

MEC3DE - UM PROGRAMA PARA ANÁLISE ELÁSTICA TRIDIMENSIONAL COM O  
MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.

*José Teófilo de Rêgo Silva*


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE  
JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO  
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



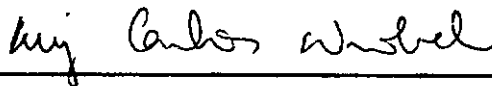
---

Prof. José Claudio Faria Telles, Ph.D.  
( Presidente )



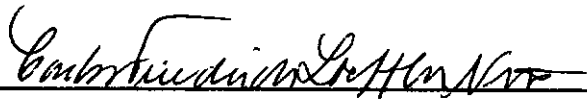
---

Prof. Webe João Mansur, Ph. D.



---

Prof. Luiz Carlos Wrobel, Ph. D.



---

Prof. Carlos F. Loeffler, D. Sc.

SILVA, JOSÉ JEFERSON DO RÊGO

MEC3DE - Um programa para análise elástica tridimensional com o método dos elementos de contorno [Rio de Janeiro] 1989  
viii, 123 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1989)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

I. Elementos de contorno                      2. Elasticidade tridimensional

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

A MEUS PAIS ALCIDES E LEIDA

A MINHAS IRMÃES MERA, DADA E NÊ

A MINHA ESPOSA PAULA

A MEU SOBRINHO TIAGO CESAR

## AGRADECIMENTOS

Ao professor José Claudio Faria Telles pela orientação irrepreensível, pela dedicação, pelo incentivo e, principalmente, pela amizade.

Aos professores Webe João Mansur e Luis Carlos Wrobel pelo estímulo e apoio.

Aos amigos José Antônio Santiago, José Antônio Carrer e Ramiro Willmersdorf pelos estimulantes debates informais sobre o assunto, esclarecendo e gerando novas dúvidas.

A todos os colegas do Programa de Engenharia Civil da COPPE, que, de uma forma ou de outra, contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores da UFPE que me incentivaram a cursar o mestrado, principalmente ao professor Bernardo Horowitz pelo interesse e sugestões.

A M. M. Engenharia Estrutural Ltda. pelo apoio e incentivo ao curso de mestrado.

A Paula, minha noiva, pela paciência e compreensão, e pelos desenhos.

A minha família pelo carinho e tudo o mais que me foi necessário.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

MEC3DE - UM PROGRAMA PARA ANÁLISE ELÁSTICA TRIDIMENSIONAL  
COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

*José Jefferson de Rêgo Silva*

Março de 1989

Orientador: José Claudio de Faria Telles.

Programa: Engenharia Civil.

Este trabalho tem como objetivo a análise elástica linear de problemas tridimensionais aplicando o método dos elementos de contorno, com a utilização da solução fundamental de Kelvin.

O programa desenvolvido possibilita o emprego de elementos triangulares e quadrilaterais; constantes, lineares e quadráticos; contínuos, descontínuos e de transição, sendo possível qualquer combinação entre eles. Obtidos os valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno calculam-se os deslocamentos e tensões no domínio, e as tensões no contorno.

Finalmente, os resultados de alguns exemplos são comparados com as soluções analíticas e as soluções por outra técnica numérica.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

MEC3DE - A COMPUTER PROGRAM FOR THREE-DIMENSIONAL ELASTIC ANALYSIS WITH THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

*José Jefferson de Rêgo Silva*

March, 1989

Thesis Supervisor: José Claudio de Faria Telles.

Department: Civil Engineering.

This work deals with linear elastic analysis of three-dimensional problems using the boundary element method coupled with the fundamental solution due to Kelvin.

The computer program developed allows for triangular and quadrilateral elements, with constant, linear and quadratic interpolation. In addition, the elements can be continuous, discontinuous or of transition type in any combination. Once the boundary values of tractions and displacements are calculated, internal displacements and stresses are computed including boundary stresses.

Finally, some examples are presented and results are compared with alternative numerical or analytical solutions.

## ÍNDICE

<b>CAPÍTULO I</b>	<b>: INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO II</b>	<b>: TEORIA DA ELASTICIDADE</b>	
II.1	- Introdução	4
II.2	- Equação de equilíbrio	6
II.3	- Relação deformação-deslocamento	9
II.4	- Lei de Hooke	10
II.5	- Equações governantes	11
<b>CAPÍTULO III</b>	<b>: FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</b>	
III.1	- Introdução	13
III.2	- Identidade de Somigliana	14
III.3	- Solução fundamental	21
III.4	- Equação integral do contorno	24
III.5	- Regiões infinitas	29
III.6	- Tensões nos pontos internos	32
III.7	- Tensões no contorno	35
<b>CAPÍTULO IV</b>	<b>: IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA</b>	
IV.1	- Introdução	37
IV.2	- Discretização do contorno	38
IV.3	- Sistema de equações	48
IV.4	- Elementos de discretização do contorno	56
	IV.4.1 - Funções de forma	61
	IV.4.2 - Funções de interpolação	67
IV.5	- Integração numérica	78
	IV.5.1 - Integração não singular.	79

IV.5.2 - Integração singular	83
IV.5.3 - Elemento triangular	94
IV.6 - Deslocamentos no domínio	97
IV.7 - Tensões no domínio	99
IV.8 - Tensões no contorno	102
<b>CAPÍTULO V : APLICAÇÕES</b>	
V.1 - Introdução	108
V.2 - Prisma tracionado.	108
V.3 - Cilindro de parede espessa.	113
V.4 - Bloco comprimido.	115
<b>CAPÍTULO VI : CONCLUSÕES</b>	119
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	121



## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

A grande maioria dos problemas de engenharia são descritos por equações diferenciais cujas soluções não são fechadas, salvo em alguns poucos casos particulares. Para solucionar tais problemas, recorre-se, cada vez mais, a técnicas numéricas, principalmente, com o desenvolvimento de computadores.

O método dos elementos de contorno (MEC) é uma destas técnicas numéricas na qual as equações diferenciais que descrevem o problema, são escritas na forma de equações integrais onde o domínio de integração é o contorno da região estudada.

O método das equações integrais, como é também conhecido o MEC, tem se mostrado bastante eficiente em muitos problemas de engenharia, muito embora poucos programas tenham sido desenvolvidos caso se faça uma comparação, por exemplo, com o método dos elementos finitos.

A implementação numérica do MEC é uma das mais modernas. O primeiro trabalho para análise elástica linear tridimensional, com elemento isoparamétrico quadrático, foi de autoria de LCHAT [1] em 1975, utilizando a solução fundamental de Kelvin. Em 1978, BREBBIA [2] publicou uma introdução ao método dos elementos de contorno aplicado a problemas de potencial e elasticidade linear estática. Mais tarde, em 1984, foi publicado por BREBBIA, TELLES e WROBEL [3] um livro mais completo com problemas não lineares e dependentes do tempo.

Apesar de recente, o MEC tem tido um desenvolvimento bastante rápido como pode ser verificado nos anais das conferências específicas, por exemplo, o BEM IX [4]. Isto se justifica pelos bons resultados que o método vem apresentando, principalmente, em casos como regiões de concentração de tensões e regiões infinitas em que o método dos elementos finitos tem demonstrado menor eficiência.

O MEC apresenta ainda, vantagens sobre os métodos que discretizam o domínio como por exemplo, a menor quantidade de dados de entrada necessária à definição de uma determinada região, uma vez que apenas o contorno é discretizado (a dimensão do problema fica reduzida em uma unidade). Portanto, o sistema de equações montado é menor e, conseqüentemente, o tempo computacional tende a se reduzir, embora dependa ainda de outros fatores como o número de pontos internos.

Pode-se também apontar como vantagem do método dos elementos de contorno, o fato de que o cálculo dos deslocamentos e tensões no interior da região analisada pode ser feito apenas nos pontos em que isto se fizer necessário. E ainda, as tensões nos pontos internos possuem a mesma precisão dos deslocamentos e forças de superfície no contorno, uma vez que a derivação é feita nos tensores da solução fundamental. No método dos elementos finitos (modelo de deslocamentos) sabe-se que as tensões calculadas possuem precisão inferior aos deslocamentos pelo fato de serem obtidas por derivação destes.

O método dos elementos de contorno vem demonstrando ser uma técnica numérica viável. Entretanto, por ser relativamente recente, a sua aplicação, em muitos problemas de engenharia, ainda encontra-se a nível de pesquisa.

O trabalho aqui apresentado, consiste na implementação numérica do MEC para análise elástica linear estática tridimensional, considerando meios elásticos finitos e infinitos (solução fundamental de Kelvin), utilizando a formulação direta e o conceito de região definido por KELLOGG [5], ou seja, região onde o contorno é representado por superfícies regulares podendo apresentar cantos ou angulosidades e não necessariamente suave em todo ele.

O programa desenvolvido, MEC3DE, tem como objetivo iniciar um sistema computacional mais complexo capaz de solucionar os mais variados problemas de engenharia, nos quais o método dos elementos de contorno possa ser aplicado, atendendo aos mais diversos tipos de usuário. O MEC3DE foi elaborado numa forma bem modulada visando futuras implementações sem que sejam necessárias mudanças profundas na sua estrutura.

Esta tese está dividida em 5 capítulos:

No capítulo II, é apresentado um resumo da teoria da elasticidade linear.

No capítulo III, encontra-se a formulação direta do método dos elementos de contorno necessária ao desenvolvimento deste trabalho.

No capítulo IV, está descrito o procedimento numérico do método, com as equações na forma em que foram implementadas.

No capítulo V, são apresentados alguns exemplos cujas soluções obtidas com o MEC3DE, são comparadas com as soluções exatas ou obtidas com o método dos elementos finitos.

Finalmente, no capítulo VI, está a conclusão do trabalho e algumas sugestões para futura ampliação do programa.

## CAPÍTULO II

### TEORIA DA ELASTICIDADE

#### II.1 - INTRODUÇÃO

Considere-se um corpo qualquer submetido a um determinado tipo de carregamento. Se as forças externas forem tais que, em todos os pontos do corpo, introduzam tensões que não excedam um certo valor, as deformações produzidas desaparecem quando estas forças deixam de atuar. Esta propriedade de recuperar a forma inicial após o carregamento, está presente na grande maioria dos materiais empregados na engenharia e é denominada de *elasticidade*. Os corpos constituídos de tais materiais são chamados de *corpos elásticos*. Diz-se, ainda, que um corpo é *linearmente elástico* quando a relação entre as tensões aplicadas e os deslocamentos sofridos for linear.

Neste trabalho, além da hipótese da *linearidade física*, admite-se que os deslocamentos sofridos pelo corpo são muito pequenos em relação às suas dimensões ( hipótese dos pequenos deslocamentos ), de tal forma que, a sua configuração deformada se confunde com a configuração inicial. Portanto, somente pequenas deformações, tais como usualmente ocorrem na engenharia estrutural, são consideradas ( hipótese das pequenas deformações ). Estas duas hipóteses, consideradas conjuntamente, estabelecem a hipótese da *linearidade geométrica*.

A matéria do corpo elástico é considerada homogênea e distribuída uniformemente no seu volume, de tal forma que o menor elemento retirado do corpo possua as suas mesmas propriedades físicas específicas. Admite-se também, que o corpo é isotrópico, ou seja, as suas propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções. Diversos materiais estruturais não satisfazem tais hipóteses, entretanto, a experiência mostra que soluções da teoria da elasticidade baseadas nas hipóteses da homogeneidade e isotropia, podem ser aplicadas com grande precisão.

Considera-se ainda que o material é hiperelástico (material elástico de Green [6]): existe uma função potencial elástica cuja derivada, em relação às componentes de deformação, determina a componente de tensão correspondente

As equações de equilíbrio e as de compatibilidade entre deslocamentos e deformações são desenvolvidas com base na hipótese da linearidade geométrica.

As hipóteses de homogeneidade, isotropia e comportamento linear físico e geométrico garantem a obediência à Lei de Hooke [7] ou seja, linearidade das relações entre tensões e deformações específicas em todo o corpo estrutural.

Este capítulo apresenta algumas equações básicas da teoria da elasticidade necessárias ao desenvolvimento da formulação do método dos elementos de contorno para problemas tridimensionais no regime elástico linear.

As equações aqui apresentadas estão em notação indicial e para um estudo mais detalhado da teoria da elasticidade linear, convém consultar as referências [6], [7] e [8].

## II.2 - EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

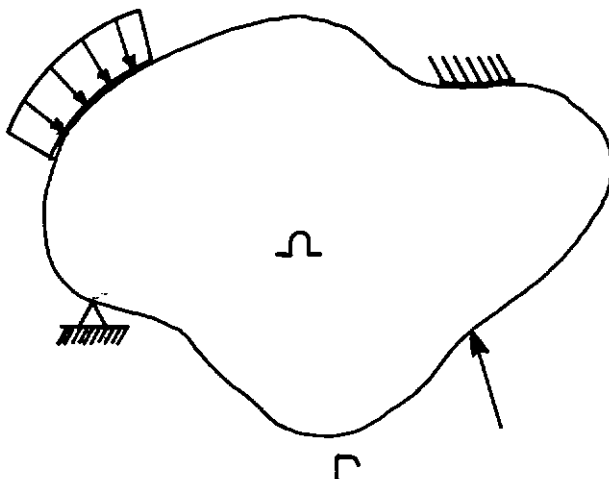


FIGURA II.1 - Corpo  $\Omega + \Gamma$  sob ação de forças genéricas

O estado tensional no interior do domínio  $\Omega$  em relação ao sistema de coordenadas cartesianas  $x_1, x_2, x_3$ , é dado pelo tensor de tensões  $\sigma_{ij}$ :

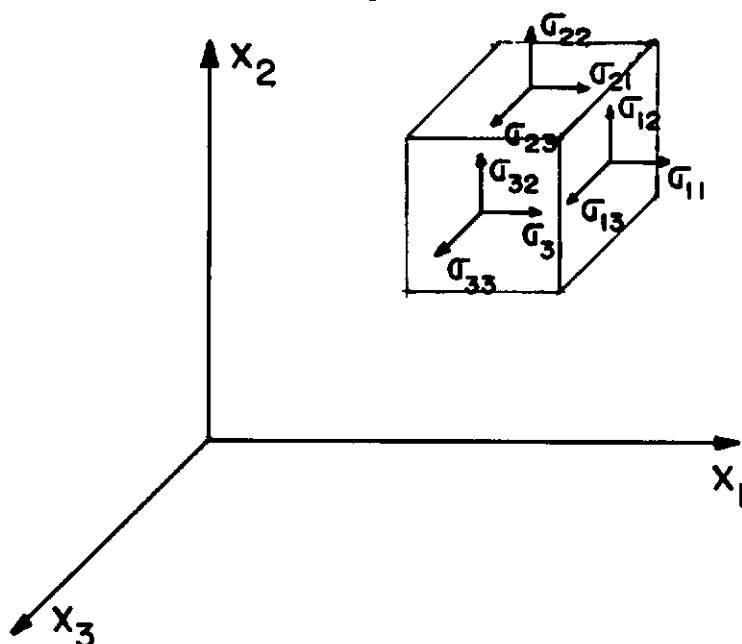


FIGURA II.2 - Tensões internas

Considerando as componentes do vetor tensão que atua em cada faceta do paralelepípedo infinitesimal, como indicado na figura II.2, o equilíbrio de forças e momentos resulta na seguinte equação:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad ( II.1 )$$

que é conhecida como a *equação de Navier*.  $\sigma_{ij}$  representa as componentes do tensor de tensão e  $b_j$  as componentes das forças de volume.

As equações de equilíbrio de momentos conduzem a:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad ( II.2 )$$

o que indica a simetria do tensor de tensões.

As tensões num plano  $n$  qualquer são dadas pela *fórmula de Cauchy*:

$$p_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad ( II.3 )$$

onde  $p_i$  é a componente do vetor tensão que atua no plano  $n$  e  $n_j$  corresponde aos cossenos diretores da normal a este plano.

A equação de Navier deve ser atendida em todos os pontos do interior do domínio  $\Omega$ . As tensões variam em  $\Omega$  e, quando chegam ao contorno, devem ser tais que estejam em equilíbrio com as forças de superfície.

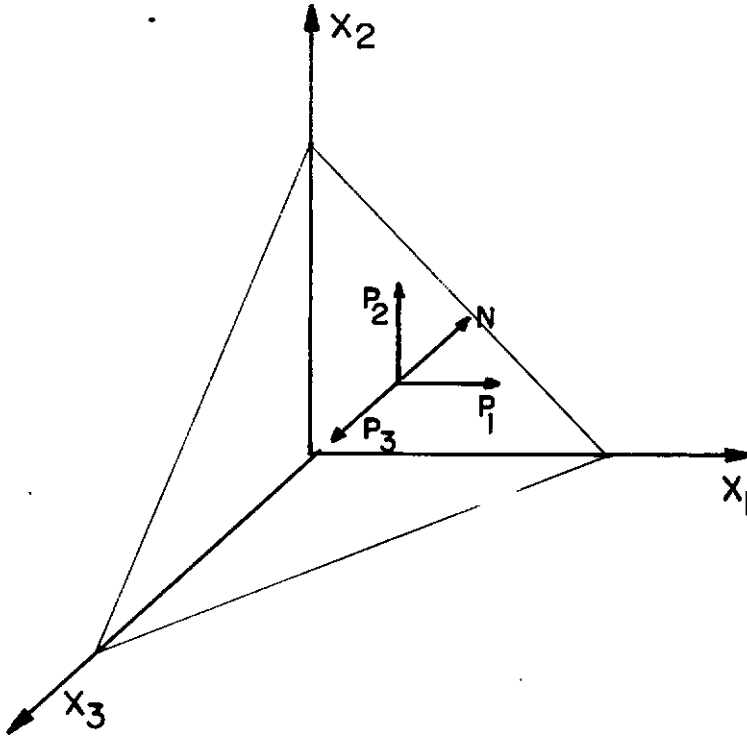


FIGURA II.3 - Forças de superfície.

Admitindo que as 9 componentes do tensor de tensão são conhecidas em um determinado ponto de  $\Omega$ , a aplicação da equação (II.3), num plano coincidente com a superfície, resulta na condição de equilíbrio no contorno do corpo:

$$p_i = \sigma_{ij} \cdot n_j \quad ( II.4 )$$

onde  $p_j$  corresponde às componentes do vetor força de superfície e a normal  $n_j$  aponta para fora do corpo.

Notar que as equações de equilíbrio são lineares, o que é consequência da hipótese da linearidade geométrica. A mudança da configuração da estrutura não influencia na obtenção das equações de equilíbrio.



### II.3 - RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO

O estado de deformação em um ponto no interior de um corpo, em relação a um referencial  $x_1, x_2, x_3$ , é definido pelo tensor de deformações específicas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (II.5)$$

Dado um campo de deslocamento  $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ , funções contínuas e deriváveis, as deformações são determinadas por derivação. Tal como indicado na equação (II.5).

Dadas as deformações,  $\varepsilon_{ij}$ , os deslocamentos são obtidos por integração.

Para assegurar um campo de deslocamentos contínuo e unívoco, as deformações não são funções arbitrárias, mas devem guardar entre si relações de compatibilidade:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ki,lj} - \varepsilon_{lj,ki} = 0 \quad (II.6)$$

As equações de compatibilidade são também conhecidas como *equações de Saint Venant*, e apesar dos quatro índices livres resultarem 81 equações algébricas, apenas 6 delas são independentes podendo ser encontradas nas referências [7] e [8].

#### II.4 - LEI DE HOOKE

Para um material homogêneo, isotrópico e linearmente elástico, a relação tensão-deformação é dada pela *lei de Hooke*:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} + \sigma_{ij}^0 \quad ( II.7 )$$

Admitindo o estado inicial neutro, a lei de Hooke fica:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad ( II.8 )$$

onde  $C_{ijkl}$  é o tensor de 4ª ordem de constantes elásticas.

As considerações de simetria do tensor de tensão, de hiperelasticidade e de isotropia, reduzem o número de constantes elásticas do tensor  $C_{ijkl}$  a duas,  $\lambda$  e  $G$ , conhecidas como *constantes de Lamé*:

$$C_{ijkl} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \delta_{kl} + G \cdot ( \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} + \delta_{il} \cdot \delta_{jk} ) \quad ( II.9 )$$

com

$$\lambda = \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \quad ( II.10 )$$

sendo  $G$  o *módulo de elasticidade transversal*,  $\nu$  o *coeficiente de Poisson* e  $\delta_{ij}$  o *delta de Kronecker* definido a seguir:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad ( \text{ II.11 } )$$

Substituindo as equações (II.9) e (II.10) em (II.8) chega-se a lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot G \cdot \varepsilon_{ij} \quad ( \text{ II.12 } )$$

Notar que o *módulo de elasticidade longitudinal* E pode ser escrito em termos de G e  $\nu$ :

$$E = 2 \cdot G \cdot ( 1 + \nu ) \quad ( \text{ II.13 } )$$

## II.5 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS GOVERNANTES

Substituindo a equação (II.5) em (II.12) obtém-se a expressão das tensões em termos das derivadas dos deslocamentos, que substituída na equação (II.1) leva à:

$$G \cdot u_{i,jj} + \frac{G}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot u_{j,ji} + b_i = 0 \quad ( \text{ II.14 } )$$

As equações de equilíbrio expressas em termos dos deslocamentos são conhecidas como *equações de Lamé* ou também como *equações de Navier*.

A expressão das forças de superfície, em termos dos deslocamentos, é obtida substituindo (II.5) em (II.12) que, em seguida, é substituída em (II.4):

$$p_j = G \cdot (u_{j,k} + u_{k,j}) \cdot n_k + \frac{2 \cdot G \cdot \nu}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot u_{1,1} \cdot n_j \quad (II.15)$$

A equação (II.14) deve ser atendida em todo o domínio  $\Omega$  e a equação (II.15) em todo o contorno  $\Gamma$ . Nestas equações, baseia-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas tridimensionais regidos pela elasticidade linear.

## CAPÍTULO III

## FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

## III.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a formulação direta do método dos elementos de contorno.

Partindo da lei de Hooke e considerando a simetria do tensor de tensão, chega-se ao teorema da reciprocidade [8] que, após a particularização das forças de volume da região fundamental (método da carga unitária [9]), resulta na *Identidade de Somigliana*.

Apresentam-se as funções de distribuição dos deslocamentos e forças de superfície na região fundamental, considerada como um meio elástico infinito, propostas por Kelvin [10]. Tais funções são solução da equação de Navier definindo o estado de equilíbrio da região fundamental particularizada pelas forças de volume.

A identidade de Somigliana aplicada ao contorno, determina a *equação integral do contorno* cuja aplicação é estendida às regiões infinitas (cavidades).

Finalmente, a derivação da identidade de Somigliana define o estado de deformação e, conseqüentemente, o estado tensional no domínio.

As tensões no contorno são calculadas pelo procedimento apresentado por LCHAT [1] e BREBBIA, TELLES e WORBEL [3].

## III.2 - IDENTIDADE DE SOMIGLIANA

Seja um corpo elástico linear, homogêneo e isotrópico, de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , que está em *equilíbrio* sob ação de cargas e deslocamentos prescritos.

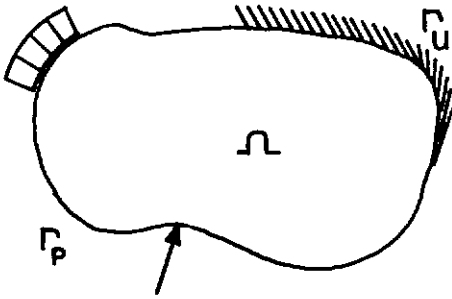


FIGURA III.1 - Corpo  $\Omega + \Gamma$  em equilíbrio.

O contorno  $\Gamma$  divide-se em  $\Gamma_u$ , onde são conhecidos os deslocamentos:

$$u_i(x) = \bar{u}_i(x) \quad x \in \Gamma_u \quad ( III.1 )$$

e  $\Gamma_p$ , onde são conhecidas as forças de superfície:

$$p_i(x) = \bar{p}_i(x) \quad x \in \Gamma_p \quad ( III.2 )$$

Este estado de equilíbrio, sujeito às condições de contorno (III.1) e (III.2), é caracterizado pelos campos de deslocamentos  $u_i(x)$ , de deformações  $\varepsilon_{ij}(x)$  e de tensões  $\sigma_{ij}(x)$  no domínio ( $x \in \Omega$ ), pelos campos de deslocamentos  $u_i(x)$  e de forças de superfície  $p_i(x)$  no contorno ( $x \in \Gamma$ ) e pela ação das forças de volume  $b_i(x)$ .

