


ANÁLISE MODAL ASSINTÓTICA DA ESTABILIDADE
DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS


RICARDO VALERIANO ALVES

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:



PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA, PH.D.
(PRESIDENTE)



PROF. ABIMAEI FERNANDO DOURADO LOULA,
D.S.C.



PROF. NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN,
D.S.C.



PROF. RICARDO COSCARELLI ANTONINI,
D.S.C.

ALVES, RICARDO VALERIANO

Análise Modal Assintótica da Estabilidade de Estruturas Reticuladas Espaciais [Rio de Janeiro] 1989

xv, 158 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1989

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Estabilidade estrutural I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao prof. Ronaldo pela orientação e constante incentivo no decorrer deste trabalho.

À Eneida pela caprichosa datilografia.

Resumo da Tese apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

ANÁLISE MODAL ASSINTÓTICA DA ESTABILIDADE
DE ESTRUTURAS RETICULADAS ESPACIAIS

Ricardo Valeriano Alves

Junho de 1989

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho apresenta uma solução, via Método dos Elementos Finitos, para análise não-linear assintótica da estabilidade elástica de estruturas reticuladas espaciais, sob ação de cargas conservativas.

As equações gerais não-lineares de equilíbrio e de equilíbrio crítico são obtidas, com base numa formulação Lagrangeana, a partir da análise da variação da energia potencial total decorrente de deslocamentos incrementais.

O desenvolvimento da técnica da perturbação na forma matricial permite que aproximações assintóticas, dos caminhos primário e secundários, sejam calculadas de forma adequada aos procedimentos computacionais.

A análise linearizada de equilíbrio crítico é utili-

zada numa forma alternativa consistente para aproximar cargas e modos críticos, fornecendo melhores resultados que o procedimento convencional.

Como consequência das expansões assintóticas, obtém-se uma forma automática para fixar um número reduzido de modos a serem empregados na análise modal não-linear, a qual permite também o estudo da influência de imperfeições geométricas iniciais.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

STABILITY ANALYSIS OF SPACE FRAMES BY
AN ASYMPTOTIC MODAL APPROACH

Ricardo Valeriano Alves

June, 1989

Thesis Supervisor: Ronaldo Carvalho Batista
Department: Civil Engineering

This work presents a solution, by the Finite Element Method, for non-linear asymptotic analysis of elastic stability for space frames under conservative loads.

The general non-linear equilibrium and critical equilibrium equations are obtained through a Lagrangian formulation, by analysing the variation of the total potential energy resulting from incremental displacements.

The perturbation technique in a matrix form allows asymptotic approaches of primary and secondaries paths, to be calculated in an adequate form for computational purposes.

The linearized critical equilibrium analysis is used in an alternative plus consistent form, yielding critical loads and modes that are usually better approximations than

those from a conventional procedure.

As a consequence of the asymptotic expansions, an automatic selection of a reduced number of modes is obtained for the non-linear modal analysis, which also permits the study of the influence of small geometric imperfections.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - PRINCÍPIO DA ESTACIONARIDADE DE ENERGIA APLICADO A SISTEMAS ESTRUTURAIS DISCRETIZADOS	7
II.1. Energia Potencial Total para um Sistema Perfeito Conservativo	7
II.2. Energia Potencial Total para um Sistema com Imperfeições Geométricas	17
II.3. Condições de Equilíbrio	26
III - APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA DE CAMINHOS DE EQUILÍBRIO	28
III.1. Aproximação do Caminho Fundamental	28
III.2. Determinação de Pontos Críticos	35
III.3. Aproximações de Caminhos Secundários	39
IV - APROXIMAÇÃO MODAL ASSINTÓTICA DE CAMINHOS DE EQUILÍBRIO	47
IV.1. Fixação dos Modos de Deslocamentos	47
IV.2. Equações Modais de Equilíbrio	50
IV.3. Truncamento das Equações Modais de Equilíbrio	53

V - APLICAÇÃO ÀS ESTRUTURAS ESPACIAIS CONSTITUIDAS POR BARRAS	64
V.1. Elemento de Pórtico Espacial	64
V.2. Particularização da Energia Potencial Total	68
V.2.1. Sistemas perfeitos	68
V.2.2. Sistemas Imperfeitos	74
V.3. Matrizes de Rigidez de Elemento de Pórtico Espacial	78
VI - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	99
VI.1. O Programa INSTAB	99
VI.2. Aproximação do Caminho Fundamental	106
VI.3. Determinação de Pontos Críticos	109
VI.4. Aproximações de Caminhos Secundários	112
VI.5. Análise Modal	114
VII - EXEMPLOS	120
VII.1. Pórtico Espacial Hexagonal com Apoios Deslizantes	120
VII.2. Pórtico Espacial Hexagonal com Apoios Rotulados	123
VII.3. Domo Abatido em Forma de Estrela	128
VII.4. Pórtico Hexagonal Engastado	132
VII.5. Domo Reticulado Hemisférico	135
VIII - CONCLUSÃO	141
VIII.1. Considerações Sobre o Método	141
VIII.2. Limitações da Formulação Utilizada	143
VIII.3. Sugestões de Continuidade	144

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	146
APÊNDICE A - PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE RIGIDEZ	150
APÊNDICE B - INTEGRAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ	152

SIMBOLOGIA

- a_j - amplitude de modos retidos na análise modal
 A - área de seção transversal
 $\underline{A}, \underline{B}$ - vetores genéricos
 b_j - amplitude de modos de contribuição de segunda ordem
 c_j - amplitude de modos de contribuição de terceira ordem
 C_x, C_y, C_z - cossenos diretores dos eixos locais em relação ao referencial global
 E - módulo de elasticidade de Young
 E_{ijkl} - tensor constitutivo elástico
 \underline{f}^n - vetor de forças de superfícies aplicadas num elemento
 \underline{F}^n - vetor de forças nodais do n-ésimo elemento
 \underline{F} - vetor de forças nodais global
 G - módulo de elasticidade transversal
 \underline{h} - sistema não-linear de equações
 \underline{h}_p - vetor dos coeficientes do parâmetro de controle

- \underline{H}_x - matriz dos coeficientes das variáveis de estado
- I_y, I_z - momentos de inércia em relação aos eixos y e z respectivamente
- J - constante de torção
- \underline{K}^n - matriz de rigidez do n-ésimo elemento
- \underline{K} - matriz de rigidez global
- \underline{K}_0 - matriz de rigidez linear
- $\underline{K}_1(\underline{A})$ - matriz de rigidez incremental de primeira ordem
- $\underline{K}_2(\underline{A}, \underline{B})$ - matriz de rigidez incremental de segunda ordem
- $\underline{K}_1, \underline{K}_2$ - contribuição das imperfeições geométricas na matriz de rigidez \underline{K}_0
- $\underline{\hat{K}}$ - matriz de rigidez incluindo a influência de imperfeições geométricas
- \underline{K}_G - matriz de rigidez geométrica
- \underline{K}_T^C - matriz de rigidez tangente a um ponto crítico
- \underline{K}_T^E - matriz de rigidez tangente num ponto de equilíbrio
- \underline{L}^n - matriz de transformação relativa ao n-ésimo elemento
- \underline{N} - matriz de interpolação
- \underline{N}_i - matriz linha, relativa à i-ésima componente do vetor de deslocamento
- \underline{p}^n - vetor de forças de massa do n-ésimo elemento

p_1, p_2, p_3, p_4 - polinômios cúbicos de interpolação

p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 - derivadas dos polinômios cúbicos

q_1, q_2 - polinômios lineares de interpolação

\tilde{r} - submatriz de rotação (3x3)

\tilde{R} - matriz de rotação para elemento de pórtico espacial
(12x12)

\tilde{u}^n - vetor de deslocamentos no interior do n-ésimo elemento

$\tilde{\bar{u}}^n$ - vetor de imperfeições do n-ésimo elemento

$\tilde{\hat{u}}^n$ - vetor de deslocamentos totais do n-ésimo elemento

u - translação na direção x

\tilde{u}^n - vetor de deslocamentos nodais do n-ésimo elemento

\tilde{U} - vetor de deslocamentos nodais global

\tilde{U}_0 - modo de aproximação linear a partir do ponto de carga nula

\tilde{v}^n - vetor de deslocamentos incrementais do n-ésimo elemento

v - translação na direção y

v' - rotação em relação ao eixo z

V^n - energia potencial total relativa ao n-ésimo elemento

V - energia potencial total

V^* - funcional de energia potencial total reduzida

- \bar{V} - influência de imperfeições geométricas na energia potencial total
- \hat{V} - energia potencial total incluindo a influência de imperfeições geométricas iniciais
- V_1, V_2, V_3, V_4 - contribuições lineares, quadráticas, cúbicas e quárticas ao funcional de energia potencial total, em relação aos deslocamentos incrementais
- w - translação na direção z
- w' - rotação em relação ao eixo y
- $x y z$ - sistema local de eixos
- $X Y Z$ - sistema global de eixos
- α - parâmetro de perturbação para a aproximação do caminho fundamental
- inclinação dos eixos principais da seção transversal
- β - parâmetro de perturbação para a aproximação de caminhos secundários
- γ - variação do ângulo de torção ao longo do eixo x
- ϵ_{ij} - tensor de deformação
- η_1, η_2, \dots - modos de contribuição linear, quadrática, ... para a aproximação do caminho fundamental
- θ - rotação em relação ao eixo x (torção)
- λ - parâmetro único de carga

- $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ - contribuição linear, quadrática, ... para o parâmetro de carga
- σ_{ij} - tensor de tensões
- $\underline{\phi}^n$ - vetor de deslocamentos nodais incrementais do n-ésimo elemento
- $\underline{\phi}$ - vetor de deslocamentos nodais incrementais
- modo crítico
- $\underline{\phi}_i$ - i-ésimo modo retido na análise modal
- χ_y, χ_z - mudança de curvatura em relação aos eixos y e z respectivamente
- $\underline{\psi}_1, \underline{\psi}_2, \dots$ - modos de contribuição linear, quadrática, ... para a aproximação do caminho secundário
- $\underline{\Psi}_i$ - correção na análise modal
- Ω - energia potencial das cargas externas

Índices Superiores

- n - n-ésimo elemento
- t - transposta
- E - relativo ao ponto E de equilíbrio
- C - relativo ao ponto crítico
- F - fundamental
- S - secundário

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A análise linear estática de estruturas espaciais se constitui em um problema de solução numérica simples, dispondo-se para tal de diversos programas baseados no método dos elementos finitos (MEF), os quais obedecem a uma seqüência já estabelecida [1-3]: montagem do sistema de equações de equilíbrio, cálculo dos deslocamentos e das tensões.

Na análise linearizada de equilíbrio crítico, a solução do problema clássico [4],

$$(\underline{K} + \lambda \underline{K}_G) \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{I.1})$$

fornece os valores das cargas críticas e modos associados, que entretanto, são confiáveis no caso de estruturas que resistam ao carregamento predominante por reforços extensionais. A ocorrência de flexão, induzindo uma não-linearidade inicial, mesmo que moderada, pode resultar em erros significativos [5-8].

Ao contrário das análises linear e linearizada de

equilíbrio crítico, na análise de estabilidade de estruturas de comportamento geometricamente não-linear, não se possui uma estratégia definitiva, aplicável em qualquer caso. Algumas técnicas convencionais são utilizadas e novos procedimentos numéricos, para contornar problemas de convergência são apresentados freqüentemente. Tais técnicas podem ser classificadas da seguinte forma:

- Técnica de Perturbação [7-8]
- Método Incremental Iterativo [9-11]
- Análise Modal [12-14]

A técnica da perturbação, aplicada à teoria geral assintótica da estabilidade elástica de KOITER [15], apresenta problemas de convergência no caso de não-linearidade mais acentuada, como em pontos limites associados a regiões de forte curvatura do caminho de equilíbrio. Além disso, a formulação usual não se adapta bem a uma generalização visando uma aplicação computacional, excetuando-se os casos de geometria simples e poucos graus de liberdade.

O processo incremental iterativo é talvez o mais intuitivo por consistir em uma série de análises lineares onde a cada incremento são atualizadas coordenadas e rigidez. Os principais inconvenientes desta técnica, quando aplicada a análise de instabilidade estrutural, podem ser resumidos em:

- . Alto custo computacional, pela própria natureza do processo.
- . Dificuldades em detectar e/ou ultrapassar os pon-

tos críticos, principalmente no caso de bifurcação. Isto porque essa técnica numérica de solução de problemas não-lineares não é desenvolvida dentro da teoria geral assintótica para instabilidade elástica estrutural [10,15,16].

Uma alternativa às vezes buscada com o processo incremental iterativo é a destruição de singularidades (pontos críticos) através da introdução de imperfeições no sistema. Desta forma, um caminho pós-bifurcado é aproximado "assintoticamente" com a imposição de imperfeições iniciais, na forma de desvios na geometria ou no carregamento. Porém neste caso, não se conhecendo previamente o comportamento pós-crítico da estrutura, torna-se uma tarefa difícil a escolha correta de tais imperfeições, criando por vezes armadilhas para o engenheiro estrutural.

A análise modal tem sido apresentada como uma forma de reduzir substancialmente os graus de liberdade, e por conseguinte o esforço computacional, numa análise não-linear. A maior dificuldade reside justamente na determinação dos modos de deslocamentos que melhor representem o comportamento estrutural. Normalmente são utilizados alguns dos modos críticos, obtidos como autovetores na solução do problema clássico (I.1) [14] ou consistente [12,13], adicionando-se por vezes o modo fundamental [14], resultante da análise convencional. Geralmente um processo de tentativa e erro ou de atualização dos modos é necessário para se avançar num caminho de não-linearidade mais pronunciada.

Uma alternativa apresentada por LIMA & MOTA [17],

utiliza o método de Lanczos-Ritz para a definição dos modos a serem utilizados numa análise paramétrica do caminho de equilíbrio. Contudo, tal procedimento não permite a determinação de bifurcações e caminhos pós-críticos.

Com base nas dificuldades encontradas nas técnicas numéricas usuais para análise não-linear da instabilidade, e em métodos empregados com sucesso na análise de sistemas contínuos [18,19], uma proposta de análise modal assintótica aplicada a sistemas estruturais, discretizados via MEF, foi apresentada por ANTONINI [5].

Este trabalho vem então dar continuidade, nessa mesma linha de pesquisa, no sentido de estender a análise aos sistemas estruturais espaciais constituídos por barras. Uma visão geral da forma em que este foi desenvolvido é apresentada a seguir.

No Capítulo II as expansões do funcional de energia são desenvolvidas, para um caso geral de um elemento cujas funções de interpolação para deslocamento são conhecidas. Partindo-se de uma formulação Lagrangeana para as deformações, obtêm-se expressões da energia potencial total, convenientemente escritas de forma matricial, na qual são considerados termos adicionais (em relação à formulação convencional) que caracterizam o comportamento não-linear. Além disso mostra-se que com esta formulação pode-se considerar a influência de imperfeições geométricas. Finalmente, neste capítulo, as equações não-lineares de equilíbrio e as de equilíbrio crítico são então apresentadas em suas formas gerais.

No Capítulo III, a técnica da perturbação é aplicada ao sistema discretizado descrito pelo funcional de energia potencial total na forma matricial. Tanto o caminho fundamental quanto os secundários, de estruturas perfeitas ou imperfeitas, podem ser aproximados assintoticamente.

No Capítulo IV é apresentado o desenvolvimento da análise modal utilizada, com base nas aproximações assintóticas tanto do caminho fundamental quanto dos secundários. A análise de estruturas imperfeitas também é formulada dentro do mesmo procedimento, bastando definir o vetor de imperfeições, que pode ser fixado em função dos modos retidos.

No Capítulo V o funcional de energia potencial total é particularizado para o caso de um elemento de pórtico espacial, seguindo-se a mesma forma geral do Capítulo II. As matrizes de rigidez linear, incrementais de primeira e segunda ordem e aquelas dependentes das imperfeições, são integradas analiticamente e suas formas finais apresentadas.

As etapas de desenvolvimento analítico, como na expansão do funcional de energia e na integração das matrizes de rigidez, foram simplificadas com o auxílio de um programa de microcomputador que opera com álgebra simbólica. O pacote, denominado MUMATH contém uma série de rotinas escritas na linguagem MUSIMP, cada qual destinada especificamente a um determinado conjunto de operações.

O Capítulo VI descreve a implementação computacional baseada num programa desenvolvido anteriormente [5], no qual foram introduzidas as rotinas referentes ao elemento de pórtico espacial.

No Capítulo VII são apresentados os resultados para alguns exemplos práticos de estruturas espaciais esbeltas. Na medida do possível os resultados obtidos foram comparados com aqueles fornecidos por análise não-linear convencional ou experimentais.

No Capítulo VIII são apresentadas as conclusões e algumas sugestões de continuidade ao trabalho.

CAPÍTULO II

PRINCÍPIO DA ESTACIONARIDADE DE ENERGIA APLICADO A SISTEMAS ESTRUTURAIS DISCRETIZADOS

II.1. ENERGIA POTENCIAL TOTAL PARA UM SISTEMA PERFEITO CONSERVATIVO

Em um sistema estrutural elástico discretizado por elementos finitos, no qual a magnitude do carregamento é expressa por um parâmetro único λ , a energia potencial total do n-ésimo elemento pode ser escrita da seguinte forma:

$$V^n = U + \lambda \Omega \quad (\text{II.1})$$

onde:

U é a energia de deformação elástica e
 $\lambda \Omega$ é a energia potencial das cargas externas.

A investigação da estabilidade de uma certa configuração deformada de equilíbrio E (ponto de equilíbrio) desse sistema é feita através da aplicação do critério de Lagran-

ge, que implica na extremização do funcional de energia potencial total (EPT) descrita em termos de deslocamento. A variação da EPT em torno de um certo ponto E de equilíbrio, descrito por \underline{u}^{En} , é expressa por uma parcela incremental de energia descrita por deslocamentos arbitrariamente pequenos e cinematicamente admissíveis \underline{v}^n .

Assim o vetor de deslocamentos do n-ésimo elemento em torno de um ponto de equilíbrio pode ser escrito na forma:

$$\underline{u}^n(\underline{x}) = \underline{u}^{En}(\underline{x}) + \underline{v}^n(\underline{x}) \quad (\text{II.2})$$

onde \underline{x} é o vetor de coordenadas de um ponto genérico no interior do n-ésimo elemento.

Utilizando-se funções de interpolação para aproximar os deslocamentos num ponto genérico em função dos deslocamentos nodais, a expressão (II.2) torna-se

$$\underline{u}^n(\underline{x}) = \underline{N}(\underline{x}) \underline{U}^{En} + \underline{N}(\underline{x}) \underline{\phi}^n \quad (\text{II.3})$$

onde $\underline{N}(\underline{x})$ é a matriz de interpolação em função das coordenadas locais \underline{x} , \underline{U}^{En} é o vetor de deslocamentos nodais correspondentes ao ponto de equilíbrio e $\underline{\phi}^n$ é o vetor de deslocamentos nodais incrementais.

Assim uma componente u_i^n do vetor \underline{u}^n será expressa por

$$u_i^n(\underline{x}) = \underline{N}_i(\underline{x}) \underline{U}^{En} + \underline{N}_i(\underline{x}) \underline{\phi}^n \quad (\text{II.4})$$

onde $\underline{N}_i(x)$ é a matriz linha correspondente a i -ésima linha da matriz de interpolação.

Definidos os deslocamentos é possível então expressar as energias de deformação e potencial das cargas em função dos mesmos.

No caso geral a energia de deformação é definida como:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{kl} dv = \frac{1}{2} E_{ijkl} \int_V \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (\text{II.5})$$

onde E_{ijkl} é o tensor constitutivo e σ_{ij} e ϵ_{kl} são respectivamente os tensores de tensão e deformação.

Escrevendo os tensores de deformação em função dos deslocamentos por meio do tensor de deformações Lagrangeano correspondente [20]

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j}^n + u_{j,i}^n + u_{m,i}^n \cdot u_{m,j}^n) \quad (\text{II.6a})$$

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l}^n + u_{l,k}^n + u_{n,k}^n \cdot u_{n,l}^n) \quad (\text{II.6b})$$

onde m e n são índices "mudos".

Empregando a relação (II.4) em (II.6a) e (II.6b)

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [& (\underline{N}_{i,j} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{i,j} \underline{\phi}^n) + (\underline{N}_{j,i} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{j,i} \underline{\phi}^n) + \\ & + (\underline{N}_{m,i} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{m,i} \underline{\phi}^n) (\underline{N}_{m,j} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{m,j} \underline{\phi}^n)] \end{aligned} \quad (\text{II.7a})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} [& (\underline{N}_{k,l} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{k,l} \underline{\phi}^n) + (\underline{N}_{l,k} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{l,k} \underline{\phi}^n) + \\ & + (\underline{N}_{n,k} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{n,k} \underline{\phi}^n) (\underline{N}_{n,l} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{n,l} \underline{\phi}^n)] \end{aligned} \quad (II.7b)$$

Substituindo (II.7a) e (II.7b) em (II.5) tem-se a energia de deformação expressa em função dos deslocamentos nodais.

Para um sistema discretizado a energia potencial das cargas do n-ésimo elemento pode ser expressa por

$$\lambda\Omega = - \lambda \left(\int_V \underline{p}^{nt}(\underline{x}) \cdot \underline{u}^n(\underline{x}) \, dv + \int_S \underline{f}^{nt}(\underline{x}) \cdot \underline{u}^n(\underline{x}) \, ds \right) \quad (II.8)$$

onde $\underline{p}^n(\underline{x})$ e $\underline{f}^n(\underline{x})$ são respectivamente os vetores de forças de massa e de superfície no n-ésimo elemento.

Utilizando a relação (II.3)

$$\begin{aligned} \lambda\Omega = - \lambda (\underline{U}^{Ent} + \underline{\phi}^{nt}) \left(\int_V \underline{N}^t(\underline{x}) \cdot \underline{p}^n(\underline{x}) \, dv + \right. \\ \left. + \int_S \underline{N}^t(\underline{x}) \cdot \underline{f}^n(\underline{x}) \, ds \right) \end{aligned} \quad (II.9)$$

Notando-se que as integrais em (II.9) correspondem ao vetor de forças consistentes \underline{F}^n para o n-ésimo elemento, essa expressão pode ser reescrita como

$$\lambda\Omega = - \lambda (\underline{U}^{Ent} + \underline{\phi}^{nt}) \underline{F}^n \quad (II.10)$$

Substituindo (II.5) e (II.10) em (II.1) e empregando

Início da expressão (II.11)

$$v^n = \frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En})] dv - \lambda \underline{U}^{En t} \underline{F}^n +$$

$$\frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{\Phi}^n) + (N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{\Phi}^n) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{\Phi}^n) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{\Phi}^n) +$$

$$+ (N_{i,j} \underline{\Phi}^n)(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{i,j} \underline{\Phi}^n)(N_{l,k} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{\Phi}^n)(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{\Phi}^n)(N_{l,k} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{\Phi}^n) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{\Phi}^n) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{\Phi}^n) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{\Phi}^n) +$$

$$+ (N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{\Phi}^n)(N_{n,l} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{\Phi}^n)(N_{n,l} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{\Phi}^n)(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{\Phi}^n)(N_{l,k} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{i,j} \underline{\Phi}^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \underline{\Phi}^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \underline{\Phi}^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{k,l} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \underline{\Phi}^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{l,k} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{\Phi}^n) +$$

$$+ (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{m,k} \underline{\Phi}^n)(N_{n,l} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{\Phi}^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En}) +$$

$$+ (N_{m,i} \underline{\Phi}^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,l} \underline{U}^{En})] dv - \lambda \underline{\Phi}^n t \underline{F}^n +$$

→

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{i,j} \phi^n)(N_{k,\ell} \phi^n) + (N_{i,j} \phi^n)(N_{\ell,k} \phi^n) + (N_{j,i} \phi^n)(N_{k,\ell} \phi^n) + (N_{j,i} \phi^n)(N_{\ell,k} \phi^n) + \\
& + (N_{i,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \phi^n) + (N_{j,i} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \phi^n) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \phi^n)(N_{k,\ell} \phi^n) + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \phi^n)(N_{\ell,k} \phi^n) + \\
& + (N_{i,j} \phi^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,\ell} \phi^n) + (N_{j,i} \phi^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,\ell} \phi^n) + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{k,\ell} \phi^n) + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{\ell,k} \phi^n) + \\
& + (N_{i,j} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \underline{U}^{En}) + (N_{j,i} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{k,\ell} \underline{U}^{En}) + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{\ell,k} \underline{U}^{En}) + \\
& + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \phi^n) + \\
& + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \underline{U}^{En}) + \\
& + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,\ell} \underline{U}^{En}) + \\
& + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,\ell} \phi^n) + \\
& + (N_{m,i} \underline{U}^{En})(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} \underline{U}^{En})(N_{n,\ell} \phi^n) + \\
& + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \underline{U}^{En})(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,\ell} \underline{U}^{En})] dv +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{i,j} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,l} \phi^n) + (N_{j,i} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,l} \phi^n) + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{k,l} \phi^n) + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{l,k} \phi^n) + \\
& + (N_{m,i} U^{En})(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,l} \phi^n) + \\
& + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,l} U^{En}) + \\
& + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} U^{En})(N_{n,l} \phi^n) + \\
& + (N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} U^{En})(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,l} \phi^n)] dv +
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{m,i} \phi^n)(N_{m,j} \phi^n)(N_{n,k} \phi^n)(N_{n,l} \phi^n)] dv$$

(II.11)

(II.7a) e (II.7b) tem-se a expressão da energia potencial total, V^n , do n -ésimo elemento em torno de um ponto E de equilíbrio, dada por (II.11).

Como o tensor constitutivo E_{ijkl} relaciona dois tensores simétricos, σ_{ij} e ϵ_{kl} , pode-se afirmar que [21]

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{jilk} \quad (\text{II.12a})$$

e

$$E_{(ij)(kl)} = E_{(kl)(ij)} \quad (\text{II.12b})$$

Definindo-se

$$K_0^n = E_{ijkl} \int_V \tilde{N}_{i,j}^t \tilde{N}_{k,l} dv \quad (\text{II.13})$$

$$\begin{aligned} K_1^n(\tilde{A}) = E_{ijkl} \int_V [& \tilde{N}_{n,k}^t (\tilde{N}_{i,j} \tilde{A}) \tilde{N}_{n,l} + \tilde{N}_{i,j}^t (\tilde{N}_{n,k} \tilde{A}) \tilde{N}_{n,l} + \\ & + \tilde{N}_{n,l}^t (\tilde{N}_{n,k} \tilde{A}) \tilde{N}_{i,j}] dv \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned} K_2^n(\tilde{A}, \tilde{B}) = E_{ijkl} \int_V [& \tilde{N}_{n,k}^t (\tilde{N}_{m,i} \tilde{A}) (\tilde{N}_{m,j} \tilde{B}) \tilde{N}_{n,l} + \\ & + \tilde{N}_{m,i}^t (\tilde{N}_{m,j} \tilde{A}) (\tilde{N}_{n,k} \tilde{B}) \tilde{N}_{n,l} + \\ & + \tilde{N}_{n,l}^t (\tilde{N}_{m,j} \tilde{A}) (\tilde{N}_{n,k} \tilde{B}) \tilde{N}_{m,i}] dv \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

e levando em conta as igualdades (II.12a) e (II.12b) é possível reordenar adequadamente os índices da expressão (II.11), reescrevendo-a na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
v^n &= \underline{u}^{En^t} \left\{ \left[\frac{1}{2} \underline{k}_0^n + \frac{1}{6} \underline{k}_1^n (\underline{u}^{En}) + \frac{1}{24} \underline{k}_2^n (\underline{u}^{En}, \underline{u}^{En}) \right] \underline{u}^{En} - \lambda \underline{F}^n \right\} + \\
&\underline{\phi}^{nt} \left\{ \left[\underline{k}_0^n + \frac{1}{2} \underline{k}_1^n (\underline{u}^{En}) + \frac{1}{6} \underline{k}_2^n (\underline{u}^{En}, \underline{u}^{En}) \right] \underline{u}^{En} - \lambda \underline{F}^n \right\} + \\
&\underline{\phi}^{nt} \left[\frac{1}{2} \underline{k}_0^n + \frac{1}{2} \underline{k}_1^n (\underline{u}^{En}) + \frac{1}{4} \underline{k}_2^n (\underline{u}^{En}, \underline{u}^{En}) \right] \underline{\phi}^n + \\
&\underline{\phi}^{nt} \left[\frac{1}{6} \underline{k}_1^n (\underline{\phi}^n) + \frac{1}{6} \underline{k}_2^n (\underline{u}^{En}, \underline{\phi}^n) \right] \underline{\phi}^n + \\
&\underline{\phi}^{nt} \left[\frac{1}{24} \underline{k}_2^n (\underline{\phi}^n, \underline{\phi}^n) \right] \underline{\phi}^n
\end{aligned} \tag{II.16}$$

A energia potencial total de um sistema estrutural, discretizado em N elementos, será o somatório da EPT de cada elemento, ou seja

$$V = \sum_{n=1}^N v^n \tag{II.17}$$

Substituindo (II.16) em (II.17) e identificando-se as parcelas, a expressão de V pode ser escrita como:

$$V = V^E + V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \tag{II.18}$$

onde:

$$v^E = \underline{u}^{Et} \left\{ \left[\frac{1}{2} \underline{k}_0 + \frac{1}{6} \underline{k}_1 (\underline{u}^E) + \frac{1}{24} \underline{k}_2 (\underline{u}^E, \underline{u}^E) \right] \underline{u}^E - \lambda \underline{F} \right\} \tag{II.19a}$$

$$V_1 = \underline{\phi}^t \left\{ \left[\underline{K}_0 + \frac{1}{2} \underline{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{6} \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{U}^E - \lambda \underline{F} \right\} \quad (\text{II.19b})$$

$$V_2 = \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{2} \underline{K}_0 + \frac{1}{2} \underline{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{4} \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{\phi} \quad (\text{II.19c})$$

$$V_3 = \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{6} \underline{K}_1 (\underline{\phi}) + \frac{1}{6} \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{\phi}) \right] \underline{\phi} \quad (\text{II.19d})$$

$$V_4 = \underline{\phi}^t \frac{1}{24} \underline{K}_2 (\underline{\phi}, \underline{\phi}) \underline{\phi} \quad (\text{II.19e})$$

sendo V^E a parcela correspondente à EPT no ponto de equilíbrio e V_1, V_2, V_3 e V_4 correspondendo respectivamente às 1ª, 2ª, 3ª e 4ª variações de V em relação aos deslocamentos incrementais.

Nas expressões anteriores \underline{U}^E e $\underline{\phi}$ são vetores de deslocamentos no referencial global dados por:

$$\underline{U}^E = \sum_{n=1}^N (\underline{L}^n)^t \underline{U}^{En} \quad (\text{II.20a})$$

e

$$\underline{\phi} = \sum_{n=1}^N (\underline{L}^n)^t \underline{\phi}^n \quad (\text{II.20b})$$

onde \underline{L}^n é a matriz de transformação, que correlaciona os graus de liberdade locais com os globais e efetua a rotação do referencial.

Analogamente o vetor de forças sobre a estrutura é transformado por

$$\underline{\tilde{F}} = \sum_{n=1}^N (\underline{\tilde{L}}^n)^t \underline{\tilde{F}}^n \quad (\text{II.21})$$

e,

$$\underline{\tilde{K}}_0 = \sum_{n=1}^N (\underline{\tilde{L}}^n)^t \underline{\tilde{K}}_0^n \underline{\tilde{L}}^n \quad (\text{II.22a})$$

$$\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\tilde{U}}) = \sum_{n=1}^N (\underline{\tilde{L}}^n)^t \underline{\tilde{K}}_1(\underline{\tilde{U}}^n) \underline{\tilde{L}}^n \quad (\text{II.22b})$$

$$\underline{\tilde{K}}_2(\underline{\tilde{U}}, \underline{\tilde{U}}) = \sum_{n=1}^N (\underline{\tilde{L}}^n)^t \underline{\tilde{K}}_2(\underline{\tilde{U}}^n, \underline{\tilde{U}}^n) \underline{\tilde{L}}^n \quad (\text{II.22c})$$

passam a ser, após transformação, as matrizes globais da estrutura.

II.2. ENERGIA POTENCIAL TOTAL PARA UM SISTEMA COM IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS

No caso em que um sistema estrutural apresenta pequenas imperfeições geométricas iniciais, a configuração imperfeita será tomada como referencial para o cálculo das variações de energia, sendo os deslocamentos totais descritos a partir da configuração perfeita. Observa-se que esta aproximação é sempre possível no caso de imperfeições iniciais suficientemente pequenas. Assim os deslocamentos do n -ésimo elemento são definidos como

$$\underline{\tilde{u}}^n(\underline{\tilde{x}}) = \underline{u}^n(\underline{x}) + \underline{\bar{u}}^n(\underline{x}) \quad (\text{II.23})$$

onde $\underline{u}^n(\underline{x})$ são os deslocamentos medidos a partir da situação imperfeita e $\bar{\underline{u}}^n(\underline{x})$ é o vetor de imperfeições no ponto de coordenadas \underline{x} , medidas a partir da configuração geometricamente perfeita e indeformada, i.e. livre de tensões iniciais.

