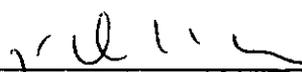


**UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES**

Solange da Silva Guedes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA CIVIL

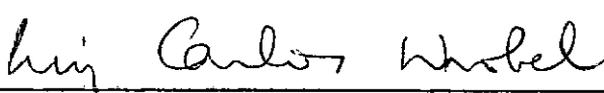
Aprovada por:



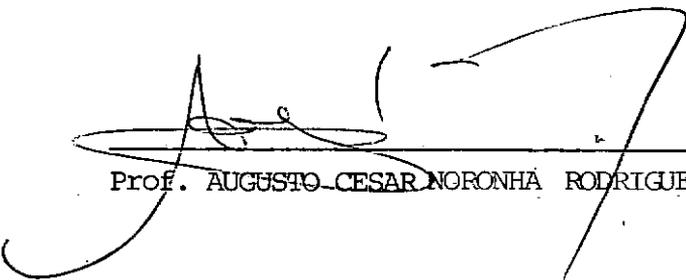
Prof. JOSÉ CLAUDIO DE FARIA TELLES



Prof. WEBE JOÃO MANSUR



Prof. LUIZ CARLOS WROBEL



Prof. AUGUSTO CESAR NORONHA RODRIGUES GALEÃO

RIO DE JANEIRO, RJ — BRASIL
MARÇO DE 1988

GUEDES, SOLANGE DA SILVA

Uma Formulação de Elementos de Contorno
Para Análise de Vibrações Livres (Rio de
Janeiro) 1988.

x , 113 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc.,
Engenharia Civil, 1988)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE.

I. Método dos Elementos de Contorno I,
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

UMA FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA
ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

Solange da Silva Guedes

Março de 1988

Orientador: José Claudio de Faria Telles

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho apresenta uma formulação alternativa, envolvendo elementos de contorno, para análise de vibrações livres de corpos elásticos em estado plano de tensões ou deformações. A principal característica deste método é a transformação da integral do termo de inércia do domínio em integrais de contorno equivalentes, utilizando uma classe especial de funções de interpolação para aproximar as acelerações no interior do corpo. Este procedimento reduz o problema de vibrações livres a um problema de autovalores algébricos generalizados e a solução do sistema de equações de maneira direta e simultânea. Esta simplificação só é possível porque a solução fundamental da elastostática é utilizada ao invés da solução harmônica dependente da frequência, de forma não linear.

A implementação numérica é feita para o estado plano de tensões ou deformações. A geometria do contorno é representada por elementos retos e as forças de superfície e deslocamentos no contorno são aproximadas por funções de interpolação quadráticas sobre cada elemento de contorno. A Quadratura Gaussiana é utilizada para calcular as integrais sobre elementos não singulares. Considerações de movimento de corpo rígido, comum em análises de elementos de contorno, são empregadas para avaliar as contribuições das integrais no sentido de valor principal de Cauchy.

Quatro exemplos são analisados através de um programa computacional, em linguagem FORTRAN, desenvolvido de acordo com as características descritas acima, e as soluções numéricas obtidas são comparadas com resultados de elementos finitos.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

BOUNDARY ELEMENT FORMULATION FOR FREE VIBRATION ANALYSIS

Solange da Silva Guedes

March, 1988

Chairman : José Claudio de Faria Telles

Department: Civil Engineering

This work presents an alternative formulation for the boundary element analysis of free vibrations of elastic bodies in plane stress or plane strain. The main characteristic of this method is the transformation of the inertial domain integral into equivalent boundary integrals, by employing special interpolation functions to approximate the accelerations within the body. With this procedure the free vibration problem is reduced to a generalized algebraic eigenvalue problem, whose solution is carried out in a direct and simultaneous way. This is only possible due to the elastostatic fundamental solution which is used instead of the non-linear frequency dependent harmonic fundamental solution.

The numerical implementation is carried out for plane stress or plane strain. The boundary geometry is represented by straight elements, being the tractions and boundary displacements approximated by quadratic interpolation functions over each boundary element. Gaussian Quadrature is used to compute integrals over non-singular elements. As usual in Boundary Element analysis, rigid body motion considerations are employed to evaluate the contributions of the Cauchy principal value integrals.

Four examples are analysed using a FORTRAN computer code, based on the above described, and the numerical solutions obtained are compared with Finite Elements results.

Ao meu filho

Virgílio

AGRADECIMENTOS

Aos professores José Claudio de Faria Telles e Webe João Mansur, pelo estímulo e orientação do trabalho.

Aos professores e colegas do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, pela amizade e apoio.

A Virgílio José Martins Ferreira Filho pelo incentivo e apoio constante.

ÍNDICE

Página

CAPÍTULO I	- INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO II	- EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA LINEAR	5
II.1	- Introdução	5
II.2	- Simbologia	5
II.2.1	- Notação Cartesiana Indicial	5
II.2.2	- Representação do Corpo	6
II.3	- Equações Básicas	7
II.4	- Equação de Navier em Função das Velocidades de Fase das Ondas Pla nas	10
II.4.1	- Ondas Elásticas Planas	11
II.4.2	- A Equação de Navier	13
II.4.3	- Soluções da Elastodinâmica por Potenciais	13
II.5	- Solução Fundamental e Formulação Integral da Elastodinâmica	15
II.5.1	- Movimento Transiente	15
II.5.1.1	- Solução Fundamental	15

	Página
II.5.1.2 - Formulação Integral	19
II.5.2 - Movimento Harmônico	25
II.5.2.1 - Solução Fundamental	25
II.5.2.2 - Formulação Integral	28
II.6 - Vibração Livre	32
CAPÍTULO III - MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELAS- TICIDADE	35
III.1 - Introdução	35
III.2 - Fundamentos do Método	35
III.2.1 - Identidade de Somigliana para Deslocamentos	36
III.2.2 - Equação Integral no Contorno ..	39
III.3 - Soluções Fundamentais	40
III.4 - Tensões nos Pontos Internos	43
CAPÍTULO IV - FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA OB- TENÇÃO DA "MATRIZ DE MASSA"	44
IV.1 - Introdução	44
IV.2 - Aproximação da Integral no Domínio	45
IV.3 - As Funções $f^k(x)$	49

	Página
VI.2 - Influência do Refinamento da Malha	84
VI.3 - Influência do Emprego de Pontos Internos	87
VI.3.1 - Placa Quadrada	87
VI.3.2 - Viga Engastada	88
VI.3.3 - Estrutura com Arco	93
VI.4 - Barragem de Terra	99
CAPÍTULO VII - CONCLUSÕES	102
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105
APÊNDICE 1 - EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO	109

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos têm atualmente grande aplicação na solução de problemas governados por equações diferenciais, cujas soluções analíticas só são conhecidas para casos muito particulares. Esta utilização em larga escala tem levado à busca de procedimentos que possibilitem cada vez mais melhorias na eficiência computacional, tanto em termos de precisão quanto em termos de tempo de processamento.

O Método dos Elementos Finitos é o método numérico mais difundido, estando seus aplicativos sistematizados e padronizados para uma extensa gama de problemas. A sua utilização requer que o domínio do corpo seja subdividido em subdomínios interligados de forma simples, chamados elementos finitos. O comportamento real da solução é aproximado através de funções, normalmente polinômios. Tais funções são definidas em termos de valores aproximados da solução em certos pontos nodais localizados dentro ou no contorno de cada elemento. Esta aproximação é obtida através da aplicação de técnicas como resíduos ponderados ou algum tipo de princípio variacional, que conduz a um sistema de equações simétrico e em banda, envolvendo valores incógnitos da solução aproximada nos pontos nodais.

Apesar de sua generalidade e eficiência, o Método dos Elementos Finitos apresenta algumas limitações, tais como:

- 1) Imenso trabalho na preparação dos dados, especialmente para problemas tri-dimensionais, o que pode conduzir mais facilmente a erros.
- 2) As incógnitas em cada nó dentro do domínio são calculadas durante o processo de solução, independente do interesse nestes valores, o que implica em um consumo desnecessário de tempo.
- 3) Para certos problemas tais como aqueles envolvendo fraturas, regiões infinitas e concentração de tensões, esta técnica requer considerações especiais (elemento infinito, refinamento excessivo) para produzir resultados satisfatórios.

Estas limitações são superadas pelo Método dos Elementos de Contorno, que transforma as equações diferenciais parciais, que governam o problema, em equações integrais envolvendo somente valores de contorno, após a introdução de funções de ponderação denominadas soluções fundamentais. A dimensão do problema é portanto reduzida de uma unidade e somente o contorno do domínio precisa ser discretizado em elementos. Funções de interpolação, similares àquelas utilizadas no Método dos Elementos Finitos, são utilizadas para aproximar as soluções. As integrais de contorno são calculadas através de esquemas de integração numérica, reduzindo-as a um conjunto de equações algébricas lineares de ordem menor do que a obtida em técnicas de discretização do domínio.

As primeiras publicações descrevendo o Método dos Elementos de Contorno foram feitas por JASWON [21], SYMM [22], HESS [23], RIZZO [24] e CRUSE [18,19], sendo que BREBBIA [20] estabeleceu e relacionou o novo método numérico com os métodos clássicos de engenharia, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas, utilizando a Técnica dos resíduos ponderados.

CRUSE e RIZZO [19] foram os primeiros pesquisadores a utilizar o Método das Equações Integrais de Contorno para solucionar problemas elastodinâmicos. A transformada de Laplace foi utilizada para obter a solução do problema no domínio da frequência e o sistema de equações obtido foi resolvido para vários valores do parâmetro da transformada, sendo então empregado um algoritmo numérico de inversão para fornecer a resposta no domínio do tempo.

Mais recentemente, um esquema de elementos de contorno, que soluciona o problema elastodinâmico transiente em duas dimensões, utilizando uma solução fundamental bidimensional dependente do tempo, foi apresentado por MANSUR e BREBBIA [25] com excelentes resultados.

A análise dinâmica pode também ser equacionada através de uma formulação alternativa, envolvendo elementos de contorno, proposta por BREBBIA e NARDINI [10,15]. Este procedimento, chamado "dual reciprocity", utiliza uma classe especial de funções para obter a "matriz de massa" utilizando apenas valores do contorno. Isto permite ao problema elastodinâmico ser tratado de maneira similar ao Métodos dos Elementos Finitos ou Diferenças

Finitas e em consequência, o caso de vibrações livres é reduzido a um problema de autovalores algébricos enquanto o problema transiente pode ser resolvido por um processo de integração direta no tempo.

A implementação desta nova formulação para a análise de vibrações livres de meios elásticos bidimensionais encontra-se descrita neste trabalho. A revisão da teoria e das equações da elastodinâmica é feita no Capítulo II, envolvendo os casos transiente, harmônico e vibração livre. O Capítulo III mostra as bases do Método dos Elementos de Contorno, cujas características permitem este novo enfoque do problema elastodinâmico. A aproximação da integral no domínio, conforme proposto por Brebbia e Nardini, é apresentada no Capítulo IV, levando à obtenção de uma expressão integral envolvendo somente valores no contorno. A discretização e implementação numérica desta equação, para o estado plano de deformação, utilizando interpolação quadrática das funções ao longo dos elementos do contorno, é descrita no Capítulo V. No Capítulo VI são apresentados e analisados quatro exemplos, e seus resultados comparados com os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. Finalmente, o Capítulo VII apresenta as conclusões do trabalho desenvolvido e sugestões para sua continuidade.

CAPÍTULO II

EQUAÇÕES DA ELASTODINÂMICA LINEAR

II.1 - Introdução

Neste capítulo serão revistas a teoria e as equações básicas da elastodinâmica ([2], [3], [5], [6] e [12]) que servirão como base para o desenvolvimento que será mostrado nos capítulos subsequentes.

As equações apresentadas correspondem à teoria de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, para materiais homogêneos, isotrópicos e elasto-lineares.

Todos os valores de tensão, deformação e deslocamento têm como referência o estado natural do corpo, que é aquele para o qual ele retorna após cessarem as ações das forças externas.

II.2 - Simbologia

II.2.1 - Notação Cartesiana Indicial

Os índices 1, 2 e 3 são usados para substituir x , y e z e os símbolos de somatório são desnecessários sempre que um mesmo índice aparecer duas vezes em um termo qualquer, conforme ilustrado a seguir:

$$a_{ij} x_j = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (\text{II.1})$$

$$a_{kk} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

II.2.2 - Representação do Corpo

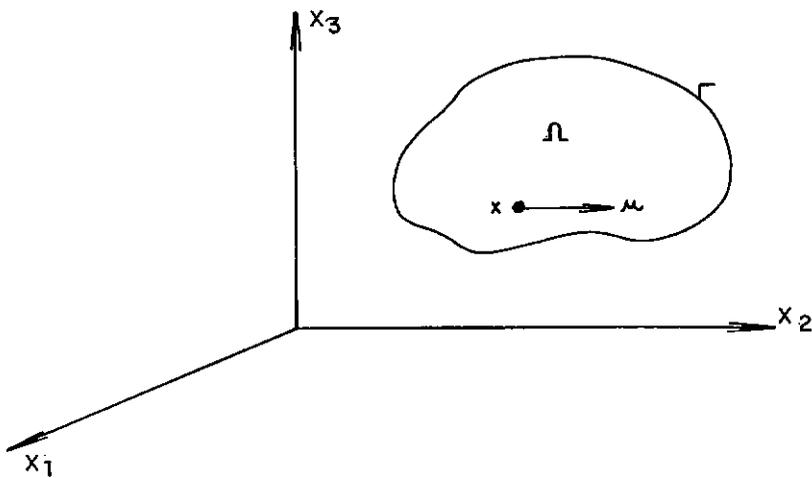


Fig.II.1 - Representação do corpo e definição das componentes do deslocamento de um ponto

O corpo é definido pelo domínio Ω e pelo contorno Γ , conforme mostrado na Fig.II.1.

Um ponto X , de coordenadas x_i , mover-se-á após a deformação para a posição X' . Denominando x'_i as coordenadas do ponto X' , define-se as componentes dos deslocamentos $u_i(x,t)$ por:

$$u_i(x,t) = x'_i(x,t) - x_i \quad (\text{II.2})$$

A derivação em relação às coordenadas será representada por vírgulas e em relação ao tempo, por pontos, isto é:

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k} = f_{ij,k} \quad (\text{II.2})$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \dot{f}_i \quad (\text{II.4})$$

O símbolo delta de Kronecker é definido da seguinte forma:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

II.3 - Equações Básicas

Na teoria da elastodinâmica linear as relações entre as deformações específicas e os deslocamentos são expressas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{II.6})$$

onde ε_{ij} é o tensor de deformações específicas.

As velocidades e as acelerações, derivadas temporais dos deslocamentos e das velocidades, respectivamente, são dadas por:

$$v_i = \dot{u}_i \quad (\text{II.7})$$

$$\alpha_i = \dot{v}_i = \ddot{u}_i \quad (\text{II.8})$$

O movimento do corpo deve obedecer à equação da continuidade, como pode ser visto em [3]:

$$\left[\rho v_i \right]_{,i} = 0 \quad (\text{II.9})$$

e à equação do equilíbrio dinâmico:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.10})$$

sendo:

- ρ = a massa específica do corpo (massa por unidade de volume);
- σ_{ij} = as componentes do tensor de tensões;
- b_i = as componentes das forças de volume (força por unidade de volume).

Além destas equações tem-se também a Lei de Hooke, que fornece a relação entre as tensões e as deformações específicas:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.11})$$

onde μ e λ são as constantes de Lamé, que se relacionam com o módulo de elasticidade longitudinal E , com o coeficiente de Poisson ν e com o módulo de elasticidade transversal G , através das seguintes expressões:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{II.12})$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{II.13})$$

Eliminando σ_{ij} do sistema composto pelas Equações (II.6) a (II.11) chega-se às equações do equilíbrio dinâmico da elasticidade escritas em função das derivadas das componentes do deslocamento, as equações de Navier:

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.14})$$

que constituem um sistema linear de equações diferenciais hiperbólicas para a variável dependente u_i .

A solução para as equações de Navier será obtida a partir das condições de contorno e das condições iniciais do problema que se estiver analisando.

As condições de contorno podem ser:

essenciais:

$$u_i(x,t) = \bar{u}_i(x,t) \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.15a})$$

ou naturais:

$$p_i(x,t) = \bar{p}_i(x,t) \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.15b})$$

sendo \bar{u}_i e \bar{p}_i valores conhecidos e $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. p_i representa as componentes das forças de superfície (força por unidade de área) obtidas através da condição de equilíbrio no contorno Γ do corpo que estabelece:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{II.16})$$

onde n_j são os cossenos diretores do vetor unitário normal à superfície, e apontando para fora do domínio.

As condições iniciais requerem que se prescreva:

$$u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad (\text{II.17})$$

$$\dot{u}_i(x,0) = v_i^0(x)$$

II.4 - Equação de Navier em Função das Velocidades de Fase das Ondas Planas

A equação do movimento em termos de deslocamentos, considerando a ausência de forças de volume, é da forma:

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} = \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.18})$$

Neste item será mostrado uma forma alternativa de se escrever a Equação (II.18), onde as velocidades de propagação C_D e C_S de ondas primárias e secundárias serão usadas em lugar das constantes de Lamé.

II.4.1 - Ondas Elásticas Planas

Seja o movimento definido por [3] como:

$$\begin{cases} u_1 = A \text{ sen } 2\pi/\ell (x_1 \pm ct) \\ u_2 = u_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

onde A , ℓ e c são constantes. As Equações (II.19) satisfazem (II.18) somente se c assumir o seguinte valor:

$$C_D = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (\text{II.20})$$

O modelo de movimento expresso pelas equações (II.19) não varia quando $x_1 + C_D t$ permanece constante. Por isso se for considerado o sinal negativo o sentido de propagação será para a direita, com velocidade C_D , para valores crescentes de t . A constante C_D é chamada velocidade de fase do movimento da onda, de comprimento ℓ , que ocorre no mesmo sentido da propagação. Este movimento é conhecido como ondas longitudinais, de dilatação ou primárias.

Outro movimento, definido por:

$$\begin{cases} u_1 = u_3 = 0 \\ u_2 = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} (x_1 \pm ct) \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

representa o trem de ondas planas, de comprimento ℓ , que se propaga na direção do eixo x_1 , com velocidade de fase c . A substituição de u_i dado pela Equação (II.21) na Equação (II.18) faz com que c assumo o valor:

$$c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (\text{II.22})$$

Este movimento, onde a velocidade da partícula é perpendicular à direção de propagação da onda, é conhecido como ondas transversais, de distorção ou secundárias.

As velocidades de fase, c_D e c_S , dependem das constantes elásticas e da massa específica do material. Já a razão c_S/c_D depende apenas do coeficiente de Poisson, ν :

$$c_S = c_D \sqrt{\frac{(1 - 2\nu)}{2(1 - \nu)}} \quad (\text{II.23})$$

De forma similar ao que foi exposto para a Equação (II.21), as expressões seguintes representam ondas transversais, nas quais as partículas se movem na direção do eixo x_3 :

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 0 \\ u_3 = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 \pm C_S t) \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

O plano, paralelo àquele no qual as partículas se movem, é chamado plano de polarização.

As ondas planas, como foram descritas, existem com frequência num meio elástico infinito. Num corpo finito, a onda plana será refletida quando encontrar o contorno e se existir outro meio elástico além deste contorno, aparecerão ondas refratadas neste segundo meio. O modelo de reflexão e refração é similar aos acústicos e óticos; a principal diferença é que, em geral, uma onda incidente longitudinal será refletida e refratada como uma combinação de ondas longitudinais e transversais, ocorrendo o mesmo com uma onda incidente transversal.