Considere-se agora um domínio  $\Omega^*$  com contorno  $\Gamma^*$ , podendo ser o infinito, que contenha o corpo  $\Omega + \Gamma$ . Esta nova região definida por  $\Omega^* + \Gamma^*$  está num estado de equilíbrio representado por:  $\sigma_{ij}^*$ ,  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $u_i^*$ ,  $p_i^*$  e  $b_i^*$ .

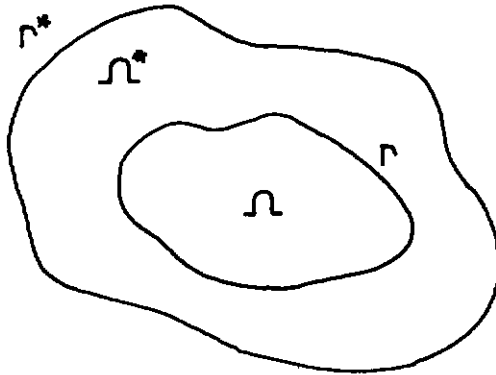


FIGURA III.2 - Região  $\Omega^* + \Gamma^*$  que contém  $\Omega + \Gamma$ .

Da Teoria da Elasticidade a *Lei de Hooke*, dada pela equação (II.8), é:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

onde  $C_{ijkl}$  é o tensor isotrópico, de quarta ordem, de constantes elásticas ( equação (II.9) ).

O corpo  $\Omega + \Gamma$  está contido em  $\Omega^* + \Gamma^*$ , portanto, as duas regiões possuem as mesmas propriedades elásticas, logo:

$$\sigma_{ij}^* = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}^*$$

Procedendo-se, então, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* &= C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot \varepsilon_{ij}^* \\ &= \varepsilon_{kl} \cdot C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{ij}^* \\ &= \varepsilon_{kl} \cdot C_{klij} \cdot \varepsilon_{ij}^* \\ &= \varepsilon_{kl} \cdot \sigma_{kl}^*\end{aligned}$$

com  $C_{ijkl} = C_{klij}$  ( ver equação (II.9) )

chega-se a:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij}$$

Integrando-se a equação acima sobre o domínio  $\Omega$ , que é o domínio estudado, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij} d\Omega \quad ( III.3 )$$

uma vez que as propriedades elásticas são as mesmas.

Substituindo a equação (II.5) na equação (III.3), desenvolvendo, inicialmente, a integral do lado esquerdo, chega-se a:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \frac{1}{2} \cdot \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot ( u_{i,j}^* + u_{j,i}^* ) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \frac{1}{2} \cdot \left[ \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^* d\Omega \right] \quad ( III.4 )$$



Com a derivação seguinte:

$$(\sigma_{ij} \cdot u_j^*)_{,i} = \sigma_{ij,i} \cdot u_j^* + \sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^*$$

$$(\sigma_{ij} \cdot u_i^*)_{,j} = \sigma_{ij,j} \cdot u_i^* + \sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^*$$

as integrais do lado direito da equação (III.4) ficam:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \cdot u_i^*)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} \cdot u_i^* d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \cdot u_j^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij,i} \cdot u_j^* d\Omega$$

A aplicação do teorema da divergência [6] à primeira integral do lado direito das equações acima fornece:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \cdot u_i^*)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \cdot u_i^* \cdot n_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i \cdot u_i^* d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \cdot u_j^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \cdot u_j^* \cdot n_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j \cdot u_j^* d\Gamma$$

onde  $n_j$  são os cossenos diretores da normal à superfície  $\Gamma$ , e  $p_j$  são as forças de superfície dadas pela equação (II.4):

$$p_j = \sigma_{ij} \cdot n_i$$

Notar que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  (equação II.2).

Da equação de Navier (II.1), de modo a satisfazer o equilíbrio, a força de volume é:

$$b_j = - \sigma_{ij}'_i$$

Voltando à equação (III.4) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \frac{1}{2} \cdot \left[ \int_{\Gamma} ( p_i \cdot u_i^* + p_j \cdot u_j^* ) d\Gamma + \int_{\Omega} ( b_i \cdot u_i^* + b_j \cdot u_j^* ) d\Omega \right]$$

Como os índices i e j no lado direito são mudos, somam-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i \cdot u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \cdot u_i^* d\Omega$$

Desenvolvendo-se, analogamente, o outro lado da equação (III.3) chega-se a:

$$\int_{\Gamma} p_i \cdot u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i \cdot u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* \cdot u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^* \cdot u_i d\Omega \quad ( III.5 )$$

que corresponde ao 2<sup>o</sup> teorema de Betti [8] ( reciprocidade ).

Vamos admitir que as componentes das forças de volume  $b_i^*$  correspondem a forças concentradas unitárias aplicadas no ponto  $\xi \in \Omega^*$  em cada uma das três direções ortogonais representadas pelo vetor de componentes  $P_i$ . Desse modo, as componentes do vetor força de volume são dadas por:

$$b_i = \Delta(\xi, x) \cdot P_i \quad ( III.6 )$$

onde  $P_i = 1$  e  $\Delta(\xi, x)$  é a função *Delta de Dirac* [3], definida por:

$$\left[ \begin{array}{ll} \Delta(\xi, x) = 0 & \text{se } \xi \neq x \\ \int_{\Omega} f(x) \cdot \Delta(\xi, x) \, d\Omega(x) = f(\xi) & \text{se } \xi \in \Omega \end{array} \right.$$

Esta particularização não traz problemas uma vez que o domínio  $\Omega^*$  pode ser qualquer. O domínio estudado é  $\Omega$ .

Fazendo com que  $\xi \in \Omega$ , pode-se ver que a consideração acima, para as forças de volume, equivale ao método da carga unitária [9].

Portanto, se  $\xi \in \Omega$ , a segunda integral do lado direito da equação (III.5) fica:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} b_j^*(x) \cdot u_j(x) \, d\Omega(x) &= \int_{\Omega} \Delta(\xi, x) \cdot P_j \cdot u_j(x) \, d\Omega(x) \\ &= u_j(\xi) \cdot P_j \end{aligned} \quad ( III.7 )$$

Admitindo ainda, cada carga concentrada atuando independentemente, os deslocamentos e forças de superfície da região  $\tilde{\Omega}^* + \tilde{\Gamma}^*$  podem ser escritos na forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) \cdot P_i \quad (\text{III.8 a})$$

$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) \cdot P_i \quad (\text{III.8 b})$$

onde  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  são, respectivamente, os deslocamentos e as forças de superfície na direção  $j$  no ponto  $x$ , correspondendo à uma força unitária aplicada no ponto  $\xi$  na direção  $i$ .

Substituindo as equações (III.7) e (III.8), a equação (III.5) pode ser escrita para representar as tres componentes do deslocamento em  $\xi \in \Omega$ , em separado, na seguinte forma:

$$u_i(\xi) = \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \, d\Omega(x) + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) \quad (\text{III.9})$$

A equação acima é conhecida como a *Identidade de Somigliana*. Foi obtida da reciprocidade com uma solução singular da equação de Lamé (II.14), com  $b_j^*$  dado pela equação (III.6), satisfazendo:

$$G \cdot u_{j,kk}^* + \frac{G}{1-2\nu} \cdot u_{k,kj}^* + \Delta(\xi, x) \cdot P_j = 0 \quad (\text{III.10})$$

### III.3 - SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

As soluções da equação (III.10) são chamadas de *soluções fundamentais*. Existem diferentes soluções que podem ser igualmente empregadas, dependendo da região  $\Omega^* + \Gamma^*$  e das condições de contorno.

Neste trabalho considera-se apenas o caso no qual o domínio  $\Omega^*$ , representa um meio elástico infinito e, conseqüentemente,  $\Gamma^*$  está situado a uma distância infinita do domínio  $\Omega$ . Para este caso, a solução fundamental corresponde à solução obtida por Kelvin [10].

Sendo  $\xi$  o ponto fonte e  $x$  o ponto campo, as expressões da solução fundamental são [3]:

a) Deslocamentos

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot G \cdot r} \cdot \left[ (3 - 4 \cdot \nu) \cdot \delta_{ij} + r_{,i} \cdot r_{,j} \right] \quad (III.11)$$

$$U^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix}$$

## b) Forças de superfície

Substituindo a equação (III.11) em (II.14) obtém-se a expressão para as forças de superfície:

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left[ \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \delta_{ij} + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \right] \cdot \frac{\partial r}{\partial n} - (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,i} \cdot n_j - r_{,j} \cdot n_i) \right] \quad (\text{III.12})$$

$$p^* = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix}$$

Em todas as expressões fundamentais,  $r = r(\xi, x)$  representa a distância entre o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $x$  e suas derivadas são tomadas com referência às coordenadas do ponto  $x$ , ou seja:

$$r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial x_j(x)} = \frac{r_{,j}}{r} \quad (\text{III.13})$$

onde

$$r = (r_j \cdot r_j)^{1/2} \quad (\text{III.14})$$

$$r_j = x_j(x) - x_j(\xi) \quad (\text{III.15})$$

Fisicamente as soluções fundamentais,  $u_{ij}^*(\xi, x)$  e  $p_{ij}^*(\xi, x)$ , significam, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície na direção  $j$  no ponto  $x$ , correspondentes a uma força unitária aplicada no ponto  $\xi$  na direção  $i$ .

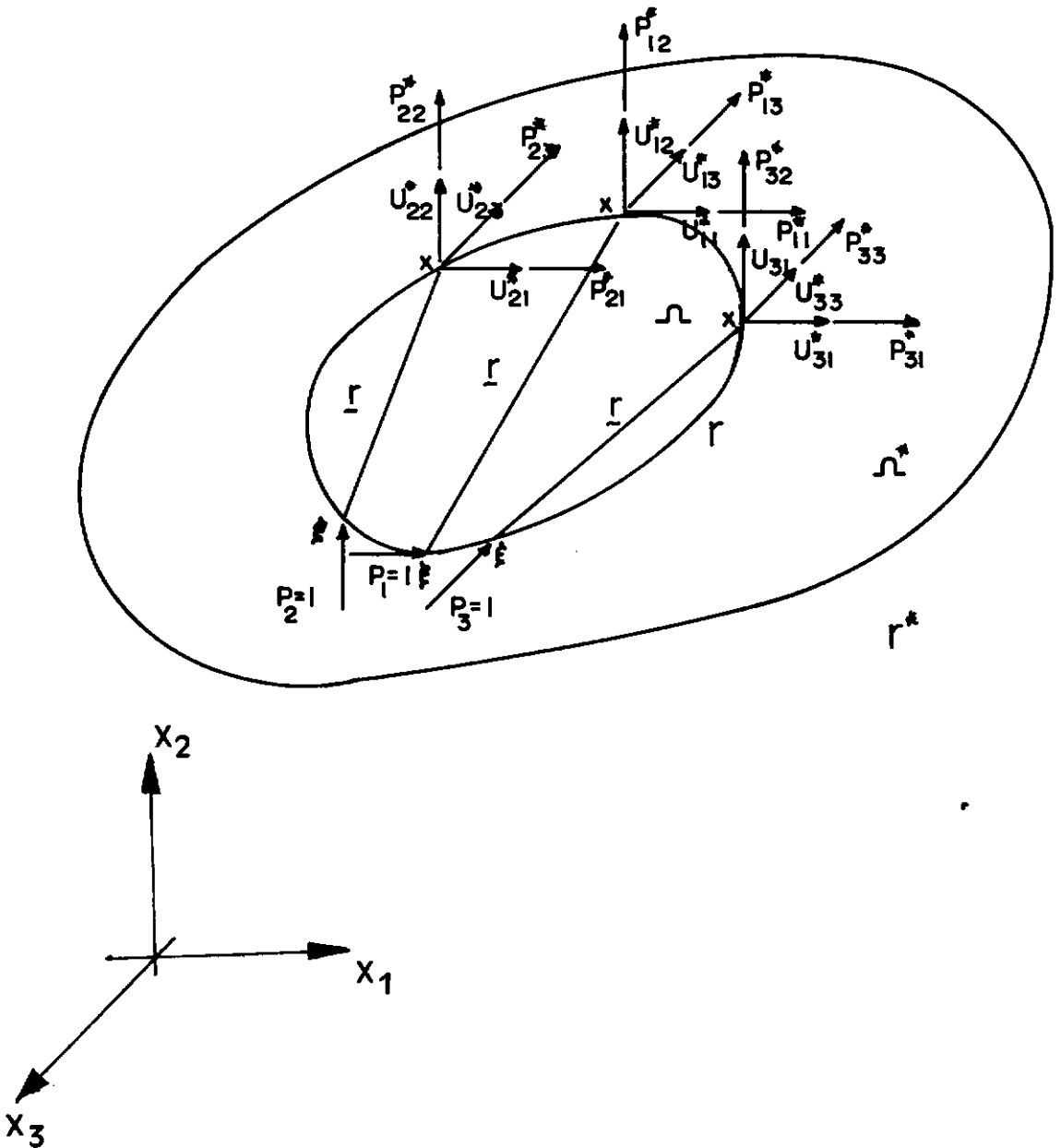


FIGURA III.3 - Carga concentrada unitária aplicada na região infinita  $\Omega^*$  no ponto  $\xi$ .

### III.4 - EQUAÇÃO INTEGRAL DO CONTORNO.

A identidade de Somigliana foi obtida sem nenhuma distinção entre as diferentes soluções fundamentais possíveis. Entretanto, a sua aplicação para as soluções propostas por Kelvin [10], torna-se possível se são conhecidos os deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno  $\Gamma$ , uma vez que as forças de volume são consideradas sempre prescritas.

Para determinar estas incógnitas considera-se, na equação (III.9), o ponto  $\xi$  pertencente ao contorno  $\Gamma$ . Admite-se, portanto, o ponto  $\xi$  como um ponto interno envolvido por parte de uma superfície esférica de raio  $\epsilon$ , tal como indicado na figura abaixo.

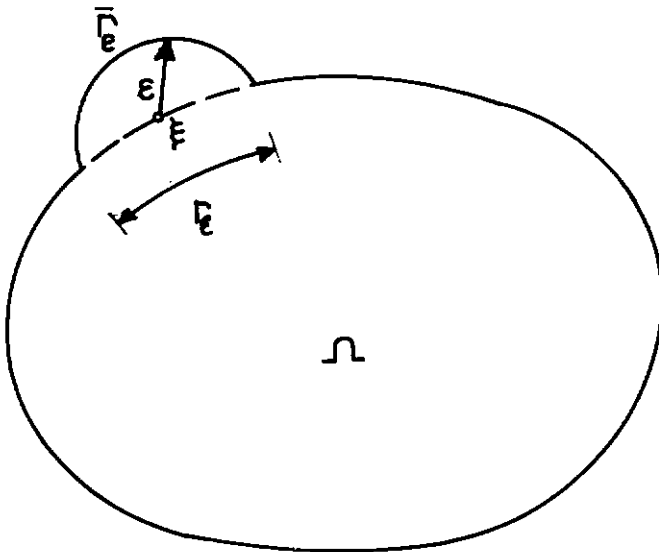


FIGURA III.4 - Ponto interno  $\xi$  envolvido por parte de uma superfície esférica.



A equação (III.9) pode, então, ser escrita na seguinte forma:

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \, d\Omega(x) \quad (\text{III.16})$$

Fazendo com que  $\xi$  pertença ao contorno  $\Gamma$  :

$$u_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \, d\Omega(x) \right] \quad (\text{III.17})$$

A função  $u_{ij}^*(\xi, x)$ , apesar de singular quando  $x = \xi$ , é integrável em todo o contorno  $\Gamma$ :

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \, d\Omega(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) \right] \quad (\text{III.18})$$

O limite acima pode ser escrito na forma:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) +$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) \quad ( \text{ III.19 } )$$

A integral em  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ , na equação (III.19), pode ser dado por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot \left[ u_j(x) - u_j(\xi) \right] \, d\Gamma(x) +$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(\xi) \cdot \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \, d\Gamma(x) \quad ( \text{ III.20 } )$$

Sendo o campo de deslocamentos  $u_j(x)$  contínuo em  $\xi$ , a primeira integral do lado direito da equação (III.20) desaparece:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(\xi) \cdot \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \, d\Gamma(x)$$

( III.21 )

A segunda integral do lado direito da equação (III.19), considerada no sentido do valor principal de Cauchy [3], terá sua existência comprovada se a função  $u_j(x)$  satisfizer a condição de Holder [5] em  $\xi$ , na forma:

$$| u_j(x) - u_j(\xi) | \leq B \cdot r^\alpha \quad ( \text{ III.22 } )$$

onde  $B$  e  $\alpha$  são constantes positivas.

Substituindo-se a equação (III.21) em (III.19) e, em seguida, substituindo-se a equação (III.19) em (III.18), obtém-se a identidade de Somigliana para pontos do contorno  $\Gamma$  :

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \, d\Omega(x) -$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_j(\xi) \cdot \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) \, d\Gamma(x)$$

que pode ser reordenada na forma abaixo:

$$C_{ij}(\xi) \cdot u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x)$$

$$+ \int_{\Omega} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot b_j(x) \, d\Omega(x) \quad ( \text{ III.23 } )$$

onde a primeira integral do lado esquerdo deve ser considerada no sentido do valor principal de Cauchy [3] e o coeficiente  $C_{ij}$  é dado por:

$$C_{ij}(\xi) = \delta_{ij} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.24})$$

sendo  $\delta_{ij}$  o Delta de Kronecker definido na equação (II.11).

Considerando que as forças de volume são sempre conhecidas e aplicando as condições de contorno (III.1) e (III.2), a equação (III.23) se torna a equação integral do contorno uma vez que as incógnitas são os valores de  $u_j(x)$  e  $p_j(x)$  no contorno.

Quando a normal ao contorno  $\Gamma$  é univocamente definida em  $\xi$  (contorno suave) o coeficiente  $C_{ij}(\xi)$  é dado por:

$$C_{ij}(\xi) = 0.5 \cdot \delta_{ij} \quad (\text{III.25})$$

que na forma matricial é:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Caso contrário, expressões analíticas para  $C_{ij}(\xi)$  são apresentadas em [11].

## III.5 - REGIÕES INFINITAS

Para o caso de regiões infinitas, com uma ou mais cavidades, a extensão da equação (III.23) exige a consideração de algumas hipóteses adicionais, relativas ao comportamento das funções envolvidas em uma superfície infinitamente distante do ponto fonte  $\xi$ .

Seja  $\rho$  o raio de uma esfera de superfície  $\Gamma_\rho$  centrada em  $\xi$ , que envolve a cavidade (cavidades) do problema:

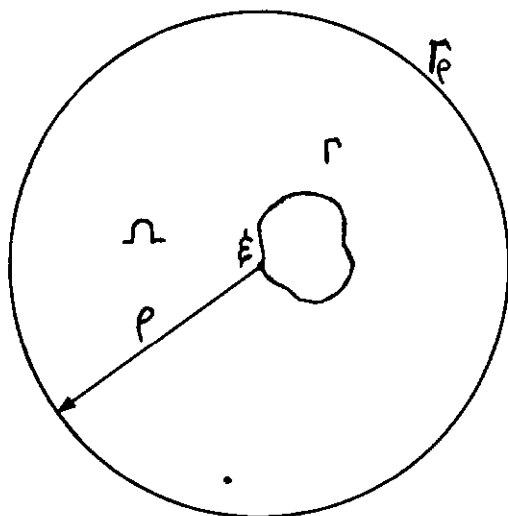


FIGURA III.5 - Região infinita com cavidade interna.

Para a região entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_\rho$  a equação (III.23), com  $b_j = 0$ , pode ser escrita na forma:

$$C_{ij}(\xi) \cdot u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) =$$

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Gamma_\rho} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Omega(x) \quad (\text{III.26})$$

Tirando o limite quando  $\rho \rightarrow \infty$  a equação (III.26) pode ser escrita em termos de integrais sobre  $\Gamma$  apenas se a condição abaixo for atendida:

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \left[ p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) - u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j(x) \right] d\Gamma(x) = 0 \quad (\text{III.27})$$

No caso tridimensional, o comportamento das funções  $u_{ij}^*(\xi, x)$  e  $p_{ij}^*(\xi, x)$  nas integrais  $\Gamma_\rho$  ( $x \in \Gamma_\rho$ ), considerando o contorno no infinito, é mostrado abaixo:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = O(\rho^{-1})$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = O(\rho^{-2})$$

$$d\Gamma(x) = |J| \cdot d\phi \cdot d\theta \quad \text{com} \quad |J| = O(\rho^{-2})$$

Portanto, se na pior hipótese,  $u_j(x) = O(\rho^{-1})$  e  $p_j(x) = O(\rho^{-2})$  no infinito, as condições de regularidade (III.27) são atendidas.

Pode-se ainda observar que, se a carga total aplicada sobre a superfície  $\Gamma$  não for auto-equilibrada, o princípio de Saint Venant [7] mostra que  $u_j(x)$  e  $p_j(x)$  terão o mesmo comportamento da solução fundamental correspondente a uma carga concentrada na direção da resultante. Portanto,  $u_j(x) = O(\rho^{-1})$  e  $p_j(x) = O(\rho^{-2})$  são obtidos e cada termo da equação (III.27) se anula separadamente.

Consideração de forças de volume não foi incluída neste trabalho, portanto, considerou-se  $b_j(x) = 0$  para simplificar. Maiores detalhes desta análise encontra-se em BREBBIA, TELLES e WROBEL [3].

A identidade de Somigliana fica também válida para as regiões infinitas.

Notar que no caso de região infinita, a normal aponta para dentro da cavidade, enquanto que, coerentemente, no domínio finito, aponta para fora do corpo. Figura III.6.

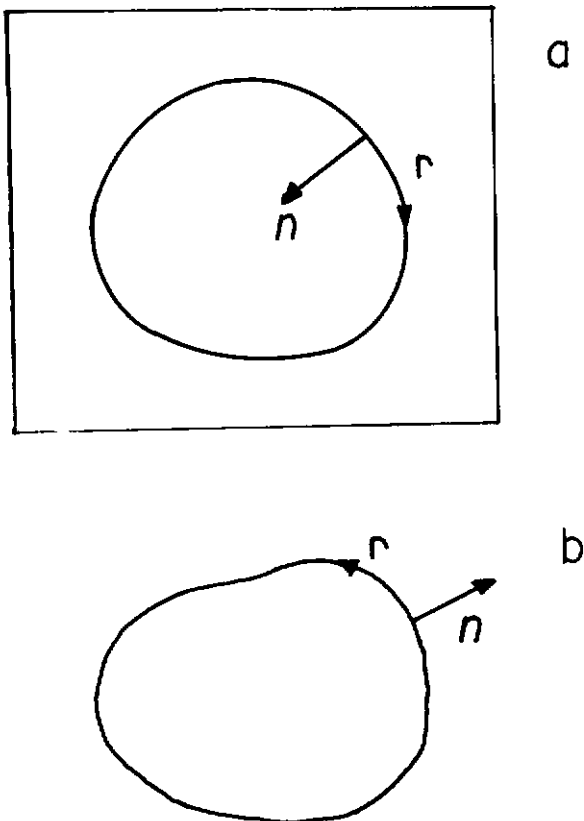


FIGURA III.6 - Sentido da normal: a) cavidade b) domínio finito

## III.6 - TENSÕES NOS PONTOS INTERNOS

Os deslocamentos nos pontos internos ( $\xi \in \Omega$ ) são representados de forma contínua pela identidade de Somigliana. As deformações, portanto, são obtidas substituindo-se a equação (III.9) nas relações deformação - deslocamento (II.5), após derivação em relação as coordenadas de  $\xi$  [3].

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}^*(\xi, x) = & \frac{-1}{16 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,i} \cdot \delta_{jk} + r_{,j} \cdot \delta_{ik}) \right. \\ & \left. - r_{,k} \cdot \delta_{ij} + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] \end{aligned} \quad (III.28)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{ijk}^*(\xi, x) = & \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,j} \cdot \delta_{ki} + r_{,i} \cdot \delta_{jk} - \right. \\ & \left. r_{,k} \cdot \delta_{ij}) + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] \end{aligned} \quad (III.29)$$

Os tensores (III.28) e (III.29) são obtidos a partir da solução fundamental de Kelvin [10] e, fisicamente, significam a deformação  $\varepsilon_{ij}$  e a tensão  $\sigma_{ij}$ , respectivamente, em um ponto campo  $x$  devido a uma carga unitária aplicada no ponto fonte  $\xi$  na direção  $k$ .