As deformações específicas são agora dadas por

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{ij} (\underline{u}^n + \bar{\underline{u}}^n) - \epsilon_{ij} (\bar{\underline{u}}^n) \quad (\text{II.24})$$

que após substituição de (II.6a) ficam

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} [(u^n + \bar{u}^n)_{i,j} + (u^n + \bar{u}^n)_{j,i} + (u^n + \bar{u}^n)_{m,i} \cdot (u^n + \bar{u}^n)_{m,j}] - \\ - \frac{1}{2} (\bar{u}^n_{i,j} + \bar{u}^n_{j,i} + \bar{u}^n_{m,i} \cdot \bar{u}^n_{m,j}) = \epsilon_{ij} + \bar{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

onde

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u^n_{i,j} + u^n_{j,i} + u^n_{m,i} \cdot u^n_{m,j}) \quad (\text{II.6a)'}$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\bar{u}^n_{m,i} \cdot \bar{u}^n_{m,j} + \bar{u}^n_{m,i} \cdot u^n_{m,j}) \quad (\text{II.26})$$

e da mesma forma após substituição de (II.6b) resultam em

$$\hat{\epsilon}_{k\ell} = \epsilon_{k\ell} + \bar{\epsilon}_{k\ell} \quad (\text{II.27})$$

onde

$$\epsilon_{k\ell} = \frac{1}{2} (u^n_{k,\ell} + u^n_{\ell,k} + u^n_{n,k} \cdot u^n_{n,\ell}) \quad (\text{II.6b)'}$$

$$\bar{\varepsilon}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{n,k}^n \cdot \bar{u}_{n,l}^n + \bar{u}_{n,k}^n \cdot u_{n,l}^n) \quad (\text{II.28})$$

Supondo-se que o sistema imperfeito esteja livre de tensões, a EPT do n-ésimo elemento será:

$$\hat{V}^n = \frac{1}{2} E_{ijkl} \int_V \hat{\varepsilon}_{ij} \cdot \hat{\varepsilon}_{kl} dv - \lambda \underline{U}^{nt} \underline{F}^n \quad (\text{II.29})$$

A substituição de (II.25) e (II.27) em (II.29) fornece

$$\hat{V}^n = V^n + \bar{V}^n \quad (\text{II.30})$$

onde

$$V^n = \frac{1}{2} E_{ijkl} \int_V \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} dv - \lambda \underline{U}^{nt} \underline{f}^n \quad (\text{II.31})$$

$$\bar{V}^n = \frac{1}{2} E_{ijkl} \int_V (\varepsilon_{ij} \bar{\varepsilon}_{kl} + \bar{\varepsilon}_{ij} \varepsilon_{kl} + \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{kl}) dv \quad (\text{II.32})$$

Nota-se que considerando $\underline{U}^n = \underline{U}^{En} + \underline{\phi}^n$ e desenvolvendo a expressão (II.31) chega-se a (II.16).

Assim, com V^n conhecido, basta que se desenvolva \bar{V}^n para que se tenha a expressão da EPT, \hat{V}^n .

Utilizando-se as funções de interpolação e considerando (II.2)

$$\underline{u}^n(\underline{x}) = \underline{N}(\underline{x}) \underline{U}^{En} + \underline{N}(\underline{x}) \underline{\phi}^n \quad (\text{II.3})'$$

$$\bar{u}^n(\underline{x}) = \underline{N}(\underline{x}) \bar{U}^n \quad (\text{II.33})$$

onde \bar{U}^n é o vetor de imperfeições nodais do n-ésimo elemento.

Substituindo (II.3) e (II.33) em (II.26) e (II.28) tem-se

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} [(\underline{N}_{m,i} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{m,i} \underline{\phi}^n)(\underline{N}_{m,j} \bar{U}^n) + (\underline{N}_{m,i} \bar{U}^n)(\underline{N}_{m,j} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{m,j} \underline{\phi}^n)] \quad (\text{II.34a})$$

$$\bar{\epsilon}_{kl} = \frac{1}{2} [(\underline{N}_{n,k} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{n,k} \underline{\phi}^n)(\underline{N}_{n,l} \bar{U}^n) + (\underline{N}_{n,k} \bar{U}^n)(\underline{N}_{n,l} \underline{U}^{En} + \underline{N}_{n,l} \underline{\phi}^n)] \quad (\text{II.34b})$$

Agora, substituindo-se (II.34a), (II.34b), (II.7a) e (II.7b) em (II.32) resulta em

Início da expressão (II.35)

$$\begin{aligned}
 \bar{v}^n = & \frac{1}{8} \epsilon_{ijkl} \int_V [(N_{m,i} \bar{u}^n)(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{k,\ell} \bar{u}^{En}) + (N_{m,i} \bar{u}^n)(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{\ell,k} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^n)(N_{k,\ell} \bar{u}^{En}) + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^n)(N_{\ell,k} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{i,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^n)(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + (N_{j,i} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^n)(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{i,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^n) + (N_{j,i} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^n) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^n)(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^n)(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^n)(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^n) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^n)(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^n) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^n)(N_{n,k} \bar{u}^n)(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^n)(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^n)(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^n)(N_{n,\ell} \bar{u}^{En}) + \\
 & + (N_{m,i} \bar{u}^{En})(N_{m,j} \bar{u}^{En})(N_{n,k} \bar{u}^{En})(N_{n,\ell} \bar{u}^n)] dv +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{k,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{\ell,k} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{k,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{\ell,k} \bar{\phi}^n) + \\
& + (N_{i,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{j,i} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{i,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n) + (N_{j,i} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^{En}) + (N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^{En})(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{U}^{En})(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^{En}) + \\
& + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{n,k} \bar{U}^{En})(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{U}^{En})(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^{En}) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{U}^{En})(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^{En})(N_{n,\ell} \bar{U}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^{En})(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n) + (N_{m,i} \bar{U}^{En})(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n)] dv + \\
& + \frac{1}{8} E_{ijkl} \int_V [(N_{m,i} \bar{U}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{U}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + \\
& + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{U}^n)(N_{n,\ell} \bar{\phi}^n) + (N_{m,i} \bar{\phi}^n)(N_{m,j} \bar{\phi}^n)(N_{n,k} \bar{\phi}^n)(N_{n,\ell} \bar{U}^n)] dv
\end{aligned}$$

Definindo-se

$$\underline{K}_1^n = E_{ijkl} \int_V [\underline{N}_{i,j}^t (N_{n,k} \underline{U}^n) \underline{N}_{n,l} + \underline{N}_{n,l}^t (N_{n,k} \underline{U}^n) \underline{N}_{i,j}] dv \quad (\text{II.36})$$

$$\begin{aligned} \underline{K}_2^n = E_{ijkl} \int_V [\underline{N}_{m,i}^t (N_{m,j} \underline{U}^n) (N_{n,k} \underline{U}^n) \underline{N}_{n,l} + \\ + \underline{N}_{n,l}^t (N_{m,j} \underline{U}^n) (N_{n,k} \underline{U}^n) \underline{N}_{m,i}] dv \end{aligned} \quad (\text{II.37})$$

e novamente levando em conta as igualdades (II.12a) e (II.12b), a expressão (II.35) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \underline{V}^n = \underline{U}^{En t} \left[\frac{1}{2} \underline{K}_1^n + \frac{1}{2} \underline{K}_2^n + \frac{1}{6} \underline{K}_2^n (\underline{U}^n, \underline{U}^{En}) \right] \underline{U}^{En} + \\ \underline{\phi}^{nt} \left[\underline{K}_1^n + \underline{K}_2^n + \frac{1}{2} \underline{K}_2^n (\underline{U}^n, \underline{U}^{En}) \right] \underline{U}^{En} + \\ \underline{\phi}^{nt} \left[\frac{1}{2} \underline{K}_1^n + \frac{1}{2} \underline{K}_2^n + \frac{1}{2} \underline{K}_2^n (\underline{U}^n, \underline{U}^{En}) \right] \underline{\phi}^n + \\ \underline{\phi}^{nt} \left[\frac{1}{6} \underline{K}_2^n (\underline{U}^n, \underline{\phi}^n) \right] \underline{\phi}^n \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

Portanto, a EPT de um sistema imperfeito, composto por N elementos, será dada por

$$\widehat{V} = V + \bar{V} \quad (\text{II.39})$$

onde

$$V = \sum_{n=1}^N V^n \quad (\text{II.17})'$$

$$\bar{V} = \sum_{n=1}^N \bar{V}^n \quad (\text{II.40})$$

Analogamente a (II.22a)

$$\bar{K}_1 = \sum_{n=1}^N (\bar{L}^n)^t \bar{K}_1^n \bar{L}^n \quad (\text{II.41a})$$

$$\bar{K}_2 = \sum_{n=1}^N (\bar{L}^n)^t \bar{K}_2^n \bar{L}^n \quad (\text{II.41b})$$

Efetuando-se (II.40) e adicionando-se (II.18) tem-se finalmente

$$\hat{V} = \hat{V}^E + \hat{V}_1 + \hat{V}_2 + \hat{V}_3 + \hat{V}_4 \quad (\text{II.42})$$

onde

$$\hat{V}^E = \underline{U}^{Et} \left\{ \left[\frac{1}{2} \hat{K}_0 + \frac{1}{6} \hat{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{24} \hat{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{U}^E - \lambda \underline{F} \right\} \quad (\text{II.43a})$$

$$\hat{V}_1 = \underline{\phi}^t \left\{ \left[\hat{K}_0 + \frac{1}{2} \hat{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{6} \hat{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{U}^E - \lambda \underline{F} \right\} \quad (\text{II.43b})$$

$$\hat{V}_2 = \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{2} \hat{K}_0 + \frac{1}{2} \hat{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{4} \hat{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{\phi} \quad (\text{II.43c})$$

$$\hat{V}_3 = \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{6} \hat{K}_1 (\underline{\phi}) + \frac{1}{6} \hat{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{\phi}) \right] \underline{\phi} \quad (\text{II.43d})$$

$$\widehat{V}_4 = \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{24} \underline{K}_2 (\underline{\phi}, \underline{\phi}) \right] \underline{\phi} \quad (\text{II.43e})$$

Sendo nas expressões anteriores,

$$\widehat{K}_0 = \underline{K}_0 + \underline{K}_1 + \underline{K}_2 \quad (\text{II.44})$$

$$\widehat{K}_1(\underline{A}) = \underline{K}_1(\underline{A}) + \underline{K}_2(\underline{A}, \underline{U}) \quad (\text{II.45})$$

Observa-se que em (II.42) as parcelas \widehat{V}^E , \widehat{V}_1 , \widehat{V}_2 , \widehat{V}_3 e \widehat{V}_4 têm os mesmos significados que as correspondentes parcelas de V em (II.18), sendo porém relativas a uma estrutura com imperfeições iniciais.

II.3. CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

A condição de equilíbrio de um sistema imperfeito (aqui tomado como caso geral) é expressa através do princípio de estacionaridade de energia, resultando na seguinte equação variacional

$$\delta \widehat{V} = 0 \quad (\text{II.46})$$

Aplicando essa condição em \widehat{V}_1 , dada por (II.43b), tem-se que para quaisquer deslocamentos incrementais arbitrários pequenos

$$\delta \underline{\phi}^t \left\{ \left[\widehat{K}_0 + \frac{1}{2} \widehat{K}_1(\underline{U}^E) + \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{U}^E - \lambda \underline{F} \right\} = 0 ; \delta \underline{\phi} \neq 0 \quad (\text{II.47})$$

gerando o seguinte sistema de equações de equilíbrio

$$\widehat{K}_0 + \frac{1}{2} \widehat{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{6} K_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \underline{U}^E = \lambda \underline{F} \quad (\text{II.48})$$

A condição de equilíbrio crítico é dada por $\widehat{V}_2 \equiv 0$ e a equação variacional que expressa essa condição é

$$\delta \widehat{V}_2 = 0 \quad (\text{II.49})$$

Deve-se observar que (II.49) retrata a busca tanto de pontos críticos ao longo de caminhos imperfeitos de equilíbrio (i.e. bifurcações secundárias, terciárias, etc ...) quanto de pontos críticos ao longo de caminhos perfeitos de equilíbrio (bifurcações primárias) para os quais $\bar{u} \equiv 0$ ou $\bar{v} \equiv 0$.

Substituindo (II.43c) em (II.49) tem-se

$$\delta \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{2} \widehat{K}_0 + \frac{1}{2} \widehat{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{4} K_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{\phi} = 0 ; \delta \underline{\phi} \neq \underline{\phi} \quad (\text{II.50})$$

gerando as seguintes equações de equilíbrio crítico

$$\left[\widehat{K}_0 + \widehat{K}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{2} K_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{II.51})$$

Deve-se observar que as equações (II.48) e (II.51) foram geradas para o caso em que a estrutura apresenta imperfeições geométricas iniciais. No caso de estruturas perfeitas basta substituir \widehat{K}_0 por K_0 e $\widehat{K}_1 (\underline{U}^E)$ por $K_1 (\underline{U}^E)$.

CAPÍTULO III

APROXIMAÇÃO ASSINTÓTICA DE CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

III.1. APROXIMAÇÃO DO CAMINHO FUNDAMENTAL

Pode-se obter um ponto sobre o caminho fundamental $(\underline{u}^F, \lambda^F)$, partindo-se de um ponto de equilíbrio conhecido $(\underline{u}^E, \lambda^E)$ e escrevendo o par desejado na seguinte forma para métrica

$$\underline{u}^F = \underline{u}^E + \alpha \underline{\eta}_1 + \alpha^2 \underline{\eta}_2 + \dots + \alpha^n \underline{\eta}_n = \underline{u}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \quad (\text{III.1})$$

$$\lambda^F = \lambda^E + \alpha \lambda_1^F + \alpha^2 \lambda_2^F + \dots + \alpha^n \lambda_n^F = \lambda^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda_i^F \quad (\text{III.2})$$

onde α é o parâmetro que mede o avanço ao longo do caminho fundamental, $\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2, \dots$ são modos de contribuição linear, quadrática, ... aos deslocamentos e $\lambda_1^F, \lambda_2^F, \dots$ são contribuições ao parâmetro de carga.

Substituindo (III.1) e (III.2) na equação de equilíbrio (II.48)

$$\left[\widehat{K}_0 + \frac{1}{2} \widehat{K}_1 \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) + \frac{1}{6} K_2 \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i, \underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) - \left(\lambda^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda_i^F \right) \underline{F} \right] \underline{F} = \underline{0} \quad (\text{III.3})$$

onde de acordo com as propriedades das matrizes K_1 e K_2

$$\widehat{K}_1 \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) = \widehat{K}_1 \left(\underline{U}^E \right) + \sum_{i=1}^n \alpha^i \widehat{K}_1 \left(\underline{\eta}_i \right) \quad (\text{III.4})$$

$$K_2 \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i, \underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) = K_2 \left(\underline{U}^E, \underline{U}^E \right) + \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[2 K_2 \left(\underline{U}^E, \underline{\eta}_i \right) + \sum_{j=1}^{i-1} K_2 \left(\underline{\eta}_j, \underline{\eta}_{i-j} \right) \right] \quad (\text{III.5})$$

Com (III.4) e (III.5) a equação de equilíbrio (III.3) pode ser reescrita na seguinte forma

$$\left\{ \widehat{K}_0 + \frac{1}{2} K_1 \left(\underline{U}^E \right) + \frac{1}{6} K_2 \left(\underline{U}^E, \underline{U}^E \right) + \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[\frac{1}{2} \widehat{K}_1 \left(\underline{\eta}_i \right) + \frac{1}{3} K_2 \left(\underline{U}^E, \underline{\eta}_i \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} K_2 \left(\underline{\eta}_j, \underline{\eta}_{i-j} \right) \right] \right\} \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) - \left(\lambda^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda_i^F \right) \underline{F} = \underline{0} \quad (\text{III.6})$$

Considerando que no ponto E a equação de equilíbrio deve ser atendida

$$\left[\widehat{K}_0 + \frac{1}{2} \widehat{K}_1 \left(\underline{U}^E \right) + \frac{1}{6} K_2 \left(\underline{U}^E, \underline{U}^E \right) \right] \underline{U}^E - \lambda^E \underline{F} = \underline{0} \quad (\text{III.7})$$

e notando-se que

$$\widehat{K}_1(\underline{\eta}_i) \underline{U}^E = \widehat{K}_1(\underline{U}^E) \underline{\eta}_i \quad (\text{III.8})$$

$$\underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_i) \underline{U}^E = \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{U}^E) \underline{\eta}_i \quad (\text{III.9})$$

Aplicando (III.7), (III.8) e (III.9) na equação (III.6) resulta em

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[\widehat{K}_0 + \widehat{K}_1(\underline{U}^E) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{U}^E) \right] \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[\frac{1}{2} \widehat{K}_1(\underline{\eta}_i) + \frac{1}{3} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_i) \right] \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{\eta}_j, \underline{\eta}_{i-j}) \right] \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) \right\} - \sum_{i=1}^n \alpha^i \lambda_i^F \underline{F} = \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

e ainda, reordenando-se os somatórios que aparecem em (III.10) na forma

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[\frac{1}{2} \widehat{K}_1(\underline{\eta}_i) + \frac{1}{3} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_i) \right] \left(\sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \alpha^i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{1}{2} \widehat{K}_1(\underline{\eta}_j) + \frac{1}{3} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_j) \right] \underline{\eta}_{i-j} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{\eta}_j, \underline{\eta}_{i-j}) \right] \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) = \\ & = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \alpha^i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left[\underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_j) + \sum_{k=1}^{j-1} \underline{K}_2(\underline{\eta}_k, \underline{\eta}_{j-k}) \right] \underline{\eta}_{i-j} \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

e definindo-se

$$\underline{\tilde{K}}_T^E = \underline{\tilde{K}}_0 + \underline{\tilde{K}}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) \quad (\text{III.13})$$

a equação de equilíbrio (II.48) pode ser finalmente escrita na forma

$$\sum_{i=1}^n \alpha^i \left\{ \underline{\tilde{K}}_T^E \underline{\eta}_i - \lambda_i^F \underline{F} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} \left[\underline{\tilde{K}}_1 (\underline{\eta}_j) + \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{\eta}_j) + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{j-1} \underline{K}_2 (\underline{\eta}_k, \underline{\eta}_{j-k}) \right] \underline{\eta}_{i-j} \right\} = \underline{0} \quad (\text{III.14})$$

Como a equação de equilíbrio deve ser atendida para qualquer α , obtêm-se a partir de (III.14) uma série de equações ordenadas, correspondentes às potências do parâmetro α

$$\alpha \quad [\underline{\tilde{K}}_T^E \underline{\eta}_1 - \lambda_1^F \underline{F}] = \underline{0} \quad (\text{III.15a})$$

$$\alpha^2 \quad [\underline{\tilde{K}}_T^E \underline{\eta}_2 - \lambda_2^F \underline{F} + \underline{K}_1^* \underline{\eta}_1] = \underline{0} \quad (\text{III.15b})$$

$$\alpha^3 \quad [\underline{\tilde{K}}_T^E \underline{\eta}_3 - \lambda_3^F \underline{F} + \underline{K}_1^* \underline{\eta}_2 + \underline{K}_2^* \underline{\eta}_1] = \underline{0} \quad (\text{III.15c})$$

$$\alpha^4 \quad [\underline{\tilde{K}}_T^E \underline{\eta}_4 - \lambda_4^F \underline{F} + \underline{K}_1^* \underline{\eta}_3 + \underline{K}_2^* \underline{\eta}_2 + \underline{K}_3^* \underline{\eta}_1] = \underline{0} \quad (\text{III.15d})$$

\vdots

$$\alpha^i \quad [\underline{\tilde{K}}_T^E \underline{\eta}_i - \lambda_i^F \underline{F} + \sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \underline{\eta}_{i-j}] = \underline{0} \quad (\text{III.15e})$$

onde

$$\underline{K}_1^* = \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_1) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_1) \quad (\text{III.16a})$$

$$\underline{K}_2^* = \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_2) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_2) + \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_1) \quad (\text{III.16b})$$

$$\underline{K}_3^* = \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_3) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_3) + \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_2) + \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{\eta}_2, \underline{\eta}_1)$$

$$\vdots \quad (\text{III.16c})$$

$$\underline{K}_j^* = \frac{1}{2} \underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_j) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{U}^E, \underline{\eta}_j) + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{j-1} \underline{K}_2(\underline{\eta}_k, \underline{\eta}_{j-k}) \quad (\text{III.16d})$$

Nota-se que cada sistema de equações (III.15a), (III.15b), ... é indeterminado pois possui sempre uma incógnita a mais do que o número de equações. Deve-se então considerar a condição adicional de ortogonalidade entre os vetores $\underline{\eta}_j$ e $\underline{\eta}_1$, i.e.

$$\underline{\eta}_1^t \cdot \underline{K}_T^E \cdot \underline{\eta}_j = \underline{\eta}_j^t \cdot \underline{K}_T^E \cdot \underline{\eta}_1 = 0 \quad (\text{III.17})$$

Introduzindo-se inicialmente no sistema de equações de primeira ordem (III.15a) uma condição de partida, como por exemplo

$$\lambda_1^F = 1 \quad (\text{III.18})$$

essas equações (III.15a) se reduzem ao seguinte sistema linear

$$\underline{K}_T^E \underline{\eta}_1 = \underline{F} \quad (\text{III.19})$$

que resolvido fornece η_1 .

Os demais sistemas podem ser resolvidos, com a condição adicional (III.17) da seguinte forma:

$$\underline{K}_T^E \eta_i - \lambda_i^F \underline{F} = - \sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \eta_{i-j} \quad (\text{III.20a})$$

$$\eta_1^t \cdot \underline{K}_T^E \cdot \eta_i = 0 \quad (\text{III.20b})$$

ou de forma matricial

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_T^E & -\underline{F} \\ \eta_1^t \underline{K}_T^E & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \lambda_i^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \eta_{i-j} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

Aplicando-se eliminação de Gauss ao sistema (III.21), resulta em

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_T^E & -\underline{F} \\ 0 & \eta_1^t \underline{F} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_i \\ \lambda_i^F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - \sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \eta_{i-j} \\ \eta_1^t \left(\sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \eta_{i-j} \right) \end{Bmatrix} \quad (\text{III.22})$$

e a partir de (III.22) chega-se às expressões gerais para cálculo de λ_i^F e η_i ,

$$\lambda_i^F = \frac{\eta_1^t \left(\sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \eta_{i-j} \right)}{\eta_1^t \cdot \underline{F}} \quad (\text{III.23})$$

e,

$$\underline{\eta}_i = (\underline{K}_T^E)^{-1} \left(\lambda_i^F \underline{F} - \sum_{j=1}^{i-1} \underline{K}_j^* \underline{\eta}_{i-j} \right) \quad (\text{III.24})$$

A seguir o procedimento será particularizado para o caso de uma estrutura perfeita, para a qual se deseja obter uma aproximação cúbica a partir do ponto de equilíbrio $\underline{U}^E = \underline{0}$, $\lambda^E = 0$ correspondente a estrutura descarregada. Inicialmente, com (III.13)

$$\underline{K}_T^E = \underline{K}_0 + \underline{K}_1(\underline{0}) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{0}, \underline{0}) = \underline{K}_0 \quad (\text{III.25})$$

que aplicada em (III.19) fornece um sistema de equações idêntico àquele da análise linear clássica.

$$\underline{K}_0 \cdot \underline{U}_0 = \underline{F} \quad (\text{III.26})$$

onde o vetor de deslocamentos \bar{e} representado como \underline{U}_0 por se tratar de uma aproximação linear partindo do ponto $(\underline{0}, 0)$.

Aplicando sucessivamente (III.23) e (III.24)

$$\lambda_2^F = \frac{\underline{U}_0^t \cdot \underline{K}_1^* \cdot \underline{U}_0}{\underline{U}_0^t \cdot \underline{F}} \quad (\text{III.27})$$

$$\underline{\eta}_2 = \underline{K}_0^{-1} (\lambda_2^F \underline{F} - \underline{K}_1^* \cdot \underline{U}_0) \quad (\text{III.28})$$

$$\lambda_3^F = \frac{\underline{U}_0^t (\underline{K}_1^* \underline{\eta}_2 + \underline{K}_2^* \underline{U}_0)}{\underline{U}_0^t \cdot \underline{F}} \quad (\text{III.29})$$

$$\underline{\eta}_3 = \underline{K}_0^{-1} (\lambda_3^F \underline{F} - \underline{K}_1^* \underline{\eta}_2 - \underline{K}_2^* \underline{U}_0) \quad (\text{III.30})$$

onde

$$\underline{\tilde{K}}_1^* = \frac{1}{2} \underline{K}_1 (\underline{U}_0) \quad (\text{III.31})$$

$$\underline{\tilde{K}}_2^* = \frac{1}{2} \underline{K}_1 (\underline{\eta}_2) + \frac{1}{6} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \quad (\text{III.32})$$

A aproximação assim obtida é expressa por

$$\underline{U} = \alpha \underline{U}_0 + \alpha^2 \underline{\eta}_2 + \alpha^3 \underline{\eta}_3 \quad (\text{III.33})$$

$$\lambda = \alpha + \alpha^2 \lambda_2^F + \alpha^3 \lambda_3^F \quad (\text{III.34})$$

III.2. DETERMINAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

Utilizando a forma paramétrica para descrever os deslocamentos, dada por (III.1), a equação de equilíbrio crítico (II.51) fica

$$\left[\underline{\tilde{K}}_0 + \underline{\tilde{K}}_1 \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 \left(\underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i, \underline{U}^E + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \right) \right] \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{III.35})$$

a qual, após substituição de (III.4) e (III.5) tem a seguinte forma

$$\left\{ \begin{aligned} & \underline{\tilde{K}}_0 + \underline{\tilde{K}}_1 (\underline{U}^E) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{U}^E) + \sum_{i=1}^n \alpha^i \left[\underline{\tilde{K}}_1 (\underline{\eta}_i) + \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{\eta}_i) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{\eta}_j, \underline{\eta}_{i-j}) \right] \end{aligned} \right\} \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{III.36})$$

Para uma aproximação linear do caminho fundamental, o índice n do somatório será unitário e a equação de equilíbrio crítico é dada por

$$\{ \underline{K}_T^E + \alpha [\underline{K}_1 (\underline{\eta}_1) + \underline{K}_2 (\underline{U}^E, \underline{\eta}_1)] \} \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{III.37})$$

onde \underline{K}_T^E foi definida em (III.13).

A aproximação linear do caminho fundamental é dada, na forma paramétrica, por

$$\underline{U}^F = \underline{U}^E + \alpha \underline{\eta}_1 \quad (\text{III.38a})$$

$$\lambda^F = \lambda^E + \alpha \lambda_1^F \quad (\text{III.38b})$$

Utilizando-se λ^C no lugar de λ^F , em (III.38b), para indicar que se busca uma aproximação de um ponto crítico e lembrando que de acordo com (III.18), $\lambda_1^F = 1$, tem-se que

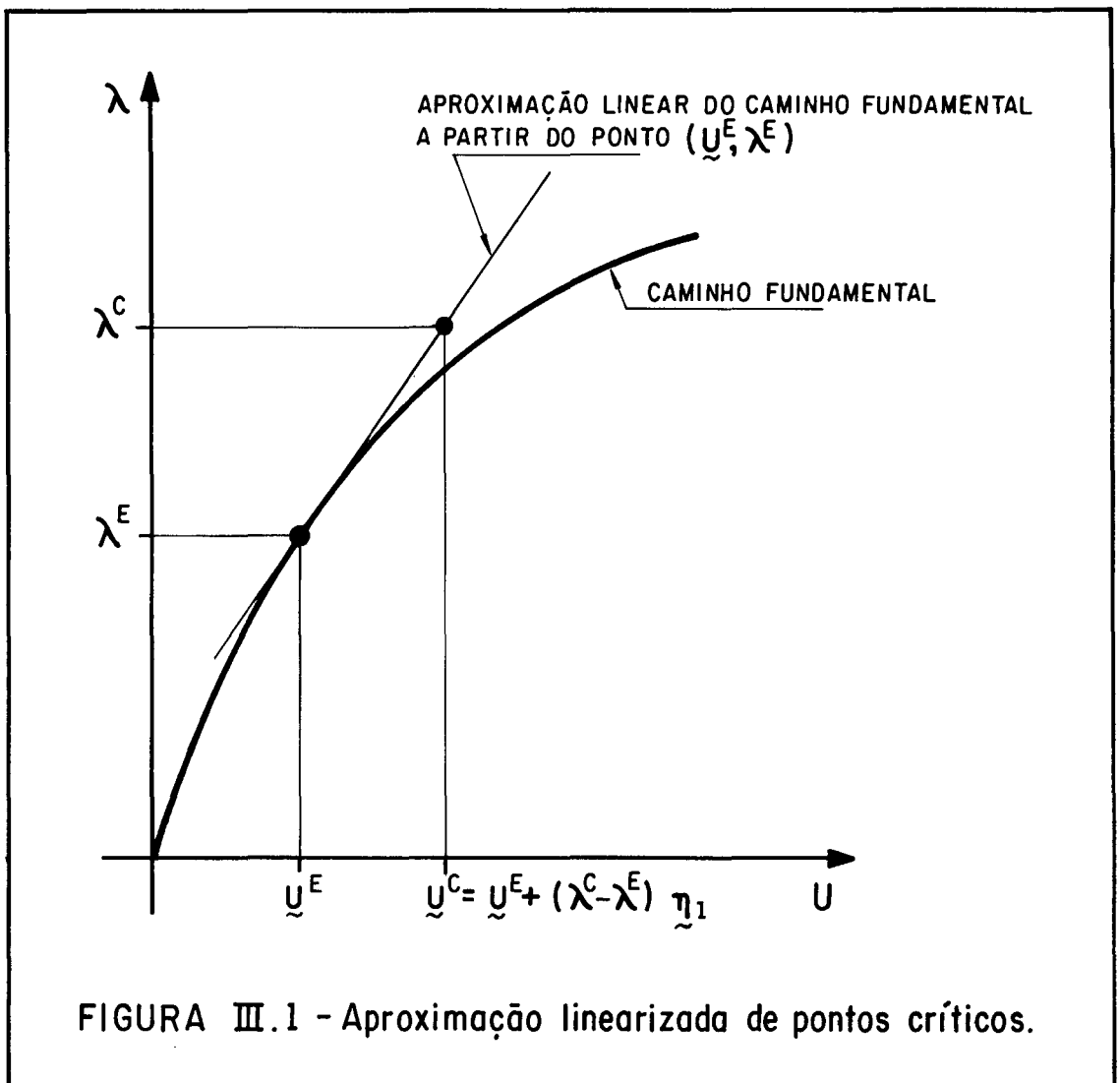
$$\alpha = \lambda^C - \lambda^E \quad (\text{III.39})$$

Substituindo (III.39) em (III.37) chega-se à condição de equilíbrio crítico, expressa por um problema linear de autovalor

$$\{\underline{k}_T^E + (\lambda^C - \lambda^E) [\underline{k}_1(\underline{\eta}_1) + \underline{k}_2(\underline{u}^E, \underline{\eta}_1)]\} \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{III.40})$$

que resolvido fornece, a partir do autovalor $(\lambda^C - \lambda^E)$, a intensidade do carregamento λ^C correspondente ao ponto crítico, além do modo crítico associado, dado pelo autovetor $\underline{\phi}$.

Conhecendo-se λ^C , o vetor de deslocamentos correspondente ao ponto crítico, \underline{u}^C , pode ser obtido recorrendo-se a (III.38a) como mostra a figura III.1.



No caso particular em que a análise é efetuada a partir do ponto de carga nula, o problema de autovalor (III.40) pode ser escrito, observando (III.25) e (III.26), na forma

$$[\underline{K}_0 + \lambda^C \underline{K}_1(\underline{U}_0)] \underline{\phi} = \underline{0} \quad (\text{III.41})$$

Observa-se a semelhança de (III.41) com o problema clássico para determinação de cargas críticas, dado por

$$(\underline{K} + \lambda \underline{K}_G) \underline{\phi} = 0 \quad (\text{I.1})'$$

A diferença entre os dois problemas consiste nas hipóteses simplificadoras adotadas na geração da matriz \underline{K}_G , onde se considera apenas a influência dos esforços axiais, portanto válida somente no caso de estruturas que apresentam comportamento fundamental linear, caracterizado pela ausência de rotações pré-críticas. Por outro lado, adotando-se uma formulação lagrangeana para descrever as relações de formações-deslocamentos, obtêm-se de forma consistente a matriz $\underline{K}_1(\underline{U}_0)$, na qual são consideradas as influências de primeira ordem de translações e rotações nodais. Como é de se esperar, pode-se verificar que os termos da matriz \underline{K}_G estão contidos em $\underline{K}_1(\underline{U}_0)$.

III.3. APROXIMAÇÃO DE CAMINHOS SECUNDÁRIOS

Pode-se aproximar um caminho secundário de maneira semelhante às aproximações do caminho fundamental (ou primário), considerando-se porém que o comportamento pós-crítico sofre influências dos modos fundamentais. Assim partindo-se de um ponto crítico ($\underline{U}^C, \lambda^C$), um ponto sobre o caminho secundário ($\underline{U}^S, \lambda^S$) será aproximado na forma

$$\begin{aligned} \underline{U}^S &= \underline{U}^C + \alpha \underline{\eta}_1 + \alpha^2 \underline{\eta}_2 + \dots + \alpha^n \underline{\eta}_n + \beta \underline{\psi}_1 + \beta^2 \underline{\psi}_2 + \dots + \beta^m \underline{\psi}_m = \\ &= \underline{U}^C + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i + \sum_{i=1}^m \beta^i \underline{\psi}_i \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

$$\lambda^S = \lambda^C + \beta \lambda_1^S + \beta^2 \lambda_2^S + \dots + \beta^m \lambda_m^S = \lambda^C + \sum_{i=1}^m \beta^i \lambda_i^S \quad (\text{III.43})$$

onde

$\sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i$ representa a contribuição dos modos fundamentais (de ordem n),

$\sum_{i=1}^m \beta^i \underline{\psi}_i$ são as contribuições dos modos pós-críticos (de ordem m) e

β é o parâmetro que controla o avanço ao longo do caminho secundário.