II.4.2 - A Equação de Navier

As constantes C_D e C_S podem ser utilizadas para escrever a equação de Navier sob a seguinte forma, obtida através da substituição das Equações (II.20) e (II.22) na Equação (II.14):

$$\left(C_D^2 - C_S^2 \right) u_{j,j i} + C_S^2 u_{i,j j} + \frac{b_i}{\rho} = \ddot{u}_i \quad (\text{II.25})$$

II.4.3 - Soluções da Elastodinâmica por Potenciais

A equação de Navier, na ausência de forças de volume, tem a seguinte apresentação:

$$(\lambda + G) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + G \nabla^2 \underline{u} = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.26})$$

ou

$$(\lambda + 2G) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) - G \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = \rho \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.27})$$

ou ainda, utilizando as constantes C_D e C_S :

$$C_D^2 \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) - C_S^2 \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.28})$$

onde ∇^2 é o operador Laplaciano definido por:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad (\text{II.29})$$

∇ é o operador diferencial definido por:

$$\nabla = \underline{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (\text{II.30})$$

e o símbolo $\underline{\cdot}$ é a indicação de variável vetorial.

Uma maneira alternativa de se formular o problema de propagação de ondas elásticas é a que utiliza os potenciais de deslocamento de Lamé e baseia-se na decomposição de Helmholtz [12, 13 e 14]. Neste procedimento a equação de Navier (Equação (II.25)) é substituída por duas equações diferenciais envolvendo potenciais, conforme descrito a seguir.

Sejam $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$ um potencial escalar e $\underline{\psi}(x_1, x_2, x_3, t)$ um potencial vetorial. O vetor de deslocamento \underline{u} pode ser representado por:

$$\underline{u} = \nabla \phi + \nabla \times \underline{\psi} \quad (\text{II.31})$$

com a seguinte condição auxiliar:

$$\nabla \cdot \underline{\psi} = 0 \quad (\text{II.32})$$

Uma análise das Equações (II.28) mostra que elas serão satisfeitas se as funções ϕ e $\underline{\psi}$ forem soluções de:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\ddot{\phi}}{C_D^2} \quad (\text{II.33})$$

$$\nabla^2 \underline{\psi} = \frac{\ddot{\underline{\psi}}}{C_S^2} \quad (\text{II.34})$$

que são expressões que pertencem à família de equações de onda da forma:

$$\nabla^2 w = \frac{\ddot{w}}{C^2} \quad (\text{II.35})$$

onde C é a velocidade de propagação da onda.

II.5 - Solução Fundamental e Formulação Integral da Elastodinâmica

II.5.1 - Movimento Transiente

II.5.1.1 - Solução Fundamental

A solução fundamental para a Equação (II.25) pode ser escrita como a resposta num domínio infinito Ω^* , livre de qualquer condição inicial imposta, para forças de volume correspon-

dentadas a forças concentradas unitárias agindo nas direções x_k , provocando um impulso no instante $t = \tau$, localizado no ponto $x = \xi$ (ver Figura II.2), que satisfaz à equação:

$$\begin{aligned} \left(C_D^2 - C_S^2 \right) u_{kj,jj}^* + C_S^2 u_{ki,jj}^* - \ddot{u}_{ki}^* &= \\ &= - \frac{\delta_{ki}}{\rho} \delta(\xi, x) \delta(t, \tau) \end{aligned} \quad (\text{II.36})$$

A Expressão (II.36) corresponde a um sistema de três equações desacopladas três a três, para cada direção k segundo a qual a força unitária é aplicada.

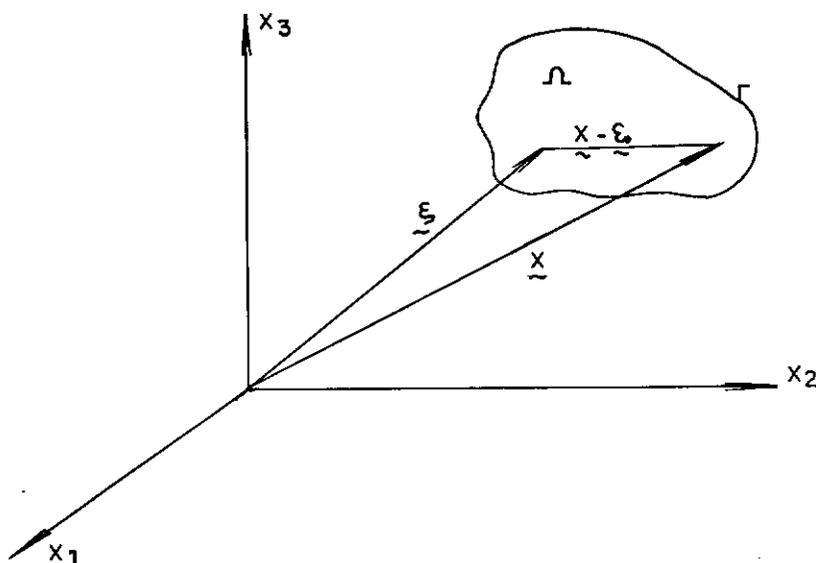


Fig.II.2 - Definição do vetor $\underline{x} - \underline{\xi}$

A solução de (II.36), para o caso tridimensional, pode ser colocada sob a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u_{ki}^*(x, t; \xi, \tau) = & \frac{t'}{4\pi \rho r^2} \left\{ \left(\frac{3 r_i r_k}{r^3} - \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \right. \\
 & \left[H \left(t' - \frac{r}{c_D} \right) - H \left(t' - \frac{r}{c_S} \right) \right] + \\
 & + \frac{r_i r_k}{r^2} \left[\frac{1}{c_D} \delta \left(t', \frac{r}{c_D} \right) - \frac{1}{c_S} \delta \left(t', \frac{r}{c_S} \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{\delta_{ik}}{c_S} \delta \left(t', \frac{r}{c_S} \right) \right\} \quad (II.37)
 \end{aligned}$$

onde:

H é a Função Heaviside ou Função Degrau, definida como:

$$H(x - a) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > a \\ 0 & \text{se } x < a \end{cases}$$

$$t' = t - \tau$$

$$r = |\underline{x} - \underline{\xi}| = \left(r_i r_i \right)^{1/2}$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi)$$

$\delta(t, \tau)$ representa a Função Delta de Dirac no tempo:

$$\delta(x, a) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \neq a \\ \int_{\Omega} \delta(x, a) f(x) d\Omega = f(a) & \text{se } a \in \Omega \end{cases}$$

A solução fundamental u_{ki}^* possui as seguintes propriedades:

1) Causalidade:

$$u_{ki}^* = 0 \quad \text{sempre que } C_S(t - \tau) < |x - \xi|$$

2) Reciprocidade:

$$u_{ki}^*(x, t; \xi, \tau) = u_{ki}^*(\xi, -\tau; x, -t)$$

3) Translação no Tempo:

$$u_{ki}^*(x, t+t_1; \xi, \tau+t_1) = u_{ki}^*(x, t; \xi, \tau)$$

A simetria dos tensores implica que a componente i do deslocamento em x devido a componente k da força concentrada em ξ é igual a componente k do deslocamento em x devido a componente i da força concentrada em ξ , isto é:

$$u_{ki}^*(x, t; \xi, \tau) = u_{ik}^*(x, t; \xi, \tau) \quad (\text{II.38})$$

II.5.1.2 - Formulação Integral

O teorema da reciprocidade para a elastodinâmica relaciona dois estados elastodinâmicos cujos deslocamentos são u_i e u_i^* . Supõe-se que eles estejam distribuídos respectivamente nas regiões $\Omega + \Gamma$ e $\Omega^* + \Gamma^*$, que possuem as mesmas propriedades físicas, tal que Ω^* contém $\Omega + \Gamma$ (Figura II.3).

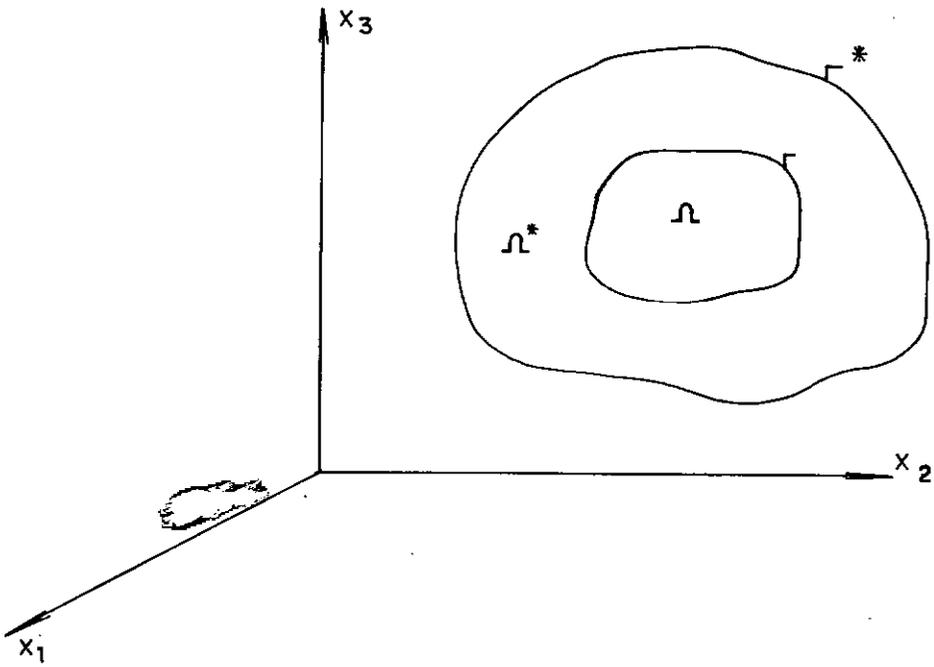


Fig.II.3 - Regiões $\Omega + \Gamma$ e $\Omega^* + \Gamma^*$

As soluções u_i e u_i^* devem satisfazer as equações de equilíbrio dinâmico, isto é:

$$\sigma_{ij,j} + \beta_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{II.39})$$

$$\sigma_{ij,j}^* + \beta_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega^* \quad (\text{II.40})$$

onde

$$\beta_i = b_i - \rho \ddot{u}_i \quad (\text{II.41})$$

$$\beta_i^* = b_i^* - \rho \ddot{u}_i^* \quad (\text{II.42})$$

Utilizando a Lei de Hooke e considerando a simetria dos tensores envolvidos, chega-se à:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* \, d\Omega \quad (\text{II.43})$$

Integrando por partes, aplicando o teorema da divergência à Equação (II.43) e utilizando as Equações (II.39) e (II.40) além da relação entre deformações específicas e deslocamentos, chega-se à:

$$\int_{\Omega} \beta_i^* u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} \beta_i u_i^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* \, d\Gamma \quad (\text{II.44})$$

que corresponde ao segundo Teorema de Betti (Identidade Recíproca de Betti-Rayleigh) para dois estados elastodinâmicos cujas forças de volume são β_i e β_i^* . Esta expressão também pode ser obtida aplicando-se o método dos resíduos ponderados à partir da Equação (II.25).

Substituindo as Equações (II.41) e (II.42) na Equação (II.44) e integrando-a em relação ao tempo, de 0 a t , obtem-se:

$$\int_0^t \int_{\Omega} b_i^* u_i \, d\Omega \, d\tau - \rho \int_0^t \int_{\Omega} \ddot{u}_i^* u_i \, d\Omega \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Gamma} p_i^* u_i \, d\Gamma \, d\tau =$$

$$\int_0^t \int_{\Omega} b_i u_i^* \, d\Omega \, d\tau - \rho \int_0^t \int_{\Omega} \ddot{u}_i u_i^* \, d\Omega \, d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Gamma} p_i u_i^* \, d\Gamma \, d\tau \quad (\text{II.45})$$

Integrando por partes em relação ao tempo, tem-se:

$$\int_0^t \ddot{u}_i u_i^* \, d\tau = v_i(x,t) u_i^*(x,t) - v_{oi} u_{oi}^* -$$

$$- \int_0^t v_i(x,\tau) v_i^*(x,\tau) \, d\tau \quad (\text{II.46})$$

$$\int_0^t \ddot{u}_i^* u_i \, d\tau = v_i^* (x, t) u_i (x, t) - v_{oi}^* u_{oi} -$$

$$- \int_0^t v_i^* (x, \tau) v_i (x, \tau) \, d\tau \quad (\text{II.47})$$

onde:

$$v_i (x, t) = \dot{u}_i \Big|_{\tau = t} \quad (\text{II.48})$$

$$v_{oi} (x) = v_{oi} (x, 0)$$

Substituindo-se as Expressões (II.46) e (II.47) em (II.45) obtem-se o teorema da reciprocidade da elastodinâmica:

$$\int_0^t \int_{\Omega} b_i^* u_i \, d\Omega \, d\tau - \rho \int_{\Omega} v_i^* u_i \, d\Omega + \rho \int_{\Omega} v_{oi}^* u_{oi} \, d\Omega +$$

$$+ \int_0^t \int_{\Gamma} p_i^* u_i \, d\Gamma \, d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} b_i u_i^* \, d\Omega \, d\tau - \rho \int_{\Omega} v_i u_i^* \, d\Omega +$$

$$+ \rho \int_{\Omega} v_{oi} u_{oi}^* \, d\Omega + \int_0^t \int_{\Gamma} p_i u_i^* \, d\Gamma \, d\Omega \quad (\text{II.49})$$

Para se obter a equação integral no contorno, um dos estados elastodinâmicos na Expressão (II.49) será considerado como aquele governado pela Equação (II.36). Neste caso, devido à propriedade da reciprocidade:

$$\frac{\partial^2 u_{ki}^*}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_{ki}^*}{\partial \tau^2} \quad (\text{II.50})$$

e como resultado da propriedade da causalidade:

$$\int_{\Omega} v_{ki}^* (x, t; \xi, t^+) u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} v_i u_{ki}^* (x, t; \xi, t^+) \, d\Omega = 0 \quad (\text{II.51})$$

Então, se os limites da integração no tempo indicados na Equação (II.49) são definidos de 0 a t^+ , sendo $t^+ = t + \epsilon$ ($\epsilon \rightarrow 0$), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u_i \delta_{ki} \delta(\xi, x) \delta(t, \tau) \, d\Omega \, d\tau + \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i \, d\Gamma \, d\tau = \\ & = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* \, d\Gamma \, d\tau + \rho \int_{\Omega} v_{oi} u_{oi}^* \, d\Omega - \rho \int_{\Omega} v_{oi}^* u_{oi} \, d\Omega + \\ & + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* \, d\Omega \, d\tau \end{aligned} \quad (\text{II.52})$$

Considerando a propriedade da Função Delta de Dirac

$$\int_0^{t^+} \int_{\Omega} u_i \delta_{ki} \delta(\xi, x) \delta(t, \tau) \, d\Omega \, d\tau = u_k (\xi, t) \quad ,$$

chega-se à seguinte expressão integral:

$$\begin{aligned}
u_k(\xi, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ki}^*(X, t; \xi, \tau) p_i(X, \tau) d\Gamma(X) d\tau - \\
& - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{ki}^*(X, t; \xi, \tau) u_i(X, \tau) d\Gamma(X) d\tau + \\
& + \rho \int_{\Omega} u_{0ki}^*(x, t; \xi) v_{0i}(x) d\Omega(x) - \\
& - \rho \int_{\Omega} v_{0ki}^*(x, t; \xi) u_{0i}(x) d\Omega(x) + \\
& + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u_{ki}^*(x, t; \xi, \tau) b_i(x, \xi) d\Omega(x) d\tau \quad (II.53)
\end{aligned}$$

A equação integral obtida fornece as componentes do deslocamento, num ponto interno ξ , em função dos deslocamentos e forças de superfícies do contorno (ponto X), das condições iniciais e das forças de volume. Como os valores relativos ao contorno devem ser previamente conhecidos é necessário uma nova equação integral particularizada para o contorno. Utilizando-se um procedimento similar ao apresentado no Apêndice 1, a seguinte equação, para o ponto ξ no contorno, é encontrada:

$$\begin{aligned}
C_{ki}(\xi) u_i(\xi, t) = & \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} u_{ki}^*(X, t; \xi, \tau) p_i(X, \tau) d\Gamma(X) d\tau - \\
& - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} p_{ki}^*(X, t; \xi, \tau) u_i(X, \tau) d\Gamma(X) d\tau + \\
& + \rho \int_{\Omega} u_{0ki}^*(x, t; \xi) v_{0i}(x) d\Omega(x) - \\
& - \rho \int_{\Omega} v_{0ki}^*(x, t; \xi) u_{0i}(x) d\Omega(x) + \\
& + \int_0^{t^+} \int_{\Omega} u_{ki}^*(x, t; \xi, \tau) b_i(x, \tau) d\Omega(x) d\tau \quad (II.54)
\end{aligned}$$

onde:

$$C_{ki}(\xi) = \frac{1}{2} \delta_{ki}$$

para contornos suaves.

II.5.2 - Movimento Harmônico

II.5.2.1 - Solução Fundamental

Em muitas aplicações práticas pode ser necessário prever o comportamento dinâmico da estrutura sob o efeito de uma excitação harmônica, sendo a resposta para este tipo de solicitação uma função da frequência. As condições iniciais podem ser

desprezadas se for considerada a hipótese de que um tempo suficientemente longo se passou, de modo que o estado estacionário foi alcançado. Esta situação pode ser matematicamente representada aplicando-se a transformada de Fourier à Equação (II.25).

Seja $\psi(t)$ a função a ser transformada. Então:

$$\bar{\psi}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-iwt} dt = F \left[\psi(t) \right]$$

e (II.55)

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}(w) e^{iwt} dw = F^{-1} \left[\bar{\psi}(w) \right]$$

Integrando por partes a Equação (II.55), tem-se:

$$F \left[\ddot{\psi}(t) \right] = (iw)^2 \bar{\psi}(w) \quad (II.56)$$

Aplicando este procedimento à Equação (II.25), com as variáveis transformadas representadas por:

$$U_i(x,w) = F \left[u_i(x,t) \right] \quad (II.57)$$

$$B_i(x,w) = F \left[b_i(x,t) \right] \quad (II.58)$$

e também considerando:

$$F \left[\ddot{u}_i(x,t) \right] = -w^2 U_i(x,w) \quad (II.59)$$

a equação de Navier se transforma em:

$$(C_D^2 - C_S^2) U_{j,ji} + C_S^2 U_{i,jj} + \frac{B_i}{\rho} + w^2 U_i = 0 \quad (\text{II.60})$$

com as condições de contorno transformadas:

$$U_i(x, w) = \bar{U}_i(x, w) \text{ em } \Gamma_1 \quad (\text{II.61})$$

$$P_i(x, w) = \bar{P}_i(x, w) \text{ em } \Gamma_2 \quad (\text{II.62})$$

É importante observar que as condições iniciais não entram na formulação e que a transformada da equação de movimento é uma equação diferencial parcial elíptica.