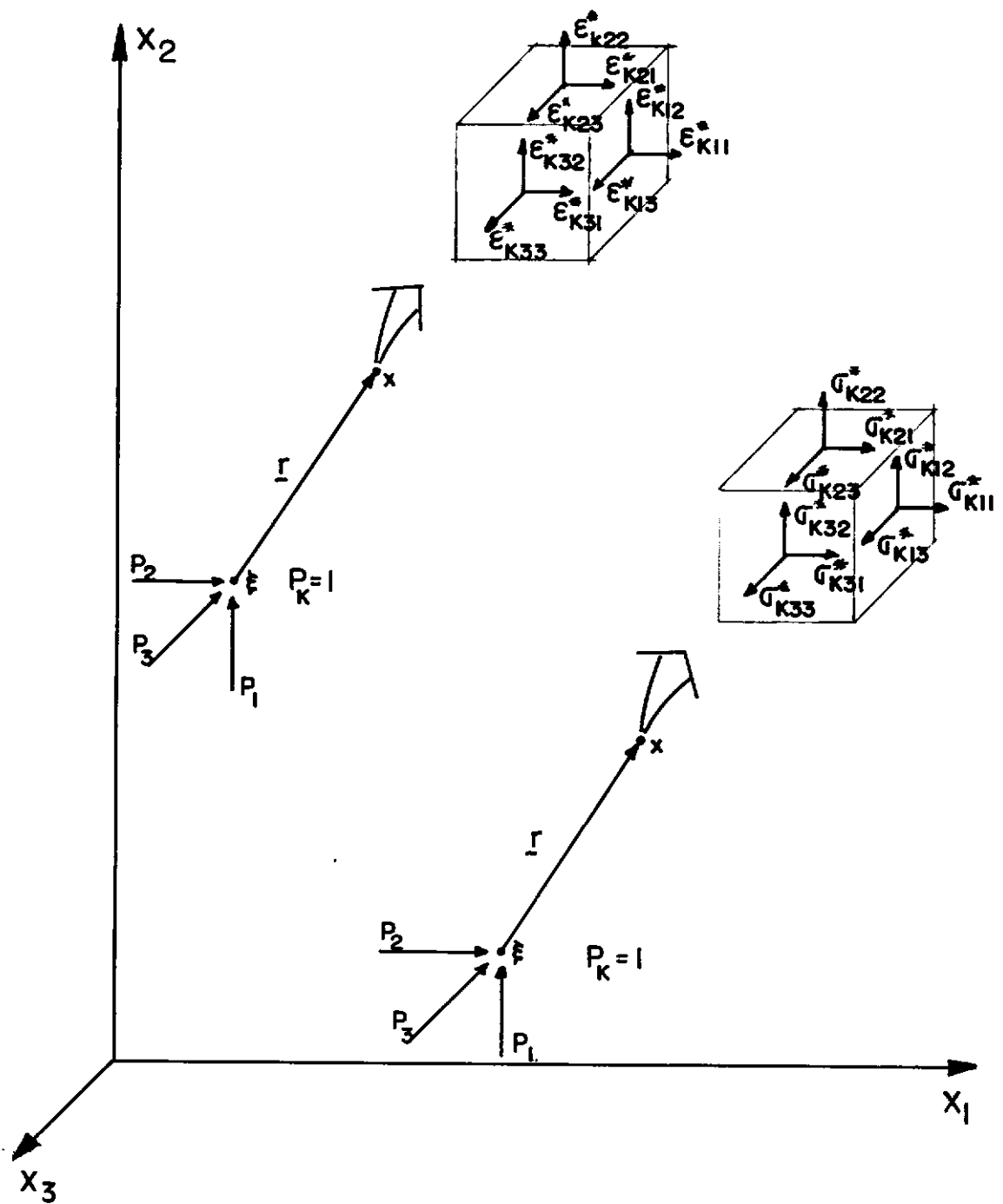


FIGURA III.7 - Deformações e tensões fundamentais

Substituindo o tensor de deformação na lei de Hooke, o estado de tensão no ponto interno fica definido:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) \cdot p_k(x) \, d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) \cdot u_k(x) \, d\Gamma(x) + \int_{\Omega} u_{ijk}^*(\xi, x) \cdot b_k(x) \, d\Omega(x) \quad (\text{III.30})$$

onde:

$$u_{ijk}^*(\xi, x) = -\sigma_{ijk}^*(\xi, x) \quad (\text{III.31})$$

$$p_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{G}{4 \cdot n \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left[ 3 \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \left[ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \delta_{ij} \cdot r_{,k} + \nu \cdot (\delta_{ij} \cdot r_{,j} + \delta_{ij} \cdot r_{,i}) - 5 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] + 3 \cdot \nu \cdot (n_i \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} + n_j \cdot r_{,i} \cdot r_{,k}) + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (3 \cdot n_k \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} + n_j \cdot \delta_{ik} + n_i \cdot \delta_{jk}) - (1 - 4 \cdot \nu) \cdot n_k \cdot \delta_{ij} \right] \quad (\text{III.32})$$

já considerada a substituição

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} = -r_{,i} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(x)} \quad (\text{III.33})$$

Para maiores detalhes sobre as derivações consultar a referência [3].

### III.7 - TENSÕES NO CONTORNO

As tensões no contorno poderiam ser obtidas pelo limite da equação (III.30) quando  $\xi$  tende ao contorno. No entanto, tal procedimento apresenta a desvantagem das integrais terem singularidades de ordem superior.

Um procedimento alternativo para o cálculo das tensões no contorno, sugerido por LACHAT [1] e BREBBIA, TELLES e WROBEL [3], consiste em definir um sistema cartesiano auxiliar de coordenadas locais  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  no qual, um dos planos é tangente ao contorno no ponto  $\xi$  onde se deseja calcular as tensões. Um dos eixos, portanto, é normal ao contorno em  $\xi$ .

Admitindo-se, então, o plano tangente ao contorno em  $\xi$  definido por  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$  ( $\bar{x}_3 \equiv n$ ) a equação de Cauchy, para o sistema de referência local, fornece:

$$\bar{\sigma}_{13}(\xi) = \bar{p}_1(\xi) \quad ( \text{ III.34 } )$$

$$\bar{\sigma}_{23}(\xi) = \bar{p}_2(\xi) \quad ( \text{ III.35 } )$$

$$\bar{\sigma}_{33}(\xi) = \bar{p}_3(\xi) \quad ( \text{ III.36 } )$$

As outras três componentes do tensor de tensão são obtidas pela lei de Hooke generalizada, equação (II.12):

$$\bar{\sigma}_{11}(\xi) = \frac{1}{1-\nu} \cdot \left[ \nu \cdot \bar{\sigma}_{33}(\xi) + 2 \cdot G \cdot ( \bar{\varepsilon}_{11}(\xi) + \nu \cdot \bar{\varepsilon}_{22}(\xi) ) \right] \quad ( \text{III.37} )$$

$$\bar{\sigma}_{22}(\xi) = \frac{1}{1-\nu} \cdot \left[ \nu \cdot \bar{\sigma}_{33}(\xi) + 2 \cdot G \cdot ( \bar{\varepsilon}_{22}(\xi) + \nu \cdot \bar{\varepsilon}_{11}(\xi) ) \right] \quad ( \text{III.38} )$$

$$\bar{\sigma}_{12}(\xi) = 2 \cdot G \cdot \bar{\varepsilon}_{12}(\xi) \quad ( \text{III.39} )$$

onde as três componentes do tensor de deformação segundo o plano do contorno,  $\bar{\varepsilon}_{11}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{12}$  e  $\bar{\varepsilon}_{22}$ , são obtidas de:

$$\bar{\varepsilon}_{ij}(\xi) = \frac{1}{2} \cdot ( \bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i} ) \quad ( \text{III.40} )$$

As tensões no contorno para sistema global são obtidas pela lei de transformação para o tensor de 2<sup>a</sup> ordem:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{\bar{\sigma}}} \cdot \underline{\underline{R}}^t \quad ( \text{III.41} )$$

onde  $\underline{\underline{R}}$  é a matriz de rotação.

O procedimento empregado neste trabalho para definir o sistema cartesiano auxiliar está descrito na seção IV.8 .

## CAPITULO IV

### IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

Obter a solução analítica fechada das equações integrais apresentadas no capítulo anterior, para a grande maioria dos problemas de engenharia, é muito difícil e inviável. Por esta razão é necessário um procedimento numérico, que será apresentado neste capítulo.

A implementação numérica do MEC requer que o contorno seja discretizado (dividido) em uma série de elementos que têm a geometria descrita em função das coordenadas de seus nós geométricos, através de funções de interpolação. Sobre estes elementos, os deslocamentos e forças de superfície são também interpolados em função de seus valores nos nós funcionais.

A equação (III.23) é escrita, na forma discretizada, para cada ponto fonte  $\xi$  aplicado nos pontos nodais funcionais e as integrais sobre cada elemento são calculadas. Com a imposição das condições de contorno, surge um sistema de equações algébricas tendo como incógnitas os valores de deslocamentos e forças de superfície nos nós funcionais do contorno. Forças de volume não foram implementadas neste trabalho.

Os deslocamentos e tensões em qualquer parte do domínio e as tensões no contorno são obtidos em função dos valores dos deslocamentos e forças de superfície no contorno.

## IV.2 - DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

A solução aproximada da equação (III.23) é obtida dividindo-se o contorno  $\Gamma$  em  $L$  elementos. A equação integral do contorno pode, portanto, ser escrita na forma seguinte, válida para todo o contorno ( $\xi \in \Gamma$ ):

$$C_{ij}(\xi) \cdot u_j(\xi) + \sum_{l=1}^L \int_{\Gamma_l} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j(x) \, d\Gamma(x) =$$

$$\sum_{l=1}^L \int_{\Gamma_l} u_{ij}(\xi, x) \cdot p_j(x) \, d\Gamma(x) \quad (IV.1)$$

As funções  $u_j(x)$  e  $p_j(x)$  são aproximadas no elemento genérico  $\Gamma_l$  pela função de interpolação  $\phi$ :

$$u_j(x) = \sum_{n=1}^{N^l} \phi^{ln}(x) \cdot u_j^{ln} \quad x \in \Gamma_l \quad (IV.2)$$

$$p_j(x) = \sum_{n=1}^{N^l} \phi^{ln}(x) \cdot p_j^{ln} \quad x \in \Gamma_l \quad (IV.3)$$

onde  $u_j^{ln}$  e  $p_j^{ln}$  são, respectivamente, os valores dos deslocamentos e forças de superfície no ponto nodal  $n$  do elemento  $\Gamma_l$ ,  $N^l$  é o número de pontos nodais em  $\Gamma_l$  e  $\phi^{ln}(x)$  é a função de interpolação associada ao ponto nodal  $n$  também em  $\Gamma_l$ .

As funções de interpolação  $\phi^{ln}(x)$  são determinadas de modo que representem exatamente:

$$u_j^{ln} = \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) \cdot u_j^{ln} \quad x \in \Gamma_1 \quad (IV.4)$$

$$p_j^{ln} = \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) \cdot p_j^{ln} \quad x \in \Gamma_1 \quad (IV.5)$$

o que significa que quando  $x$  corresponde à coordenada do nó funcional  $n$ , tem-se  $\phi^{ln} = 1$  e, quando não,  $\phi^{ln} = 0$ , resultando:

$$\sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) = 1 \quad x \in \Gamma_1 \quad (IV.6)$$

As equações (IV.4) e (IV.5) garantem que as condições de contorno (III.1) e (III.2) são atendidas nos pontos nodais funcionais.

O valor de  $u_j(\xi)$  pode também ser interpolado em função dos valores dos pontos nodais do elemento no qual encontra-se o ponto fonte  $\xi$ :

$$u_j(\xi) = \sum_{n=1}^{N^{\xi}} \phi^{\xi n}(\xi) \cdot u_j^{\xi n} \quad (IV.7)$$

A representação matricial dos termos das equações (IV.2), (IV.3) e (IV.7) é:

$$u_j(x) \Rightarrow \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad p_j(x) \Rightarrow \underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

$$\phi^{ln}(x) \Rightarrow \underline{\phi}^l = \begin{bmatrix} \phi^{l1} & 0 & 0 & \phi^{l2} & 0 & 0 & \dots & \phi^{lN^1} & 0 & 0 \\ 0 & \phi^{l1} & 0 & 0 & \phi^{l2} & 0 & \dots & 0 & \phi^{lN^1} & 0 \\ 0 & 0 & \phi^{l1} & 0 & 0 & \phi^{l2} & \dots & 0 & 0 & \phi^{lN^1} \end{bmatrix}$$

$$u_j^{ln} \Rightarrow \underline{u}^l = \begin{bmatrix} u_1^{l1} \\ u_2^{l1} \\ u_3^{l1} \\ \vdots \\ u_1^{lN^1} \\ u_2^{lN^1} \\ u_3^{lN^1} \end{bmatrix}, \quad p_j^{ln} \Rightarrow \underline{p}^l = \begin{bmatrix} p_1^{l1} \\ p_2^{l1} \\ p_3^{l1} \\ \vdots \\ p_1^{lN^1} \\ p_2^{lN^1} \\ p_3^{lN^1} \end{bmatrix}$$



Os deslocamentos e forças de superfície ao longo de todo o contorno  $\Gamma$  podem ser escritos na forma:

$$u_j(x) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N^l} \phi^{ln}(x) \cdot u_j^{ln} \quad x \in \Gamma \quad (IV.8)$$

$$p_j(x) = \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{N^l} \phi^{ln}(x) \cdot p_j^{ln} \quad x \in \Gamma \quad (IV.9)$$

sendo  $\phi^{ln}(x)$  a função de interpolação do nó funcional  $n$  do elemento  $\Gamma_l$ .

Admitindo, então, as aproximações definidas nas equações (IV.2), (IV.3) e (IV.7) a equação (IV.1), válida para todo o contorno  $\Gamma$ , na forma matricial, fica:

$$\underline{c}(\xi) \cdot \underline{u}^\xi + \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_l} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{u}^l =$$

$$\sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_l} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{p}^l \quad (IV.10)$$

em que as incógnitas são os deslocamentos ( $\underline{u}^l$ ) e as forças de superfície ( $\underline{p}^l$ ) nos  $N$  nós funcionais do contorno  $\Gamma$ .

De maneira análoga aos deslocamentos e forças de superfície, as coordenadas cartesianas  $x_j$ , ao longo do elemento  $\Gamma_1$ , são expressas em termos das coordenadas de seus nós geométricos, satisfazendo uma relação definida pela função de interpolação  $\psi$  na seguinte forma:

$$x_j(x) = \sum_{m=1}^{M^1} \psi^{1m}(x) \cdot x_j^m \quad (x \in \Gamma_1) \quad (\text{IV.11})$$

sendo  $M^1$  o número de nós geométricos do elemento  $\Gamma_1$  e  $\psi^{1m}(x)$ , a função de forma associada ao nó  $m$  pertencente  $\Gamma_1$ .

As funções de forma  $\psi^{1m}(x)$ , em cada elemento  $\Gamma_1$ , devem satisfazer:

$$x_j^{1m} = \sum_{m=1}^{M^1} \psi^m(x) \cdot x_j^{1m} \quad x \in \Gamma_1 \quad (\text{IV.12})$$

de modo que  $\psi^{1m} = 1$  quando  $x$  corresponde à coordenada do nó geométrico  $m$  e,  $\psi^{1m} = 0$  quando em contrário, o que resulta:

$$\sum_{m=1}^{M^1} \psi^{1m}(x) = 1 \quad x \in \Gamma_1 \quad (\text{IV.13})$$

De um modo geral as coordenadas em todo o contorno  $\Gamma$  podem ser dadas por:

$$x_j(x) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{M^1} \psi^{1m}(x) \cdot x_j^{1m} \quad x \in \Gamma \quad (\text{IV.14})$$

Os termos da equação (IV.11), na forma matricial, são dados por:

$$x_j(x) \Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\psi^{lm}(x) \Rightarrow \psi^l = \begin{bmatrix} \psi^{l1} & 0 & 0 & \psi^{l2} & 0 & 0 & \dots & \psi^{lM^1} & 0 & 0 \\ 0 & \psi^{l1} & 0 & 0 & \psi^{l2} & 0 & \dots & 0 & \psi^{lM^1} & 0 \\ 0 & 0 & \psi^{l1} & 0 & 0 & \psi^{l2} & \dots & 0 & 0 & \psi^{lM^1} \end{bmatrix}$$

$$x^{lm} \Rightarrow \underline{x}^l = \begin{bmatrix} x_1^{l1} \\ x_2^{l1} \\ x_3^{l1} \\ \vdots \\ x_1^{lM^1} \\ x_2^{lM^1} \\ x_3^{lM^1} \end{bmatrix}$$

As funções de interpolação  $\psi^l$  e de forma  $\underline{x}^l$  são expressas em termos de coordenadas adimensionais  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ . Deve-se, portanto, conhecer a forma para passar do sistema de coordenadas global  $(x_1, x_2, x_3)$  para este sistema de coordenadas intrínseco e assim escrever o diferencial de área  $dF$  em função de  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  na equação (IV.10).

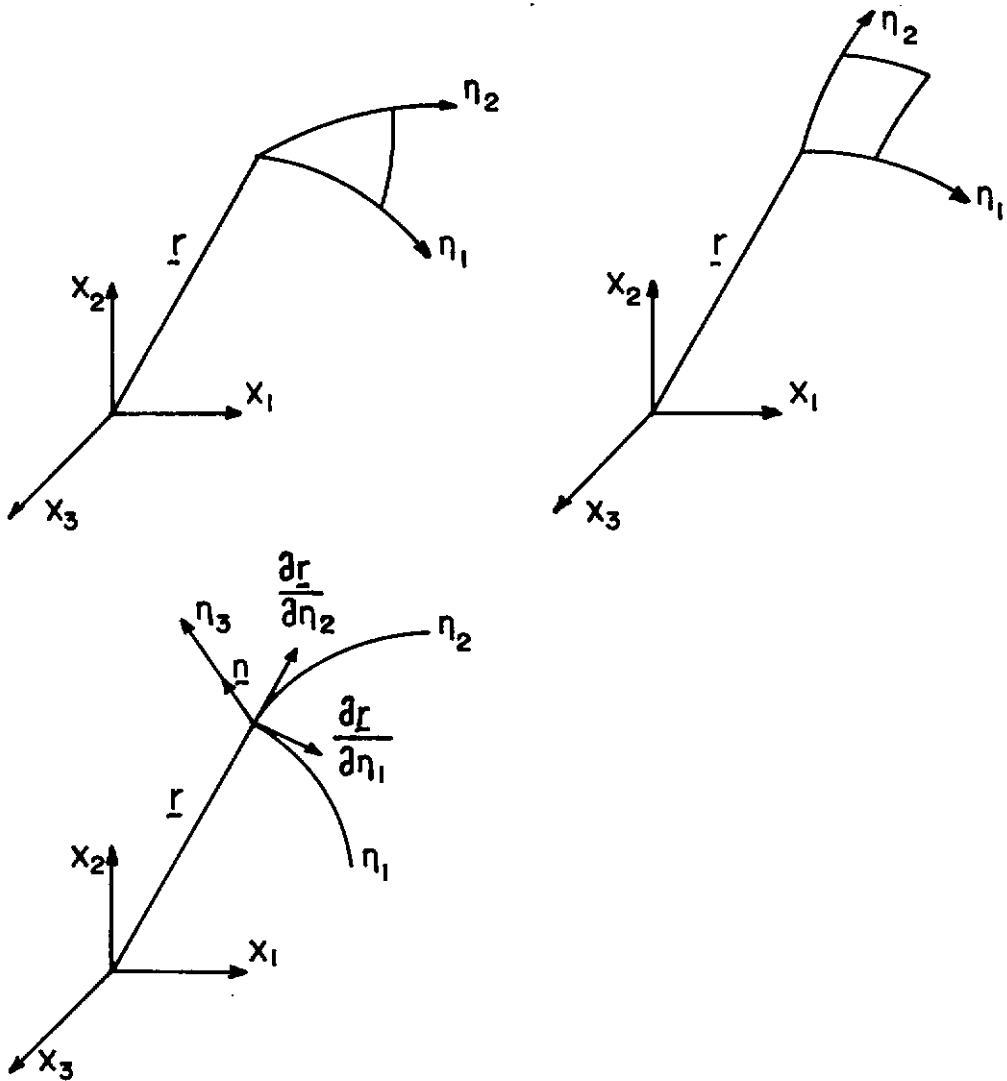


FIGURA IV.1 - Sistemas de coordenadas.

Considerando o sistema de coordenadas definido na figura acima, a transformação geral, para uma função  $f$ , é dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad ( IV.15 )$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_3} \end{bmatrix} = \underline{J} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

onde  $\underline{J}$  é conhecida como *matriz Jacobiana*.

A relação inversa é, então:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_3} \end{bmatrix}$$

O diferencial de área é dado por:

$$dF = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \eta_2} \right| \cdot d\eta_1 d\eta_2 = |\underline{V}| \cdot d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.16})$$

Pode-se ver que  $|\underline{V}|$  é o módulo do vetor normal ao contorno:

$$\underline{V} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \eta_1} \times \frac{\partial \underline{r}}{\partial \eta_2} = \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_3}, \frac{\partial x_2}{\partial \eta_3}, \frac{\partial x_3}{\partial \eta_3} \right] = (v_1, v_2, v_3) \quad (\text{IV.17})$$

sendo:

$$v_1 = \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} \quad ( IV.18a )$$

$$v_2 = \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \quad ( IV.18b )$$

$$v_3 = \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} \quad ( IV.18c )$$

Portanto, o valor de  $|V|$  é determinado por:

$$|V| = ( v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 )^{1/2} \quad ( IV.19 )$$

Nos problemas tridimensionais o contorno é uma superfície. Os elementos são, portanto, bidimensionais e as funções de interpolação, nas equações (IV.2), (IV.3) e (IV.11) são funções apenas de duas variáveis ( $\eta_1, \eta_2$ ). Normalmente os elementos de contorno são de dois tipos: quadrilaterais e triangulares, tal como mostrado na figura (IV.1). Sendo assim, a transformação geral para uma função  $f$  é:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad ( IV.20 )$$

As derivadas de  $\underline{x}$ ,  $\underline{u}$  e  $\underline{p}$ , em relação as coordenadas locais  $(\eta_1, \eta_2)$ , em cada elemento  $\Gamma_1$ , são dadas por:

$$\frac{\partial \underline{x}^l}{\partial \eta} = \sum_{m=1}^{M^l} \frac{\partial \psi^{lm}}{\partial \eta} \cdot \underline{x}^{lm} \quad (IV.21)$$

$$\frac{\partial \underline{u}^l}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{N^l} \frac{\partial \phi^{ln}}{\partial \eta} \cdot \underline{u}^{ln} \quad (IV.22)$$

$$\frac{\partial \underline{p}^l}{\partial \eta} = \sum_{n=1}^{N^l} \frac{\partial \phi^{ln}}{\partial \eta} \cdot \underline{p}^{ln} \quad (IV.23)$$

Efetuada a mudança de coordenadas a equação (IV.10), válida para todo o contorno, adquire a seguinte forma:

$$\underline{c}(\xi) \cdot \underline{u}^\xi + \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{g}^l(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| d\eta_1 d\eta_2 \right] \cdot \underline{u}^l = \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{g}^l(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| d\eta_1 d\eta_2 \right] \cdot \underline{p}^l \quad (IV.24)$$

admitida a convenção:

$$\xi = \xi(\eta_1, \eta_2)$$

$$\kappa = \kappa(\eta_1, \eta_2)$$

## IV.3 - SISTEMA DE EQUAÇÕES

Na equação integral do contorno, equação (IV.10), no lugar da solução exata, é utilizada uma aproximação para as funções de deslocamento  $u_j(x)$  e de forças de superfície  $p_j(x)$ , através das equações (IV.2) e (IV.3), que atendem às condições de contorno, dadas em (III.1) e (III.2), nos nós funcionais.

O erro decorrente desta aproximação pode ser expresso por:

$$e_j^u(x) = u_j(x) - u_j'(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_p \quad (\text{IV.25})$$

$$e_j^p(x) = p_j(x) - p_j'(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_u \quad (\text{IV.26})$$

onde  $u_j'(x)$  e  $p_j'(x)$  são os valores aproximados.