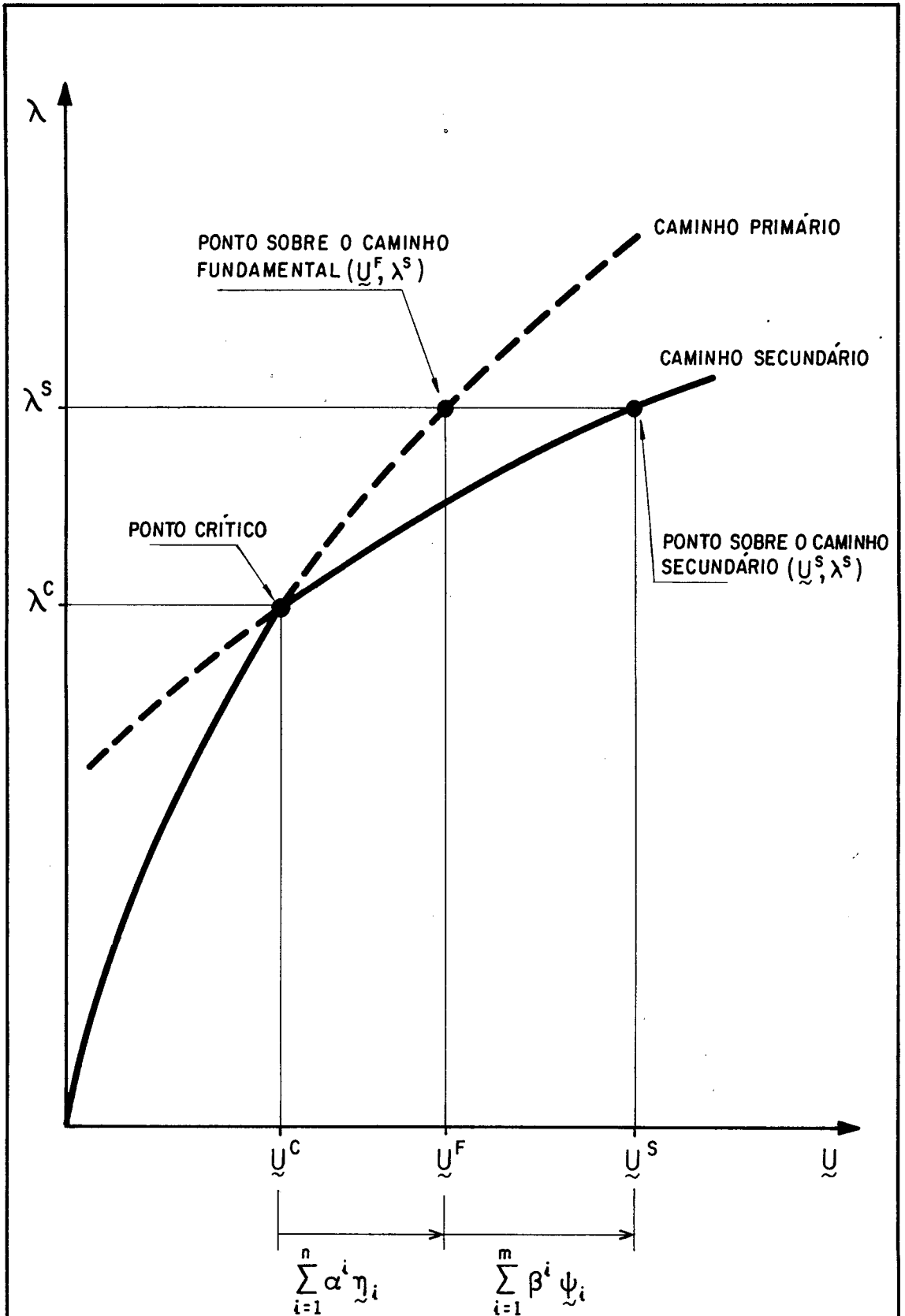


FIGURA III.2 - Aproximação assintótica de um caminho secundário.

A figura (III.2) ilustra esquematicamente o caminho secundário aproximado desta forma, onde nota-se que \underline{u}^F é a aproximação dos deslocamentos de um ponto sobre o caminho fundamental, dada por

$$\underline{u}^F = \underline{u}^C + \sum_{i=1}^n \alpha^i \underline{\eta}_i \quad (\text{III.44})$$

Substituindo (III.42) e (III.43) na equação de equilíbrio (III.48) e empregando (III.44)

$$\left\{ \tilde{K}_0 + \frac{1}{2} \tilde{K}_1 (\underline{u}^F) + \frac{1}{6} K_2 (\underline{u}^F, \underline{u}^F) + \sum_{i=1}^m \beta^i \left[\frac{1}{2} \tilde{K}_1 (\underline{\psi}_i) + \frac{1}{3} K_2 (\underline{u}^F, \underline{\psi}_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} K_2 (\underline{\psi}_j, \underline{\psi}_{i-j}) \right] \right\} \left(\underline{u}^F + \sum_{i=1}^n \beta^i \underline{\psi}_i \right) - \lambda^S \underline{F} = \underline{0} \quad (\text{III.45})$$

e como o ponto $(\underline{u}^F, \lambda^S)$ deve atender à condição de equilíbrio

$$\left[\tilde{K}_0 + \frac{1}{2} \tilde{K}_1 (\underline{u}^F) + \frac{1}{6} K_2 (\underline{u}^F, \underline{u}^F) \right] \underline{u}^F - \lambda^S \underline{F} = \underline{0} \quad (\text{III.46})$$

Sua substituição em (III.45) acompanhada de transformações semelhantes a (III.8) e (III.9) resulta em

$$\begin{aligned}
& \left\{ \left[\widehat{K}_0 + \widehat{K}_1 (\underline{U}^F) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}^F, \underline{U}^F) \right] \left(\sum_{i=1}^m \beta^i \psi_i \right) \right\} + \\
& + \left\{ \sum_{i=1}^m \beta^i \left[\frac{1}{2} \widehat{K}_1 (\psi_i) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}^F, \psi_i) \right] \left(\sum_{i=1}^m \beta^i \psi_i \right) \right\} + \\
& + \left\{ \sum_{i=1}^m \beta^i \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} \underline{K}_2 (\psi_j, \psi_{i-j}) \right] \left(\sum_{i=1}^m \beta^i \psi_i \right) \right\} = 0 \quad (\text{III.47})
\end{aligned}$$

Agora, adotando-se uma aproximação linear para cálculo de \underline{U}^F a partir de \underline{U}^C ,

$$\underline{U}^F = \underline{U}^C + \alpha \eta_1 \quad (\text{III.48})$$

e escrevendo α analogamente $\bar{\alpha}$ (III.39),

$$\alpha = \lambda^S - \lambda^C = \sum_{i=1}^m \beta^i \lambda_i^S \quad (\text{III.49})$$

pode-se com (III.48) e (III.49), desenvolver isoladamente as parcelas de (III.47) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
& \left[\widehat{K}_0 + \widehat{K}_1 (\underline{U}^F) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}^F, \underline{U}^F) \right] \left(\sum_{i=1}^m \beta^i \psi_i \right) = \\
& = \sum_{i=1}^m \beta^i \left[\underline{K}_T^C + \alpha \widehat{K}_1 (\eta_1) + \alpha \underline{K}_2 (\underline{U}^C, \eta_1) + \frac{1}{2} \alpha^2 \underline{K}_2 (\eta_1, \eta_1) \right] \psi_i = \\
& = \sum_{i=1}^m \beta^i \left(\underline{K}_T^C \psi_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i-j}^S \left\{ \left[\widehat{K}_1 (\eta_1) + \underline{K}_2 (\underline{U}^C, \eta_1) \right] \psi_j + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_{j-k}^S \underline{K}_2 (\eta_1, \eta_1) \psi_k \right\} \right) \quad (\text{III.50})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \beta^i \left[\frac{1}{2} \bar{K}_1 (\underline{\psi}_i) + \frac{1}{2} K_2 (\underline{U}^F, \underline{\psi}_i) \right] \left(\sum_{i=1}^m \beta^i \underline{\psi}_i \right) = \\
& = \sum_{i=1}^m \beta^i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left[\frac{1}{2} \bar{K}_1 (\underline{\psi}_j) + \frac{1}{2} K_2 (\underline{U}^C, \underline{\psi}_j) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \alpha K_2 (\underline{\eta}_1, \underline{\psi}_j) \right] \underline{\psi}_{i-j} \right\} = \\
& = \sum_{i=1}^m \beta^i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \left[\frac{1}{2} \bar{K}_1 (\underline{\psi}_j) + \frac{1}{2} K_2 (\underline{U}^C, \underline{\psi}_j) \right] \underline{\psi}_{i-j} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} \lambda_{i-j}^S K_2 (\underline{\eta}_1, \underline{\psi}_k) \underline{\psi}_{j-k} \right\} \right) \quad \text{(III.51)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \beta^i \left[\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{6} K_2 (\underline{\psi}_j, \underline{\psi}_{i-j}) \right] \left(\sum_{i=1}^m \beta^i \underline{\psi}_i \right) = \\
& = \sum_{i=1}^m \beta^i \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} \left[\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{6} K_2 (\underline{\psi}_k, \underline{\psi}_{j-k}) \underline{\psi}_{i-j} \right] \right\} \quad \text{(III.52)}
\end{aligned}$$

Substituindo (III.50), (III.51) e (III.52) em (III.47) pode-se reescrever a equação de equilíbrio na forma final

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^m \beta^i \left(\underline{K}_T^C \underline{\psi}_i + \sum_{j=1}^{i-1} \left\{ \lambda_{i-j}^S [\underline{\widehat{K}}_1(\underline{\eta}_1) + \underline{K}_2(\underline{U}^C, \underline{\eta}_1)] \underline{\psi}_j + \right. \right. \\
& \quad + \frac{1}{2} [\underline{\widehat{K}}_1(\underline{\psi}_j) + \underline{K}_2(\underline{U}^C, \underline{\psi}_j)] \underline{\psi}_{i-j} + \\
& \quad + \sum_{k=1}^{j-1} \left[\frac{1}{2} \lambda_{i-j}^S \cdot \lambda_{j-k}^S \cdot \underline{K}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_1) \underline{\psi}_k + \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \lambda_{i-j}^S \underline{K}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\psi}_k) \underline{\psi}_{j-k} + \frac{1}{6} \underline{K}_2(\underline{\psi}_k, \underline{\psi}_{j-k}) \underline{\psi}_{i-j} \right] \right\} \right) = 0
\end{aligned} \tag{III.53}$$

onde

$$\underline{K}_T^C = \underline{\widehat{K}}_0 + \underline{\widehat{K}}_1(\underline{U}^C) + \frac{1}{2} \underline{K}_2(\underline{U}^C, \underline{U}^C) \tag{III.54}$$

A partir de (III.53) obtêm-se uma série de equações ordenadas, sendo o primeiro sistema de equações

$$\underline{K}_T^C \underline{\psi}_1 = 0 \tag{III.55}$$

que pode ser resolvido tomando-se como condição de partida

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\phi} \tag{III.56}$$

onde $\underline{\phi}$ é o modo crítico associado ao caminho secundário que se deseja aproximar.

Justifica-se essa hipótese tomando como ponto de equilíbrio o par $(\underline{U}^C, \lambda^C)$ na equação de equilíbrio crítico

(III.40) e chegando-se a

$$\{K_T^C + (\lambda^C - \lambda^C) [K_1(\eta_1) + K_2(U^C, \eta_1)]\} \phi = K_T^C \cdot \phi = 0 \quad (III.57)$$

O segundo sistema de equações de (III.53), relativo a β^2 é

$$K_T^C \psi_2 + \lambda^S [K_1(\eta_1) + K_2(U^C, \eta_1)] \psi_1 + \frac{1}{2} [K_1(\psi_1) + K_2(U^C, \psi_1)] \psi_1 = 0 \quad (III.58)$$

Considerando a condição de ortogonalidade

$$\phi^t \cdot K_T^C \cdot \psi_i = 0 \quad (III.59)$$

é possível após pré-multiplicar (III.58) por ϕ^t verificar que o primeiro termo se anula obtendo-se

$$\lambda_1^S = \frac{1}{2} \frac{\phi^t [K_1(\phi) + K_2(U^C, \phi)] \phi}{\phi^t [K_1(\eta_1) + K_2(U^C, \eta_1)] \phi} \quad (III.60)$$

Com λ_1^S , (III.58) pode ser reescrita na forma do seguinte sistema de equações, que resolvido fornece ψ_2 ,

$$K_T^C \psi_2 = Q \quad (III.61)$$

onde

$$Q = - \{ \lambda_1^S [K_1(\eta_1) + K_2(U^C, \eta_1)] + \frac{1}{2} [K_1(\phi) + K_2(U^C, \phi)] \} \phi \quad (III.62)$$

O terceiro sistema de equações, correspondente a β^3 ,

será

$$\begin{aligned}
 & \underline{\kappa}_T^C \underline{\psi}_3 + \lambda_2^S [\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_1) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\eta}_1)] \underline{\phi} + \frac{1}{2} [\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\phi}) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\phi})] \underline{\psi}_2 + \\
 & + \lambda_1^S [\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_1) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\eta}_1)] \underline{\psi}_2 + \frac{1}{2} [\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\psi}_2) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\psi}_2)] \underline{\phi} + \\
 & + \frac{1}{2} \lambda_1^S - \lambda_1^S \underline{\kappa}_{22}(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_1) \underline{\phi} + \frac{1}{2} \lambda_1^S \underline{\kappa}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\phi}) \underline{\phi} + \\
 & + \frac{1}{6} \underline{\kappa}_2(\underline{\phi}, \underline{\phi}) \underline{\phi} = 0
 \end{aligned} \tag{III.63}$$

Pré-multiplicando (III.63) por $\underline{\phi}^t$ obtêm-se

$$\begin{aligned}
 & \underline{\phi}^t \{ \underline{\tilde{K}}_1(\underline{\phi}) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\phi}) + \lambda_1^S [\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_1) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\eta}_1)] \} \underline{\psi}_2 + \\
 \lambda_2^S = & - \frac{\underline{\phi}^t [-\frac{1}{2} \lambda_1^S \cdot \underline{\kappa}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\eta}_1) + \frac{1}{2} \lambda_1^S \underline{\kappa}_2(\underline{\eta}_1, \underline{\phi}) + \frac{1}{6} \underline{\kappa}_2(\underline{\phi}, \underline{\phi})] \underline{\phi}}{\underline{\phi}^t [\underline{\tilde{K}}_1(\underline{\eta}_1) + \underline{\kappa}_2(\underline{U}^C, \underline{\eta}_1)] \underline{\phi}}
 \end{aligned} \tag{III.64}$$

Com (III.56), (III.60), (III.61) e (III.64) tem-se uma aproximação quadrática de um caminho secundário, associada ao modo crítico $\underline{\phi}$, dada por

$$\underline{U}^S = \underline{U}^C + (\lambda^S - \lambda^C) \underline{\eta}_1 + \beta \underline{\phi} + \beta^2 \underline{\psi}_2 \tag{III.65}$$

$$\lambda^S = \lambda^C + \beta \lambda_1^S + \beta^2 \lambda_2^S \tag{III.66}$$

Continuando-se o processo de solução dos sistemas fornecidos por (III.53), é possível obter aproximações de ordem superior.

CAPÍTULO IV

APROXIMAÇÃO MODAL ASSINTÓTICA DE CAMINHOS DE EQUILÍBRIO

IV.1. FIXAÇÃO DOS MODOS DE DESLOCAMENTOS

A análise modal apresentada neste capítulo é idêntica àquela proposta por ANTONINI [5], que por sua vez foi baseada na formulação sugerida por CARNOY [12,13] para estruturas discretizadas. Com a experiência de trabalhos anteriores [18,19] aplicados a sistemas contínuos foi possível, estudando-se a influência das formas modais, chegar a um reduzido número de modos de deslocamentos.

Assim, para aproximar os deslocamentos de uma estrutura de comportamento geometricamente não-linear, será utilizada uma combinação da forma

$$\underline{U} = \lambda \underline{U}_0 + a_j \underline{\phi}_j + \underline{\psi}_j \quad (\text{IV.1})$$

onde $\lambda \underline{U}_0$ é a tangente ao caminho fundamental no ponto $(\underline{0}, 0)$, dada em (III.26),

$a_i \phi_i$ são as contribuições dos modos críticos, dados por alguns dos autovetores calculados na análise linearizada de equilíbrio crítico, a partir de (III.40), e

$\underline{\psi}_i$ são correções, correspondentes a deslocamentos incrementais, considerados de segunda ordem.

Supondo-se que os pontos críticos estejam relativamente espaçados e assim não ocorra uma considerável interação entre os modos, será utilizado apenas um modo crítico, ϕ , associado ao caminho pós-crítico que se deseja aproximar.

Baseando-se na técnica da perturbação, as correções $\underline{\psi}_i$ serão obtidas a partir das aproximações assintóticas dos caminhos fundamental e pós-crítico. Assim, as correções utilizadas serão as seguintes

$$\underline{\psi}_1 = \underline{\psi}_2 \quad (IV.2)$$

$$\underline{\psi}_2 = \underline{\eta}_2^* \quad (IV.3)$$

$$\underline{\psi}_3 = \underline{\eta}_3^* \quad (IV.4)$$

onde $\underline{\psi}_2$ é a contribuição quadrática do caminho pós-crítico, $\underline{\eta}_2^*$ é parte da contribuição quadrática do caminho fundamental não contida em ϕ e $\underline{\psi}_1$, dada por (IV.5b),

$$\underline{\eta}_2^{**} = \underline{\eta}_2 - \frac{\underline{\eta}_2 \cdot \phi}{\phi \cdot \phi} \phi \quad (IV.5a)$$

$$\eta_2^* = \eta_2^{**} - \frac{\eta_2^{**t} \cdot \underline{\Psi}_1}{\underline{\Psi}_1^t \cdot \underline{\Psi}_1} \underline{\Psi}_1 \quad (\text{IV.5b})$$

e η_3^* correspondente à parte da contribuição cúbica do caminho fundamental não contida em $\underline{\phi}$, $\underline{\Psi}_1$ e $\underline{\Psi}_2$, calculada conforme (IV.6c)

$$\eta_3^{***} = \eta_3 - \frac{\eta_3^t \cdot \underline{\phi}}{\underline{\phi}^t \cdot \underline{\phi}} \underline{\phi} \quad (\text{IV.6a})$$

$$\eta_3^{**} = \eta_3^{***} - \frac{\eta_3^{***t} \cdot \underline{\Psi}_1}{\underline{\Psi}_1^t \cdot \underline{\Psi}_1} \underline{\Psi}_1 \quad (\text{IV.6b})$$

$$\eta_3^* = \eta_3^{**} - \frac{\eta_3^{**t} \cdot \underline{\Psi}_2}{\underline{\Psi}_2^t \cdot \underline{\Psi}_2} \underline{\Psi}_2 \quad (\text{IV.6c})$$

Normalizando-se os modos em relação a \underline{U}_0 ,

$$\bar{\phi}_1 = \sqrt{\frac{\underline{U}_0^t \cdot \underline{U}_0}{\underline{\phi}^t \cdot \underline{\phi}}} \underline{\phi} \quad (\text{IV.7a})$$

$$\bar{\phi}_{i+1} = \sqrt{\frac{\underline{U}_0^t \cdot \underline{U}_0}{\underline{\Psi}_i^t \cdot \underline{\Psi}_i}} \underline{\Psi}_i \quad ; \quad i = 1 \rightarrow 3 \quad (\text{IV.7b})$$

chega-se a forma final

$$\underline{U} = \lambda \underline{U}_0 + a_i \bar{\phi}_i \quad ; \quad i = 1 \rightarrow 4 \quad (\text{IV.8})$$

IV.2. EQUAÇÕES MODAIS DE EQUILÍBRIO

A substituição de (IV.8) em (II.43a) fornece o funcional de energia potencial total reduzida, assim denominado pelo fato de que os graus de liberdade da estrutura foram reduzidos às amplitudes, a_j , dos modos $\bar{\phi}_j$.

$$\begin{aligned}
 V^* = (\lambda \underline{U}_0 + a_j \bar{\phi}_j)^t & \left\{ \left[\frac{1}{2} \bar{K}_0 + \frac{1}{6} \bar{K}_1 (\lambda \underline{U}_0 + a_j \bar{\phi}_j) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{24} \bar{K}_2 (\lambda \underline{U}_0 + a_j \bar{\phi}_j, \lambda \underline{U}_0 + a_j \bar{\phi}_j) \right] (\lambda \underline{U}_0 + a_j \bar{\phi}_j) - \right. \\
 & \left. - \lambda \underline{F} \right\} = V_0^* + V_1^* + V_2^* + V_3^* + V_4^*
 \end{aligned} \tag{IV.9}$$

onde

$$V_0^* = \lambda \underline{U}_0^t \left\{ \left[\frac{\lambda}{2} \bar{K}_0 + \frac{\lambda^2}{6} \bar{K}_1 (\underline{U}_0) + \frac{\lambda^3}{24} \bar{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \underline{U}_0 - \lambda \underline{F} \right\} \tag{IV.10a}$$

$$V_1^* = a_j \bar{\phi}_j^t \left\{ \left[\lambda \bar{K}_0 + \frac{\lambda^2}{2} \bar{K}_1 (\underline{U}_0) + \frac{\lambda^3}{6} \bar{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \underline{U}_0 - \lambda \underline{F} \right\} \tag{IV.10b}$$

$$V_2^* = a_j a_j \bar{\phi}_i^t \left[\frac{1}{2} \bar{K}_0 + \frac{\lambda}{2} \bar{K}_1 (\underline{U}_0) + \frac{\lambda^2}{4} \bar{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \bar{\phi}_j \tag{IV.10c}$$

$$V_3^* = a_j a_j a_k \bar{\phi}_i^t \left[\frac{1}{6} \bar{K}_1 (\bar{\phi}_k) + \frac{\lambda}{6} \bar{K}_2 (\underline{U}_0, \bar{\phi}_k) \right] \bar{\phi}_j \tag{IV.10d}$$

$$V_4^* = a_j a_j a_k a_\ell \bar{\phi}_i^t \left[\frac{1}{24} \bar{K}_2 (\bar{\phi}_k, \bar{\phi}_\ell) \right] \bar{\phi}_j \tag{IV.10e}$$

Aplicando-se a condição de estacionaridade, dada por (II.46), ao funcional (IV.9)

$$\begin{aligned}
 \delta V^* = \delta a_j \bar{\phi}_j^t & \left\{ \lambda (\underline{K}_0 \underline{U}_0 - \underline{F}) + \left[\lambda (\underline{K}_1 + \underline{K}_2) + \frac{\lambda^2}{2} \hat{\underline{K}}_1 (\underline{U}_0) + \right. \right. \\
 & + \frac{\lambda^3}{6} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \left. \right] \underline{U}_0 + a_j \left[\hat{\underline{K}}_0 + \lambda \hat{\underline{K}}_1 (\underline{U}_0) + \right. \\
 & + \frac{\lambda^2}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \left. \right] \bar{\phi}_j + a_j a_k \left[\frac{1}{2} \hat{\underline{K}}_1 (\bar{\phi}_k) + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\lambda}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \bar{\phi}_k) \right] \bar{\phi}_j + a_j a_k a_\ell \left[\frac{1}{6} \underline{K}_2 (\phi_k, \bar{\phi}_\ell) \right] \bar{\phi}_j \right\} = 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.11}$$

Observando-se (III.26), nota-se que o primeiro termo entre parênteses se anula e a equação (IV.11) pode ser escrita na forma do seguinte sistema não-linear

$$\begin{aligned}
 h_j(\underline{a}, \lambda) &= \lambda A_j + \lambda^2 B_j + \lambda^3 C_j + \\
 & a_j D_{ij} + \lambda a_j E_{ij} + \lambda^2 a_j F_{ij} + \\
 & a_j a_k G_{ijk} + \lambda a_j a_k H_{ijk} + \\
 & a_j a_k a_\ell I_{ijkl} = 0
 \end{aligned}
 \tag{IV.12}$$

onde

$$A_j = \bar{\phi}_j^t (\underline{K}_1 + \underline{K}_2) \underline{U}_0
 \tag{IV.13a}$$

$$B_i = \frac{1}{2} \bar{\phi}_i^t \hat{K}_1(\underline{U}_0) \underline{U}_0 \quad (\text{IV.13b})$$

$$C_i = \frac{1}{6} \bar{\phi}_i^t K_2(\underline{U}_0, \underline{U}_0) \underline{U}_0 \quad (\text{IV.13c})$$

$$D_{ij} = \bar{\phi}_i^t \hat{K}_0 \bar{\phi}_j \quad (\text{IV.13d})$$

$$E_{ij} = \bar{\phi}_i^t \hat{K}_1(\underline{U}_0) \bar{\phi}_j \quad (\text{IV.13e})$$

$$F_{ij} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_i^t K_2(\underline{U}_0, \underline{U}_0) \bar{\phi}_j \quad (\text{IV.13f})$$

$$G_{ijk} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_i^t \hat{K}_1(\bar{\phi}_k) \bar{\phi}_j \quad (\text{IV.13g})$$

$$H_{ijk} = \frac{1}{2} \bar{\phi}_i^t K_2(\underline{U}_0, \bar{\phi}_k) \bar{\phi}_j \quad (\text{IV.13h})$$

$$I_{ijkl} = \frac{1}{6} \bar{\phi}_i^t K_2(\bar{\phi}_k, \bar{\phi}_l) \bar{\phi}_j \quad (\text{IV.13i})$$

Deve-se notar que, de acordo com as propriedades das matrizes \hat{K}_0 , \hat{K}_1 e K_2

$$D_{ij} = D_{ji} \quad (\text{IV.14a})$$

$$E_{ij} = E_{ji} \quad (\text{IV.14b})$$

$$F_{ij} = F_{ji} \quad (\text{IV.14c})$$

$$G_{ijk} = G_{ikj} = G_{jik} = G_{jki} = G_{kij} = G_{kji} \quad (\text{IV.14d})$$

$$H_{ijk} = H_{ikj} = \dots = H_{kji} \quad (\text{IV.14e})$$

$$I_{ijkl} = I_{ijlk} = \dots = I_{lkji} \quad (\text{IV.14f})$$

É importante observar que esta formulação apresenta como vantagem, a possibilidade de se analisar a influência de imperfeições geométricas utilizando-se a mesma combinação modal relativa a estrutura perfeita. Para tal, basta considerar a influência das imperfeições nos coeficientes A_i , B_i , D_{ij} , E_{ij} e G_{ijk} , enquanto os demais não se alteram.

Na solução do sistema não-linear (IV.12), a variação das amplitudes, a_i , ao longo de um caminho de equilíbrio, corresponde, no caso da análise incremental clássica, à atualização da matriz tangente a cada incremento de carga. Na análise modal, a solução incremental do sistema (IV.12) apenas determina a contribuição de cada modo, a medida em que se incrementa a variável de controle.

IV.3. TRUNCAMENTO DAS EQUAÇÕES MODAIS DE EQUILÍBRIO

Na combinação modal proposta em (IV.1) nota-se que são consideradas as contribuições de até segunda ordem (Ψ_i), sendo assim, é necessário que se verifique a influência de termos de ordem superior, para que os coeficientes do sistema (IV.12) sejam aproximados de forma consistente. Conside

rando então que o vetor de deslocamento seja descrito por

$$U = \lambda \underline{U}_0 + a \underline{\phi} + b_i \underline{\Psi}_{2i} + c_j \underline{\Psi}_{3j} \quad (\text{IV.15})$$

onde

a é amplitude do modo crítico $\underline{\phi}$,

b_i são funções de segunda ordem em a e λ , correspondentes às amplitudes dos modos de contribuição quadrática $\underline{\Psi}_{2i}$, e

c_j são funções de terceira ordem em a e λ , correspondentes às amplitudes dos modos de contribuição cúbica $\underline{\Psi}_{3j}$,

o funcional (IV.9) pode ser reescrito como

$$V(a; \lambda) = V_0(\lambda) + V_1(a; \lambda) + V_2(a; \lambda) + V_3(a; \lambda) + \dots \quad (\text{IV.16})$$

sendo as parcelas V_0, V_1, V_2, \dots apresentadas no quadro (IV.1), onde as linhas tracejadas delimitam termos de mesma ordem em a e λ .

Quadro IV.1 - Contribuições ao funcional de EPT

$$V(\lambda \underline{u}_0 + a \underline{\phi} + b \underline{\psi}_2 + c \underline{\psi}_3) = V_0 + V_1(\xi) + V_2(\xi) + \dots$$

$$a = f(\xi)$$

$$b = f(\xi^2)$$

$$c = f(\xi^3)$$

2ª ordem (em ξ e λ)	3ª ordem	4ª ordem	5ª ordem	6ª ordem
$V_0 = \underline{u}_0^t \left\{ \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \bar{K}_0 \underline{u}_0 - \underline{F} \right) + \right.$	$\left. \left[\frac{\lambda^3}{6} \bar{K}_1(\underline{u}_0) + \right. \right.$	$\left. \left. \frac{\lambda^4}{24} K_2(\underline{u}_0, \underline{u}_0) \right] \underline{u}_0 \right\}$		
$V_1 = \xi \underline{\phi}^t \left\{ \lambda (\bar{K}_0 \underline{u}_0 - \underline{F}) + \right.$	$\left. \left[\frac{\lambda^2}{2} \bar{K}_1(\underline{u}_0) + \right. \right.$	$\left. \left. \frac{\lambda^3}{6} K_2(\underline{u}_0, \underline{u}_0) \right] \underline{u}_0 \right\}$		
$V_2 = \xi^2 \underline{\phi}^t \left[\frac{1}{2} \bar{K}_0 + \right.$	$\frac{\lambda}{2} \bar{K}_1(\underline{u}_0) +$	$\frac{\lambda^2}{4} K_2(\underline{u}_0, \underline{u}_0) \underline{\phi} +$		
$+ \xi^2 \underline{\psi}_2^t \left\{ \right.$	$\lambda (\bar{K}_0 \underline{u}_0 - \underline{F}) +$	$\left[\frac{\lambda^2}{2} \bar{K}_1(\underline{u}_0) + \right.$	$\left. \frac{\lambda^3}{6} K_2(\underline{u}_0, \underline{u}_0) \right] \underline{u}_0 \left. \right\}$	
$V_3 = \xi^3 \underline{\phi}^t \left[\right.$	$\frac{1}{6} \bar{K}_1(\underline{\phi}) +$	$\frac{\lambda}{6} K_2(\underline{u}_0, \underline{\phi}) \underline{\phi} +$		
$+ \xi^3 \underline{\psi}_2^t \left[\right.$	$\bar{K}_0 +$	$\lambda \bar{K}_1(\underline{u}_0) +$	$\frac{\lambda^2}{2} K_2(\underline{u}_0, \underline{u}_0) \underline{\phi} +$	
$+ \xi^3 \underline{\psi}_3^t \left\{ \right.$		$\lambda (\bar{K}_0 \underline{u}_0 - \underline{F}) +$	$\left[\frac{\lambda^2}{2} \bar{K}_1(\underline{u}_0) + \right.$	$\left. \frac{\lambda^3}{6} K_2(\underline{u}_0, \underline{u}_0) \right] \underline{u}_0 \left. \right\}$

Quadro IV.1 (continuação)

4ª ordem	5ª ordem	6ª ordem	7ª ordem
$V_4 = \xi^4 \phi^t \left[\frac{1}{24} K_2 (\phi, \phi) \right] \phi +$			
$+ \xi^4 \psi_2^t \left[\frac{1}{2} \bar{K}_1 (\phi) +$	$\frac{\lambda}{2} K_2 (\underline{U}_0, \phi) \right] \phi +$		
$+ \xi^4 \psi_2^t \left[\frac{1}{2} \bar{K}_0 +$	$\frac{\lambda}{2} \bar{K}_2 (\underline{U}_0) +$	$\frac{\lambda^2}{4} K_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \psi_2 +$	
$+ \xi^4 \psi_3^t \left[\bar{K}_0 +$	$\lambda \bar{K}_1 (\underline{U}_0) +$	$\frac{\lambda^2}{2} K_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \phi$	
$V_5 = \xi^5 \psi_2^t \left[$	$\frac{1}{6} K_2 (\phi, \phi) \right] \phi +$		
$+ \xi^5 \psi_2^t \left[$	$\frac{1}{2} \bar{K}_1 (\phi) +$	$\frac{\lambda}{2} K_2 (\underline{U}_0, \phi) \right] \psi_2 +$	
$+ \xi^5 \psi_3^t \left[$	$\frac{1}{2} \bar{K}_1 (\phi) +$	$\frac{\lambda}{2} K_2 (\underline{U}_0, \phi) \right] \phi +$	
$+ \xi^5 \psi_2^t \left[$	$\bar{K}_0 +$	$\lambda \bar{K}_1 (\underline{U}_0) +$	$\frac{\lambda^2}{2} K_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \psi_3$

Quadro IV.1 (continuação)

6ª ordem	7ª ordem	8ª ordem
$V_6 = \xi^6 \underline{\Psi}_2^t \left[\frac{1}{4} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_2, \phi) \right] \phi +$		
$+ \xi^6 \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{6} \underline{K}_2 (\phi, \phi) \right] \phi +$		
$+ \xi^6 \underline{\Psi}_2^t \left[\frac{1}{6} \bar{\underline{K}}_1 (\underline{\Psi}_2) + \right.$	$\left. \frac{\lambda}{6} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{\Psi}_2) \right] \underline{\Psi}_2 +$	
$+ \xi^6 \underline{\Psi}_2^t \left[\bar{\underline{K}}_1 (\phi) + \right.$	$\left. \lambda \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \phi) \right] \underline{\Psi}_3 +$	
$+ \xi^6 \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{2} \bar{\underline{K}}_0 + \right.$	$\left. \frac{\lambda}{2} \bar{\underline{K}}_1 (\underline{U}_0) + \right.$	$\left. \frac{\lambda^2}{4} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0) \right] \underline{\Psi}_3$
$V_7 = \xi^7 \underline{\Psi}_2^t \left[\right.$	$\left. \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_3, \phi) \right] \phi +$	
$+ \xi^7 \underline{\Psi}_2^t \left[\right.$	$\left. \frac{1}{6} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_2, \phi) \right] \underline{\Psi}_2 +$	
$+ \xi^7 \underline{\Psi}_2^t \left[\right.$	$\left. \frac{1}{2} \bar{\underline{K}}_1 (\underline{\Psi}_2) + \right.$	$\left. \frac{\lambda}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{\Psi}_2) \right] \underline{\Psi}_3 +$
$+ \xi^7 \underline{\Psi}_3^t \left[\right.$	$\left. \frac{1}{2} \bar{\underline{K}}_1 (\phi) + \right.$	$\left. \frac{\lambda}{2} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \phi) \right] \underline{\Psi}_3$

Quadro IV.1 (continuação)

8ª ordem

$$V_8 = \xi^8 \underline{\Psi}_2^t \left[\frac{1}{24} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_2, \underline{\Psi}_2) \right] \underline{\Psi}_2 +$$

$$+ \xi^8 \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{2} \underline{\tilde{K}}_1 (\underline{\Psi}_2) + \right.$$

$$+ \xi^8 \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_2, \underline{\phi}) \right] \underline{\Psi}_2 +$$

$$+ \xi^8 \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{4} \underline{K}_2 (\underline{\phi}, \underline{\phi}) \right] \underline{\Psi}_3$$

9ª ordem

$$V_9 = \xi^9 \underline{\Psi}_2^t \left[\frac{1}{6} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_2, \underline{\Psi}_3) \right] \underline{\Psi}_2 +$$

$$+ \xi^9 \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{6} \underline{\tilde{K}}_1 (\underline{\Psi}_3) + \frac{1}{2} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_2, \underline{\phi}) + \right.$$

10ª ordem

$$V_{10} = \xi^{10} \underline{\Psi}_2^t \left[\frac{\lambda}{6} \underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{\Psi}_3) \right] \underline{\Psi}_3 +$$

$$\frac{1}{4} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_3, \underline{\Psi}_3) \underline{\Psi}_2 +$$

$$+ \xi^{10} \underline{\Psi}_3^t \left[\frac{1}{6} \underline{K}_2 (\underline{\Psi}_3, \underline{\phi}) \right] \underline{\Psi}_3$$

Quadro IV.1 (continuação)

11ª ordem

12ª ordem

$$V_{11} = \xi^{11} \underline{\psi}_2^t \left[\frac{1}{6} K_2 (\underline{\psi}_3, \underline{\psi}_3) \right] \underline{\psi}_3$$

$$V_{12} = \xi^{12} \underline{\psi}_3^t \left[\right.$$

$$\left. \frac{1}{24} K_2 (\underline{\psi}_3, \underline{\psi}_3) \right] \underline{\psi}_3$$

Analisando-se o quadro (IV.1), é possível classificar os coeficientes do sistema (IV.12) em função da ordem de suas contribuições, como exposto no quadro (IV.2).