A solução fundamental da Equação (II.60), para o caso tridimensional, que corresponde à resposta de um meio elástico infinito a ação de uma carga harmônica concentrada de frequência w , aplicada no ponto ξ , é da forma:

$$U_{ij}^*(\xi, x, w) = \frac{1}{4\pi \rho C_S^2} (\psi \delta_{ij} - X r_{,i} r_{,j}) \quad (\text{II.63})$$

onde as funções ψ e X são definidas como sendo:

$$\psi = \frac{e^{-iwr/C_S}}{r} + \left\{ \frac{C_S^2}{(iw)^2 r^2} + \frac{C_S}{iwr} \right\} \frac{e^{-iwr/C_S}}{r} - \frac{C_S^2}{C_D^2} \left\{ \frac{C_D^2}{(iw)^2 r^2} + \frac{C_D}{iwr} \right\} \frac{e^{-iwr/C_D}}{r} \quad (\text{II.64})$$

$$\begin{aligned}
 X = & \left[\frac{3C_S^2}{(iw)^2 r^2} + \frac{3C_S}{iwr} + 1 \right] \frac{e^{-iwr/C_S}}{r} - \\
 & - \frac{C_S^2}{C_D^2} \left[\frac{3C_D^2}{(iw)^2 r^2} + \frac{3C_D}{iwr} \right] \frac{e^{-iwr/C_D}}{r}
 \end{aligned} \tag{II.65}$$

As forças de superfície correspondentes, com normal exterior n , são:

$$\begin{aligned}
 P_{ij}^*(\xi, x, w) = & \frac{1}{\alpha\pi} \left[\left[\psi_{,r} - \frac{X}{r} \right] \left[\delta_{ij} r_{,n} + r_{,j} n_i \right] - \frac{2X}{r} \left[n_j r_{,i} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 2 r_{,i} r_{,j} r_{,n} \right] - 2 X_{,r} r_{,i} r_{,j} r_{,n} + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{C_D^2}{C_S^2} - 2 \right] \left[\psi_{,n} - X_{,r} - \frac{dX}{2r} \right] r_{,i} n_j \right]
 \end{aligned} \tag{II.66}$$

II.5.2.2 - Formulação Integral

A equação integral será obtida aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados à Equação (II.60), escrita em função da transformada de Fourier $U_i(x, w)$. Este procedimento leva à seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ (C_D^2 - C_S^2) U_{j,j_i} + C_D^2 U_{i,jj} + \frac{B_i}{\rho} + w^2 U_i \right\} U_i^* d\Omega = \\
 & = \int_{\Gamma_2} \left\{ P_i - \bar{P}_i \right\} U_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \left\{ U_i - \bar{U}_i \right\} P_i^* d\Gamma. \quad (\text{II.67})
 \end{aligned}$$

onde \bar{U}_i e \bar{P}_i são as condições de contorno descritas nas Equações (II.61) e (II.62), respectivamente, e U_i^* ($i = 1, 2, 3$) é interpretada como a função de ponderação.

Integrando-se a Equação (II.67) por partes, duas vezes, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left\{ (C_D^2 - C_S^2) U_{j,j_i}^* + C_S^2 U_{i,jj}^* + w^2 U_i^* \right\} U_i d\Omega + \\
 & + \int_{\Omega} \tilde{B}_i U_i^* d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{P}_i U_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} P_i U_i^* d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_1} \bar{U}_i P_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} U_i P_i^* d\Gamma \quad (\text{II.68})
 \end{aligned}$$

onde: $\tilde{B}_i = \frac{B_i}{\rho}$.

Considerando que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, a Equação (II.68) pode ser escrita do seguinte modo:

$$\int_{\Omega} \left\{ (C_D^2 - C_S^2) U_{j,ji}^* + C_S^2 U_{i,jj}^* + w^2 U_i^* \right\} U_i \, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \tilde{B}_i U_i^* \, d\Omega = - \int_{\Gamma} P_i U_i^* \, d\Gamma + \int_{\Gamma} U_i P_i^* \, d\Gamma \quad (\text{II.69})$$

ou na forma:

$$\int_{\Omega} \tilde{B}_i^* U_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} P_i^* U_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} \tilde{B}_i U_i^* \, d\Omega +$$

$$+ \int_{\Gamma} P_i U_i^* \, d\Gamma \quad (\text{II.70})$$

que corresponde à identidade dinâmica de Betti-Rayleigh.

Analogamente ao que foi feito para o caso transiente, um dos estados elastodinâmicos na Equação (II.70) será considerado como sendo aquele governado pela Equação (II.63). Neste caso as forças de volume \tilde{B}_i^* são substituídas por forças concentradas harmônicas, de amplitudes unitárias, aplicadas na direção k do ponto ξ de um meio infinito $\Omega^* + \Gamma^*$ que contém $\Omega + \Gamma$ em cada uma das três direções ortogonais separadamente. \tilde{B}_{ki}^* é dada por:

$$\tilde{B}_{ki}^* = \delta_{ki} \delta(\xi, \mathbf{x}) \quad (\text{II.71})$$

onde $\delta(\xi, \mathbf{x})$ é a Função Delta de Dirac e δ_{ki} o Delta de Kronecker, para $k = 1, 2, 3$ (Figura II.4).

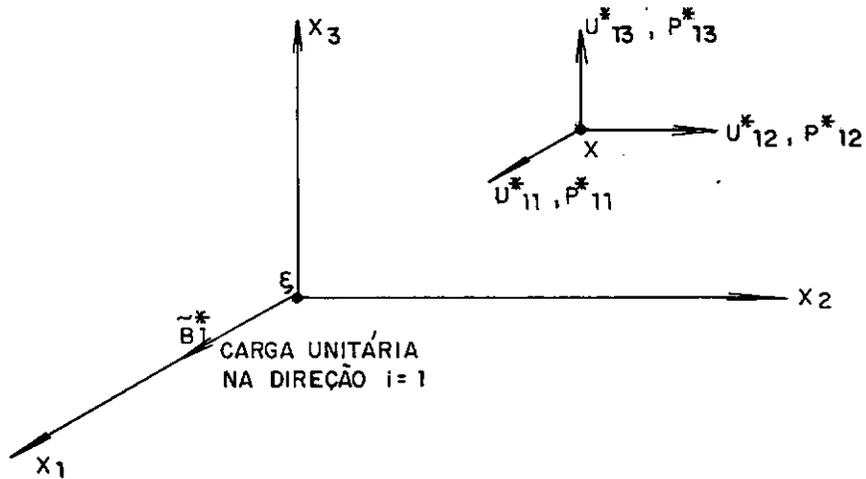


Fig.II.4 - Deslocamentos e forças de superfícies correspondentes à carga unitária aplicada na direção $k = 1$

Uma vez que $\delta(\xi, x) = 0$ se $\xi \neq x$, tem-se:

$$\int_{\Omega^*} g(x) \delta(\xi, x) d\Omega(x) = g(\xi) \quad (\text{II.72})$$

então a primeira integral da Equação (II.70) se reduz a:

$$\int_{\Omega} \tilde{B}_{ki}^* U_i d\Omega = U_i(\xi) \delta_{ki} \quad (\text{II.73})$$

desde que ξ pertença a Ω .

Assim, escrevendo a Equação (II.70) para cada componente do carregamento unitário atuando em separado, obtem-se três equações da forma:

$$U_k(\xi) + \int_{\Gamma} P_{ki}^*(\xi, x) U_i(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U_{ki}^*(\xi, x) P_i(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} U_{ki}^*(\xi, x) \tilde{B}_i(x) d\Omega(x) \quad (\text{II.74})$$

A Equação (II.74), que é a equivalente harmônica da identidade de Somigliana para deslocamentos, permite calcular o valor de U_k em um ponto interno ξ , em função dos deslocamentos e forças de superfície no contorno e da integral das forças de volume. As funções que nela aparecem também dependem da frequência, como pode ser visto no item II.5.2.1, porém w aqui foi omitido como parâmetro para simplificar a notação.

II.6 - Vibração Livre

O problema de valor inicial de contorno para a elastodinâmica, definido em um corpo contido num domínio Ω , circundado pelo contorno Γ , requer que sejam determinados estados de equilíbrio dinâmico em função de deslocamentos \underline{u} , associados a valores de t , que são soluções da equação diferencial:

$$C_D^2 \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) - C_S^2 \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) + \frac{b}{\rho} = \ddot{\underline{u}} \quad (\text{II.75})$$

e de determinadas condições de contorno, essenciais e naturais, além das condições iniciais.

Seja considerado o seguinte problema de autovalor:

$$C_D^2 \nabla (\nabla \cdot \underline{\psi}) - C_S^2 \nabla \times (\nabla \times \underline{\psi}) + w^2 \underline{\psi} = 0 \quad (\text{II.76})$$

que também pode ser representado por:

$$G \psi_{i,jj} + (\lambda + G) \psi_{j,ji} + \rho w^2 \psi_i = 0 \quad (\text{II.77})$$

onde

$$\psi_i = \psi_i(x, w) \quad (\text{II.78})$$

e que satisfaz as condições de contorno homogêneas:

$$\psi_i(x, w) = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{II.79})$$

$$P_i(x, w) = G \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} + \psi_{j,i} n_j \right] +$$

$$+ \lambda \psi_{j,j} n_i = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{II.80})$$

sendo $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

As funções $\psi(x) e^{-i\omega t}$ correspondem às oscilações livres de um corpo ocupando a região Ω e que tem condições de contorno homogêneas em termos de deslocamentos prescritos para a porção Γ_1 de Γ , e em termos de forças de superfície para a porção Γ_2 de Γ . A raiz quadrada do autovalor w^2 denomina-se frequência natural do sistema, que tem como principal característica ser real.

A solução de (II.77), com (II.79) e (II.80), produz uma seqüência infinita de w_n , $n = 1, 2, \dots, \infty$, visto que o sistema é contínuo. Um modo particular de vibração $\psi_n(x)$ está associado à freqüência natural w_n e é denominado autofunção $\psi_n(x)$.

Na referência [12] encontram-se as demonstrações que todos os autovalores w^2 são reais e não negativos e que o universo de autofunções $\psi_n(x)$ constitui um sistema ortonormal.

CAPÍTULO III

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE

III.1 - Introdução

O Método dos Elementos de Contorno tem se destacado na resolução de problemas de engenharia por sua maior simplicidade e eficiência se for comparado com outros métodos de discretização em elementos, como o Método dos Elementos Finitos. Esta simplicidade decorre da discretização apenas do contorno o que leva a uma menor massa de dados para um mesmo refinamento de resultados.

Considerando o número de incógnitas, cabe acrescentar que embora seja obtido um sistema de equações de menor ordem, o mesmo não é simétrico nem em banda.

Uma vez determinados os valores das incógnitas no contorno pode-se obter resultados para pontos selecionados no interior do domínio.

III.2 - Fundamentos do Método

Neste capítulo será mostrado como um problema de elasticidade, governado pelas equações de equilíbrio de Navier

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ji} + b_i = 0 \quad (\text{III.1})$$

pode ser reduzido a equações integrais de contorno, relacionando somente valores das incógnitas no contorno, que podem ser calculadas através de tratamento numérico.

III.2.1 - Identidade de Somigliana para Deslocamentos

Seja um corpo definido por $\Omega + \Gamma$ (Γ é o contorno e Ω o domínio) que está em estado de equilíbrio sob a ação de cargas e deslocamentos prescritos (Figura III.1).

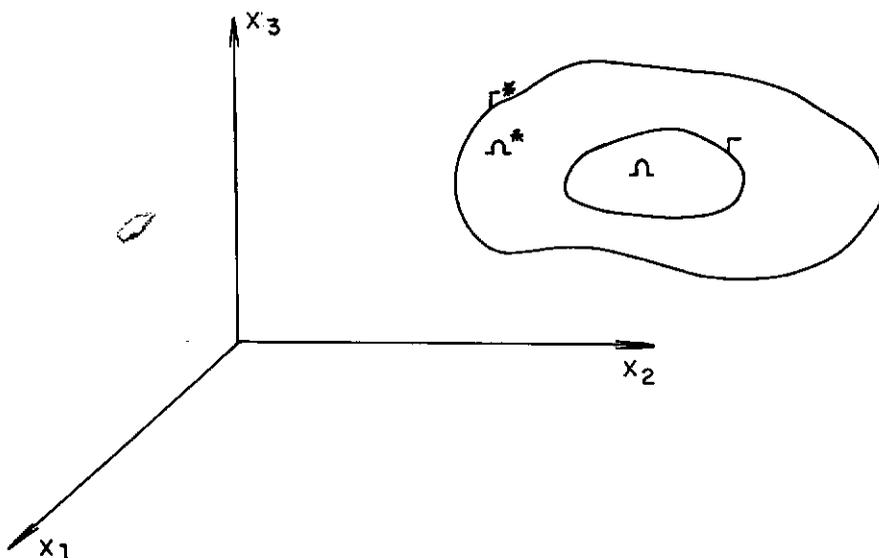


Fig.III.1 - Região geral $\Omega^* + \Gamma^*$ contendo o corpo $\Omega + \Gamma$ e com as mesmas propriedades elásticas

Seja outro domínio designado por Ω^* , com contorno Γ^* , que contém o corpo $\Omega + \Gamma$. Como a anterior, esta nova região também está em estado de equilíbrio.

A Lei de Hooke, na Equação (II.11) pode ser colocada alternativamente sob a forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{III.2})$$

onde C_{ijkl} é o tensor isotrópico de 4ª ordem de constantes elásticas:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{III.3})$$

e para os domínios representados na Figura III.1 tem-se que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{III.4})$$

e

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^* \quad (\text{III.5})$$

Utilizando (III.2) e considerando a simetria do tensor C_{ijkl} pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \epsilon_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^* \, d\Omega \quad (\text{III.6})$$

Primeiro integrando por partes e depois aplicando o teorema da divergência à Equação (III.6) e também utilizando as Expressões (II.6) e a equação de equilíbrio estático no interior de um corpo [14],

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{III.7})$$

chega-se à expressão:

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* \, d\Gamma \quad (\text{III.8})$$

que corresponde, para a elastostática, à equação obtida em (II.44) para a elastodinâmica.

Com o objetivo de se deduzir a equação integral básica do método de elementos de contorno para elasticidade, a identidade de Somigliana, serão utilizados três campos de deslocamentos u_{1i}^* , u_{2i}^* e u_{3i}^* (Fig.II.4) que correspondem à solução da equação:

$$G u_{ki,jj}^* + (\lambda + G) u_{k,ji}^* = \delta_{ki} \delta(\xi, x) \quad (\text{III.9})$$

em $\Omega^* + \Gamma^*$, onde $\delta(\xi, x)$ representa a Função Delta de Dirac.

A Equação (III.9) fornece, para cada valor de k ($k=1,2,3$), um sistema de três equações diferenciais cuja solução $u_{ki}^*(\xi, x)$ representa as componentes do deslocamento no ponto x , segundo a direção i , correspondente a uma força unitária aplicada no ponto ξ segundo a direção k .

Substituindo u_i^* por u_{ki}^* na Equação (III.8) e considerando que:

$$\int_{\Omega} \delta_{ki} \delta(\xi, \mathbf{x}) u_i d\Omega(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \delta(\xi, \mathbf{x}) u_k d\Omega(\mathbf{x}) = u_k(\xi) \quad (\text{III.10})$$

chega-se à:

$$u_k(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(\xi, \mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(\xi, \mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} u_{ki}^*(\xi, \mathbf{x}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{III.11})$$

A equação integral obtida, a identidade de Somigliana, permite calcular a componente u_k do deslocamento em qualquer ponto interno ξ , em função dos valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno e das forças de volume.

III.2.2 - Equação Integral no Contorno

À partir da identidade de Somigliana e utilizando o procedimento descrito no Apêndice 1, obtém-se:

$$C_{ki}(\xi) u_k(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ki}^*(\xi, \mathbf{x}) p_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(\xi, \mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} u_{ki}^*(\xi, \mathbf{x}) b_i(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{III.12})$$

onde o ponto ξ pertence ao contorno Γ .

A Equação (III.12) é válida para os casos bi e tridimensionais e fornece uma relação que deve ser satisfeita pelas forças de superfície e pelos deslocamentos no contorno. Portanto, quando as condições de contorno são prescritas, esta equação permite calcular as incógnitas restantes do contorno.

III.3 - Soluções Fundamentais

Existem diferentes soluções da Equação (III.9) que podem ser empregadas. Estas soluções variam tanto com relação à região $\Omega^* + \Gamma^*$ como também em relação às condições de contorno.

O caso para o qual Ω^* é considerado como um meio elástico infinito, corresponde à solução fundamental de Kelvin e as expressões para os deslocamentos e forças de superfícies fundamentais são dadas por:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi (1-\nu) G r} \left\{ (3-4\nu) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (\text{III.13})$$

para o caso tri-dimensional e

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi (1-\nu) G} \left\{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (\text{III.14})$$

para o caso de estado plano de deformação, bi-dimensional.

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\alpha\pi (1-\nu) r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + \beta r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\} \quad (\text{III.15})$$

onde: $\alpha = 2,1$; $\beta = 3,2$ para o caso tridimensional e estado plano de deformação, respectivamente e $r = r(\xi, x)$ representa a distância entre ξ e x e suas derivadas são em relação às coordenadas de x , ou seja:

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad (\text{III.16})$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (\text{III.17})$$

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = - \frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \quad (\text{III.18})$$

e n_i são os cossenos diretores.

Além das expressões anteriores, verifica-se que as deformações ϵ_{jk}^* em qualquer ponto x devido à carga unitária aplicada em ξ , na direção i , podem ser escritas do seguinte modo:

$$\epsilon_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\alpha\pi (1-\nu) G r^\alpha} \left\{ (1-2\nu) (r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_{,i} \delta_{jk} + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (\text{III.19})$$

A Expressão (III.19) é obtida derivando-se a solução fundamental em relação às coordenadas do ponto campo $x_i(x)$.

As tensões, fornecidas pela lei de Hooke, são:

$$\sigma_{jki}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\alpha\beta(1-\nu)r^\alpha} \left\{ (1-2\nu) (r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ki}) - \right. \\ \left. - r_{,i} \delta_{jk} + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (III.20)$$

As Expressões (III.13) e (III.15) também podem ser obtidas através das Equações (II.63) e (II.66), respectivamente, tomando-se o limite da frequência w , da força de excitação harmônica, tendendo a zero e substituindo-se e^{-iwr/C_S} pela sua expansão em série:

$$e^{-iwr/C_S} = 1 - \frac{iwr}{C_S} + \frac{1}{2} \left(\frac{iwr}{C_S} \right)^2 + 0(iw^3) \quad (III.21)$$

Para obter as expressões relativas ao estado plano de tensões, basta substituir ν por $\bar{\nu}$ e E por \bar{E} , dados por:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (III.22)$$

$$\bar{E} = \frac{E(1 + 2\nu)}{(1 + \nu)^2} \quad (III.23)$$

o que implica em:

$$\bar{G} = G \quad (\text{III.24})$$

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda G}{(\lambda + 2G)} \quad (\text{III.25})$$

III.4 - Tensões nos Pontos Internos

As tensões nos pontos internos são calculadas através da diferenciação da Equação (III.11) em relação ao ponto fonte (ξ) e depois substituindo-se a expressão obtida na Lei de Hooke, Equação (II.11):

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) = & \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

onde:

$$D_{kij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{kl}^*}{\partial x_l} + G \left[\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right] \quad (\text{III.27})$$

$$S_{kij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left[\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right] \quad (\text{III.28})$$

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA OBTENÇÃO DA
"MATRIZ DE MASSA"IV.1 - Introdução

A técnica dos elementos de contorno tem sido utilizada com sucesso em análises de vibrações forçadas de estruturas [5], [6], [18] e [19] e para a determinação da rigidez dinâmica de fundações [4]. Nestas aplicações é necessário conhecer as respostas para a gama de frequências de interesse até se poder caracterizar a resposta dinâmica do sistema.

Para o caso de vibrações livres, no entanto, basta apenas encontrar as frequências naturais e os modos de vibração do sistema. Quando se utiliza a formulação do Método dos Elementos de Contorno, esta análise é feita de maneira semelhante à de vibrações forçadas, isto é, pesquisando-se a resposta do sistema para diferentes frequências de forma a identificar aquelas para as quais ocorre a ressonância.

A necessidade desta varredura está associada ao fato da solução fundamental das equações diferenciais que governam o problema ser dependente da frequência, produzindo deste modo um problema de autovalor não algébrico. Além do mais, a solução fundamental para a elastodinâmica é expressa em termos de exponenciais, com o autovalor como um parâmetro. A integração destas funções sobre o contorno tem que ser efetuada para cada frequên-

cia, o que torna o processo antieconômico para aplicações práticas.

O procedimento descrito a seguir reduz o problema de vibrações livres a um problema de autovalor algébrico. A principal vantagem deste recurso é que as integrais no contorno precisam ser calculadas apenas uma vez, já que são independentes da frequência. Sua principal característica é a representação da "matriz de massa" em função da geometria do contorno, permitindo que as equações sejam tratadas de maneira similar ao Método dos Elementos Finitos, isto é, o problema é reduzido a um conjunto de equações algébricas expressas em forma matricial, que são geradas empregando-se a solução fundamental da elasticidade estática.

