

ANÁLISE ELÁSTICA BIDIMENSIONAL DE PROBLEMAS COM
SIMETRIA CÍCLICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

HUMBERTO RITT

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR :



Prof. José Cláudio de Faria Telles, Ph. D.

(Presidente)



Prof. Webe João Mansur, Ph. D.



Prof. Andres Ludovico Halbritter, D. Sc.

RIO DE JANEIRO - RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1989

RITT, HUMBERTO

Análise elástica bidimensional de problemas com simetria
cíclica pelo método dos elementos de contorno [Rio de
Janeiro] 1989

IX , 114 p. 29,7 cm (COPPE / UFRJ , M. Sc. ,
Engenharia Civil, 1989)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro , COPPE

| | |
|--------------------------|----------------------|
| 1. Elementos de Contorno | 2. Simetria Cíclica |
| I. COPPE/UFRJ | II. Título (série) |

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. José Cláudio de Faria Telles pela excelente orientação, estímulo e amizade.

Ao Prof. Webe João Mansur pela amizade e incentivo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico pela ajuda financeira concedida.

À todos os professores que contribuíram através de seus ensinamentos de uma forma positiva para a minha formação.

À Profa. Elisabeth Velela Wendt da UFSM pelo encorajamento e esclarecimentos que proporcionaram o meu ingresso no curso de mestrado.

Aos colegas e amigos da UFSM, em especial à L. A. Giovelli, R. A. Lorenzatto e L. V. S. Sagrilo pela amizade e companheirismo consolidados durante o curso de graduação.

Aos colegas e amigos da COPPE e da NUCLEN, que contribuíram de uma forma solidária para elaboração deste trabalho.

À família Lobo Santos pelo carinho com que acolheram-me nesta cidade.

À minha família, pela educação, exemplo e esforço para possibilitar esta oportunidade.

À minha noiva Kátia Maria Lobo Santos, pela amizade, carinho e principalmente compreensão.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS (M. Sc.)

ANÁLISE ELÁSTICA BIDIMENSIONAL DE PROBLEMAS COM SIMETRIA
CÍCLICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

HUMBERTO RITT

DEZEMBRO DE 1989

ORIENTADOR : JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES

PROGRAMA : ENGENHARIA CIVIL

Este trabalho de tese tem como objetivo a aplicação do Método dos Elementos de Contorno na análise elástica de problemas lineares planos com simetria cíclica.

Para tal, são apresentados inicialmente os conceitos e a formulação do método. Utiliza-se o elemento

quadrático contínuo para a representação do contorno e das variáveis. O artifício do nó duplo é usado para remover a descontinuidade da normal ou das condições de contorno. As integrais singulares sofrem uma transformação cúbica de coordenadas antes de serem integradas numericamente por Gauss.

O programa desenvolvido possibilita a análise de problemas com simetria simples, dupla ou cíclica, além, é claro, de problemas completos. São analisados vários exemplos com a finalidade de avaliar o desempenho da simetria cíclica em relação aos demais modos de abordagem do problema.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M. Sc.)

TWO-DIMENSIONAL ELASTIC ANALYSIS OF CYCLIC SYMMETRIC
PROBLEMS BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

HUMBERTO RITT

DECEMBER, 1989

THESIS SUPERVISOR : JOSÉ CLÁUDIO DE FARIA TELLES

DEPARTMENT : CIVIL ENGINEERING

In this work, the Boundary Element Method is applied to the solution of cyclic symmetry plane problems. Initially, the basic concepts and the general formulation of the method are presented. The boundary of the body is discretized in quadratic continuous elements, over which

VII

the displacements and tractions are assumed to have the same behaviour. The concept of double node is also employed in order to remove the discontinuity of the outward normal vector or of the boundary variables. Singular integrals are carried out numerically with the use of a cubic transformation of the coordinates.

The program developed also permits the analysis of problems presenting simple or double symmetry and, in order to compare the computational efficiency of the procedure developed here with the others already developed, as well as the results obtained with its use, some problems are presented and discussed at the end of this work.

ÍNDICE

| | |
|-------------------------------|---|
| CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO | 1 |
|-------------------------------|---|

CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

| | |
|---|----|
| II.1 - Introdução..... | 5 |
| II.2 - Elasticidade Plana..... | 6 |
| II.3 - Equações Diferenciais de Equilíbrio..... | 9 |
| II.4 - Identidade de Somigliana..... | 15 |
| II.5 - Soluções Fundamentais..... | 18 |
| II.6 - Equação Integral de Contorno..... | 19 |
| II.7 - Tensões em Pontos Internos..... | 22 |
| II.8 - Tensões em Pontos do Contorno..... | 24 |
| II.9 - Regiões Infinitas..... | 26 |

CAPÍTULO III - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

| | |
|---|----|
| III.1 - Introdução..... | 28 |
| III.2 - Funções de Interpolação e Discretização do Contorno..... | 29 |
| III.3 - Sistema de Equações..... | 36 |
| III.4 - Avaliação das Integrais..... | 38 |
| III.5 - Sistemas com Simetria..... | 40 |
| III.6 - Simulação de Descontinuidade..... | 42 |

CAPÍTULO IV - SISTEMAS COM SIMETRIA CÍCLICA

| | |
|--|----|
| IV.1 - Introdução..... | 45 |
| IV.2 - Estrutura das Matrizes..... | 47 |
| IV.3 - Transformações Rotacionais..... | 52 |
| IV.4 - Decomposição do Sistema de Equações..... | 57 |
| IV.5 - Procedimento para Análise de Problemas..... | 67 |
| IV.6 - Estrutura do Programa Principal..... | 70 |

CAPÍTULO V - APLICAÇÕES NUMÉRICAS

| | |
|--|----|
| V.1 - EXEMPLO 1 : chapa tracionada com furo central..... | 75 |
| V.2 - EXEMPLO 2 : cavidade circular em meio infinito.... | 83 |
| V.3 - EXEMPLO 3 : superfície dentilhada..... | 89 |

| | |
|--------------------------------|----|
| CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES | 94 |
|--------------------------------|----|

| | |
|----------------------------------|----|
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 98 |
|----------------------------------|----|

| | |
|---|-----|
| APÊNDICE A - MANUAL DE ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA ... | 104 |
|---|-----|

| | |
|--|-----|
| APÊNDICE B - INTEGRAÇÃO SINGULAR | 112 |
|--|-----|

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho de tese é dirigido para a solução de problemas de elasticidade linear plana com opção de simetria cíclica, admitindo um corpo isotrópico e, eventualmente, infinito. Num problema misto, no qual se dispõe dos deslocamentos numa parte do contorno e forças de superfície prescritas noutra, são determinados, através do Método dos Elementos de Contorno, os campos incógnitos, além das tensões em pontos do contorno e em pontos internos.

Em certos casos, a geometria e as condições de contorno não permitem a determinação de uma solução exata. Recorre-se, então, a uma solução aproximada, utilizando-se um método numérico de discretização dos campos. Entre os métodos utilizados destacam-se o Método das Diferenças Finitas, o Método dos Elementos Finitos e o Método dos Elementos de Contorno.

Na aplicação do Método dos Elementos de Contorno, as aproximações são realizadas em função somente dos campos no contorno, reduzindo a dimensão do problema em uma

unidade.

Um sistema linear de equações algébricas é formado, cuja solução representa os valores desconhecidos no contorno. A matriz dos coeficientes deste sistema é não-simétrica, cheia e de dimensão menor que a obtida pelos métodos de domínio, considerando um mesmo nível de discretização.

O Método dos Elementos de Contorno é apresentado em sua formulação direta, onde os deslocamentos e forças de superfície encontram-se explícitos nas equações integrais. Esta formulação foi adotada, também, nos trabalhos de CRUSE e RIZZO [1], LACHAT [2], BREBBIA [3], TELLES [4] entre outros.

Em 1967, RIZZO [5] utilizou a solução fundamental de Kelvin na formulação direta para elasticidade plana, usando elementos retos constantes.

Elementos lineares e o conceito de nó duplo foram utilizados por RICCARDELLA [6] em 1972.

LACHAT [2], em 1975, desenvolveu uma formulação utilizando elementos curvos, permitindo assim uma aproximação linear, quadrática ou cúbica.

Estudos envolvendo simetria cíclica são devidos à CHAUDONET [7] e a MAIER, NOVATI e PARREIRA [8].

Convém registrar que o primeiro trabalho publicado no Brasil à respeito deste método deve-se à HALBRITTER, TELLES e MANSUR [9] em 1978.

Assim, o Método dos Elementos de Contorno tem-se desenvolvido cada vez mais, tornando-se competitivo e

aplicável a inúmeros problemas de engenharia.

O desenvolvimento desta tese contribui para tal finalidade, com enfoque principal na análise de problemas com simetria cíclica, compreendendo seis capítulos, sendo o primeiro esta introdução. Os demais são descritos a seguir :

No Capítulo II , o Método dos Elementos de Contorno é formulado para problemas de estado plano de tensão e estado plano de deformação. Estabelecidas as Equações Diferenciais de Equilíbrio, encontra-se a Identidade de Somigliana e as Soluções Fundamentais de Kelvin. A seguir, considerando uma superfície circular envolvendo o ponto fonte, é determinada a Equação Integral de Contorno. Finalmente, são apresentadas as expressões para cálculo das tensões em pontos internos e em pontos do contorno, bem como as equações para problemas de cavidades em domínios infinitos.

No Capítulo III são fornecidos os recursos utilizados para a implementação numérica, ou seja, as funções de interpolação e o elemento quadrático contínuo. São apresentadas as etapas para a montagem do sistema de equações característico que é resolvido pelo Processo de Eliminação de Gauss. As integrais singulares decorrentes da aplicação do método sofrem uma transformação cúbica de variáveis. As integrais não singulares são integradas numericamente por Gauss e os coeficientes da diagonal principal de H são obtidos pela consideração de translações de corpo rígido. São abordados casos em que o problema pode

ser resolvido de uma forma mais simples, pelo artifício de simetria simples ou dupla. Conceitua-se, finalmente, o nó duplo, que é usado para simular descontinuidade das tensões ou do vetor normal.

No Capítulo IV é estudado o caso de simetria cíclica, tema principal deste trabalho. Mostra-se, primeiramente, a estrutura das matrizes e suas propriedades. A seguir, são aplicadas transformações rotacionais, a fim de se obter a decomposição do sistema de equações em vários sistemas menores. São enunciadas, então, de forma reduzida, as etapas para a análise de problemas com este tipo de simetria, e finalmente, mostra-se a estrutura do programa computacional desenvolvido.

O Capítulo V é constituído pelas aplicações numéricas realizadas com a finalidade de se averiguar as simplificações produzidas pela consideração de simetria cíclica. Assim, é analisada a facilidade na entrada dos dados, bem como a economia no tempo de CPU necessário para a execução das várias subrotinas envolvidas.

No Capítulo VI são relacionadas algumas conclusões obtidas a partir dos exemplos analisados e são sugeridos alguns pontos para desenvolvimentos futuros.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

II.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as considerações a respeito da Teoria da Elasticidade aplicadas à resolução de problemas lineares elásticos planos de tensão e deformação.

É desenvolvida uma formulação direta com a finalidade de se obter a Identidade de Somigliana a partir das Equações de Equilíbrio de Navier. Considera-se a Solução Fundamental de Kelvin.

A Identidade de Somigliana é aplicada em pontos do contorno. São fornecidas, também as expressões para cálculo de tensões em pontos internos e em pontos do contorno, bem como para análise de problemas de cavidades em domínios infinitos.

II.2 - ELASTICIDADE PLANA

Utiliza-se neste estudo uma forma simples e vantajosa para a representação de expressões extensas, teoremas e derivações. Trata-se da Notação Cartesiana Indicial, que é usada na representação das componentes de força, tensão, deslocamento e deformação, bem como das próprias coordenadas, onde os índices 1, 2 e 3 substituem x, y e z, respectivamente.

Pela convenção da soma, um índice repetido num mesmo termo implica numa soma, dispensando, assim, o símbolo de somatório.

$$e_{11} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \sum_{i=1}^3 e_{ii} \quad (\text{II.1})$$

$$e_i e_i = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

$$\text{A disposição} \quad \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \quad \text{pode ser}$$

representada pelo símbolo Delta de Kronecker δ_{ij} , onde :

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{array} \right. \quad (\text{II.2})$$

As derivadas espaciais são representadas por uma vírgula.

Considera-se neste estudo que os corpos são

elásticos lineares, isto é, quando um carregamento qualquer produzir deformação num corpo, inferior a um certo limite, ele retorna completamente à configuração inicial após o descarregamento, e que a relação entre as tensões aplicadas e as deformações sofridas é linear.

Os corpos são admitidos como sendo homogêneos, com sua matéria distribuída uniformemente em seu volume e também isotrópicos, isto é, as suas propriedades elásticas são idênticas em todas as direções.

O comportamento do material é independente do tempo e, além disso, efeitos de temperatura não são considerados. O estado inicial de tensões é neutro e obedece à Lei de Hooke, ou seja, à linearidade das relações entre as componentes de tensão e as componentes de deformação.

Admite-se, ainda, a Hipótese dos Pequenos Deslocamentos, que implica na Hipótese das Pequenas Deformações, as quais, se consideradas em conjunto, estabelecem a Hipótese da Linearidade Geométrica.

O trabalho é desenvolvido com a finalidade de aplicar o Método dos Elementos de Contorno na resolução de problemas de Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação. Para estudos mais detalhados pode-se consultar as Referências [10], [11] e [12].

O Estado Plano de Tensão (EPT) pode ser concebido considerando-se uma chapa fina, Figura II.1, submetida somente à forças aplicadas no contorno, paralelas ao plano da chapa e uniformemente distribuídas ao longo da

espessura. Temos que as componentes de tensão σ_z , τ_{xz} , e τ_{yz} são nulas em ambas as faces e, em princípio, pode-se admitir que são nulas também no interior da chapa.

O EPT é caracterizado então pelas componentes σ_x , σ_y e τ_{xy} ; sendo pequena a espessura, pode-se admitir que essas componentes são independentes da coordenada z .

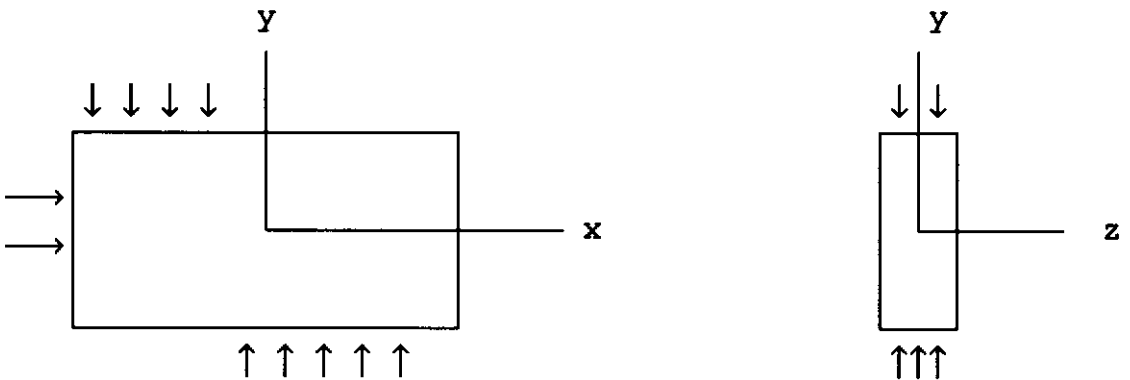


Figura II.1 - Chapa fina submetida a forças aplicadas no contorno (EPT).

O Estado Plano de Deformação (EPD) ocorre quando a dimensão de um corpo prismático na direção z é muito grande, Figura II.2, e este é solicitado por um carregamento perpendicular aos elementos longitudinais e constante ao longo do comprimento, de tal forma que é possível considerar que todas as seções transversais estão sujeitas às mesmas condições.

Supondo que as seções extremas estão confinadas entre planos rígidos, fixos e sem atrito, temos que o deslocamento axial w é nulo nas extremidades e, por simetria, também na seção central. As componentes de

deslocamento u e v são funções apenas de x e y . Assim sendo, como τ_{xz} e τ_{yz} são nulas, o problema se reduz à determinação de σ_x , σ_y e τ_{xy} , e a tensão σ_z pode ser obtida pela seguinte relação :

$$\sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (\text{II.3})$$

onde ν é o Coeficiente de Poisson.

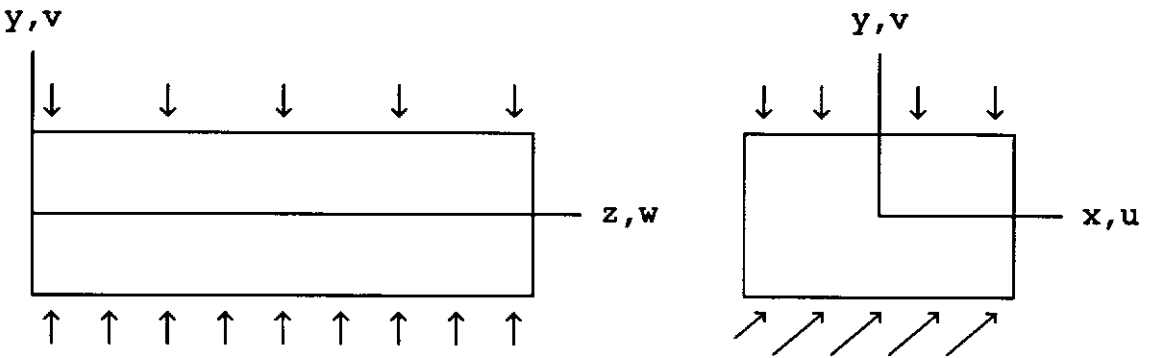


Figura II.2 - Corpo prismático solicitado por um carregamento perpendicular aos elementos longitudinais e constante ao longo do comprimento (EPD).

II.3 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE EQUILÍBRIO

Um corpo qualquer, Figura II.3, pode estar sujeito à duas classes de forças externas. As forças distribuídas sobre a superfície do corpo, tais como a

pressão hidrostática, são chamadas forças de superfície. As forças distribuídas pelo volume do corpo, tais como forças gravitacionais, são chamadas forças de massa ou, em geral, forças de volume.

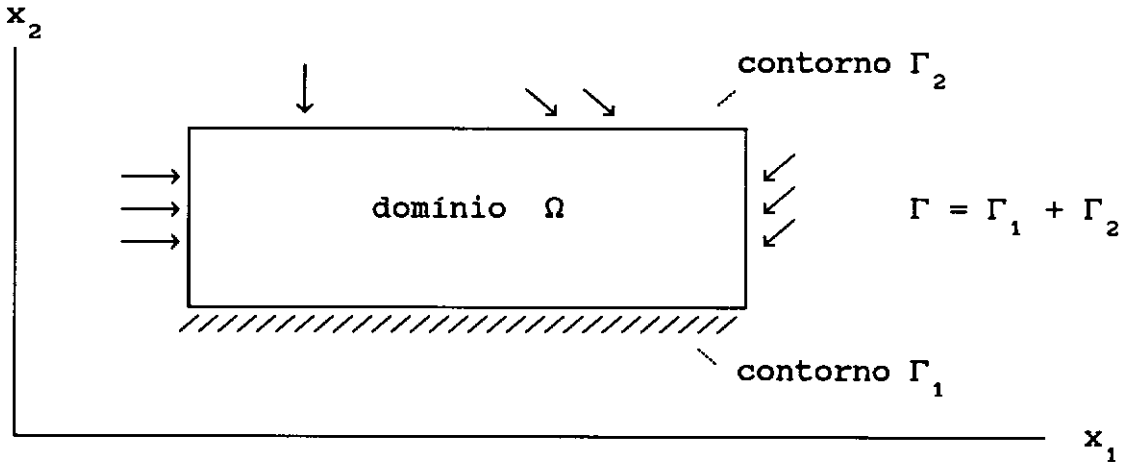


Figura II.3 - Corpo solicitado por forças paralelas ao plano x_1x_2 .

De acordo com a notação indicial, p_i é usado para representar as componentes por unidade de área das forças de superfície e b_j para as componentes por unidade de volume das forças de volume.

O estado de tensão num ponto qualquer do interior do corpo, referente ao sistema x_1x_2 é dado através da matriz :

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad , \text{ onde } \sigma_{12} = \sigma_{21}$$

Seja um paralelepípedo retangular infinitesimal

de arestas dx_1 e dx_2 e espessura unitária envolvendo um ponto do domínio Ω , cujas componentes de tensão atuantes nas faces e seus sentidos positivos estão indicados na Figura II.4.