Os índices entre parênteses correspondem à ordem dos modos que compõem o coeficiente. Assim o índice (1) é relativo aos modos de primeira ordem, no caso apenas $\bar{\Phi}_1$, e (2) aos modos $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}_3$ e $\bar{\Phi}_4$. Por exemplo, $E_{(11)}$ corresponde a E_{11} , $E_{(12)}$ aos termos

$$E_{12} \quad E_{13} \quad E_{14}$$

$$E_{21}$$

$$E_{31}$$

$$E_{41}$$

e $E_{(22)}$ a

$$E_{22} \quad E_{23} \quad E_{24}$$

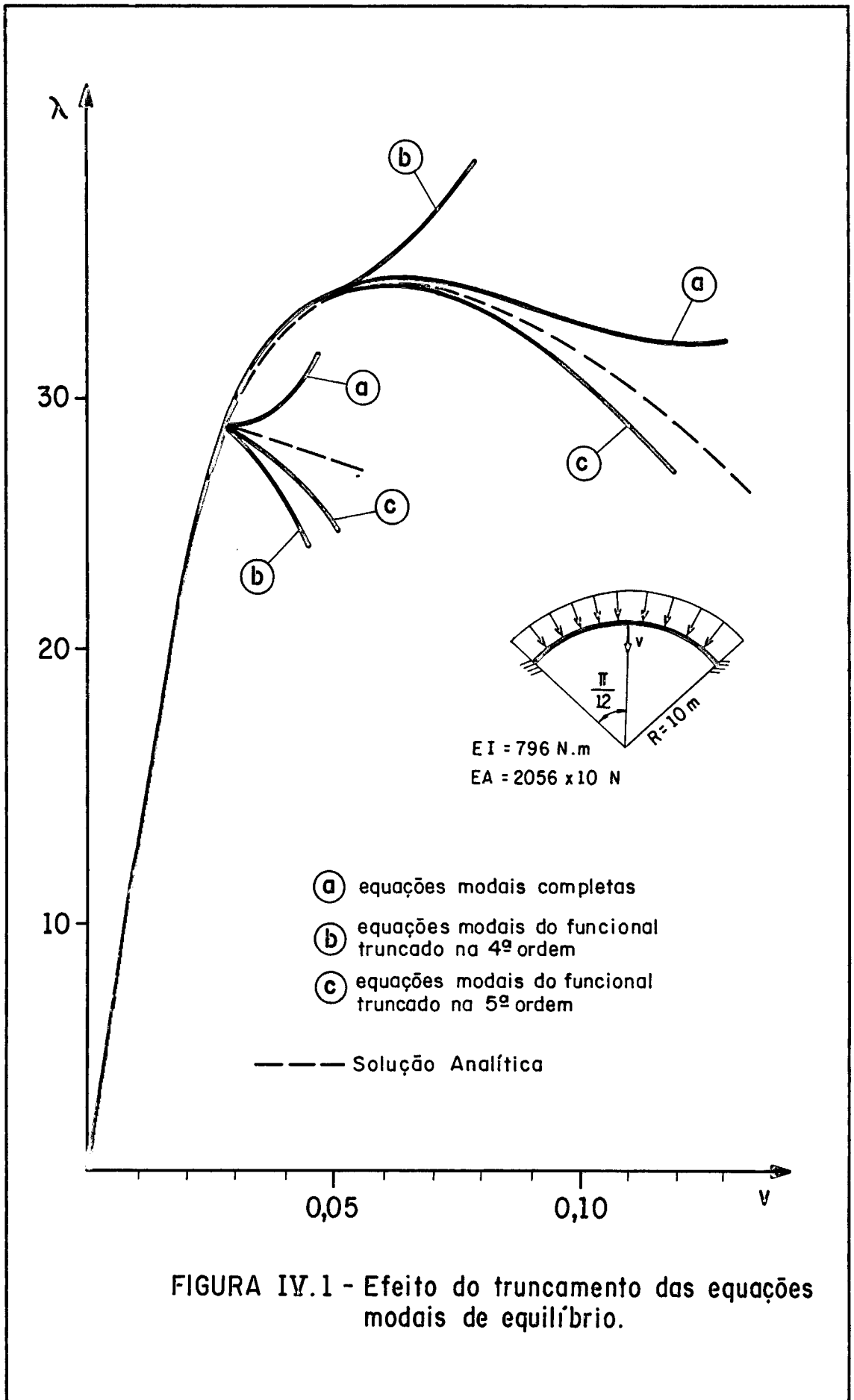
$$E_{32} \quad E_{33} \quad E_{34}$$

$$E_{42} \quad E_{43} \quad E_{44}$$

Quadro IV.2 - Identificação da ordem dos coeficientes do sistema (IV.12)

2ª ordem	3ª ordem	4ª ordem	5ª ordem	6ª ordem	7ª ordem	8ª ordem	9ª ordem	10ª ordem	11ª ordem	12ª ordem			
A ₍₁₎	A ₍₂₎	A ₍₃₎											
	B ₍₁₎	B ₍₂₎	B ₍₃₎										
		C ₍₁₎	C ₍₂₎	C ₍₃₎									
D ₍₁₁₎	D ₍₁₂₎	D ₍₁₃₎											
		D ₍₂₂₎	D ₍₂₃₎	D ₍₃₃₎									
	E ₍₁₁₎	E ₍₁₂₎	E ₍₁₃₎										
			E ₍₂₂₎	E ₍₂₃₎	E ₍₃₃₎								
		F ₍₁₁₎	F ₍₁₂₎	F ₍₁₃₎									
	G ₍₁₁₁₎	G ₍₁₁₂₎	G ₍₁₁₃₎		F ₍₂₂₎	F ₍₂₃₎	F ₍₃₃₎						
				G ₍₁₂₂₎	G ₍₁₂₃₎	G ₍₁₃₃₎							
				G ₍₂₂₂₎	G ₍₂₂₃₎	G ₍₂₃₃₎	G ₍₃₃₃₎						
			H ₍₁₁₁₎	H ₍₁₁₂₎	H ₍₁₁₃₎								
					H ₍₁₂₂₎	H ₍₁₂₃₎	H ₍₁₃₃₎						
			I ₍₁₁₁₁₎	I ₍₁₁₁₂₎	I ₍₁₁₁₃₎		H ₍₂₂₂₎	H ₍₂₂₃₎	H ₍₂₃₃₎	H ₍₃₃₃₎			
		I ₍₁₁₂₂₎				I ₍₁₁₂₃₎	I ₍₁₁₃₃₎						
							I ₍₁₂₂₂₎	I ₍₁₂₂₃₎	I ₍₁₂₃₃₎	I ₍₁₃₃₃₎			
						I ₍₂₂₂₂₎	I ₍₂₂₂₃₎	I ₍₂₂₃₃₎	I ₍₂₃₃₃₎				
									I ₍₃₃₃₃₎				

Baseando-se nos resultados anteriores [5], conclue-se que as equações modais resultantes do funcional truncado nos termos de 5ª ordem (inclusive) fornecem os melhores resultados. Como justificativa, pode-se citar o exemplo do arco abatido sob pressão radial, para o qual se dispõe de resultados analíticos [22]. A figura (IV.1) é uma reprodução da pág. 275 da referência [5] que apresenta os resultados deste exemplo, e ilustra bem o efeito dos truncamentos no funcional.



CAPÍTULO V

APLICAÇÃO ÀS ESTRUTURAS ESPACIAIS CONSTITUÍDAS POR BARRAS

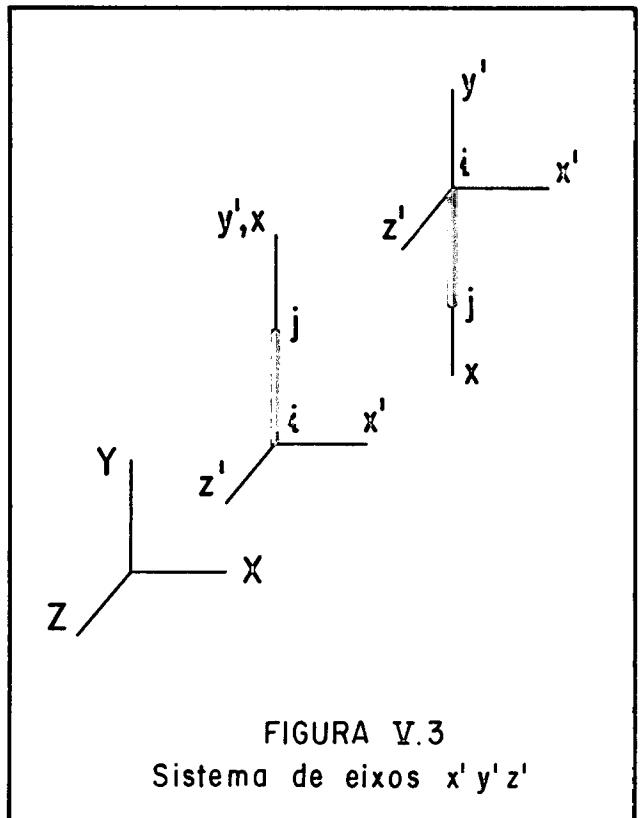
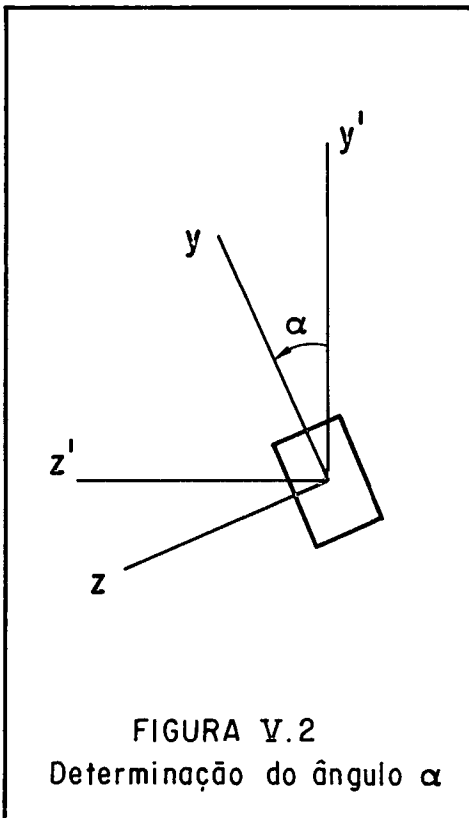
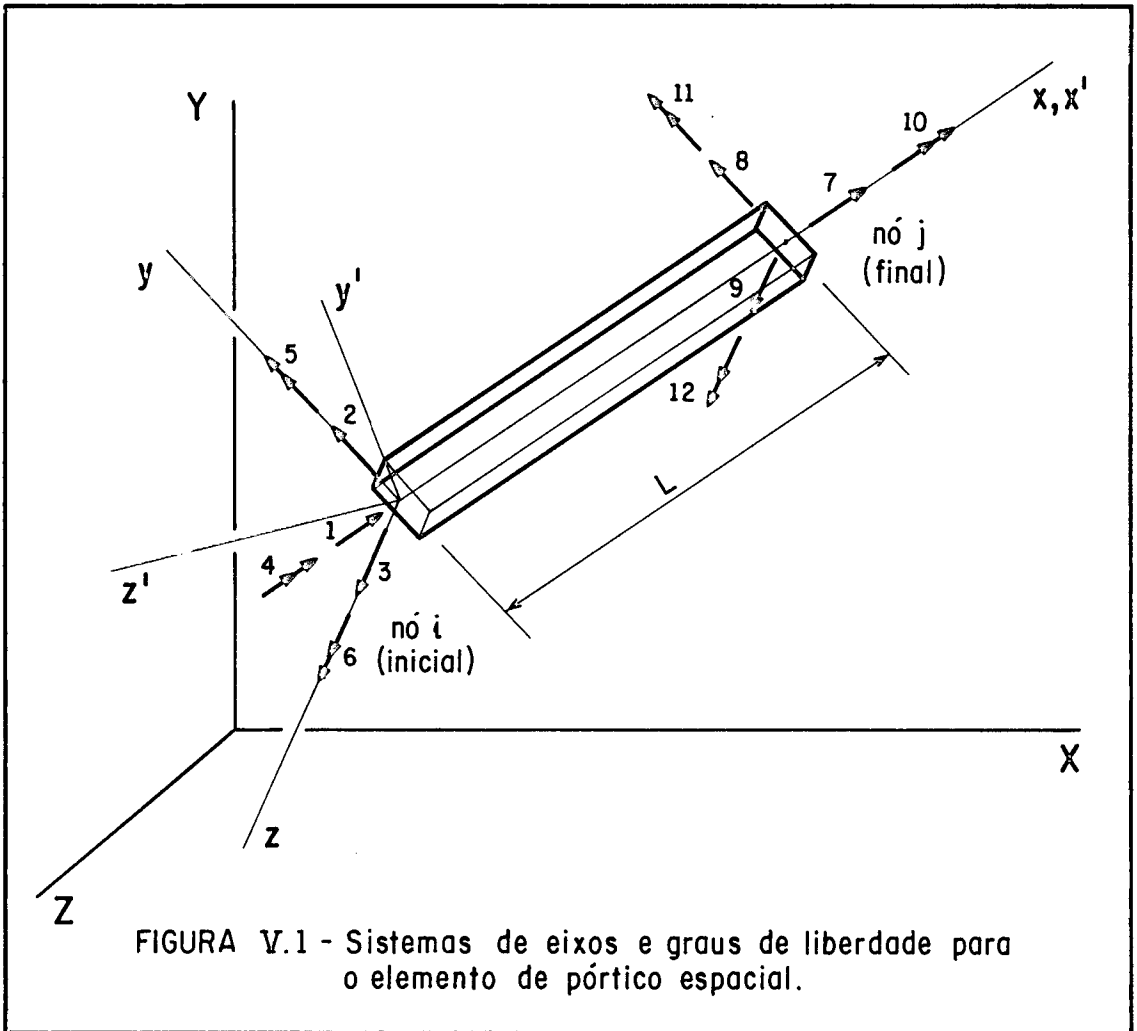
V.1. ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

Neste capítulo o desenvolvimento geral apresentado nos itens II.1 e II.2 será aplicado às estruturas espaciais constituídas por barras retilíneas e de seção transversal uniforme.

A numeração dos graus de liberdade e os sistemas de eixos local (x y z) e global (X Y Z) estão representados na figura (V.1) [23]. Os eixos x' y' z' correspondem ao sistema no qual o eixo z' está situado no plano horizontal (XZ), no sentido positivo de Z , e o eixo x' coincide com x .

A consideração do sistema x' y' z' tem como objetivo a definição do ângulo α que corresponde a inclinação dos eixos principais da seção transversal.

A figura (V.2) mostra a seção transversal vista no sentido negativo do eixo x .



No caso em que o eixo x' coincide com a vertical, o sistema $x' y' z'$ fica definido de acordo com o sentido do elemento ($n\bar{o}$ inicial \rightarrow $n\bar{o}$ final) na forma apresentada na figura (V.3).

Estabelecidos os sistemas de eixos, é possível então definir a matriz de rotação para o elemento de pórtico espacial da seguinte forma

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{r} \end{bmatrix} \quad (V.1)$$

onde

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y \cos\alpha & 0 & \text{sen}\alpha \\ C_y \text{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (V.2)$$

no caso de elementos verticais e

$$\tilde{r} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos\alpha - C_z \text{sen}\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \cos\alpha & \frac{-C_y C_z \cos\alpha + C_z \text{sen}\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_y \text{sen}\alpha - C_z \cos\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \text{sen}\alpha & \frac{C_y C_z \text{sen}\alpha + C_x \cos\alpha}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix}$$

nos demais casos

(V.3)

sendo C_x , C_y e C_z os cossenos diretores dos eixos locais x y e z em relação ao sistema global.

O vetor de deslocamentos nodais de um elemento n é definido neste caso como

$$\begin{aligned} \tilde{U}^n &= [u_i, v_i, w_i, \theta_i, w'_i, v'_i, u_j, v_j, w_j, \theta_j, w'_j, v'_j]^t = \\ &= [u(0), v(0), w(0), \theta(0), w'(0), v'(0), u(L), v(L), w(L), \\ &\quad \theta(L), w'(L), v'(L)]^t \end{aligned} \quad (V.4)$$

onde u , v e w são translações nas direções x , y e z respectivamente e θ , w' e v' rotação em torno dos mesmos eixos.

Admitindo-se uma variação linear no caso de translações e rotações em x , e observando-se que as componentes de v e w devem ser do terceiro grau, já que $v' = dv/dx$ e $w' = dw/dx$, a matriz de interpolação será

$$\begin{aligned} \tilde{N}^t &= [N_u^t, N_v^t, N_w^t, N_\theta^t, N_{w,v}^t, N_{v,x}^t] = \\ &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ p_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ p_3(x) \\ 0 \\ p_2(x) \\ 0 \\ 0 \\ p_4(x) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -p_3(x) \\ 0 \\ 0 \\ p_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_2(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_1'(x) \\ 0 \\ 0 \\ -p_3'(x) \\ 0 \\ 0 \\ p_2'(x) \\ -p_4'(x) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ p_1'(x) \\ 0 \\ 0 \\ p_3'(x) \\ 0 \\ p_2'(x) \\ 0 \\ 0 \\ p_4'(x) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (V.5)$$

onde

$$q_1(x) = 1 - \frac{1}{L} x \quad (V.6a)$$

$$q_2(x) = \frac{1}{L} x \quad (V.6b)$$

$$p_1(x) = \frac{2}{L^3} x^3 - \frac{3}{L^2} x^2 + 1 \quad (V.6c)$$

$$p_2(x) = -\frac{2}{L^3} x^3 + \frac{3}{L^2} x^2 \quad (V.6d)$$

$$p_3(x) = \frac{1}{L^2} x^3 - \frac{2}{L} x^2 + x \quad (V.6e)$$

$$p_4(x) = \frac{1}{L^2} x^3 - \frac{1}{L} x^2 \quad (V.6f)$$

e

$$p_i'(x) = \frac{d}{dx} [p_i(x)] \quad (V.6g)$$

V.2. PARTICULARIZAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

V.2.1. SISTEMAS PERFEITOS

No caso de um elemento de pórtico espacial o funcional de energia potencial total pode ser escrito como [24]

$$V^n = \frac{1}{2} \int_0^L (E A \epsilon_x^2 + E I_z \chi_z^2 + E I_y \chi_y^2 + G J \gamma^2) dx - \lambda \Omega \quad (V.7)$$

onde

E e G são respectivamente os módulos de elasticidade longitudinal e transversal,

A é a área da seção transversal,

I_y e I_z são os momentos de inércia em relação aos eixos y e z respectivamente,

J é a constante de torção,

ϵ_x é a deformação extensional,

χ_y e χ_z são as mudanças de curvatura respectivamente em relação aos eixos y e z e

γ é a variação do ângulo de torção.

Dentro da hipótese de pequenas deformação, ainda que decorrentes de grandes deslocamentos, pode-se admitir que

$$\epsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) = \tilde{N}_{u,x} \tilde{U}^n + \frac{1}{2} (\tilde{N}_{v,x} \tilde{U}^n)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{N}_{w,x} \tilde{U}^n)^2 \quad (V.8)$$

$$\chi_y = w_{,xx} = \tilde{N}_{w,xx} \tilde{U}^n \quad (V.9)$$

$$\chi_z = v_{,xx} = \tilde{N}_{v,xx} \tilde{U}^n \quad (V.10)$$

$$\gamma = \theta_{,x} = \tilde{N}_{\theta,x} \tilde{U}^n \quad (V.11)$$

e ainda considerando que de acordo com (II.3),

$$\underline{u}^n = \underline{u}^{En} + \underline{\phi}^n \quad (V.12)$$

o funcional de energia potencial total (V.7) pode então ser escrito na forma apresentada a seguir.

Início de expressão (V.13)

$$v^n = \int_0^L \left[\frac{EA}{2} (N_{u,x} U^{En})(N_{u,x} U^{En}) + \frac{EI_z}{2} (N_{v,xx} U^{En})(N_{v,xx} U^{En}) + \frac{EI_y}{2} (N_{w,xx} U^{En})(N_{w,xx} U^{En}) + \frac{GJ}{2} (N_{\theta,x} U^{En})(N_{\theta,x} U^{En}) + \right.$$

$$+ \frac{EA}{2} (N_{u,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En}) + \frac{EA}{2} (N_{u,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) +$$

$$+ \frac{EA}{4} (N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) + \frac{EA}{8} (N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En}) +$$

$$+ \frac{EA}{8} (N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) \left. \right] dx - \lambda (U^{En t} \cdot F^n) +$$

$$+ \int_0^L \left[EA (N_{u,x} \phi^n)(N_{u,x} U^{En}) + EI_z (N_{v,xx} \phi^n)(N_{v,xx} U^{En}) + EI_y (N_{w,xx} \phi^n)(N_{w,xx} U^{En}) + GJ (N_{\theta,x} \phi^n)(N_{\theta,x} U^{En}) + \right.$$

$$EA (N_{v,x} \phi^n)(N_{u,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En}) + EA (N_{w,x} \phi^n)(N_{u,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) + \frac{EA}{2} (N_{u,x} \phi^n)(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En}) +$$

$$+ \frac{EA}{2} (N_{u,x} \phi^n)(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) + \frac{EA}{2} (N_{v,x} \phi^n)(N_{v,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) + \frac{EA}{2} (N_{w,x} \phi^n)(N_{w,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En}) +$$

$$+ \frac{EA}{2} (N_{v,x} \phi^n)(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En})(N_{v,x} U^{En}) + \frac{EA}{2} (N_{w,x} \phi^n)(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En})(N_{w,x} U^{En}) \left. \right] dx - \lambda (\phi^{n t} F^n) +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^L \left[\frac{EA}{2} (\underline{N}_{u,x} \phi^n)(\underline{N}_{u,x} \phi^n) + \frac{EI_z}{2} (\underline{N}_{v,xx} \phi^n)(\underline{N}_{v,xx} \phi^n) + \frac{EI_y}{2} (\underline{N}_{w,xx} \phi^n)(\underline{N}_{w,xx} \phi^n) + \frac{GJ}{2} (\underline{N}_{\theta,x} \phi^n)(\underline{N}_{\theta,x} \phi^n) + \right. \\
& + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{u,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{u,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + EA (\underline{N}_{u,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + EA (\underline{N}_{u,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + \\
& + EA (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + \frac{3}{4} EA (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{3}{4} EA (\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + \\
& \left. + \frac{EA}{4} (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{EA}{4} (\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n) \right] dx + \\
& + \int_0^L \left[\frac{EA}{2} (\underline{N}_{u,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{u,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + \right. \\
& \left. + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{EA}{2} (\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \underline{U}^{En})(\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n) \right] dx + \\
& + \int_0^L \left[\frac{EA}{4} (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n) + \frac{EA}{8} (\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n)(\underline{N}_{v,x} \phi^n) + \frac{EA}{8} (\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n)(\underline{N}_{w,x} \phi^n) \right] dx
\end{aligned}$$

(V.13)

Observando-se (V.13) pode-se definir as seguintes matrizes para um elemento

$$K_0^n = \int_0^L (EA \underline{N}_{u,x}^t \underline{N}_{u,x} + EI_z \underline{N}_{v,xx}^t \underline{N}_{v,xx} + EI_y \underline{N}_{w,xx}^t \underline{N}_{w,xx} + GJ \underline{N}_{\theta,x}^t \underline{N}_{\theta,x}) dx \quad (V.14)$$

$$K_1^n(A) = EA \int_0^L [\underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{u,x} A) \underline{N}_{v,x} + \underline{N}_{w,x}^t (\underline{N}_{u,x} A) \underline{N}_{w,x} + \underline{N}_{u,x}^t (\underline{N}_{v,x} A) \underline{N}_{v,x} + \underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{v,x} A) \underline{N}_{u,x} + \underline{N}_{u,x}^t (\underline{N}_{w,x} A) \underline{N}_{w,x} + \underline{N}_{w,x}^t (\underline{N}_{w,x} A) \underline{N}_{u,x}] dx \quad (V.15)$$

$$K_2^n(A,B) = \int_0^L [3 \underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{v,x} A) (\underline{N}_{v,x} B) \underline{N}_{v,x} + 3 \underline{N}_{w,x}^t (\underline{N}_{w,x} A) (\underline{N}_{w,x} B) \underline{N}_{w,x} + \underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{w,x} A) (\underline{N}_{w,x} B) \underline{N}_{v,x} + \underline{N}_{w,x}^t (\underline{N}_{v,x} A) (\underline{N}_{v,x} B) \underline{N}_{w,x} + \underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{v,x} A) (\underline{N}_{w,x} B) \underline{N}_{w,x} + \underline{N}_{w,x}^t (\underline{N}_{v,x} A) (\underline{N}_{w,x} B) \underline{N}_{v,x} + \underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{w,x} A) (\underline{N}_{v,x} B) \underline{N}_{w,x} + \underline{N}_{w,x}^t (\underline{N}_{w,x} A) (\underline{N}_{v,x} B) \underline{N}_{v,x}] dx \quad (V.16)$$

Com (V.14), (V.15) e (V.16) a expressão da EPT, dada por (V.13), fica idêntica a (II.16).

V.2.2. SISTEMAS IMPERFEITOS

Seguindo-se o mesmo procedimento do ítem II.2, a EPT para um elemento de um sistema estrutural sujeito a imperfeições geométricas iniciais é dada por

$$\widehat{V}^n = \frac{1}{2} \int_0^L (EA \widehat{\varepsilon}_X^2 + EI_Z \widehat{\chi}_Z^2 + EI_Y \widehat{\chi}_Y^2 + GJ \widehat{\gamma}^2) dx - \lambda \Omega \quad (V.17)$$

onde as deformações são dadas por

$$\begin{aligned} \widehat{\varepsilon}_X &= \left[\widehat{u}_{,X} + \frac{1}{2} (\widehat{v}_{,X}^2 + \widehat{w}_{,X}^2) \right] - \left[\bar{u}_{,X} + \frac{1}{2} (\bar{v}_{,X}^2 + \bar{w}_{,X}^2) \right] = \\ &= u_{,X} + \bar{u}_{,X} + \frac{1}{2} (v_{,X}^2 + 2v_{,X} \bar{v}_{,X} + \bar{v}_{,X}^2 + w_{,X}^2 + 2w_{,X} \bar{w}_{,X} + \bar{w}_{,X}^2) - \\ &\quad - \bar{u}_{,X} - \frac{1}{2} (\bar{v}_{,X}^2 + \bar{w}_{,X}^2) = \varepsilon_X + \bar{\varepsilon}_X \end{aligned} \quad (V.18)$$

$$\widehat{\chi}_Z = \widehat{v}_{,XX} - \bar{v}_{,XX} = v_{,XX} + \bar{v}_{,XX} - \bar{v}_{,XX} = v_{,XX} \Rightarrow \bar{\chi}_Z = 0 \quad (V.19)$$

$$\widehat{\chi}_Y = \widehat{w}_{,XX} - \bar{w}_{,XX} = w_{,XX} + \bar{w}_{,XX} - \bar{w}_{,XX} = w_{,XX} \Rightarrow \bar{\chi}_Y = 0 \quad (V.20)$$

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\theta}_{,X} - \bar{\theta}_{,X} = \theta_{,X} + \bar{\theta}_{,X} - \bar{\theta}_{,X} = \theta_{,X} \Rightarrow \bar{\gamma} = 0 \quad (V.21)$$

sendo ε_X dado por (V.8) e

$$\bar{\varepsilon}_X = v_{,X} \bar{v}_{,X} + w_{,X} \bar{w}_{,X} = (\underline{N}_{v,X} \underline{U}^n)(\underline{N}_{v,X} \underline{U}^n) + (\underline{N}_{w,X} \underline{U}^n)(\underline{N}_{w,X} \underline{U}^n) \quad (V.22)$$

Substituindo as deformações em (V.17) obtêm-se

$$\widehat{V}^n = V^n + \bar{V}^n \quad (\text{V.23})$$

onde V^n é dada pela expressão (V.13) e

$$\bar{V}^n = \frac{1}{2} EA \int_0^L (\bar{\epsilon}_x^2 + 2 \epsilon_x \bar{\epsilon}_x) dx \quad (\text{V.24})$$

que após substituição de (V.8), (V.22) e (V.12) fornece a seguinte expressão para \bar{V}^n .

Início da expressão (V.25)

$$\bar{V}^n = EA \int_0^L \left[(N_{u,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{u}^{En}) + (N_{u,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \right. \\ (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \frac{1}{2} (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \frac{1}{2} (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{u}^{En}) + \\ \frac{1}{2} (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \frac{1}{2} (N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \frac{1}{2} (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{u}^{En}) + \\ \left. \frac{1}{2} (N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En}) \right] dx +$$

$$EA \int_0^L \left[(N_{u,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{\phi}^n) + (N_{u,x} \underline{\phi}^n)(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{u}^{En}) + (N_{u,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{\phi}^n) + (N_{u,x} \underline{\phi}^n)(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \right. \\ (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{\phi}^n) + (N_{v,x} \underline{\phi}^n)(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \\ (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{\phi}^n) + \frac{1}{2} (N_{v,x} \underline{\phi}^n)(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{u}^{En}) + \\ \frac{3}{2} (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{\phi}^n) + (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{\phi}^n) + \\ \frac{1}{2} (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{\phi}^n) + \frac{3}{2} (N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{\phi}^n) + \\ \left. (N_{v,x} \underline{u}^{En})(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{v}^n)(N_{v,x} \underline{\phi}^n) + (N_{w,x} \underline{u}^{En})(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{v}^n)(N_{w,x} \underline{\phi}^n) \right] dx$$

$$\begin{aligned}
EA \int_0^L & \left[(N_{U,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \phi^n) + (N_{U,x} \phi^n)(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \right. \\
& (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \frac{3}{2} (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^{En})(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \phi^n) + \frac{1}{2} (N_{W,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^{En})(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \\
& (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \bar{U}^{En})(N_{W,x} \phi^n) + (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^{En})(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \frac{3}{2} (N_{W,x} \phi^n)(N_{W,x} \bar{U}^{En})(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \\
& \left. \frac{1}{2} (N_{V,x} \phi^n)(N_{W,x} \bar{U}^{En})(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \phi^n) + \frac{1}{2} (N_{W,x} \phi^n)(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \frac{1}{2} (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \phi^n) \right] dx +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EA \int_0^L & \left[\frac{1}{2} (N_{W,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \phi^n)(N_{W,x} \phi^n) + \frac{1}{2} (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \bar{U}^n)(N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \phi^n) + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} (N_{V,x} \phi^n)(N_{V,x} \phi^n)(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n) + \frac{1}{2} (N_{W,x} \phi^n)(N_{W,x} \bar{U}^n)(N_{W,x} \phi^n)(N_{W,x} \phi^n) \right] dx
\end{aligned}$$

(V.25)

Identificando-se as matrizes

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1^n = EA \int_0^L [& N_{u,x}^t (N_{v,x} \tilde{U}^n) N_{v,x} + N_{v,x}^t (N_{v,x} \tilde{U}^n) N_{u,x} \\ & N_{u,x}^t (N_{w,x} \tilde{U}^n) N_{w,x} + N_{w,x}^t (N_{w,x} \tilde{U}^n) N_{u,x}] dx \end{aligned} \quad (V.26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2^n = EA \int_0^L [& N_{v,x}^t (N_{v,x} \tilde{U}^n) (N_{v,x} \tilde{U}^n) N_{v,x} + N_{w,x}^t (N_{w,x} \tilde{U}^n) (N_{w,x} \tilde{U}^n) N_{w,x} + \\ & N_{v,x}^t (N_{v,x} \tilde{U}^n) (N_{w,x} \tilde{U}^n) N_{w,x} + N_{w,x}^t (N_{v,x} \tilde{U}^n) (N_{w,x} \tilde{U}^n) N_{v,x}] dx \end{aligned} \quad (V.27)$$

a expressão (V.25) pode ser então escrita de forma idêntica a (II.38).

