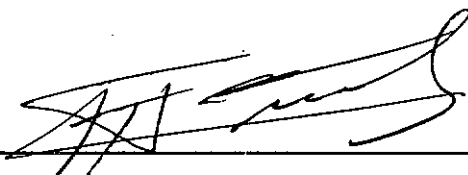


ANÁLISE ESTRUTURAL DE RISERS PARA ÁGUAS PROFUNDAS

Enrique Casaprima Gonzalez

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CÍVIL.

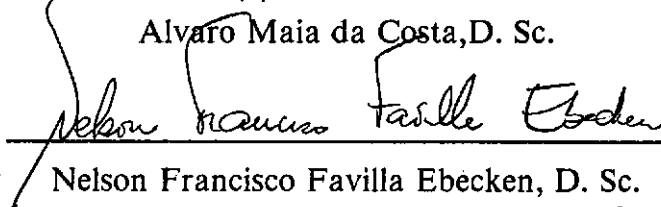
Aprovada por:



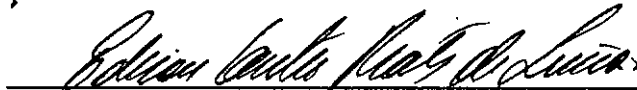
Agustin Juan Ferrante, Ph. D.
(Presidente)



Alvaro Maia da Costa, D. Sc.



Nelson Francisco Favilla Ebecken, D. Sc.



Edison Castro Prates de Lima, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MARÇO 1990

GONZALEZ, ENRIQUE CASAPRIMA

Análise estrutural de risers para águas profundas [Rio de Janeiro] 1990,
XVI, 119 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1990)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Análise estrutural dinâmica e estática de risers

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

Aos meus pais e à minha esposa, Raquel.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Agustin Juan Ferrante pela orientação e estímulo no desenvolvimento deste trabalho.

À PETROBRÁS por ter viabilizado este trabalho por meio do Programa de Capacitação em Águas Profundas (PROCAP).

Aos colegas do CENPES/DIPREX pelo estímulo e interesse.

Aos colegas do DEPEX/DISEP/SEAP, em particular Luiz Alberto e Paulo Osório, que muito me ajudaram na impressão deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

ANÁLISE ESTRUTURAL DE RISERS EM ÁGUAS PROFUNDAS.

Enrique Casaprima Gonzalez

Março de 1990

Orientador: Agustin Juan Ferrante

Programa : Engenharia Civil

No presente trabalho apresenta-se uma formulação de elemento finito para a análise estática e dinâmica de risers em águas profundas, levando em conta diversas características que são específicas desta estrutura.

A teoria, a dedução sucinta das matrizes dos elementos e os procedimentos adotados são apresentados ao longo do trabalho. É estudada também a influência do peso próprio, fluido interno e empuxo sobre o comportamento estrutural do riser e o cálculo de forças de onda e corrente.

Com base nisso, foram preparados dois programas de computador, um para o estudo estático e outro para o dinâmico, e analisados diversos casos de risers submetidos a forças de onda, corrente e deslocamento imposto no topo e os resultados foram comparados com outros existentes na literatura sobre o assunto.

Abstract os Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

ON THE STRUCTURAL ANALYSIS OF DEEP WATER RISERS

Enrique Casaprima Gonzalez

March, 1990

Thesis Supervisor: Agustin Juan Ferrante

Department : Civil Engineering

In this work a finite element formulation is presented for the dynamic and static analysis of deep water risers, taking into account many of the characteristics that are specific for this kind of structure.

The theory, the brief deduction of the element matrices and the proceedings adopted are presented here. The influence of weight, internal fluid and upthrust on the riser structural behaviour and the calculation of current and wave forces are also studied.

Based on these points, two computer programs were prepared, one for the static study and other for the dynamic study, and many cases of risers subjected to waves, currents and imposed displacements on the upper node were analyzed. Afterwards, the results were compared to others related to this area of study.