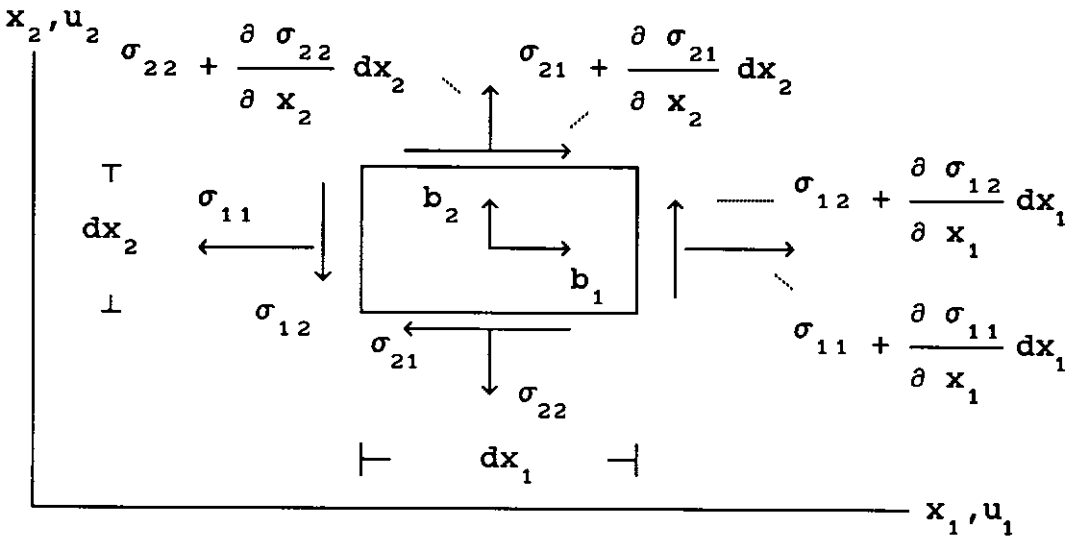


Figura II.4 - Tensões e Forças de Volume.

Se o campo de tensões for contínuo e de primeira derivada contínua, podemos escrever a equação de equilíbrio elástico no interior Ω do corpo :

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad , \quad i=1,2 ; j=1,2 \quad (II.4)$$

As derivadas são indicadas por uma vírgula, ou seja :

$$\sigma_{ij,i} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \sigma_{ij,1} + \sigma_{ij,2}$$

No contorno Γ do corpo, as tensões e as forças de

superfície devem obedecer à seguinte condição de equilíbrio (Fórmula de Cauchy) :

$$p_i = \sigma_{ji} n_j \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.5})$$

Sendo n_j o cosseno diretor da normal apontando para fora do corpo.

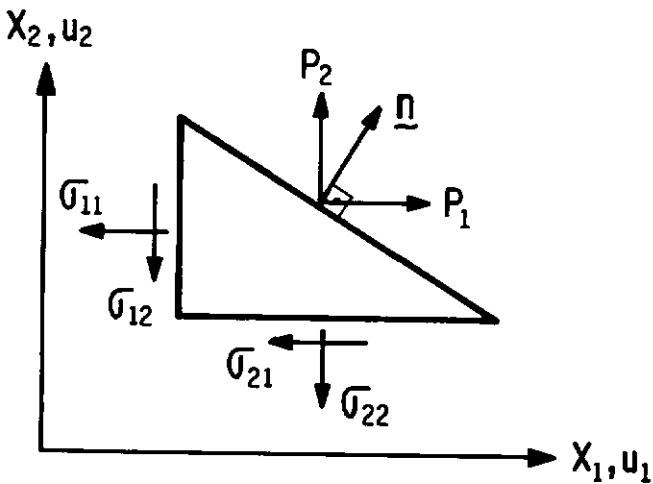


Figura II.5 - Tensões e forças de superfície no contorno Γ do corpo.

As condições de equilíbrio obtidas são lineares por terem sido estabelecidas sobre a configuração inicial, antes da deformação, de acordo com a Hipótese da Linearidade Geométrica.

O tensor de deformações específicas ϵ_{ij} caracteriza o estado de deformação em um ponto no interior do corpo, em relação ao referencial $x_1 x_2$:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \text{onde} \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$$

Considerando-se a Hipótese de Linearidade Geométrica, é definida a relação deformações - deslocamentos :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{II.6})$$

sendo u_j a componente do vetor de deslocamentos contínuos e de primeira derivada contínua, que é garantida se as deformações obedecerem à Condição de Compatibilidade :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{2 \partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (\text{II.7})$$

Para o material considerado pode-se escrever a relação tensão-deformação específica na forma :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{II.8})$$

onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem isotrópico de constantes elásticas, expresso por :

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (\text{II.9})$$

Sendo E o Módulo de Elasticidade Longitudinal e G

o Módulo de Elasticidade Transversal :

$$\Rightarrow G = E / 2 (1 + \nu)$$

Substituindo a equação (II.9) em (II.8) ,
tem-se a Lei de Hooke Generalizada :

$$\sigma_{ij} = 2 G \varepsilon_{ij} + \frac{2 G \nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.10})$$

Aplicando a equação (II.6) em (II.10), é encontrada a expressão das tensões em termos das derivadas dos deslocamentos. Introduzindo posteriormente o resultado na relação de equilíbrio (II.4) , obtêm-se as Equações de Equilíbrio de Navier :

$$G u_{j, kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k, kj} + b_j = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (\text{II.11})$$

cujas forças de superfície devem satisfazer, de acordo com a equação (II.5), a seguinte expressão :

$$\frac{2 G \nu}{1-2\nu} u_{k, k} n_i + G (u_{i, j} + u_{j, i}) n_j = p_i \quad \text{em } \Gamma \quad (\text{II.12})$$

As equações acima apresentadas, de (II.4) à (II.12), são válidas para o caso de EPD. Para o caso de EPT, deve-se substituir ν por $\bar{\nu} = \nu / (1+\nu)$ em todas as equações, sendo que G permanece o mesmo.

II.4 - IDENTIDADE DE SOMIGLIANA

Considere-se o corpo com domínio Ω e contorno Γ apresentado na Figura II.3. Considerando-se as definições dadas na seção II.2, um estado de equilíbrio sob a ação de forças e deslocamentos conhecidos pode ser representado pelo conjunto σ_{ij} , ε_{ij} , u_i , p_i e b_i , sujeito às seguintes condições de contorno :

- naturais : forças de superfície prescritas.

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (\text{II.13})$$

- essenciais : deslocamentos prescritos.

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (\text{II.14})$$

Considere-se, agora, a existência de um domínio Ω^* com contorno Γ^* (que pode estar no infinito) contendo o corpo $\Omega + \Gamma$, também em estado de equilíbrio representado por σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_i^* , p_i^* , e b_i^* , conforme a Figura II.6.

Se as propriedades elásticas forem as mesmas para ambos os domínios, pode-se escrever :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (\text{II.15})$$

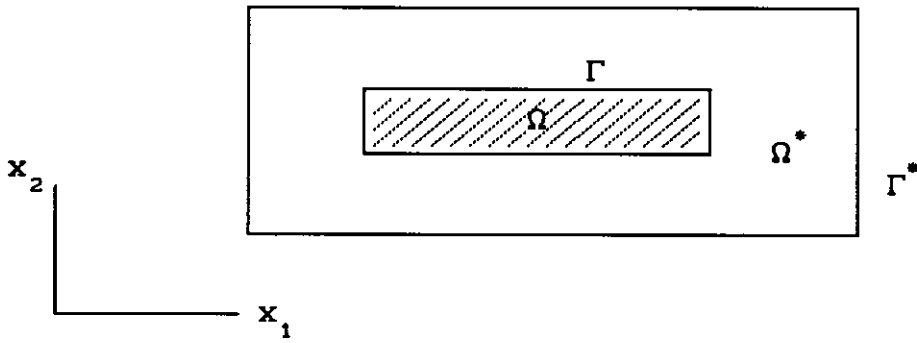


Figura II.6 - Corpo $\Omega + \Gamma$ contido em $\Omega^* + \Gamma^*$.

Substituindo a equação (II.6) em (II.15), integrando por partes e obedecendo as relações de equilíbrio (II.4) e (II.5), obtém-se :

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i^* u_i \, d\Gamma = \int_{\Omega} b_i u_i^* \, d\Omega + \int_{\Gamma} p_i u_i^* \, d\Gamma \quad (\text{II.16})$$

que corresponde ao Segundo Teorema de Betti (reciprocidade).

Admitindo que as componentes das forças de volume b_i^* correspondem a forças unitárias concentradas p_j aplicadas num ponto $\xi \in \Omega^*$ em cada uma das duas direções ortogonais do sistema cartesiano considerado, tem-se:

$$b_j^* = \delta(\xi, x) P_j \quad (\text{II.17})$$

onde $\delta(\xi, x)$ é a função Delta de Dirac.

Assim a primeira integral de (II.16) fica :

$$\int_{\Omega} b_i^* u_i d\Omega = u_i(\xi) p_i \quad (\text{II.18})$$

sendo que $\xi \in \Omega$.

Entretanto, se cada carga concentrada atuar independentemente, os deslocamentos u_j^* e forças de superfície p_j^* podem ser escritos na forma :

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) p_i \quad (\text{II.19})$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) p_i \quad (\text{II.20})$$

onde $u_{ij}^*(\xi, x)$ e $p_{ij}^*(\xi, x)$ representam, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície na direção j do ponto campo x , correspondendo a uma força unitária atuando na direção i aplicada no ponto fonte ξ .

Substituindo-se as equações (II.18) a (II.20) em (II.16), a equação abaixo é encontrada :

$$\begin{aligned} u_i(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \\ &- \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

Esta equação é conhecida como a Identidade de Somigliana para deslocamentos [13] e foi obtida através da

reciprocidade com uma solução singular da Equação de Navier satisfazendo :

$$G u_{j, kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} u_{k, kj}^* + \delta(\xi, x) P_j = 0 \quad (\text{II.22})$$

Soluções da equação (II.22) são chamadas de Soluções Fundamentais.

II.5 - SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Considerando que o domínio Ω^* seja elástico, homogêneo, isotrópico e infinito, a solução da Equação de Navier (II.22) nestes termos é devida a KELVIN [14] e suas componentes para elasticidade bidimensional [15] são :

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left\{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right\} \quad \begin{matrix} i=1,2 ; j=1,2 \end{matrix} \quad (\text{II.23})$$

para os deslocamentos;

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - \right.$$

$$- (1-2\nu) \left\{ r_{,i} n_j - r_{,j} n_i \right\} \quad i=1,2; j=1,2 \quad (\text{II.24})$$

para as forças de superfície. Onde $\alpha = 1$; $\beta = 2$ e a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x , $r = r(\xi, x)$, é dada por :

$$r = (r_i r_i)^{1/2} \quad ; \quad r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (\text{II.25})$$

As derivadas de r são tomadas em relação às coordenadas do ponto campo x :

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = \frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \quad (\text{II.26a})$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} \cdot n_i + \frac{\partial r}{\partial x_j(x)} \cdot n_j = r_{,i} \cdot n_i \quad (\text{II.26b})$$

Estas equações são válidas para EPD. Para casos de EPT substituir ν por $\bar{\nu}$.

II.6 - EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A Identidade de Somigliana (II.21) para pontos fonte ξ pertencentes ao contorno Γ é determinada

considerando-se o corpo representado na Figura II.7, no qual o ponto ξ é um ponto interno envolvido por parte de uma superfície circular de raio ε .

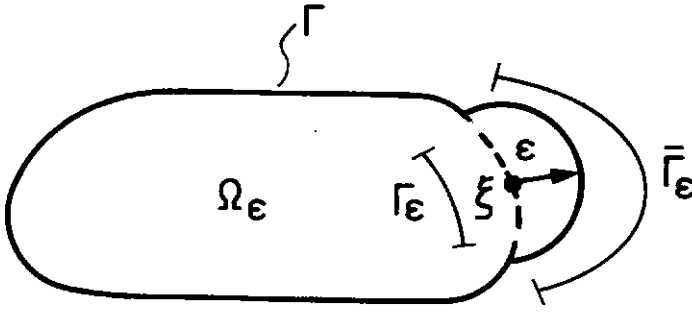


Figura II.7 - Ponto fonte ξ situado no contorno envolvido por uma parte de uma superfície circular.

Desta forma a equação (II.21) pode ser escrita como :

$$\begin{aligned}
 u_i(\xi) = & \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{i,j}^*(\xi, x) p_j d\Gamma(x) - \\
 & - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{i,j}^*(\xi, x) u_j d\Gamma(x) + \\
 & + \int_{\Omega_\varepsilon} u_{i,j}^*(\xi, x) b_j d\Omega(x)
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

Através de transformações e desdobramentos das integrais e tendo em atenção a continuidade de deslocamentos em ξ , a seguinte expressão é obtida :

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) =$$

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) b_j(x) d\Omega(x)$$

(II.28)

onde :

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_{\epsilon}} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (II.29)$$

sendo $C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} / 2$ para contornos suaves. Outros casos são apresentados por RICCARDELLA [17] e HARTMANN [18]. No entanto, como será mostrado adiante, pode-se determinar este coeficiente através de considerações de translações de corpo rígido sempre que os graus de liberdade forem assimiláveis fisicamente a deslocamentos nodais.

A equação (II.28) representa uma relação que deve ser satisfeita entre os deslocamentos no contorno e forças de superfície. Portanto, considerando que as forças de volume são sempre conhecidas, quando as condições de contorno são introduzidas, a equação (II.28) pode ser usada para a obtenção das incógnitas restantes no contorno.

II.7 - TENSÕES EM PONTOS INTERNOS

A Identidade de Somigliana, equação (II.21), constitui uma representação contínua dos deslocamentos em qualquer ponto interno ξ . A sua derivação em relação às coordenadas de ξ permite a obtenção das deformações específicas. A substituição desta na equação (II.10), permite que as componentes das tensões internas sejam determinadas através da expressão :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\xi) &= \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \\ &- \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) + \\ &+ \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) b_k(x) d\Omega(x) \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

onde :

$$\begin{aligned} u_{ijk}^*(\xi, x) &= \frac{1}{4 \alpha \pi (1-\nu) r^\alpha} \left[(1-2\nu) \left(r_{,j} \delta_{ik} + \right. \right. \\ &\left. \left. + r_{,i} \delta_{jk} - r_{,k} \delta_{ij} \right) + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

$$\begin{aligned}
p_{ijk}^*(\xi, x) = & \frac{G}{2 \alpha \pi (1-v) r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2v) \delta_{ij} r_{,k} \right. \right. \\
& + v \left(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} \right) - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k} \left. \right] + \\
& + \beta v \left(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k} \right) + \\
& + (1-2v) \left(\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk} \right) \\
& \left. - (1-4v) n_k \delta_{ij} \right\} \quad (II.32)
\end{aligned}$$

Para duas dimensões : $\alpha = 1$; $\beta = 2$ e $\gamma = 4$,
sendo que a substituição :

$$\frac{\partial r}{\partial x(\xi)} = - r_{,1} = - \frac{\partial r}{\partial x_1(x)} \quad (II.33)$$

já foi efetuada.

A validade do processo de derivação pode ser verificada na referência [18].

As expressões acima são válidas para EPD. Para casos de EPT, substituir v por \bar{v} .

II.8 - TENSÕES EM PONTOS DO CONTORNO

Resolvido o problema no contorno, equação (II.28), dispõe-se das forças de superfície e deslocamentos em qualquer ponto de Γ no sistema global de referência x_1x_2 , Figura II.5 . Para a determinação das tensões no contorno, é usado um sistema cartesiano auxiliar de coordenadas locais $\bar{x}_1\bar{x}_2$, tomando a direção \bar{x}_1 tangente ao contorno no ponto ξ onde se pretende calcular as tensões, conforme a Figura II.8. Consultar Referências [2] e [19].

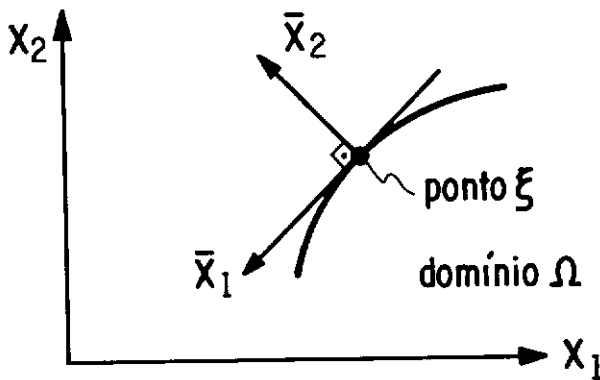


Figura II.8 - Sistema cartesiano auxiliar de coordenadas locais $\bar{x}_1 \bar{x}_2$.

Através da matriz de transformação para tensores de primeira ordem [20] são determinados os deslocamentos e forças de superfície no sistema local $\bar{x}_1\bar{x}_2$ e a Equação de

Cauchy (II.5) fornece então :

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{p}_2 \quad \text{e} \quad \bar{\sigma}_{12} = \bar{p}_1 \quad (\text{II.34})$$

Usando a Lei de Hooke e observando as relações entre tensões e deformações, tem-se :

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{1-\nu} \left(2 G \bar{\varepsilon}_{11} + \nu \bar{\sigma}_{22} \right) \quad (\text{II.35})$$

onde:
$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \quad (\text{II.36})$$

Sendo que o deslocamento \bar{u}_1 é interpolado ao longo do elemento em termos de seus valores nos pontos nodais.

Estas equações são válidas para EPD. Para casos de EPT , deve-se substituir ν por $\bar{\nu}$.

Aplicando-se a matriz de transformação para tensor de segunda ordem, encontra-se as tensões num ponto qualquer do contorno em relação ao sistema global de referência.

II.9 - REGIÕES INFINITAS

Na aplicação da equação (II.28) na resolução de problemas de cavidades em domínios infinitos, deve-se considerar algumas hipóteses relativas ao comportamento das funções envolvidas, que são as condições de regularidade. Estas condições implicam na nulidade das integrais de contorno no infinito.

Considerando, por simplificação, que as forças de volume $b_j(x)$ sejam nulas, encontra-se a expressão para a solução de problemas de cavidades em meios infinitos :

$$c_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (II.37)$$

Sendo que o contorno deve ser discretizado de tal forma que a normal \underline{n} aponte para dentro da cavidade, conforme mostra a Figura II.9.

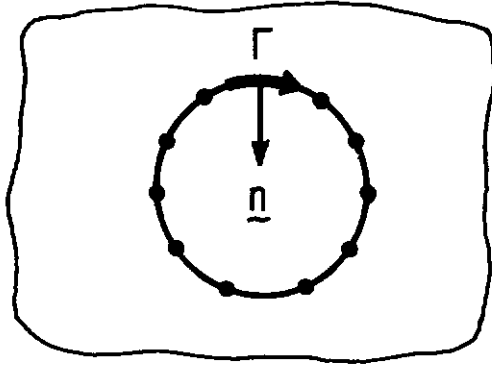


Figura II.9 - Sentido de discretização de uma cavidade em meio infinito.

As conclusões encontradas são válidas para a Identidade de Somigliana e para as expressões de tensões em pontos internos.

Deve ser observada a diferença na aplicação de translações de corpo rígido para o caso de regiões infinitas, conforme é mostrado na seção III.4 .

CAPÍTULO III

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo é desenvolvido um processo numérico aproximado para a resolução da Equação Integral de Contorno.

Para tal, emprega-se o elemento quadrático isoparamétrico contínuo para discretizar o contorno e o instrumento do nó duplo para simular descontinuidade.

No processo de montagem do sistema de equações característico do Método dos Elementos de Contorno, é feito o uso da Integração Numérica de Gauss, translações de corpo rígido e transformações cúbicas das coordenadas.

O sistema de equações é resolvido pelo Processo de Eliminação de Gauss.

Casos de simetria em relação a um ou aos dois planos de coordenadas são desenvolvidos, enquanto que o caso de simetria cíclica é apresentado no próximo capítulo.

Para maiores detalhes, consultar as Referências [16], [21] e [22].

III.2 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO E DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

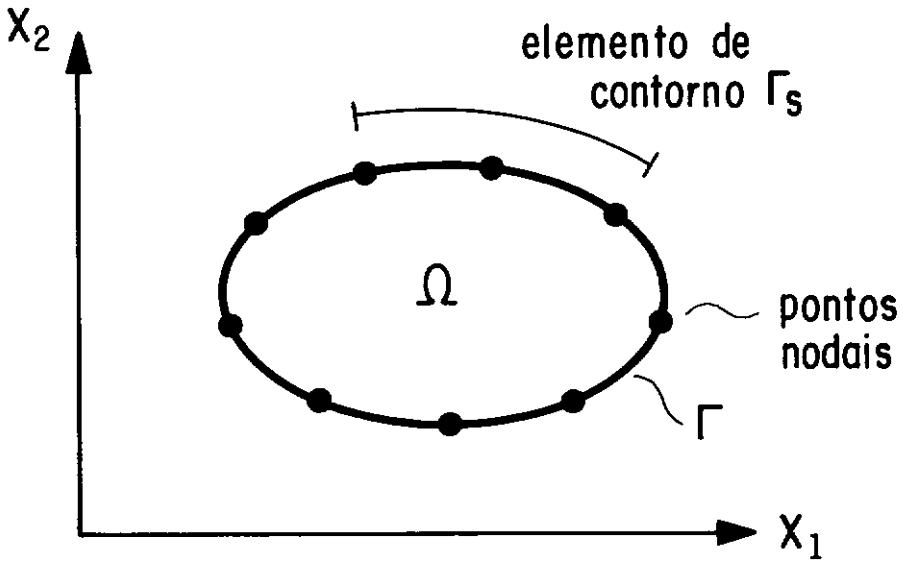
Para que seja possível resolver a equação (II.28), é empregado um processo numérico aproximado, que constitui-se de várias etapas, sendo que inicialmente é discretizado o contorno Γ do corpo em questão numa série de elementos, Figura III.1, sobre os quais os deslocamentos e as forças de superfície \underline{u}_j e \underline{p}_j , respectivamente, bem como as coordenadas \underline{x}_j , são interpoladas em função de seus valores nodais.

Utiliza-se, para tal fim, o elemento quadrático contínuo, representado na Figura III.2.