O método dos resíduos ponderados [3] utiliza funções aproximadas do tipo definido nas equações (IV.2) e (IV.3):

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \alpha^n \cdot \phi^n$$

em que as funções  $\phi^n$  promovem a satisfação das condições de contorno do problema, e os parâmetros  $\alpha^n$  são determinados distribuindo-se o erro, ou resíduo, (num sentido médio) no domínio de integração de acordo com as funções de ponderação  $\omega^t$ :

$$\int_{\Gamma} e \cdot \omega^t \, d\Gamma = 0 \quad t = 1, \dots, T \quad (\text{IV.27})$$



A influência do erro na solução aproximada é verificada substituindo as equações (IV.25) e (IV.26) na equação (III.23):

$$\psi_j(\xi) = C_{ij}(\xi) \cdot e_j^u(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot e_j^u(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot e_j^p(x) d\Gamma(x) \quad (IV.28)$$

onde o primeiro termo do lado direito da equação acima só existe se  $\xi$  pertencer a  $\Gamma_p$ .

Da equação (IV.28) obtém-se a função de resíduo que quantifica o erro no ponto  $\xi$ :

$$\psi_j(\xi) = C_{ij}(\xi) \cdot u_j^r(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) \cdot u_j^r(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) \cdot p_j^r(x) d\Omega \quad (IV.29)$$

Considerando a aproximação dada pelas equações (IV.2) e (IV.3) a equação (IV.29) discretizada, escrita na forma matricial, válida para todo o contorno, é:

$$\psi(\xi) = \underline{C}(\xi) \cdot \underline{u}^\xi + \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_l} p^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{u}^l - \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_l} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{p}^l \quad (IV.30)$$

O erro é distribuído no domínio de integração substituindo a equação (IV.30) na equação (IV.27):

$$\int_{\Gamma} \psi(\xi) \cdot \omega^t(\xi) d\Gamma(\xi) = \int_{\Gamma} \omega^t(\xi) \cdot \left[ \underline{c}(\xi) \cdot \underline{u}^t \right] d\Gamma(\xi) +$$

$$\sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma} \omega^t(\xi) \cdot \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] d\Gamma(\xi) \right] \cdot \underline{u}^l -$$

$$\sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma} \omega^t(\xi) \cdot \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] d\Gamma(\xi) \right] \cdot \underline{p}^l$$

( IV.31 )

O número de nós funcionais ( $N^1$ ) deve ser igual ao número de funções de ponderação ( $T$ ), para que o sistema resultante da equação (IV.31), que define os valores de  $\underline{u}^1$  e  $\underline{p}^1$ , tenha solução única satisfazendo as condições de contorno dadas pelas equações (III.1) e (III.2).

A escolha das funções de ponderação depende do método de resíduo ponderado aplicado que, segundo PARREIRA [12], pode ser qualquer um deles.

Neste trabalho é empregado o *Método de Colocação* que consiste em escolher uma série de pontos, no domínio de integração  $\Gamma_1$ , nos quais o resíduo, dado pela equação (IV.30), é zero.

No método da colocação [3] as funções de ponderação são funções Delta de Dirac,  $\Delta(t, \xi)$ , que têm a seguinte propriedade:

$$\int_{\Gamma} \Delta(t, \xi) \cdot F(\xi) \, d\Gamma(\xi) = F(t) \quad t \in \Gamma \quad (\text{IV.32})$$

Portanto, a equação (IV.31) fica:

$$\underline{c}(t) \cdot \underline{u}^t + \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_l} p^*(t, x) \cdot \underline{p}^l(x) \, d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{u}^l =$$

$$\sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_l} \underline{u}^*(t, x) \cdot \underline{p}^l(x) \, d\Gamma(x) \right] \cdot p^l \quad (\text{IV.33})$$

satisfazendo a equação (IV.27) nos pontos de colocação.

Fazendo com que os pontos de colocação coincidam com os nós funcionais, os valores de  $\underline{u}^l$  e  $p^l$  correspondem aos deslocamentos e forças de superfície nestes pontos, uma vez que as funções  $\underline{p}^l$  são tais que atendem às relações (IV.4) e (IV.5). Desse modo, a equação (IV.33) é a própria equação integral do contorno, dada pela equação (IV.10).

A aplicação do método de colocação à equação integral do contorno - equação (IV.33) - significa que nos nós funcionais (pontos de colocação) o resíduo é zero.

Pode-se observar que a equação (IV.33) fornece um conjunto de equações para um nó funcional  $\xi$  (ponto fonte) que podem ser escritas do seguinte modo:

$$\underline{c}_{\xi} \cdot \underline{u}_{\xi} + \begin{bmatrix} \hat{h}_{\xi_1}^* & \hat{h}_{\xi_2}^* & \dots & \hat{h}_{NN}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{\xi_1}^* & g_{\xi_2}^* & \dots & g_{NN}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_N \end{bmatrix}$$

( IV.34 )

onde  $u_i$  e  $p_i$  são, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície nos nós funcionais do contorno  $\Gamma$ .  $\hat{h}_{ij}^*$  e  $g_{ij}^*$  são submatrizes de ordem  $3 \times 3$ , que relacionam o nó  $\xi$  com todos os  $N$  nós funcionais.

A equação (IV.33) pode ser escrita para o nó funcional  $\xi$  (ponto fonte), na seguinte forma com as integrações em cada elemento  $\Gamma_1$ :

$$\sum_{l=1}^L \left[ \underline{c}(\xi) \cdot \underline{\phi}^1(\xi) + \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{u}^1 = \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{p}^1 \quad ( IV.35 )$$

onde  $u^1$  e  $p^1$  são, respectivamente, os deslocamentos e forças de superfície nos nós funcionais do elemento  $\Gamma_1$ .

Portanto, as submatrizes  $\underline{\tilde{h}}^*$  e  $\underline{\tilde{q}}^*$ , são obtidas por elemento, da seguinte forma:

$$\underline{\tilde{h}} = \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.36})$$

$$\underline{\tilde{q}} = \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.37})$$

O primeiro termo da equação (IV.35) pode ser adicionado à matriz  $\underline{\tilde{h}}$ , dada na equação (IV.36):

$$\underline{h} = \underline{c}(\xi) \cdot \underline{\phi}^1(\xi) + \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.38})$$

As matrizes do elemento  $\underline{h}$  e  $\underline{q}$ , dadas pelas equações (IV.37) e (IV.38), relacionam o nó funcional  $\xi$  com todos os nós funcionais do elemento  $\Gamma_1$  e são de ordem  $3 \times 3 \cdot N^1$ .

Considerando a mudança de coordenada para o sistema local do elemento  $(\eta_1, \eta_2)$ , as equações (IV.37) e (IV.38) ficam:

$$\underline{h} = \underline{c}(\xi) \cdot \underline{\phi}^1(\xi) + \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |\mathbf{V}| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.39})$$

$$\underline{q} = \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |\mathbf{V}| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.40})$$

Escrevendo todas as equações (IV.34) juntas

tem-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{11}^* & \tilde{h}_{12}^* & \dots & \tilde{h}_{1N}^* \\ \tilde{h}_{21}^* & \tilde{h}_{22}^* & \dots & \tilde{h}_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \tilde{h}_{N1}^* & \tilde{h}_{N2}^* & \dots & \tilde{h}_{NN}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \vdots \\ \underline{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{g}_{11}^* & \underline{g}_{12}^* & \dots & \underline{g}_{1N}^* \\ \underline{g}_{21}^* & \underline{g}_{22}^* & \dots & \underline{g}_{2N}^* \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \underline{g}_{N1}^* & \underline{g}_{N2}^* & \dots & \underline{g}_{NN}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \vdots \\ \underline{p}_N \end{bmatrix}$$

( IV.41 )

onde as submatrizes  $\tilde{h}_{ij}^*$  são:

$$\tilde{h}_{ij}^* = \tilde{h}_{ij}^* + \underline{c}_i \quad i = j \quad ( \text{IV.42a} )$$

$$\tilde{h}_{ij}^* = \tilde{h}_{ij}^* \quad i \neq j \quad ( \text{IV.42b} )$$

A equações acima podem ser escritas na forma:

$$( \underline{C} + \underline{\tilde{H}} ) \cdot \underline{U} = \underline{G} \cdot \underline{P} \quad ( \text{IV.43} )$$

A matriz  $\underline{C}$  pode ser incorporada à matriz  $\underline{\tilde{H}}$  para formar  $\underline{H}$ :

$$\underline{H} \cdot \underline{U} = \underline{G} \cdot \underline{P} \quad ( \text{IV.44} )$$

Aplicando as condições de contorno (III.1) e (III.2) às equações (IV.34) resulta um sistema de equações lineares com  $3 \cdot N$  incógnitas, entre elas deslocamentos e forças de superfície, que deve ser reordenado de tal forma que todas as incógnitas fiquem em um único vetor  $\underline{X}$ :

$$\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{F} \quad ( IV.45 )$$

A matriz  $\underline{A}$  é uma matriz cheia e não simétrica cujas linhas correspondem aos graus de liberdade do problema. O vetor  $\underline{F}$  contém os valores prescritos dos deslocamentos e forças de superfície.

As submatrizes da diagonal principal da matriz  $\underline{H}$ , que correspondem aos coeficientes  $\underline{C}(\xi)$  mais os valores principais de Cauchy, podem ser obtidos indiretamente considerando movimentos de corpo rígido, conforme encontra-se descrito em [3].

Neste trabalho optou-se pelo valor do coeficiente  $\underline{C}(\xi)$  estabelecido pela equação (III.25) sendo possível posicionar o nó funcional no interior do elemento, onde a normal é continuamente definida, quando o contorno não for suave.

Do cálculo indireto de  $\underline{H}_{ii}$  conclui-se que, no caso de regiões finitas, a matriz  $\underline{H}$  é singular. Isto significa que as forças de superfície não podem ser prescritas em todo o contorno. No caso de corpos infinitos esta restrição não existe.

## IV.4 - ELEMENTOS DE DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

O campo de deslocamentos no elemento pode ser expresso como um polinômio completo no sistema de coordenada local:

$$u_j(x) = a_j + b_j \cdot x_1 + c_j \cdot x_2 + d_j \cdot x_3 + \dots \quad ( IV.46 )$$

com  $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , e  $d_j$  constantes.

O deslocamento nos pontos nodais do elemento, correspondente ao campo dado na equação (IV.46), é:

$$u_j^{ln} = a_j + b_j \cdot x_1^n + c_j \cdot x_2^n + d_j \cdot x_3^n + \dots \quad ( IV.47 )$$

Substituindo a equação (IV.47) na equação (IV.2)

tem-se:

$$u_j(x) = \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) \cdot \left[ a_j + b_j \cdot x_1^{ln} + c_j \cdot x_2^{ln} + d_j \cdot x_3^{ln} + \dots \right] \quad ( IV.48 )$$

$$u_j(x) = a_j \cdot \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) + b_j \cdot \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) \cdot x_1^n + c_j \cdot \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) \cdot x_2^n + d_j \cdot \sum_{n=1}^{N^1} \phi^{ln}(x) \cdot x_3^n + \dots \quad ( IV.49 )$$



Para que a equação (IV.49) atenda à condição de completude, movimentos de corpo rígido e estados de deformação constante, deve-se ter que:

$$\sum_{n=1}^{N^1} \phi^{1n}(x) = 1 \quad (IV.50)$$

e

$$\sum_{n=1}^{N^1} \phi^{1n}(x) \cdot x_j^n = x_j^n \quad (IV.51)$$

A validade da equação (IV.50) é mostrada na seção IV.2. Entretanto a equação (IV.51) só será atendida se a ordem das funções de forma for, no máximo, igual a ordem das funções de interpolação, isto é,  $m \leq n$  nas equações (IV.2) e (IV.11).

Os elementos de contorno devem, a princípio, atender a condição de completude. Esta restrição é também aplicada ao método dos elemento finitos [13].

Diz-se que um elemento é isoparamétrico quando as funções de forma e de interpolação são de mesma ordem.

Uma propriedade singular do método dos elementos de contorno é que, ao contrário do método dos elementos finitos [13], a sua formulação não exige a continuidade dos deslocamentos [3].

O emprego de funções descontínuas possibilitou, inicialmente, o desenvolvimento de uma família de elementos quadrilaterais em que os nós funcionais estão situados no interior do elemento. Posteriormente, TELLES [15] desenvolveu uma formulação para o elemento triangular considerando a descontinuidade.

Os elementos de contorno implementados neste trabalho são:

- 1 - elemento triangular constante
- 2 - " quadrilateral constante
- 3 - " triangular linear
- 4 - " quadrilateral linear
- 5 - " triangular quadrático
- 6 - " quadrilateral quadrático

Quanto à continuidade estes elementos classificam-se em contínuos, descontínuos e de transição:

- a) elemento contínuo  $\Rightarrow$  os nós funcionais coincidem com os nós geométricos.
- b) elemento descontínuo  $\Rightarrow$  os nós funcionais não coincidem com os nós geométricos.
- c) elemento de transição  $\Rightarrow$  apenas alguns nós funcionais coincidem com os nós geométricos.

Considerando a descontinuidade dos elementos observa-se que a definição de isoparametria, dada anteriormente, difere um pouco da definição dada no método dos elementos finitos [13] uma vez que as funções de forma e de interpolação só serão as mesmas quando o elemento for contínuo.

Os elementos implementados, com exceção do elemento constante, são isoparamétricos.

O elemento constante tem apenas um nó funcional, posicionado no centro, cuja função de interpolação é:

$$\phi^1(x) = 1 \quad (IV.52)$$

ou seja, assume-se que os deslocamentos e forças de superfície, em todo o elemento, têm o mesmo valor daquele no nó funcional. A sua função de forma, porém, é linear. O que significa que a condição de completude não é atendida.

A implementação do elemento constante é justificada pelos bons resultados obtidos em trabalhos anteriores, sendo, por isso, seu emprego recomendado antes de optar por uma malha de elementos mais refinados. De fato, o método da colocação justifica tais resultados. Entretanto, surgirão deformações de corpo rígido que, segundo BREBBIA, TELLES e WROBEL [3], são evidentes em casos como o de viga balanço e outros problemas com considerável movimento de corpo rígido.

O elemento descontínuo torna mais fácil o refinamento da malha nos pontos onde há concentração de tensão e pode ser empregado nas regiões de contorno não suave, onde os elementos têm normais diferentes (figura IV.2), considerando o coeficiente  $C_{ij}$  igual a 0.5, equação (III.25).

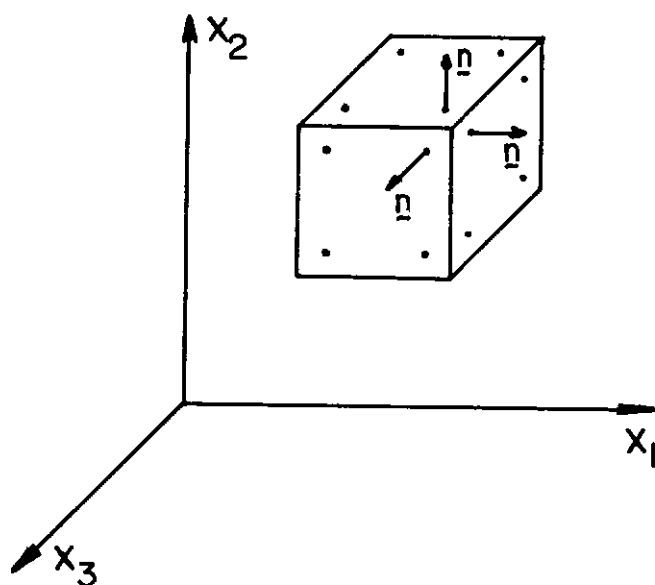


FIGURA IV.2 - Contorno não suave.

O emprego do elemento descontínuo porém, faz com que o sistema de equações (IV.41) aumente (aumento do número de graus de liberdade) e isto requer mais tempo para a execução do programa, além de ocupar mais espaço de memória no computador.

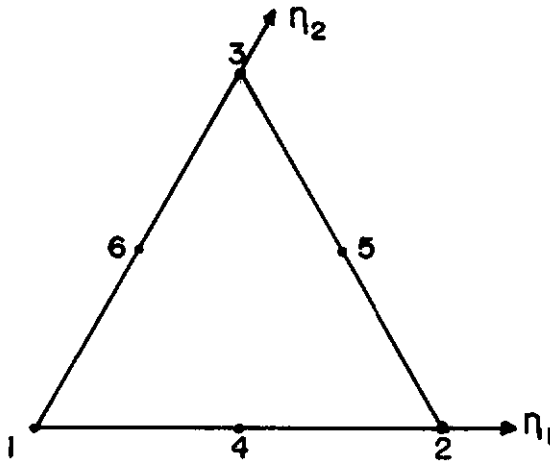
O elemento de transição possibilita trabalhar com elementos contínuos e descontínuos numa mesma malha.

A seguir serão apresentadas as funções de forma e as funções de interpolação, com suas respectivas derivadas, para cada elemento implementado [3], [14] e [15].

## IV.4.2 - FUNÇÕES DE FORMA:

## ELEMENTO TRIANGULAR

No elemento triangular as funções de forma e as de interpolação são escritas em termos das coordenadas triangulares  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  e  $\eta_3$ :



com  $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$

FIGURA IV.3 - Coordenadas triangulares.

## COORDENADAS DOS NÓS GEOMÉTRICOS

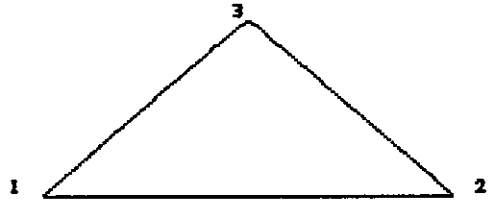
NÓ	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
1	0	0	1
2	1	0	0
3	0	1	0
4	0.5	0	0.5
5	0.5	0.5	0
6	0	0.5	0.5

elemento constante e linear: ( $M^1 = 3$ )

$$\psi_1 = \eta_3$$

$$\psi_2 = \eta_1$$

$$\psi_3 = \eta_2$$



elemento quadrático: ( $M^1 = 6$ )

$$\psi_1 = \eta_3 \cdot (2 \cdot \eta_3 - 1)$$

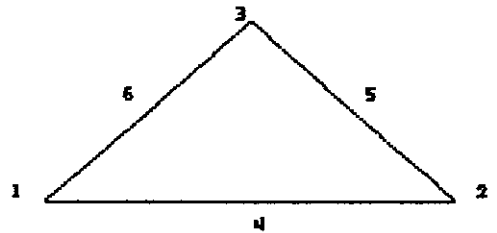
$$\psi_2 = \eta_1 \cdot (2 \cdot \eta_1 - 1)$$

$$\psi_3 = \eta_2 \cdot (2 \cdot \eta_2 - 1)$$

$$\psi_4 = 4 \cdot \eta_3 \cdot \eta_1$$

$$\psi_5 = 4 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2$$

$$\psi_6 = 4 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3$$



Para calcular as derivadas das funções de forma em relação a  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , como  $\eta_3$  é uma coordenada dependente, convém fazer  $\alpha \equiv \eta_1$  e  $\beta \equiv \eta_2$  e definir os operadores:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \eta_1} - \frac{\partial}{\partial \eta_3} \quad (\text{IV.53})$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \eta_2} - \frac{\partial}{\partial \eta_3} \quad (\text{IV.54})$$

As derivadas são dadas abaixo:

elemento constante e linear ( $M^1 = 3$ ):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} = -1$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} = -1$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} = 1$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} = 1$$

elemento quadrático ( $M^1 = 6$ ):

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} = 1 - 4 \cdot \eta_3$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} = 1 - 4 \cdot \eta_3$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha} = 4 \cdot \eta_1 - 1$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \beta} = 4 \cdot \eta_2 - 1$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \alpha} = 4 \cdot ( \eta_3 - \eta_1 )$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \beta} = -4 \cdot \eta_1$$

$$\frac{\partial \psi_5}{\partial \alpha} = 4 \cdot \eta_2$$

$$\frac{\partial \psi_5}{\partial \beta} = 4 \cdot \eta_1$$

$$\frac{\partial \psi_6}{\partial \alpha} = -4 \cdot \eta_2$$

$$\frac{\partial \psi_6}{\partial \beta} = 4 \cdot ( \eta_3 - \eta_2 )$$

ELEMENTO QUADRILATERAL
------------------------

As funções de forma e de interpolação do elemento quadrilateral são escritas em termos das coordenadas retangulares  $\eta_1$  e  $\eta_2$  :

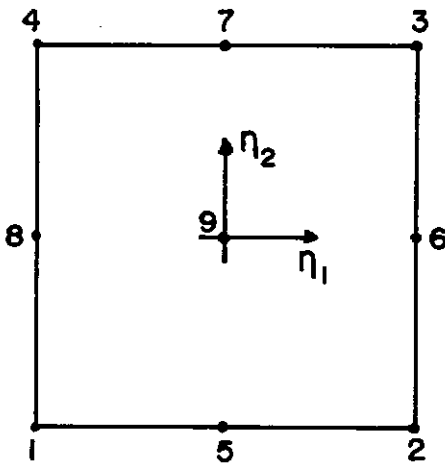


FIGURA IV.4 - Coordenada retangular.

COORDENADAS DOS NÓS GEOMÉTRICOS

NÓ	$\eta_1$	$\eta_2$
1	-1	-1
2	1	-1
3	1	1
4	-1	1
5	0	-1
6	1	0
7	0	1
8	-1	0
9	0	0



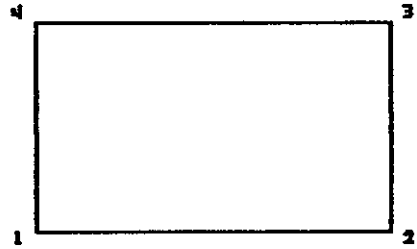
elemento constante e linear ( $M^1 = 4$ ):

$$\psi_1 = 0.25 \cdot (1 - \eta_1) \cdot (1 - \eta_2)$$

$$\psi_2 = 0.25 \cdot (1 + \eta_1) \cdot (1 - \eta_2)$$

$$\psi_3 = 0.25 \cdot (1 + \eta_1) \cdot (1 + \eta_2)$$

$$\psi_4 = 0.25 \cdot (1 - \eta_1) \cdot (1 + \eta_2)$$



elemento quadrático ( $M^1 = 9$ ):

$$\psi_1 = 0.25 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 - 1) \cdot \eta_2 \cdot (\eta_2 - 1)$$

$$\psi_2 = 0.25 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 + 1) \cdot \eta_2 \cdot (\eta_2 - 1)$$

$$\psi_3 = 0.25 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 + 1) \cdot \eta_2 \cdot (\eta_2 + 1)$$

$$\psi_4 = 0.25 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 - 1) \cdot \eta_2 \cdot (\eta_2 + 1)$$

$$\psi_5 = 0.50 \cdot (1 - \eta_1^2) \cdot \eta_2 \cdot (\eta_2 - 1)$$

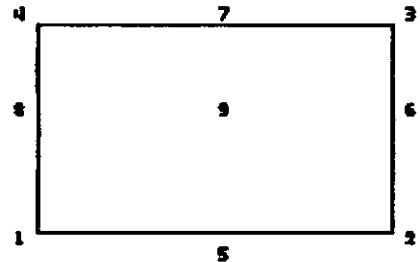
$$\psi_6 = 0.50 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 + 1) \cdot (1 - \eta_2^2)$$

$$\psi_7 = 0.50 \cdot (1 - \eta_1^2) \cdot \eta_2 \cdot (\eta_2 + 1)$$

$$\psi_8 = 0.50 \cdot \eta_1 \cdot (\eta_1 - 1) \cdot (1 - \eta_2^2)$$

$$\psi_9 = (1 - \eta_1^2) \cdot (1 - \eta_2^2)$$

*Elemento Lagrangiano*



As derivadas das funções de forma são:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_1} = 0.25 \cdot (2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 + \eta_2 - \eta_2^2)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_1} = 0.25 \cdot (2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - \eta_2 + \eta_2^2)$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \eta_1} = 0.25 \cdot (2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2 + 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 + \eta_2 + \eta_2^2)$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \eta_1} = 0.25 \cdot (2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - \eta_2 - \eta_2^2)$$

$$\frac{\partial \psi_5}{\partial \eta_1} = \eta_1 \cdot ( \eta_2 - \eta_2^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_6}{\partial \eta_1} = 0.50 \cdot ( 2 \cdot \eta_1 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2 - \eta_2^2 + 1 )$$

$$\frac{\partial \psi_7}{\partial \eta_1} = - \eta_1 \cdot ( \eta_2 + \eta_2^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_8}{\partial \eta_1} = 0.50 \cdot ( 2 \cdot \eta_1 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2^2 + \eta_2^2 - 1 )$$

$$\frac{\partial \psi_9}{\partial \eta_1} = 2 \cdot \eta_1 \cdot ( \eta_2^2 - 1 )$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta_2} = 0.25 \cdot ( 2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1^2 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - \eta_1 + \eta_1^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta_2} = 0.25 \cdot ( 2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1^2 + 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - \eta_1 - \eta_1^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \eta_2} = 0.25 \cdot ( 2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1^2 + 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 + \eta_1 + \eta_1^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \eta_2} = 0.25 \cdot ( 2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1^2 - 2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 - \eta_1 + \eta_1^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_5}{\partial \eta_2} = 0.50 \cdot ( 2 \cdot \eta_2 - 2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1^2 + \eta_1^2 - 1 )$$

$$\frac{\partial \psi_6}{\partial \eta_2} = - \eta_2 \cdot ( \eta_1 + \eta_1^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_7}{\partial \eta_2} = 0.50 \cdot ( 2 \cdot \eta_2 - 2 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1^2 - \eta_1^2 + 1 )$$

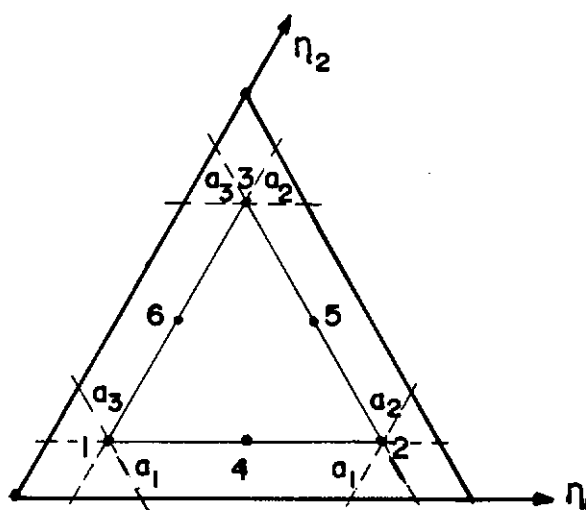
$$\frac{\partial \psi_8}{\partial \eta_2} = \eta_2 \cdot ( \eta_1 - \eta_1^2 )$$

$$\frac{\partial \psi_9}{\partial \eta_2} = 2 \cdot \eta_2 \cdot ( \eta_1^2 - 1 )$$

## IV.4.2 - FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO:

Para determinar as funções de interpolação é necessário definir a posição dos nós funcionais no elemento, que é determinada pelo parâmetro  $a_i$ , indicado a seguir, com base nos sistemas de coordenadas locais dados nas figuras IV.3 e IV.4:

## ELEMENTO TRIANGULAR



$$a_4 = 1 - a_1 - a_2 - a_3$$

FIGURA IV.5 - Posição dos nós funcionais no elemento triangular.