IV.2 - Aproximação da Integral do Domínio

Se for considerado no desenvolvimento do capítulo anterior as equações diferenciais que governam o movimento harmônico.

$$\sigma_{ij,j} + w^2 \rho u_i = 0 \quad (\text{IV.1})$$

ao invés da Equação (III.7), obtém-se as seguintes equações integrais para o contorno:

$$\begin{aligned}
C_{ij}(\xi) u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\
+ w^2 \rho \int_{\Omega} u_j(\mathbf{x}) u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (IV.2)
\end{aligned}$$

Nas expressões acima as incógnitas são os valores de deslocamentos e forças de superfície no contorno Γ , e também os valores dos deslocamentos dentro do domínio que aparecem no termo inercial. Estes deslocamentos devem ser interpolados de maneira tal que somente as incógnitas do contorno permaneçam nas equações que resolvem o problema, e conseqüentemente a integral no domínio pode ser transformada numa integral de contorno.

Uma classe de funções $f^k(\mathbf{x})$ (onde k representa o membro da classe) será utilizada na aproximação de $u_j(\mathbf{x})$, da seguinte forma:

$$u_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^M \alpha_{jk} f^k(\mathbf{x}) \quad (IV.3)$$

onde α_{jk} são coeficientes a determinar e M é o número total de funções $f(\mathbf{x})$ que serão utilizadas.

Com esta substituição, a integral no domínio das Equações (IV.2) se transforma em:

$$\int_{\Omega} u_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) = \sum_{k=1}^M \alpha_{jk} \left[\int_{\Omega} f^k(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega(x) \right] \quad (\text{IV.4})$$

Se o Método dos Resíduos Ponderados for utilizado na Equação (IV.1), com a função de ponderação sendo a solução fundamental de Kelvin, e se o teorema da divergência for aplicado à primeira integral que surge, chega-se à:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} u_j \sigma_{ijk,k}^* d\Omega + \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma \quad (\text{IV.5})$$

onde σ_{ijk}^* é o campo de tensões correspondente à solução fundamental u_{ij}^* e que se relaciona com p_{ij}^* através da igualdade:

$$p_{ij}^* = \sigma_{ijk}^* n_k \quad (\text{IV.6})$$

A similaridade da forma da integral no domínio de (IV.5), que foi transformada em integrais no contorno, com a integral do segundo termo na Equação (IV.4) sugere que é possível encontrar um pseudo campo de deslocamento ψ_{lj}^k e seu correspondente tensor de tensões τ_{ljm}^k tal que:

$$\tau_{ljm,m}^k = \delta_{lj} f^k \quad (\text{IV.7})$$

e a transformação da integral no segundo termo de (IV.4) se dará da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \alpha_{jk} \int_{\Omega} f^k(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega &= \alpha_{lk} \int_{\Omega} \delta_{lj} f^k(x) u_{jk}^*(\xi, x) d\Omega = \\ &= \alpha_{lk} \int_{\Omega} \tau_{ljm,m}^k(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Omega \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Considerando a igualdade apresentada na Equação (IV.5), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tau_{ljm,m}^k u_{ij}^* d\Omega &= \int_{\Omega} \psi_{lj}^k(x) \sigma_{ijm,m}^*(\xi, x) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \eta_{lj}^k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \psi_{lj}^k(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (IV.9)$$

Considerando a definição da força de volume para a solução fundamental b_i^* estabelecida por (III.9) na integral que envolve $\sigma_{ijm,m}^*$ em (IV.9), e operando com as integrais com o objetivo de levar o ponto ξ para o contorno, chega-se à:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \tau_{ljm,m}^k u_{ij}^* d\Omega &= -C_{ij} \psi_{lj}^k(\xi) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \eta_{lj}^k(x) d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \psi_{lj}^k(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (IV.10)$$

onde

$$\eta_{\ell j}^k = \tau_{\ell jm}^k n_m \quad (\text{IV.11})$$

é o pseudo campo de forças de superfície correspondente ao campo de deslocamento $\psi_{\ell j}^k$.

Substituindo estes resultados na Equação (IV.2), obtém-se:

$$\begin{aligned} C_{ij}(\xi) u_i(\xi) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma = \\ = w^2 \rho \sum_{k=1}^M \left[\left\{ -C_{ij} \psi_{\ell j}^k(\xi) + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \eta_{\ell j}^k(x) d\Gamma - \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \psi_{\ell j}^k(x) d\Gamma \right\} \alpha_{\ell k} \right] \quad (\text{IV.12}) \end{aligned}$$

que representa uma expressão integral no contorno, adequada para uma análise numérica.

IV.3 - As Funções $f^k(x)$

Como foi visto anteriormente, um conjunto de funções f^k deve ser definido com o objetivo de permitir a aproximação dos deslocamentos dentro do domínio. Por razões computacionais a geração e os cálculos envolvendo estas funções devem ser simples.

Além disso devem cumprir o requisito dado pela Equação (IV.7), para efetivamente permitirem a transformação da integral do domínio em equivalentes integrais de contorno.

Uma classe de funções proposta por D. NARDINI e C.A. BREBBIA, em [10] e [15], associada a pontos particulares no plano e que cumpre estes requisitos é:

$$f^k(x) = C - R(\xi_k, x) \quad (\text{IV.13})$$

onde:

$R(\xi_k, x)$ é a distância do ponto ξ_k , onde a função é aplicada, ao ponto x .

C é uma constante adequada.

O correspondente campo de funções $\psi_{\ell j}^k$, que satisfaz à Equação (IV.6) é:

$$\psi_{\ell j} = \left[\frac{1 - 2\nu}{5 - 4\nu} C + \frac{R}{30(1 - \nu)} \right] \bar{x}_\ell \bar{x}_j - \frac{3 - 10\nu}{90(1 - \nu)} \delta_{\ell j} R^3 \quad (\text{IV.14})$$

onde \bar{x}_ℓ são as componentes das coordenadas de ξ_k até x , conforme a Figura (IV.1).

Vários tipos de funções, derivadas da proposta acima, podem ser utilizadas, como por exemplo:

1) Uma constante do tipo $f^k(x) = 1$

Neste caso:

$$\psi_{\ell j} = \frac{1 - 2\nu}{5 - 4\nu} \bar{x}_{\ell} \bar{x}_j \quad (\text{IV.15})$$

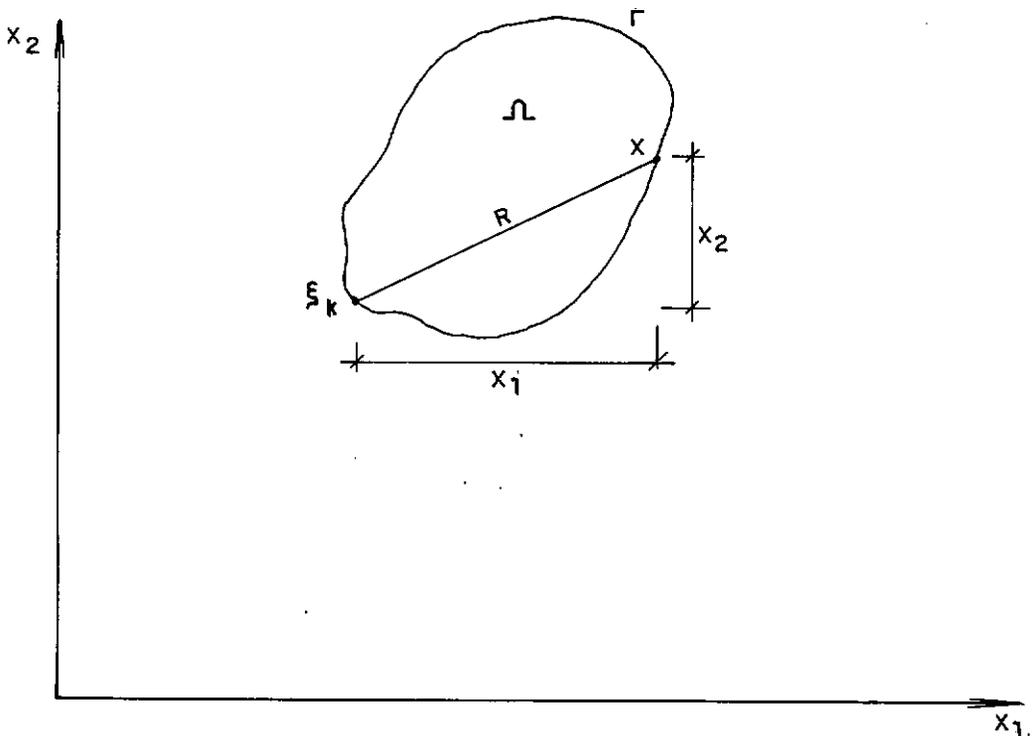


Fig.IV.1 - Definição de R e de \bar{x}_{ℓ} , presentes na Equação (IV.14)

2) Uma função linear em termos de \bar{x}_i , ou seja:

$$f^k(x) = \bar{x}_i \quad (\text{IV.16})$$

que está associada a:

$$\psi_{\ell j} = (a_1 \delta_{ji} \bar{x}_\ell + a_2 \delta_{i\ell} \bar{x}_j + a_3 \delta_{\ell j} \bar{x}_i) \quad (\text{IV.17})$$

onde:

$$a_1 = - \frac{1}{16 (3 - 4\nu)}$$

$$a_2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} a_1 \quad (\text{IV.18})$$

$$a_3 = - (5 - 8\nu) a_1$$

A escolha da classe de funções $f^k(x)$ que é utilizada na aproximação do termo inercial terá muita influência na precisão dos resultados, sendo que poucas restrições são impostas a esta escolha.

Uma classe simples de funções de interpolação é suficiente para se obter com razoável precisão os modos e as frequências naturais de vibração mais baixos. Para a obtenção dos modos e frequências mais altos, com esta mesma precisão, é necessária uma aproximação mais sofisticada, acoplada à introdução de alguns graus de liberdade no interior do domínio. A escolha da função depende então da aplicação particular do método, que ditará a qualidade necessária aos resultados.

CAPÍTULO V

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

V.1 - Introdução

A equação integral obtida em (IV.12) envolve uma distribuição dos deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno. O ponto ξ é o ponto nodal onde a força unitária, que produz o campo de deslocamentos u_{ij}^* , esta aplicada (ponto fonte), enquanto x representa os pontos de integração sobre o contorno (ponto campo).

O tratamento numérico a ser aplicado para solucionar esta equação considera uma discretização do contorno em um número finito de elementos, e conseqüentemente um número finito de pontos nodais sobre os quais os deslocamentos e forças de superfícies variam de forma previamente estabelecida. Esta distribuição discreta leva a um sistema de equações algébricas envolvendo valores nodais de deslocamentos e forças de superfície, uma vez que as integrais são calculadas normalmente de forma algébrica, sobre cada um dos elementos do contorno.

A Equação (IV.12), quando utilizada em uma análise numérica, implica em uma minimização de erros da solução aproximada, uma vez que foi obtida utilizando-se o método dos Resíduos Ponderados.

Esta equação pode ser colocada sob uma forma mais compacta utilizando notação matricial, ou seja:

$$\begin{aligned}
 & \underline{c}(\xi_\ell) \underline{u}(\xi_\ell) + \int_{\Gamma} \underline{p}^*(\xi_\ell, \mathbf{x}) \underline{u}(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \underline{u}^*(\xi_\ell, \mathbf{x}) \underline{p}(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) = \\
 & = w^2 \rho \sum_{k=1}^N \alpha^k \left\{ - \underline{c}(\xi_\ell) \underline{\psi}(\xi_\ell) + \int_{\Gamma} \underline{u}^*(\xi_\ell, \mathbf{x}) \underline{\eta}^k(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\
 & \left. - \int_{\Gamma} \underline{p}^*(\xi_\ell, \mathbf{x}) \underline{\psi}^k(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) \right\} \tag{V.1}
 \end{aligned}$$

para valores de $\ell = 1, \dots, N$, onde N é o número de pontos nodais do contorno Γ .

V.2 - Procedimento Numérico Geral

Ao longo de cada elemento, as variáveis devem ser interpoladas em termos dos valores nodais, da seguinte maneira:

$$\mathbf{v} = \sum_{q=1}^{M_e} N_q \mathbf{v}_q \tag{V.2}$$

onde N_q são funções de interpolação e \mathbf{v}_q é o valor da variável \mathbf{v} no ponto nodal q . As variáveis em questão podem ser as coordenadas x_1 e x_2 , os deslocamentos u_j e $\psi_{\ell j}^k$ ou as forças de superfície p_j e $\eta_{\ell j}^k$. A ordem de interpolação é determinada pelo número de pontos nodais sobre o elemento e , indicado por M_e .

onde N_e é o número de elementos em que foi dividido o contorno Γ , e Γ_e a parte do contorno que pertence ao elemento e .

Procedendo-se do mesmo modo com a Expressão (V.5) para a segunda integral do lado esquerdo da Equação (V.1), tem-se:

$$\int_{\Gamma} \underline{u}^* \underline{p} \, d\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma_e} \underline{u}^* \underline{N} \, d\Gamma \right) \underline{p}_q^e = \sum_{e=1}^{N_e} \underline{g}_e \underline{p}_q^e \quad (V.7)$$

As integrais da Equação (V.1) associadas ao termo inercial não contêm funções incógnitas e podem ser computadas diretamente, mas este cálculo requer um esforço substancial uma vez que é necessário a integração sobre todo o contorno, para cada coeficiente. No entanto, como estas integrais têm formas idênticas às integrais que contêm \underline{u} e \underline{p} , as mesmas funções de interpolação utilizadas para aproximar estas variáveis sobre os elementos de contorno serão usadas para aproximar a variação de $\underline{\psi}^k$ e $\underline{\eta}^k$. Este procedimento dá-se do seguinte modo para as funções $\underline{\psi}^k$:

$$\underline{\psi}^k = \underline{N} \underline{\psi}_e^k \quad (V.8)$$

então:

$$\int_{\Gamma} \underline{p}^* \underline{\psi}^k d\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{\psi}_e^k =$$

$$= \sum_{e=1}^{N_e} \underline{h}_e \underline{\psi}_e^k \quad (V.9)$$

onde $\underline{\psi}_e^k$ é a matriz dos valores de $\psi_{\ell j}^k$ calculados nos pontos nodais do elemento e.

Do mesmo modo, para $\underline{\eta}^k$:

$$\underline{\eta}^k = \underline{N} \underline{\eta}_e^k \quad (V.10)$$

então:

$$\int_{\Gamma} \underline{u}^* \underline{\eta}^k d\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma \right) \underline{\eta}_e^k =$$

$$= \sum_{e=1}^{N_e} \underline{g}_e \underline{\eta}_e^k \quad (V.11)$$

onde $\underline{\eta}_e^k$ é a matriz dos valores $\eta_{\ell j}^k$ calculados nos pontos nodais do elemento e.

Efetuada o somatório das contribuições de todos os elementos pode-se escrever (V.1), num sistema global, da seguinte forma:

$$\underline{H} \underline{U} - \underline{G} \underline{P} = w^2 \rho (\underline{G} \underline{\eta} - \underline{H} \underline{\psi}) \underline{\alpha} \quad (V.12)$$

A geometria de cada elemento é definida em termos da coordenada natural e das coordenadas cartesianas dos pontos nodais. As coordenadas cartesianas \underline{x}^e dos pontos do contorno, situados ao longo do elemento e, podem então ser expressas por:

$$\underline{x}^e = \underline{M} \underline{x}_q^e \quad (V.3)$$

onde \underline{M} é a matriz contendo as funções de interpolação e \underline{x}_q^e o vetor de coordenadas nodais do elemento e.

Os deslocamentos e forças de superfície também são aproximados sobre cada elemento da seguinte forma:

$$\underline{u}^e = \underline{N} \underline{u}_q^e \quad (V.4)$$

$$\underline{p}^e = \underline{N} \underline{p}_q^e \quad (V.5)$$

sendo \underline{N} a matriz contendo as funções de interpolação e \underline{u}_q^e e \underline{p}_q^e os vetores contendo os valores nodais de deslocamentos e forças de superfície do elemento e, respectivamente.

Substituindo-se (V.4) na primeira integral do lado esquerdo da Equação (V.1) e colocando-a sob a forma discretizada, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \underline{p}^* \underline{u} \, d\Gamma = \sum_{e=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma_e} \underline{p}^* \underline{N} \, d\Gamma \right) \underline{u}_q^e = \sum_{e=1}^{N_e} \underline{h}_e \underline{u}_q^e \quad (V.6)$$

onde a matriz global \underline{H} é obtida a partir das contribuições individuais de \underline{h}_e e das submatrizes \underline{C} . A matriz global \underline{G} é obtida das matrizes \underline{g}_e , enquanto as matrizes $\underline{\eta}$ e $\underline{\psi}$ contêm os valores das funções η e ψ nos pontos nodais.

A relação existente entre \underline{u} e $\underline{\alpha}$, definida na Equação (IV.3), pode ser expressa sob a seguinte forma matricial, agora para todos os pontos nodais:

$$\underline{U} = \underline{F} \underline{\alpha} \quad (\text{V.13})$$

onde os elementos da matriz \underline{F} são os valores das funções $f^k(x)$ nos pontos nodais. Se as funções f^k são linearmente independentes, e se são, quantitativamente, iguais ao número de nós, a matriz \underline{F} é regular e quadrada e possui uma inversa $\underline{E} = \underline{F}^{-1}$. Deste modo:

$$\underline{\alpha} = \underline{E} \underline{U} \quad (\text{V.14})$$

substituindo a Equação (V.14) na Equação (V.12), tem-se:

$$\underline{H} \underline{U} - \underline{G} \underline{P} = w^2 \underline{M} \underline{U} \quad (\text{V.15})$$

onde:

$$\underline{M} = \rho (\underline{G} \underline{\eta} - \underline{H} \underline{\psi}) \underline{E} \quad (\text{V.16})$$

A consideração das condições de contorno homogêneas especifica que, em qualquer parte do contorno, ou \underline{U} ou \underline{P} são nulos. Se as notações

$$\underline{\underline{U}}(\Gamma_1) = \underline{\underline{U}}_1 \quad (\text{V.17})$$

e

$$\underline{\underline{P}}(\Gamma_2) = \underline{\underline{P}}_2 \quad (\text{V.18})$$

forem adotadas, para $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$, pode-se reescrever a Equação (V.15) utilizando submatrizes:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{H}}_{11} & \underline{\underline{H}}_{12} \\ \underline{\underline{H}}_{21} & \underline{\underline{H}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_1 \\ \underline{\underline{U}}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{11} & \underline{\underline{G}}_{12} \\ \underline{\underline{G}}_{21} & \underline{\underline{G}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{P}}_1 \\ \underline{\underline{P}}_2 \end{bmatrix} = w^2 \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{11} & \underline{\underline{M}}_{12} \\ \underline{\underline{M}}_{21} & \underline{\underline{M}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{U}}_1 \\ \underline{\underline{U}}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{V.19})$$

Como as submatrizes $\underline{\underline{U}}_1$ e $\underline{\underline{P}}_2$ são nulas, a Equação (V.19) pode ser representada pelo sistema:

$$\begin{cases} \underline{\underline{H}}_{12} \underline{\underline{U}}_2 - \underline{\underline{G}}_{11} \underline{\underline{P}}_1 = w^2 \underline{\underline{M}}_{12} \underline{\underline{U}}_2 \\ \underline{\underline{H}}_{22} \underline{\underline{U}}_2 - \underline{\underline{G}}_{21} \underline{\underline{P}}_1 = w^2 \underline{\underline{M}}_{22} \underline{\underline{U}}_2 \end{cases} \quad (\text{V.20})$$

do qual, eliminando-se $\underline{\underline{P}}_1$, obtém-se:

$$\hat{\underline{\underline{H}}} \underline{\underline{U}}_2 = w^2 \hat{\underline{\underline{M}}} \underline{\underline{U}}_2 \quad (\text{V.21})$$

onde:

$$\hat{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{H}}_{22} - \underline{\underline{G}}_{21} \underline{\underline{G}}_{11}^{-1} \underline{\underline{H}}_{12} \quad (\text{V.22})$$

e

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \underline{\underline{M}}_{22} - \underline{\underline{G}}_{21} \underline{\underline{G}}_{11}^{-1} \underline{\underline{M}}_{12} \quad (\text{V.23})$$

que representa o problema de autovalor algébrico generalizado, da forma:

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \lambda \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}} \quad (\text{V.24})$$

onde $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ são matrizes cheias, não simétricas e não positiva de finidas e $\underline{\underline{X}}$ é o vetor formado pelos valores incógnitos dos deslocamentos no contorno, representando assim os modos de vibração da estrutura, associados aos autovalores λ , ou seja, ao quadrado das frequências naturais w .