V.3. MATRIZES DE RIGIDEZ DE ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

A seguir são apresentadas as formas explícitas das matrizes \tilde{K}_0^n , $\tilde{K}_1^n(A)$, $\tilde{K}_2^n(A,B)$, \tilde{K}_1^n e \tilde{K}_2^n para um elemento de pórtico espacial, resultantes da integração de (V.14), (V.15), (V.16), (V.26) e (V.27) respectivamente.

As integrais foram obtidas utilizando-se um programa de computador que opera com algebra simbólica, estando as principais etapas dos cálculos anexadas no Apêndice B.

Conforme esperado, a matriz \tilde{K}_0^n é idêntica àquela utilizada na análise linear clássica, e em $\tilde{K}_1^n(A)$ os termos dependentes dos deslocamentos axiais (C11 e C14) são justamente os que compõem a matriz \tilde{K}_G .

Matriz K_0^n

$$\underline{K}_0^n = \begin{bmatrix} C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & C10 & 0 & 0 & 0 & C8 & 0 & -C10 & 0 & 0 & 0 & C8 \\ & & C9 & 0 & -C7 & 0 & 0 & 0 & -C9 & 0 & -C7 & 0 \\ & & & C2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C2 & 0 & 0 \\ & & & & C5 & 0 & 0 & 0 & C7 & 0 & C3 & 0 \\ & & & & & C6 & 0 & -C8 & 0 & 0 & 0 & C4 \\ & & & & & & C1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & C10 & 0 & 0 & 0 & -C8 \\ & & & & & & & & C9 & 0 & C7 & 0 \\ & & & & & & & & & C2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & C5 & 0 \\ & & & & & & & & & & & C6 \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

(V.28a)

onde

$$C1 = \frac{EA}{L} \quad (V.28b)$$

$$C2 = \frac{GJ}{L} \quad (V.28c)$$

$$C3 = 2 \frac{EI_y}{L} \quad (V.28d)$$

$$C4 = 2 \frac{EI_z}{L} \quad (V.28e)$$

$$C5 = 4 \frac{EI_y}{L} \quad (V.28f)$$

$$C6 = 4 \frac{EI_z}{L} \quad (V.28g)$$

$$C7 = 6 \frac{EI_y}{L^2} \quad (V.28h)$$

$$C8 = 6 \frac{EI_z}{L^2} \quad (V.28i)$$

$$C9 = 12 \frac{EI_y}{L^3} \quad (V.28j)$$

$$C10 = 12 \frac{EI_z}{L^3} \quad (V.28k)$$

Matriz $K_1^n(A)$

$$\underset{\sim}{K}_1^n(A) = \begin{bmatrix}
 0 & -C17 & -C20 & 0 & C18 & -C15 & 0 & C17 & C20 & 0 & C19 & -C16 \\
 & -C14 & 0 & 0 & 0 & -C13 & C17 & C14 & 0 & 0 & 0 & -C13 \\
 & & -C14 & 0 & C13 & 0 & C20 & 0 & C14 & 0 & C13 & 0 \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & -C11 & 0 & -C18 & 0 & -C13 & 0 & C12 & 0 \\
 & & & & & -C11 & C15 & C13 & 0 & 0 & 0 & C12 \\
 & & & & & & 0 & -C17 & -C20 & 0 & -C19 & C16 \\
 \text{SIMÉTRICA} & & & & & & & -C14 & 0 & 0 & 0 & C13 \\
 & & & & & & & & -C14 & 0 & -C13 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & -C11 & 0 & \\
 & & & & & & & & & & -C11 &
 \end{bmatrix}$$

(V.29a)

onde

$$C11 = \frac{2 EA}{15} (a_1 - a_7) \quad (\text{V.29b})$$

$$C12 = \frac{EA}{30} (a_1 - a_7) \quad (\text{V.29c})$$

$$C13 = \frac{EA}{10L} (a_1 - a_7) \quad (\text{V.29d})$$

$$C14 = \frac{6 EA}{5L^2} (a_1 - a_7) \quad (\text{V.29e})$$

$$C15 = \frac{EA}{30L} [3 (a_2 - a_8) + L (4a_6 - a_{12})] \quad (\text{V.29f})$$

$$C16 = \frac{EA}{30L} [3 (a_2 - a_8) - L (a_6 - 4a_{12})] \quad (V.29g)$$

$$C17 = \frac{EA}{10L^2} [12 (a_2 - a_8) + L (a_6 + a_{12})] \quad (V.29h)$$

$$C18 = \frac{EA}{30L} [3 (a_3 - a_9) - L (4a_5 - a_{11})] \quad (V.29i)$$

$$C19 = \frac{EA}{30L} [3 (a_3 - a_9) + L (a_5 - 4a_{11})] \quad (V.29j)$$

$$C20 = \frac{EA}{10L^2} [12 (a_3 - a_9) - L (a_5 + a_{11})] \quad (V.29k)$$

Matriz $K_2^n(\underline{A}, \underline{B})$

$$\underline{K}_2^n(\underline{A}, \underline{B}) = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 C21 & C23 & 0 & -C28 & C24 & 0 & -C21 & -C23 & 0 & -C29 & C26 \\
 & C22 & 0 & -C25 & C28 & 0 & -C23 & -C22 & 0 & -C27 & C29 \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & C30 & C34 & 0 & C28 & C25 & 0 & C36 & C38 \\
 & & & & C31 & 0 & -C24 & -C28 & 0 & C38 & C37 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & C21 & C23 & 0 & C29 & -C26 \\
 & & & & & & & & C22 & 0 & C27 & -C29 \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & C32 & C35 \\
 & & & & & & & & & & & C33
 \end{bmatrix}$$

(V.30a)

onde:

$$C21 = \frac{EA}{35L^3} \{72 [3 (a_2-a_8)(b_2-b_8) + (a_3-a_9)(b_3-b_9)] + 9L [3 (a_2-a_8)(b_6+b_{12}) - (a_3-a_9)(b_5+b_{11}) + 3(a_6+a_{12})(b_2-b_8) - (a_5+a_{11})(b_3-b_9)] + 3L^2 [a_5b_5 + 3a_6b_6 + a_{11}b_{11} + 3a_{12}b_{12}]\} \quad (V.30b)$$

$$C22 = \frac{EA}{35L^3} \{72 [(a_2-a_8)(b_2-b_8) + 3 (a_3-a_9)(b_3-b_9)] + 9L [(a_2-a_8)(b_6+b_{12}) - 3 (a_3-a_9)(b_5+b_{11}) + (a_6+a_{12})(b_2-b_8) - 3 (a_5+a_{11})(b_3-b_9)] + 3L^2 [3a_5b_5 + a_6b_6 + 3a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12}]\} \quad (V.30c)$$

$$C23 = \frac{EA}{35L^3} \{72 [(a_2-a_8)(b_3-b_9) + (a_3-a_9)(b_2-b_8)] - 9L [(a_2-a_8)(b_5+b_{11}) - (a_3-a_9)(b_6+b_{12}) + (a_5+a_{11})(b_2-b_8) - (a_6+a_{12})(b_3-b_9)] - 3L^2 [a_5b_6 + a_6b_5 + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}]\} \quad (V.30d)$$

$$C24 = \frac{EA}{140L^2} \{36 [3 (a_2-a_8)(b_2-b_8) + (a_3-a_9)(b_3-b_9)] - 12L [a_5 (b_3-b_9) - 3a_6 (b_2-b_8) + b_5 (a_3-a_9) - 3b_6 (a_2-a_8)] - L^2 [a_5 (b_5-b_{11}) + 3a_6 (b_6-b_{12}) - a_{11} (b_5+b_{11}) - 3a_{12} (b_6+b_{12})]\} \quad (V.30e)$$

$$C25 = \frac{EA}{140L^2} \{36 [(a_2-a_8)(b_2-b_8) + 3 (a_3-a_9)(b_3-b_9)] - 12L [3a_5 (b_3-b_9) - a_6 (b_2-b_8) + 3b_5 (a_3-a_9) - b_6 (a_2-a_8)] - L^2 [3a_5 (b_5-b_{11}) + a_6 (b_6-b_{12}) - 3a_{11} (b_5+b_{11}) - a_{12} (b_6+b_{12})]\} \quad (V.30f)$$

$$C26 = \frac{EA}{140L^2} \{36 [3 (a_2-a_8)(b_2-b_8) + (a_3-a_9)(b_3-b_9)] - 12L [a_{11} (b_3-b_9) - 3a_{12} (b_2-b_8) + b_{11} (a_3-a_9) - 3b_{12} (a_2-a_8)] + L^2 [a_5 (b_5+b_{11}) + 3a_6 (b_6+b_{12}) + a_{11} (b_5-b_{11}) + 3a_{12} (b_6-b_{12})]\} \quad (V.30g)$$

$$C27 = \frac{EA}{140L^2} \{36 [(a_2-a_8)(b_2-b_8) + 3 (a_3-a_9)(b_3-b_9)] - 12L [3a_{11} (b_3-b_9) - a_{12} (b_2-b_8) + 3b_{11} (a_3-a_9) - b_{12} (a_2-a_8)] + L^2 [3a_5 (b_5+b_{11}) + a_6 (b_6+b_{12}) + 3a_{11} (b_5-b_{11}) + a_{12} (b_6-b_{12})]\} \quad (V.30h)$$

$$C28 = \frac{EA}{140L^2} \{36 [(a_2-a_8)(b_3-b_9) + (a_3-a_9)(b_2-b_8)] - 12L [a_5 (b_2-b_8) - a_6 (b_3-b_9) + b_5 (a_2-a_8) - b_6 (a_3-a_9)] + L^2 [a_5 (b_6-b_{12}) + a_6 (b_5-b_{11}) - a_{11} (b_6+b_{12}) - a_{12} (b_5+b_{11})]\} \quad (V.30i)$$

$$C29 = \frac{EA}{140L^2} \{36 [a_2-a_8)(b_3-b_9) + (a_3-a_9)(b_2-b_8)] - 12L [a_{11} (b_2-b_8) - a_{12} (b_3-b_9) + b_{11} (a_2-a_8) - b_{12} (a_3-a_9)] + L^2 [- a_5 (b_6+b_{12}) - a_6 (b_5+b_{11}) - a_{11} (b_6-b_{12}) - a_{12} (b_5-b_{11})]\} \quad (V.30j)$$

$$C30 = \frac{EA}{420L} \{36 [(a_2-a_8)(b_2-b_8) + 3 (a_3-a_9)(b_3-b_9)] - 3L [(a_2-a_8)(b_6-b_{12}) - 3 (a_3-a_9)(b_5-b_{11}) - 3 (a_5-a_{11})(b_3-b_9) + (a_6-a_{12})(b_2-b_8)] + L^2 [24 (3a_5b_5 + a_6b_6) - 9 (a_5b_{11} + a_{11}b_5) - 3 (a_6b_{12} + a_{12}b_6) + 2 (3a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12})]\} \quad (V.30k)$$

$$C31 = \frac{EA}{420L} \{36 [3 (a_2-a_8)(b_2-b_8) + (a_3-a_9)(b_3-b_9)] - 3L [3 (a_2-a_8)(b_6-b_{12}) - (a_3-a_9)(b_5-b_{11}) - (a_5-a_{11})(b_3-b_9) + 3 (a_6-a_{12})(b_2-b_8)] + L^2 [24 (a_5b_5 + 3a_6b_6) - 3 (a_5b_{11} + a_{11}b_5) - 9 (a_6b_{12} + a_{12}b_6) + 2 (a_{11}b_{11} + 3a_{12}b_{12})]\} \quad (V.30l)$$

$$C32 = \frac{EA}{420L} \{36 [(a_2-a_8)(b_2-b_8) + 3 (a_3-a_9)(b_3-b_9)] + 3L [(a_2-a_8)(b_6-b_{12}) - 3 (a_3-a_9)(b_5-b_{11}) - 3 (a_5-a_{11})(b_3-b_9) + (a_6-a_{12})(b_2-b_8)] + L^2 [2 (3a_5b_5 + a_6b_6) - 9 (a_5b_{11} + a_{11}b_5) - 3 (a_6b_{12} + a_{12}b_6) + 24 (3a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12})]\} \quad (V.30m)$$

$$C33 = \frac{EA}{420L} \{36 [3 (a_2-a_8)(b_2-b_8) + (a_3-a_9)(b_3-b_9)] + 3L [3 (a_2-a_8)(b_6-b_{12}) - (a_3-a_9)(b_5-b_{11}) - (a_5-a_{11})(b_3-b_9) + 3 (a_6-a_{12})(b_2-b_8)] + L^2 [2 (a_5b_5 + 3a_6b_6) - 3 (a_5b_{11} + a_{11}b_5) - 9 (a_6b_{12} + a_{12}b_6) + 24 (a_{11}b_{11} + 3a_{12}b_{12})]\} \quad (V.30n)$$

$$C34 = \frac{EA}{420L} \{36 [- (a_2-a_8)(b_3-b_9) - (a_3-a_9)(b_2-b_8)] - 3L [(a_2-a_8)(b_5-b_{11}) - (a_3-a_9)(b_6-b_{12}) + (a_5-a_{11})(b_2-b_8) - (a_6-a_{12})(b_3-b_9)] + L^2 [24 (a_5b_6 + a_6b_5) - 3 (a_5b_{12} + a_{12}b_5 + a_6b_{11} + a_{11}b_6) + 2 (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11})]\} \quad (V.30o)$$

$$C35 = \frac{EA}{420L} \{36 [- (a_2-a_8)(b_3-b_9) - (a_3-a_9)(b_2-b_8)] + 3L [(a_2-a_8)(b_5-b_{11}) - (a_3-a_9)(b_6-b_{12}) + (a_5-a_{11})(b_2-b_8) - (a_6-a_{12})(b_3-b_9)] + L^2 [2 (a_5b_6 + a_6b_5) - 3 (a_5b_{12} + a_{12}b_5 + a_6b_{11} + a_{11}b_6) + 24 (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11})]\} \quad (V.30p)$$

$$C36 = \frac{EA}{420} \{3 [(a_2-a_8)(b_6+b_{12}) - 3 (a_3-a_9)(b_5+b_{11}) - 3 (a_5+a_{11})(b_3-b_9) + (a_6+a_{12})(b_2-b_8)] - L [9 (a_5b_5 + a_{11}b_{11}) - 6 (a_5b_{11} + a_{11}b_5) + 3 (a_6b_6 + a_{12}b_{12}) - 2 (a_6b_{12} + a_{12}b_6)]\} \quad (V.30q)$$

$$C37 = \frac{EA}{420} \{3 [3 (a_2-a_8)(b_6+b_{12}) - (a_3-a_9)(b_5+b_{11}) - (a_5+a_{11})(b_3-b_9) + 3 (a_6+a_{12})(b_2-b_8)] - L [3 (a_5b_5 + a_{11}b_{11}) - 2 (a_5b_{11} + a_{11}b_5) + 9 (a_6b_6 + a_{12}b_{12}) - 6 (a_6b_{12} + a_{12}b_6)]\} \quad (V.30r)$$

$$C38 = \frac{EA}{420} \{3 [(a_2-a_8)(b_5+b_{11}) - (a_3-a_9)(b_6+b_{12}) + (a_5+a_{11})(b_2-b_8) - (a_6+a_{12})(b_3-b_9)] - L [3 (a_5b_6 + a_6b_5 + a_{11}b_{12} + a_{12}b_{11}) - 2 (a_5b_{12} + a_6b_{11} + a_{11}b_6 + a_{12}b_5)]\} \quad (V.30s)$$

Matriz \bar{K}_1^n

$$\bar{K}_1^n = \begin{bmatrix} 0 & -C41 & -C44 & 0 & C42 & -C39 & 0 & C41 & C44 & 0 & C43 & -C40 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C41 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & C44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & -C42 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & C39 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & -C41 & -C44 & 0 & -C43 & C40 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

(V.31a)

onde

$$C39 = \frac{EA}{30L} [3 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) + L (4\bar{u}_6 - \bar{u}_{12})] \quad (V.31b)$$

$$C40 = \frac{EA}{30L} [3 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) + L (\bar{u}_6 - 4\bar{u}_{12})] \quad (V.31c)$$

$$C41 = \frac{EA}{10L^2} [12 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) + L (\bar{u}_6 + \bar{u}_{12})] \quad (V.31d)$$

$$C42 = \frac{EA}{30L} [3 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - L (4\bar{u}_5 - \bar{u}_{11})] \quad (V.31e)$$

$$C43 = \frac{EA}{30L} [3 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9) + L (\bar{u}_5 - 4\bar{u}_{11})] \quad (V.31f)$$

$$C_{44} = \frac{EA}{10L^2} [12 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - L (\bar{u}_5 + \bar{u}_{11})] \quad (V.31g)$$

Matriz \bar{K}_2^n

$$\bar{K}_{\sim 2}^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C45 & C47 & 0 & -C53 & C48 & 0 & -C45 & -C47 & 0 & -C53 & C50 \\ & C46 & 0 & -C49 & C52 & 0 & -C47 & -C46 & 0 & -C51 & C53 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & C54 & C58 & 0 & C52 & C50 & 0 & C60 & C62 \\ & & & & C55 & 0 & -C48 & -C52 & 0 & C62 & C61 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & C45 & C47 & 0 & C53 & -C50 \\ & & & & & & & C46 & 0 & C51 & -C53 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & C56 & C59 \\ & & & & & & & & & & C57 \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

(V.32a)

onde

$$C45 = \frac{EA}{35L^3} [72 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)^2 + 18L (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_6 + \bar{u}_{12}) + 3L^2 (\bar{u}_6^2 + \bar{u}_{12}^2)] \quad (V.32b)$$

$$C46 = \frac{EA}{35L^3} [72 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)^2 - 18L (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_5 + \bar{u}_{11}) + 3L^2 (\bar{u}_5^2 + \bar{u}_{11}^2)] \quad (V.32c)$$

$$C47 = \frac{EA}{35L^3} \{72 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - 9L [(\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_5 + \bar{u}_{11}) - (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_6 + \bar{u}_{12})] - 3L^2 (\bar{u}_5 \bar{u}_6 + \bar{u}_{11} \bar{u}_{12})\} \quad (V.32d)$$

$$C48 = \frac{EA}{140L^2} [36 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)^2 + 24L \bar{u}_6 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) - L^2 (\bar{u}_6^2 - 2\bar{u}_6 \bar{u}_{12} - \bar{u}_{12}^2)] \quad (V.32e)$$

$$C49 = \frac{EA}{140L^2} [36 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)^2 - 24L \bar{u}_5 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - L^2 (\bar{u}_5^2 - 2\bar{u}_5 \bar{u}_{11} - \bar{u}_{11}^2)] \quad (V.32f)$$

$$C50 = \frac{EA}{140L^2} [36 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)^2 + 24L \bar{u}_{12} (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) + L^2 (\bar{u}_6^2 + 2\bar{u}_6 \bar{u}_{12} - \bar{u}_{12}^2)] \quad (V.32g)$$

$$C51 = \frac{EA}{140L^2} [36 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)^2 - 24L \bar{u}_{11} (\bar{u}_3 - \bar{u}_9) + L^2 (\bar{u}_5^2 + 2\bar{u}_5\bar{u}_{11} - \bar{u}_{11}^2)] \quad (V.32h)$$

$$C52 = \frac{EA}{140L^2} \{36 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - 12L [\bar{u}_5 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) - \bar{u}_6 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)] + L^2 [\bar{u}_5 (\bar{u}_6 - \bar{u}_{12}) - \bar{u}_{11} (\bar{u}_6 + \bar{u}_{12})]\} \quad (V.32i)$$

$$C53 = \frac{EA}{140L^2} \{36 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - 12L [\bar{u}_{11} (\bar{u}_2 - \bar{u}_8) - \bar{u}_{12} (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)] - L^2 [\bar{u}_5 (\bar{u}_6 + \bar{u}_{12}) + \bar{u}_{11} (\bar{u}_6 - \bar{u}_{12})]\} \quad (V.32j)$$

$$C54 = \frac{EA}{210L} [18 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)^2 + 3L (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_5 - \bar{u}_{11}) + L^2 (12\bar{u}_5^2 - 3\bar{u}_5\bar{u}_{11} - \bar{u}_{11}^2)] \quad (V.32k)$$

$$C55 = \frac{EA}{210L} [18 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)^2 - 3L (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_6 - \bar{u}_{12}) + L^2 (12\bar{u}_6^2 - 3\bar{u}_6\bar{u}_{12} + \bar{u}_{12}^2)] \quad (V.32l)$$

$$C56 = \frac{EA}{210L} [18 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)^2 - 3L (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_5 - \bar{u}_{11}) + L^2 (\bar{u}_5^2 - 3\bar{u}_5\bar{u}_{11} + 12\bar{u}_{11}^2)] \quad (V.32m)$$

$$C57 = \frac{EA}{210L} [18 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)^2 + 3L (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_6 - \bar{u}_{12}) + L^2 (\bar{u}_6^2 - 3\bar{u}_6\bar{u}_{12} + 12\bar{u}_{12}^2)] \quad (V.32n)$$

$$C58 = \frac{EA}{420L} \{- 36 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_3 - \bar{u}_9) - 3L [(\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_5 - \bar{u}_{11}) - (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_6 - \bar{u}_{12})] + L^2 [24 \bar{u}_5\bar{u}_6 - 3 (\bar{u}_5\bar{u}_{12} + \bar{u}_6\bar{u}_{11}) + 2\bar{u}_{11}\bar{u}_{12}]\} \quad (V.32o)$$

$$C59 = \frac{EA}{420L} \{- 36 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_3 - \bar{u}_9) + 3L [(\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_5 - \bar{u}_{11}) - (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_6 - \bar{u}_{12})] + L^2 [2\bar{u}_5\bar{u}_6 - 3 (\bar{u}_5\bar{u}_{12} + \bar{u}_6\bar{u}_{11}) + 24\bar{u}_{11}\bar{u}_{12}]\} \quad (V.32p)$$

$$C60 = \frac{EA}{420} [- 6 (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_5 + \bar{u}_{11}) - L (3\bar{u}_5^2 - 4\bar{u}_5\bar{u}_{11} + 3\bar{u}_{11}^2)] \quad (V.32q)$$

$$C61 = \frac{EA}{420} [6 (\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_6 + \bar{u}_{12}) - L (3\bar{u}_6^2 - 4\bar{u}_6\bar{u}_{12} + 3\bar{u}_{12}^2)] \quad (V.32r)$$

$$C62 = \frac{EA}{420} \{3 [(\bar{u}_2 - \bar{u}_8)(\bar{u}_5 + \bar{u}_{11}) - (\bar{u}_3 - \bar{u}_9)(\bar{u}_6 + \bar{u}_{12})] - L [3 (\bar{u}_5\bar{u}_6 + \bar{u}_{11}\bar{u}_{12}) - 2 (\bar{u}_5\bar{u}_{12} + \bar{u}_6\bar{u}_{12})]\} \quad (V.32s)$$

CAPÍTULO VI

IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

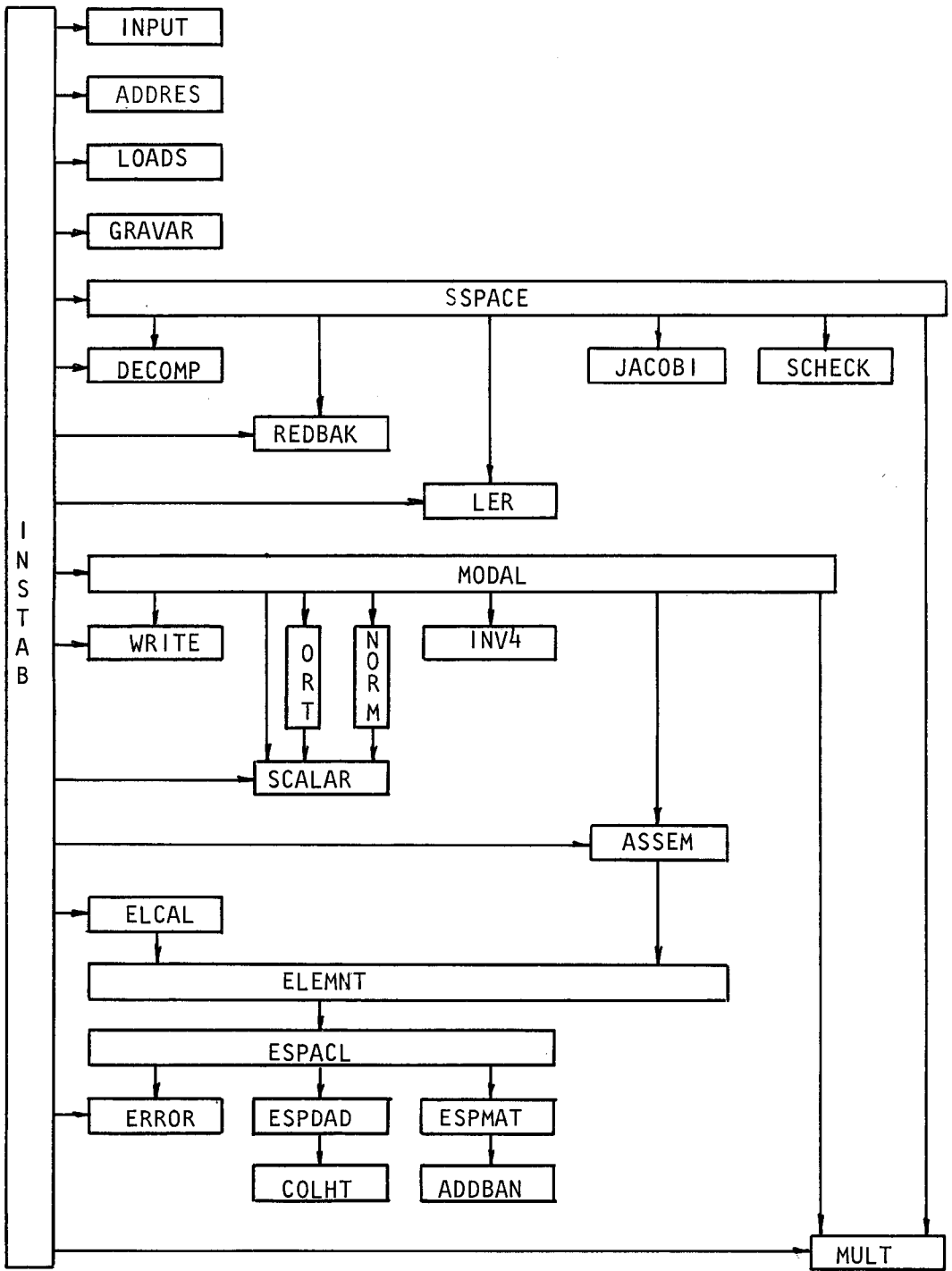
VI.1. O PROGRAMA INSTAB

Com o objetivo de aplicar a formulação apresentada nos capítulos anteriores, desenvolveu-se, a partir do programa elaborado por ANTONINI [5], uma nova versão em FORTRAN 77 denominada INSTAB, para análise de estruturas espaciais formadas por barras. O programa original foi escrito em FORTRAN-IV e baseado no STAP publicado por BATHE [2].

As modificações na utilização da memória principal foram decorrentes da divisão do vetor de trabalho (A) em dois (A e IA), de forma a armazenar os inteiros e reais separadamente. Assim foi possível utilizar-se precisão dupla no BURROUGHS A9P, a qual não era aceita na forma original apresentada no STAP.

Além disso, algumas sub-rotinas foram incorporadas ao programa principal ou mesmo eliminadas, como no caso das rotinas destinadas a leitura/gravação em disco. Todas foram

Quadro VI.1 - Estrutura do programa



substituídas por apenas duas, LER e GRAVAR.

Quanto ao armazenamento em memória auxiliar (disco), com a otimização no dimensionamento dos arquivos e das operações de leitura/gravação, chegou-se a tempos bastante reduzidos para estas operações.

O quadro VI.1 mostra como as rotinas do programa estão interligadas.

A seguir é apresentada uma descrição sumária da função de cada sub-rotina. O asterisco (*) indica as rotinas extraídas do STAP e de SSPACE [2], e que em alguns casos, sofreram adaptações para o caso particular de estruturas formadas por elementos de pórtico espacial.

ADDBAN(*) - Acumula na matriz global a contribuição das matrizes de rigidez de cada elemento.

ADDRES(*) - Calcula o vetor apontador (endereço dos elementos da diagonal da matriz global), a partir das alturas efetivas das colunas.

ASSEM(*) - Prepara os dados de um grupo de elementos para a montagem da matriz de rigidez.

COLHT(*) - Calcula as alturas efetivas das colunas da matriz de rigidez da estrutura.

DECOMP(*) - Triangulariza, pelo método de Gauss, uma matriz armazenada segundo as alturas efetivas de coluna. Esta rotina foi alterada, retirando-se o teste de positividade, por se trabalhar em regiões próximas a pontos críticos onde tal pro-

priedade não pode ser garantida.

- ELCAL(*) - Lê e grava os dados dos grupos de elementos.
- ELEMNT(*) - Chama a sub-rotina apropriada para cada grupo de elementos.
- ERROR(*) - Imprime mensagens de erro por sub-dimensionamento do(s) vetor(es) de trabalho.
- ESPACL - Prepara para ler os dados e para montar as matrizes do grupo de elementos de pórtico espacial.
- ESPDAD - Lê os dados dos elementos de pórtico espacial.
- ESPMAT - Monta as matrizes dos elementos de pórtico espacial.
- GRAVAR - Grava um dado vetor em arquivo.
- INPUT(*) - Lê os dados dos pontos nodais (coordenadas e vinculação).
- INV4 - Calcula a inversa de uma matriz 4x4.
- JACOB(*) - Iteração Jacobi para solução do problema de autovalor.
- LER - Lê de um arquivo um determinado vetor.
- LOADS(*) - Lê os dados de carga, monta o vetor de forças e grava para cada caso de carregamento.
- MODAL - Monta o sistema não-linear, relativo a análise modal, e resolve pelo método incremental itera-

tivo de Newton-Raphson.

- MULT(*) - Calcula o produto de uma matriz por um vetor.
- ORT - Obtém a parte ortogonal de um dado vetor em relação a outro.
- REDBAK(*) - Retrossubstitui um sistema de equações já triangularizado.
- SCALAR - Calcula o produto escalar entre dois vetores.
- SCHECK(*) - Verifica a seqüência de Sturm na solução do problema de autovalor.
- SSPACE(*) - Resolve um problema linear de autovalor pelo método do sub-espço. Como serão resolvidos dois problemas de autovalor, um a partir da origem e outro próximo ao primeiro ponto crítico, a etapa de geração dos vetores de partida foi desmembrada. Assim, o primeiro problema será solucionado a partir dos vetores gerados em STVET, e o segundo partindo dos autovetores do anterior.
- STVET(*) - Calcula os vetores de partida para SSPACE.
- WRITE(*) - Imprime deslocamentos, autovetores ou modos.

Os arquivos em disco, todos do tipo "SCRATCH", foram utilizados da forma apresentada no quadro VI.2.

Quadro VI.2 - Arquivos temporários em disco

Arquivo	Conteúdo
IELR	dados dos elementos - reais
IELI	dados dos elementos - inteiros
IFOR	vetores de forças
MK0	matriz \underline{K}_0
MKOT	matriz \underline{K}_0 triangularizada
IPSI	modos de aproximação do caminho fundamental
IFI	modos críticos
MK2	matriz \underline{K}_2 ($\underline{U}_0, \underline{U}_0$)

A entrada de dados é idêntica àquela utilizada no STAP, apenas acrescentando-se o seguinte:

- Na segunda linha do arquivo de dados, a variável MODEX tem os seguintes significados:

= 0 conferir os dados

= 1 executar

= 2 executar até a etapa de cálculo de cargas críticas utilizando-se a matriz \underline{K}_G

- Após a variável MODEX e na mesma linha, deve-se fixar o número de autovalores requeridos (NR00T), que indicará o total de pontos críticos a serem analisados.

- Após todos os dados dos elementos, devem ser definidas as variáveis de controle para a análise modal, relativa

a cada ponto crítico, da seguinte forma:

NPOMAX = Número de pontos de equilíbrio desejados. Se nulo não se realiza a análise modal passando-se ao próximo ponto crítico.

KINCR = Indicador do valor de incremento da variável de controle quando esta é tomada como a amplitude do modo crítico, a_1 . Dado por $\lambda/KINCR$. Se não for especificado é automaticamente fixado KINCR=5.

NCI = Número de caso imperfeito a serem analisados.

IIM = Número máximo de iterações. Se não for definido é tomado igual a 20.

A seguir, para cada caso imperfeito, se houver, são fornecidas as amplitudes de imperfeição em função dos modos \underline{U}_0 , $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}_3$ e $\bar{\Phi}_4$. Cada linha deve ser escrita no formato 5 F10.5.

Para uma visão geral, a seqüência do programa é, simplificada a seguinte:

- Entrada de dados.
- Montagem e triangularização da matriz \underline{K}_0 .
- Aproximação linear do caminho fundamental: \underline{U}_0 .
- Cálculo seqüencial dos termos da aproximação cúbica do caminho fundamental: λ_2^F , η_2 , λ_3^F , η_3 .
- Resolução do problema de autovalor a partir da origem.

- Resolver o problema de autovalor atualizado, próximo à primeira carga crítica.
- Calcular as aproximações dos caminhos secundários associados aos pontos críticos: $\lambda_1^S, \psi_2, \lambda_2^S$.
- Preparar os modos retidos e calcular os coeficientes do sistema não-linear relativo a análise modal.
- Executar a análise modal para os casos perfeito e imperfeito.

Os itens a seguir são destinados a descrever mais detalhadamente cada etapa.

VI.2. APROXIMAÇÃO DO CAMINHO FUNDAMENTAL

Esta etapa teve como objetivo o cálculo de uma aproximação cúbica do caminho fundamental, seguindo-se a formulação, já particularizada, apresentada no final do item III.1.