## COORDENADAS DOS NÓS FUNCIONAIS:

NÓ	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$
1	$a_3$	$a_1$	$a_2 + a_4$
2	$a_3 + a_4$	$a_1$	$a_2$
3	$a_3$	$a_1 + a_4$	$a_2$
4	$a_3 + \frac{a_4}{2}$	$a_1$	$a_2 + \frac{a_4}{2}$
5	$a_3 + \frac{a_4}{2}$	$a_1 + \frac{a_4}{2}$	$a_2$
6	$a_3$	$a_1 + \frac{a_4}{2}$	$a_2 + \frac{a_4}{2}$

Os nós funcionais intermediários 4, 5 e 6 estão sempre situados no meio da distância entre os nós funcionais 1, 2 e 3. Não no meio da distância entre os nós geométricos.

No caso do elemento triangular é mais simples trabalhar com as seguintes coordenadas modificadas:

$$\eta_1^i = \frac{\eta_1 - a_3}{a_4}$$

$$\eta_2^i = \frac{\eta_2 - a_1}{a_4}$$

$$\eta_3^i = \frac{\eta_3 - a_2}{a_4}$$

elemento linear ( $N^1 = 3$ ):

$$\phi_1 = \eta_3^i$$

$$\phi_2 = \eta_1^i$$

$$\phi_3 = \eta_2^i$$

elemento quadrático ( $N^1 = 6$ ):

$$\phi_1 = \eta_3^i \cdot (2 \cdot \eta_3^i - 1)$$

$$\phi_2 = \eta_1^i \cdot (2 \cdot \eta_1^i - 1)$$

$$\phi_3 = \eta_2^i \cdot (2 \cdot \eta_2^i - 1)$$

$$\phi_4 = 4 \cdot \eta_3^i \cdot \eta_1^i$$

$$\phi_5 = 4 \cdot \eta_1^i \cdot \eta_2^i$$

$$\phi_6 = 4 \cdot \eta_2^i \cdot \eta_3^i$$

Como antes, para o cálculo das derivadas das funções de interpolação, toma-se  $\alpha \equiv \eta_1$  e  $\beta \equiv \eta_2$  e define-se os operadores dados em (IV.53) e (IV.54). As derivadas são dadas abaixo:

elemento linear ( $N^1 = 3$ ):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} = -\frac{1}{a_u}$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} = -\frac{1}{a_u}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{a_u}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \beta} = \frac{1}{a_u}$$

elemento quadrático ( $N^1 = 6$ ):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{a_u} \cdot (1 - 4 \cdot \eta_3^2)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \beta} = \frac{1}{a_u} \cdot (1 - 4 \cdot \eta_3^2)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{a_u} \cdot (4 \cdot \eta_1^2 - 1)$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \beta} = \frac{1}{a_u} \cdot (4 \cdot \eta_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \alpha} = \frac{4}{a_u} \cdot (\eta_3^2 - \eta_1^2)$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \beta} = -\frac{1}{a_u} \cdot 4 \cdot \eta_1^2$$

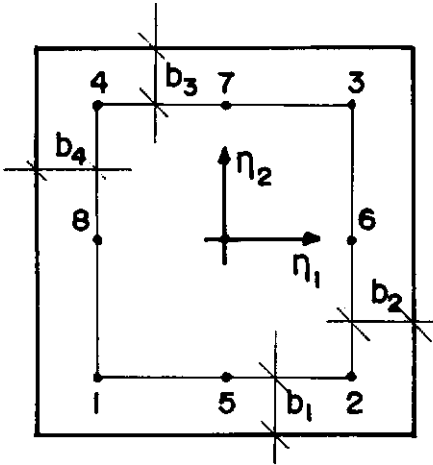
$$\frac{\partial \phi_5}{\partial \alpha} = \frac{4}{a_u} \cdot \eta_2^2$$

$$\frac{\partial \phi_5}{\partial \beta} = \frac{4}{a_u} \cdot \eta_1^2$$

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial \alpha} = -\frac{4}{a_u} \cdot \eta_2^2$$

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial \beta} = \frac{4}{a_u} \cdot (\eta_3^2 - \eta_2^2)$$

## ELEMENTO QUADRILATERAL



$$a_i = 1 - b_i \quad i = 1, 4$$

$$a_5 = a_2 + a_4$$

$$a_6 = a_1 + a_3$$

FIGURA IV.6 - Posição dos nós func. no elemento quadrilateral

COORDENADAS DOS NÓS FUNCIONAIS:

NÓ	$\eta_1$	$\eta_2$
1	$-a_4$	$-a_1$
2	$a_2$	$-a_1$
3	$a_2$	$a_3$
4	$-a_4$	$a_3$
5	$\emptyset$	$-a_1$
6	$a_2$	$\emptyset$
7	$\emptyset$	$a_3$
8	$-a_4$	$\emptyset$
9	$\emptyset$	$\emptyset$

interpolantes unidimensionais lineares:

$$\phi_1^1 = \frac{1}{a_5} \cdot ( a_2 - \eta_1 )$$

$$\phi_1^2 = \frac{1}{a_6} \cdot ( a_3 - \eta_2 )$$

$$\phi_2^1 = \frac{1}{a_5} \cdot ( a_4 + \eta_1 )$$

$$\phi_2^2 = \frac{1}{a_6} \cdot ( a_1 + \eta_2 )$$

interpolantes unidimensionais quadráticos:

$$\phi_1^1 = \frac{\eta_1}{a_4 \cdot a_5} \cdot ( \eta_1 - a_2 )$$

$$\phi_1^2 = \frac{\eta_2}{a_1 \cdot a_6} \cdot ( \eta_2 - a_3 )$$

$$\phi_2^1 = \frac{\eta_1}{a_2 \cdot a_5} \cdot ( \eta_1 + a_4 )$$

$$\phi_2^2 = \frac{\eta_2}{a_3 \cdot a_6} \cdot ( \eta_2 + a_1 )$$

$$\phi_3^1 = \frac{1}{a_2 \cdot a_4} \cdot [ ( a_2 - \eta_1 ) ( a_4 + \eta_1 ) ]$$

$$\phi_3^2 = \frac{1}{a_1 \cdot a_3} \cdot [ ( a_3 - \eta_2 ) ( a_1 + \eta_2 ) ]$$

elemento linear ( $N^1 = 4$ ) e quadrático ( $N^1 = 9$ ):

$$\phi_1 = \phi_1^1 \cdot \phi_1^2$$

$$\phi_2 = \phi_2^1 \cdot \phi_1^2$$

$$\phi_3 = \phi_2^1 \cdot \phi_2^2$$

$$\phi_4 = \phi_1^1 \cdot \phi_2^2$$

elemento quadrático ( $N^1 = 9$ ):

$$\phi_5 = \phi_3^1 \cdot \phi_1^2$$

$$\phi_6 = \phi_2^1 \cdot \phi_3^2$$

$$\phi_7 = \phi_3^1 \cdot \phi_2^2$$

$$\phi_8 = \phi_1^1 \cdot \phi_3^2$$

$$\phi_9 = \phi_3^1 \cdot \phi_3^2$$

As derivadas destas funções de interpolação são:

interpolantes unidimensionais lineares:

$$\frac{\partial \phi_1^1}{\partial \eta_1} = - \frac{1}{a_5}$$

$$\frac{\partial \phi_2^1}{\partial \eta_1} = \frac{1}{a_5}$$

$$\frac{\partial \phi_1^2}{\partial \eta_2} = - \frac{1}{a_6}$$

$$\frac{\partial \phi_2^2}{\partial \eta_2} = \frac{1}{a_6}$$



interpolantes unidimensionais quadráticos:

$$\frac{\partial \phi_1^1}{\partial \eta_1} = \frac{1}{a_4 \cdot a_5} \cdot (2 \cdot \eta_1 - a_2)$$

$$\frac{\partial \phi_2^1}{\partial \eta_1} = \frac{1}{a_2 \cdot a_5} \cdot (2 \cdot \eta_1 + a_4)$$

$$\frac{\partial \phi_2^2}{\partial \eta_2} = \frac{1}{a_3 \cdot a_6} \cdot (2 \cdot \eta_2 + a_1)$$

$$\frac{\partial \phi_1^2}{\partial \eta_2} = \frac{1}{a_1 \cdot a_6} \cdot (2 \cdot \eta_2 - a_3)$$

$$\frac{\partial \phi_3^1}{\partial \eta_1} = \frac{1}{a_2 \cdot a_4} \cdot (a_2 - a_4 - 2 \cdot \eta_1)$$

$$\frac{\partial \phi_3^2}{\partial \eta_2} = \frac{1}{a_1 \cdot a_3} \cdot (a_3 - a_1 - 2 \cdot \eta_2)$$

elemento linear ( $N^1 = 4$ ) e quadrático ( $N^1 = 9$ ):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_1^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_1^2$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_1^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_1^1$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_2^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_1^2$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_2^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_1^1$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_3^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_1^2$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_3^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_1^1$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_4^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_1^2$$

$$\frac{\partial \phi_4}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_4^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_1^1$$

elemento quadrático ( $N^1 = 9$ ):

$$\frac{\partial \phi_5}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_3^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_1^2$$

$$\frac{\partial \phi_5}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_1^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_2^1$$

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_2^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_3^2$$

$$\frac{\partial \phi_6}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_3^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_2^1$$

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_3^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_2^2$$

$$\frac{\partial \phi_7}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_2^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_3^1$$

$$\frac{\partial \phi_8}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_1^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_3^2$$

$$\frac{\partial \phi_8}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_3^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_1^1$$








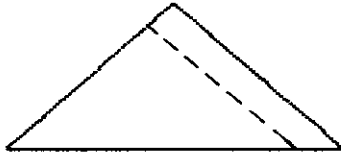
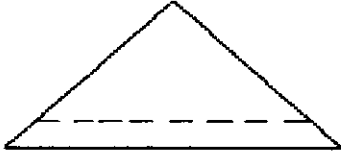

$$\frac{\partial \phi_9}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \phi_3^1}{\partial \eta_1} \cdot \phi_3^2$$

$$\frac{\partial \phi_9}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \phi_3^2}{\partial \eta_2} \cdot \phi_3^1$$


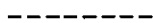


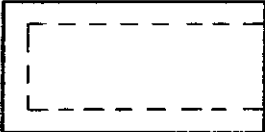





Todos os parâmetros  $a_i$  foram definidos no vetor AI (tipo de elemento, tipo de continuidade, 6), de modo que, caso se queira modificar as distâncias nodais basta modificar este vetor sem alterar as demais subrotinas.

Todas as combinações possíveis de continuidade, para os elementos triangulares e quadrilaterais, foram implementadas:



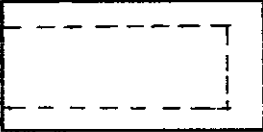
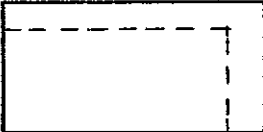
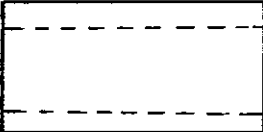
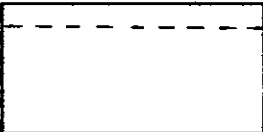


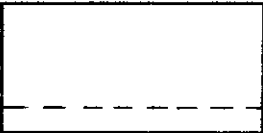

## ELEMENTO TRIANGULAR:

TIPO DE CONTINUIDADE	NÓS GEOMÉTRICOS  NÓS FUNCIONAIS 
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

## ELEMENTO QUADRILATERAL:

TIPO DE CONTINUIDADE	NÓS GEOMÉTRICOS  NÓS FUNCIONAIS 
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

## ELEMENTO QUADRILATERAL ( continuação )

TIPO DE CONTINUIDADE	NÓS GEOMÉTRICOS  NÓS FUNCIONAIS 
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	

## IV.5 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

As matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$  do sistema (IV.44) são obtidas determinando as matrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  do elemento dadas nas equações (IV.38) e (IV.37).

O cálculo analítico fechado destas matrizes é inviável, optando-se por uma integração numérica que varia de acordo com o ponto fonte  $\xi$  e o ponto campo  $x$  da seguinte forma:

a) Quando  $\xi \neq x$ , emprega-se a *integração numérica de Gauss* nas duas direções  $\eta_1$  e  $\eta_2$ . (integração não singular)

b) Quando  $\xi = x$ , é mais conveniente mudar a coordenada local  $(\eta_1, \eta_2)$  para coordenada cilíndrica  $(\rho, \theta)$  e empregar a *integração numérica de Gauss* em  $\theta$  e a *integração numérica de Kutt* em  $\rho$ . (integração singular)

Todo o procedimento empregado no cálculo das matrizes do elemento, será apresentado com base no elemento quadrilateral. As modificações necessárias à implementação do elemento triangular encontram-se na seção IV.5.3.

Os sistemas de coordenadas locais para os elementos quadrilateral e triangular estão indicados nas figuras IV.4 e IV.3, respectivamente.

## IV.5.1 - INTEGRAÇÃO NÃO SINGULAR

Na integração não singular o ponto fonte não se encontra no domínio de integração ( $\xi \notin \Gamma_1$ ). As matrizes do elemento, indicadas nas equações (IV.39) e (IV.40), são dadas por:

$$\underline{h} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.55})$$

$$\underline{g} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.56})$$

admitindo o domínio de integração indicado na figura IV.4.

Aplicando a integração numérica de Gauss na solução das matrizes do elemento tem-se:

$$\underline{h} = \sum_{l=1}^{N^g} \sum_{k=1}^{N^g} \left[ \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^l, \eta_2^k) \cdot |V| \, w_l \cdot w_k \right] \quad (\text{IV.57})$$

$$\underline{g} = \sum_{l=1}^{N^g} \sum_{k=1}^{N^g} \left[ \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^l, \eta_2^k) \cdot |V| \, w_l \cdot w_k \right] \quad (\text{IV.58})$$

Foi implementado um processo seletivo para a escolha do número de pontos de Gauss ( $N^g$ ) que baseia-se na distância relativa ( $D_{\min}$ ) do ponto fonte ao elemento campo. Quanto menor esta distância relativa maior será o número de pontos de integração.

Para melhorar a precisão nas integrais quase singulares, com um número menor de pontos de Gauss, foi efetuada a transformação de coordenadas dos pontos de integração, proposta por TELLES [16], dada abaixo:

$$\eta_i^{tr} = a_i \cdot v_i^3 + b_i \cdot v_i^2 + c_i \cdot v_i + d_i \quad i = 1,2 \quad (IV.59)$$

O jacobiano da transformação é:

$$J_i^{tr} = 3 \cdot a_i \cdot v_i^2 + 2 \cdot b_i \cdot v_i + c_i \quad (IV.60)$$

E os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  são dados por:

$$a_i = (1 - \bar{r}_i) / Q_i \quad (IV.61)$$

$$b_i = -3 \cdot (1 - \bar{r}_i) \cdot \bar{v}_i / Q_i \quad (IV.62)$$

$$c_i = (\bar{r}_i + 3 \cdot \bar{v}_i^2) / Q_i \quad (IV.63)$$

$$d_i = -b_i \quad (IV.64)$$

com:

$$Q_i = 1 + 3 \cdot \bar{v}_i^2 \quad (IV.65)$$

$$\bar{v}_i = \sqrt[3]{-q_i + \sqrt{(q_i^2 + p_i^3)}} + \sqrt[3]{-q_i - \sqrt{(q_i^2 + p_i^3)}} +$$

$$\frac{\bar{\eta}_i}{1 + 2 \cdot \bar{r}_i} \quad (IV.66)$$



$$q_i = \frac{1}{2 \cdot (1 + 2 \cdot \bar{r}_i)} \cdot \left[ \left[ \bar{\eta}_i \cdot (3 - 2 \cdot \bar{r}_i) - \frac{2 \cdot \bar{\eta}_i^2}{1 + 2 \cdot \bar{r}_i} \right] \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot \bar{r}_i} - \bar{\eta}_i \right] \quad (\text{IV.67})$$

$$p_i = \frac{1}{3 \cdot (1 + 2 \cdot \bar{r}_i)^2} \cdot \left[ 4 \cdot \bar{r}_i \cdot (1 - \bar{r}_i) + 3 \cdot (1 - \bar{\eta}_i^2) \right] \quad (\text{IV.68})$$

Segundo TELLES [16],  $\bar{\eta}_i$  corresponde a coordenada, no sistema local  $(\eta_1, \eta_2)$ , do ponto, sobre o elemento campo, que está mais próximo do ponto fonte  $\xi$ . A distância  $D_{\min}$  é tomada com relação a este ponto, porém, deve ser calculada no espaço real.

O parâmetro livre  $\bar{r}_i$  é definido como função de  $D_{\min}$  de modo a obter um erro mínimo na integração no sentido dos mínimos quadrados [16]:

$$\bar{r}_i = 0.85 + 0.24 \cdot \ln(D_i) \quad 0.05 \leq D_i \leq 1.30 \quad (\text{IV.69 a})$$

$$\bar{r}_i = 0.893 + 0.0832 \cdot \ln(D_i) \quad 1.30 \leq D_i \leq 3.618 \quad (\text{IV.69 b})$$

$$\bar{r}_i = 1 \quad 3.618 \leq D_i \quad (\text{IV.69 c})$$

onde o valor de  $D_{\min}$  é corrigido para que a otimização acima seja atendida [16]:

$$D_1 = 2 \cdot D_{\min} / |x(1, \bar{\eta}_2) - x(-1, \bar{\eta}_2)| \quad (\text{IV.70 a})$$

$$D_2 = 2 \cdot D_{\min} / |x(\bar{\eta}_1, 1) - x(\bar{\eta}_1, -1)| \quad (\text{IV.70 b})$$

A correção indicada nas equações (IV.70) é devido ao mapeamento do elemento, uma vez que as equações (IV.69) foram obtidas tomando-se o elemento como um quadrado de lado 2. O símbolo  $|x^1-x^2|$  significa a distancia entre dois pontos no espaço real.

Admitida a transformação das coordenadas dos pontos de Gauss dada pela equação (IV.59) as matrizes de elemento  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  ficam:

$$\underline{h} = \sum_{l=1}^{N^g} \sum_{k=1}^{N^g} \left[ \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(\eta_1^l, \eta_2^k) \cdot |V| W_l \cdot W_k \cdot J_1^{tr} \cdot J_2^{tr} \right] \quad (IV.71)$$

$$\underline{g} = \sum_{l=1}^{N^g} \sum_{k=1}^{N^g} \left[ \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(\eta_1^l, \eta_2^k) \cdot |V| W_l \cdot W_k \cdot J_1^{tr} \cdot J_2^{tr} \right] \quad (IV.72)$$

com  $J_i^{tr}$  dado pela equação (IV.60).

A transformação acima, ainda conforme TELLES [16], é útil apenas no intervalo  $D_i \leq 3.618$  ( $0 \leq \bar{r} \leq 1$ ). Sendo que, quando  $\bar{r} = 1$ , a transformação degenera em  $\eta_i^{tr} = v_i$  e  $J_i^{tr} = 1$ , ou seja, integração numérica de Gauss comum. Cabe observar que quando  $\bar{r}$  calculado nas equações (IV.69) for negativo, significa que o ponto fonte está demasiadamente próximo do elemento. Neste caso o programa é abortado, pois a precisão da integração numérica não é mais garantida.

## IV.5.2 - INTEGRAÇÃO SINGULAR

Na integração singular o ponto fonte pertence ao domínio de integração ( $\xi \in \Gamma_1$ ). As matrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  do elemento, indicadas nas equações (IV.39) e (IV.40), são:

$$\underline{h} = \underline{c}(\xi) \cdot \underline{\phi}^1(\xi) + \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.73})$$

$$\underline{g} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(\xi, \mathbf{x}) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.74})$$

admitindo o domínio de integração indicado na figura IV.4.

Considerando o coeficiente  $\underline{c}(\xi)$  dado pela equação (III.25) significa que a constante 0.5 é somada, após a integração, na diagonal principal da submatriz (3x3) correspondente ao ponto singular ( $\xi = \mathbf{x}$ ).

No cálculo das matrizes de elemento adotou-se o procedimento proposto por TELLES [16] que consiste em escrever as matrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$ , dadas nas equações (IV.38) e (IV.37), no sistema de coordenadas cilíndricas ( $\rho, \theta$ ) com origem no ponto fonte e integrar nos domínios triangulares indicados abaixo:

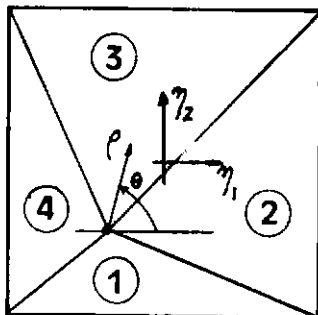


FIGURA IV.7 - Elemento quadrilátero dividido em triângulos.

A translação da origem do sistema de coordenadas para o ponto fonte se dá por:

$$\eta_1^i = \eta_1 - \eta_1^{pf} \quad ( IV.75 )$$

$$\eta_2^i = \eta_2 - \eta_2^{pf} \quad ( IV.76 )$$

onde  $\eta_1^{pf}$  e  $\eta_2^{pf}$  são as coordenadas do ponto fonte no sistema local  $(\eta_1, \eta_2)$  do elemento.