V.3 - Implementação para o Estado Plano

A implementação do procedimento descrito no item anterior se dará para o estado plano, onde os parâmetros de coordenadas, deslocamentos e forças serão definidos em relação a um par de eixos cartesianos.

Para este caso a geometria do elemento será definida através de interpolação linear, envolvendo as coordenadas dos nós extremos do elemento e:

$$\underline{\underline{x}}^e = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \underline{\underline{I}} & M_1 \\ \underline{\underline{I}} & M_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix}_e \quad (\text{V.25})$$

onde:

\underline{I} é a matriz identidade de segunda ordem

$$M_1 = \frac{1}{2} (1 - \eta)$$

(V.26)

$$M_2 = \frac{1}{2} (1 + \eta)$$

Sendo η coordenada natural conforme mostrado na Figura V.1.

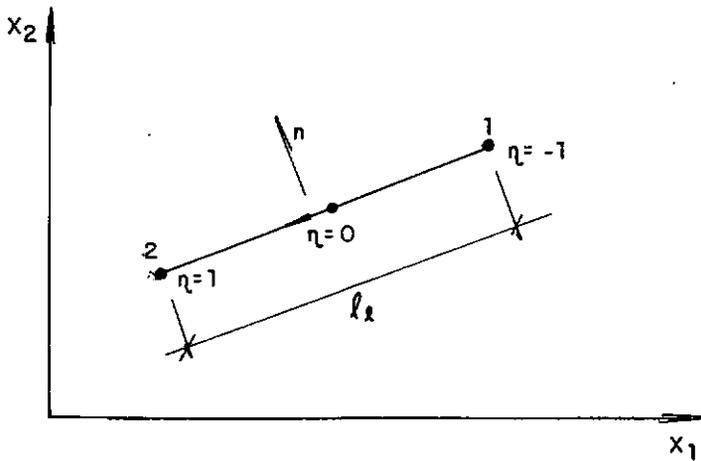


Fig.V.1 - Definição do sistema natural de coordenadas sobre o elemento e

A aproximação dos deslocamentos e forças de superfície é feita considerando interpolação quadrática sobre os elementos, do seguinte modo:

$$u^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \underline{I} N_1 & \underline{I} N_2 & \underline{I} N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{Bmatrix}_e \quad (V.27)$$

$$p^e = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} \underline{I} N_1 & \underline{I} N_2 & \underline{I} N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{Bmatrix}_e \quad (V.28)$$

onde: $N_1 = \frac{\eta}{2} (\eta - 1)$

$$N_2 = (1 - \eta) (1 + \eta) \quad (V.29)$$

$$N_3 = \frac{\eta}{2} (\eta + 1)$$

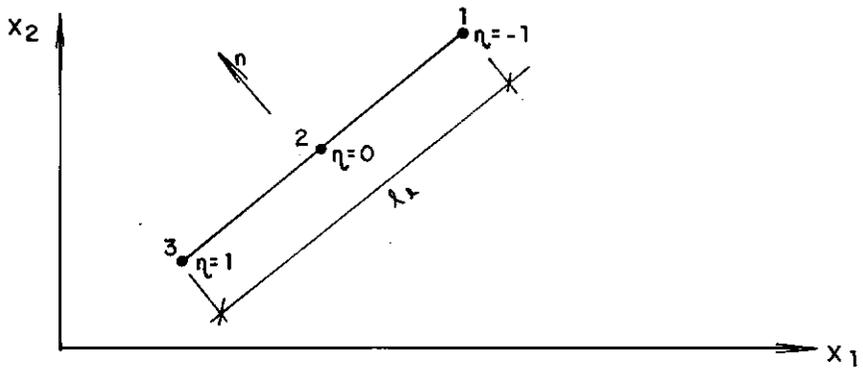


Fig.V.2. - Definição do sistema natural de coordenadas na interpolação quadrática

As matrizes \underline{p}^* e \underline{u}^* , relativas à solução fundamental, são escritas como:

$$\underline{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\text{V.30})$$

$$\underline{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (\text{V.31})$$

enquanto as matrizes $\underline{\psi}_e^k$ e $\underline{\eta}_e^k$, que representam os pseudo campos relativos às funções f^k , apresentam-se sob a forma:

$$\underline{\psi}_e^k = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\psi}_1^k \\ \underline{\psi}_2^k \\ \underline{\psi}_3^k \end{array} \right\} \quad (\text{V.32})$$

$$\underline{\eta}_e^k = \left\{ \begin{array}{c} \underline{\eta}_1^k \\ \underline{\eta}_2^k \\ \underline{\eta}_3^k \end{array} \right\} \quad (\text{V.33})$$

onde cada submatriz $\underline{\psi}_n^k$ e $\underline{\eta}_n^k$ ($n = 1, 2, 3$) é de segunda ordem e representa os valores de $\psi_{\ell j}^k$ e $\eta_{\ell j}^k$ calculados sobre os pontos nodais de cada elemento, segundo as direções dos eixos de coordenadas.

Na relação que define $\eta_{\ell j}^k$, descrita em (IV.11), a consideração da normal deve ser feita para cada elemento "e" que compõe $\underline{\eta}_e^k$, conforme a Figura V.3. Este procedimento, que considera a normal n_e quando o nó i estiver sendo computado como pertencente ao elemento "e" e n_{e+1} quando o nó i pertencer ao elemento "e+1", contorna o problema de p e u serem prescritos à esquerda e à di

reita do mesmo ponto além de proporcionar uma razoável melhoria na precisão dos resultados.

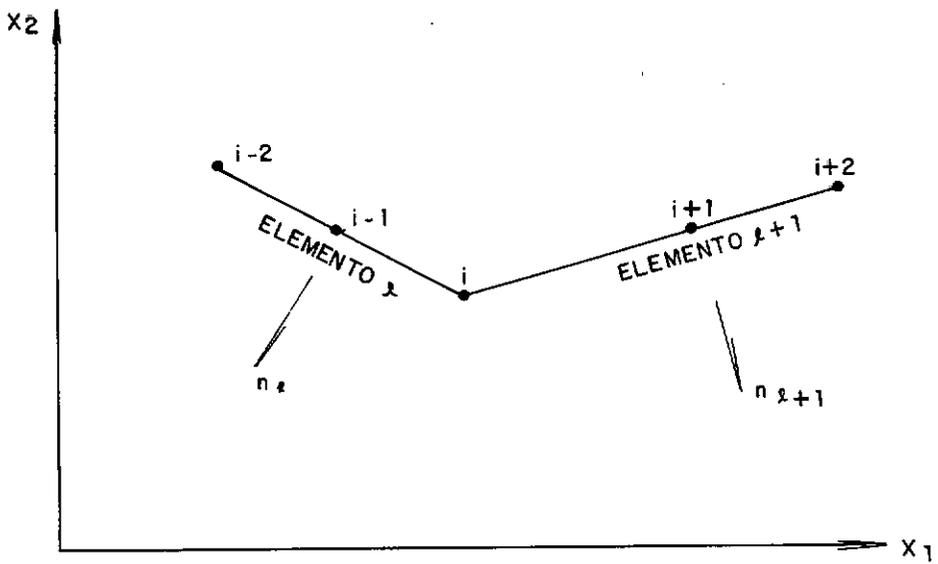


Fig.V.3 - Definição do vetor normal unitário na montagem da matriz $\underline{\eta}_e^k$

Nas Expressões (V.6) a (V.11) deve-se escrever $d\Gamma(x)$ em termos da coordenada adimensional η , uma vez que as funções de interpolação também são expressas em relação a esse sistema de coordenadas intrínsecas. Tem-se então:

$$d\Gamma = |\underline{J}| \, d\eta \quad (V.34)$$

onde o jacobiano da transformação é dado por:

$$|\underline{J}| = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\eta}\right)^2} = \frac{\ell e}{2} \quad (\text{V.35})$$

V.4 - Integração Numérica

Durante a montagem do sistema de equações indicado em (V.1), cada uma das integrais será calculada numericamente sempre que o ponto fonte ξ não pertencer ao elemento Γ_e , sobre o qual esta sendo efetuada a integração. Este cálculo se dará através da integração numérica unidimensional de Gauss, que estabelece:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^P f(\eta_i) W_i \quad (\text{V.36})$$

onde η_i é a coordenada natural do i -ésimo ponto de integração, W_i é o fator de peso associado ao ponto i e P é o número total de pontos de integração utilizado.

Deste modo pode-se escrever a integral indicada na Equação (V.6) como:

$$\begin{aligned} \underline{h}_e &= \int_{\Gamma_e} \underline{p}^* \underline{N} d\Gamma = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 \underline{p}^* \underline{N} d\eta = \\ &= \frac{\ell e}{2} \sum_{i=1}^P (\underline{p}^* \underline{N})_i W_i \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

O mesmo procedimento, aplicado à (V.7) resulta em:

$$g_e = \int_{\Gamma_e} \underline{u}^* \underline{N} d\Gamma = \frac{l_e}{2} \sum_{i=1}^P (\underline{u}^* \underline{N})_i W_i \quad (V.38)$$

V.5 - Integração Analítica

As integrais apresentadas neste item ocorrem sempre que o ponto fonte ξ da Equação (V.1) for um dos nós do segmento sobre o qual a integração esta sendo calculada.

V.5.1 - Integração de G

Cada elemento contribuirá, na matriz G , com integrais do tipo:

$$\int_{\Gamma_e} u_{ij}^* (\xi, x) N_q d\Gamma = G_{ij}^{pq} \quad (V.39)$$

onde u_{ij}^* é a solução fundamental de Kelvin, apresentada em (III.14), i e j são as direções das coordenadas, p é o ponto fonte ξ , q são os pontos nodais x do elemento e e N_q é a função de interpoção quadrática associada ao ponto q .

V.5.1.1 - ξ no Ponto 1 ($p = 1$)

Seja a interpolação definida segundo a Figura V.4. Tem-se então que:

$$G_{11}^{11} = \int_0^{\ell_e} u_{i_1}^* N_1 dr_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\ell_e} u_{i_1}^* N_1 dr_1 \quad (V.40)$$

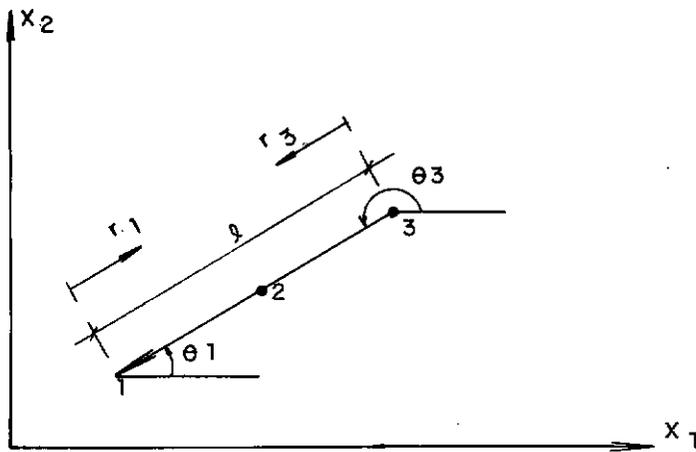


Fig.V.4 - Definição da interpolação para $\xi = 1$ e $\xi = 3$

onde N_1 é definida em termos de r_1 e ℓ_e . Efetuando-se a integração chega-se a:

$$G_{11}^{11} = \frac{\ell e}{48F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\frac{17}{6} - \ln \ell e \right] + \cos^2 \theta \right\} \quad (\text{V.41})$$

onde: $\theta = \theta_1$

$$\cos \theta = (x_1^3 - x_1^2)/\ell e \quad (\text{V.42})$$

$$\text{sen } \theta = (x_2^3 - x_2^1)/\ell e$$

$$F = \Pi G (1 - \nu)$$

De maneira similar chega-se à:

$$G_{12}^{11} = G_{21}^{11} = \frac{\ell e}{48F} \text{sen } \theta \cos \theta \quad (\text{V.43})$$

$$G_{22}^{11} = \frac{\ell e}{48F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\frac{17}{6} - \ln \ell e \right] + \text{sen}^2 \theta \right\} \quad (\text{V.44})$$

$$G_{11}^{12} = \frac{\ell e}{24F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\frac{5}{3} - 2 \ln \ell e \right] + 2 \cos^2 \theta \right\} \quad (\text{V.45})$$

$$G_{12}^{12} = G_{21}^{12} = \frac{\ell e}{12F} \text{sen } \theta \cos \theta \quad (\text{V.46})$$

$$G_{22}^{12} = \frac{\ell e}{24F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\frac{5}{3} - 2 \ln \ell e \right] + 2 \text{sen}^2 \theta \right\} \quad (\text{V.47})$$

$$G_{11}^{13} = \frac{\ell e}{48F} \left\{ (3 - 4\nu) \left(-\frac{1}{6} - \ln \ell e \right) + \cos^2 \theta \right\} \quad (\text{V.48})$$

$$G_{12}^{13} = G_{21}^{13} = \frac{\ell e}{48F} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (\text{V.49})$$

$$G_{22}^{13} = \frac{\ell e}{48F} \left\{ (3 - 4\nu) \left(-\frac{1}{6} - \ln \ell e \right) + \operatorname{sen}^2 \theta \right\} \quad (\text{V.50})$$

V.5.1.2 - ξ no Ponto 3 ($p = 3$)

Com base nas definições da Figura V.4, um conjunto de integrais similar ao mostrado no item anterior é encontrado:

Definindo:

$$\theta = \theta_3$$

$$\cos \theta = (x_1^1 - x_1^3) / \ell e \quad (\text{V.51})$$

$$\operatorname{sen} \theta = (x_2^1 - x_2^3) / \ell e$$

e utilizando r_3 , tem-se:

$$G_{11}^{31} = \int_0^{\ell e} u_{11}^* N_1 dr_3 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\ell e} u_{11}^* N_1 dr_3 \quad (\text{V.52})$$

$$G_{11}^{31} = \frac{\ell e}{48F} \left\{ (3 - 4\nu) \left(-\frac{1}{6} - \ln \ell e \right) + \cos^2 \theta \right\} \quad (\text{V.53})$$

De forma similar, as integrais restantes são definidas como:

$$G_{ij}^{3k} = G_{ij}^{1\ell} \quad (V.54)$$

onde $G_{ij}^{1\ell}$ são as expressões descritas no item V.5.1.1 e

$$\ell = 3 \quad \text{quando} \quad k = 1$$

$$\ell = 2 \quad \text{quando} \quad k = 2$$

$$\ell = 1 \quad \text{quando} \quad k = 3$$

V.5.2.3 - ξ no Ponto 2 ($p = 2$)

A interpolação é definida de acordo com a Figura V.5 e utilizando a mesma convenção anterior, as integrais são expressas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} G_{11}^{21} &= \int_{(1)}^{(3)} u_{11}^* N_1 d\Gamma = - \int_{(2)}^{(1)} u_{11}^* N_1 d\Gamma + \\ &+ \int_{(2)}^{(3)} u_{11}^* N_1 d\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\epsilon}^{\ell A} u_{11}^* N_1 dr_2 + \right. \\ &\left. + \int_{\epsilon}^{\ell B} u_{11}^* N_1 dr_2 \right] \quad (V.55) \end{aligned}$$

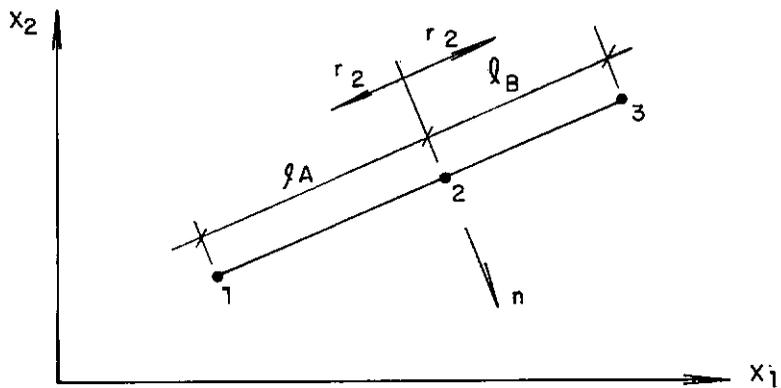


Fig.V.5 - Definição da interpolação para $\xi = 2$

Definindo:

$$\cos \theta_A = (x_1^1 - x_1^2)/l_A$$

(V.56)

$$\sin \theta_A = (x_2^1 - x_2^2)/l_A$$

e N_1 definida em termos de r_2 e l_A no trecho 1 - 2,

Enquanto:

$$\cos \theta_B = (x_1^3 - x_1^2) / \ell_B$$

(V.57)

$$\text{sen } \theta_B = (x_2^3 - x_2^2) / \ell_B$$

e N_1 definida em termos de r_2 e ℓ_B no trecho 2 - 3.

$$G_{11}^{21} = \frac{1}{96F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\ell_A \left(\frac{13}{6} - 5 \ln \ell_A \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \ell_B \left(\frac{5}{6} - \ln \ell_B \right) \right] + 5 \ell_A \cos^2 \theta_A - \right. \\ \left. - \ell_B \cos^2 \theta_B \right\} \quad (\text{V.58})$$

$$G_{12}^{21} = G_{21}^{21} = \frac{1}{96F} \left\{ 5 \ell_A \text{sen } \theta_A \cos \theta_A - \ell_B \text{sen } \theta_B \cos \theta_B \right\} \quad (\text{V.59})$$

$$G_{22}^{21} = \frac{1}{96F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\ell_A \left(\frac{13}{6} - 5 \ln \ell_A \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \ell_B \left(\frac{5}{6} - \ln \ell_B \right) \right] + 5 \ell_A \text{sen}^2 \theta_A - \right. \\ \left. - \ell_B \text{sen}^2 \theta_B \right\} \quad (\text{V.60})$$

$$\begin{aligned}
 G_{11}^{22} = & \frac{1}{12F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\ell A \left(\frac{4}{3} - \ln \ell A \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \ell B \left(\frac{4}{3} - \ln \ell B \right) \right] + \ell A \cos^2 \theta A + \right. \\
 & \left. + \ell B \cos^2 \theta B \right\} \tag{V.61}
 \end{aligned}$$

$$G_{12}^{22} = G_{21}^{22} = \frac{1}{12F} \left(\ell A \sin \theta A \cos \theta A + \ell B \sin \theta B \cos \theta B \right) \tag{V.62}$$

$$\begin{aligned}
 G_{22}^{22} = & \frac{1}{12F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\ell A \left(\frac{4}{3} - \ln \ell A \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \ell B \left(\frac{4}{3} - \ln \ell B \right) \right] + \ell A \sin^2 \theta A + \right. \\
 & \left. + \ell B \cos^2 \theta B \right\} \tag{V.63}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G_{11}^{23} = & \frac{1}{96F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\ell A \left(\ln \ell A - \frac{5}{6} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \ell B \left(\frac{13}{6} - 5 \ln \ell B \right) \right] - \ell A \cos^2 \theta A + \right. \\
 & \left. + 5 \ell B \cos^2 \theta B \right\} \tag{V.64}
 \end{aligned}$$

$$G_{12}^{23} \stackrel{i}{=} G_{21}^{23} = \frac{1}{96F} \left(-\ell A \operatorname{sen} \theta A \cos \theta A + 5 \ell B \operatorname{sen} \theta B \cos \theta B \right) \quad (\text{V.65})$$

$$G_{22}^{23} = \frac{1}{96F} \left\{ (3 - 4\nu) \left[\ell A \left(\ln \ell A - \frac{5}{6} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \ell B \left(\frac{13}{6} - 5 \ln \ell B \right) \right] - \ell A \operatorname{sen}^2 \theta A + \right. \\ \left. + 5 \ell B \operatorname{sen}^2 \theta B \right\} \quad (\text{V.66})$$

V.5.2 - Integração de H

A contribuição de cada elemento na matriz \underline{H} , se dará de forma similar à considerada em \underline{G} , isto é:

$$\int_{\Gamma_e} p_{ij}^* (\xi, x) N_q d\Gamma = H_{ij}^{pq} \quad (\text{V.67})$$

onde p_{ij}^* é a equação apresentada em (III.15) e i, j, p, q e N_q foram definidos no item V.5.1.