A rotina COLSOL, utilizada originalmente no STAP para solução de sistemas lineares foi retirada, pois as rotinas DECOMP e REDBAK, pertencentes a SSPACE, cumprem a mesma finalidade. De fato, as etapas de triangularização, em DECOMP, e de retrossubstituição, em REDBAK, são idênticas às de COLSOL.

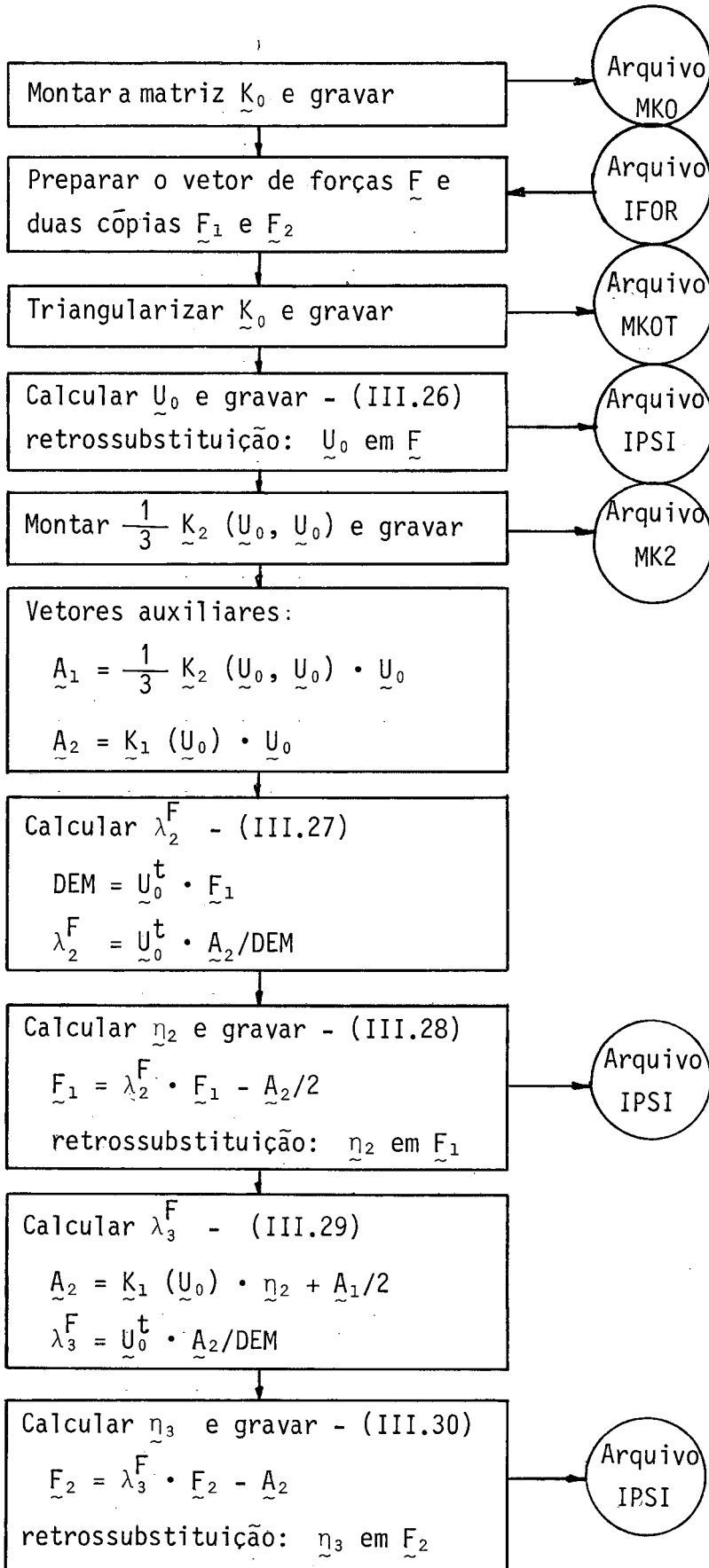
É importante observar que uma vez triangularizada, a matriz pode passar pelo processo de retrossubstituição vã-

rias vezes sem que seja alterada. Assim, para a solução dos problemas (III.26), (III.28) e (III.30) sō se montou e triangularizou a matriz \underline{K}_0 uma vez.

Como as matrizes \underline{K}_0 , \underline{K}_0 triangularizada e $\underline{K}_2 (\underline{U}_0, \underline{U}_0)$ serāo utilizadas mais adiante, estas sāo armazenadas em arquivos em disco. O mesmo ocorre com os modos \underline{U}_0 , $\underline{\eta}_2$ e $\underline{\eta}_3$. A matriz $\underline{K}_1 (\underline{U}_0)$ gerada nesta etapa, e necessāria na soluçāo do problema de autovalor, ē mantida na memōria principal.

O quadro VI.3 apresenta, de forma sintētica, o fluxo do programa nesta etapa.

Quadro VI.3 - Etapa de aproximação do caminho fundamental



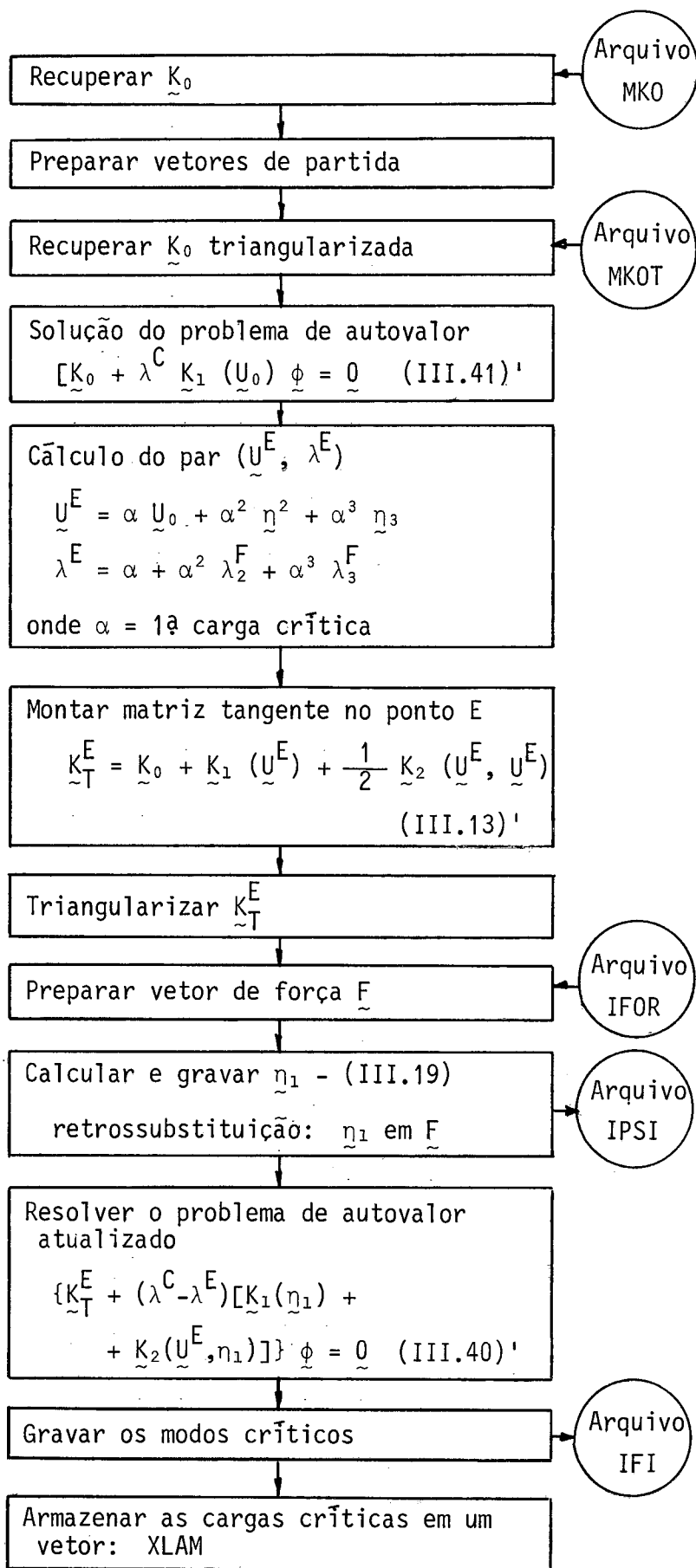
VI.3. DETERMINAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS

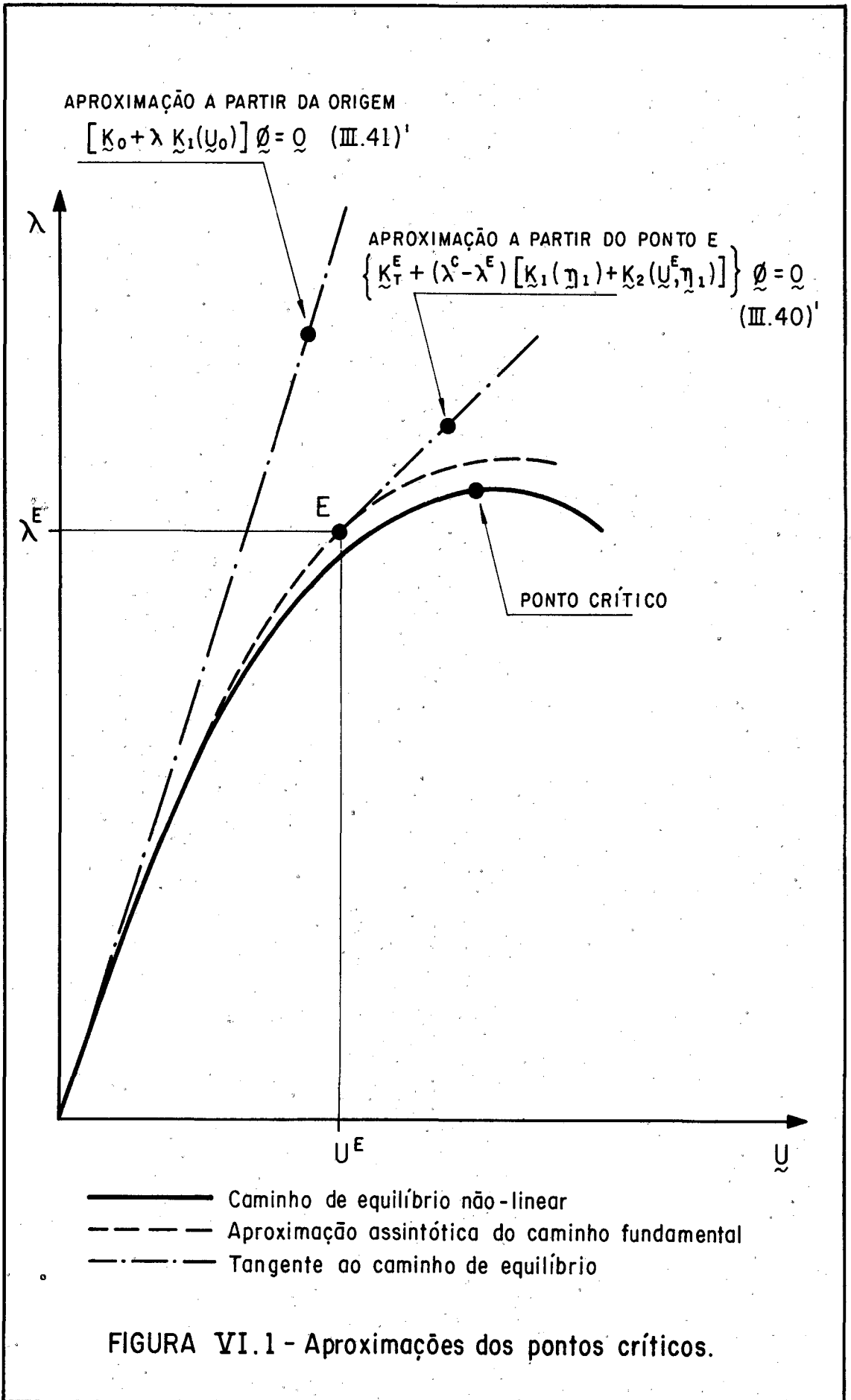
Para a determinação de pontos críticos adotou-se a forma linearizada expressa pelo problema de autovalor (III.40). O problema é dito linearizado por considerar-se uma tangente ao caminho de equilíbrio, a partir de um certo ponto, pesquisando-se a ocorrência de pontos críticos sobre esta reta. Assim, quanto mais linear for o caminho primário ou mais próximo de um ponto crítico se tome esta tangente, melhores serão os resultados.

Como a princípio não se tem indícios sobre a posição dos pontos críticos, toma-se como partida a origem, e resolve-se o problema particularizado, dado por (III.41). Baseando-se nesses resultados é feita uma melhor aproximação, partindo de um ponto de equilíbrio próximo à primeira carga crítica. O ponto a partir do qual será obtida a matriz tangente (III.13), é determinado utilizando-se a aproximação cúbica do caminho fundamental, (III.33) e (III.34), onde o parâmetro α é tomado igual à primeira carga crítica. A figura (VI.1) é uma representação gráfica da estratégia adotada.

A comparação entre os resultados fornecidos pelo problema (III.41) e a solução clássica (I.1) é bastante simples já que o procedimento é o mesmo, bastando zerar alguns coeficientes de $\underline{K}_1(\underline{U}_0)$ para que se tenha a matriz geométrica \underline{K}_G . Tal comparação além de demonstrar a eficiência de uma aproximação consistente, permite uma indicação do grau de não linearidade envolvida no problema.

Quadro VI.4 - Etapa de aproximação dos pontos críticos





A sequência do programa para esta etapa está representada no quadro (VI.4).

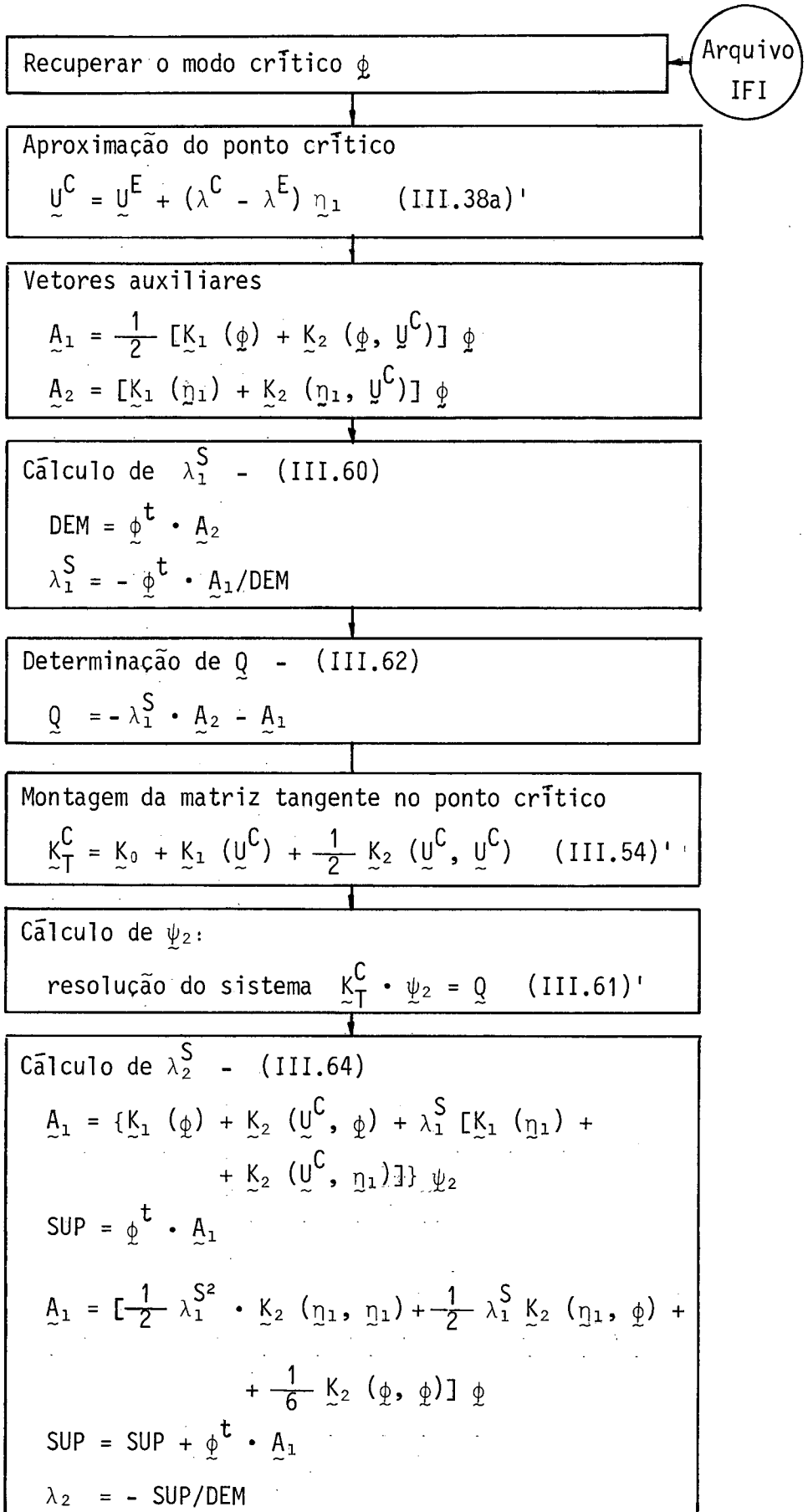
VI.4. APROXIMAÇÕES DE CAMINHOS SECUNDÁRIOS

Seguindo-se a formulação desenvolvida no ítem III.3, foram calculadas aproximações assintóticas quadráticas dos caminhos secundários, associadas a cada um dos pontos críticos determinados.

Para a aproximação dos deslocamentos, dada por (III.65), nota-se que, após a fase anterior, já se dispõe de \underline{n}_1 e $\underline{\phi}$ (para cada ponto crítico), sendo \underline{U}^C facilmente obtido por (III.38a). A determinação de $\underline{\psi}_2$ é dada por (III.61) que é solucionado da mesma forma que os demais sistemas lineares, ou seja, por eliminação de Gauss.

É importante observar que o sistema (III.61) é, teoricamente, indeterminado no caso de bifurcação, já que o determinante de \underline{K}_T^C deve ser nulo por representar, matematicamente, a situação onde existem dois ou mais caminhos de equilíbrio se interceptando. Anteriormente [5] utilizava-se a técnica do multiplicador de Lagrange para, com uma condição adicional, garantir a solução do sistema (III.61). Entretanto, devido às aproximações, é bastante improvável que a matriz \underline{K}_T^C seja calculada exatamente sobre o ponto crítico, e tal procedimento foi abandonado. Com alguns testes verificou-se que esta modificação não acarretou qualquer tipo de problema numérico, e os resultados (modo $\underline{\psi}_2$) foram prati

Quadro VI.5 - Aproximações dos caminhos secundários



camente idênticos aos do programa original.

A programação desta etapa seguiu o fluxograma dado no quadro (VI.5).

VI.5. ANÁLISE MODAL

Como já foi estabelecido no item IV.3, nas equações modais de equilíbrio (IV.12), serão considerados apenas os termos resultantes de um truncamento na 5ª ordem do funcional de energia potencial total reduzida. Assim, observando o quadro (IV.2), é possível escrever tais equações, particularizadas para a combinação modal (IV.8).

$$\begin{aligned}
 h_1(a, \lambda) = & \\
 & = \lambda A_1 + \lambda^2 B_1 + \lambda^3 C_1 + \\
 & a_1 D_{11} + a_2 D_{12} + a_3 D_{13} + \\
 & a_1 \lambda D_{11} + a_2 \lambda E_{12} + a_3 \lambda E_{13} + \\
 & a_1 \lambda^2 F_{11} + a_2 \lambda^2 F_{12} + a_3 \lambda^2 F_{13} + \\
 & a_1 a_1 G_{111} + a_1 a_2 G_{112} + a_1 a_3 G_{113} + a_1 a_4 G_{114} + \\
 & a_2 a_1 G_{121} + a_2 a_2 G_{122} + a_2 a_3 G_{123} + a_2 a_4 G_{124} + \\
 & a_3 a_1 G_{131} + a_3 a_2 G_{132} + a_3 a_3 G_{133} + a_3 a_4 G_{134} + \\
 & a_4 a_1 G_{141} + a_4 a_2 G_{142} + a_4 a_3 G_{143} + a_4 a_4 G_{144} + \\
 & a_1 a_1 \lambda H_{111} + a_1 a_2 \lambda H_{112} + a_1 a_3 \lambda H_{113} + a_1 a_4 \lambda H_{114} + \\
 & a_2 a_1 \lambda H_{121} + a_3 a_1 \lambda H_{131} + a_4 a_1 \lambda H_{141} + \\
 & a_1 a_1 a_1 I_{1111} + a_1 a_1 a_2 I_{1112} + a_1 a_1 a_3 I_{1113} + a_1 a_1 a_4 I_{1114} \\
 & a_1 a_2 a_1 I_{1121} + a_1 a_3 a_1 I_{1131} + a_1 a_4 a_1 I_{1141} \\
 & a_2 a_1 a_1 I_{1211} + a_3 a_1 a_1 I_{1311} + a_4 a_1 a_1 I_{1411} = 0
 \end{aligned}$$

(VI.1a)

$$\begin{aligned}
h_2(\underline{a}, \lambda) &= \\
&= \lambda A_2 + \lambda^2 B_2 + \lambda^3 C_2 + \\
&\quad a_1 D_{21} + a_2 D_{22} + a_3 D_{23} + a_4 D_{24} + \\
&\quad a_1 \lambda E_{21} + a_2 \lambda E_{22} + a_3 \lambda E_{23} + a_4 \lambda E_{24} + \\
&\quad a_1 \lambda^2 F_{21} + \\
&\quad a_1 a_1 G_{211} + a_1 a_2 G_{212} + a_1 a_3 G_{213} + a_1 a_4 G_{214} + \\
&\quad \quad \quad a_2 a_1 G_{221} + a_3 a_1 G_{231} + a_4 a_1 G_{241} + \\
&\quad a_1 a_1 \lambda H_{211} + \\
&\quad a_1 a_1 a_1 I_{2111} = 0
\end{aligned}
\tag{VI.1b}$$

$$\begin{aligned}
h_3(\underline{a}, \lambda) &= \\
&= \lambda A_3 + \lambda^2 B_3 + \lambda^3 C_3 + \\
&\quad a_1 D_{31} + a_2 D_{32} + a_3 D_{33} + a_4 D_{34} + \\
&\quad a_1 \lambda E_{31} + a_2 \lambda E_{32} + a_3 \lambda E_{33} + a_4 \lambda E_{34} + \\
&\quad a_1 \lambda^2 F_{31} + \\
&\quad a_1 a_1 G_{311} + a_1 a_2 G_{312} + a_1 a_3 G_{313} + a_1 a_4 G_{314} + \\
&\quad \quad \quad a_2 a_1 G_{321} + a_3 a_1 G_{331} + a_4 a_1 G_{341} + \\
&\quad a_1 a_1 \lambda H_{311} + \\
&\quad a_1 a_1 a_1 I_{3111} = 0
\end{aligned}
\tag{VI.1c}$$

$$\begin{aligned}
h_4(\underline{a}, \lambda) &= \\
&= \lambda A_4 + \lambda^2 B_4 + \lambda^3 C_4 + \\
&\quad a_1 D_{41} + a_2 D_{42} + a_3 D_{43} + a_4 D_{44} + \\
&\quad a_1 \lambda E_{41} + a_2 \lambda E_{42} + a_3 \lambda E_{43} + a_4 \lambda E_{44} + \\
&\quad a_1 \lambda^2 F_{41} + \\
&\quad a_1 a_1 G_{411} + a_1 a_2 G_{412} + a_1 a_3 G_{413} + a_1 a_4 G_{414} + \\
&\quad \quad \quad a_2 a_1 G_{421} + a_3 a_1 G_{431} + a_4 a_1 G_{441} + \\
&\quad a_1 a_1 \lambda H_{411} + \\
&\quad a_1 a_1 a_1 I_{4111} = 0
\end{aligned}
\tag{VI.1d}$$

onde \underline{a} representa as amplitudes a_1, a_2, a_3 e a_4 que acrescida de λ compõem as incógnitas do problema. Como existe uma incógnita a mais do que o número de equações, uma delas deverá ser fixada para que as demais sejam determinadas. Este é o papel desempenhado pela, assim chamada, variável de controle, p , enquanto as restantes formam o vetor das variáveis de estado, \underline{X} . Desta forma, o sistema de equações pode ser reescrito sinteticamente como

$$\underline{h}(\underline{X}, p) = \underline{0} \quad (\text{VI.2})$$

A seguir será descrito, sumariamente, o método de Newton-Raphson para solução do sistema não-linear (VI.2).

Partindo-se do par (\underline{X}_0, p_0) que satisfaz (VI.2), pode-se obter um ponto $(\underline{X}_0 + \Delta\underline{X}, p_0 + \Delta p)$, resultante do acréscimo Δp , por meio da seguinte expansão em série

$$\begin{aligned} \underline{h}(\underline{X}_0 + \Delta\underline{X}, p_0 + \Delta p) = & \underline{h}(\underline{X}_0, p_0) + \Delta p \left. \frac{\partial h_i}{\partial p} \right|_{(\underline{X}_0, p_0)} + \Delta x_j \left. \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right|_{(\underline{X}_0, p_0)} + \\ & + \dots = \underline{0} \end{aligned} \quad (\text{VI.3})$$

onde Δx_j são os acréscimos das variáveis de estado.

Desprezando-se os termos restantes da série, tem-se uma aproximação linear para o incremento $\Delta\underline{X}$, expressa pelo seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{\partial h_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{\partial h_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_3}{\partial x_1} & \frac{\partial h_3}{\partial x_2} & \frac{\partial h_3}{\partial x_3} & \frac{\partial h_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial h_4}{\partial x_1} & \frac{\partial h_4}{\partial x_2} & \frac{\partial h_4}{\partial x_3} & \frac{\partial h_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial p} \\ \frac{\partial h_2}{\partial p} \\ \frac{\partial h_3}{\partial p} \\ \frac{\partial h_4}{\partial p} \end{Bmatrix} \cdot \Delta p$$

ou, de forma compacta

$$\underline{J} \cdot \underline{\Delta \bar{X}}_1 = - \underline{h}_p \cdot \Delta p \quad (\text{VI.5})$$

onde \underline{J} é a chamada matriz Jacobiana do sistema, que invertida fornece

$$\underline{\Delta \bar{X}}_1 = - \underline{J}^{-1} \cdot \underline{h}_p \cdot \Delta p \quad (\text{VI.6})$$

Aplicando-se sucessivamente (IV.6) obtêm-se uma aproximação do incremento $\underline{\Delta \bar{X}}$ na forma

$$\underline{\Delta \bar{X}} = \underline{\Delta \bar{X}}_1 + \underline{\Delta \bar{X}}_2 + \dots \quad (\text{VI.7})$$

onde os termos $\underline{\Delta \bar{X}}_i$ são calculados até que

$$\text{abs} \left(\frac{\underline{\Delta \bar{X}}_i - \underline{\Delta \bar{X}}_{i-1}}{\underline{\Delta \bar{X}}_i} \right) < \varepsilon ,$$

sendo ϵ a tolerância desejada.

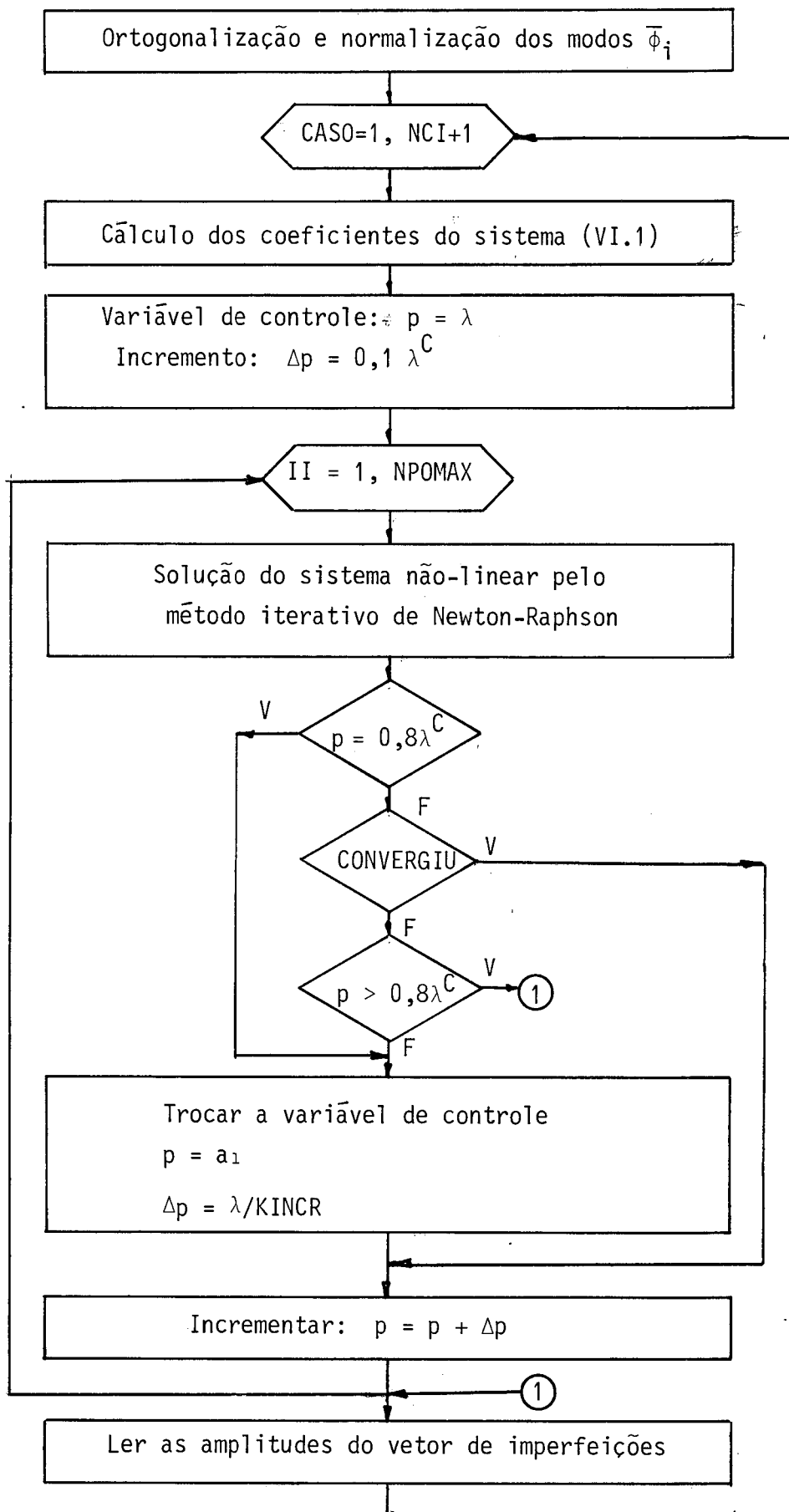
Na implementação, a variável λ é o parâmetro de controle a partir da origem, $(\underline{X}_0, p_0) = (0, 0)$, com acréscimos de $0,1 \lambda^C$. Não existindo convergência ou quando $\lambda = 0,8 \lambda^C$, a variável de controle passa a ser a amplitude do modo crítico, a_1 , enquanto λ ocupa a primeira posição no vetor das variáveis de estado. O procedimento permanece o mesmo bastando substituir a primeira coluna da matriz J pelo vetor \underline{h}_p , e vice-versa. O incremento da variável de controle é fixado em função do valor de λ no momento da troca, dado por $\lambda/KINCR$.

O processo descrito equivale ao controle de carga (parâmetro λ), seguido de um controle de deslocamentos (amplitude a_1) realizado na análise incremental convencional.

A análise dos casos imperfeitos é idêntica, sendo necessário, somente, que se determine novamente os coeficientes que sofrem influência das imperfeições.

O fluxograma a seguir descreve a etapa de análise modal.

Quadro VI.6 - Análise modal



CAPÍTULO VII

EXEMPLOS

VII.1. PÓRTICO ESPACIAL HEXAGONAL COM APOIOS DESLIZANTES

Como primeiro exemplo, analisou-se o pórtico espacial apresentado na figura VII.1, composto por 12 barras de seção transversal quadrada e sujeito a uma carga concentrada, P , aplicada no topo. Os apoios impedem apenas os deslocamentos na direção vertical, permitindo assim, por deslizamento, que as barras horizontais sejam solicitadas por esforços axiais.

Este exemplo já foi apresentado em alguns artigos, como aplicação de métodos incrementais de análise não-linear [10,25,26], dispondo-se inclusive de resultados experimentais.

O gráfico da figura VII.1 mostra as respostas não-lineares, da estrutura perfeita, resultantes da aproximação assintótica cúbica e da análise modal. A discretização utilizada foi de 6 elementos para cada barra, totalizando as-

sim 72 elementos.

O primeiro ponto crítico detectado pelas análises clássica (I.1) e linearizada a partir da origem (III.41), é um ponto de bifurcação num modo assimétrico. Contrariamente, o problema de autovalor atualizado (III.40) acusou um modo radialmente simétrico — mostrado na figura VII.1 — semelhante ao modo fundamental U_0 , indicando assim que o comportamento estrutural \bar{e} , na verdade, caracterizado por perda de estabilidade associada a um ponto limite.

Comparando-se as respostas, nota-se a coincidência dos resultados experimentais com aqueles obtidos na análise modal. Nota-se ainda uma boa aproximação da resposta assintótica, com uma diferença inferior a 5% para o valor da carga crítica em relação àquela da análise modal.

No quadro VII.1 são dados os valores das cargas críticas, P_{cr} , obtidas com as distintas análises e os correspondentes modos.