A transformação para coordenadas cilíndricas é obtidas pelas equações abaixo:

$$\rho = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} \quad ( IV.77 )$$

$$\theta = \arctan(\eta_1 / \eta_2) \quad ( IV.78 )$$

com o jacobiano dado por:

$$J' = \rho \quad ( IV.79 )$$

A transformação inversa é:

$$\eta_1 = \rho \cdot \cos(\theta) \quad ( IV.80 )$$

$$\eta_2 = \rho \cdot \sin(\theta) \quad ( IV.81 )$$

$$d\eta_1 d\eta_2 = \rho \cdot d\rho d\theta \quad ( IV.82 )$$

As matrizes do elemento são, então, dadas por:

$$\underline{\hat{h}} = \sum_{\Delta=1}^4 \left[ \begin{array}{c} \theta_f \int_{\theta_i}^{f(\theta)} \\ \theta_i \int_{\theta} \end{array} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \rho \cdot \underline{\phi}^1(x) \, d\rho d\theta \right] \quad (IV.83)$$

$$\underline{g} = \sum_{\Delta=1}^4 \left[ \begin{array}{c} \theta_f \int_{\theta_i}^{f(\theta)} \\ \theta_i \int_{\theta} \end{array} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \rho \cdot \underline{\phi}^1(x) \, d\rho d\theta \right] \quad (IV.84)$$

Nas equações acima se conclui que a presença de  $\rho$  no integrando elimina a singularidade da matriz  $\underline{g}$ , que é de ordem  $(1/r)$ , enquanto que a singularidade da matriz  $\underline{h}$ , que é mais forte - ordem  $(1/r^2)$  - fica reduzida a ordem  $(1/r)$ . O problema agora consiste em integrar a matriz  $\underline{h}$  (ordem  $1/r$ ) com relação a  $\rho$ . Segundo TELLES [16] a integração numérica de Kutt [3] apresenta bons resultados para este tipo de singularidade, sendo, portanto, empregada para a integração em  $\rho$ . Em  $\theta$  pode-se empregar a integração numérica de Gauss sem maiores problemas.

Admitindo-se a divisão indicada na figura IV.7 com os triângulos numerados no sentido anti-horário, sendo o triângulo 1 o que possui, na numeração local, os vértices 1 e 2 do elemento quadrilateral, os limites de integração para o triângulo 2 são:

em  $\theta$ :

$$\theta_i = \theta_2 = \arctan \left( \eta_2^{(2)} / \eta_1^{(2)} \right) \quad (IV.85)$$

$$\theta_f = \theta_3 = \arctan \left( \eta_2^{(2)} / \eta_1^{(2)} \right) \quad (IV.86)$$

em  $\rho$ :

$$\rho_i = 0 \quad ( IV.87 )$$

$$\rho_f = \eta_1^{(2)} \cdot \sec(\theta) = \eta_1^{(3)} \cdot \sec(\theta) \quad ( IV.88 )$$

com  $\eta_1^{(2)}$  a coordenada do nó 2 indicada na figura IV.7, no sistema local trasladado.

Deve-se observar que os limites de integração variam para cada triângulo. Um procedimento alternativo consiste em rotacionar as coordenadas dos vértices dos triângulos 1,3 e 4, de modo que o lado do elemento fique sempre paralelo ao eixo  $\eta_2^i$  e no lado positivo de  $\eta_1^i$ , tal qual o triângulo 2. Desse modo, os limites de integração em cada triângulo serão sempre dados pelas expressões (IV.85) a (IV.86) com as coordenadas  $\eta_1^i, \eta_2^i$  rotacionadas.

A rotação e a translação das coordenadas dos vértices dos triângulos podem ser feita simultaneamente do seguinte modo:

$$\begin{bmatrix} \eta_1^i \\ \eta_2^i \end{bmatrix} = \tilde{R} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1 - \eta_1^{pf} \\ \eta_2 - \eta_2^{pf} \end{bmatrix} \quad ( IV.89 )$$

São as seguintes as matrizes de rotação  $\tilde{R}$  para cada triângulo indicado na figura IV.7:

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.90})$$

$$\tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.91})$$

$$\tilde{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.92})$$

$$\tilde{R}_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.93})$$

A integração numérica de Gauss requer que os limites de integração sejam  $-1$  e  $1$ , portanto, é necessário uma nova transformação de coordenadas em  $\theta$  de modo que, para o triângulo 2, tenha-se:

$$\theta' = -1 \quad \text{em} \quad \theta = \theta_2$$

$$\theta' = 1 \quad \text{em} \quad \theta = \theta_3$$

ou seja,

$$\theta' = \frac{2 \cdot \theta - (\theta_2 + \theta_3)}{\theta_3 - \theta_2} \quad (\text{IV.94})$$

O jacobiano desta transformação é:

$$J_{\theta} = \frac{1}{2} \cdot (\theta_3 - \theta_2) \quad (\text{IV.95})$$

A transformação inversa é:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot \left[ (\theta_3 - \theta_2) \cdot \theta' + \theta_2 + \theta_3 \right] \quad (\text{IV.96})$$

Portanto, para o triângulo 2 tem-se:

$$\tilde{h}^{(2)} = \int_{-1}^1 \int_{\emptyset}^{f(\theta)} p^*(\xi, \kappa) \cdot \rho \cdot \xi^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot J_{\theta} \, d\rho d\theta \quad (\text{IV.97})$$

$$\tilde{g}^{(2)} = \int_{-1}^1 \int_{\emptyset}^{f(\theta)} \underline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \rho \cdot \xi^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot J_{\theta} \, d\rho d\theta \quad (\text{IV.98})$$

com  $f(\theta) = \eta_1^{(2)} \cdot \sec(\theta)$  e lembrando que a integração só estará completa quando somada a contribuição dos 4 triângulos.

Na equação (IV.97) a integral em  $\rho$  é de partes finitas [3]:

$$\int_s^b \frac{F(y)}{(y-s)} dy = \int_0^1 \frac{F[(b-s) \cdot t + s]}{t} dt + F(s) \cdot \ln|b-s| \quad (\text{IV.99})$$

A integração numérica, apresentada por Kutt [3], para integrais de partes finitas é:

$$\int_s^b \frac{F(y)}{(y-s)} dy = \sum_{k=1}^{N^k} F[(b-s) \cdot t_k + s] \cdot \omega_k + F(s) \cdot \ln|b-s| \quad (\text{IV.100})$$

onde  $t_k$  e  $\omega_k$  são, respectivamente, as coordenadas dos pontos de integração e os pesos associados.  $N^k$  é o número total de pontos de integração de Kutt.



Adotando-se a idéia de partes finitas também para a matriz  $g$ , a integral em  $\rho$  nas equações (IV.97) e (IV.98), já que  $\epsilon=0$ , fica na forma:

$$f(\theta) \int_0^{f(\theta)} \frac{F(y)}{(y-s)} dy = \sum_{k=1}^{N^k} F(f(\theta) \cdot t_k) \cdot \omega_k + F(0) \cdot \ln|f(\theta)| \quad (IV.101)$$

com  $F(y) = \underline{p}^* \cdot \underline{g} \cdot |V| \cdot \rho \cdot y$  em  $\underline{h}$  e  $F(y) = \underline{u}^* \cdot \underline{g} \cdot |V| \cdot \rho \cdot y$  em  $\underline{g}$

ou seja, o integrando fica multiplicado e dividido por  $y$ .

Uma particularidade desta integração, observada por TELLES [16] é que um ponto da integração de Kutt fica fora do intervalo de integração, isto é, menor que zero. Sendo assim, considerando-se  $\rho = |y|$  a integral pode ser calculada numericamente.

O termo  $F(0)$ , indicado na equação (IV.101), na matriz  $\underline{h}$  é de ordem  $(\rho \cdot y/r^2)$  e na matriz  $\underline{g}$  é de ordem  $(\rho \cdot y/r)$ , o que significa que:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\rho \cdot y}{r^2} \neq 0 \quad (IV.102)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\rho \cdot y}{r} = 0 \quad (IV.103)$$

consequentemente, em  $\underline{g}$  o termo  $F(0) \cdot \ln|f(\theta)|$  é nulo.

Uma forma de calcular o limite de  $F(\theta)$  em  $\underline{h}$  é definir um elemento plano fictício tangente ao elemento fonte no ponto singular, de modo que o vetor normal calculado no ponto singular seja constante ao longo deste elemento.

Com esta consideração calcula-se as derivadas  $r_{,i}$  no ponto singular, dadas na equação (III.13), que são as mesmas tanto para o elemento plano como, no limite, para o elemento fonte.

Para o cálculo das derivadas  $r_{,i}$  basta definir um ponto qualquer na direção  $\rho$  no elemento plano e calcular suas coordenadas. Admite-se então, que o ponto, no sistema de coordenadas local do elemento  $(\eta_1, \eta_2)$ , corresponda a  $\rho=1$ . Portanto, suas coordenadas, neste sistema, são:

$$\eta_1^{ep} = \eta_1^{pf} + \cos\theta' \quad (IV.104a)$$

$$\eta_2^{ep} = \eta_2^{pf} + \text{sen}\theta' \quad (IV.104b)$$

Lembrando a rotação dos triângulos as equações acima ficam:

$$\begin{bmatrix} \eta_1^{ep} \\ \eta_2^{ep} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1^{pf} \\ \eta_2^{pf} \end{bmatrix} + \underset{\sim}{R}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta' \\ \text{sen}\theta' \end{bmatrix} \quad (IV.105)$$

onde  $\underset{\sim}{R}^{-1}$  corresponde a inversa da matriz de rotação dada nas equações (IV.90) a (IV.93), uma vez que a rotação dos triângulos já foi considerada.

O ponto de coordenadas  $(\eta_1^{ep}, \eta_2^{ep})$  no sistema de coordenadas locais  $(\eta_1, \eta_2)$ , pertence ao elemento plano. Suas coordenadas, no sistema de coordenadas globais trasladado para a origem no ponto fonte, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} x_1^{ep} \\ x_2^{ep} \\ x_3^{ep} \end{bmatrix} = \underline{\underline{J}} \cdot \begin{bmatrix} \eta_1^{ep} - \eta_1^{pf} \\ \eta_2^{ep} - \eta_2^{pf} \end{bmatrix} \quad (IV.106)$$

onde  $\underline{\underline{J}}$  é a matriz que relaciona o sistema de coordenadas globais  $(x_1, x_2, x_3)$  com o sistema de coordenadas locais  $(\eta_1, \eta_2)$ , indicada na equação (IV.20) e calculada no ponto singular, uma vez que  $\underline{\underline{J}}$  é constante ao longo de todo o elemento plano. A matriz  $\underline{\underline{J}}$  é determinada pela equação (IV.21). Daí, tem-se que, no limite, para o ponto singular é válido:

$$r_{,i} = \frac{x_i^{ep}}{r^{ep}} \quad (IV.107)$$

com:

$$r^{ep} = \sqrt{(x_1^{ep})^2 + (x_2^{ep})^2 + (x_3^{ep})^2} \quad (IV.108)$$

Ainda com relação à integração da matriz  $\underline{\underline{h}}$  no sentido do valor principal de Cauchy. Cabe observar que quando se trata de elemento descontínuo, a integração no sentido do valor principal de Cauchy é atendida, uma vez que a singularidade não está nos limites do elemento ( $|\eta_i(\xi)| < 1$ ).

Tratando-se de um elemento contínuo o mesmo não se verifica, porque a integração é efetuada sobre elementos adjacentes separadamente. Neste caso a integral é apenas de partes finitas.

A solução para tal problema requer a adição do termo logarítmico, referente à mudança de escala do intervalo de integração, na equação (IV.101). Segundo TELLES [17], tal solução pode ser conseguida através do elemento plano fictício, adicionando-se o termo  $F(\theta) \cdot \ln|r^{ep}|$  à equação (IV.101), com  $r^{ep}$  dado na equação (IV.108). Convém observar que esta adição não altera o valor da integração sobre elementos descontínuos, já que a mesma mudança é efetuada para qualquer valor de  $\theta$ .

Admitidas todas as considerações anteriores, as matrizes do elemento  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  ficam:

$$\underline{h} = \underline{c}(\xi) \cdot \frac{4}{L} \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{\theta}^{f(\theta)} \frac{1}{y} \cdot \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\xi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot \rho \cdot y \, dy \right. \\ \left. + \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y \cdot \rho \cdot \underline{p}^*(\xi, x) \right] \cdot \underline{\xi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot \ln|f(\theta) \cdot r^{ep}| \right] \cdot J^\theta \, d\theta \quad (IV.109)$$

$$\underline{g} = \frac{4}{L} \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{\theta}^{f(\theta)} \frac{1}{y} \cdot \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\xi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot \rho \cdot y \cdot J^\theta \, dy d\theta \right]$$

( IV.110 )

Integrando numericamente as equações acima ficam:

$$\underline{h} = \underline{c}(\xi) +$$

$$\sum_{\Delta=1}^4 \left[ \sum_{\ell=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N \left[ \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot y \cdot |y| \cdot W_k \right] \cdot J^\theta \cdot W_\ell \right] \right] +$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left[ y \cdot |y| \cdot \underline{p}^*(\xi, x) \right] \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot J^\theta \cdot W_\ell \cdot \ln |f(\theta_\ell) \cdot r^{ep}| \left] \right] \quad (IV.111)$$

$$\underline{g} = \sum_{\Delta=1}^4 \left[ \sum_{\ell=1}^N \left[ \sum_{k=1}^N \left[ \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \cdot y \cdot |y| \cdot W_k \right] \cdot J^\theta \cdot W_\ell \right] \right] \quad (IV.112)$$

com:

$$y = f(\theta) \cdot t_k = \eta_1^{(2)} \cdot \sec(\theta_\ell) \cdot t_k \quad (IV.113)$$

e

$$\theta_\ell = \frac{1}{2} \cdot \left[ (\theta_3 - \theta_2) \cdot \eta_\ell + \theta_2 + \theta_3 \right] \quad (IV.114)$$

onde  $\eta_\ell$  e  $W_\ell$  são, respectivamente, a coordenada do ponto de integração de Gauss e o peso correspondente.

## IV.5.3 - ELEMENTO TRIANGULAR

A implementação do elemento triangular foi feita seguindo a transformação indicada por TELLES [15].

Para a integração sobre o elemento triangular as integrais são transformadas do seguinte modo:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta_2} f(\eta_1, \eta_2) d\eta_1 d\eta_2 = \frac{1}{8} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(v_1, v_2) \cdot (v_1 + 1) dv_1 dv_2$$

( IV.115 )

onde a relação entre as coordenadas triangular  $\eta_1$  e retangular  $v_1$  é dada por:

$$v_1 = 2 \cdot (\eta_1 + \eta_2) - 1 \quad ( IV.116 )$$

$$v_2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad ( IV.117 )$$

$$\eta_1 = \frac{1}{4} \cdot (v_1 + 1) \cdot (1 - v_2) \quad ( IV.118 )$$

$$\eta_2 = \frac{1}{4} \cdot (v_1 + 1) \cdot (1 + v_2) \quad ( IV.119 )$$

com o Jacobiano dado por:

$$J = \frac{1}{8} \cdot (v_1 + 1) \quad ( IV.120 )$$

Esta transformação significa que o nó geométrico 1 (figura IV.3), de coordenada  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ , é transformado no lado do elemento quadrilateral mapeado de coordenada  $\nu_1 = -1$ .

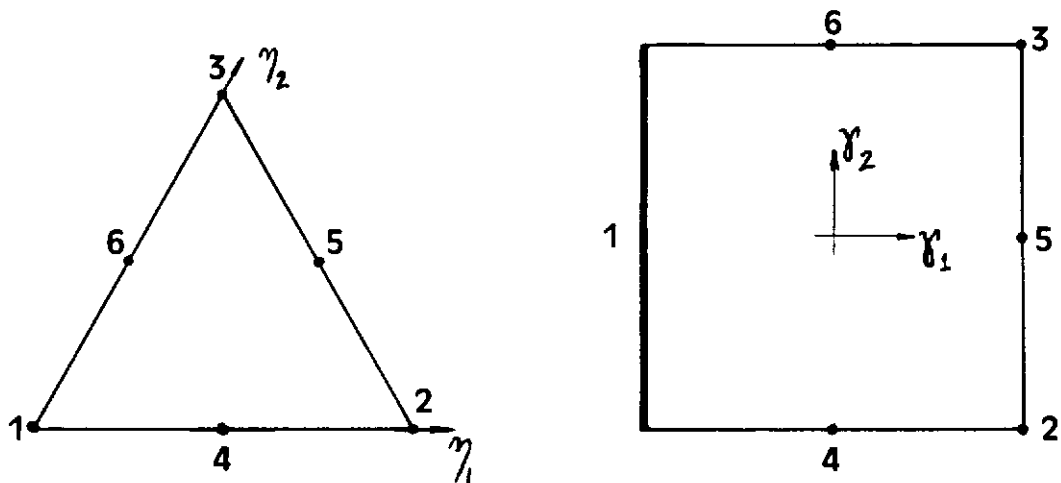


FIGURA IV.8 - Elemento triangular mapeado em quadrilateral.

A transformação indicada na equação (IV.115) possibilita adotar para o elemento triangular o mesmo procedimento empregado na integração numérica (singular e não singular) do elemento quadrilateral. A única diferença é efetuar a transformação de coordenada triangular para coordenada retangular quando necessário.

No caso da integração quase singular, convém observar que, quando o ponto mais próximo do ponto fonte for o nó geométrico 1, a integração na direção  $\nu_2$  fica com domínio nulo. Portanto, a transformação de coordenada indicada na equação (IV.59) é desativada nesta direção. Mesmo assim, a precisão da integral não é prejudicada porque a transformação dada na equação (IV.115) produz um jacobiano igual a zero, em  $\nu_1 = -1$ , como se pode ver na equação (IV.120).

No caso da integração singular, o elemento quadrilateral mapeado é também dividido em quatro triângulos e integrado usando a coordenada cilíndrica do mesmo modo que o elemento quadrilateral. Entretanto, o cálculo das derivadas das coordenadas globais  $(x_1, x_2, x_3)$ , em relação às coordenadas locais  $(\gamma_1, \gamma_2)$ , são dadas por:

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma_1} = \frac{\partial x}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \cdot \frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_1} \quad ( IV.121 )$$

$$\frac{\partial x}{\partial \gamma_2} = \frac{\partial x}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_2} + \frac{\partial x}{\partial \eta_2} \cdot \frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_2} \quad ( IV.122 )$$

As equações (IV.121) e (IV.122) são empregadas no cálculo da matriz  $\underline{J}$ , indicada na equação (IV.106), quando o elemento fonte for triangular.

As derivadas das coordenadas globais em relação às coordenadas locais triangulares são dadas pela equação (IV.21). E as derivadas das coordenadas locais triangulares em relação às coordenadas locais retangulares são dadas por:

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_1} = \frac{1}{4} \cdot ( 1 - \gamma_2 ) \quad ( IV.123 )$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_1} = \frac{1}{4} \cdot ( 1 + \gamma_2 ) \quad ( IV.124 )$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial \gamma_2} = - \frac{1}{4} \cdot ( \gamma_1 + 1 ) \quad ( IV.125 )$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial \gamma_2} = \frac{1}{4} \cdot ( \gamma_1 + 1 ) \quad ( IV.126 )$$



## IV.6 - DESLOCAMENTOS NO DOMÍNIO

Uma vez determinados os deslocamentos  $\underline{u}$  e forças de superfície  $\underline{p}$  em todo o contorno  $\Gamma$ , os deslocamentos nos pontos internos são calculados pela *identidade de Somigliana*, equação (III.9), que na forma discretizada é:

$$\underline{u}(\xi) = \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{p}(x) \, d\Gamma(x) \right] - \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{u}(x) \, d\Gamma(x) \right]$$

( IV.127 )

Admitindo as aproximações dadas pelas equações (IV.2) e (IV.3), a equação (IV.127) fica:

$$\underline{u}(\xi) = \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{p}^1(x) \, d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{p}^1 -$$

$$\sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{p}^1(x) \, d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{u}^1 \quad ( IV.128 )$$

Tomando as matrizes de elemento  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  dadas por:

$$\underline{h} = \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, x) \cdot \underline{p}^1(x) \, d\Gamma(x) \quad ( IV.129 )$$

$$\underline{g} = \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, x) \cdot \underline{p}^1(x) \, d\Gamma(x) \quad ( IV.130 )$$

a equação (IV.128) pode ser escrita na forma:

$$\underline{u}(\xi) = \underline{G}^i \underline{p} - \underline{H}^i \underline{u} \quad (\text{IV.131})$$

onde as matrizes  $\underline{H}^i$  e  $\underline{G}^i$  são obtidas pelas matrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$ , respectivamente, dadas anteriormente, de maneira análoga ao sistema dado na equação (IV.44).

Considerando o sistema de coordenadas locais dos elementos que discretizam do contorno, as matrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  ficam:

$$\underline{h} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.132})$$

$$\underline{g} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.133})$$

admitindo um elemento quadrilateral, com domínio de integração indicado na figura IV.3.

As integrais acima são obtidas numericamente pela integração de Gauss:

$$\underline{h} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \underline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^\ell, \eta_2^\kappa) \cdot |V| \cdot W_\ell \cdot W_\kappa \right] \quad (\text{IV.134})$$

$$\underline{g} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \underline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^\ell, \eta_2^\kappa) \cdot |V| \cdot W_\ell \cdot W_\kappa \right] \quad (\text{IV.135})$$

O procedimento empregado na resolução das equações (IV.134) e (IV.135) é o mesmo descrito na seção IV.5.1, uma vez que a integração é sempre não singular ( $\xi \notin \Gamma_1$ ).

Portanto, as matrizes  $\underline{h}$  e  $\underline{g}$  ficam:

$$\underline{h} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \underline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^\ell, \eta_2^\kappa) \cdot |V| \cdot W_\ell \cdot W_\kappa \cdot J_1^{\text{tr}} \cdot J_2^{\text{tr}} \right] \quad (\text{IV.136})$$

$$\underline{g} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \underline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^\ell, \eta_2^\kappa) \cdot |V| \cdot W_\ell \cdot W_\kappa \cdot J_1^{\text{tr}} \cdot J_2^{\text{tr}} \right] \quad (\text{IV.137})$$

Para o elemento triangular o procedimento é o mesmo descrito na seção IV.5.3.

#### IV.7 - TENSÕES NO DOMÍNIO

As tensões nos pontos internos são calculadas pela equação (III.30), que na forma discretizada é:

$$\underline{g}(\xi) = \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{p}(\kappa) \, d\Gamma(\kappa) \right] - \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{u}(\kappa) \, d\Gamma(\kappa) \right]$$

( IV.138 )

onde os tensores  $\underline{u}^*(\xi, \kappa)$  e  $\underline{p}^*(\xi, \kappa)$  são dados, respectivamente, pelas equações (III.31) e (III.32).

Admitindo as aproximações dadas pelas equações (IV.2) e (IV.3), a equação (IV.138) fica:

$$\underline{g}(\xi) = \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{\bar{u}}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{p}^l - \sum_{l=1}^L \left[ \int_{\Gamma_1} \underline{\bar{p}}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \right] \cdot \underline{u}^l \quad (\text{IV.139})$$

Conhecidos os valores dos deslocamentos  $\underline{u}$  e forças de superfície  $\underline{p}$  em todo o contorno  $\Gamma$ , a equação (IV.138) pode ser escrita na forma:

$$\underline{g}(\xi) = \underline{S} \cdot \underline{p} - \underline{T} \cdot \underline{u} \quad (\text{IV.140})$$

onde as matrizes  $\underline{S}$  e  $\underline{T}$  são obtidas, de maneira análoga às matrizes  $\underline{H}$  e  $\underline{G}$ , pelas matrizes de elemento  $\underline{s}$  e  $\underline{t}$  dadas abaixo:

$$\underline{t} = \int_{\Gamma_1} \underline{\bar{p}}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \quad (\text{IV.141})$$

$$\underline{s} = \int_{\Gamma_1} \underline{\bar{u}}^*(\xi, x) \cdot \underline{\phi}^l(x) d\Gamma(x) \quad (\text{IV.142})$$

Para o sistema de coordenadas locais dos elementos que discretizam do contorno, as matrizes  $\underline{t}$  e  $\underline{s}$  ficam:

$$\underline{t} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \overline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.143})$$

$$\underline{s} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \overline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1, \eta_2) \cdot |V| \, d\eta_1 d\eta_2 \quad (\text{IV.144})$$

admitindo um elemento quadrilateral, com domínio de integração indicado na figura IV.3.