Os valores de $\underline{u}^{(j)}$ e $\underline{p}^{(j)}$ em qualquer ponto ao longo do elemento Γ_j podem ser definidos em termos dos valores nodais $\underline{u}^{(m)}$ e $\underline{p}^{(m)}$ através de três funções de interpolação φ_1 , φ_2 e φ_3 , funções da coordenada adimensional η , da seguinte forma :

$$\underline{u}^{(j)}(\eta) = \varphi_1 \underline{u}^1 + \varphi_2 \underline{u}^2 + \varphi_3 \underline{u}^3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_1^1 \\ \underline{u}_2^1 \\ \underline{u}_3^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.1})$$

$$\underline{p}^{(j)}(\eta) = \varphi_1 \underline{p}^1 + \varphi_2 \underline{p}^2 + \varphi_3 \underline{p}^3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{p}_1^1 \\ \underline{p}_2^1 \\ \underline{p}_3^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.2})$$



$$\Gamma = \sum_{s=1}^{NEL} \Gamma_s$$

NEL=número de elementos

Figura III.1 - Contorno Γ do corpo discretizado numa série de elementos.

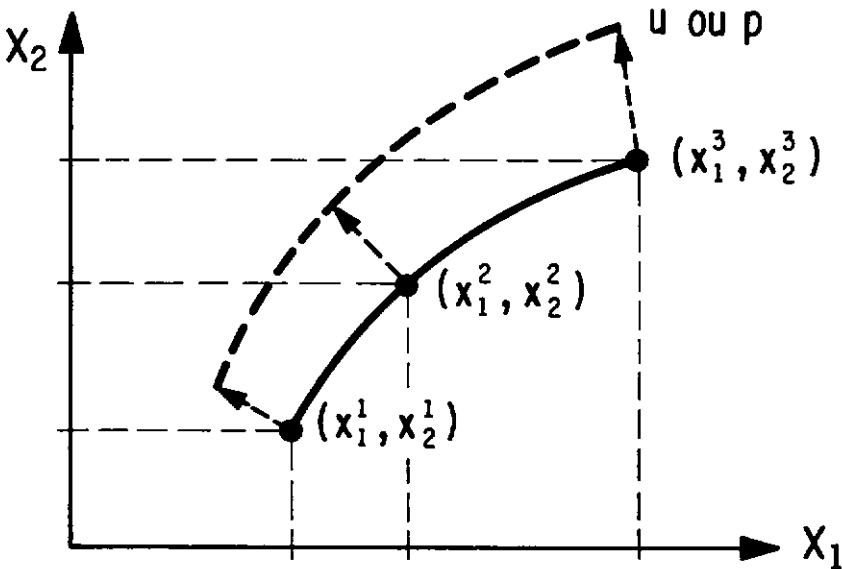


Figura III.2 - Elemento quadrático contínuo.

$$\text{onde: } \varphi_1 = \frac{1}{2} \eta (\eta-1) \quad \varphi_2 = (1-\eta) (1+\eta) \quad \varphi_3 = \frac{1}{2} \eta (1+\eta)$$

(III.3)

Estas funções fornecem os valores nodais da variável considerada quando aplicadas sobre os nós, Figura III.3.

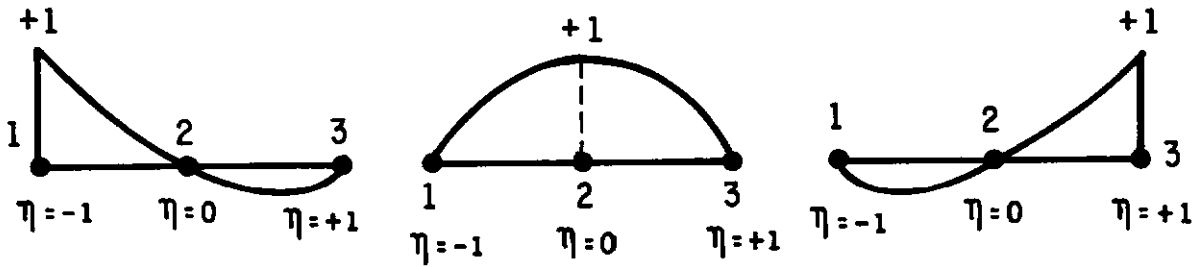


Figura III.3 - Funções de interpolação.

Para o caso bidimensional, tem-se :

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \end{bmatrix}$$

(III.4)

$$\begin{Bmatrix} p_1^{(j)} \\ p_2^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \\ p_1^3 \\ p_2^3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

As expressões (III.4) e (III.5) podem ser representadas por :

$$\underline{u}_1^{(j)}(\eta) = \underline{\psi} \cdot \underline{u}_1^{(m)} \quad (\text{III.6})$$

$$\underline{p}_1^{(j)}(\eta) = \underline{\psi} \cdot \underline{u}_1^{(m)} \quad (\text{III.7})$$

As coordenadas cartesianas $\underline{x}^{(j)}$ ao longo do elemento Γ são expressas como :

$$\underline{x}^{(j)}(\eta) = \varphi_1 \underline{x}^1 + \varphi_2 \underline{x}^2 + \varphi_3 \underline{x}^3 = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \\ \underline{x}^3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.8})$$

onde $\underline{x}^{(m)}$ são as coordenadas nodais referentes ao sistema global. Para duas dimensões, tem-se :

$$\left\{ \begin{matrix} x_1^{(j)} \\ x_2^{(j)} \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1^3 \\ x_2^3 \end{bmatrix}$$

(III.9)

$$\tilde{x}_1^{(j)}(\eta) = \psi_{\sim} \cdot \tilde{x}_1^{(m)} \quad (III.10)$$

Desta maneira, para fins de integração, a transformação de coordenadas requer a utilização do operador Jacobiano, Figura III.4 :

$$|J| = d\Gamma / d\eta \quad (III.11)$$

$$\therefore d\Gamma = |J| \cdot d\eta \quad (III.12)$$

Pela Figura III.4, pode-se obter :

$$(d\Gamma)^2 = \left[\left(\frac{d x_1}{d \eta} \right)^2 + \left(\frac{d x_2}{d \eta} \right)^2 \right] (d \eta)^2 \quad (III.13)$$

$$|J| = \left[\left(\frac{d x_1}{d \eta} \right)^2 + \left(\frac{d x_2}{d \eta} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (III.14)$$

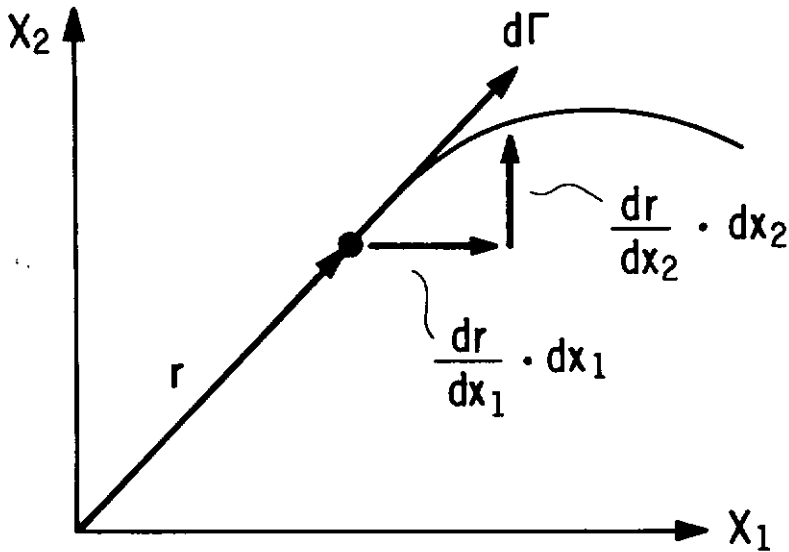


Figura III.4 - Notação para elementos curvos.

Note-se que o número de pontos nodais usados para definir a geometria do contorno é igual ao número de pontos nodais aos quais valores de deslocamentos e forças de superfície estão associados. Além disso, as funções de interpolação são de mesma ordem, tanto para coordenadas como para deslocamentos e forças de superfície.

Os cossenos diretores da normal são definidos da seguinte forma, Figura III.5 :

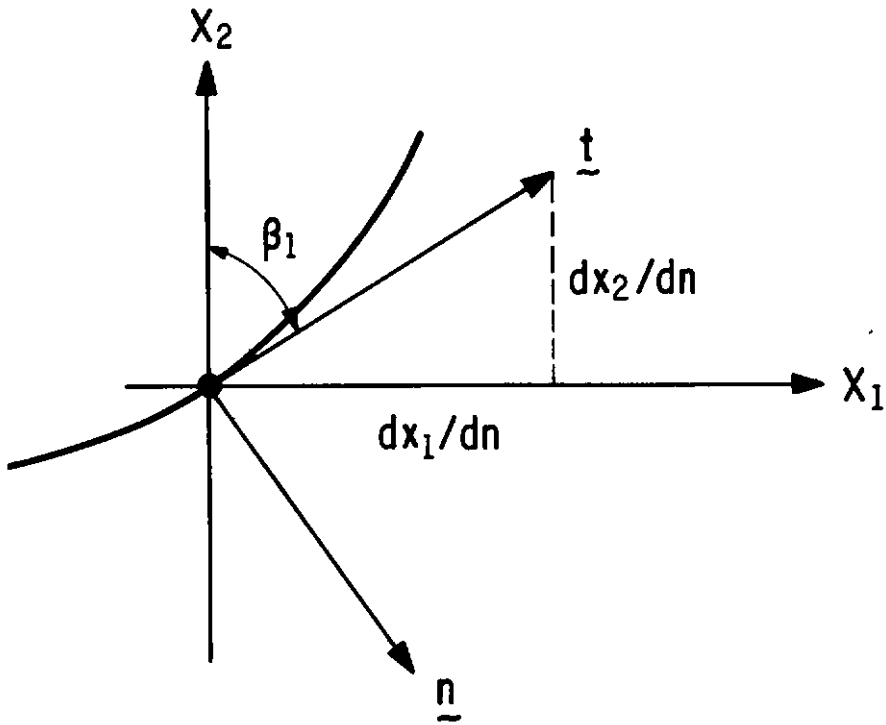


Figura III.5 - Cossenos diretores da normal.

$$|J| = d\Gamma / d\eta \quad n_1 = \cos \beta_1 = \frac{dx_2}{d\eta} \cdot \frac{1}{|J|} \quad (\text{III.15})$$

$$n_2 = -\sin \beta_1 = -\frac{dx_1}{d\eta} \cdot \frac{1}{|J|} \quad (\text{III.16})$$

III.3 - SISTEMA DE EQUAÇÕES

Após a discretização do contorno em NEL elementos, conforme visto na seção III.2, a próxima etapa é escrever a equação (II.28) na forma discretizada, para cada ponto nodal ξ_1 do contorno Γ . Considerando, por simplificação, que as forças de volume b_j são nulas, para cada ξ_1 tem-se :

$$\begin{aligned} \tilde{c}(\xi_1) \tilde{u}(\xi_1) + \sum_{j=1}^{NEL} \left(\int_{\Gamma_j} \tilde{p}^* \cdot \tilde{\psi} \cdot d\Gamma \right) \tilde{u}^{(m)} &= \\ \dots = \sum_{j=1}^{NEL} \left(\int_{\Gamma_j} \tilde{u}^* \cdot \tilde{\psi} \cdot d\Gamma \right) \tilde{p}^{(m)} & \end{aligned} \quad (III.17)$$

As matrizes $\tilde{\psi}$, $\tilde{u}^{(m)}$ e $\tilde{p}^{(m)}$ estão definidas em (III.4) e (III.5).

As matrizes \tilde{u}^* e \tilde{p}^* têm a seguinte estrutura :

$$\tilde{p}^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}$$

(III.18)

$$\tilde{u}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}$$

(III.19)

Aplicando a equação integral (III.17) em todos os NOC pontos nodais e integrando conforme o exposto no

próximo item, um sistema de 2xNOC equações é obtido :

$$\left(\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{\hat{H}}} \right) \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{p}} \quad (\text{III.20})$$

onde os vetores $\underline{\underline{u}}$ e $\underline{\underline{p}}$ contém os valores de deslocamentos e forças de superfície em todos os pontos nodais e a matriz quase diagonal $\underline{\underline{C}}$ é incorporada à matriz $\underline{\underline{\hat{H}}}$ para formar a matriz $\underline{\underline{H}}$. Portanto :

$$\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{p}} \quad (\text{III.21})$$

Introduzindo as condições de contorno e reordenando as matrizes, obtém-se uma matriz $\underline{\underline{E}}$ contendo os coeficientes relativos às incógnitas do problema e um vetor $\underline{\underline{F}}$ contendo as contribuições de $\underline{\underline{H}}$ e $\underline{\underline{G}}$ referentes aos valores prescritos. Resulta, assim, um sistema de equações do tipo:

$$\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}} \quad (\text{III.22})$$

Este sistema, uma vez resolvido pelo Processo de Eliminação de Gauss, fornece os deslocamentos no contorno e forças de superfície, sendo que $\underline{\underline{E}}$ é uma matriz cheia e não simétrica de ordem 2xNOC , $\underline{\underline{X}}$ é o vetor dos valores nodais incógnitos e $\underline{\underline{F}}$ é o vetor independente.

Os valores de deslocamentos e tensões em pontos internos podem ser obtidos empregando a Identidade de Somigliana e suas derivadas na forma discretizada.

III.4 - AVALIAÇÃO DAS INTEGRAIS

Será considerado, primeiramente, o caso em que o ponto fonte e o ponto campo não são coincidentes, ou seja, $\xi_1 \notin \Gamma_j$. Para tal, é usada a Integração Numérica de Gauss, com a escolha seletiva do número de pontos de integração de acordo com a relação entre a distância do ponto fonte ao centro do elemento, e o comprimento do elemento considerado. Portanto, as integrais assumem a forma :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \tilde{p}^* \cdot \tilde{\psi} \cdot d\Gamma &= \int_{-1}^{+1} \tilde{p}^* \cdot \tilde{\psi} \cdot |J| \cdot d\eta = \\ &= \sum_{k=1}^K |\tilde{J}|_k \cdot W_k \cdot \left(\tilde{p}^* \cdot \tilde{\psi} \right)_k \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \tilde{u}^* \cdot \tilde{\psi} \cdot d\Gamma &= \int_{-1}^{+1} \tilde{u}^* \cdot \tilde{\psi} \cdot |J| \cdot d\eta = \\ &= \sum_{k=1}^K |\tilde{J}|_k \cdot W_k \cdot \left(\tilde{u}^* \cdot \tilde{\psi} \right)_k \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Onde K é o número total de pontos de Gauss (no programa são utilizados 4, 6 ou 8) e W_k é o fator peso associado ao ponto k. $|\tilde{J}|$, \tilde{p}^* , \tilde{u}^* , e $\tilde{\psi}$ encontram-se

definidos na seção anterior.

Quando o ponto fonte e o ponto campo forem coincidentes, ou seja, $\xi_i \in \Gamma_j$, pode-se obter as submatrizes da diagonal de \underline{H} , que correspondem às submatrizes \underline{C}_{ij} somadas às submatrizes $\hat{\underline{H}}_{ij}$, através da imposição da condição de que translações de corpo rígido correspondem a forças de superfície nulas.

Tem-se então, de acordo com a Referência [16], para regiões finitas :

$$\underline{H}_{ii} = - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{NOC} \underline{H}_{il} \quad ; \quad i = 1, NOC \quad (III.25)$$

e para regiões infinitas :

$$\underline{H}_{ii} = \underline{I} - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{NOC} \underline{H}_{il} \quad ; \quad i = 1, NOC \quad (III.26)$$

onde \underline{I} é a Matriz Identidade : $\underline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (III.27)$

Portanto, as expressões (III.25) e (III.26) representam um processo indireto de calcular as submatrizes da diagonal de \underline{H} , dispensando o cálculo analítico dos coeficientes $\underline{C}_{ij}(\xi)$ e os Valores Principais de Cauchy.

O cálculo das submatrizes da diagonal principal de \underline{G}_{ij} , quando $\xi_i \in \Gamma_j$, é executado utilizando-se uma transformação cúbica, envolvendo a coordenada intrínseca η

e a coordenada γ dos pontos de integração de Gauss (14 pontos). Maiores detalhes no Apêndice B e Referência [23].

É interessante ressaltar que a transformação usada provoca automaticamente uma concentração dos pontos de integração em torno da singularidade.

III.5 - SISTEMAS COM SIMETRIA

A análise de corpos com geometria e condições de contorno simétricas em relação a um ou aos dois eixos de coordenadas, Figura III.6, pode ser feita discretizando-se somente a metade ou um quarto do contorno, respectivamente. Este processo dispensa a discretização das interfaces e a aplicação de condições de contorno ao longo dos planos de simetria.

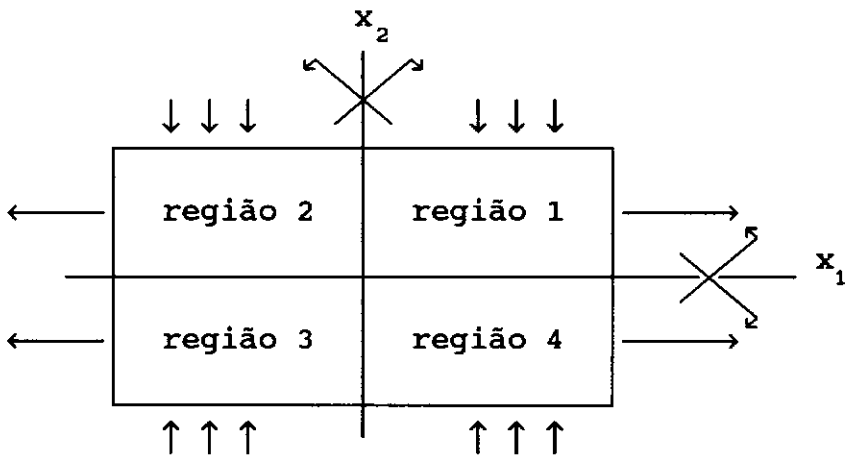


Figura III.6 - Corpo com simetria dupla.

Sejam \tilde{H}_{ij} e \tilde{G}_{ij} as submatrizes que multiplicam os valores nodais do contorno da região "j" quando o ponto ξ coincide com pontos nodais do contorno da região "i". Os subvetores \tilde{u}_j e \tilde{p}_j contêm os valores nodais do contorno da região "j".

Considerando o caso de simetria em relação aos dois eixos (simetria dupla), pode-se escrever o sistema de equações de acordo com as submatrizes e subvetores :

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} & \tilde{H}_{13} & \tilde{H}_{14} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} & \tilde{H}_{23} & \tilde{H}_{24} \\ \tilde{H}_{31} & \tilde{H}_{32} & \tilde{H}_{33} & \tilde{H}_{34} \\ \tilde{H}_{41} & \tilde{H}_{42} & \tilde{H}_{43} & \tilde{H}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & \tilde{G}_{12} & \tilde{G}_{13} & \tilde{G}_{14} \\ \tilde{G}_{21} & \tilde{G}_{22} & \tilde{G}_{23} & \tilde{G}_{24} \\ \tilde{G}_{31} & \tilde{G}_{32} & \tilde{G}_{33} & \tilde{G}_{34} \\ \tilde{G}_{41} & \tilde{G}_{42} & \tilde{G}_{43} & \tilde{G}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_1 \\ \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3 \\ \tilde{p}_4 \end{Bmatrix}$$

(III.28)

Condensando as submatrizes em função da primeira região e seguindo as seguintes regras :

- em \tilde{H}_{12} e \tilde{G}_{12} trocam-se os sinais dos termos que multiplicam \tilde{u}_2 e \tilde{p}_2 , na direção x_1 e somam-se estes termos com \tilde{H}_{11} e \tilde{G}_{11} , respectivamente.
- em \tilde{H}_{13} e \tilde{G}_{13} trocam-se os sinais dos termos que multiplicam \tilde{u}_3 e \tilde{p}_3 , nas duas direções e somam-se estes termos com \tilde{H}_{11} e \tilde{G}_{11} , respectivamente.
- em \tilde{H}_{14} e \tilde{G}_{14} trocam-se os sinais dos termos que multiplicam \tilde{u}_4 e \tilde{p}_4 , na direção x_2 e somam-se estes termos com \tilde{H}_{11} e \tilde{G}_{11} , respectivamente.

O sistema assume, então, a forma :

$$\tilde{H}'_{11} \cdot \tilde{u}_1 = \tilde{G}'_{11} \cdot p_1 \quad (\text{III.29})$$

Note-se que \tilde{H}'_{11} não é mais singular, pois a condição de simetria está embutida e as dimensões correspondem ao contorno da região 1. Portanto, é possível integrar automaticamente sobre elementos refletidos e montar diretamente as matrizes reduzidas.

Um caso especial de simetria é o assunto principal do próximo capítulo, que constitui a Simetria Cíclica.

III.6 - SIMULAÇÃO DE DESCONTINUIDADE

O artifício do nó duplo é usado quando o contorno do corpo não possuir continuidade da normal ou das condições de contorno. Ver Referência [17].

No caso da não continuidade da normal, não é garantida a continuidade das forças de superfície, podendo-se ter direções da normal diferentes para um mesmo nó pertencente à dois elementos adjacentes, ver Figura III.7.

O nó duplo pode, também, ser empregado quando existe continuidade da normal, mas as condições de contorno

são descontínuas, representadas na Figura III.8.