Quadro VII.1 - Valores das cargas críticas (fig. VII.1)

Procedimento	P_{cr} (N)	Modo
Problema clássico de autovalor (I.1)	428	Assimétrico
Análise linearizada a partir da origem (III.41)	325	Assimétrico
Análise linearizada atualizada (III.40)	275	Simétrico
Aproximação assintótica cúbica (III.34)	242	Simétrico
Análise modal (IV.12)	253	Simétrico

$$\begin{aligned}
 E &= 3035 \text{ MN/m}^2 \\
 G &= 1095 \text{ MN/m}^2 \\
 A &= 3,187 \text{ cm}^2 \\
 J &= 1,378 \text{ cm}^4 \\
 I_y &= 0,833 \text{ cm}^4 \\
 I_z &= 0,833 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

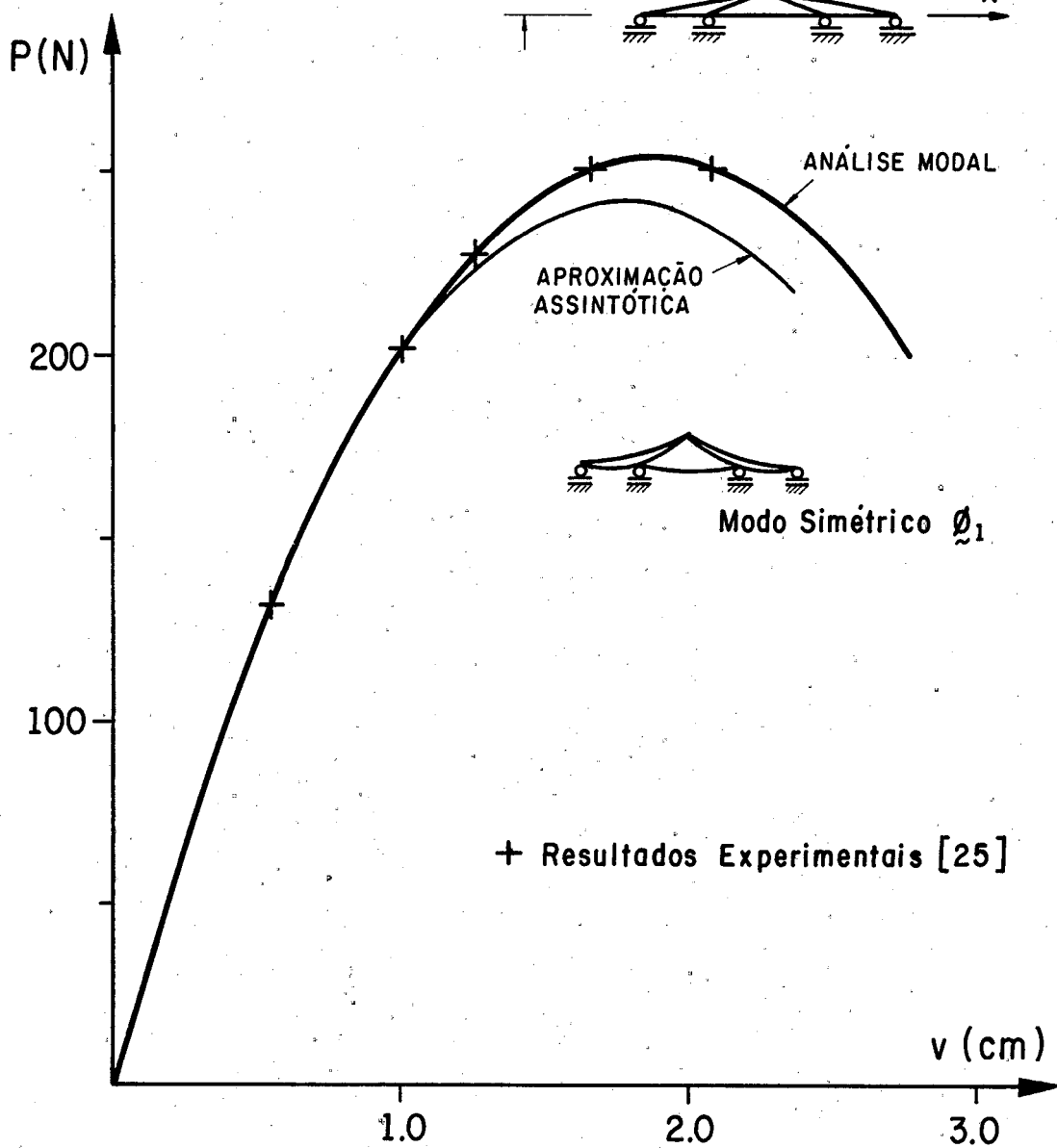
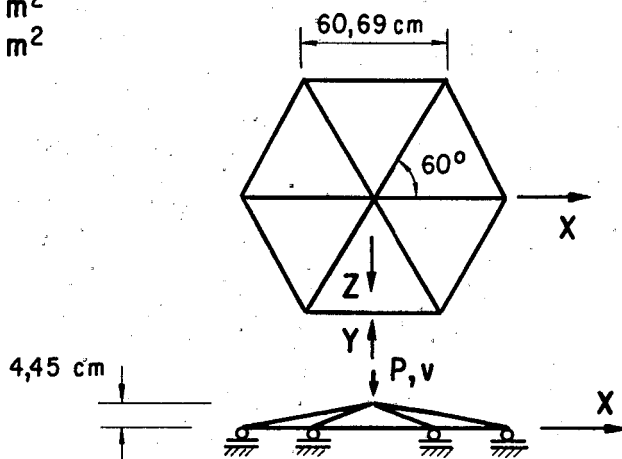


FIGURA VII.1 - 1º Exemplo. Pórtico hexagonal com apoios deslizantes.

VII.2. PÓRTICO ESPACIAL HEXAGONAL COM APOIOS ROTULADOS

A mesma estrutura do primeiro exemplo foi reanalisada considerando-se os apoios rotulados (translações impedidas nas três direções principais). A análise foi realizada com a mesma discretização anterior e as respostas obtidas estão apresentadas na figura VII.2.

Neste caso, por mudança nas condições de contorno, a estrutura tornou-se mais rígida resistindo ao carregamento com uma maior participação dos esforços axiais. Desta vez os resultados dos problemas de autovalor (I.1), (III.41) e (III.40) foram concordantes quanto às formas modais associadas a um certo ponto crítico. Detectou-se a ocorrência de dois pontos de bifurcação coincidentes (mesmo autovalor e diferentes autovetores) cujos modos críticos ϕ_1 e ϕ_2 , são ilustrados na mesma figura VII.2. Esses modos assimétricos podem ser considerados análogos se observarmos que estão associados a uma rotação do topo em torno dos eixos X ou Z, respectivamente para ϕ_1 e ϕ_2 .

A análise modal relativa a cada um dos dois modos ϕ_1 e ϕ_2 , indicou caminhos pós-bifurcação instáveis com a mesma projeção (curva 3) sobre o plano (P, v). Por outro lado a aproximação assintótica (curva 4) acusou um comportamento pós-crítico estável. Uma possível explicação para essa discrepância seria a insuficiência de uma aproximação apenas linear para o caminho fundamental (η_1 em (III.48)), já que rotações caracterizando um comportamento não-linear são estão presentes nos modos η_2 e η_3 não considerados; isto se

torna mais claro com a análise dos resultados do próximo exemplo.

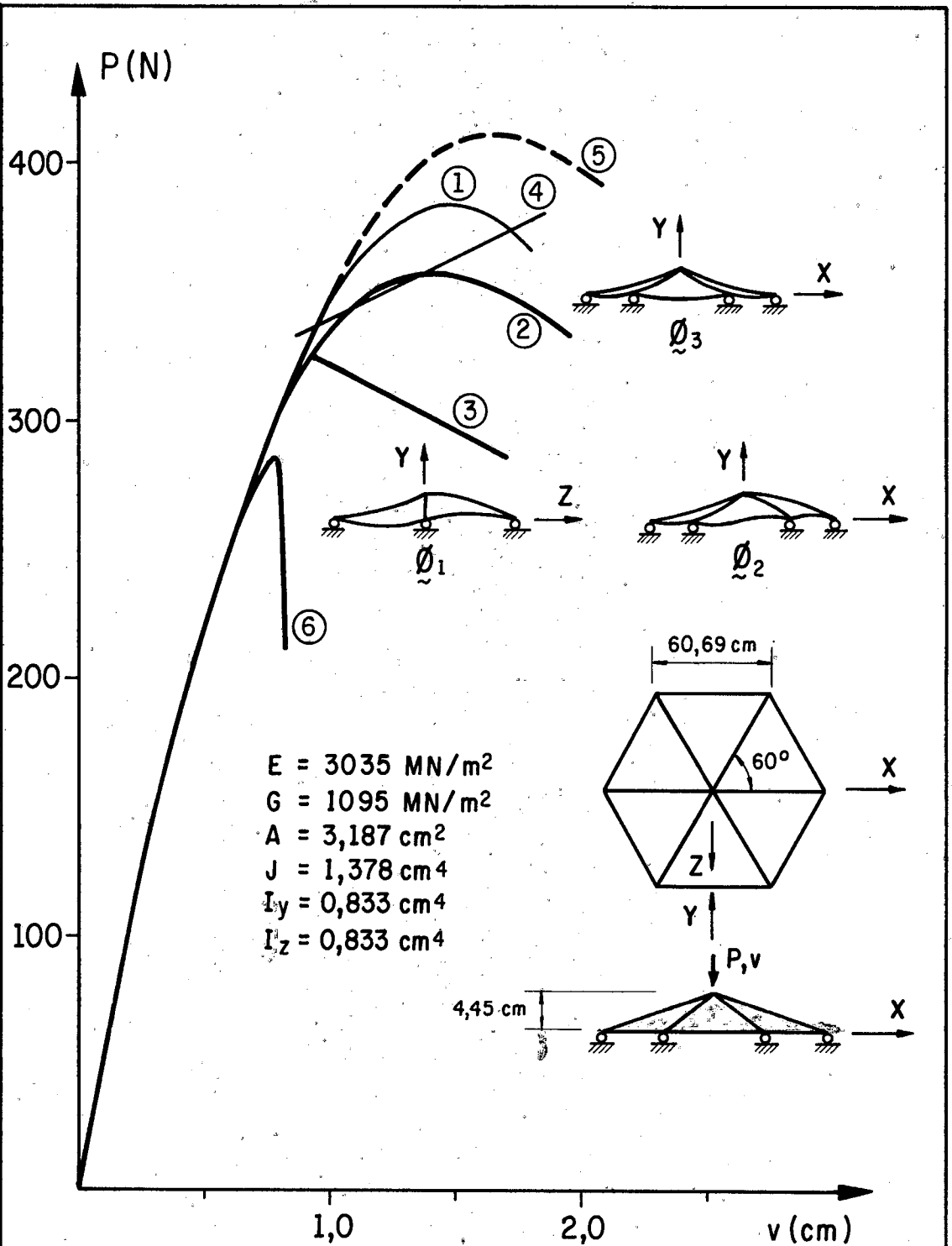
Por outro lado, a influência de tais modos é considerada na análise modal, que por ter formulação consistente quanto ao truncamento, fornece resultados mais confiáveis.

A observação mais importante que pode ser feita em relação às respostas da figura VII.2 é que a análise modal é capaz de detectar uma bifurcação instável, a qual não é obtida com uma análise não-linear convencional (curva 5).

A consideração de imperfeições geométricas na forma de qualquer um destes primeiros dois modos não gerou bons resultados. Observa-se na figura VII.2 que a resposta imperfeita (curva 6) não é assintótica ao caminho pós-bifurcação, não sendo portanto confiável seu pseudo ponto limite.

O terceiro modo crítico ϕ_3 , radialmente simétrico, corresponde a um ponto limite. As respostas da análise modal (curva 2) e da aproximação assintótica cúbica (curva 1) apresentaram resultados coincidentes no trecho inicial do caminho fundamental, afastando-se apenas nas proximidades do ponto de bifurcação, com uma diferença no valor da carga limite da ordem de 7%.

No quadro VII.2 pode-se observar os valores das cargas críticas obtidas nos diferentes procedimentos.



- ① Aproximação assintótica do caminho fundamental.
- ② Análise modal relativa ao modo \varnothing_3 .
- ③ Análise modal relativa aos modos \varnothing_1 e \varnothing_2 .
- ④ Aproximação assintótica do caminho pós-bifurcação.
- ⑤ Análise incremental iterativa [25].
- ⑥ Caminho imperfeito $\bar{U} = 0,005 \varnothing_1$.

FIGURA VII.2 - 2º Exemplo. Pórtico espacial hexagonal rotulado.

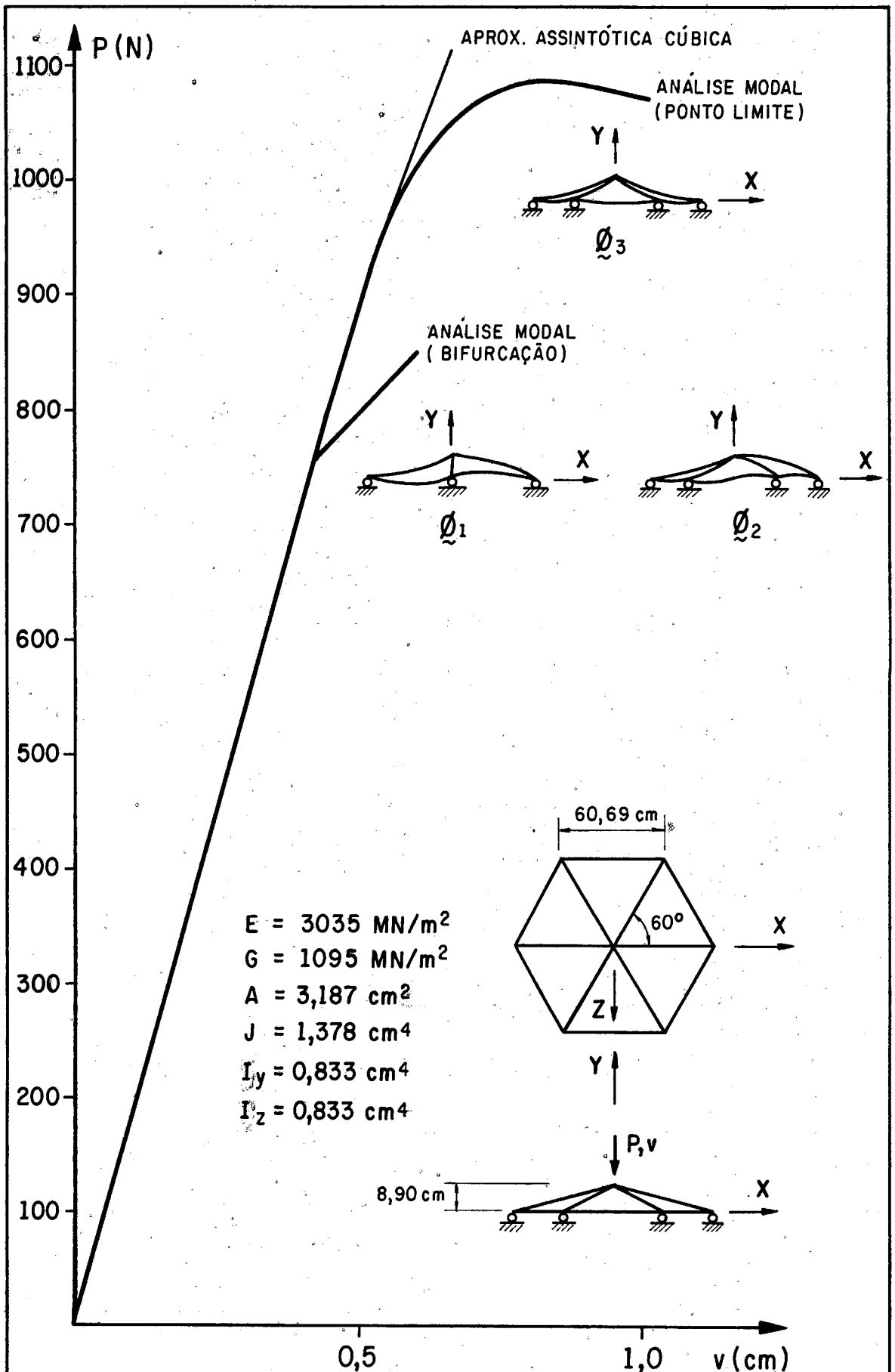
Quadro VII.2 - Valores das cargas críticas (fig. VII.2)

Procedimento	Ponto de bifurcação (N)	Ponto limite (N)
Problema clássico de autovalor (I.1)	428	549
Análise linearizada a partir da origem (III.41)	373	501
Análise linearizada atualizada (III.40)	337	396
Análise modal (IV.12)	329	354

Como forma de se induzir a um comportamento mais extensional, a mesma estrutura com apoios rotulados foi analisada com o dobro da altura original e a resposta está na figura VII.3.

Analogamente ao exemplo anterior, detectou-se duas bifurcações coincidentes e um ponto limite. O caminho fundamental é praticamente linear até a ocorrência do ponto de bifurcação, que se mostrou estável tanto na análise modal quanto na aproximação assintótica do caminho pós-crítico. Esta coerência dos resultados vem a reforçar a idéia de que no caso anterior, sujeito a maiores rotações, os modos η_2 e η_3 seriam importantes na aproximação assintótica do caminho pós-crítico.

Como se pode notar pelos resultados apresentados no quadro VII.3, devido ao comportamento quase linear, os valores das cargas críticas obtidos nas diferentes análises são bastante próximos, principalmente para o ponto de bifurcação. Dentre os três autovalores requeridos na solução do problema clássico nenhum corresponde a um ponto limite.


 FIGURA VII.3 - 3º Exemplo. Pórtico espacial hexagonal rotulado ($h=8,90 \text{ cm}$).

Quadro VII.3 - Valores das cargas críticas (fig. VII.3)

Procedimento	Ponto de bifurcação (N)	Ponto limite (N)
Problema clássico de autovalor (I.1)	802	-
Análise linearizada a partir da origem (III.41)	772	1223
Análise linearizada atualizada (III.40)	763	1169
Análise modal (IV.12)	757	1083

VII.3. DOMO ABATIDO EM FORMA DE ESTRELA

A figura VII.4 mostra o caminho não-linear de equilíbrio do domo abatido composto por 24 barras, todas com as mesmas características e submetido a uma carga concentrada em seu topo. Os apoios são todos do tipo rótula e cada barra foi discretizada em 4 elementos.

No quadro VII.4 estão os valores encontrados para as cargas críticas. Exceto na solução do problema clássico de autovalor, não se detectou nenhuma bifurcação ao longo do caminho fundamental anterior ao ponto limite.

Desta forma, dominado pelo modo fundamental, radialmente simétrico, o resultado da análise modal se correlacionou muito bem com os da análise incremental extraídos na referência [25]. A aproximação assintótica mais uma vez acompanhou bem os demais resultados afastando-se um pouco

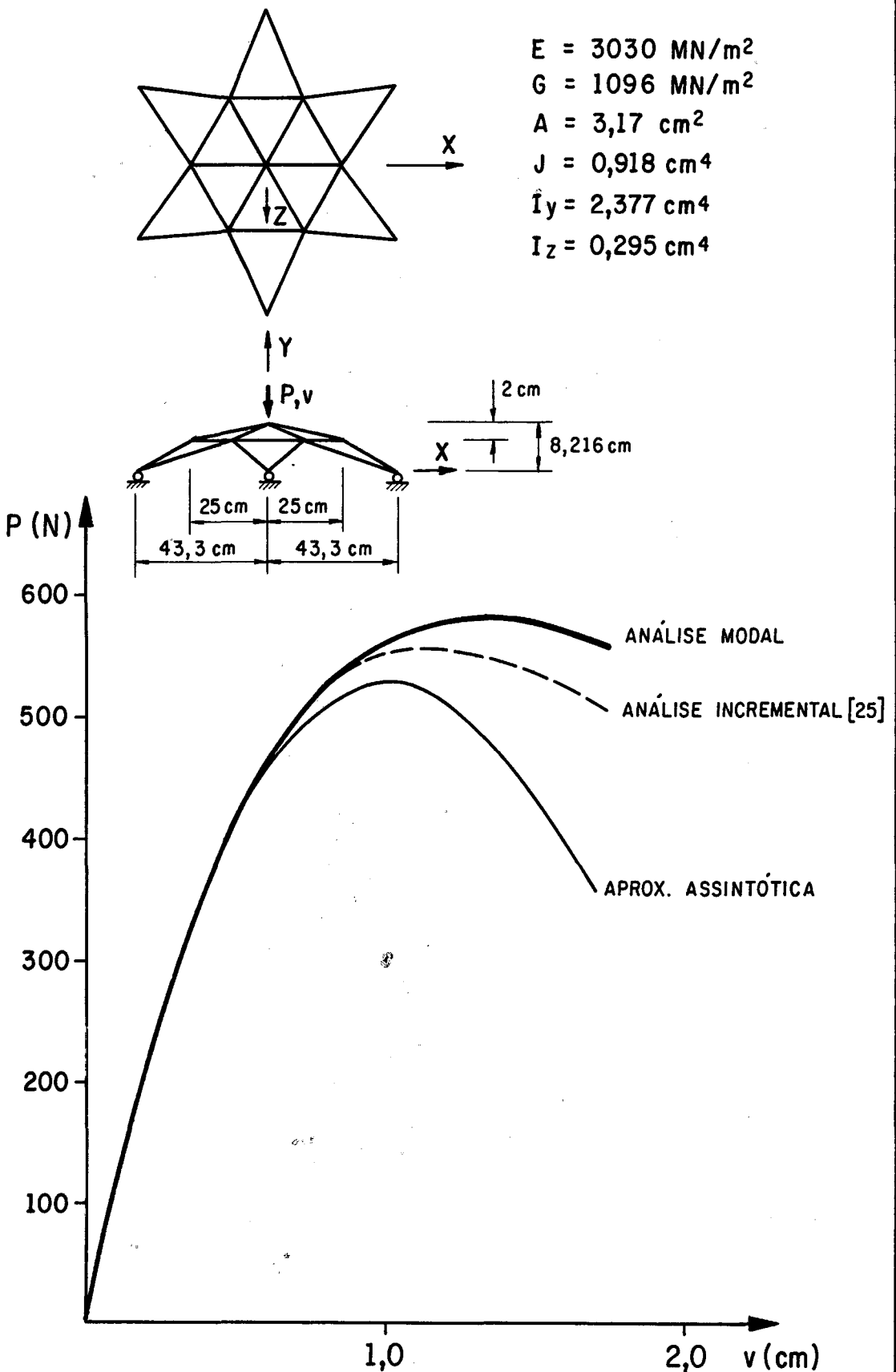


FIGURA VII.4 - 4º Exemplo. Domo abatido em forma de estrela.

na vizinhança do ponto limite.

Quadro VII.4 - Cargas críticas (fig. VII.4)

Análise	Ponto limite (N)	Ponto de bifurcação (N)
Clássica (I.1)	2224	1650
Linearizada (III.41)	755	-
Atualizada (III.40)	604	-
Assintótica (III.34)	530	-
Modal (IV.12)	578	-
Incremental (ref. [25])	558*	

* valor lido no gráfico da ref. [25].

A figura VII.5 apresenta os resultados para a mesma estrutura, sujeita ao mesmo carregamento, porém composta por barras de seção transversal quadrada com a mesma área das barras do exemplo da figura VII.4. Nota-se que agora a rigidez a flexão no plano vertical se torna maior (I_z maior).

As respostas de todos os problemas de autovalor acusaram a ocorrência de ponto limite como primeiro ponto crítico. No quadro VII.5 estão os valores das cargas críticas obtidas, onde pode-se observar que a carga limite referente a um modo radialmente simétrico é, agora, para a estrutura com maior rigidez a flexão nesse modo, cerca de duas vezes maior que aquela observada no exemplo anterior da figura VII.4.

Na solução apresentada em [25] para este mesmo problema (linha tracejada na fig. VII.5) não foi detectado o ponto limite, notando-se apenas uma suave mudança de curva-

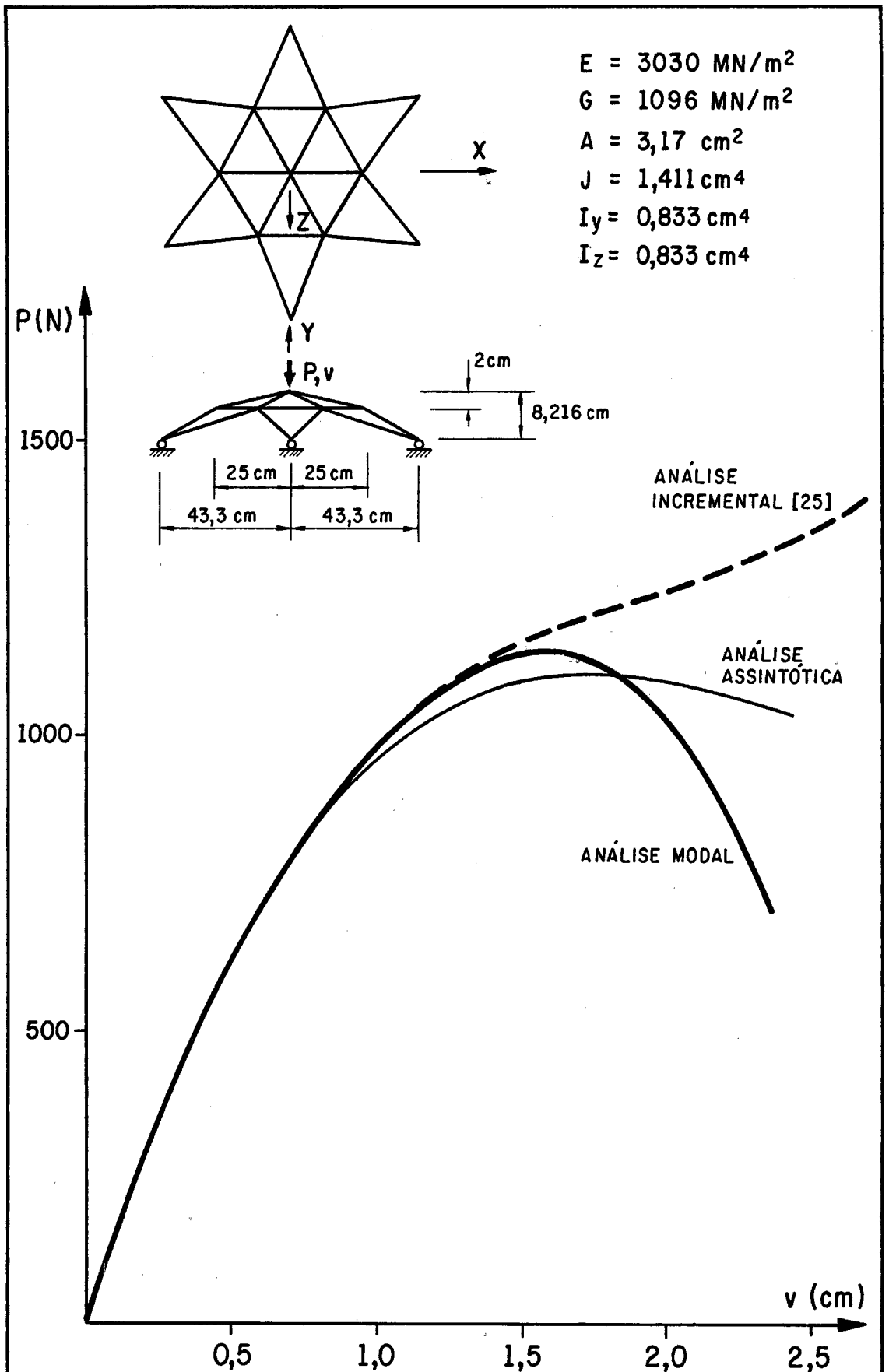


FIGURA VII.5 - 5º Exemplo. Domo abatido em forma de estrela (barras com seção quadrada).

tura do caminho de equilíbrio.

Quadro VII.5 - Cargas críticas (fig. VII.5)

Análise	Ponto limite (N)
Clássica (I.1)	4231
Linearizada (III.41)	1427
Atualizada (III.40)	1301
Assintótica (III.34)	1105
Modal (IV.12)	1132

VII.4. PÓRTICO HEXAGONAL ENGASTADO

O pórtico espacial mostrado na figura VII.6 é composto por 18 barras de mesmas características, cada qual subdividida em 4 elementos para efeito de discretização. Os apoios são engastes e os demais pontos nodais estão submetidos a cargas concentradas verticais de mesma intensidade.

Dos quatro autovalores requeridos, todos se revelaram associados a pontos de bifurcação, sendo o primeiro correspondente a um modo axissimétrico, ϕ_1 , caracterizado por uma rotação em torno de Y. O segundo e terceiro autovalores são coincidentes, e como no segundo exemplo seus modos correspondem a rotações do topo em torno de X e Z respectivamente para ϕ_2 e ϕ_3 . A quarta bifurcação detectada está associada a um modo crítico radialmente antissimétrico, ϕ_4 .

Na mesma figura VII.6 estão apresentados, por sim-

plicidade, apenas os resultados da análise modal, já que as aproximações assintóticas se mostraram quase coincidentes.

Além de indicar que os caminhos pós-bifurcação são todos estáveis, a análise modal também possibilita a verificação da influência de imperfeições geométricas iniciais, na forma de cada um dos respectivos modos críticos. A magnitude de imperfeição no modo $\bar{\phi}_1$ foi baseada no valor de sua amplitude nas proximidades do ponto crítico em questão, no início do caminho pós-crítico.

Como se pode observar, o comportamento fundamental desta estrutura é linear, determinando assim a proximidade dos valores das cargas críticas resultantes das diversas análises, apresentadas no quadro VII.6. Comparando-se os resultados obtidos com aqueles apresentados na referência [26], nota-se que o primeiro e quarto pontos críticos obtidos em cada uma das análises têm valores bem próximos, embora os modos não sejam exatamente os mesmos. A segunda e terceira bifurcações coincidentes não são detectadas em [26] e nenhuma outra informação é dada a respeito dos comportamentos pós-críticos.

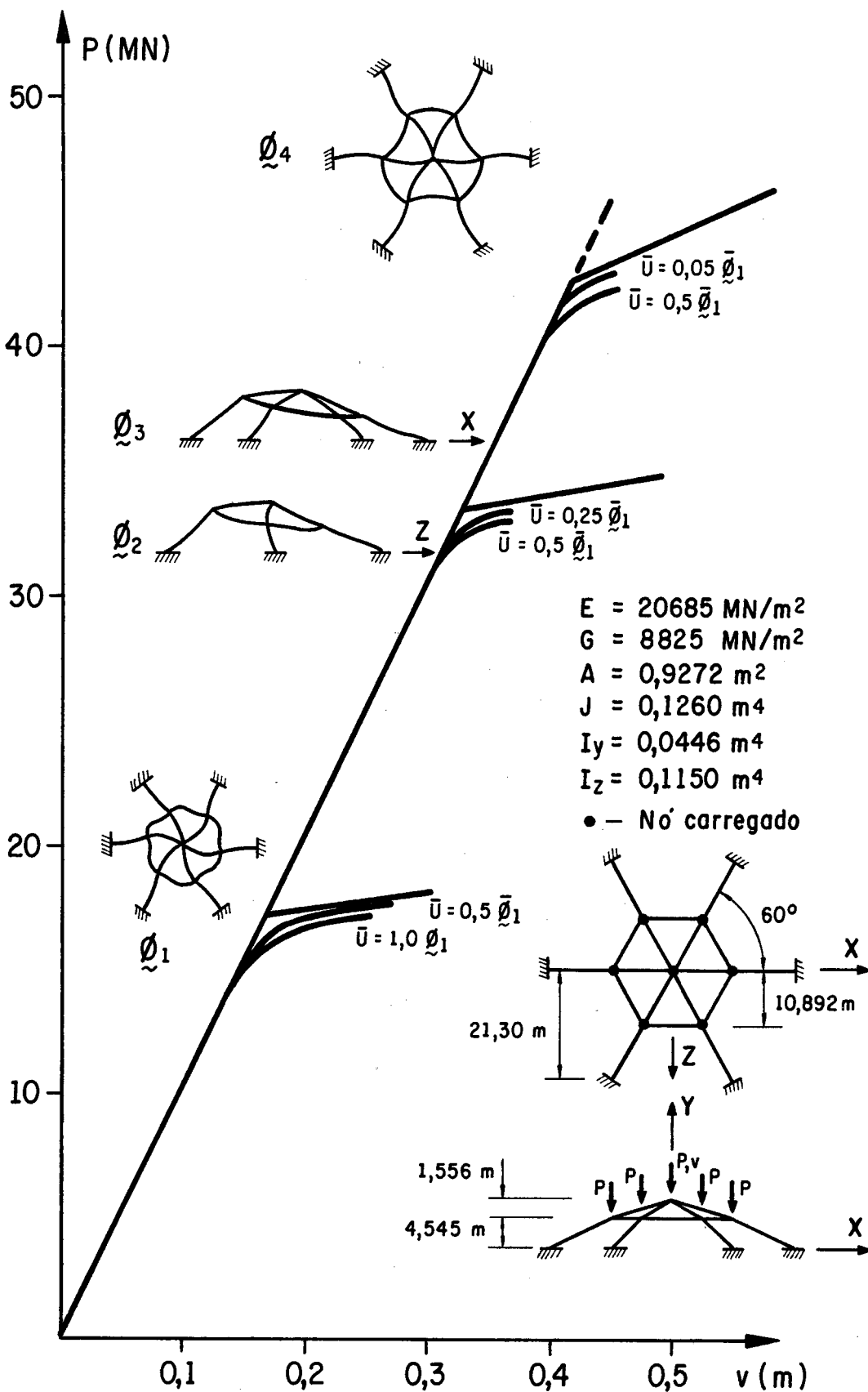


FIGURA VII.6 - 6º Exemplo. Pórtico hexagonal engastado.

Quadro VII.6 - Cargas críticas (fig. VII.6)

Análise	1ª carga crítica (MN)	2ª e 3ª cargas críticas (MN)	4ª carga crítica (MN)
Clássica (I.1)	17,8	35,6	46,7
Linearizada (III.41)	17,8	33,9	46,7
Atualizada (III.40)	17,2	33,6	44,2
Modal (IV.12)	17,2	33,5	42,5
Análise não-linear (ref. [26])	17,4	-	42,8

VII.6. DOMO RETICULADO HEMISFÉRICO

O domo reticulado ilustrado na figura VII.7 tem seus pontos nodais situados numa superfície hemisférica, sendo definidos por 24 divisões iguais em cada anel latitudinal e 4 divisões iguais no semi-meridiano.