As matrizes de elemento  $\underline{t}$  e  $\underline{s}$  são obtidas pela integração numérica de Gauss:

$$\underline{t} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \overline{p}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^\ell, \eta_2^\kappa) \cdot |V| \cdot W_\ell \cdot W_\kappa \right] \quad (\text{IV.145})$$

$$\underline{s} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \overline{u}^*(\xi, \kappa) \cdot \underline{\phi}^1(\eta_1^\ell, \eta_2^\kappa) \cdot |V| \cdot W_\ell \cdot W_\kappa \right] \quad (\text{IV.146})$$

Para o cálculo das matrizes acima, foi também empregada a transformação de coordenadas, desenvolvida por TELLES [16], para integrais quase singulares (a integração é sempre não singular). Portanto, o procedimento empregado na resolução das equações (IV.145) e (IV.146) é o mesmo descrito na seção IV.3.1. As matrizes  $\underline{t}$  e  $\underline{s}$  são, então, dadas por:

$$\underline{t} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \bar{P}^{\kappa}(\xi, \kappa) \cdot \phi^1(\eta_1^{\ell}, \eta_2^{\kappa}) \cdot |V| \cdot W_{\ell} \cdot W_{\kappa} \cdot J_1^{\text{tr}} \cdot J_2^{\text{tr}} \right] \quad (\text{IV.147})$$

$$\underline{s} = \sum_{\ell=1}^{N^g} \sum_{\kappa=1}^{N^g} \left[ \bar{U}^{\kappa}(\xi, \kappa) \cdot \phi^1(\eta_1^{\ell}, \eta_2^{\kappa}) \cdot |V| \cdot W_{\ell} \cdot W_{\kappa} \cdot J_1^{\text{tr}} \cdot J_2^{\text{tr}} \right] \quad (\text{IV.148})$$

onde as coordenadas dos pontos de integração de Gauss,  $(\eta_1^{\ell}, \eta_2^{\kappa})$ , são transformadas pela equação (IV.59) e o jacobiano  $J_i^{\text{tr}}$  dado pela equação (IV.60).

Para o elemento triangular o procedimento é o mesmo descrito na seção IV.5.3.

#### IV.8 - TENSÕES NO CONTORNO

O cálculo das tensões do contorno requer um sistema de coordenadas locais  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , para o elemento, em que os tres eixos sejam ortogonais, tal como indicado na seção III.8.

Este sistema de eixo local é determinado tomando o eixo  $\bar{x}_3$  normal ao elemento e fazendo com que o eixo  $\bar{x}_1$  coincida com o eixo  $\eta_1$  da coordenada local do elemento, seja ele triangular ou quadrilateral. Sendo assim tem-se:

$$\bar{\underline{x}}_3 = \frac{\underline{\eta}_1 \times \underline{\eta}_2}{|\underline{\eta}_1 \times \underline{\eta}_2|} \quad ( \text{IV.149} )$$

$$\bar{\underline{x}}_1 = \frac{\underline{\eta}_1}{|\underline{\eta}_1|} \quad ( \text{IV.150} )$$

$$\bar{\underline{x}}_2 = \frac{\bar{\underline{x}}_1 \times \bar{\underline{x}}_3}{|\bar{\underline{x}}_1 \times \bar{\underline{x}}_3|} \quad ( \text{IV.151} )$$

As equações acima determinam os vetores unitários que definem o sistema local de eixos ortogonais para o elemento, atendendo a regra da mão direita

As componentes dos deslocamentos e forças da superfície no sistema local  $(\bar{\underline{x}}_1, \bar{\underline{x}}_2, \bar{\underline{x}}_3)$  são dadas por:

$$\bar{\underline{u}} = \underline{R} \cdot \underline{u} \quad ( \text{IV.152} )$$

$$\bar{\underline{p}} = \underline{R} \cdot \underline{p} \quad ( \text{IV.153} )$$

A matriz de rotação  $\underline{R}$  é determinada pelos cossenos diretores dos vetores unitários  $(\bar{\underline{x}}_1, \bar{\underline{x}}_2, \bar{\underline{x}}_3)$ , atendendo as equações (IV.149) a (IV.151), do seguinte modo:

$$\bar{\underline{x}}_1 = \frac{\left[ \frac{\partial \kappa_1}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \kappa_2}{\partial \eta_1}, \frac{\partial \kappa_3}{\partial \eta_1} \right]}{\sqrt{\left[ \frac{\partial \kappa_1}{\partial \eta_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \kappa_2}{\partial \eta_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \kappa_3}{\partial \eta_1} \right]^2}} = ( R_{11}, R_{12}, R_{13} ) \quad ( \text{IV.154} )$$

$$\bar{x}_3 = \frac{[a, b, c]}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = (R_{31}, R_{32}, R_{33}) \quad (\text{IV.155})$$

com

$$a = \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2}$$

$$b = \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2}$$

$$c = \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2}$$

e, finalmente,

$$\bar{x}_2 = (R_{21}, R_{22}, R_{23}) \quad (\text{IV.156})$$

com:

$$R_{21} = R_{13} \cdot R_{32} - R_{12} \cdot R_{33}$$

$$R_{22} = R_{11} \cdot R_{33} - R_{13} \cdot R_{31}$$

$$R_{23} = R_{12} \cdot R_{31} - R_{11} \cdot R_{32}$$

Os componentes  $\bar{\sigma}_{13}$ ,  $\bar{\sigma}_{23}$  e  $\bar{\sigma}_{33}$  do tensor de tensão, no sistema  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ , são determinados pelas equações (III.34) a (III.36), com a rotação das forças de superfície dada pela equação (IV.153).

As componentes  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{12}$  e  $\bar{\sigma}_{22}$  são obtidas substituindo a equação (III.40) nas equações (III.37) a (III.39):



$$\bar{\sigma}_{12} = G \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_2} - \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_1} \right] \quad (\text{IV.157})$$

$$\bar{\sigma}_{11} = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} \right] + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \quad (\text{IV.158})$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} \right] + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \quad (\text{IV.159})$$

As derivadas das componentes dos deslocamentos  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  e  $\bar{u}_3$ , com relação às coordenadas locais  $\eta_1$  e  $\eta_2$ , são determinadas pelas funções de interpolação da seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_1} = \sum_{n=1}^{N^1} \frac{\partial \phi^{ln}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_1} \cdot \bar{u}^{ln} \cdot \sqrt{\left[ \frac{\partial \kappa_1}{\partial \eta_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \kappa_2}{\partial \eta_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \kappa_3}{\partial \eta_1} \right]^2} \quad (\text{IV.160})$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_2} = \sum_{n=1}^{N^1} \frac{\partial \phi^{ln}(\eta_1, \eta_2)}{\partial \eta_2} \cdot \bar{u}^{ln} \cdot \sqrt{\left[ \frac{\partial \kappa_1}{\partial \eta_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \kappa_2}{\partial \eta_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial \kappa_3}{\partial \eta_2} \right]^2} \quad (\text{IV.161})$$

A derivada dos deslocamentos  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  e  $\bar{u}_3$ , com relação à coordenada  $\bar{x}_1$ , é dada por:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_1} \quad (\text{IV.162})$$

A derivada dos deslocamentos  $\bar{u}_1, \bar{u}_2$  e  $\bar{u}_3$ , com relação a coordenada  $\bar{x}_2$ , é calculada pela equação:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_2} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_1} \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta_2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_2} \cdot \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \eta_2} \quad (\text{IV.163})$$

escrita na seguinte forma:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_2} = \left[ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta_2} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}_1} \cdot \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta_2} \right] \cdot \frac{1}{\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \eta_2}} \quad (\text{IV.164})$$

com:

$$\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \eta_2} = \frac{\left[ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} + \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} + \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \right]}{\sqrt{\left[ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_3}{\partial \eta_1} \right]^2}} \cdot \sqrt{\left[ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \right]^2} \quad (\text{IV.165})$$

$$\frac{\partial \bar{x}_2}{\partial \eta_2} = \frac{\left[ R_{21} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} + R_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} + R_{23} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \right]}{\sqrt{\left[ \frac{\partial x_1}{\partial \eta_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_2}{\partial \eta_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial x_3}{\partial \eta_2} \right]^2}} \quad (\text{IV.166})$$

A derivada  $\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3}$  é obtida substituindo a equação (III.40) na equação (II.12):

$$\bar{\sigma}_{33} = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \right] + (\lambda + 2 \cdot G) \cdot \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} \quad (\text{IV.167})$$

A equação acima pode ser reordenada da seguinte forma:

$$\lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} + \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial \bar{x}_3} \right] = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \right] + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \bar{\sigma}_{33} \quad (\text{IV.168})$$

de modo que as tensões  $\bar{\sigma}_{11}$  e  $\bar{\sigma}_{22}$  podem ser dadas por:

$$\bar{\sigma}_{11} = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \right] + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \bar{\sigma}_{33} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} \quad (\text{IV.169})$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \lambda \cdot \left[ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \bar{x}_1} + \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \right] + \frac{\nu}{(1 - \nu)} \cdot \bar{\sigma}_{33} + 2 \cdot G \cdot \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} \quad (\text{IV.170})$$

com:

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \quad (\text{IV.171})$$

e

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (\text{IV.172})$$

As tensões no contorno no sistema global são obtidas pela equação (III.41).

## CAPÍTULO V

### APLICAÇÕES

#### V.I - INTRODUÇÃO

O programa MEC3DE, desenvolvido neste trabalho, foi testado com vários exemplos. Em todos eles ficou comprovada a sua eficiência e a precisão dos resultados obtidos.

Este capítulo apresenta algumas aplicações onde são comparados os resultados com as soluções analíticas e com as obtidas com o método dos elementos finitos.

#### V.II - PRISMA TRACIONADO

Este exemplo consiste de um prisma de base quadrada com 5 m de lado e 10 m de altura onde, na face superior, foi aplicada uma carga uniforme de 1 tf/m<sup>2</sup> na direção de  $x_2$ , tal como indicado na figura V.1a. Na face inferior, foi restringido o deslocamento na direção de  $x_2$ . Para evitar movimentos de corpo rígido foi restringido o deslocamento na direção  $x_3$ , na face frontal, e na direção  $x_1$ , numa face lateral.

Para o material foi adotado:

$$E = 21 \cdot 10^5 \text{ tf/m}^2$$

$$\nu = 0.15$$

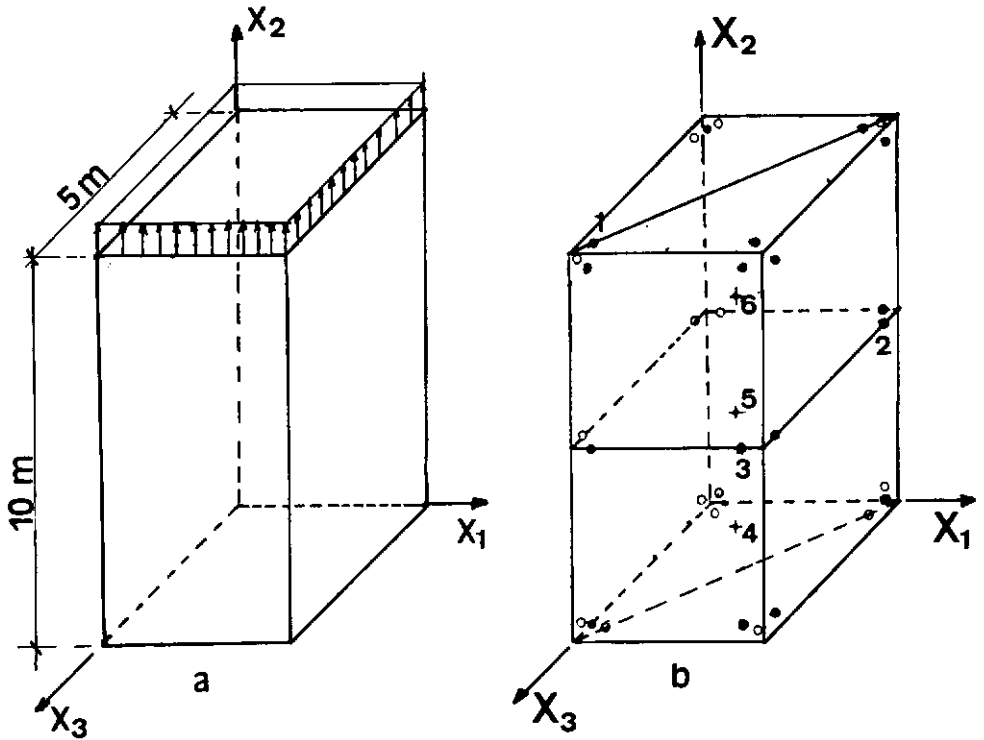


FIGURA V.1 - a) Prisma tracionado.

b) Modelagem do problema.  
( 12 elementos )

Trata-se de um exemplo bastante simples mas, por ter solução exata [8], pode-se constatar a precisão dos resultados. Todos os elementos implementados neste trabalho foram testados com este exemplo.

Os resultados obtidos com a malha indicada na figura V.1b (32 nós funcionais) são mostrados a seguir. Os elementos empregados foram triangulares e quadrilaterais lineares. As tabelas abaixo mostram os resultados em alguns pontos do contorno e do domínio, entretanto, uma maior comparação com a solução exata pode ser feita através dos gráficos apresentados em seguida.

## DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO CONTORNO:

	NÓ	1	2	3
$U_{x_1}$	MEC3DE	-9.0414 E-8	-3.5711 E-7	-2.6731 E-7
	EXATO	-8.9286 E-8	-3.5714 E-7	-2.6786 E-7
$U_{x_2}$	MEC3DE	4.7637 E-6	2.3815 E-6	2.3827 E-6
	EXATO	4.7619 E-6	2.3809 E-6	2.3809 E-6
$U_{x_3}$	MEC3DE	-2.6762 E-7	-8.8975 E-8	-3.5698 E-7
	EXATO	-2.6786 E-7	-8.9286 E-8	-3.5714 E-7

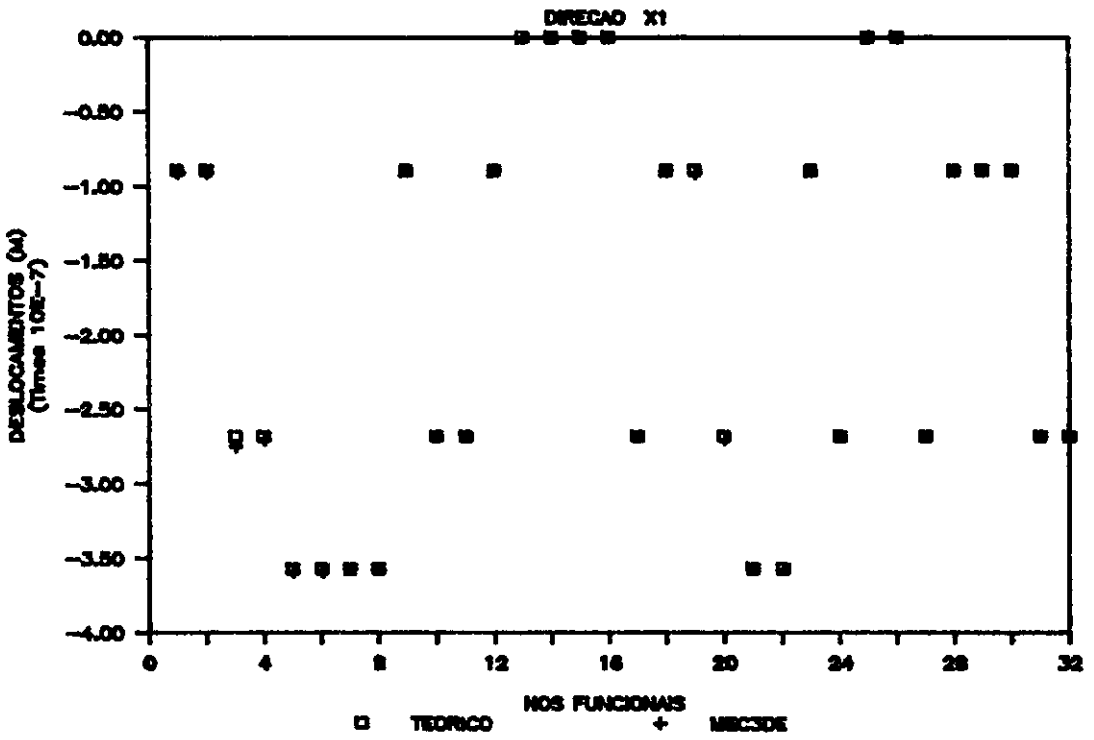
	NÓ	1	2	3
$\sigma_{11}$	MEC3DE	-4.7403 E-3	0	4.0339 E-4
	EXATO	0	0	0
$\sigma_{22}$	MEC3DE	1.0000	1.0008	1.0016
	EXATO	1	1	1

## DESLOCAMENTOS E TENSÕES NO DOMÍNIO:

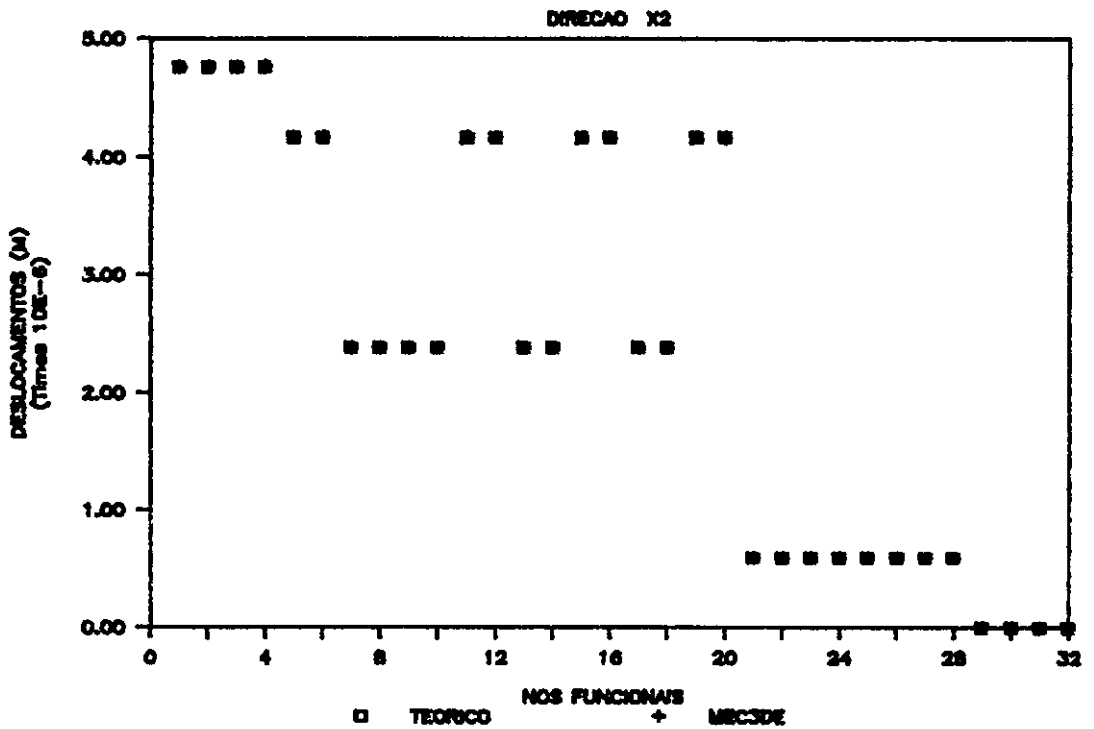
	NÓ	4	5	6
$U_{x_1}$	MEC3DE	-1.7856 E-7	1.1770 E-6	-1.7857 E-7
	EXATO	-1.7857 E-7	1.1905 E-6	-1.7857 E-7
$U_{x_2}$	MEC3DE	-1.7866 E-7	2.3812 E-6	-1.7854 E-7
	EXATO	-1.7857 E-7	2.3810 E-6	-1.7857 E-6
$U_{x_3}$	MEC3DE	-1.7900 E-7	3.5882 E-6	-1.7856 E-7
	EXATO	-1.7857 E-7	3.5714 E-6	-1.7857 E-7

	NÓ	4	5	6
$\sigma_{11}$	MEC3DE	-1.4872 E-4	1.7018 E-4	-3.0033 E-3
	EXATO	0	0	0
$\sigma_{22}$	MEC3DE	1.0008	1.0001	1.0119
	EXATO	1	1	1

## DESLOCAMENTOS NO CONTORNO

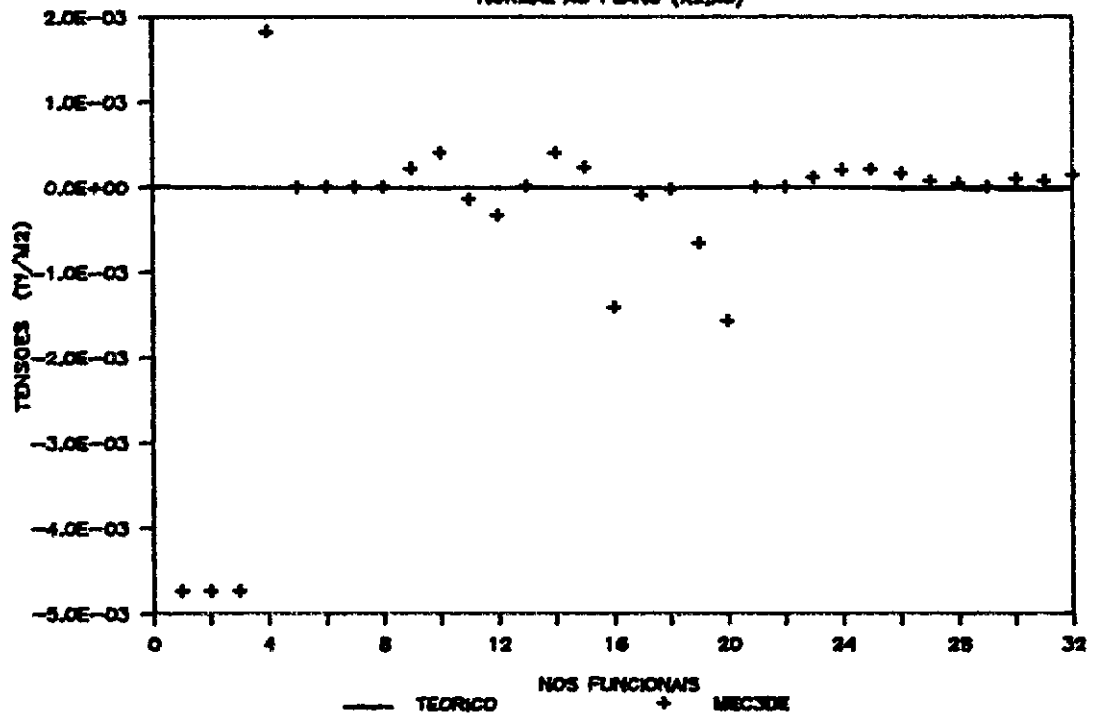


## DESLOCAMENTOS NO CONTORNO



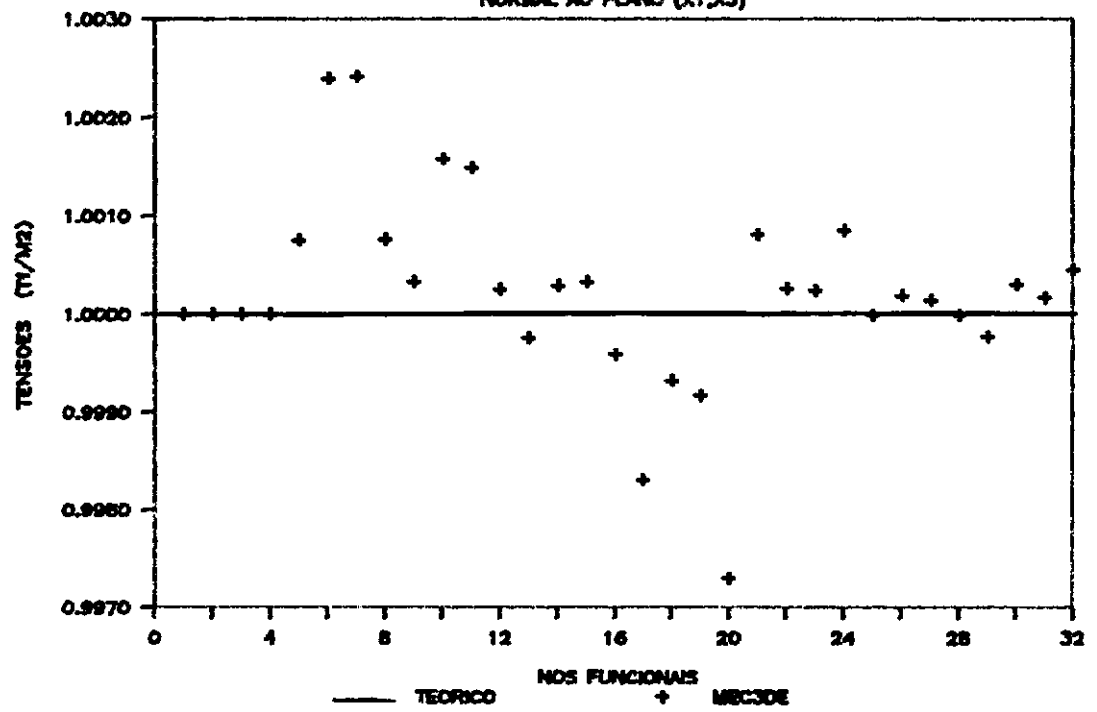
### TENSAO T<sub>xx</sub> NO CONTORNO

NORMAL AO PLANO (X2,X3)



### TENSAO T<sub>yy</sub> NO CONTORNO

NORMAL AO PLANO (X1,X3)





### V.3 - CILINDRO DE PAREDE ESPESSA SOB PRESSÃO INTERNA:

Trata-se de um cilindro de parede espessa, com raio interno de 10 mm e raio externo de 20 mm, submetido a uma pressão interna de 2 N/mm<sup>2</sup>. Para o material foi admitido:

$$E = 20.000 \text{ N/mm}^2 \quad e \quad \nu = 0.20.$$

Para a análise foi considerado um setor de 90°, restringido os deslocamentos nos planos de simetria, nas direções perpendiculares  $x_1$  e  $x_3$ . Para simular o estado plano de deformação foi restringido o deslocamento na direção  $x_2$ , nas faces superior e inferior.