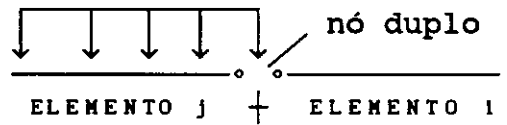
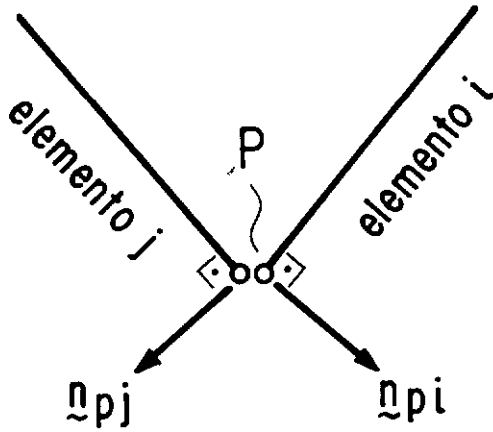


Figura III.7 - Descontinuidade da normal.

Figura III.8 - Condições de contorno descontínuas.

O nó duplo consiste em colocar-se dois nós ocupando a mesma posição geométrica, sem qualquer elemento entre eles, cada um pertencente a um elemento diferente, conforme Figura III.9. Obtêm-se, assim, dois conjuntos de linhas nas matrizes \underline{H} e \underline{G} , sendo que os valores de \underline{H} são diferentes devido à matriz diagonal de coeficientes \underline{C}_{1j} , e os valores de \underline{G} são iguais. Portanto, não é possível prescrever deslocamentos nos dois nós em uma mesma direção, a fim de se evitar singularidade na matriz \underline{E} e obedecer à condição de continuidade de deslocamentos.

Deve-se prescrever, então, ao menos uma componente de força de superfície em cada direção em qualquer um dos nós L ou K da Figura III.9.

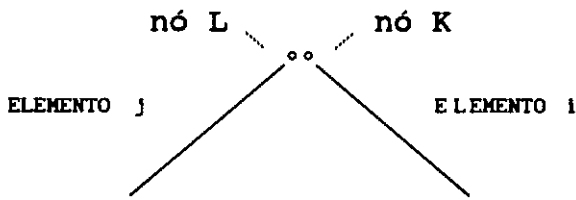


Figura III.9 - Pontos nodais L e K formando um nó duplo entre os elementos i e j.

No caso especial da Figura III.10 pode ser usado o procedimento proposto na Referência [24].

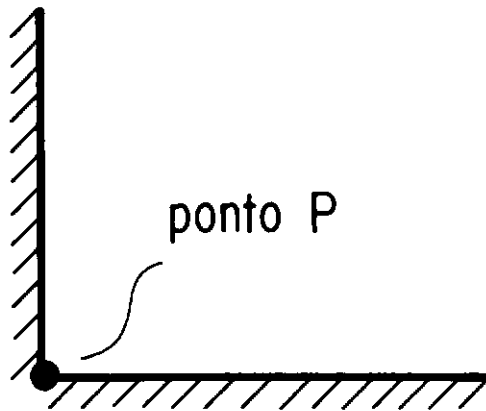


Figura III.10 - Ponto P sujeito à engastamento perfeito.

CAPÍTULO IV

SISTEMAS COM SIMETRIA CÍCLICA

IV.1 - INTRODUÇÃO

Em numerosos casos, a repetição da forma estrutural e do carregamento não é acompanhada de um eixo de simetria. Para tais situações, pode-se fazer uso do Princípio da Repetição apresentado por ZIENKIEWICZ e SCOTT [25].

Considere-se uma estrutura na qual uma série de segmentos idênticos é repetida e estendendo-se ao infinito em ambas as direções, com cada segmento submetido ao mesmo carregamento. Assim, num sistema composto por uma série de segmentos idênticos em estrutura e carregamento, a análise pode ser realizada somente sobre um segmento típico, identificando os nós nas duas seções que o isolam do resto do sistema e discretizando-o de tal maneira que seja repetitivo e que envolva as mesmas posições nodais nas seções repetidas (pontos correspondentes).

O Princípio da Repetição é particularmente vantajoso em casos de Periodicidade Rotacional ou Simetria Cíclica, tanto de propriedades físicas como geométricas, as quais ocorrem frequentemente em problemas de engenharia.

A análise é desenvolvida considerando o sistema como sendo gerado a partir de repetidas rotações de um segmento ou parte fundamental em torno de um eixo.

Convém salientar que as condições de contorno não precisam obedecer a simetria, desde que sejam do mesmo tipo (natural ou essencial) em pontos correspondentes, as quais passam a chamar-se condições de contorno genéricas.

Somente o contorno externo do segmento fundamental precisa ser discretizado, dispensando, assim, a discretização das interfaces entre segmentos.

O sistema de equações é decomposto num pequeno número de sistemas menores relativos a um simples segmento, sobre o qual utiliza-se transformações rotacionais de componentes físicas em componentes cíclicas.

EVENSEN [26] demonstrou que conceitos de simetria podem ser usados para reduzir o tamanho do problema de autovalor na análise dinâmica de estruturas multi-simétricas.

ZIENKIEWICZ [27] analisou problemas nos quais a geometria e as propriedades físicas não variavam ao longo de um eixo de coordenadas, mas o carregamento poderia exibir variação, sendo assim expandido em Série de Fourier. Através da propriedade de ortogonalidade, o sistema de equações pode ser separado num pequeno número de sistemas

menores.

MAC NEAL e outros [28] investigaram corpos elásticos simetricamente cíclicos com carregamento estático e dinâmico genéricos usando noções matemáticas das componentes simétricas.

Estudos feitos utilizando o Método dos Elementos de Contorno em casos de simetria cíclica são devidos à CHAUDONET [7], que considerou o caso especial de simetria cíclica de estrutura e carregamento.

MAIER, NOVATI e PARREIRA [8],[29] analisaram sistemas com simetria cíclica com carregamento genérico, através de transformações rotacionais das componentes e a aplicaram a problemas elásticos e inelásticos. FOSSA, MAIER, MASARATI e NOVATI [30] abordaram sistemas sujeitos à carregamento genérico e que apresentavam simetria cíclica e reflexiva.

IV.2 - ESTRUTURA DAS MATRIZES

Define-se como segmento ou região fundamental um setor do corpo de domínio Ω_1 e contorno Γ_1 a partir do qual obtém-se o domínio total Ω do corpo e seu contorno Γ , através de sucessivas rotações (N-1 vezes) de um ângulo $\alpha = 2\pi/N$ radianos em torno de um eixo, sendo N o número de

segmentos no qual o corpo foi dividido, ou seja, a ordem de simetria cíclica.

Adotar-se-ão N planos cartesianos de referência, como mostra a Figura IV.1, sendo um para cada segmento, com o eixo x_3^n coincidente com o eixo de simetria cíclica. Os eixos x_1^n e x_2^n ($n=1, \dots, N$) são rotacionados em passos de um ângulo $\alpha = 2 \pi / N$ de um segmento ao subsequente, gerando assim, todos os N segmentos.

Discretizando o contorno Γ em elementos, tem-se no contorno Γ_n ($n = 1, N$) de cada segmento $m = \bar{m} / N$ nós e $M = m \cdot D$ valores nodais de cada tipo (deslocamentos ou forças de superfície), sendo \bar{m} o número total de pontos nodais do contorno e $D = 2$ para problemas de elasticidade bidimensional.

Supõe-se, por simplicidade de notação, que cada segmento de contorno Γ_n tenha somente um elemento reto constante. Isto implica que $\bar{m} = N$.

Considerando os conceitos fundamentais relativos ao Método dos Elementos de Contorno já apresentados nos capítulos anteriores, o estudo de simetria cíclica é desenvolvido partindo-se da equação integral de contorno escrita para um ponto fonte Q_r e ponto campo Q_s . Considerando que o contorno seja suave, a equação (III.17) assume a forma :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \tilde{r} u (Q_r) + \sum_{s=1}^N \left[\int_{\Gamma_s} \tilde{r} p^* (Q_r, Q_s) d\Gamma(Q_s) \right] \tilde{r} u (Q_s) = \\
 \dots = \sum_{s=1}^N \left[\int_{\Gamma_s} \tilde{r} u^* (Q_r, Q_s) d\Gamma(Q_s) \right] \tilde{r} p (Q_s)
 \end{aligned}
 \tag{IV.1}$$

Sendo que r indica o plano de referência local do segmento fundamental usado para representar as quantidades nodais.

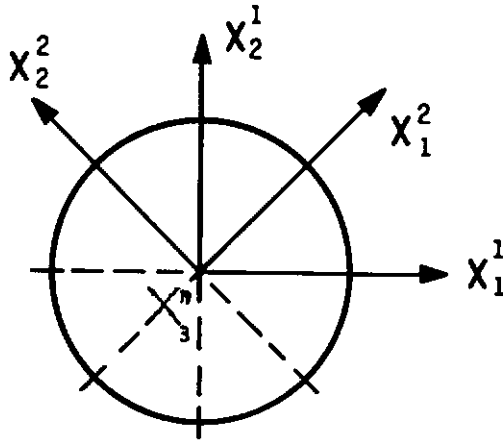


Figura IV.1 - Representação dos planos locais de referência em um corpo com simetria cíclica.

Tomando uma matriz \tilde{R}_{rs} de cossenos diretores, que transforma a representação dos vetores de "s" para "r" sistemas cartesianos de referência ($\tilde{U}^r = \tilde{R}_{rs} \tilde{U}^s$), tem-se então, uma representação no sistema local de cada segmento:

$${}^L \tilde{H}_{rs} = \left[\int_{\Gamma_s} {}^r \tilde{p}^* (Q_r, Q_s) d\Gamma(Q_s) \right] R_{rs} + \frac{1}{2} I \tilde{R}_{rs} \quad (\text{IV.2})$$

$${}^L \tilde{G}_{rs} = \left[\int_{\Gamma_s} {}^r \tilde{u}^* (Q_r, Q_s) d\Gamma(Q_s) \right] R_{rs} \quad (\text{IV.3})$$

A equação (IV.1) pode ser escrita na forma :

$$\sum_{s=1}^N {}^L \tilde{H}_{rs} {}^s \tilde{u} (Q_s) = \sum_{s=1}^N {}^L \tilde{G}_{rs} {}^s \tilde{p} (Q_s) \quad r = 1, N \quad (\text{IV.4})$$

ou colocando na forma matricial :

$${}^L \tilde{H} \cdot {}^L \tilde{U} = {}^L \tilde{G} \cdot {}^L \tilde{P} \quad (\text{IV.5})$$

onde L indica a representação dos vetores no sistema local de referência de cada segmento :

$${}^L \tilde{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{U}_1 \\ 2 \\ \tilde{U}_2 \\ \vdots \\ N \\ \tilde{U}_N \end{bmatrix} \quad {}^L \tilde{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{P}_1 \\ 2 \\ \tilde{P}_2 \\ \vdots \\ N \\ \tilde{P}_N \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

As matrizes definidas na equação (IV.5)

permanecem inalteradas se os índices r e s são incrementados por um número inteiro k , isto é, se o ponto fonte e o ponto campo são simultaneamente rotacionados por $k(2\pi/N)$. Assim, tem-se que:

$$\begin{matrix} L \\ \tilde{H}_{rs} \end{matrix} = \begin{matrix} L \\ \tilde{H}_{r+k, s+k} \end{matrix} ; \quad \begin{matrix} L \\ \tilde{G}_{rs} \end{matrix} = \begin{matrix} L \\ \tilde{G}_{r+k, s+k} \end{matrix} \quad (\text{IV.7a})$$

A simetria cíclica induz, então, a seguinte estrutura modificada nas matrizes \tilde{H} e \tilde{G} da equação (IV.5) :

$$\begin{matrix} L \\ \tilde{H}_{rs} \end{matrix} = \begin{matrix} L \\ \tilde{H}_{1h} \end{matrix} \quad \text{onde} \quad h = \begin{cases} 1+s-r & \text{se } s \geq r \\ N+1+s-r & \text{se } s < r \end{cases} \quad (\text{IV.7b})$$

Esta relação permanece válida se o número de nós em cada segmento for maior que 1. Na implementação numérica, cada segmento é composto, pelo menos, de um elemento quadrático, envolvendo assim, mais de um ponto nodal.

Na aplicação da simetria cíclica, as condições de contorno podem ser ou não igualmente repetidas nos diversos segmentos. Se elas forem simetricamente cíclicas, somente um sistema de equações de dimensão relativa ao segmento fundamental precisa ser resolvido. Se as condições de contorno forem genéricas, então é necessário utilizar-se uma transformação de componentes físicas em cíclicas e resolver vários sistemas de equações.

IV.3 - TRANSFORMAÇÕES ROTACIONAIS

Seja U_n ($n=1,N$) um conjunto de quantidades físicas, no caso em questão, componentes de deslocamentos ou forças de superfície, definidas em pontos correspondentes de N segmentos de um corpo com simetria cíclica.

Estas N quantidades físicas podem ser relacionadas com outras N quantidades, chamadas componentes cíclicas, através de transformações rotacionais, as quais são o tema do desenvolvimento a seguir.

Escrevendo, então, as componentes físicas em termos de componentes cíclicas, obtém-se :

$$\begin{aligned}
 U_n = & V^0 + \sum_{k=1}^L \left[V^{kc} \cos \left((n-1) k \alpha \right) + \right. \\
 & \left. + V^{ks} \sin \left((n-1) k \alpha \right) \right] + (-1)^{n-1} V^{N/2} \\
 & n = 1, N
 \end{aligned}
 \tag{IV.8}$$

onde : $L = \frac{1}{2} (N-2)$ se N for par ou

$L = \frac{1}{2} (N-1)$ se N for ímpar e o último termo não existe.

(IV.9)

As relações (IV.8) e (IV.9) podem ser interpretadas como sendo uma decomposição de quantidades físicas em cíclicas, que se assemelha a uma expansão em Série de Fourier (a qual é estabelecida para o caso limite de $N \rightarrow \infty$). Estabelece-se assim, uma correspondência entre N vetores de componentes físicas $\underline{U}'^T = \{ U_1, \dots, U_N \}$ e N vetores de componentes cíclicas $\underline{V}'^T = \{ V^0, \dots, V^{LC}, V^{LS}, V^{N/2} \}$.

$$\underline{U}' = \underline{T}' \cdot \underline{V}' \quad (\text{IV.10})$$

onde \underline{T}' consiste numa matriz não-singular de transformação de ordem N :

$$\underline{T}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \cos \alpha & \text{sen } \alpha & \cos 2\alpha & \dots & \text{sen } L\alpha & -1 \\ 1 & \cos 2\alpha & \text{sen } 2\alpha & \cos 4\alpha & \dots & \text{sen } 2L\alpha & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(N-1)\alpha & \text{sen}(N-1)\alpha & \cos(N-1)2\alpha & \text{sen}(N-1)L\alpha & (-1)^{N-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

Note-se que a última coluna existe somente quando N for par.

Com a finalidade de esclarecer a estrutura da matriz \underline{T}' , são numerados pares de colunas pelo índice k, iniciando a partir da segunda coluna. Então, para um par genérico k (k=1,L) de colunas, tem-se :

$$\tilde{T}'_{n,2k} = \cos \left(k (n-1) \alpha \right) \quad n = 1, N \quad (\text{IV.12a})$$

$$\tilde{T}'_{n,2k+1} = \text{sen} \left(k (n-1) \alpha \right) \quad n = 1, N \quad (\text{IV.12b})$$

A matriz \tilde{T}' apresenta a propriedade de ortogonalidade, ou seja, a não singularidade da transformação, que pode ser verificada facilmente :

$$\tilde{T}'^T \cdot \tilde{T}' = \tilde{D}' = \text{diag} [N , N/2 , \dots , N/2 , N] \quad (\text{IV.13})$$

$$\tilde{T}'^{-1} = \tilde{D}'^{-1} \cdot \tilde{T}'^T \quad (\text{IV.14})$$

$$\tilde{T}'^T = \tilde{D}' \cdot \tilde{T}'^{-1}$$

A transformação inversa das equações (IV.8) e (IV.9), que consiste na obtenção das componentes cíclicas a partir das componentes físicas, na forma matricial, é dada por :

$$\tilde{V}' = \tilde{T}'^{-1} \cdot \tilde{U}' \quad (\text{IV.15})$$

e, na forma expandida, por :

$$V^0 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U_n$$

. . .

$$V^{kC} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N U_n \cos \left((n-1) k \alpha \right)$$

$$V^{kS} = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N U_n \sen \left((n-1) k \alpha \right)$$

. . .

$$V^{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} U_n \quad (IV.16)$$

As transformações acima podem ser estimadas pelo produto da teoria da decomposição simétrica atribuída à FORTESCUE [31] que em 1918 a usou na análise de redes elétricas polifásicas.

A transformação rotacional expressa na equação (IV.10) pode ser aplicada simultaneamente para todas as $\bar{M} = N.m.D = \bar{m}.D$ quantidades nodais contidas no vetor \underline{U} e, simultaneamente, para todas as contidas em \underline{P} da equação (IV.5):

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{I} T'_{11} & \tilde{I} T'_{12} & . & . & . & \tilde{I} T'_{1N} \\ \tilde{I} T'_{21} & \tilde{I} T'_{22} & . & . & . & \tilde{I} T'_{2N} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \tilde{I} T'_{N1} & \tilde{I} T'_{N2} & . & . & . & \tilde{I} T'_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V^0 \\ V^{kC} \\ V^{kS} \\ V^{N/2} \end{Bmatrix}$$

$$k = 1, L$$

$$(IV.17)$$

$$\text{ou} \quad \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{V}} \quad (\text{IV.18})$$

onde $\underline{\underline{I}}$ corresponde à matriz identidade de ordem m.D e T'_{np} são os elementos genéricos de $\underline{\underline{T}}'$.

Similarmente :

$$\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \quad (\text{IV.19})$$

Nota-se que as equações (IV.18) e (IV.19) representam a expansão de m.D vetores físicos $\underline{\underline{U}}_n$ e $\underline{\underline{P}}_n$ pertencentes a N segmentos ($n = 1, N$) em seus vetores cíclicos V^k e Q^k , ($k = 0, \dots, LC, LS, N/2$), respectivamente.

Sendo a matriz $\underline{\underline{T}}$ uma expansão da matriz $\underline{\underline{T}}'$, e não singular como $\underline{\underline{T}}'$, então ela exhibe as mesmas propriedades de ortogonalidade :

$$\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{T}} = \text{diag} [\underline{\underline{I}}_N, \underline{\underline{I}}_{N/2}, \dots, \underline{\underline{I}}_N] = \underline{\underline{D}} \quad (\text{IV.20})$$

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{D}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}^T \quad (\text{IV.21})$$

$$\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{T}}^{-1} \quad (\text{IV.22})$$

IV.4 - DECOMPOSIÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Substituindo as equações (IV.18) e (IV.19) na equação (IV.23) e pré-multiplicando por \tilde{T}^T , obtém-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno em termos das componentes cíclicas :

$$\tilde{H} \cdot \tilde{U} = \tilde{G} \cdot \tilde{P} \quad (\text{IV.23})$$

$$\tilde{T}^T \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{V} = \tilde{T}^T \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{T} \cdot \tilde{Q} \quad (\text{IV.24})$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{V} = \tilde{B} \cdot \tilde{Q} \quad (\text{IV.25})$$

$$\tilde{A} = \tilde{T}^T \cdot \tilde{H} \cdot \tilde{T} \quad (\text{IV.26})$$

$$\tilde{B} = \tilde{T}^T \cdot \tilde{G} \cdot \tilde{T} \quad (\text{IV.27})$$

É estudado unicamente a estrutura da matriz \tilde{A} , uma vez que todas as conclusões são válidas para \tilde{B} , baseando-se no fato de que \tilde{H} e \tilde{G} compreendem o mesmo padrão de simetria cíclica.

Considere-se, inicialmente, o produto $\bar{\tilde{A}} = \tilde{H} \cdot \tilde{T}$ para um bloco de índices ns e de ordem m.D :

$$\bar{\tilde{A}}_{ns} = \sum_{i=1}^N \tilde{H}_{ni} \cdot \tilde{T}_{is} = \sum_{i=1}^N \tilde{H}_{ni} \cdot \tilde{T}'_{is} \quad (\text{IV.28})$$

Utilizando a relação (IV.7b) e suprimindo o super-índice L e o sub-índice 1 referente à primeira linha de blocos de ${}^L H$, a equação (IV.28) pode ser escrita na seguinte forma :

$$\bar{\tilde{A}}_{ns} = \sum_{l=1}^{n-1} \tilde{H}_{N+1+l-n} \tilde{T}'_{ls} + \sum_{l=n}^N \tilde{H}_{1+l-n} \tilde{T}'_{ls} \quad (\text{IV.29})$$

Nota-se que a soma não ocorrerá no primeiro termo quando $n=1$. É conveniente, então, adotar-se novos índices :

$$\begin{cases} l = N + 1 + i - n \\ l' = 1 + i - n \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

Assim a equação (IV.29) torna-se :

$$\bar{\tilde{A}}_{ns} = \sum_{l=N+2-n}^N \tilde{H}_l \tilde{T}'_{l+n-1-N,s} + \sum_{l'=1}^{N+1-n} \tilde{H}_{l'} \tilde{T}'_{l'+n-1,s} \quad (\text{IV.31})$$

Reordenando os somatórios, pode-se unificá-los da seguinte forma :

$$\bar{\tilde{A}}_{ns} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \tilde{T}'_{p'(p),s} \quad (\text{IV.32})$$

onde :

$$\begin{cases} p' = p + n - 1 & \text{se } p \leq N + 1 - n \\ p' = p + n - 1 - N & \text{se } p > N + 1 - n \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Considerando agora um bloco genérico da matriz \underline{A} , de ordem m.D, sendo $\underline{T}_{rn}^T = \underline{I} \underline{T}'_{nr}$:

$$\underline{A}_{rs} = \sum_{n=1}^N \underline{T}_{rn}^T \cdot \bar{\underline{A}}_{ns} = \sum_{n=1}^N \underline{T}'_{nr} \cdot \bar{\underline{A}}_{ns} \quad (\text{IV.34})$$

Substituindo as equações (IV.32) e (IV.33) em (IV.34) e alterando a ordem do somatório, obtém-se :

$$\underline{A}_{rs} = \sum_{p=1}^N \underline{H}_p \cdot \sum_{n=1}^N \underline{T}'_{nr} \cdot \underline{T}'_{p'(n),s} \quad (\text{IV.35})$$

Na execução da soma em respeito a n, deve ser prestada atenção na relação (IV.33) entre os índices p' e n para um valor fixo qualquer p.