Para a interpolação quadrática, H_{ij}^{pq} gera as matrizes;

$$\left[\begin{array}{ccc} H_{ij}^{p1} & H_{ij}^{p2} & H_{ij}^{p3} \end{array} \right] \quad (\text{V.68})$$

onde: $i = 1, 2$

$j = 1, 2$

$p = 1, 2, 3$

V.5.2.1 - ξ no Ponto 1 ($p = 1$)

Para o ponto fonte na posição 1 e considerando r_1 na Figura V.6, pode-se escrever:

$$H_{ij}^{11} = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_1 d\eta \quad (\text{V.69})$$

Considerando que na solução fundamental p_{ij}^* , $\partial r / \partial n = 0$ para o elemento reto, tem-se:

$$H_{ij}^{11} = \lambda \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi (1 - \nu)} \int_{-1}^1 \frac{\eta}{2} \frac{(\eta - 1)}{(1 + \eta)} d\eta \quad (\text{V.70})$$

$$\lambda = 0 \quad \text{para} \quad i = j$$

$$= -1 \quad \text{para} \quad i = 1, \quad j = 2$$

$$= 1 \quad \text{para} \quad i = 2, \quad j = 1$$

$$H_{ij}^{12} = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_2 d\eta = \lambda \frac{(1 - 2\nu)}{2\pi (1 - \nu)} \quad (\text{V.71})$$

$$H_{ij}^{13} = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_3 d\eta = 0 \quad (\text{V.72})$$

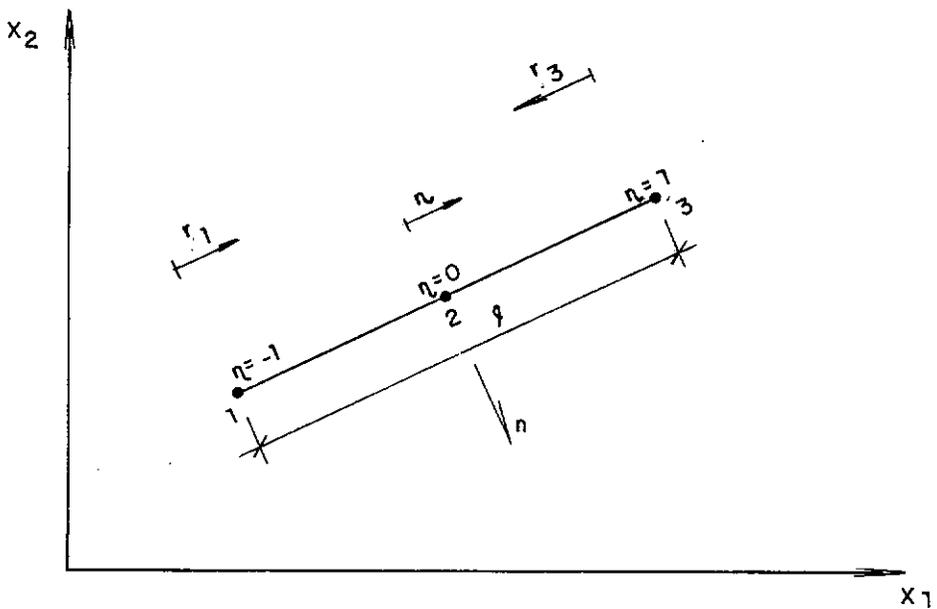


Fig.V.6 - Definição dos elementos de integração para os casos $p = 1$ e $p = 3$

V.5.2.2 - ξ no Ponto 3 ($p = 3$)

Para o ponto fonte na posição 3 e considerando r_3 na Figura V.6, tem-se:

$$H_{ij}^{31} = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_1 d\eta = 0 \quad (V.73)$$

$$H_{ij}^{32} = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_2 d\eta = \lambda \frac{(1 - 2\nu)}{2\pi (1 - \nu)} \quad (V.74)$$

$$H_{ij}^{33} = \frac{\ell e}{2} \int_{-1}^1 p_{ij}^* N_3 d\eta =$$

$$= -\lambda \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi (1 - \nu)} \int_{-1}^1 \frac{\eta}{2} \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} d\eta \quad (V.75)$$

V.5.2.3 - ξ no Ponto 2 ($p = 2$)

Para o ponto fonte na posição 2 e considerando r_2 na Figura (V.7) tem-se:

$$H_{ij}^{21} = \int_{\Gamma} p_{ij}^* N_1 d\Gamma = \int_1^2 p_{ij}^* N_1 d\Gamma + \int_2^3 p_{ij}^* N_1 d\Gamma =$$

$$= \ell A \int_{-1}^0 p_{12}^* N_1 d\eta + \ell B \int_0^1 p_{12}^* N_1 d\eta =$$

$$= -\lambda \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi (1 - \nu)} \quad (V.76)$$

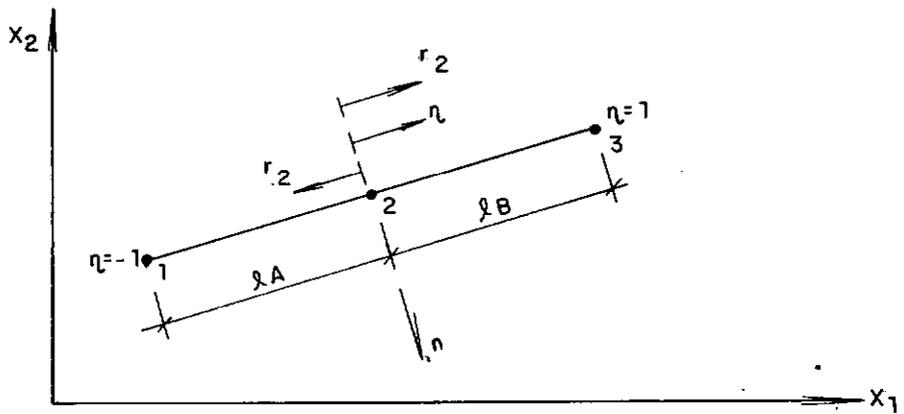


Fig.V.7 - Definição dos elementos de integração para $p = 2$

O mesmo procedimento conduz a:

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{2,2} = & lA \int_{-1}^0 p_{ij}^* N_2 d\eta + \\
 & + lB \int_0^1 p_{ij}^* N_2 d\eta = 0
 \end{aligned} \tag{V.77}$$

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{23} &= \ell A \int_{-1}^0 p_{ij}^* N_3 d\eta + \ell B \int_0^1 p_{ij}^* N_3 d\eta = \\
 &= \lambda \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi (1 - \nu)} \qquad \qquad \qquad (V.78)
 \end{aligned}$$

V.5.2.4 - ξ Entre Dois Elementos Consecutivos

Nos itens anteriores o ponto fonte ξ ocupou três posições distintas e efetuou-se a integral definida na Equação (V.67) para cada uma das hipóteses. No entanto, quando ponto fonte estiver entre dois elementos consecutivos deve-se somar as contribuições dos segmentos em questão para a montagem final na matriz \underline{H} .

Como mostra a Fig. V.8, o ponto ξ contribuirá com a parcela da Equação (V.75), já que ocupa a posição 3 no elemento e , mais a parcela da Equação (V.70), visto que ocupa a posição 1 no elemento $e + 1$. Este procedimento permite efetuar o cálculo dos valores principais das integrais presentes nas Equações (V.70) e (V.75), o que conduz à:

$$\left. H_{ij}^{11} \right|_{e+1} + \left. H_{ij}^{33} \right|_e = \lambda \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi (1 - \nu)} \ln \left(\frac{\ell e + 1}{\ell e} \right) \qquad (V.79)$$

A expressão contida na Equação (V.79) fornece a contribuição final, na matriz \underline{H} , de um ponto fonte ξ entre elementos consecutivos, enquanto as Expressões (V.76) a (V.78) fornecem a contribuição de um ponto ξ situado no interior do elemento.

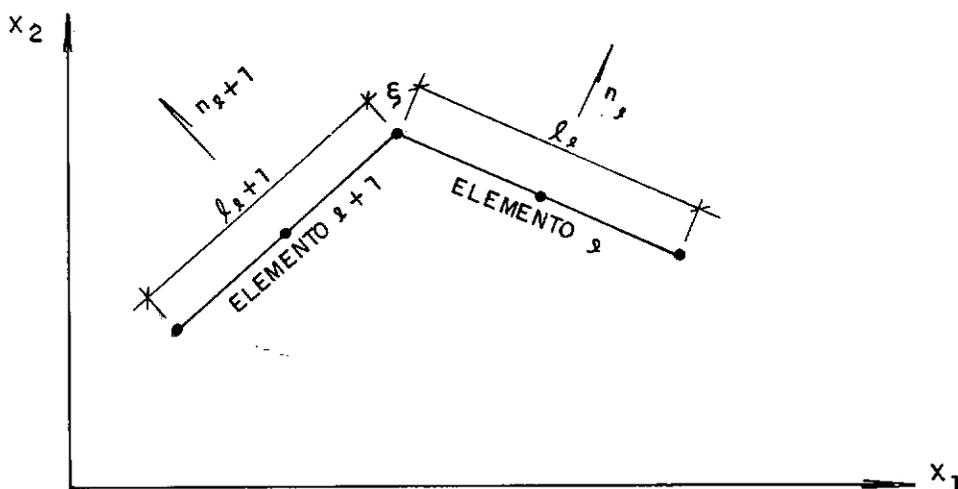


Fig.V.8 - Ponto fonte entre dois elementos de contorno adjacentes

A matriz \underline{H} , como foi considerada na Expressão (V.12), recebe também a contribuição de \underline{c} nas suas submatrizes da diagonal. Os valores finais são obtidos então através do somatório das Expressões (V.79) e da Equação (1.5) apresentada no Apêndice 1. Uma outra forma de se obter estas submatrizes para o nó singular é através da consideração de movimento de corpo rígido, o que simplifica a implementação numérica.

V.6 - Pontos Internos

A implementação de pontos internos na presente formulação, implica em graus de liberdade dinâmicos adicionais e tem por objetivo melhorar a precisão dos resultados, principalmente dos modos mais altos de vibração livre. O uso destes pontos nodais permite uma representação mais exata do comportamento dinâmico do sistema no interior do seu domínio por parte das funções de aproximação da inércia.

O cálculo das variáveis no interior do domínio é feito de maneira direta utilizando a Equação (IV.12), na qual $C_{ij}(\xi)$ é uma matriz unitária. A resolução da equação do problema para pontos internos é efetuada simultaneamente com as variáveis de contorno, de maneira que a Equação (V.15) se transforma em:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H} & \tilde{0} \\ \tilde{H}' & \tilde{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^C \\ \tilde{U}^I \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{G} & \tilde{0} \\ \tilde{G}' & \tilde{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}^C \\ \tilde{p}^I \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{M} & \tilde{M}'' \\ \tilde{M}' & \tilde{M}''' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^C \\ \tilde{U}^I \end{Bmatrix} \quad (\text{V.80})$$

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS

VI.1 - Introdução

Os resultados obtidos com a formulação descrita neste trabalho serão apresentados e analisados neste capítulo. Tais resultados foram obtidos por um programa computacional desenvolvido de acordo com os procedimentos numéricos descritos no Capítulo V e com as funções apresentadas na Equação (IV.13), assumindo o valor zero para a constante C .

Esta rotina computacional monta diretamente as matrizes do problema de autovalor generalizado, apresentado na Equação (V.24). Para o cálculo dos autovalores utilizou-se a rotina "EIGZF" do IMSL - International Mathematical and Statistical Libraries, que além da solução do problema apresenta também a performance da rotina (boa, satisfatória ou pobre) e o índice de erro durante a convergência dos autovalores, cujo valor foi nulo para todos os exemplos testados.

Além da eficiência do método, os casos apresentados a seguir têm como objetivo discutir o refinamento da discretização do contorno e avaliar a eficiência do emprego de pontos nodais internos.

Todos os resultados de elementos de contorno obtidos neste trabalho, onde foi empregado interpolação quadrática das funções ao longo de elementos de geometria reta, são comparados

a valores produzidos por elementos finitos triangulares e quadriláteros, com variação linear para as componentes dos deslocamentos, do programa SAP IV.

VI.2 - Influência do Refinamento da Malha

Uma primeira pesquisa da vibração livre no plano será feita para uma forma geométrica simples, uma placa quadrada, conforme esquematizado na Figura VI.1.

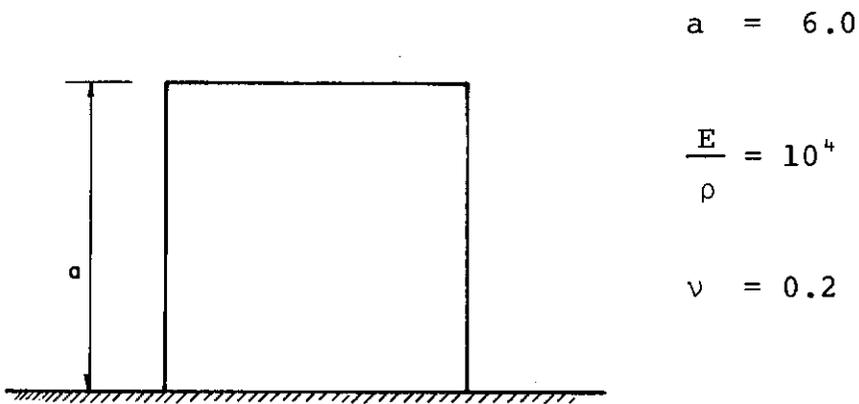


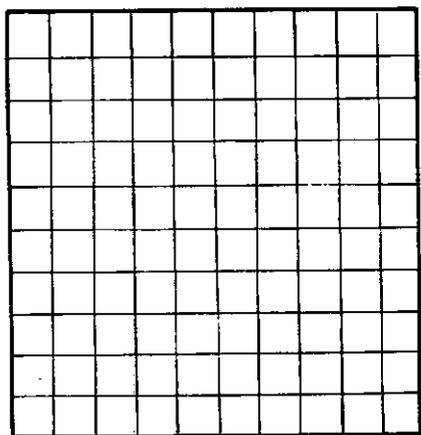
Fig.VI.1 - Dados da placa quadrada

O problema foi solucionado utilizando diferentes discretizações de elementos de contorno e os resultados são apresentados na Tabela VI.1.

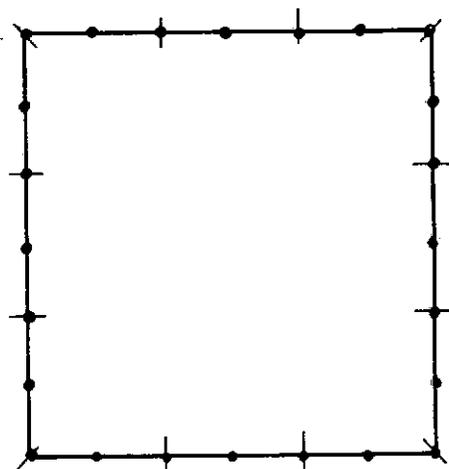
Tab.VI.1 - Frequências naturais de vibração da placa quadrada obtidas com o M.E.C., segundo as discretizações da Figura VI.2

FREQUÊNCIA	MEF	MEC	MEC	MEC
CICLOS SEG	100 ELEMENTOS	12 ELEMENTOS	24 ELEMENTOS	48 ELEMENTOS
f_1	1,796	1,809	1,807	1,803
f_2	4,267	4,442	4,444	4,438
f_3	4,807	5,345	5,305	5,292
f_4	7,440	8,143	8,045	8,019
f_5	8,318	9,634	9,506	9,483
f_6	8,635	9,833	9,766	9,750
f_7	10,769	13,793	13,550	13,226
PERFORMANCE DA ROTINA "EIGZF"				
		BOA	BOA	SATISFATÓRIA

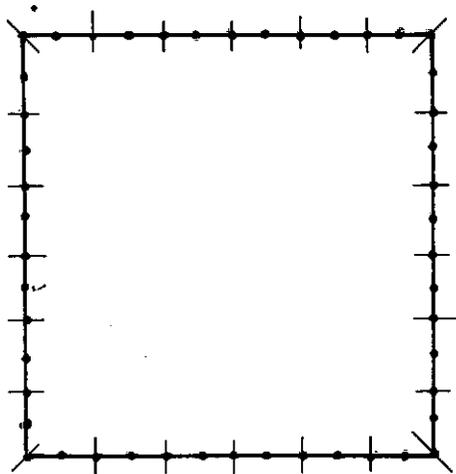
A análise da Tabela VI.1 mostra que o refinamento da malha de elementos de contorno leva a melhores resultados, mas com baixa eficiência: para a malha de 48 elementos houve diferença de até 22% em relação aos valores obtidos pelo método dos elementos finitos. Este fato ocorre devido a necessidade de representar as funções de aproximação de inércia também no interior do domínio. Esta representação deve ser feita através da inclusão de alguns pontos internos, como descrito no Item V.6.



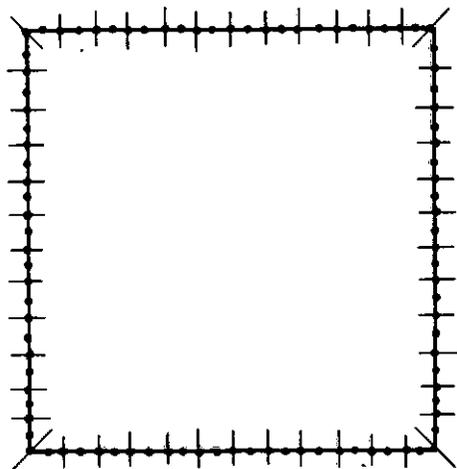
(a) malha de elementos finitos



(b) malha de 12 elementos de contorno



(c) malha de 24 elementos de contorno



(d) malha de 48 elementos de contorno

Fig.VI.2 - Discretizações da placa quadrada

VI.3 - Influência do Emprego de Pontos Internos

VI.3.1 - Placa Quadrada

Como mostrado no item anterior, a placa quadrada definida na Figura VI.1 foi analisada sem a consideração de pontos nodais no interior do seu domínio. Neste item, 5 pontos internos são acrescentados à malha da Figura VI.2.c., na tentativa de obter uma melhor representação das propriedades de inércia.