A estrutura foi discretizada com 264 elementos de pórtico espacial; um elemento entre nós na superfície hemisférica.

Os 24 apoios da base são rótulas e a estrutura foi analisada para um carregamento vertical uniformemente distribuído sobre sua superfície, com o valor de 2900 N/m^2 . As cargas nodais equivalentes foram calculadas considerando-se que cada módulo triangular distribui igualmente sua carga entre seus três vértices. O valor da carga aplicada nos nós de cada um dos anéis (numerados de baixo para cima) é

$$\begin{aligned}
 E &= 20000 \text{ KN/m}^2 \\
 G &= 8500 \text{ KN/m}^2 \\
 A &= 32 \text{ cm}^2 \\
 J &= 145 \text{ cm}^4 \\
 I_y &= I_z = 85 \text{ cm}^4
 \end{aligned}$$

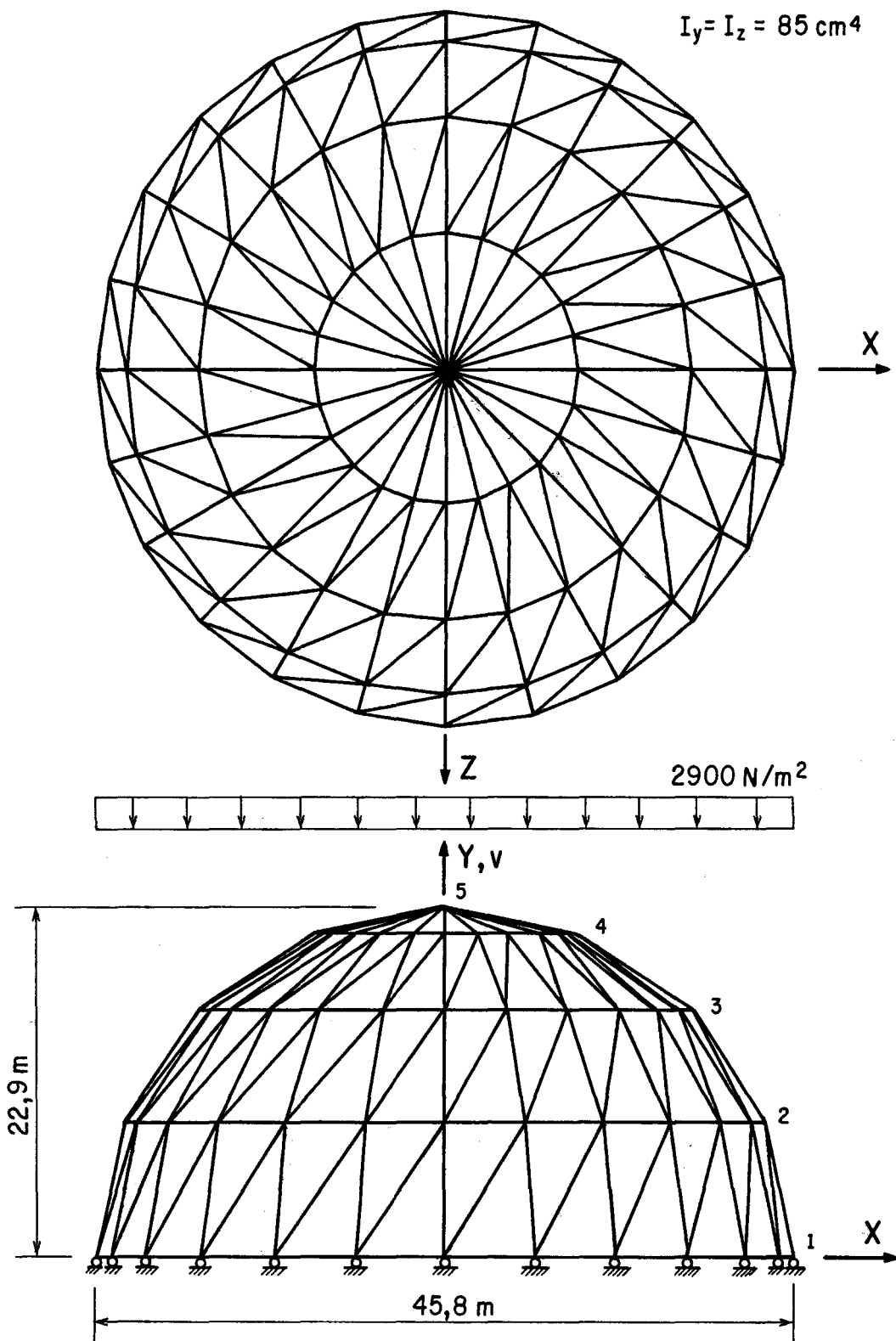


FIGURA VII.7- Domo Reticulado Hemisférico.

dado no quadro VII.7. Este carregamento é o mesmo utilizado na análise apresentada na referência [27], de onde se extraiu o exemplo. Nesta referência, porém, a estrutura é constituída por elementos de treliça espacial.

Quadro VII.7 - Cargas nodais

Anel	Carga (KN)
2	137,46
3	105,20
4	56,92
5 (topo)	174,13

Na figura VII.8 estão representados os caminhos de equilíbrio obtidos na aproximação assintótica e na análise modal. Deve-se notar que a intensidade do carregamento é dada por λ , um parâmetro adimensional, que corresponde à parcela da carga total aplicada.

O domo não apresenta simetria radial e sim simetria cíclica. Portanto o modo fundamental, \underline{U}_0 é caracterizado por uma torção axial global no sentido anti-horário, devido ao arranjo das diagonais.

Este sistema estrutural é caracterizado por um comportamento fundamental quase linear, sendo as respostas das análises linear e não-linear com elementos de treliça [27] praticamente iguais àquelas da presente aproximação assintótica com elementos de pórtico, a qual é dominada pelo modo linear \underline{U}_0 .

No quadro VII.8 são indicados os valores dos qua-

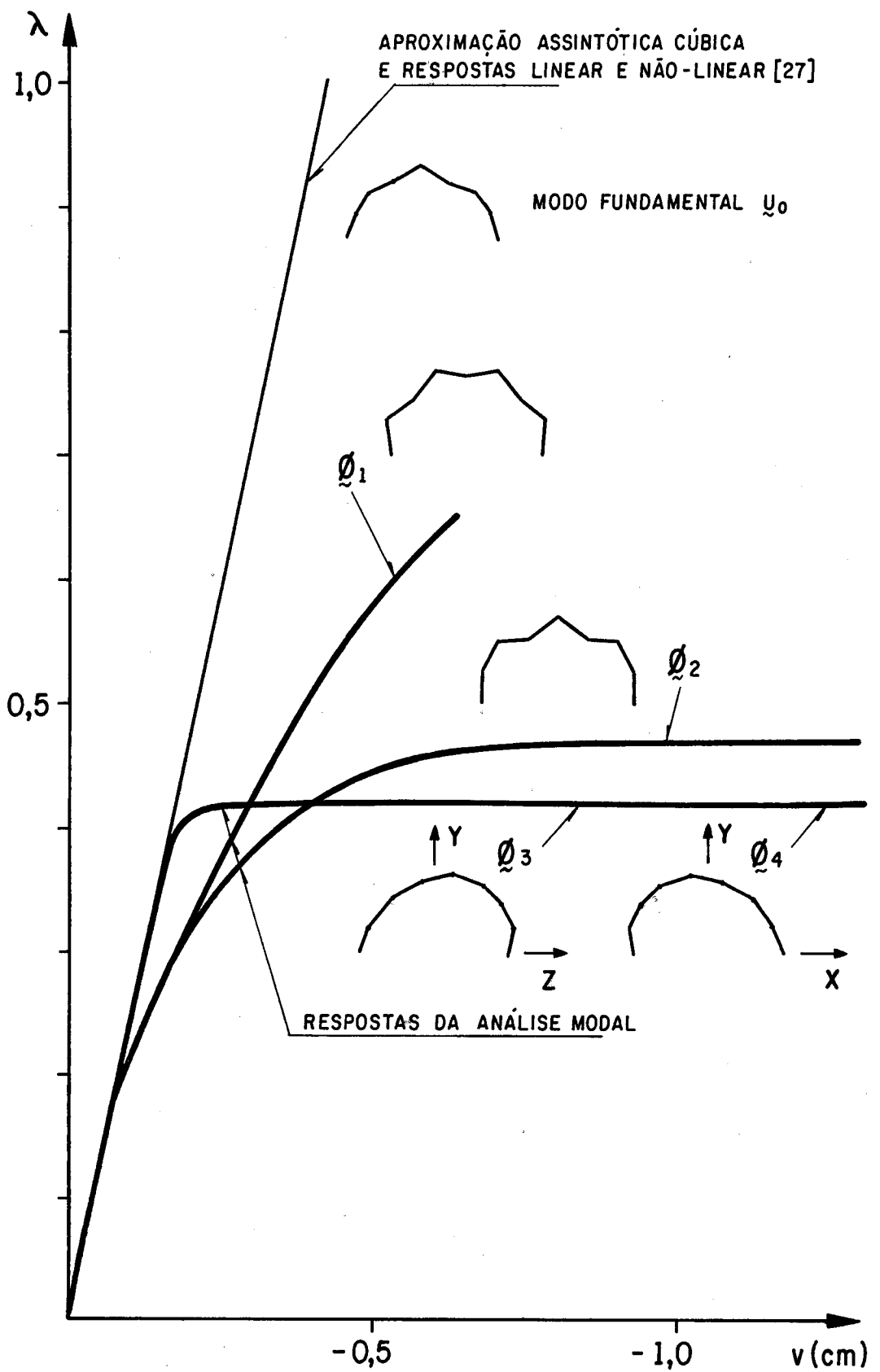


FIGURA VII.8 - 7º Exemplo. Domo reticulado hemisférico.

tro primeiros parâmetros de carga crítica, λ^C , e a forma de seus respectivos modos, obtidos das soluções dos problemas de autovalor. Observa-se que todos os pontos críticos detectados são correspondentes a bifurcações, sendo bem inferiores ao nível de carregamento dado ($\lambda = 1$). Devido ao comportamento fundamental, quase linear os problemas de autovalor clássico e linearizado apresentaram os mesmos resultados. Nota-se que não houve uma alteração significativa nos valores das cargas críticas com a atualização do problema de autovalor. Entretanto, com essa atualização ocorreu uma modificação na ordem e na forma dos modos críticos. No problema atualizado foram detectadas duas bifurcações associadas a modos torsionais distintos, anteriores à bifurcação múltipla correspondente aos modos assimétricos.

Voltando à figura VII.8, pode-se observar que a análise modal corresponde ao primeiro ponto crítico (modo ϕ_1) indicou um caminho pós-bifurcação inicialmente estável. Por problemas de convergência este primeiro caminho pós-crítico não pode ser melhor investigado.

A análise modal relativa ao segundo modo crítico ϕ_2 , revelou a ocorrência de um ponto limite ao longo do caminho pós-bifurcação) para uma intensidade de carregamento de aproximadamente $\lambda = 0,47$ e caracterizado por grandes deslocamentos.

Os modos críticos ϕ_3 e ϕ_4 são, como às demais bifurcações múltiplas, associados a rotações do topo em torno dos eixos X e Z acompanhadas de deslocamentos dos anéis nas direções Z e X respectivamente. O caminho pós-crítico

correspondente aos modos assimétricos ϕ_3 e ϕ_4 , acompanha de perto o caminho fundamental até que, para $\lambda \cong 0,42$, ocorre uma súbita perda de rigidez, com grandes deslocamentos, caracterizando um ponto limite.

Quadro VII.8 - Parâmetros de carga crítica (fig. VII.8)

Problema de autovalor	Parâmetros de carga crítica (λ^c)	Modo
Clássico (I.1)	0,2002 0,2036 0,2036 0,2151	torsional, no sentido horário assimétrico* assimétrico* assimétrico
Linearizado (III.41)	0,2002 0,2036 0,2036 0,2151	torsional no sentido horário assimétrico* assimétrico* assimétrico
Atualizado (III.40)	0,1974 0,2006 0,2030 0,2030	torsional, no sentido anti-horário torsional, no sentido horário assimétrico* assimétrico*

Nota: * - modos assimétricos de uma bifurcação múltipla.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÃO

VIII.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE O MÉTODO

Nos processos convencionais de análise não-linear elástica de estruturas, são comuns as dificuldades encontradas para uma correta detecção de pontos críticos (principalmente de bifurcação) que ocorrem ao longo de um caminho fundamental de equilíbrio, e também a obtenção de caminhos pós-críticos. A existência de rotações pré-críticas, mesmo que pequenas, confere um grau de não-linearidade suficiente para que a aproximação clássica de cargas críticas não mais forneça resultados confiáveis.

Por outro lado, utilizando-se a presente formulação, a qual é baseada na teoria geral da estabilidade elástica, tais problemas não são encontrados.

Na estimativa do valor das cargas críticas, a formulação linearizada consistente (III.41) fornece, com o mesmo esforço computacional, sempre melhores resultados que

aqueles da aproximação clássica (I.1). Resultados ainda mais refinados são obtidos através da atualização do problema de autovalor (III.40), o qual permite uma comparação com os resultados anteriores, indicando o grau de não-linearidade geométrica envolvida no sistema estrutural.

A análise dos caminhos pós-críticos, sejam estes associados a pontos limite ou de bifurcação, é realizada de forma inteiramente automática e geral. Na análise modal o avanço em um determinado caminho pós-crítico requer apenas a troca do parâmetro de controle, de forma semelhante ao controle de deslocamentos no processo incremental. A análise modal utilizada dispensa a consideração de correções ou de tentativas nos modos a serem retidos [12-14,18,29].

O estudo da sensibilidade a imperfeições geométricas é formulado e realizado de maneira simples. Da forma desenvolvida, o sistema perfeito é tratado como um caso particular, onde o caso geral corresponde à estrutura imperfeita, caracterizada por um vetor de imperfeições. As formas modais que tendem a gerar imperfeições de influência mais significativa já estão disponíveis na combinação modal. É possível então definir um vetor de imperfeições como fração de um ou mais destes modos, sendo o caminho de equilíbrio obtido segundo o mesmo procedimento da análise do caso perfeito.

VIII.2. LIMITAÇÕES DA FORMULAÇÃO UTILIZADA

A idéia de se estender às estruturas reticuladas espaciais a presente análise modal assintótica, foi motivada pelo sucesso alcançado na análise de estruturas planas [5]. Verificou-se porém que alguns ajustes devem ser feitos para que o método seja perfeitamente adaptado ao caso tridimensional. Isto se deve às dificuldades encontradas, em alguns casos, na análise de bifurcações múltiplas bastante comuns em estruturas espaciais.

Nas aproximações assintóticas dos caminhos pós-críticos a simplificação, expressa por (II.48), conduz a modos pós-críticos nos quais a influência dos modos fundamentais é reduzida a sua forma linear η_1 . Pode-se observar em (III.61) que o modo ψ_2 depende exclusivamente do modo crítico ϕ e de η_1 . Assim a influência dos modos η_2 e η_3 não é considerada, gerando aproximações distintas da presente análise modal no caso de bifurcações múltiplas ao longo de um caminho fundamental não-linear. Por outro lado a não-linearidade do caminho fundamental é em parte descrita pelos modos η_2 e η_3 utilizados na combinação modal.

Acredita-se que após alguns aperfeiçoamentos, sugeridos a seguir, o procedimento numérico estará adaptado às estruturas reticuladas espaciais, gerando resultados que, à semelhança daqueles obtidos anteriormente para pórticos planos, sejam amplamente satisfatórios em aplicações práticas.

VIII.3. SUGESTÕES DE CONTINUIDADE

Inicialmente, para maior eficiência do programa utilizado seria necessário um melhor aproveitamento de memória auxiliar (arquivos em disco) de forma a diminuir as dimensões dos vetores de trabalho.

Na etapa de cálculo dos coeficientes do sistema não-linear relativo a análise modal, uma considerável redução do tempo de processamento seria possível se os coeficientes a serem truncados não fossem calculados.

Para que o programa tenha aplicação geral, em qualquer caso de estruturas reticuladas espaciais, torna-se necessária a possibilidade de liberação de graus de liberdade, a ser realizada numa forma automática sobre as matrizes de elementos.

Quanto as aproximações assintóticas seria interessante que se obtivessem termos de uma ordem mais altas para os caminhos pós-críticos, onde o modo ψ_3 poderia ser calculado facilmente seguindo-se a formulação geral. Acredita-se, ainda, que a inclusão deste modo, ψ_3 , na combinação modal poderia resolver problemas de convergência, observados em alguns exemplos, no início do caminho pós-crítico.

Incluindo-se ψ_3 na combinação modal poderia se tentar escrever a expressão (IV.15) de outra forma, considerando-se que η_3 e ψ_3 tenham contribuição cúbica. Assim os modos de contribuição de quarta ordem, não considerados, teriam influência a partir da quinta e o truncamento seria me

hor justificado.

Aplicando-se a equação de equilíbrio crítico a partir de um ponto situado em um caminho pós-crítico, poderia-se examinar a ocorrência de bifurcações secundárias, próximas ao ponto crítico inicial. Isto denotaria a existência de interação modal não-linear entre os modos terciários, secundários e primários (fundamentais), podendo então alterar a resposta da estrutura.

A partir da equação de equilíbrio (II.48), que correlaciona forças e deslocamentos nodais, poderia-se calcular os esforços internos nos elementos em qualquer ponto do caminho não-linear. O acompanhamento das tensões seria importante não só para efeito de dimensionamento, como para verificação dos limites do material, principalmente nos casos de comportamento estável, onde o colapso se daria por plastificação ou ruptura.

Finalmente a combinação modal poderia ter um número variável de modos, fixados automaticamente conforme as necessidades. No caso de bifurcações múltiplas, ou muito próximas, seriam retidos além dos modos fundamentais, aqueles correspondentes aos caminhos pós-críticos de cada bifurcação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O.C. "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, 1982.
- [2] BATHE, K.J. "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [3] DESAI, C.S., ABEL, J.F. "Introduction to the Finite Element Method", East-West Press, New Delhi, 1972.
- [4] ALLEN, H.G., BULSON, P.S. "Background to Buckling", McGraw-Hill, 1980.
- [5] ANTONINI, R.C. "Uma Formulação Discretizada da Teoria da Estabilidade Elástica para Análise Estrutural Via Elementos Finitos", Tese D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1986.
- [6] BATISTA, R.C., ANTONINI, R.C. "An Asymptotic Modal Analysis of Nonlinear Structural Systems", SSRC Annual Technical Session 1988, Univ. of Minneapolis, Minnesota, USA.
- [7] THOMPSON, J.M.T., HUNT, G.W. "A General Theory of Elastic Stability", John-Wiley & Sons, Inc.,

London, 1973.

- [8] ROORDA, J., CHILVER, A.H. "Frame Buckling: An Illustration of the Perturbation Technique", Int. J. Non-Linear Mech., 5, 235-246, 1970.
- [9] PRZEMIENIECKI, J.S. "Theory of Matrix Structural Analysis", McGraw-Hill, New York, 1968.
- [10] CONNOR, J.J., LOGCHER, R.D., CHAN, S.C. "Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures", J. of the Struct. Div., ASCE, 94, 1525-1547, 1968.
- [11] MALLET, R.H., MARCAL, P.V. "Finite Element Analysis of Nonlinear Structures", J. of the Struct. Div., ASCE, 94, 2081-2105, 1968.
- [12] CARNOY, E.G. "Asymptotic Study of the Elastic Postbuckling Behavior of Structures by the Finite Element Method", Computer Methods in Applied Mech. and Eng., 29, 147-173, 1981.
- [13] _____ . "Postbuckling Analysis of Elastic Structures by the Finite Element Method", Computer Methods in Applied Mech. and Eng., 23, 143-174, 1980.
- [14] ALMROTH, B.O., STERN, P., BROGAN, F.A. "Automatic Choice of Global Shape Functions in Structural Analysis", AIAA Journal, 16, 525-528, 1978.
- [15] KOITER, W.T. "On the Stability of Elastic Equilibrium", Tese de Doutorado (em holandês),

Polytechnic Institute Delft, H.J. Paris Publisher, Amsterdam, 1945. Tradução para o inglês: NASA TT-F10, 833, Washington D.C., 1967.

- [16] BATISTA, R.C. "Estabilidade Elástica de Sistemas Mecânicos Estruturais", III Escola de Matemática Aplicada, LCNN, Rio de Janeiro, 1982.
- [17] LIMA, E.C.P., MOTA, J.E. "The Application of the Lanczos-Ritz Mode Superposition Method to the Nonlinear Static Analysis of Structures", SSRC Annual Technical Session 1988, Univ. of Minneapolis, Minnesota, USA.
- [18] BATISTA, R.C. "Lower Bound Estimates of Cylindrical Shells Buckling", Ph.D. Thesis, University College, London, 1979.
- [19] ANTONINI, R.C. "Influência da Interação entre Modos e Imperfeições na Flambagem de Cascas Cilíndricas", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1981.
- [20] DYM, C.L., SHAMES, I.H. "Solid Mechanics: A Variational Approach", McGraw-Hill, 1973.
- [21] CHEN, W.F., SALEEB, A.F. "Constitutive Equations for Engineering Materials", John-Wiley & Sons, Inc., 1982.
- [22] KERR, A.D., SOIFER, M.J. "The Linearization of Prebuckling State and its Effect on the Determined Instability Loads", J. Appl. Mech., 36, 775-783, 1969.

- [23] GERE, J.M., WEAVER, W.J. "Análise de Estruturas Reticuladas", Editora Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1981.
- [24] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.F. "Mecânica dos Sólidos", Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 1983.
- [25] MEEK, J.L., TAN, A.S. "Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique", Computer Methods in Applied Mech. and Eng., 47, 261-282, 1984.
- [26] CHU, K.H., RAMPETSREITER, R.H. "Large Deflection Buckling of Space Frames", J. of the Struct. Div., ASCE, 98, 2701-2722, 1972.
- [27] JAGANNATHAN, D.S., EPSTEIN, H.J., CHRISTIANO, P. "Nonlinear Analysis of Reticulated Space Frames", J. of the Struct. Div., ASCE, 101, 2641-2658, 1975.
- [28] FELIPPA, C.A. "Traversing Critical Points with Penalty Springs", Proc. Int. Conf. on Numerical Meth. in Engng., NUMETA'87, Vol. II, Martinus Nijhoff Publishers, Cambridge, G.B. (1987).
- [29] RIKS, E. "Bifurcation and Stability, A Numerical Approach", Proc. Int. Conf. on Innovative Meth. for Nonlinear Prob., Pineridge Press Inc. Ltd., Swausea, G.B. (1984).
- [30] MICROSOFT MUMATH, Symbolic Mathematics Package, Reference Manual, 1983.

APÊNDICE A

PROPRIEDADES DAS MATRIZES DE RIGIDEZ

- Simetria

$$\underline{K}_0 = \underline{K}_0^t$$

$$\underline{K}_1(\underline{A}) = \underline{K}_1^t(\underline{A})$$

$$\underline{K}_2(\underline{A}, \underline{B}) = \underline{K}_2^t(\underline{A}, \underline{B})$$

- Distributividade dos parâmetros

$$\underline{K}_1(\underline{A} + \underline{B}) = \underline{K}_1(\underline{A}) + \underline{K}_1(\underline{B})$$

$$\underline{K}_2(\underline{A} + \underline{B}, \underline{C} + \underline{D}) = \underline{K}_2(\underline{A}, \underline{C}) + \underline{K}_2(\underline{A}, \underline{D}) + \underline{K}_2(\underline{B}, \underline{C}) + \underline{K}_2(\underline{B}, \underline{D})$$

- Comutatividade dos parâmetros

$$\underline{K}_2(\underline{A}, \underline{B}) = \underline{K}_2(\underline{B}, \underline{A})$$

- Comutatividade na multiplicação por vetores

$$\underline{\underline{K_1}}(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{K_1}}(\underline{\underline{B}}) \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{K_2}}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{K_2}}(\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{C}}) \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{K_2}}(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{B}}) \underline{\underline{A}}$$

APÊNDICE B

INTEGRAÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ

Neste apêndice estão anexadas as etapas de integração das matrizes \underline{K}_0 , $\underline{K}_1(\underline{A})$ e $\underline{K}_2(\underline{A}, \underline{B})$ para um elemento de pórtico espacial.

A integração foi realizada com o auxílio do programa MUMATH [30] que opera com álgebra simbólica.

Observou-se que o programa não é muito eficiente na integração de grandes expressões polinomiais. Sendo assim, não se utilizou a função para integração (DEFINT) diretamente sobre as matrizes, e sim o seguinte procedimento.

Por exemplo, uma parcela de $\underline{K}_2(\underline{A}, \underline{B})$ é

$$\int_0^L \underline{N}_{v,x}^t (\underline{N}_{w,x} \underline{A}) (\underline{N}_{v,x} \underline{B}) \underline{N}_{w,x} dx$$

que pode ser reescrita como

$$\int_0^L \underline{P} \cdot \underline{M} dx$$

onde

P é um escalar correspondente ao produto

$$(\underline{N}_{w,x} \quad \underline{A}) (\underline{N}_{v,x} \quad \underline{B}) \quad e$$

\underline{M} é uma matriz 12x12, resultante do produto $\underline{N}_{v,x}^t \underline{N}_{w,x}$, cujos elementos são polinômios do tipo

$$a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$$

Calculando-se as integrais

$$INT4 = \int_0^L P x^4 dx \quad ,$$

$$INT3 = \int_0^L P x^3 dx \quad ,$$

$$INT2 = \int_0^L P x^2 dx \quad ,$$

$$INT1 = \int_0^L P x dx \quad e$$

$$INT0 = \int_0^L P dx \quad ,$$

um elemento da matriz $\int_0^L P \cdot \underline{M} dx$ será obtido como:

$$a \cdot INT4 + b \cdot INT3 + c \cdot INT2 + d \cdot INT1 + e \cdot INT0$$

Desta forma para cada parcela sô foram calculadas cinco integrais, sendo estas posteriormente substituídas nas matrizes por meio da função EVSUB.

Definições de uso geral

- ? P1: $1 + 2(x/L)^3 - 3(x/L)^2$ \$
- ? P2: $x + x^3/L^2 - 2x^2/L$ \$
- ? P3: $-2(x/L)^3 + 3(x/L)^2$ \$
- ? P4: $x^3/L^2 - x^2/L$ \$
- ? q1: $1 - x/L$ \$
- ? q2: x/L \$
- ? Nu: {q1, 0, 0, 0, 0, 0, q2, 0, 0, 0, 0, 0} \$
- ? NV: {0, p1, 0, 0, 0, p2, 0, p3, 0, 0, 0, p4} \$
- ? NW: {0, 0, p1, 0, -p2, 0, 0, 0, p3, 0, -p4, 0} \$
- ? Nt: {0, 0, 0, q1, 0, 0, 0, 0, 0, q2, 0, 0} \$
- ? NVX: DIF(NV, X) \$
- ? NWX: DIF(NW, X) \$
- ? A : [a1, a2, a3, a4, a5, a6, a7, a8, a9, a10, a11, a12] \$
- ? B : [b1, b2, b3, b4, b5, b6, b7, b8, b9, b10, b11, b12] \$
- ? U : [u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7, u8, u9, u10, u11, u12] \$
- ? Nux: DIF(Nu, X) \$
- ? Ntx: DIF(Nt, X) \$
- ? NVxx: DIF(NVX, X) \$
- ? NWxx: DIF(NWX, X) \$

Determinação da matriz \tilde{K}_0

? Nuu: EXPAND(Nux'.Nux) \$

? Ntt: EXPAND(Ntx'.Ntx) \$

? Nvv: EXPAND(Nvxx'.Nvxx) \$

? Nww: EXPAND(Nwxx'.Nwxx) \$

? Nuu: Nuu*L \$

? Ntt: Ntt*L \$

? Nvv: Nvv*L \$

? Nww: Nww*L \$

? Nvv: EVSUB(Nvv, x^2, L^2/3) \$

? Nww: EVSUB(Nww, x^2, L^2/3) \$

? Nvv: EVSUB(Nvv, x, L/2) \$

? Nww: EVSUB(Nww, x, L/2) \$

? KO: EA*Nuu + GJ*Ntt + EIZ*Nvv + Eiy*Nww \$

? KO: FCTR(KO) \$

Determinação da matriz $K_1(A)$

? ua: EXPAND(Nux.A) \$
 ? va: EXPAND(Nvx.A) \$
 ? wa: EXPAND(Nwx.A) \$
 ? Nvw: EXPAND(Nvx'.Nvx + Nwx'.Nwx) \$
 ? Nvu: EXPAND(Nvx'.Nux + Nux'.Nvx) \$
 ? Nwu: EXPAND(Nvx'.Nux + Nux'.Nwx) \$
 ? vwx4: DEFINT(ua*x^4, x, 0, L) \$
 ? vwx3: DEFINT(ua*x^3, x, 0, L) \$
 ? vwx2: DEFINT(ua*x^2, x, 0, L) \$
 ? vwx1: DEFINT(ua*x, x, 0, L) \$
 ? vux2: DEFINT(va*x^2, x, 0, L) \$
 ? vux1: DEFINT(va*x, x, 0, L) \$
 ? wux2: DEFINT(wa*x^2, x, 0, L) \$
 ? wux1: DEFINT(wa*x, x, 0, L) \$
 ? Nvw: vwx0*Nvw \$
 ? Nvu: vux0*Nvu \$
 ? Nwu: wux0*Nwu \$
 ? Nvw: EVSUB(Nvw, x^4, vwx4/vwx0) \$
 ? Nvw: EVSUB(Nvw, x^3, vwx3/vwx0) \$
 ? Nvw: EVSUB(Nvw, x^2, vwx2/vwx0) \$
 ? Nvw: EVSUB(Nvw, x, vwx1/vwx0) \$
 ? Nvu: EVSUB(Nvu, x^2, vux2/vux0) \$
 ? Nvu: EVSUB(Nvu, x, vux1/vux0) \$
 ? Nwu: EVSUB(Nwu, x^2, wux2/wux0) \$
 ? Nwu: EVSUB(Nwu, x, wux1/wux0) \$
 ? vwx0: DEFINT(ua, x, 0, L) \$
 ? vux0: DEFINT(va, x, 0, L) \$
 ? wux0: DEFINT(wa, x, 0, L) \$
 ? K1: EA*(Nvw + Nvu + Nwu) \$

Determinação da matriz $\underline{K}_2(\underline{A}, \underline{B})$

? VAVB: EXPAND((NVX.A)(NVX.B)) \$

? VAWB: EXPAND((NVX.A)(NWX.B)) \$

? WAVB: EXPAND((NWX.A)(NVX.B)) \$

? WAWB: EXPAND((NWX.A)(NWX.B)) \$

? NVV: EXPAND(NVX'.NVX) \$

? NVW: EXPAND(NVX'.NWX) \$

? NWV: EXPAND(NWX'.NVX) \$

? NWW: EXPAND(NWX'.NWX) \$

? VVX4: DEFINT(VAVB*X^4, X, 0, L) \$

? VVX3: DEFINT(VAVB*X^3, X, 0, L) \$

? VVX2: DEFINT(VAVB*X^2, X, 0, L) \$

? VVX1: DEFINT(VAVB*X , X, 0, L) \$

? VWX4: DEFINT(VAWB*X^4, X, 0, L) \$

? VWX3: DEFINT(VAWB*X^3, X, 0, L) \$

? VWX2: DEFINT(VAWB*X^2, X, 0, L) \$

? VWX1: DEFINT(VAWB*X , X, 0, L) \$

? WVX4: DEFINT(WAVB*X^4, X, 0, L) \$

? WVX3: DEFINT(WAVB*X^3, X, 0, L) \$

? WVX2: DEFINT(WAVB*X^2, X, 0, L) \$

? WVX1: DEFINT(WAVB*X , X, 0, L) \$

? WWX4: DEFINT(WAWB*X^4, X, 0, L) \$

? WWX3: DEFINT(WAWB*X^3, X, 0, L) \$

? WWX2: DEFINT(WAWB*X^2, X, 0, L) \$

? WWX1: DEFINT(WAWB*X , X, 0, L) \$

Determinação da matriz $K_2(\underline{A}, \underline{B})$ (cont.)

? NVV: EVSUB(NVV, X^4, VVX4/VVX0) \$

? NVV: EVSUB(NVV, X^3, VVX3/VVX0) \$

? NVV: EVSUB(NVV, X^2, VVX2/VVX0) \$

? NVV: EVSUB(NVV, X^1, VVX1/VVX0) \$

? NVW: EVSUB(NVW, X^4, VWX4/VWX0) \$

? NVW: EVSUB(NVW, X^3, VWX3/VWX0) \$

? NVW: EVSUB(NVW, X^2, VWX2/VWX0) \$

? NVW: EVSUB(NVW, X^1, VWX1/VWX0) \$

? NwV: EVSUB(NwV, X^4, wVX4/wVX0) \$

? NwV: EVSUB(NwV, X^3, wVX3/wVX0) \$

? NwV: EVSUB(NwV, X^2, wVX2/wVX0) \$

? NwV: EVSUB(NwV, X^1, wVX1/wVX0) \$

? Nww: EVSUB(Nww, X^4, wwX4/wwX0) \$

? Nww: EVSUB(Nww, X^3, wwX3/wwX0) \$

? Nww: EVSUB(Nww, X^2, wwX2/wwX0) \$

? Nww: EVSUB(Nww, X^1, wwX1/wwX0) \$

? NVV: VVX0*NVV \$

? NVW: VWX0*NVW \$

? NwV: wVX0*NwV \$

? VVX0: DEFINT(VAVB, X, 0, L) \$

? VWX0: DEFINT(VAWB, X, 0, L) \$

? wVX0: DEFINT(WAVB, X, 0, L) \$

? wwX0: DEFINT(WAWB, X, 0, L) \$

? K2: EA*(NVV +NVW + NwV + Nww) \$