Tem-se, assim, que a matriz \underline{A} pode ser concebida como sendo formada por submatrizes \underline{A}_{rs} , segundo a equação (IV.35).

Chama-se de \underline{A}^* uma submatriz de \underline{A} obtida através da eliminação da primeira linha e da primeira coluna de blocos e também, se N for par, da última linha e coluna de blocos. Em notação :

$$\underline{A}^* = \left[\underline{A}_{rs} \right] \quad \text{onde: } 1 < r, s \begin{cases} \leq N & \text{se } N \text{ for ímpar} \\ < N & \text{se } N \text{ for par} \end{cases} \quad (\text{IV.36})$$

Particionando \underline{A}^* em submatrizes, cada uma das quais contendo quatro blocos m.D x m.D :

$$\tilde{A}_{hk}^* = \begin{bmatrix} A_{2h,2k} & A_{2h,2k+1} \\ A_{2h+1,2k} & A_{2h+1,2k+1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.37})$$

onde os índices h e k , variando de 1 até L , especificam a posição da submatriz \tilde{A}_{hk}^* de ordem 2.m.D dentro da matriz \tilde{A}^* e por consequência, dentro de \tilde{A} . É provado posteriormente que:

$$\tilde{A}_{hk}^* = 0 \quad \text{para} \quad h \neq k \quad (\text{IV.38})$$

a qual sugere a desejada decomposição do sistema.

Para tal objetivo, considera-se separadamente os quatro blocos que formam a submatriz \tilde{A}_{hk}^* de acordo com as expressões (IV.11) e (IV.12) da matriz \tilde{T}' . Estes blocos podem ser dados pela seguinte formulação :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{2h,2k} &= \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{n,2h} \tilde{T}'_{p'(n),2k} = \dots \\ \dots &= \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \cos \left[h(n-1)\alpha \right] \cdot \cos \left[k(p'-1)\alpha \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.39})$$

Analogamente :

$$\tilde{A}_{2h,2k+1} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \cos \left[h(n-1)\alpha \right] \sin \left[k(p'-1)\alpha \right] \quad (\text{IV.40})$$

$$\tilde{A}_{2h+1,2k} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \sin \left[h (n-1) \alpha \right] \cos \left[k (p'-1) \alpha \right] \quad (\text{IV.41})$$

$$\tilde{A}_{2h+1,2k+1} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \sin \left[h (n-1) \alpha \right] \sin \left[k (p'-1) \alpha \right] \quad (\text{IV.42})$$

Nas equações (IV.39) a (IV.42), assim como em (IV.35), o índice p' relaciona-se com n através de (IV.33) para qualquer p fixado.

Levando-se em conta a expressão de p' , equação (IV.33), o argumento da segunda função trigonométrica em cada uma das equações (IV.39) a (IV.42) pode ser escrito da forma :

$$k (p' - 1) \alpha = k (n - 1) \alpha + \alpha^* \quad (\text{IV.43})$$

onde :

$$\alpha^* = k (p - 1) \alpha - \begin{cases} 0 & \text{se } p \leq N + 1 - n \\ k 2 \pi & \text{se } p > N + 1 - n \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

Fazendo-se uso das equações (IV.43) e (IV.44) e da fórmula de adição trigonométrica envolvendo cosseno e seno (soma de dois ângulos), os somatórios internos (somatórios com respeito a n) nas equações (IV.39) a

respectivamente :

$$^P S_{2h, 2k} = \cos \alpha^* \sum_{n=1}^N \cos [h(n-1)\alpha] \cos [k(n-1)\alpha] -$$

$$- \sin \alpha^* \sum_{n=1}^N \cos [h(n-1)\alpha] \sin [k(n-1)\alpha]$$

$$^P S_{2h, 2k+1} = \cos \alpha^* \sum_{n=1}^N \cos [h(n-1)\alpha] \sin [k(n-1)\alpha] +$$

$$+ \sin \alpha^* \sum_{n=1}^N \cos [h(n-1)\alpha] \cos [k(n-1)\alpha]$$

$$^P S_{2h+1, 2k} = \cos \alpha^* \sum_{n=1}^N \sin [h(n-1)\alpha] \cos [k(n-1)\alpha] -$$

$$- \sin \alpha^* \sum_{n=1}^N \sin [h(n-1)\alpha] \sin [k(n-1)\alpha]$$

$$^P S_{2h+1, 2k+1} = \cos \alpha^* \sum_{n=1}^N \sin [h(n-1)\alpha] \sin [k(n-1)\alpha] +$$

$$+ \sin \alpha^* \sum_{n=1}^N \sin [h(n-1)\alpha] \cos [k(n-1)\alpha]$$

Sendo que $\cos \alpha^*$ e $\sin \alpha^*$ podem ser colocados como um fator comum, uma vez que α^* não depende de n .

Note-se que cada um dos somatórios das equações (IV.45) representa um produto escalar entre as colunas da matriz \underline{T}' . A ortogonalidade de \underline{T}' expressa pela equação (IV.13) implica que as quantidades escalares dadas pelas equações (IV.45) desaparecem quando $h \neq k$. Assim, pelas equações (IV.39) a (IV.42), a equação (IV.38) é encontrada.

Quando $h = k$, as equações (IV.45) fornecem :

$${}^p S_{2k,2k} = {}^p S_{2k+1,2k+1} = \frac{N}{2} \cos \alpha^* \quad (\text{IV.46})$$

$${}^p S_{2k,2k+1} = - {}^p S_{2k+1,2k} = \frac{N}{2} \sin \alpha^* \quad (\text{IV.47})$$

Entretanto, em vista da definição de α^* , equação (IV.44), as equações (IV.39) a (IV.42) assumem a forma final:

$$\begin{aligned} A_{\sim 2k,2k} = A_{\sim 2k+1,2k+1} &= \frac{N}{2} \sum_{p=1}^N H_{\sim p} \cos \left[k (p - 1) \alpha \right] \\ & \quad (\text{IV.48}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{\sim 2k,2k+1} = - A_{\sim 2k+1,2k} &= \frac{N}{2} \sum_{p=1}^N H_{\sim p} \sin \left[k (p - 1) \alpha \right] \\ & \quad (\text{IV.49}) \end{aligned}$$

As equações (IV.48) e (IV.49) definem as submatrizes \tilde{A}_{hk}^* de ordem 2.m.D ao longo da diagonal principal de \tilde{A}^* .

Considere-se, agora, a primeira linha de blocos da matriz \tilde{A} . Uma vez que $T'_{n1} = 1$ para $n = 1, \dots, N$, cada um dos blocos é obtido pela equação (IV.35), assim:

$$\tilde{A}_{1s} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N T'_{n1} T'_{p'(n),s} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{ns} \quad (\text{IV.50})$$

Como consequência da ortogonalidade de \tilde{T}' , equação (IV.13), tem-se:

$$\sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{nj} = 0 \quad \text{para } j \neq 1 \quad (\text{IV.51a})$$

$$\sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{n1} = N \quad (\text{IV.51b})$$

É demonstrado então que:

$$\tilde{A}_{11} = N \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \quad \tilde{A}_{1s} = 0 \quad \text{para } s \neq 1 \quad (\text{IV.52})$$

Similarmente, para a primeira coluna de blocos de \tilde{A} , obtém-se:

$$\tilde{A}_{s1} = 0 \quad \text{para } s \neq 1 \quad (\text{IV.53})$$

Quando o número de segmentos N for par, a última linha e coluna de blocos de \tilde{A} está fora de \tilde{A}^* . Para tal, levando-se em conta a equação (IV.33), a equação (IV.35) assume a forma :

$$\tilde{A}_{rN} = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{nr} \tilde{T}'_{p'(n),N} \quad (\text{IV.54})$$

Considerando $\tilde{T}'_{nN} = (-1)^{n-1}$ e tendo em vista a equação (IV.33) :

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{rN} &= \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{nr} (-1)^{p+n+2} \\ &= \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p (-1)^{p-1} \sum_{n=1}^N \tilde{T}'_{nr} \tilde{T}'_{nN} \quad (\text{IV.55}) \end{aligned}$$

Usando novamente a ortogonalidade de \tilde{T}' , conclui-se que :

$$\tilde{A}_{rN} = \tilde{A}_{Ns} = \begin{cases} 0 & \text{para } r = s \neq N \\ N \sum_{p=1}^N (-1)^{p-1} \tilde{H}_p & \text{para } r = s = N \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

É completada assim, a formação da diagonal de blocos que a simetria rotacional de ordem N induz nas

matrizes \tilde{A} e \tilde{B} , ambas de ordem m.D.N. Portanto, se N for ímpar, existe $L = (N-1)/2$ submatrizes de ordem 2.m.D e uma de ordem m.D. Se N for par, existe $L = (N-2)/2$ submatrizes de ordem 2.m.D e duas de ordem m.D.

Dividindo todos os blocos da matriz \tilde{A} pelo fator comum $N/2$, obtém-se a seguinte estrutura :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \tilde{A}_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\tilde{A}_3 & \tilde{A}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_4 & \tilde{A}_5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{A}_5 & \tilde{A}_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{A}_6 \end{bmatrix}$$

(IV.57)

onde :

$$\tilde{A}_1 = 2 \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p$$

$$\tilde{A}_6 = 2 \sum_{p=1}^N (-1)^{p-1} \tilde{H}_p$$

$$\tilde{A}_2 = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \cos [(p-1)\alpha]$$

$$\tilde{A}_3 = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sin [(p-1)\alpha]$$

$$\tilde{A}_4 = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \cos [2(p-1)\alpha] \quad \tilde{A}_5 = \sum_{p=1}^N \tilde{H}_p \sin [2(p-1)\alpha]$$

(IV.58)

Pode-se, agora, realizar a desejada decomposição do sistema original em vários sistemas menores :

$$\tilde{A}_{11} \cdot \tilde{V}^0 = \tilde{B}_{11} \cdot \tilde{Q}^0 \quad (\text{IV.59})$$

$$\tilde{A}_{kk}^* \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{V}_{kC} \\ \tilde{V}_{kS} \end{Bmatrix} = \tilde{B}_{kk}^* \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{Q}_{kC} \\ \tilde{Q}_{kS} \end{Bmatrix} \quad k=1, \dots, L$$

(IV.60)

e se N for par :

$$\tilde{A}_{NN} \cdot \tilde{V}^{N/2} = \tilde{B}_{NN} \cdot \tilde{Q}^{N/2} \quad (\text{IV.61})$$

IV.5 - PROCEDIMENTO PARA ANÁLISE DE PROBLEMAS

Para aplicar o Método dos Elementos de Contorno na análise de um sistema com simetria cíclica de ordem N, deve-se obedecer a seguinte sequência :

-Discretizar somente o contorno Γ_1 contido em Γ , que define o segmento fundamental. As interfaces não precisam ser discretizadas.

-Adotar a Solução Fundamental de Kelvin em coordenadas cartesianas, colocando o eixo z coincidente com o eixo de simetria rotacional.

-Escrever a Equação Integral de Contorno para cada um dos m nós (pontos fonte) da região fundamental, com o ponto campo percorrendo todo o contorno Γ . Procedendo à integração, obtém-se então, a primeira linha de blocos \tilde{H}_{11} e \tilde{G}_{11} ($i=1, \dots, N$).

-Aplicar a transformação do sistema de referência R_{1s} , do plano local do segmento para o plano do segmento fundamental, obtendo assim a primeira linha de blocos ${}^L\tilde{H}_{11}$ e ${}^L\tilde{G}_{11}$.

-Calcular as submatrizes \tilde{A} e \tilde{B} dos problemas (IV.59), (IV.60) e (IV.61) de acordo com as equações (IV.48), (IV.49), (IV.52) e (IV.56).

-Aplicar a transformação (IV.16) em $N.m.D$ componentes físicas de deslocamentos e forças de superfície para obter as correspondentes componentes cíclicas, $N.D$ para cada um dos m nós de Γ_1 .

-As condições de contorno são simetricamente cíclicas quando em pontos correspondentes elas são de mesma natureza, intensidade, direção e sentido, tendo como referencial o sistema cartesiano local de cada segmento. Entretanto, quando em pontos correspondentes elas são de mesma natureza, mas com intensidade e/ou direção e/ou

sentido diferentes, tendo como referência o sistema cartesiano local de cada segmento, elas são denominadas condições de contorno genéricas, conforme mostra a Figura IV.2.

-Portanto, se as condições de contorno forem simetricamente cíclicas, todas as componentes cíclicas, exceto a primeira de ordem $k=0$, desaparecem e somente um problema precisa ser resolvido com m.D incógnitas.

-Cada um dos problemas (IV.59) , (IV.60) e (IV.61) é transformado num do tipo abaixo, rearranjando e coletando todas as incógnitas no vetor \tilde{X}^k .

$$\tilde{E}^k \cdot \tilde{X}^k = \tilde{F}^k \quad (IV.62)$$

$$\text{onde : } \begin{cases} k = 0, \dots, L = (N - 1) / 2 & \text{se } N \text{ for ímpar.} \\ k = 0, \dots, L = (N - 2) / 2, N/2 & \text{se } N \text{ for par.} \end{cases}$$

(IV.63)

-Através da resolução de cada um dos sistemas de equações lineares, determina-se os vetores \tilde{X}^k e, por consequência, todos os vetores \tilde{V} e \tilde{Q} são assim conhecidos.

-Para cada nó j ($j=1, \dots, m$) do contorno Γ_1 e em cada direção i ($i=1,2$) , dispõe-se das componentes cíclicas \tilde{V} e \tilde{Q} , pode-se calcular, então, através de (IV.8) e (IV.9) as quantidades físicas nos N pontos correspondentes ao nó j .

-Uma vez que todas as quantidades físicas nodais são conhecidas no contorno, deslocamentos e tensões nos pontos internos podem ser avaliados usando a equação

integral característica do Método dos Elementos de Contorno.

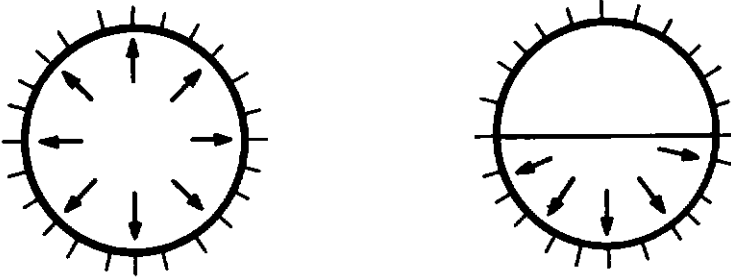


Figura IV.2 - Condições de contorno simetricamente cíclicas e condições de contorno genéricas.

IV.6 - ESTRUTURA DO PROGRAMA PRINCIPAL

O sistema foi desenvolvido em linguagem FORTRAN [32] , em computadores VAX 11/780 e posteriormente no VAX 8810, sediados no Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

O programa denominado CONTORNO5 tem as seguintes capacidades :

- Solução de problemas elásticos lineares com material isotrópico, nos casos de Estado Plano de Tensão

(EPT) e Estado Plano de Deformação (EPD).

-Admite problemas com contorno no infinito e problemas com mais de uma superfície.

-Planos de simetria em relação ao eixos x_1 e/ou x_2 , bem como o caso especial de simetria cíclica, com condições de contorno cíclicas ou não.

-Cálculo das forças de superfície e deslocamentos no contorno; cálculo das tensões no contorno ; cálculo dos deslocamentos e tensões nos pontos internos.

-São medidos os tempos de CPU T_1 , T_2 , T_3 , e T_4 gastos em cada etapa, permitindo assim, uma comparação entre os exemplos e a verificação das vantagens proporcionadas pelo uso da simetria cíclica.

-O tempo T_1 compreende o tempo gasto nas subrotinas INPUT , COORD e VPC . O tempo T_2 é o tempo decorrido após a VPC até a subrotina OUTPUT. O tempo T_3 constitui o tempo gasto na OUTPUT e o tempo T_4 é o tempo total de CPU gasto na análise.

A seguir, são resumidas as atribuições específicas de cada subrotina :

PROGRAMA PRINCIPAL : dimensionamento das matrizes e vetores; especificação dos dispositivos de entrada e saída de dados; gerenciamento das demais subrotinas.

INPUT : leitura e impressão do título do problema a ser analisado e informações gerais sobre o problema.

COORD : leitura e impressão das coordenadas dos pontos do contorno e pontos internos, além das incidências;

geração automática.

VPC : leitura e impressão dos valores prescritos no contorno, sendo que o programa inicialmente considera forças de superfície prescritas de valor zero em todos os nós, nas duas direções.

CICLICA : cálculo das componentes cíclicas de deslocamentos e forças de superfície.

MATRIC : formação das submatrizes \tilde{H} e \tilde{G} para o caso de simetria cíclica, considerando o ponto fonte somente sobre os nós do contorno do segmento fundamental e o ponto campo percorrendo todo o contorno.

ROTACAO : rotação das submatrizes \tilde{H} e \tilde{G} calculadas na MATRIC, do referencial local do segmento para o sistema de referência do segmento fundamental.

FORMA1 : formação e resolução do sistema de equações de ordem zero.

FORMA2 : formação e resolução do sistema de equações de ordem k .

FORMA3 : formação e resolução do sistema de equações de ordem $N/2$.

FISICA : cálculo das componentes físicas de deslocamentos no contorno e forças de superfície no sistema local de cada segmento. Posteriormente, são transformadas para o sistema global de referência.

FENC : cálculo das expressões para as tensões nos pontos do contorno.

FDF : cálculo das derivadas das funções de interpolação.

FUNC : efetua a integração sobre cada elemento requerida para a montagem do sistema de equações e cálculo de deslocamentos e tensões em pontos internos. Integrais não-singulares são avaliadas usando-se integração numérica de Gauss, enquanto que as singulares sofrem uma transformação cúbica de coordenadas antes de sua integração por Gauss.

ITGAUSS : fornece as coordenadas locais dos pontos de Gauss e os respectivos pesos.

MATRX : montagem da matriz \tilde{E} do sistema de equações e do vetor \tilde{F} dos termos independentes. A matriz \tilde{E} é gerada diretamente sem montar as matrizes \tilde{H} e \tilde{G} . A simetria é levada em consideração pela reflexão do nó singular, ao invés do elemento.

SLNPD : resolve o sistema de equações $\tilde{E} \cdot \tilde{X} = \tilde{F}$ pelo Processo de Eliminação de Gauss e retorna a solução no vetor \tilde{F} .

REORD : reordena os valores de deslocamentos e forças calculadas pela SLNPD.

OUTPUT : imprime os resultados dos deslocamentos no contorno e forças de superfície; calcula e imprime as tensões no contorno usando a FENC; calcula e imprime as tensões e deslocamentos em pontos internos usando a FUNC.