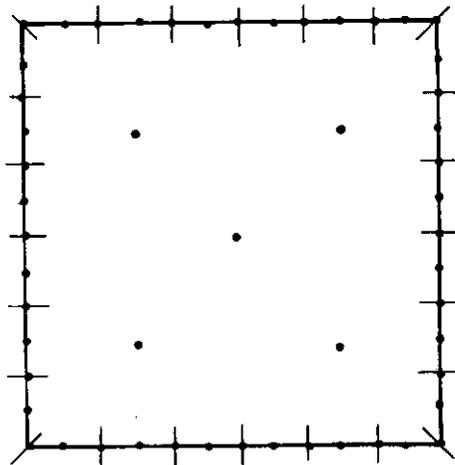


Fig.VI.3 - Discretização da placa quadrada em 24 elementos de contorno e 5 pontos internos

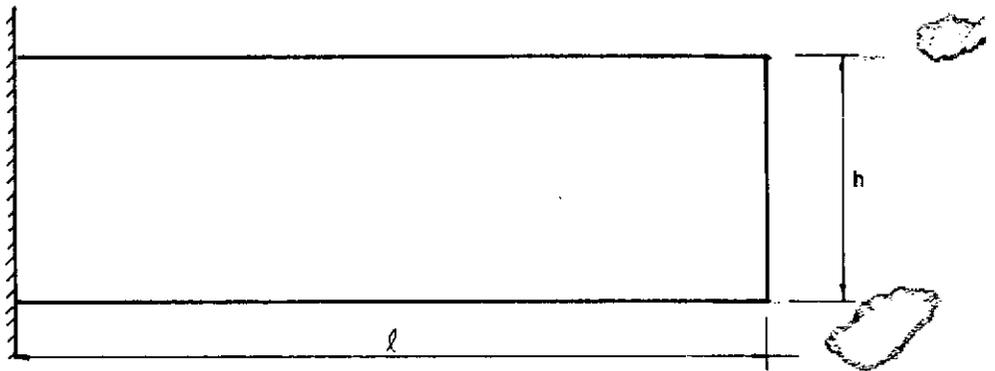
Tab.VI.2 - Frequências de vibração livre da placa quadrada obtidas pelo M.E.C. de acordo com a discretização da Figura VI.3

FREQUÊNCIA (ciclos / seg.)	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
M.E.C. 5 pontos internos	1,797	4,308	4,903	7,717	8,930	9,200	11,875

A consideração feita na modelagem do sistema melhorou sensivelmente os valores das frequências naturais, como pode ser visto na Tabela VI.2. A diferença percentual, em relação ao método dos elementos finitos, variou de um máximo de 22,8% na Tabela VI.1 para 10,3% na Tabela VI.2. A introdução de 5 pontos internos na malha de 24 elementos mostrou-se mais eficaz que a duplicação do número de pontos nodais do contorno, como feito no Item VI.2, demonstrando que a necessidade de melhor representar o interior do domínio é atendida com este procedimento.

VI.3.2 - Viga Engastada

Para a formulação proposta, obtem-se uma melhor precisão com a utilização de pontos internos, já que um aumento contínuo do número de elementos de contorno não conduz a uma melhor representação das funções no interior do domínio. Esta verificação também é feita analisando-se as propriedades dinâmicas de uma viga engastada, definida na Figura VI.4.



$$h = 6.0$$

$$l = 24.0$$

$$\frac{E}{\rho} = 10^4$$

$$\nu = 0.2$$

Fig.VI.4 - Dados da Viga Engastada

A estrutura mostrada foi analisada utilizando-se uma malha de 20 elementos de contorno, com variações quanto ao número de pontos internos, conforme ilustrado na Figura VI.6.

Um quadro comparativo dos 7 primeiros períodos de vibração, obtidos com o método dos elementos finitos, é apresentado na Tabela VI.3, de acordo com as discretizações da Figura VI.5. Estes valores serão utilizados para avaliar o desempenho numérico do método, uma vez que a solução analítica considera apenas as frequências naturais referentes à vibração longitudinal de um modelo unidimensional, dadas por:

$$\omega_n = \left[\frac{2n - 1}{2} \pi \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{VI.1})$$

A Tabela VI.4 mostra que a formulação apresenta bons resultados com o emprego de pontos internos. Pode-se observar que a inclusão de graus de liberdade aumenta a precisão, mas ao mesmo tempo eleva o esforço computacional. Portanto uma boa análise é aquela que considera um razoável número de elementos de contorno conjugados com a consideração de alguns pontos internos.

Tab.VI.3 - Períodos de vibração livre calculados pelo método de elementos finitos para a viga engastada (Figura VI.5)

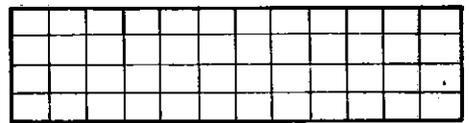
PERÍODO (seg)	SOLUÇÃO ANALÍTICA	12 ELEMENTOS	24 ELEMENTOS	48 ELEMENTOS
T ₁	5,958	6,112	6,091	6,082
T ₂	-	1,207	1,198	1,194
T ₃	0,950	0,940	0,939	0,939
T ₄	-	0,530	0,524	0,520
T ₅	0,339	0,335	0,329	0,324
T ₆	-	0,322	0,318	0,316
T ₇	-	0,250	0,242	0,235



(a) malha de 12 elementos



(b) malha de 24 elementos



(c) malha de 48 elementos

Fig.VI.5 - Discretizações da viga engastada em elementos finitos

Tab.VI.4 - Influência da consideração de pontos internos no M.E.C. para a viga engastada, de acordo com as discretizações da Figura VI.6

PERÍODO	MEF	MEC	MEC	MEC	MEC
(seg)	48 ELEMENTOS	SEM PONTO INTERNO	1 PONTO INTERNO	2 PONTOS INTERNOS	4 PONTOS INTERNOS
T ₁	6,082	6,062	6,065	6,056	6,077
T ₂	1,194	1,205	1,203	1,201	1,199
T ₃	0,939	0,935	0,936	0,937	0,938
T ₄	0,520	0,507	0,507	0,513	0,514
T ₅	0,324	0,311	0,311	0,312	0,313
T ₆	0,316	0,301	0,305	0,301	0,311
T ₇	0,235	0,203	0,203	0,207	0,215
PERFORMANCE DA ROTINA "EIGZF"		BOA	BOA	BOA	BOA

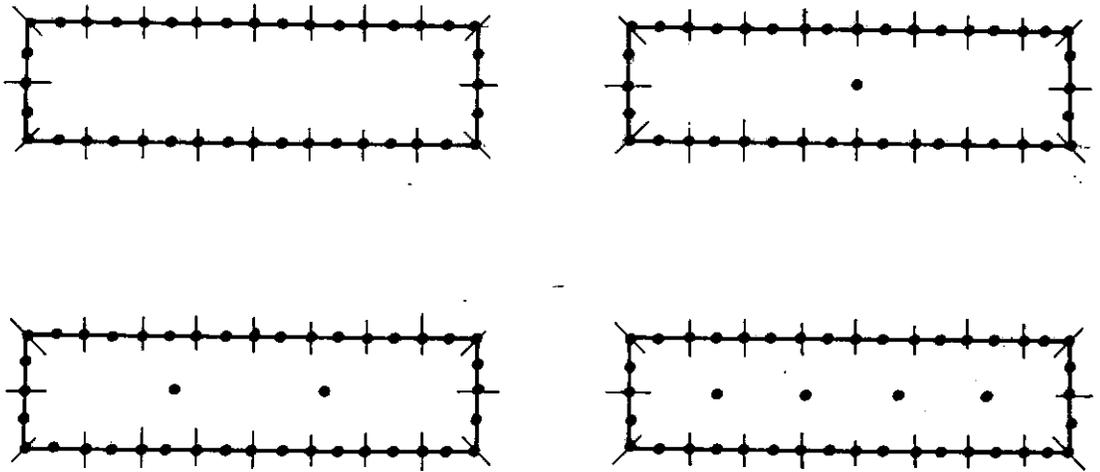
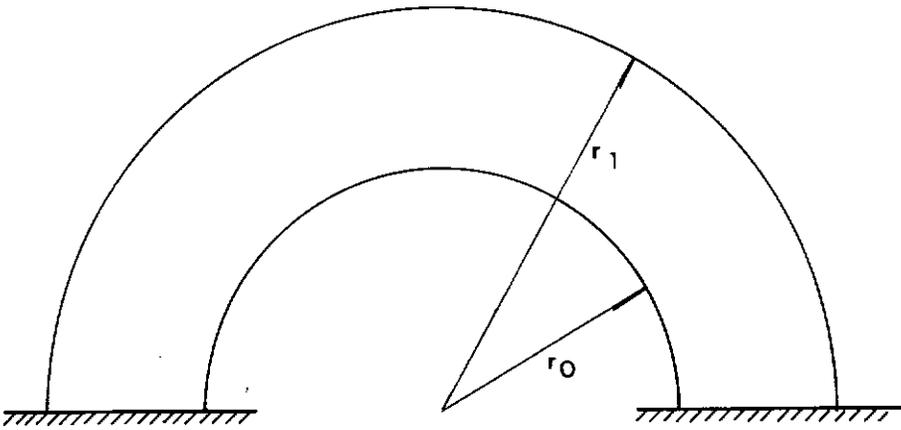


Fig.VI.6 - Discretizações da viga engastada em 20 elementos de contorno, considerando pontos internos

VI.3.3 - Estrutura em Arco

Para uma melhor análise da influência da utilização de pontos internos, os resultados dos quatro primeiros modos de vibração da estrutura em arco, esquematizada na Figura VI.7, são apresentados.



$$r_0 = 2.5$$

$$r_1 = 5.0$$

$$\frac{E}{\rho} = 10^5$$

$$\nu = 0.25$$

Fig.VI.7 - Dados da Estrutura em arco

Uma malha de elementos finitos de 108 nós (Figura VI.8) oferece uma boa precisão, e avalia sua utilização como elemento comparativo do desempenho da formulação de elementos de contorno, cujos resultados encontram-se listados nas Tabelas VI.5 e VI.6.

Na Tabela VI.5 estão indicadas as freqüências naturais de vibração obtidas com uma malha de 22 elementos de contorno. Com o objetivo de aproximar as funções de inércia, foram introdu

zidos até 7 pontos no interior do domínio (Figura VI.9), mas houve diferença de até 4,7% para os resultados obtidos com o método dos elementos finitos. Já a discretização do contorno em 44 elementos (Figura VI.10), com a utilização de apenas 2 pontos internos, melhora sensivelmente os resultados, como pode ser visto na Tabela VI.6.

Tab.VI.5 - Influência da consideração de pontos internos no M.E.C. para a estrutura em arco (Figura VI.8 e VI.9)

FREQUÊNCIA (HERTZ)	MEF	MEC	MEC	MEC	MEC
	108 NÓS	1 PONTO INTERNO	2 PONTOS INTERNOS	4 PONTOS INTERNOS	7 PONTOS INTERNOS
f_1	7,292	7,442	7,407	7,421	7,434
f_2	10,720	11,123	11,179	11,137	11,129
f_3	16,490	17,358	17,337	17,244	17,262
f_4	18,350	19,208	18,972	18,968	18,893
PERFORMANCE DA ROTINA "EIGZF"		BOA	BOA	BOA	BOA

Tab.VI.6 - Influência da consideração de pontos internos no M.E.C.
para a estrutura em arco (Figura VI.8 e VI.10)

FREQUÊNCIA (HERTZ)	MEF	MEC	MEC	MEC
	108 NÓS	SEM PONTO INTERNO	1 PONTO INTERNO	2 PONTOS INTERNOS
f_1	7,292	7,240	7,248	7,215
f_2	10,720	10,922	10,896	10,936
f_3	16,490	17,056	17,056	17,001
f_4	18,350	18,748	18,730	18,543
PERFORMANCE DA ROTINA "EIGZF"		BOA	BOA	BOA

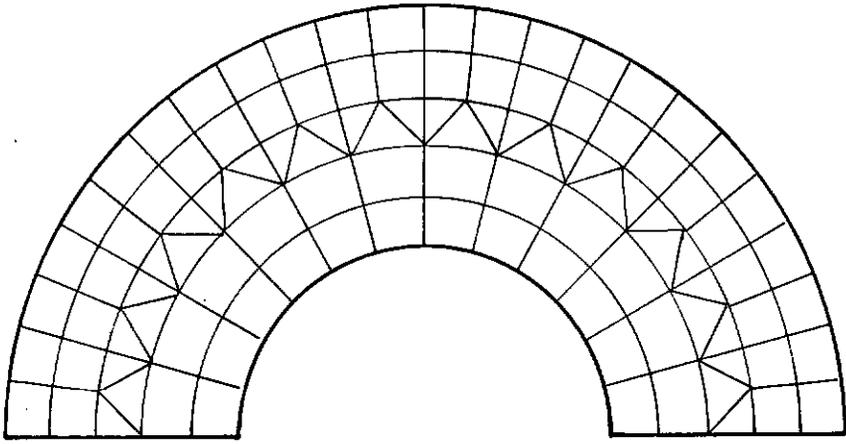


Fig.VI.8 - Malha de elementos finitos com 108 n\u00f3s

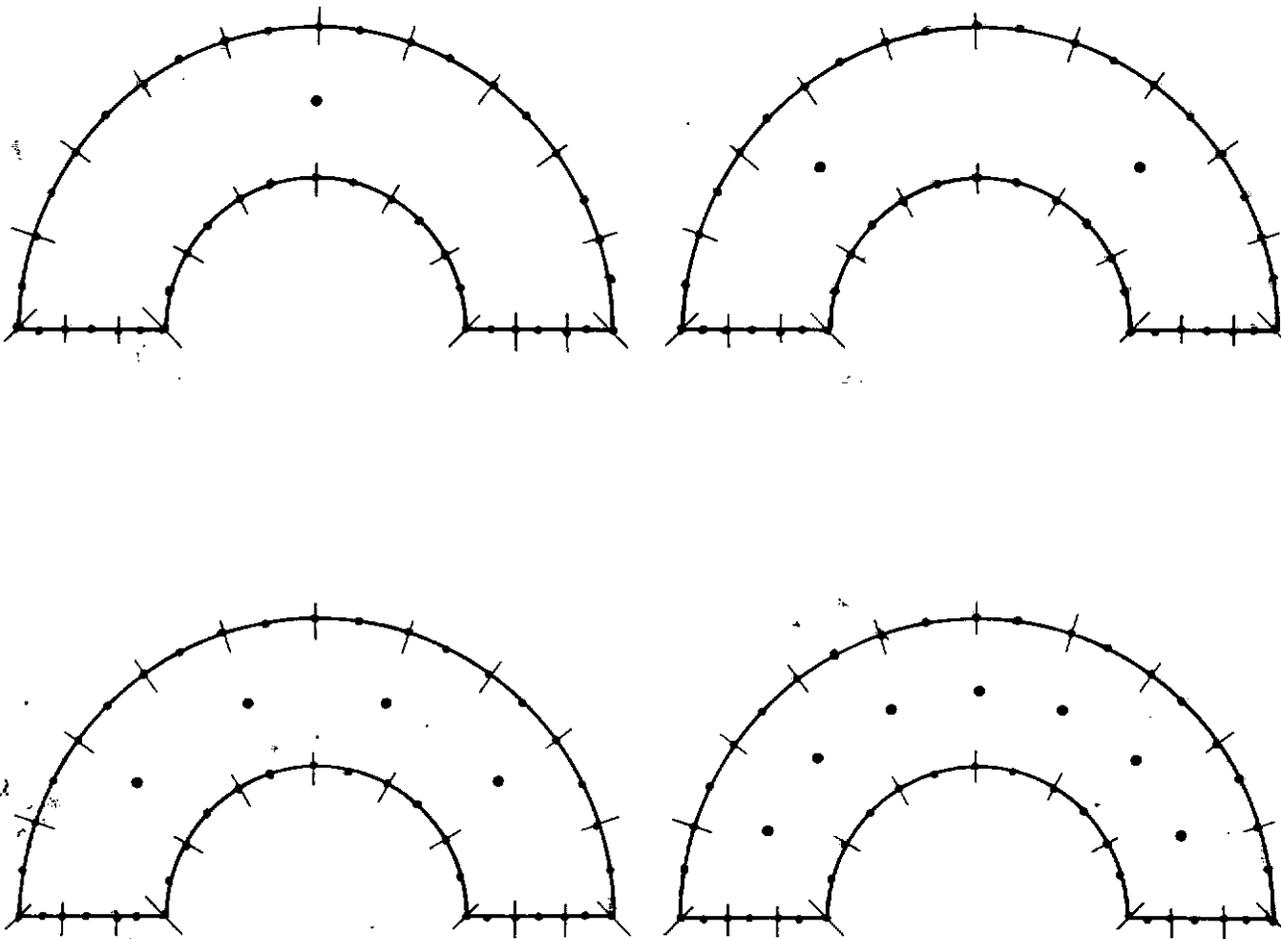


Fig.VI.9 - Discretiza\u00e7\u00f5es da estrutura em arco em 22 elementos de contorno, considerando pontos internos

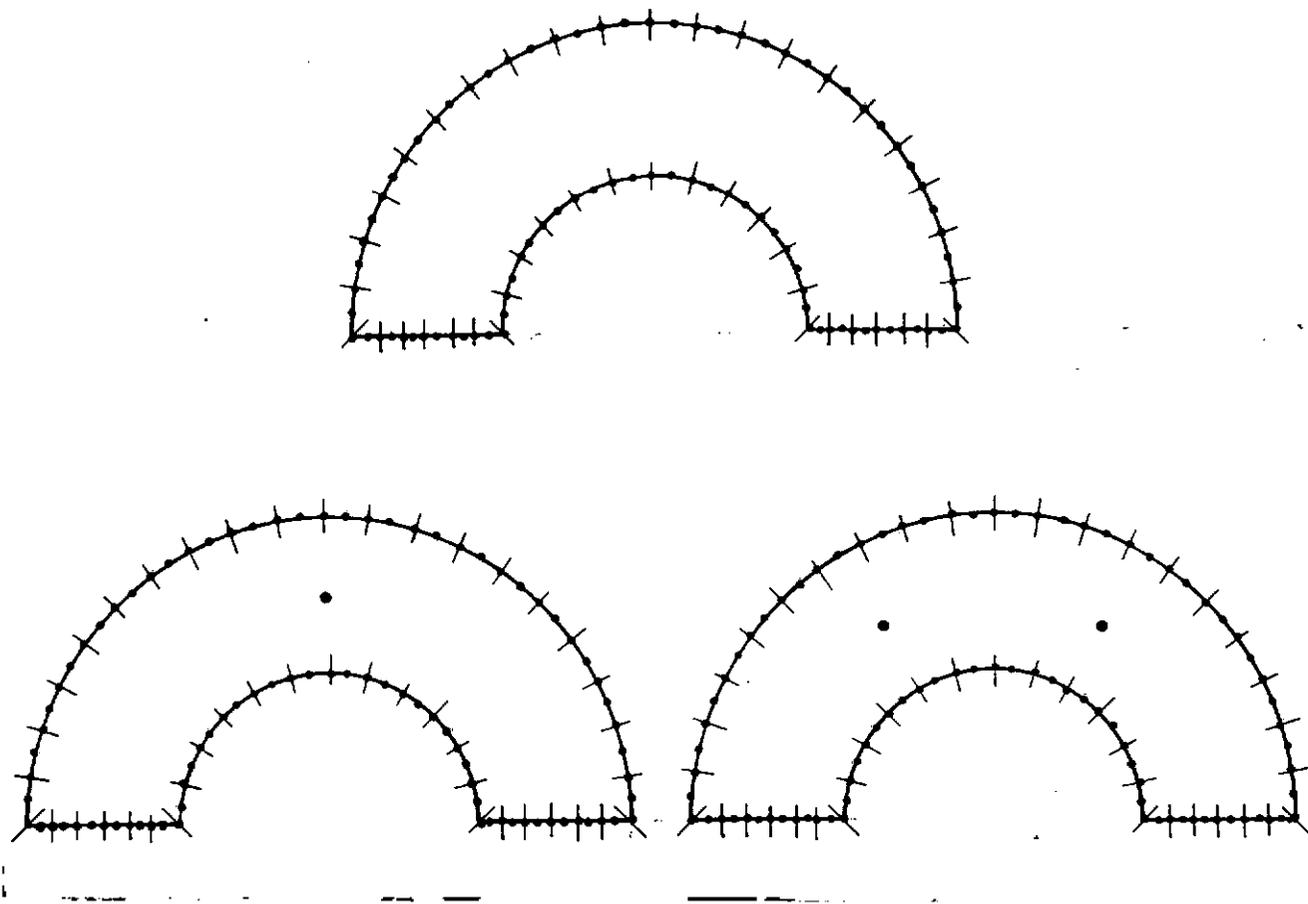
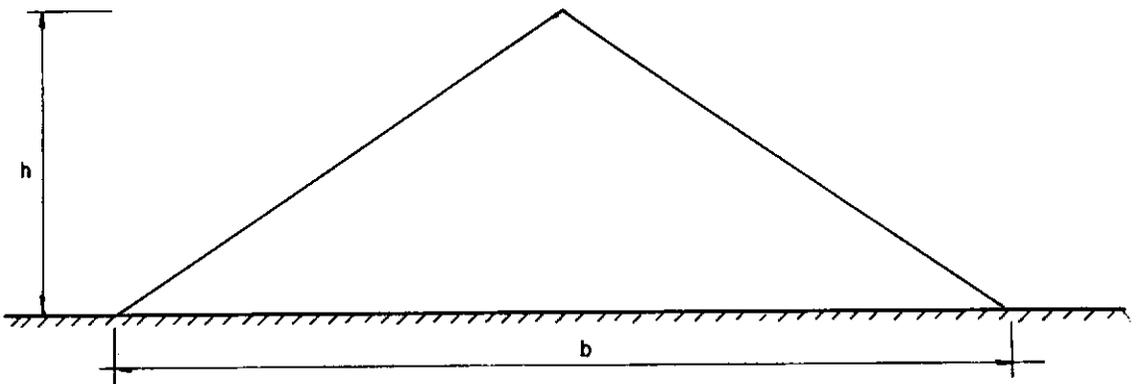


Fig.VI.10 - Discretizações da estrutura em arco em 44 elementos de contorno, considerando pontos internos

VI.4 - Barragem de Terra

Os dados apresentados nos exemplos anteriores ilustraram a eficiência da discretização do contorno e da inclusão de pontos internos, separadamente. Neste exemplo, esquematizado na Figura VI.11, a obtenção das frequências naturais é feita conjugando um e outro procedimento.