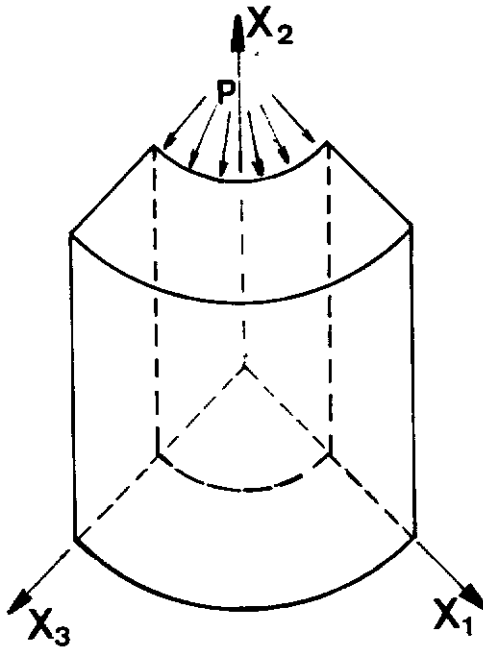


FIGURA V.2 - Cilindro de parede espessa.

As duas malhas, indicadas na figura V.3, foram usadas na discretização do cilindro. Nas duas foi empregado o elemento quadrilateral quadrático. Os resultados obtidos nos dois casos comprovam a convergência do método.

Os resultados apresentados correspondem ao ângulo  $\theta = 45^\circ$  [18].

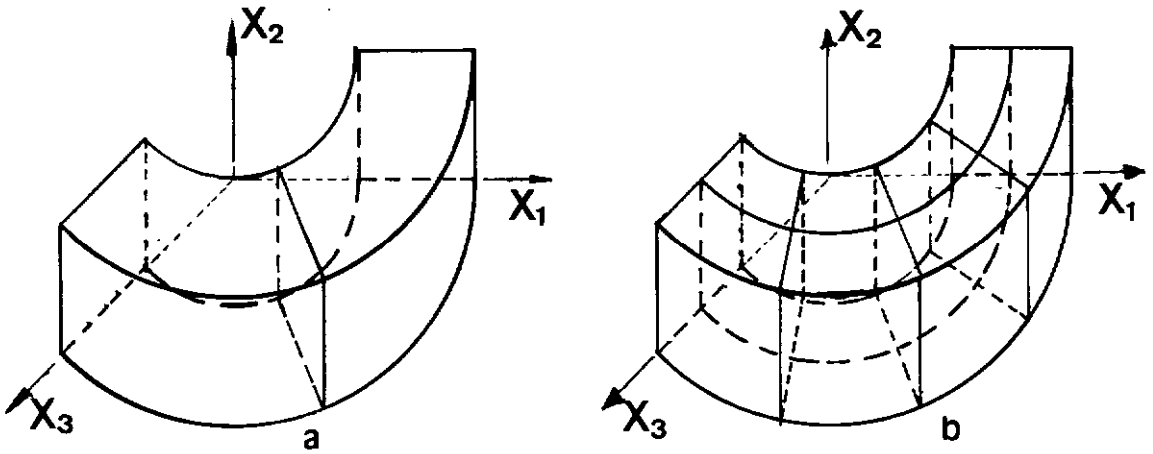


FIGURA V.3 - a) Malha 1: 10 elementos. b) Malha 2: 28 elementos.

MALHA 1:

RAIO		$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$
10.0	MEC3DE	1.9057	-1.9995	3.2825
	EXATO	1.9067	-2.0000	3.3333
15.0	MEC3DE	1.4047	-0.6089	1.8193
	EXATO	1.4156	-0.5185	1.8519
20.0	MEC3DE	1.1999	0.0003	1.2991
	EXATO	1.2133	0.0000	1.3333

MALHA 2:

RAIO		$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\theta$
10.0	MEC3DE	1.9060	-2.0000	3.3309
	EXATO	1.9067	-2.0000	3.3333
12.5	MEC3DE	1.6023	-1.098	2.3579
	EXATO	1.6033	-1.040	2.3733
15.0	MEC3DE	1.4145	-0.4336	1.8732
	EXATO	1.4156	-0.5185	1.8519
17.5	MEC3DE	1.2928	-0.2209	1.5326
	EXATO	1.2938	-0.2041	1.5374
20.0	MEC3DE	1.2120	0.0000	1.3327
	EXATO	1.2133	0.0000	1.3333

## V.4 - BLOCO COMPRIMIDO

Trata-se de um bloco, apoiado sobre o terreno, que serve de fundação para um pilar, ou seja, um bloco submetido a uma carga concentrada de compressão. A carga adotada foi 4 tf e para o material foi tomado  $E = 21 \cdot 10^5 \text{ tf/m}^2$  e  $\nu = 0.15$ .

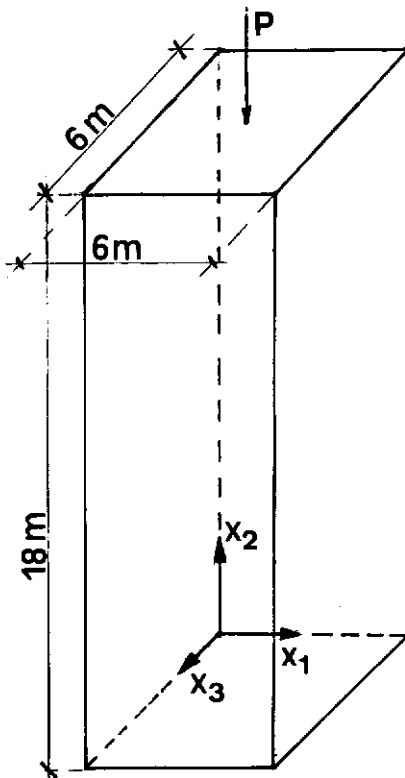


FIGURA V.4 - Bloco sob carga concentrada.

A solução exata para este problema não existe, portanto, para efeito de comparação dos resultados, foi utilizado o programa SAP80, com uma malha de elementos finitos bem refinada (figura V.5a), tomando-se as tensões nos pontos internos.

A malha de elementos de contorno adotada está indicada na figura V.5b. É uma malha bastante pobre, entretanto, já se observa resultados próximos daqueles obtidos com o SAP80, como se pode constatar nos gráficos apresentados.

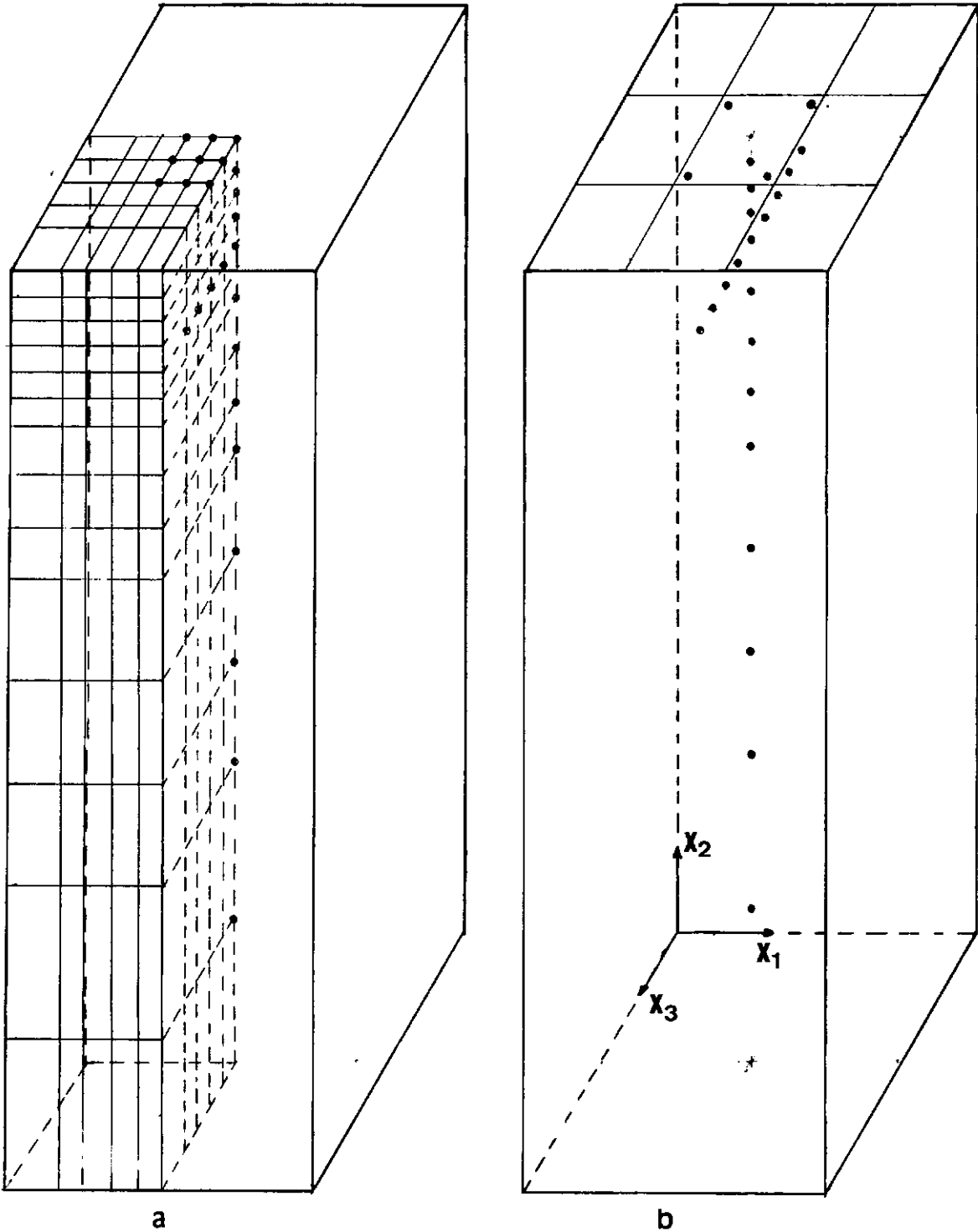
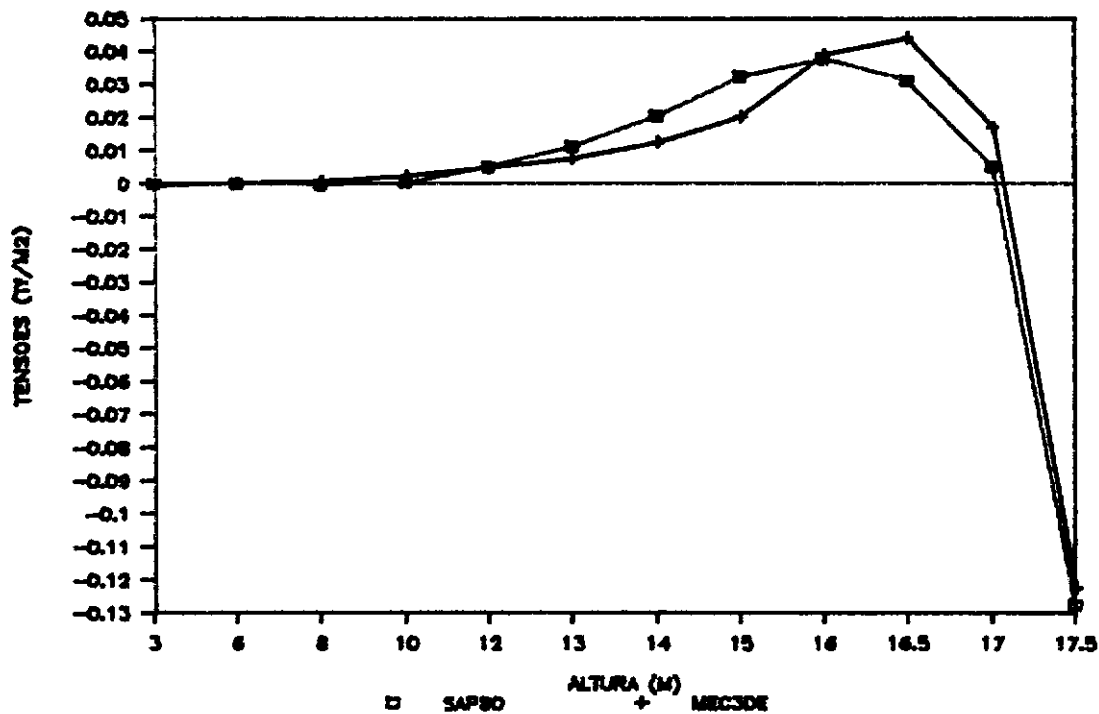


FIGURA V.5 - a) Elementos finitos.  
(350 elementos)

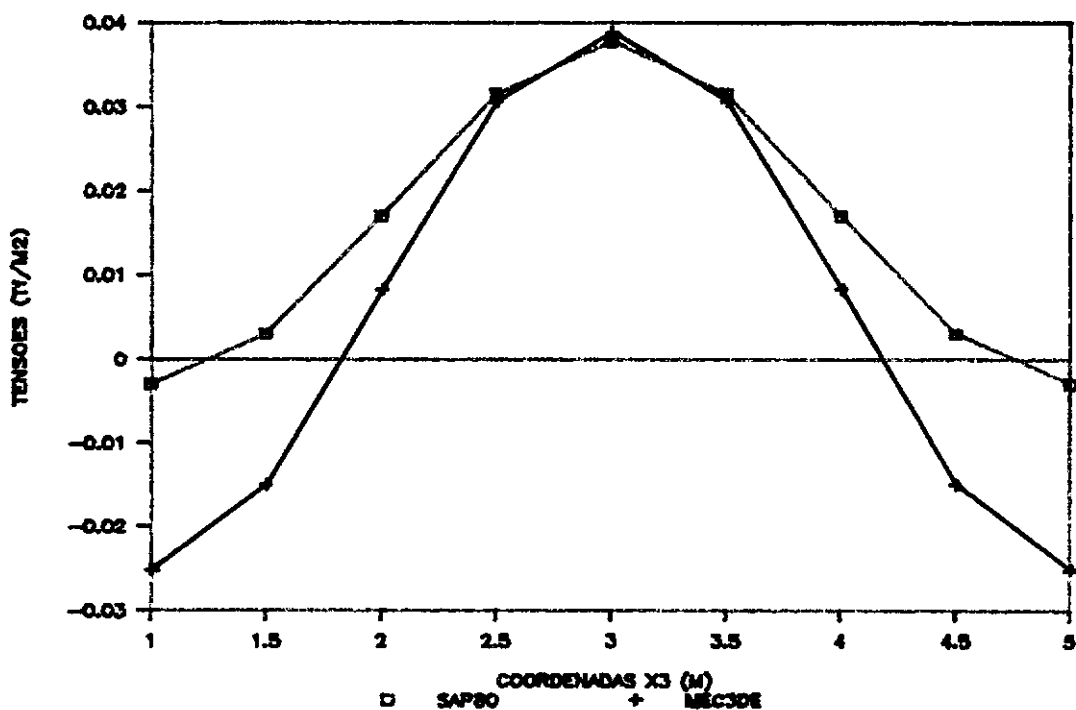
b) Elementos de contorno.  
(14 elementos)

Nas duas malhas foi empregado o elemento linear.

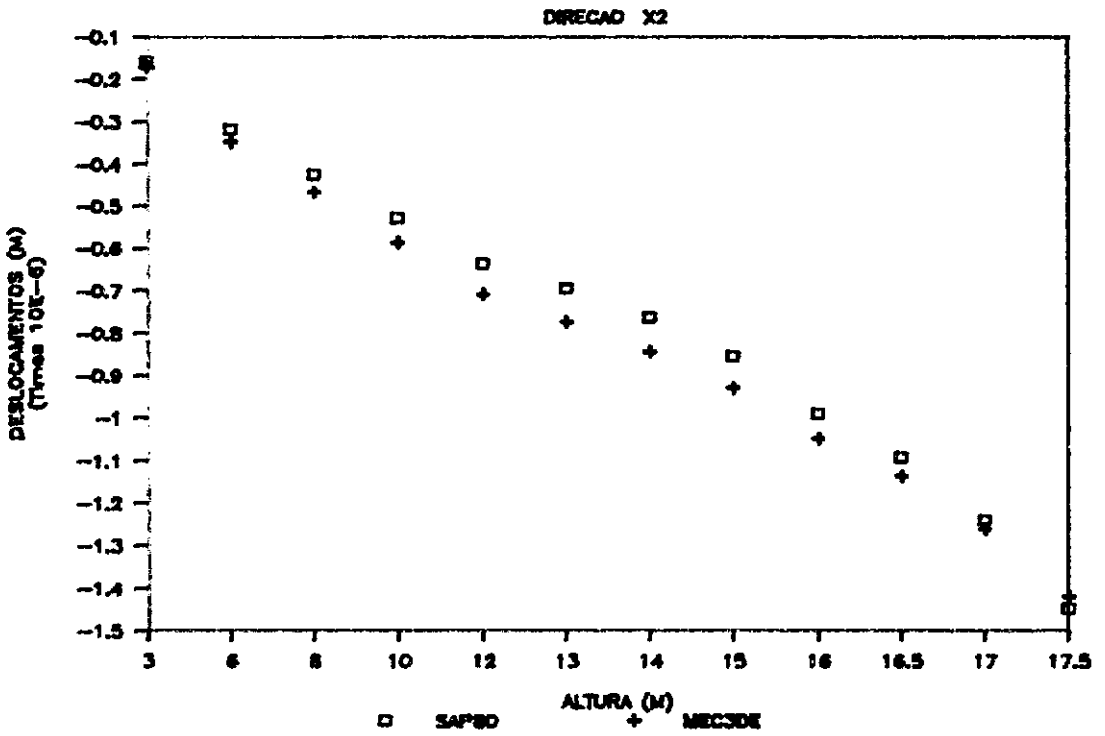
### TENSAO $T_{xx}$ NOS PONTOS SOB A CARGA



### TENSOES $T_{xx}$ NO PLANO $X_1=3$ EM $X_2=16$



## DESLOCAMENTOS NOS PONTOS SOB A CARGA



## CAPÍTULO VI

## CONCLUSÃO

O programa MEC3DE é capaz de analisar problemas tridimensionais de engenharia, regidos pela elasticidade linear, com o método dos elementos de contorno.

Como pode ser verificado nos exemplos mostrados, as respostas estão corretas. Verificou-se ainda a convergência do método através de refinamento da malha

A implementação dos elementos de transição, possibilitando a utilização de elementos contínuos e descontínuos numa mesma malha, reduz bastante o tempo computacional do problema.

Este trabalho não teve a preocupação de procurar novas técnicas de integração, de solução de sistema de equações, ou qualquer outro tipo de inovação. Sabia-se antecipadamente que o procedimento empregado daria bons resultados. Isto não significa que o programa não apresente técnicas avançadas. Por exemplo, a transformação de coordenadas proposta por TELLES, [16] e [17], que foi implementada também no cálculo das tensões nos pontos internos, é bastante recente e ainda se comenta os bons resultados apresentados quando é implementada. O objetivo era iniciar um sistema maior, voltado ao usuário. Tratava-se, portanto, de fazer um programa bem modulado que possibilitasse novas implementações sem grandes alterações na sua estrutura.

O objetivo final deste trabalho só será alcançado se tiver continuidade. Sendo assim, seguem algumas sugestões para possível implementação no MEC3DE:

- a) Simetria.
- b) Subregiões.
- c) Solução fundamental de Mindlin (semi-espaço infinito) que pode ser empregada conjuntamente com a solução de Kelvin, através de subregiões, para estudar problemas de interação solo-estrutura.
- d) Forças de volume.
- e) Particionamento da matriz  $\underline{A}$ , para resolver o sistema de equações com armazenamento em memória auxiliar, possibilitando a análise de estruturas de maior porte.
- f) Pré e pós-processador gráfico para uma melhor visualização do problema e uma melhor análise dos resultados.
- g) Refinamento auto-adaptativo H e P.
- h) Gerador automático de malha
- i) Melhorar a entrada de dados, tornando o programa mais acessível aos usuários.
- j) Verificação da consistência dos dados, para evitar possíveis erros, durante a execução do programa, devido ao fornecimento de dados incorretos.
- k) Problemas de potencial.
- l) Análise plástica.
- m) Análise dinâmica.
- n) Soluções de sistema de equações.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] LACHAT, J.A. - A Further Development of the Boundary Integral Technique for Elastostatics - Ph. D. Thesis, University of Southampton, UK (1975).
- [2] BREBBIA, C.A. - The Boundary Element Method for Engineers Pentech Press, London (1978).
- [3] BREBBIA, C.A. ; TELLES, J.C.F. ; WROBEL, L.C. - Boundary Element Techniques - Springer - Verlag, Berlin (1984).
- [4] BEM IX - Boundary Element IX - Editors C. A. Brebbia, W. L. Wendland, G. Kuhn, Springer-Verlag, Berlin (1987)
- [5] KELLOGG, O.D. - Foundations of Potencial Theory - Springer - Verlag, Berlin (1929).
- [6] CHEN, WAI-FAH ; SALEEB, A.F. - Constitutive Equations For Engineering Materials, John Wiley and Sons, Inc. (1982).
- [7] DYM, C.L. ; SHAMES, I.H. - Solid Mechanics: A Variational Approach - Mc. Graw-Hill (1973).
- [8] TIMOSHENKO, S.P. ; GOODIER, J.N. - Teoria da Elasticidade Guanabara Dois, 3<sup>a</sup> edição (1980).

- [9] TIMONSHENKO, S.P. ; GERE, J.E. - Mecânica dos Sólidos, Vol. II, Livros Técnicos e Científicos (1984).
- [10] LOVE, A.E.H. - A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity - Dover Publications, New York - 4<sup>a</sup> edição (1984).
- [11] HARTMANN, F. - Computing the C-matrix in Non-Smooth Boundary Points - New Developments in Boundary Element Methods pp. 367-379, Butterwoths, London (1980).
- [12] PARREIRA, P. G. S. V. - Análise do Erro no Método dos Elementos de Fronteira em Elasticidade - Tese de Ph. D., Universidade Técnica de Lisboa (1987).
- [13] BATHE, K.J - Finite Element Procedures in Engineering Analysis - Prentice Hall, Inc., New Jersey (1982).
- [14] TELLES, J.C.F. - On a New Element Family for the BEASY SYSTEM - Internal report, Computational Mechanics Institute, Southampton - UK, (1986)
- [15] TELLES, J.C.F. - Implementation of Triangular Elements into the BEASY SYSTEM - Internal report, Computational Mechanics Institute, Southampton - UK, (1986)

- [16] TELLES, J.C.F. - A Self - adaptative Co - ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals - International journal for numerical methods in engineering, Vol. 24, 959-973, (1987).
- [17] TELLES, J.C.F. - A Self - adaptative Co - ordinate Transformation for Efficient Numerical Evaluation of General Boundary Element Integrals - Discussion - International journal for numerical methods in engineering, Vol. 26, 1683-1684 (1988).
- [18] LIN, T.H. - Theory of Inelastic Structures - John Wiley and Sons, Inc., New York (1968).
- [19] TELLES, J.C.F. - The Boundary Element Method Applied to Inelastic Problems - Vol. 1, Springer - Verlag, Berlin (1983).