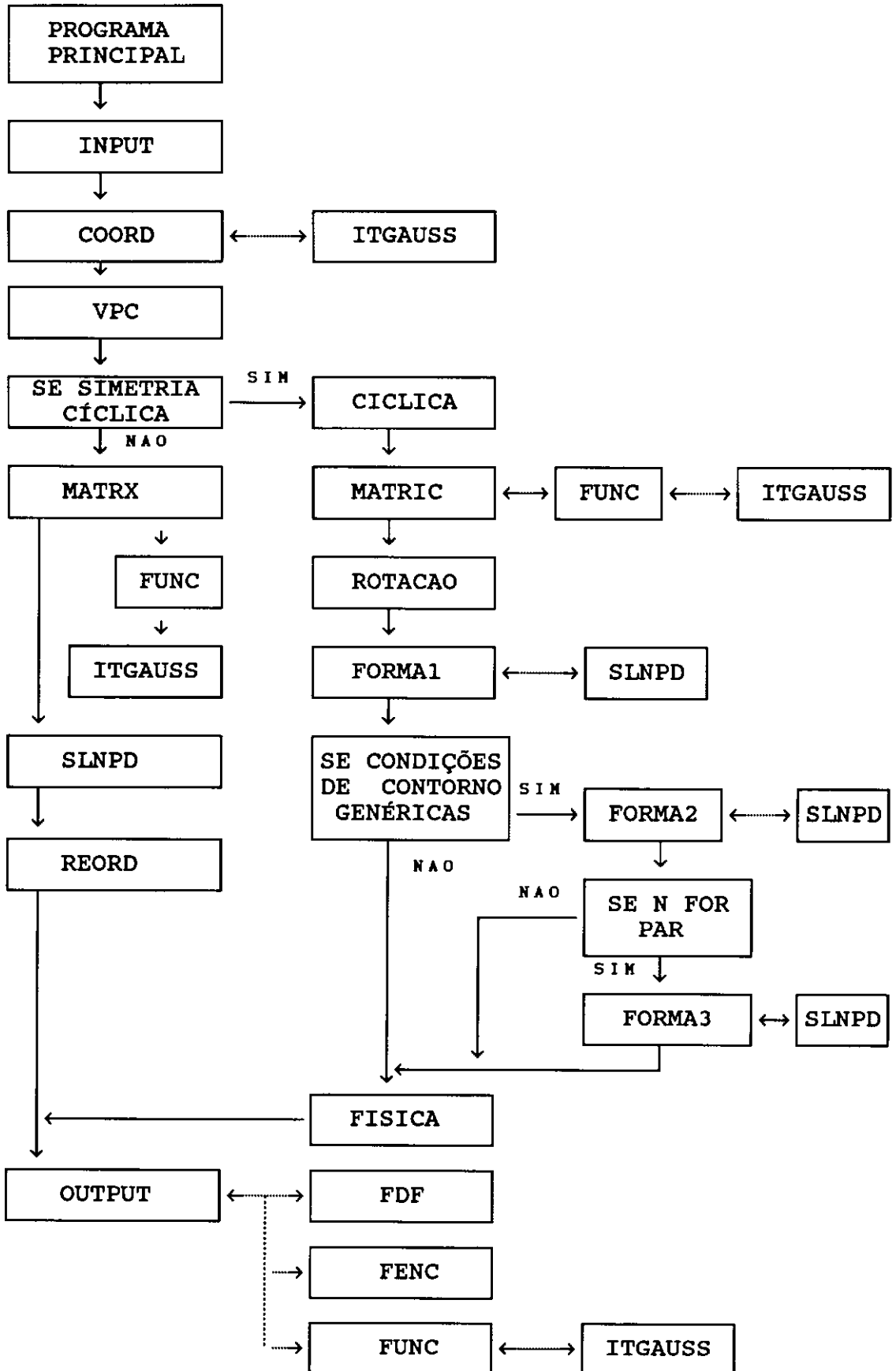


Figura IV.2 - Fluxograma do programa principal.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES NUMÉRICAS

V.1 - EXEMPLO 1

A primeira estrutura analisada é uma chapa tracionada com um furo central, conforme a Figura V.1, considerando o Estado Plano de Tensão e contorno em meio finito. Este é discretizado em elementos quadráticos. Foram escolhidos 14 pontos de Gauss para a integração singular.

Primeiramente, a análise é realizada assumindo o problema sem simetria alguma, com um contorno constituído por 24 elementos, 52 pontos no contorno e 6 pontos internos. Utilizou-se o dispositivo da geração automática das coordenadas e incidências de todo o contorno, partindo-se da discretização do primeiro quadrante. É necessário prescrever-se os deslocamentos nos pontos indicados na Figura V.1, a fim de evitar-se a singularidade na matriz do sistema de equações.

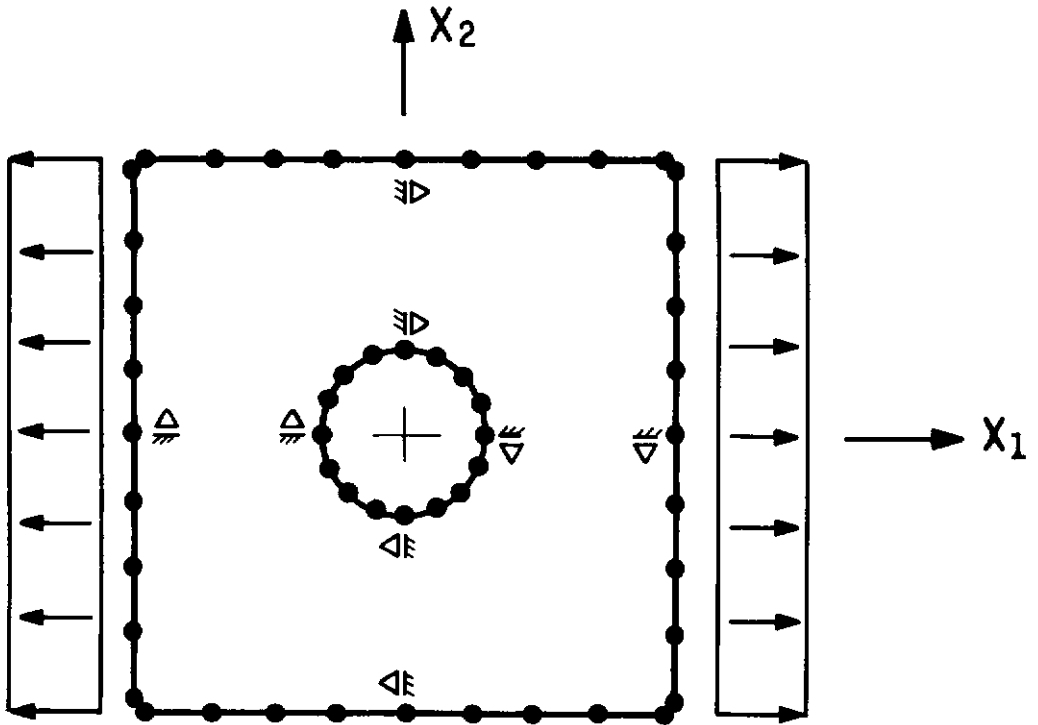


Figura V.1 - Chapa tracionada com furo central discretizada para análise na forma completa.

A segunda forma de análise da chapa tracionada é realizada com o auxílio do processo de simetria cíclica, conforme a Figura V.2, compreendendo 4 segmentos, no total de 24 elementos, 52 nós e 6 pontos internos. Deslocamentos são prescritos nos mesmos pontos indicados na Figura V.1, para evitar-se a singularidade no sistema, da mesma forma para o problema completo. As condições de contorno são genéricas, pois em pontos correspondentes assumem valores diferentes em cada segmento e são fornecidas no sistema cartesiano local de cada segmento. Os resultados podem ser comparados com as outras análises, pois são dados em relação ao sistema cartesiano global de referência, adotado

como sendo o sistema local do primeiro segmento.

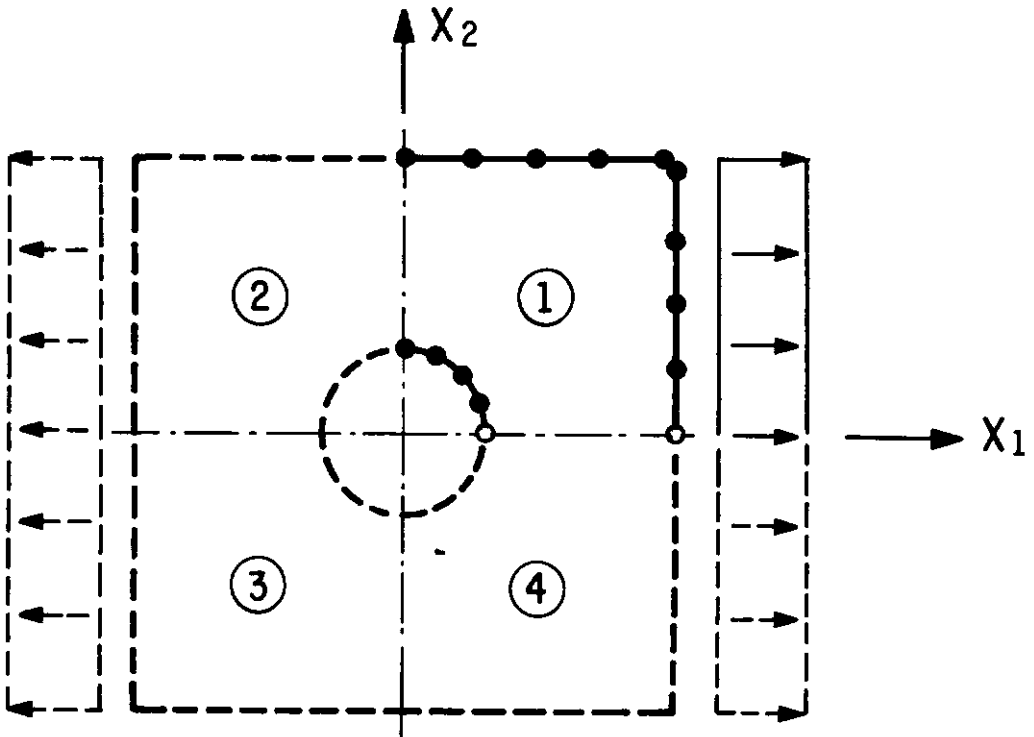


Figura V.2 - Chapa tracionada com furo central discretizada para análise com simetria cíclica.

Note-se que os pontos vazios representados na Figura V.2 pertencem ao segmento 4. No segmento 1 eles são usados apenas para dar a incidência dos elementos.

Com a finalidade de proporcionar recursos para comparações, a estrutura é analisada na forma representada na Figura V.3, com 10 elementos e 25 nós, onde somente 1/4 da estrutura é discretizada, porém, colocando-se elementos nas interfaces e prescrevendo deslocamentos nestes pontos nas direções indicadas.

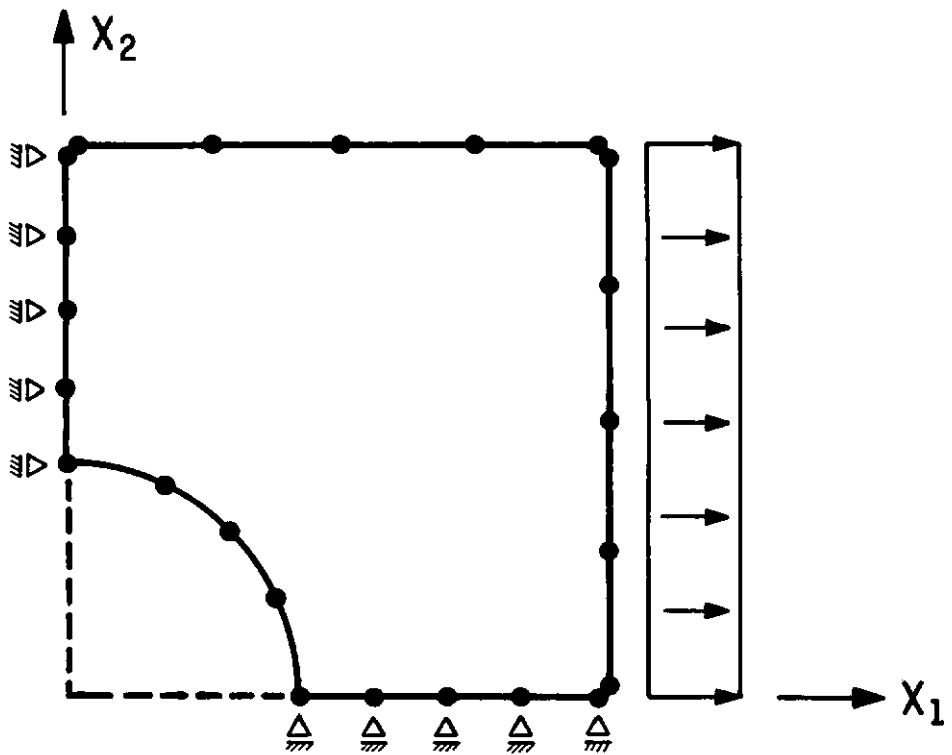


Figura V.3 - Chapa tracionada com furo central discretizada em somente 1 / 4 .

O programa desenvolvido CONTORNO5 possibilita a análise de problemas com simetria em relação a um ou a dois planos paralelos aos eixos de coordenadas.

Para o caso de simetria simples, escolhida em relação a um plano paralelo ao eixo x_2 , a discretização envolve 12 elementos com 28 nós e 6 pontos internos. É preciso prescrever deslocamentos nos pontos representados na Figura V.4 pelos mesmos motivos expostos anteriormente.

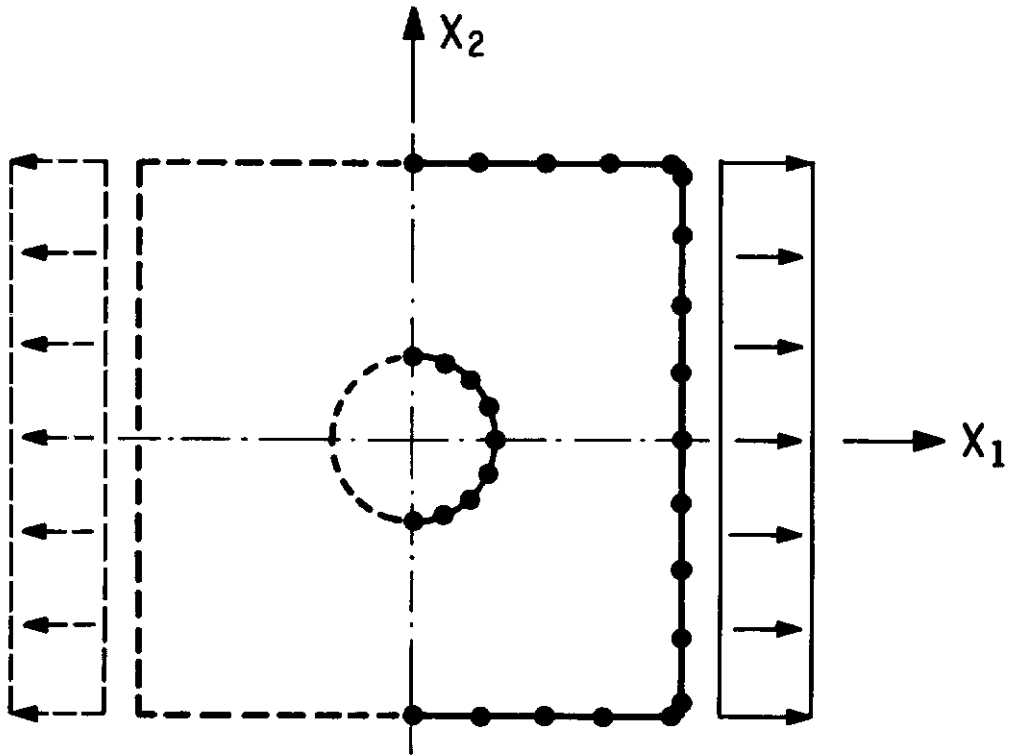


Figura V.4 - Chapa tracionada com furo central discretizada para o caso de simetria simples em relação ao eixo x_2 .

No caso de simetria dupla, ou seja, em relação à planos paralelos aos eixos x_1 e x_2 , Figura V.5, são necessários 6 elementos e 15 nós, sem nenhuma prescrição de deslocamentos nos pontos nodais das interfaces, que é automaticamente feita pelo programa nas direções normais aos planos de simetria.

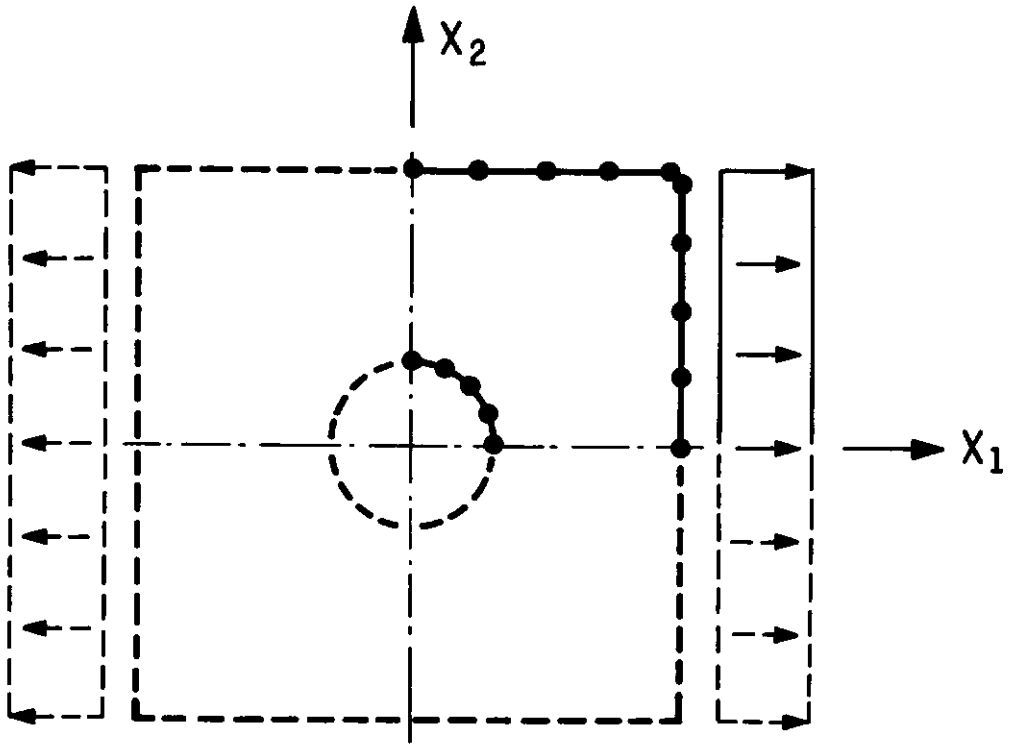


Figura V.5 - Chapa tracionada com furo central discretizada para o caso de simetria dupla.

Desta maneira, para os diferentes modos de análise expostos anteriormente, são coletados os tempos de CPU (VAX 8810) gastos em cada etapa, conforme a definição dada na seção IV.6. Estes tempos foram agrupados na tabela a seguir com o intuito de facilitar as comparações :

| CASO | TEMPOS (s) | | | |
|-----------|--------------|-------|-------|-------|
| | T_1 | T_2 | T_3 | T_4 |
| COMPLETO | 0,21 | 6,58 | 2,69 | 9,48 |
| SIMPLES | 0,14 | 2,83 | 2,58 | 5,55 |
| DUPLA | 0,13 | 1,43 | 2,63 | 4,19 |
| QUADRANTE | 0,15 | 1,33 | 2,05 | 3,53 |
| CÍCLICA | 0,18 | 1,98 | 2,67 | 4,83 |

Tabela V.1 - Tempos de CPU gastos na análise da chapa tracioanada com furo central (Exemplo V.1).

Tempo T_1 - leitura e impressão dos dados de entrada ;
cálculo do comprimento dos elementos; geração automática.

Tempo T_2 - formação e resolução do sistema de equações.

Tempo T_3 - cálculo das tensões no contorno; cálculo das tensões e deslocamentos em pontos internos; impressão dos resultados.

Tempo T_4 - envolve todas as etapas do programa. Corresponde à soma dos tempos T_1 , T_2 e T_3 .

Considerando os tempos decorridos na análise completa como sendo 100 % , pode-se montar uma tabela em porcentagem, facilitando a visualização das diferenças:

| CASO | TEMPOS (%) | | | |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |
| SIMPLES | 66,67 | 43,01 | 95,91 | 58,54 |
| DUPLA | 61,90 | 21,73 | 97,77 | 44,20 |
| QUADRANTE | 71,43 | 20,21 | 76,21 | 37,24 |
| CÍCLICA | 85,71 | 30,09 | 99,26 | 50,95 |

Tabela V.2 - Tempos de CPU em porcentagem do Exemplo V.1.

Analisando-se os resultados através da tabela dos tempos em porcentagem, nota-se que:

A simetria dupla decorre num menor tempo T_1 , pois envolve menor quantidade de pontos nodais no contorno e não necessita de geração automática.

O caso do quadrante proporciona menores tempos T_2 e T_3 e, conseqüentemente, T_4 . No entanto, mostra-se menos eficiente pois os resultados perdem precisão em relação aos outros casos.

O caso de simetria cíclica corresponde a somente 50,95 % do tempo total gasto no caso completo, o que não constitui uma economia substancial de tempo, mas deve-se ressaltar que os resultados obtidos conferem com o caso completo, apesar das condições de contorno serem genéricas. Entretanto, é considerável a economia proporcionada pelo uso da simetria cíclica no tempo gasto pelo usuário na discretização do problema e na elaboração do arquivo de entrada de dados.

V.2 - EXEMPLO 2

A segunda estrutura analisada corresponde a uma cavidade circular sujeita à pressão interna e situada num meio infinito, considerando o Estado Plano de Deformação. Escolheram-se 14 pontos para a avaliação das integrais singulares e o contorno foi discretizado em elementos quadráticos. Em todos os tipos de análise, 5 pontos internos são analisados.

O primeiro modo de análise é feito considerando a estrutura na sua forma completa, Figura V.6, com 72 elementos e 144 pontos nodais. Novamente, a geração automática é usada.

Não é necessário prescrever deslocamentos no contorno. As condições de contorno, neste caso forças de superfície, são fornecidas em todos os 144 nós do contorno no sistema cartesiano global de referência.

Numa segunda forma de análise, a simetria simples é considerada, agora em relação a um plano paralelo ao eixo x_1 , envolvendo 36 elementos e 73 nós conforme a Figura V.7.