Também neste exemplo a comparação será feita com uma malha bastante refinada de elementos finitos (Figura VI.12). A Tabela VI.7 indica os resultados de duas malhas de elementos de contorno, com a consideração de 5 pontos internos em cada uma (Figura VI.13 e VI.14).



$$\begin{array}{ll}
 h = 300 & b = 900 \\
 G = 4,037 \times 10^6 & \rho = 4,037 \\
 \nu = 0,45 &
 \end{array}$$

Fig.VI.11 - Dados da Barragem de Terra

Mais uma vez constata-se que o refinamento da malha do contorno acima de um determinado limite não traz benefício em termos de precisão. A simples introdução de alguns pontos internos na malha menos discreta produz melhores resultados, com um menor esforço computacional.

Tab.VI.7 - Frequências de vibração livre obtidas pelo M.E.C. para a Barragem de terra (Figura VI.12 e VI.14)

FREQUÊNCIA (HERTZ)	MEF	MEC		MEC	
		14 ELEMENTOS		24 ELEMENTOS	
	100 ELEMENTOS	SEM PI	5 PI	SEM PI	5 PI
f_1	1,243	1,274	1,249	1,272	1,247
f_2	2,039	2,352	2,176	2,344	2,175
f_3	2,362	3,245	2,606	3,214	2,589
f_4	3,065	3,245	3,298	3,214	3,289
f_5	3,248	4,392	3,590	4,338	3,575
PERFORMANCE DA ROTINA "EIGZF"		SATISFATÓRIA	BOA	SATISFATÓRIA	SATISFATÓRIA

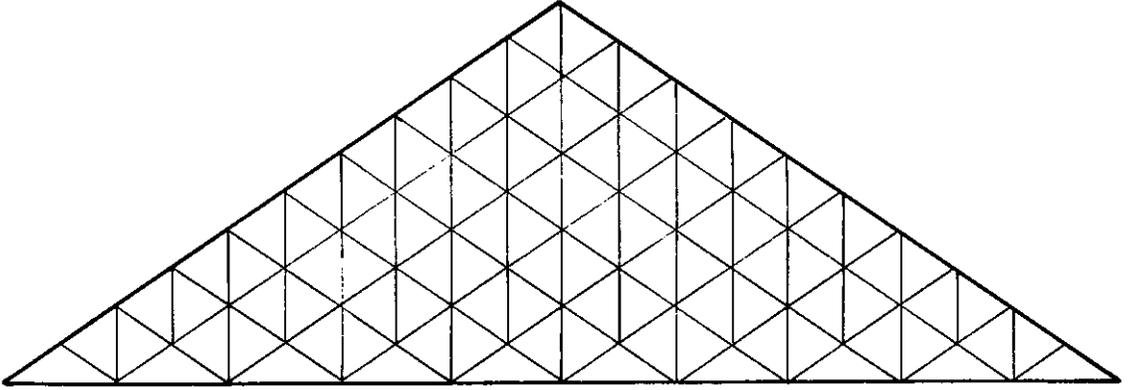
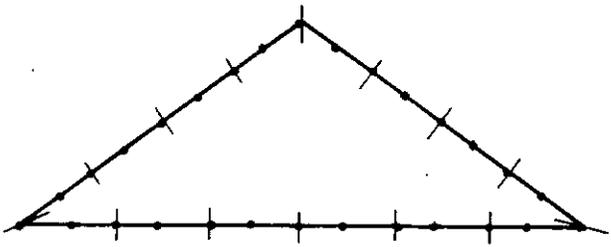
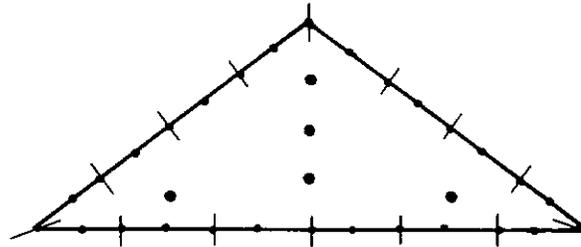


Fig.VI.12 - Malha de 100 elementos finitos

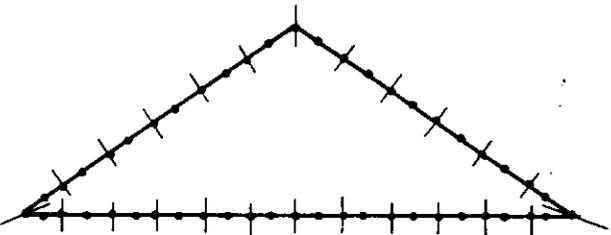


(a) sem ponto interno

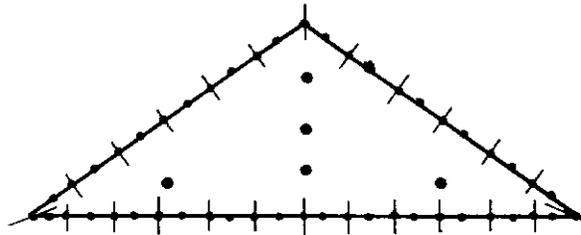


(b) 5 pontos internos

Fig.VI.13 - Discretizações da barragem de terra em 14 elementos de contorno



(a) sem ponto interno



(b) 5 pontos internos

Fig.VI.14 - Discretizações da barragem de terra em 24 elementos de contorno

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Este trabalho descreve um procedimento alternativo para solução de problemas elastodinâmicos utilizando o Método dos Elementos de Contorno, baseado na formulação proposta por NARDINI e BREBBIA [10].

A implementação computacional foi feita para análise de vibrações livres de corpos elásticos em estado plano de tensões ou deformações, utilizando-se elementos de contorno retos, mas com interpolação quadrática para as funções de aproximação. Os resultados, obtidos com o programa de computador desenvolvido, apresentados no Capítulo VI mostraram-se bastante precisos.

A principal vantagem do método descrito, com relação a outras formulações de elementos de contorno é que ele não requer cálculo de integrais de volume e nem pesquisa de autovalores. Funções de interpolação especiais permitem substituir a integral de volume, que aparece no termo inercial, por integrais de contorno, levando esta formulação a um sistema de equações algébricas cuja resolução fornece simultaneamente todos os autovalores. Estas características tornam a formulação bastante prática e econômica.

É necessário destacar que alguns cuidados devem ser tomados para garantir a qualidade dos resultados. O primeiro deles é a consideração da contribuição, separadamente, das normais

de dois elementos de contorno adjacentes não colineares na equação do ponto nodal comum a eles. Este procedimento fez com que o erro percentual do primeiro período de vibração da viga engastada, apresentada no Capítulo VI, caísse de 14% para 0,4%, em relação à consideração de uma única normal para os pontos nodais de canto.

Outro ponto a ser considerado é a ineficácia do aumento contínuo da discretização do contorno. A introdução destes novos graus de liberdade não resulta em uma melhor constituição da "matriz de massa", uma vez que não representam satisfatoriamente os termos correspondentes às integrais de domínio. Tal fato se caracteriza pelo aparecimento de autovalores complexos para os modos mais altos de vibração, evidenciando assim a má representação do problema físico real, cuja solução se dá em termos de números reais. Para que este problema seja minimizado, recorre-se então ao emprego de pontos internos, como pode ser visto nos exemplos que foram analisados no Capítulo VI.

Este trabalho apresenta, pela primeira vez, uma formulação que permite a análise do problema de autovalor, utilizando elementos de contorno, sem a necessidade de efetuar uma varredura em termos de frequência. Vários aspectos devem ser discutidos e aprofundados com o intuito de tornar a formulação descrita em uma alternativa consistente e aplicável.

O primeiro destes aspectos seria uma discussão mais ampla em torno dos limites de discretização e de consideração de pontos internos, com o objetivo de definir a aplicabilidade des-

te recurso a diferentes casos de análise bidimensional de corpos elásticos.

Além disso, uma pesquisa mais elaborada das funções de aproximação de inércia deve ser feita a fim de estabelecer critérios para a utilização deste tipo de aproximação.

O presente estudo foi desenvolvido para domínios homogêneos e isotrópicos, mas a representação de diferentes propriedades físicas pode ser implementada através da utilização de sub-regiões e do uso da solução fundamental para meios anisotrópicos. Os pontos internos que delimitam o contorno destas sub-regiões conduzem também a uma melhoria na precisão dos resultados, uma vez que permitem uma melhor representação das funções de aproximação da inércia.

A eficácia e precisão da formulação apresentada foram discutidas e analisadas no Capítulo VI através de exemplos, cujos resultados avalizam seu emprego e abrem caminho para um novo conjunto de aplicações para o Método dos Elementos de Contorno, incluindo a extensão da técnica descrita para vários casos de problemas dinâmicos transientes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] VENÂNCIO FILHO, F. - Análise Dinâmica, Cap. 8 - Análise Matricial de Estruturas, Almeida Neves - Editores, Ltda., Rio de Janeiro (1975).
- [2] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. - Teoria da Elasticidade, Guanabara Dois S.A., 3ª Edição (1980).
- [3] FUNG, Y.C. - Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall Inc., New Jersey (1965).
- [4] DOMINGUEZ, J.; ALARCON, E. - Elastodynamics, chap. 7 - Progress in Boundary Element Methods, Ed. C.A. Brebbia, London (1981).
- [5] DUMANS, M.C.R.F. - Uma Aplicação do Método de Elementos de Contorno a Problemas da Elastodinâmica no Domínio da Frequência - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ (1985).
- [6] MANSUR, W.J.; BREBBIA, C.A. - Transient Elastodynamics, chap. 5 - Topics in Boundary Element Research; Ed. C.A. Brebbia, Volume 2. Berlin (1985).
- [7] MOW, C.C.; PAO, Y.H. - Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentration - Crane Russak, New York (1971).
- [8] BESKOS, D.E. - Boundary Element Methods in Dynamic Analysis - Applied Mech. Rev., nº 1, Volume 40, (Janeiro 1987).

- [9] BREBBIA, C.A.; NARDINI, D. - Solution of Parabolic and Hyperbolic Time Dependent Problems using Boundary Elements, Comp. & Maths. with Appls, Volume 12B, pp. 1061-1072 (1986).
- [10] BREBBIA, C.A.; NARDINI, D. - A New Approach to Free Vibration Analysis using Boundary Elements - Proceedings of the Fourth International Seminar - Boundary Element Methods in Engineering - Southampton - (1982).
- [11] MIKLOWITZ, J. - The Theory of Elastic Waves and Wave-Guides- North-Holland Publishing Company, Volume 22, Amsterdam (1978).
- [12] ERINGEN, A.C.; SUHUBI, E.S. - Elastodynamics - Volume II, Academic Press Inc., New York (1975).
- [13] KOBAYASHI, S. - Fundamentals of Integral Equation Methods in Elastodynamics, chap. 1 - Topics in Boundary Element Research; Brebbia, C.A. Ed.; Volume 2, Berlin (1985).
- [14] BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. - Boundary Element Techniques: Theory and Application in Engineering - Springe-Verlag, Berlin - Heidelberg (1984).
- [15] BREBBIA, C.A.; NARDINI, D. - Boundary Integral Formulation of Mass Matrices for Dynamic Analysis, chap. 7 - Topics in Boundary Element Research; Brebbia, C.A. Ed., Volume 2, Berlin (1985).

- [16] HOWELL, G.C.; DOYLE, W.S. - B.I.E.M. for In-plane Elastostatic Problems, Applied Mathematics Modelling, Volume 6 (Agosto de 1982).
- [17] CHANG, O.V. - Boundary Elements Applied to Three Dimensional Elastodynamic Problems, Ph.D. Thesis, University of Southampton (1986).
- [18] CRUSE, T.A. - The Transient Problem in Classical Elastodynamics Solved by Integral Equations Ph.D. Thesis, University of Washington (1967).
- [19] CRUSE, T.A.; RIZZO, F.J. - A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem - Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 22, pp. 244-259 e 341-355, (1968).
- [20] BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers - Pentech Press - London (1978).
- [21] JASWON, M.A. - Integral Equation Methods in Potencial Theory I, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 275, 23-32 (1963).
- [22] SYMM, G.T. - Integral Equation Methods in Potencial Theory II, Proc. Roy. Soc. Ser. A, 275, 33-46 (1963).
- [23] HESS, J.L.; SMITH, A.M.O. - Calculation of Potencial Flow about Arbitrary Bodies, Progress in Aero. Sci., Vol. 8, Pergamon Press, London (1967).

- [24] RIZZO, F.J. - An Integral Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, Quart. Apl. Math., 25, 83-95 (1967).
- [25] MANSUR, W.J.; BREBBIA, C.A. - Transient Elastodynamics using a Time - Stepping Technique, Proceedings of the Fifth International Seminar on Boundary Element Methods in Engineering (C.A. Brebbia, ed.). Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1983).

APÊNDICE 1

EQUAÇÃO INTEGRAL NO CONTORNO

A identidade de Somigliana, descrita no Capítulo III, fornece soluções para problemas da elasticidade linear em qualquer ponto ξ do domínio em função dos valores no contorno. Para que a Equação (III.11) também forneça valores das funções em um ponto ξ do contorno torna-se necessário examinar a forma limite desta equação quando um ponto x do domínio Ω toma a posição de ξ no contorno Γ (Figura 1.1).

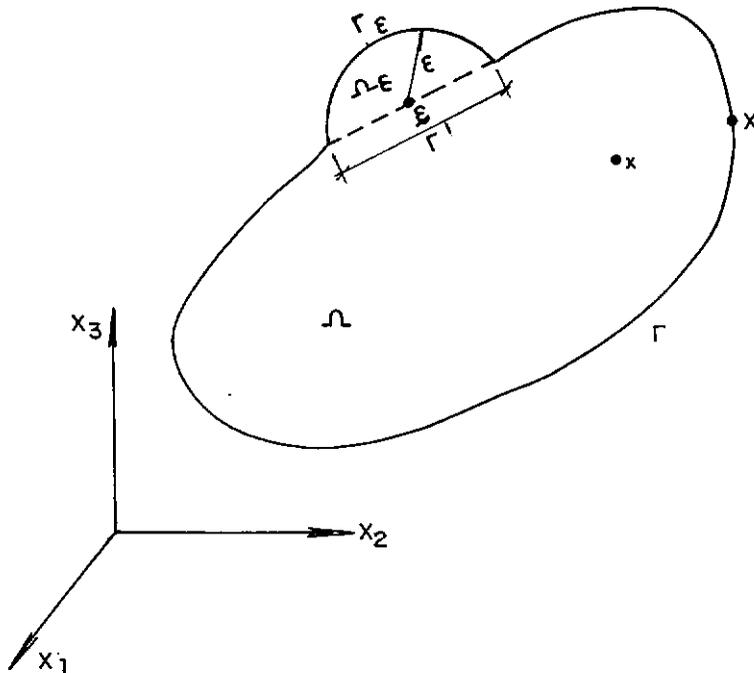


Fig.1.1 - Contorno aumentado para obtenção da equação integral de contorno

O domínio Ω pode ser aumentado de uma porção de uma esfera de raio ε , com seu centro no ponto ξ , como mostra a Figura 1.1. O contorno total é $\Gamma_T = \Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma'$ e o domínio total é $\Omega + \Omega_\varepsilon$. Como o ponto ξ está agora dentro de Γ_T , a identidade de Somigliana pode ser escrita para a região $\Omega + \Omega_\varepsilon + \Gamma_T$.

Passando o limite à Equação (III.11) tem-se:

$$\begin{aligned}
 u_k(\xi) = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma'} u_{ki}^*(\xi, x) p_i(x) d\Gamma(x) - \\
 & - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma'} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u_{ki}^*(\xi, x) b_i(x) d\Omega(x) \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

Analisando separadamente o limite de cada integral da Equação (1.1), quando ε tende a zero, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma'} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) = \\
 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) + \\
 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma'} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) \quad (1.2)
 \end{aligned}$$

A primeira integral do lado direito da igualdade da Equação (1.2) pode ser colocada na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, X) u_i(X) d\Gamma(X) &= \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, X) \left[u_i(X) - u_i(\xi) \right] d\Gamma(X) + \\
 &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u_i(\xi) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, X) d\Gamma(X) \right] \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

Devido à continuidade de $u_i(X)$, o primeiro limite à direita da Equação (1.3) é nulo, assim:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, X) u_i(X) d\Gamma(X) &= \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u_i(\xi) \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, X) d\Gamma(X) \right] \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

chamando:

$$\delta_{ki} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, X) d\Gamma(X) = C_{ki}(\xi) \quad (1.5)$$

tem-se que:

$$\delta_{ki} u_i(x) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) = c_{ki}(\xi) u_k(\xi) \quad (1.6)$$

Voltando à Equação (1.2) verifica-se que a segunda integral do lado direito deve ser interpretada no sentido de valor principal de Cauchy:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma'} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) &= \\ &= \int_{\Gamma} p_{ki}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (1.7)$$

As demais integrais da Equação (1.1) não apresentam singularidades especiais e podem ser interpretadas no sentido usual de integral. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma_\varepsilon - \Gamma} u_{ki}^*(\xi, x) p_i(x) d\Gamma(x) &= \\ &= \int_{\Gamma} u_{ki}^*(\xi, x) p_i(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon + \Omega} u_{ki}^*(\xi, x) b_i(x) d\Omega(x) &= \\ &= \int_{\Omega} u_{ki}^*(\xi, x) b_i(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (1.9)$$

A equação integral de contorno adquire então a forma final:

$$\begin{aligned}
 C_{ki}(\xi) u_k(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ki}^*(\xi, X) u_i(X) d\Gamma(X) &= \\
 &= \int_{\Gamma} u_{ki}^*(\xi, X) p_i(X) d\Gamma(X) + \\
 &+ \int_{\Omega} u_{ki}^*(\xi, x) b_i(x) d\Omega(x) \quad (1.10)
 \end{aligned}$$

O coeficiente C_{ki} pode ser generalizado para representar a integração de p_{ki}^* sobre uma superfície parcial de uma esfera infinitesimal de raio ε , centrada no ponto ξ . Se a tangente no ponto ξ no contorno é contínua (contorno suave) o valor de $C_{ki}(\xi) = \frac{\delta_{ki}}{2}$; se o ponto ξ é interior ao domínio, a esfera é completa e $C_{ki}(\xi) = \delta_{ki}$ e se ξ é exterior ao domínio $C_{ki}(\xi) = 0$. Em aplicações práticas no entanto, o valor de C_{ki} , em conjunto com o valor principal correspondente, pode ser calculado através da imposição de translações de corpo rígido.