problemas de elasticidade - Tese de M. Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, (1986).

- [10] LYRA, P. R. M. - Uma Estratégia de Refinamento Auto-Adaptativo versão h do Método dos Elementos Finitos Aplicada a Problemas Bi-dimensionais Regidos pela Equação de Campo - Tese de M. Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, a ser apresentada em 1988.

- [11] BABUSKA, I., NOOR, A. K. - Quality Assessment and Control of Finite Element Solutions - Technical Note BN-104, University of Maryland, (1986).

- [12] ARFEC - Proceedings of the International Conference on Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations - Lisbon, Edited by the Technical University of Lisbon.
- [13] CERROLAZA, M., ALARCON, E. - "p-Adaptive Boundary Elements for Three Dimensional Potential Problems" - Communications in Applied Mechanics and Engineering, vol. 3, pp. 335-344, (1987).
- [14] LERA, S. G., CERROLAZA, M., ALARCON, E. - "Adaptive Refinement in BEM" - Boundary Elements IX, pp 337-349., Editors C.A. Brebbia et al., Springer-Verlag, Berlin, (1987).
- [15] ALARCON, E., REVERTER, A. - "p-Adaptive Boundary Elements" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 23, pp. 801-823, (1987).
- [16] RANK, E. - "Adaptivity and Accuracy Estimation for Finite Elements and Boundary Integral Element Methods" - Accuracy Estimates and Adaptivity in Finite Element Computation, John Wiley & Sons, (1986).
- [17] RANK, E. - "Adaptive Boundary element Methods" -

Boundary Elements IX, pp. 259-278, Editors C.A. Brebbia et al., Springer-Verlag, Berlin, (1987).

- [18] PARREIRA, P. - "Self Adaptive P-Hierarchical Boundary Elements in Elastostatics" - Boundary Elements IX, pp. 352-373., Editors C.A. Brebbia et al. Springer-Verlag, Berlin, (1987).

- [19] RENCIS, J. R., MULLEN, R. L. - "Solution of Elasticity Problems by a Self-Adaptive Mesh Refinement Technique for Boundary Element Computation" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 23, pp. 1509-1527, (1986).

- [20] UMETAMI, S. - Reliability and Efficiency of the Boundary Element Method in Elastostatics - Ph. D. Thesis, University of Southampton, Southampton (1986).

- [21] ZIENKIEWICZ, O. C., MORGAN, K. - Finite Elements and Approximation - Wiley-Interscience, New York, (1983).

- [22] KELLOG, O. D. - Foundations of Potential Theory - Dover, New York, (1953).

- [23] DEVLOO, P. R. B. - An H-P Adaptive Finite Element Method for Steady State Compressible flow - Ph. D.

Thesis, University of Texas at Austin, Austin, (1987).

[24] WIBER, N. E., MÖLLER, P. - Formulation and Solution of Hierarquical Finite Element Equations - Report 86:15, Chalmers University of Technology, Göterborg, (1986).

[25] SPIEGEL, M. R., - Mathematical Handbook of Formulas and Tables - McGraw-Hill, New York, (1986).

[26] MARQUES, E. - Combinação dos Métodos de Elementos de Contorno e Elementos Finitos : Aplicação a Problemas de Potencial - Tese de M. Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, (1986).

[27] WENDLAND, W. L., - "Asymptotic Accuracy and Convergence for Point Collocation Methods" - Topics in Boundary Element Research, pp. 230-257, Edited by C. A. Brebbia, Springer-Verlag, Berlin, (1986).

[28] TENEMBAUM, A. M., AUGENSTEIN, M. J., - Data Structures Using Pascal - Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1981).

[29] SCHIMITZ, E. A., TELES, A. A. S. - Pascal e Técnicas de Programação - LTC Editora, Rio de Janeiro, (1985).

[30] TELLES, J. C. F. - "A Self-Adaptive Coordinate

Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Elements Integrals" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pp. 959-973, (1987).

[31] DYM, C. L., SHAMES, I. H. - Solid Mechanics, a Variational Approach, McGraw-Hill, (1973).

[32] TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. - Teoria da Elasticidade - Guanabara Dois, Rio de Janeiro, (1980).

[33] RENCIS, J. R., MULLEN, R. L. - "Iterative Methods for Solving Boundary Element Equations." - Computers & Structures, vol. 25, pp. 713-723, (1987).

[34] PAULA, F. A. - Obtenção da Matriz de Rigidez Utilizando o Método dos Elementos de Contorno - Tese de M. Sc., COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, (1986).

[35] CHENG, A. H. D. - "Boundary Integral Solution of Darcy's Flow with Variable Permeability", - Finite Elements in Water Resource, 5th International Conference, Editors J. P. Laible et al. , Springer-Verlag, Berlin, (1984).

[36] BEM - Boundary Elements IX, - Editors C. A. Brebbia, W. L. Wendland, G. Kuhn , Springer-Verlag, Berlin, (1987).