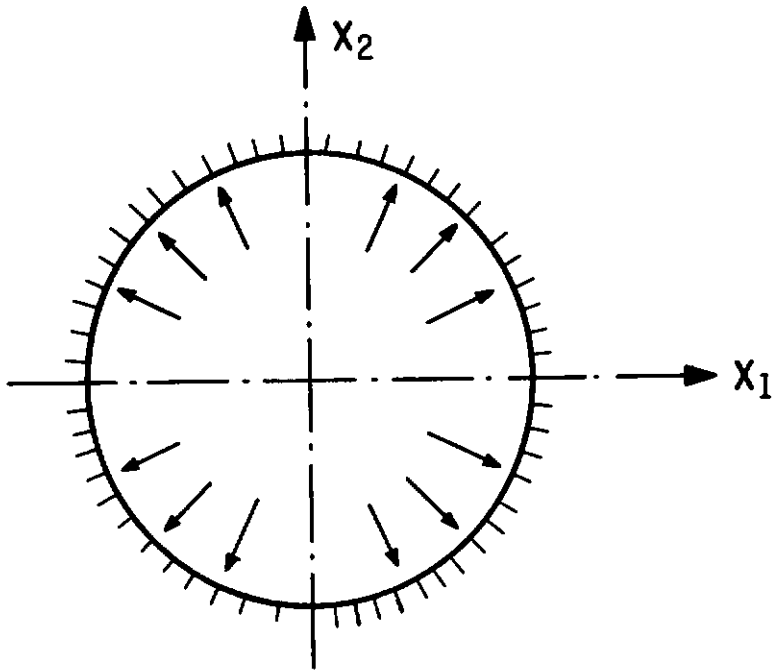


Figura V.6 - Cavidade circular em meio infinito sujeita à pressão interna (144 nós).

A simetria dupla também pode ser implementada neste caso, sendo necessário somente 18 elementos com 37 nós, conforme representado na Figura V.8 .

Finalmente, para o caso de simetria cíclica, considera-se 1 elemento em cada um dos 72 segmentos , conforme a Figura V.9, envolvendo assim, em todo o contorno, 144 pontos nodais, da mesma forma que o problema sem simetria. Entretanto, é necessário somente fornecer as condições de contorno em pontos nodais situados no primeiro segmento, pois elas são simetricamente cíclicas, considerando o sistema cartesiano local de cada segmento.

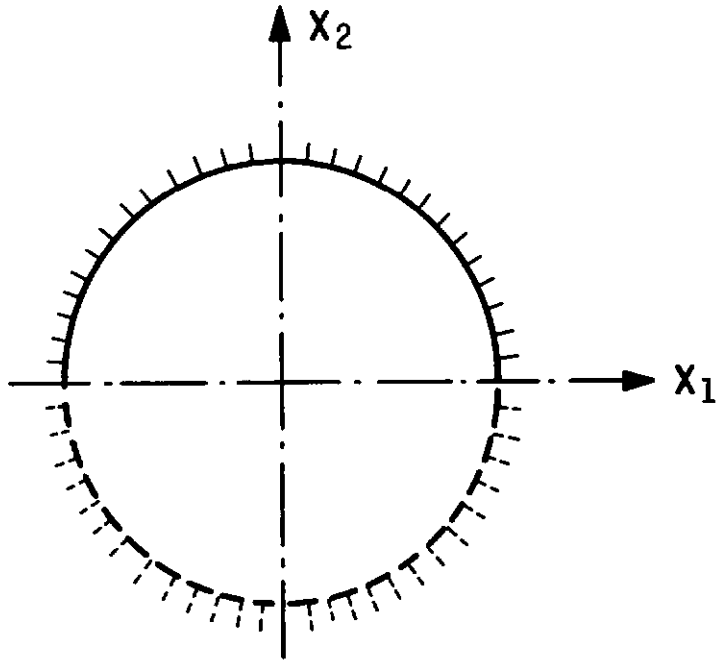


Figura V.7 - Cavidade circular em meio infinito para análise com simetria simples.

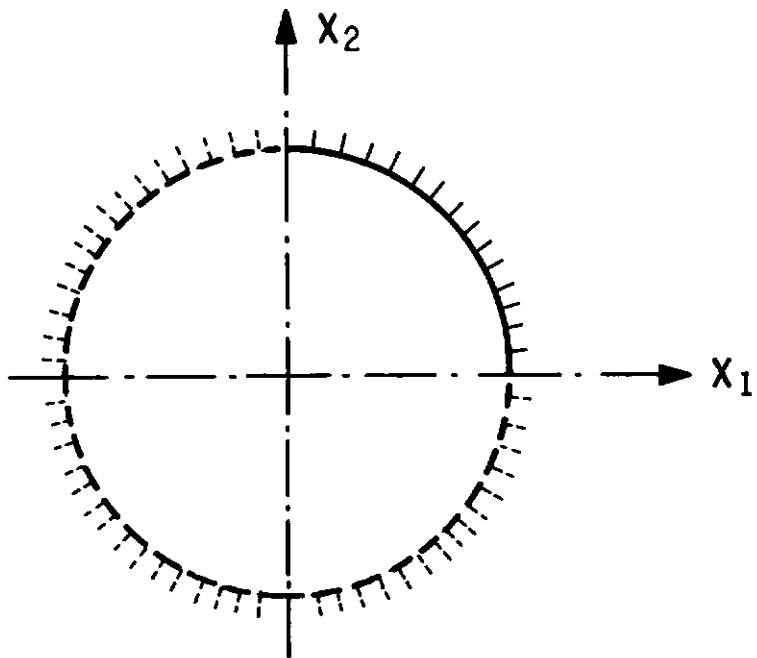


Figura V.8 - Cavidade circular em meio infinito para análise com simetria dupla.

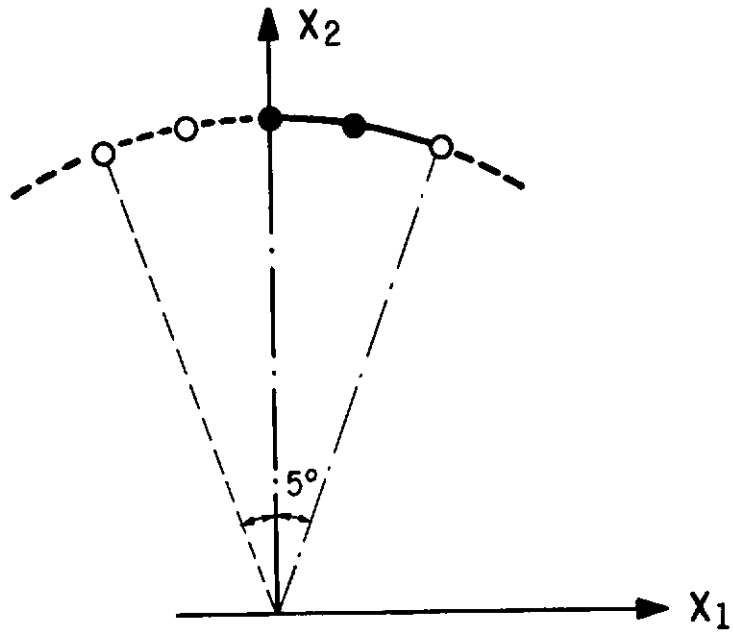


Figura V.9 - Discretização do segmento fundamental da cavidade circular em meio infinito para análise com simetria cíclica.

Obedecendo o mesmo procedimento do exemplo anterior, é formada a seguinte tabela:

| | TEMPOS (s) | | | |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| CASO | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 0,43 | 83,31 | 3,96 | 87,70 |
| SIMPLES | 0,32 | 20,32 | 3,67 | 24,31 |
| DUPLA | 0,17 | 8,37 | 3,49 | 12,03 |
| CÍCLICA | 0,25 | 0,45 | 3,81 | 4,51 |

Tabela V.3 - Tempos de CPU gastos na análise da cavidade circular em meio infinito (144 nós).

| | TEMPOS (%) | | | |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| CASO | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |
| SIMPLES | 74,42 | 24,39 | 92,68 | 27,72 |
| DUPLA | 39,53 | 10,05 | 88,13 | 13,72 |
| CÍCLICA | 58,14 | 0,54 | 96,21 | 5,14 |

Tabela V.4 - Tempos de CPU em porcentagem (Exemplo V.2).

Neste exemplo, a simetria dupla obtém um tempo T_1 menor pelos mesmos motivos do exemplo anterior e um tempo T_3 menor pois os resultados são listados somente em 1/4 da estrutura.

A simetria cíclica obtém um tempo T_2 bem menor que os demais casos, pois somente um sistema de equações de ordem 4 é formado e resolvido, devido às condições de contorno serem simetricamente cíclicas. Assim, a simetria cíclica representa 5,14 % do tempo total gasto no problema completo, evidenciando claramente sua vantagem. Os resultados conferem com os obtidos no problema completo.

Além disso, devem ser avaliadas as vantagens na confecção do arquivo de entrada de dados, pois somente são fornecidas as coordenadas, incidências e condições de contorno de um elemento, facilitando alterações destes valores e produzindo arquivos menores.

O uso da simetria cíclica revela-se particularmente muito vantajoso nesta estrutura, e com a

finalidade de ressaltá-lo, discretiza-se a cavidade em 180 elementos com 360 nós.

A análise é feita somente considerando o problema na sua forma completa e com simetria cíclica. Compõe-se então, a seguinte tabela :

| | TEMPOS (s) | | | |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| CASO | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 1,02 | 1265,33 | 7,95 | 1274,30 |
| CÍCLICA | 0,49 | 0,96 | 7,14 | 8,59 |

Tabela V.5 - Tempos de CPU gastos na análise da cavidade circular em meio infinito (360 nós).

| | TEMPOS (%) | | | |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| CASO | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |
| CÍCLICA | 48,04 | 0,08 | 89,81 | 0,67 |

Tabela V.6 - Tempos de CPU em porcentagem (Exemplo V.2).

Portanto, o Exemplo V.2 com 360 nós no contorno com simetria cíclica representa 0,67 % do tempo gasto numa análise completa.

A principal vantagem encontra-se no tempo T₂, que representa apenas 0,08 % do tempo gasto numa análise completa.

Nota-se que o tempo T_3 é praticamente o mesmo, pois o número de nós nos quais os resultados são fornecidos é o mesmo.

Outra vantagem neste caso, como em todos com simetria cíclica, é a facilidade na montagem do arquivo de entrada de dados.

V.3 - EXEMPLO 3

A terceira estrutura analisada, Figura V.10, mantém certa semelhança com uma engrenagem, formada por 12 dentes. As forças de superfície atuantes somente numa face de um dente são devidas ao esforço supostamente transmitido pelo contato com outra engrenagem.

Os deslocamentos são prescritos apenas em pontos dos dentes internos, simulando o contato com um eixo, conforme o Detalhe V.1.

Considera-se o problema em meio finito, estudado para o caso de Estado Plano de Tensão com 14 pontos de Gauss para integrais singulares.

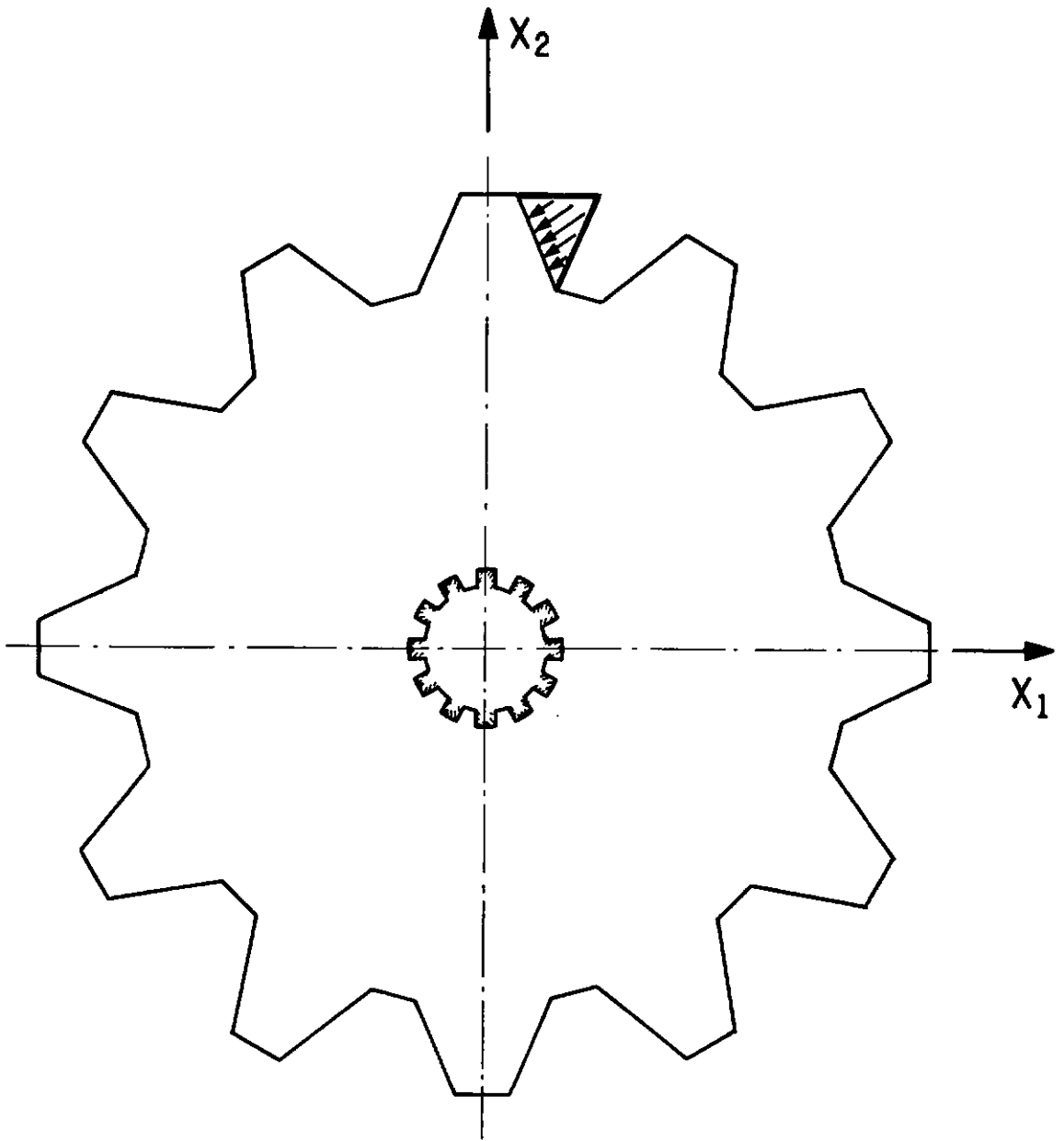
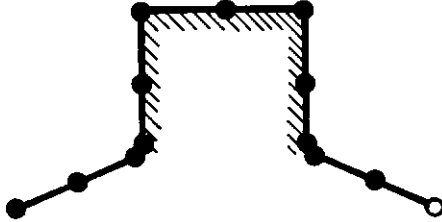


Figura V.10 - Superfície dentilhada sujeita à forças distribuídas aplicadas no contorno de um dente.



Detalhe V.1 - Prescrição de deslocamentos.

Numa primeira análise, o problema é concebido na sua forma completa, sem simetria alguma, com 144 elementos, 360 pontos nodais e 5 pontos internos. Utiliza-se a geração automática para coordenadas e incidências partindo-se da discretização de somente um segmento, conforme a Figura V.11 .

A seguir, o conceito de simetria cíclica é aplicado, obedecendo a mesma discretização da Figura V.11 onde o contorno é dado por 12 segmentos com 12 elementos e 30 pontos nodais em cada e os mesmos 5 pontos internos. Nota-se que as condições de contorno são genéricas, pois as forças de superfície têm valores diferentes em pontos correspondentes, evidenciando assim a impossibilidade da aplicação de outros tipos de simetria.

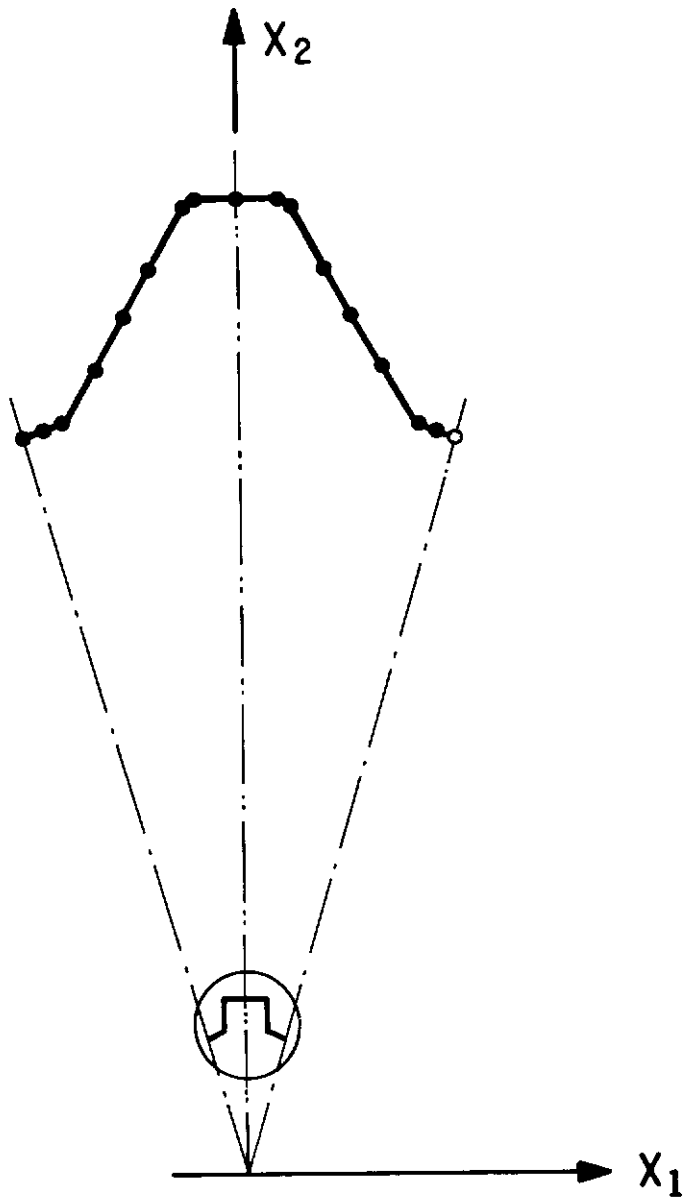


Figura V.11 - Discretização de um segmento (dente) da estrutura para a análise completa com geração automática e simetria cíclica.

Obtidos os resultados das duas análises, ambos listados tendo como referência o sistema cartesiano global, pode-se montar a seguinte tabela :

| | TEMPOS (s) | | | |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| CASO | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 0,78 | 1242,70 | 6,81 | 1250,29 |
| CÍCLICA | 0,72 | 79,98 | 6,61 | 87,31 |

Tabela V.7 - Tempos de CPU gastos na análise da engrenagem.

| | TEMPOS (%) | | | |
|----------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| CASO | T ₁ | T ₂ | T ₃ | T ₄ |
| COMPLETO | 100,00 | 100,00 | 100,00 | 100,00 |
| CÍCLICA | 92,31 | 6,44 | 97,06 | 6,98 |

Tabela V.8 - Tempos de CPU em porcentagem (Exemplo V.3).

Nesta análise, a simetria cíclica apresenta praticamente os mesmos tempos para entrada de dados e saída de resultados que para o problema completo, pois os resultados obtidos através do uso da simetria cíclica são listados em todos os pontos, da mesma forma que no problema completo. Entretanto, representa apenas 6,44 % do tempo gasto na montagem e solução dos sistemas.

Englobando todas as etapas, a simetria cíclica exige apenas 6,98 % do tempo total gasto numa análise completa.

Deve-se ressaltar que, neste exemplo, os casos de simetria simples e simetria dupla não se enquadram, pois as condições de contorno não são simétricas.

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Neste capítulo são feitas algumas observações a respeito do uso da simetria cíclica. Também são propostos alguns temas para desenvolvimentos futuros.

Portanto, tendo como referência os exemplos abordados no Capítulo V, pode-se constatar claramente que o uso da simetria cíclica proporciona uma economia substancial no tempo de CPU, chegando a representar, como no Exemplo V.2, menos de 1% do tempo total gasto numa análise completa. Além disso, é verificado também, que esta vantagem torna-se mais significativa na medida em que se aumenta o número total de nós do contorno e que se escolha de uma maneira coerente o número de segmentos no qual o corpo é dividido.

Esta vantagem se explica, em parte, pela economia no número de operações envolvidas no Método de Eliminação de Gauss, que é aproximadamente proporcional à n^3 , sendo n a dimensão do sistema, necessárias para a solução deste, considerando que a simetria cíclica decompõe o sistema inicial em vários sistemas menores.

Note-se, ainda, que a montagem do arquivo de

entrada de dados do programa para uma análise com simetria cíclica é relativamente simples, uma vez que somente um segmento necessita ser discretizado, dispensando também, a discretização das interfaces entre segmentos. Desta forma, os arquivos de dados de entrada são menores, facilitando a realização de alterações na geometria e nas condições de contorno.

Não é recomendável uma associação da tradicional subestruturação com o presente desenvolvimento, pois implicaria na discretização das interfaces, perdendo assim, uma de suas principais características.

Adotando-se um sistema de referência local de um segmento qualquer como sendo o sistema de referência global, é possível então, colocar-se apoios inclinados em relação à este sistema global, em pontos situados nos demais segmentos da estrutura, pois eles são referenciados aos respectivos sistemas locais, que por definição, estão rotacionados de um ângulo a partir do sistema global.

Um caso especial decorrente desta teoria é verificado quando o número de segmentos no qual o corpo foi dividido tende ao infinito. Constitui-se, assim, uma análise de sistemas axissimétricos com condições de contorno genéricas que podem ser expandidas em Série de Fourier na direção circunferencial.

Dependendo do tipo de estrutura analisada, a simetria cíclica torna-se particularmente muito eficiente, como é o caso no qual as condições de contorno também exibem simetria cíclica. Desta forma, todas as componentes

cíclicas, exceto a primeira desaparecem e, portanto, somente um problema de dimensão relativa ao segmento fundamental precisa ser resolvido.

Os resultados numéricos obtidos numa análise completa e numa análise por simetria cíclica mantêm um ótimo nível de precisão entre si, em qualquer ponto, confirmando a validade da decomposição do sistema de equações proposta neste estudo.

Problemas de cavidades em meios infinitos podem ser perfeitamente resolvidos através do uso da simetria cíclica, como demonstra o Exemplo V.2.

A formulação desenvolvida pode ser aplicada sem alterações significativas para problemas envolvendo forças de volume, deformações impostas e efeitos de temperatura. Claramente, quando estas ações externas não podem ser reduzidas ao contorno, elas requerem uma discretização sobre o domínio (ou parte dele) do segmento fundamental.

Além disso, os conceitos relativos à simetria cíclica podem ser estendidos para problemas inelásticos, dinâmicos, tridimensionais, de potencial e para regime estacionário de condução de calor.

Entre outros pontos a serem implementados em estudos futuros, recomenda-se um melhoramento na entrada de dados do programa, tornando-o mais acessível ao usuário; a utilização de um pré e pós-processador gráfico, permitindo assim uma melhor visualização do problema e interpretação dos resultados.

Portanto, a simetria cíclica é comprovadamente associável ao Método dos Elementos de Contorno, contribuindo desta maneira para o seu desenvolvimento e tornando-o aplicável de uma forma mais prática e vantajosa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] CRUSE, T.A. e RIZZO, F.J., A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamics - I. J. Math. Analysis Applic., 22, 244, 1968.
- [2] LACHAT, J.C., A further development of the boundary integral technique for elastostatics, Ph. D. Thesis, Univ. of Southampton, 1975.
- [3] BREBBIA, C.A., The boundary element method for engineers, Pentech Press, London, Halstead Press, N.Y., 2nd. ed., 1980.
- [4] TELLES, J.C.F., On the application of the boundary element method to inelastic problems, Ph. D. Thesis, Univ. of Southampton, 1981.
- [5] RIZZO, F.J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, Quart. Appl. Math., 25, 83, 1967.
- [6] RICCARDELLA, P.C., An implementation of the boundary integral techniques for plane problems in elasticity and elastoplasticity, Ph. D. Thesis,

Univ. of Carnegie Mellon, Pittsburg, 1973.

- [7] CHAUDONET, A., Cyclic symmetry and sliding between structures by the boundary element method, Proc. 3rd. Int. Sem. of Boundary Element Methods, Brebbia C. A. Ed., Irvine, Califórnia, 1981.

- [8] MAIER, G., NOVATI, G. e PARREIRA, P., Boundary element analysis of rotationally symmetric systems under general boundary conditions, Civil Eng. Systems, 1, 42-49, 1983.

- [9] HALBRITTER, A.L., TELLES, J.C.F. e MANSUR, W.J., Aplicação dos Elementos de Contorno à problemas de campo, Anais da Conf. sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas de Centrais Nucleares, UFRGS, 39, 707-724, 1978.

- [10] TIMOSHENKO, S.P. e GOODIER, J.N., Teoria da Elasticidade, 3rd. Ed., Guanabara Dois, RJ, 1980.

- [11] DYM, C.L. e SHAMES, I.H., Solid Mechanics : A variational Approach, Mc Graw-Hill, N.Y., 1973.

- [12] SOKOLNIKOFF, I. S., Mathematical Theory of Elasticity, Mc Graw-Hill, N.Y., 1956.

- [13] SOMIGLIANA, C., Sopra l'equilibrio di un corpo

elastico isotropo, Il Nuovo Cimento, 17-19, 1886.

- [14] LOVE, A.E.H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, N.Y., 1944.
- [15] BREBBIA, C.A., The boundary element method for engineers, Pentech Press, London, 1978.
- [16] BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. e WROBEL, L.C., Boundary element techniques, theory and applications in engineering, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [17] RICCARDELLA, P.C., An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity, Dept. Mech. Eng., SM 73-10, Carnegie Mellon Univ., Pittsburg, 1973.
- [18] HARTMANN, F., Computing the C-matrix in non-smooth boundary points, New Developments in Boundary Element Methods, C.A. Brebbia Ed., 367-379, Butterworths, London, 1980. CML Southampton, 1983.
- [19] TELLES, J.C.F. e BREBBIA, C.A., On the application of the boundary element method to plasticity, Appl. Math. Modelling, 3, 466-470, 1979.

- [20] CROUCH, S.L. e STARFIELD, A.M., Boundary element methods in solid mechanics, George Allen & Unwin, London, 1983.

- [21] JASWON, M.A. e SYMM, G.T., Integral equation methods in potential theory and elastostatics, Academic Press, London, 1977.

- [22] TELLES, J.C.F., The boundary element method applied to inelastic problems, Lecture Notes in Engineering, 1, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

- [23] TELLES, J.C.F., A self - adaptative co - ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals, Int. J. for Num. Meth. in Eng., 24, 959-973, 1987.

- [24] MARQUES, E. e MANSUR, W.J., Coupling of Boundary and Finite Element Methods Application to Potential Problems - Anais do VIII Congresso Latino-Americano e Ibérico sobre Métodos Computacionais para Engenharia, Volume B, Rio de Janeiro, 1987.

- [25] ZIENKIEWICZ, O.C. e SCOTT, F.C., On the principle of repeatability and its application in analysis of turbine and pump impellers, Int. J. for Num. Meth. in Eng., 4, 445-452, 1972.

- [26] EVENSEN, D.A., Vibration analysis of multi-symmetric structures, AIAA Journal, 14, 4, 446-453, 1976.
- [27] ZIENKIEWICZ, O.C., The finite element method, 3rd. Ed., Mc Graw-Hill, 1977.
- [28] MAC NEAL, R.H., HARDER, R.L. e MASON, J.B., NASTRAN cyclic symmetric capability, NASTRAN Users Experiences 3rd. Coloquium, 395-421, Langley Research Centre, Hampton, Virginia, 1973.
- [29] MAIER, G., NOVATI, G. e PARREIRA, P., On boundary element elastic and inelastic analysis in the presence of cyclic symmetry, Proc. 6th. Int. Conf. on Boundary Elements, Southampton to New York, Brebbia, C.A. Ed., Springer, Berlin, , 1984.
- [30] FOSSA, G., MAIER, G., MASARATI, P. e NOVATI, G., Boundary element analysis in the presence of dihedral symmetry under general boundary conditions, Proc. of 7th. Int. Conf. on Boundary Elements, Como, 1985.
- [31] FORTESCUE, C., Method of symmetrical coordinates applied to the solution of polyphase networks, AIEE trans., 37, part II, 1027-1140, 1918.

- [32] HEHL, M. E., Linguagem de Programação Estruturada / FORTRAN 77, São Paulo, McGraw Hill, 1986.

APÊNDICE A

MANUAL DE ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA

O programa computacional desenvolvido chama-se CONTORNOS , o qual permite a análise de problemas planos de elasticidade linear, com opções de simetria simples, dupla, Figura A.1, ou cíclica, Figura A.2.

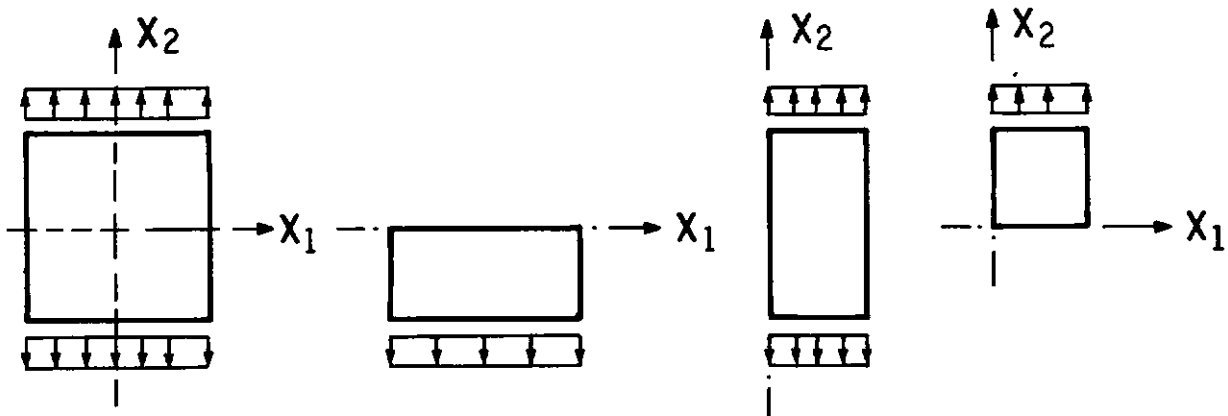


Figura A.1 - Problema completo, simetria em relação ao eixo x_1 , simetria em relação ao eixo x_2 e simetria dupla, respectivamente.

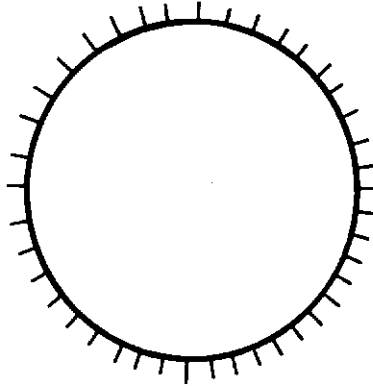


Figura A.2 - Problema com simetria cíclica.

Para esclarecer a estrutura dos dados, são conceituadas, primeiramente, as variáveis e índices que devem ser fornecidos :

TITLE - título do problema a ser analisado.

NEL - número total de elementos de contorno.

NOC - número de pontos nodais do contorno.

NPI - número de pontos internos.

IPL - índice do tipo de problema:

se E.P.T. \Rightarrow IPL=1

se E.P.D. \Rightarrow IPL=2

IDSYM - índice do tipo de simetria:

sem simetria \Rightarrow IDSYM=0

plano de simetria normal ao eixo y \Rightarrow IDSYM=1

plano de simetria normal ao eixo x \Rightarrow IDSYM=2

simetria dupla \Rightarrow IDSYM=3

simetria cíclica \Rightarrow IDSYM=4

INFB - índice indicativo do tipo de contorno:

se contorno no infinito \Rightarrow INFB=1

se contorno finito \Rightarrow INFB=0

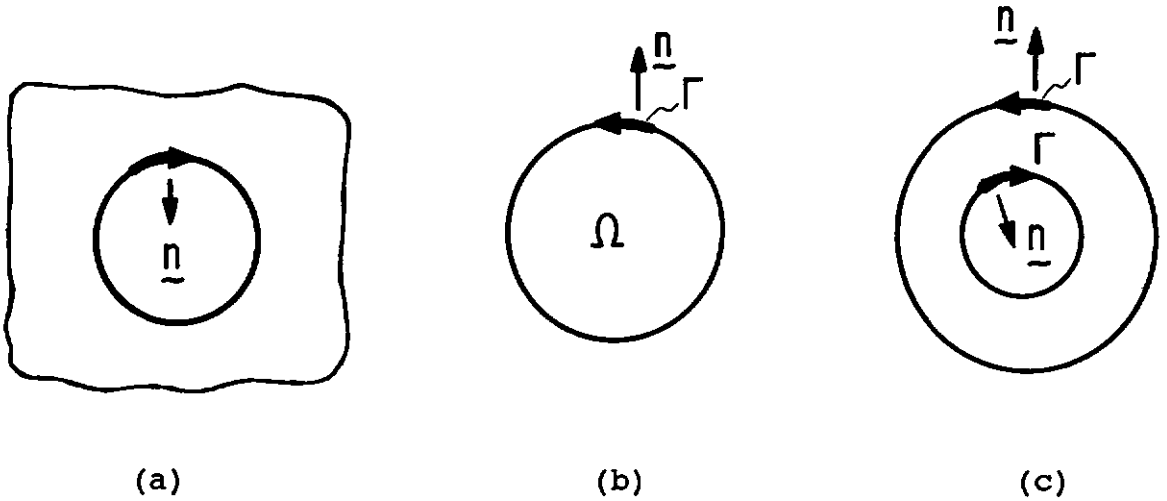


Figura A.3 - Sentido de discretização: (a) contorno no infinito; (b) e (c) contorno finito.

EL - Módulo de Elasticidade Longitudinal.

PO - Coeficiente de Poisson.

NGAUSS - número de pontos de integração de Gauss para integrais singulares. Pode ser arbitrado como sendo 2,4,6,8,12,14,16,20,28.

IGER - índice de geração automática das coordenadas e incidências em problemas que apresentam simetria geométrica, mas que serão analisados na forma de problema completo.

sem geração \Rightarrow IGER=0

com geração \Rightarrow IGER=1

NNV - número de pontos nodais por segmento (se IGER=1).

NVS - número de segmentos (se IGER=1).

NSE - número de elementos por segmento (se IGER=1).

NSG - número de segmentos (se IDSYM=4).

NNS - número de pontos nodais por segmento (se IDSYM=4).

NES - número de elementos por segmento (se IDSYM=4).

ICC - índice do tipo das condições de contorno:

se c.c. simetricamente cíclicas \Rightarrow ICC=0

(ocorre quando em todos os pontos correspondentes as condições de contorno são de mesma natureza, intensidade, direção e sentido, tendo como referencial o sistema local de cada segmento).

se c.c. genéricas \Rightarrow ICC=1

(ocorre quando em todos os pontos correspondentes as condições de contorno são de mesma natureza, mas com intensidade e/ou sentido diferentes, tendo como referencial o sistema local de cada segmento).

K - índice do ponto nodal.

X(K) - coordenada x_1 do ponto.

Y(K) - coordenada x_2 do ponto.

IDUP(K) - índice de nó duplo:

se não é nó duplo \Rightarrow IDUP=0

se for nó duplo \Rightarrow IDUP igual ao índice do nó com as mesmas coordenadas.

ISYM(K) - índice indicativo se o ponto pertence à um plano de simetria:

não pertence a nenhum \Rightarrow ISYM=0

se pertence ao plano normal ao eixo y \Rightarrow ISYM=1

se pertence ao plano normal ao eixo x \Rightarrow ISYM=2

se pertence à interseção de

planos de simetria \Rightarrow ISYM=3

L - índice do elemento.

INC(L,1) - incidência 1 do elemento.

INC(L,2) - incidência 2 do elemento.

INC(L,3) - incidência 3 do elemento.

IEF(L) - índice de incidência (deve ser fornecido nos casos de geração automática ou simetria cíclica. Noutros casos, deixa-se em branco).

se INC(L,1) pertence ao último segmento \Rightarrow IEF=1

se INC(L,3) pertence ao último segmento \Rightarrow IEF=3

NFIP - número de pontos nodais com deslocamentos prescritos.

NDFIP - número de pontos nodais com forças de superfície prescritas diferentes de zero.

OBS : o programa inicialmente considera como condições de contorno prescritas forças de superfície nulas em todos os nós em todas as direções.

P(2*K-1) , P(2*K) - valores prescritos no contorno.

KODE(2*K-1) , KODE(2*K) - tipo da condição de contorno:

se deslocamento prescrito \Rightarrow KODE=1

se força de superfície prescrita \Rightarrow KODE=0

OBSERVAÇÕES :

- No caso de existirem dois pontos nodais com as mesmas coordenadas (nó duplo), devem ser dadas as coordenadas X e

Y do primeiro nó, e deixa-se IDUP em branco. No segundo nó, deixa-se as coordenadas em branco e faz-se IDUP igual ao número do primeiro nó.

- Pontos nodais localizados em planos de simetria não necessitam de prescrição de deslocamento na direção normal ao plano. A condição de deslocamento nulo nesta direção é automaticamente feita pelo programa.

Na execução do programa é requerido o nome dos arquivos de entrada de dados e saída de resultados.

O arquivo de entrada de dados é composto por várias linhas editadas conforme o formato específico, onde são fornecidas todas as informações à respeito do problema a ser analisado.

No arquivo de resultados são listados todos os dados do problema, como coordenadas dos nós, condições de contorno prescritas, etc. Como resultados propriamente ditos são fornecidos os deslocamentos, forças de superfície e tensões no contorno, além de deslocamentos e tensões em pontos internos. Convém salientar que todos os resultados, seja qual for o tipo do problema analisado, são dados no sistema global de referência.

A estrutura dos dados de entrada obedece o seguinte arranjo, linha por linha :

CARTÃO 1 : TITULO

⇒ FORMAT (20A4)

CARTÃO 2 : NEL, NOC, NPI, IPL, IDSYM, INFB, EL, PO, NGAUSS

⇒ FORMAT (3I5, 3I1, F15.2, F5.3, I3)

CARTÃO 3 : IGER, NNV, NVS, NSE (Ver Observação 1)

⇒ FORMAT (4I5)

CARTÃO 4 : NSG, NNS, NES, ICC (Ver Observação 2)

⇒ FORMAT (4I5)

NOC CARTÕES TIPO 5 : (Ver Observação 3)

K, X(K), Y(K), IDUP(K), ISYM(K)

⇒ FORMAT (I5, 2F10.4, 2I5)

NPI CARTÕES TIPO 6 : (Ver Observação 4)

K , X(K), Y(K), ISYM(K)

⇒ FORMAT (I5, 2F10.4, 5X, I5)

NEL CARTÕES TIPO 7 : L, INC(L,1), INC(L,2), INC(L,3), IEF(L)

⇒ FORMAT (5I5)

CARTÃO 8 : NFIP, NDFIP

⇒ FORMAT (2I5)

NFIP CARTÕES TIPO 9 : (Ver Observação 5)

K, P(2*K-1), P(2*K), KODE(2*K-1), KODE(2*K)

⇒ FORMAT (I5, 2F10.4, 2I5)

NDFIP CARTÕES TIPO 10 : (Ver Observação 6)

K, P(2*K-1), P(2*K)

⇒ FORMAT (I5, 2F10.4)

OBSERVAÇÕES :

- 1 - O CARTÃO 3 somente deve ser colocado quando se analisar problemas sem simetria.
- 2 - O CARTÃO 4 somente deve ser inserido quando se analisar problemas com simetria cíclica.
- 3 - O CARTÃO TIPO 5 refere-se aos pontos do contorno.
- 4 - O CARTÃO TIPO 6 é inserido somente quando se tiver pontos internos.
- 5 - O CARTÃO TIPO 9 contém as condições de contorno dos nós com deslocamentos prescritos.
- 6 - O CARTÃO TIPO 10 contém as condições de contorno dos nós com trações prescritas diferentes de zero.

APÊNDICE B

INTEGRAÇÃO SINGULAR

Na aplicação do Método dos Elementos de Contorno, não considerando as forças de volume, encontra-se a equação (II.28), a partir da qual é formado o sistema de equações (III.21). No cálculo das submatrizes da diagonal principal de \tilde{G} ocorrem integrais singulares, as quais são calculadas usando-se o processo apresentado por TELLES [23], que consiste numa transformação auto-adaptativa de coordenadas.

Considerando a integral :

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\eta) d\eta \quad (B.1)$$

na qual $f(\eta)$ é singular no ponto $\bar{\eta}$. Usando uma relação de terceiro grau da forma :

$$\eta(\gamma) = a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d \quad (B.2)$$

com os seguintes requerimentos necessários :

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad \begin{array}{l} \eta(1) = 1 \\ \eta(-1) = -1 \end{array} \quad (\text{B.3})$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{B.4})$$

A condição (B.4) implica que o Jacobiano da transformação deve ter valor mínimo em $\bar{\eta}$. A solução deste problema é dado por :

$$\begin{aligned} a &= 1 / Q \\ b &= - 3 \bar{\gamma} / Q \\ c &= 3 \bar{\gamma}^2 / Q \\ d &= - b \\ Q &= 1 + 3 \bar{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde $\bar{\gamma}$ é simplesmente o valor de γ que satisfaz $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$, que pode ser calculado por :

$$\bar{\gamma} = \left(\bar{\eta} \eta^* + |\eta^*| \right)^{1/3} + \left(\bar{\eta} \eta^* - |\eta^*| \right)^{1/3} + \bar{\eta} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{onde :} \quad \eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (\text{B.7})$$

Portanto, neste caso, a expressão (B.1) assume a forma :

$$I = \int_{-1}^{+1} f \left\{ \frac{[(\gamma - \bar{\gamma})^3 + \bar{\gamma} (\bar{\gamma}^2 + 3)]}{(1 + 3 \bar{\gamma}^2)} \right\} \frac{3 (\gamma - \bar{\gamma})^2}{(1 + 3 \bar{\gamma}^2)} d\gamma \quad (B.8)$$

a qual pode ser integrada numericamente por Gauss.

A transformação não-linear de coordenadas apresentada, produz uma maneira simples e eficiente de calcular os coeficientes da diagonal principal de \tilde{G} .

Uma questão interessante da transformação é que ela automaticamente produz uma concentração dos pontos de integração de Gauss em torno da singularidade.