Índice

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
 CAPÍTULO I	 1
INTRODUÇÃO	1
I.1) ASPECTOS GERAIS	1
I.2) PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS	3
I.3) MODELAÇÃO ESTRUTURAL DO RISER	6
I.4) REVISÃO DA LITERATURA	8
 CAPÍTULO II	 12
FORMULAÇÃO DO ELEMENTO	12
II.1) INTRODUÇÃO	12
II.2) SISTEMAS DE COORDENADAS DO ELEMENTO	14
II.3) FORMULAÇÃO DO ELEMENTO CONVENCIONAL	16
II.4) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA	22
II.5) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO	24
II.6) CARGAS AMBIENTAIS	25
 CAPÍTULO III	 32
CARACTERÍSTICAS DO RISER	32
III.1) INTRODUÇÃO	32

III.2) EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO RISER	32
III.3) PRINCÍPIOS BÁSICOS	35
III.4) FORÇAS INTERNAS EM UM CORPO SUBMERSO	37
III.5) FORÇA EFETIVA EM UM RISER	38
III.6) MÍNIMA FORÇA AXIAL NO TOPO	47
IV.7) TENSÕES NA PAREDE DO RISER	49
 CAPÍTULO IV	52
PROCEDIMENTOS DE RESOLUÇÃO	52
IV.1) INTRODUÇÃO	52
IV.2) ANÁLISE ESTÁTICA	53
IV.3) ANÁLISE DINÂMICA NO TEMPO	55
 CAPÍTULO V	63
IMPLEMENTAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS DE RISERS	63
V.1) INTRODUÇÃO	63
V.2) ESTUDO PLANAR DO PROBLEMA	63
V.3) FLEX-JOINT	64
V.4) APOIOS ELÁSTICOS	70
V.5) CÁLCULO DAS FORÇAS DO MAR	71
V.6) ALGORITMOS UTILIZADOS	73
 CAPÍTULO VI	76
EXEMPLOS	76
VI.1) INTRODUÇÃO	76
VI.2) ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGA COM GRANDES DESLOCAMENTOS	
VI.3) ANÁLISE ESTÁTICA DE UM RISER	79
VI.4) ANÁLISE DINÂMICA DE UM RISER	99
VI.5) ANÁLISE DOS RESULTADOS	104
 CAPÍTULO VII	106

CONCLUSÕES	106
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:	108
APÊNDICE A - TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ	113
APÊNDICE B - MATRIZ DE ROTACÃO	117
APÊNDICE C - MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE	118
APÊNDICE D - MATRIZ DE MASSA ADICIONAL	119

Lista de Figuras

Figura 1. Condição típica de um riser	2
Figura 2. Sistemas de coordenadas de um elemento genérico AB.	14
Figura 3. Coordenadas de Lagrange atualizadas a cada incremento I.	18
Figura 4. Onda de Airy	26
Figura 5. Esquema simplificado de risers conectados	34
Figura 6. Ilustração do princípio de Arquimedes	36
Figura 7. Tração efetiva e peso aparente de um corpo submerso	37
Figura 8. Tração efetiva e peso aparente de um segmento de riser	39
Figura 9. Pressões externa e interna de um segmento de riser	42
Figura 10. Tubos pressurizados	43
Figura 11. Cabo suspenso e submerso	45
Figura 12. Pressão extrema num tubo oco de extremidades abertas	46
Figura 13. Tensões na parede de um tubo com pressões interna e externa	50
Figura 14. Procedimentos incrementais: linear e não linear	52
Figura 15. Exemplificação do funcionamento de um flex-joint	65
Figura 16. Acoplamento de um elemento viga-coluna com molas	67
Figura 17. Esquema de decomposição de um vetor	72
Figura 18. Análise de uma viga tipo "cantilever" para grandes deslocamentos	78
Figura 19. Deformadas 1 e 2	84
Figura 20. Deformadas 3 e 4	85
Figura 21. Deformadas 5 e 6	86
Figura 22. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-0-1	87

Figura 23. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-0-2	88
Figura 24. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-0-1	89
Figura 25. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-0-2	90
Figura 26. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-0-1	91
Figura 27. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-0-2	92
Figura 28. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-20-1-S . .	93
Figura 29. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-20-2-S . .	94
Figura 30. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-20-1-S .	95
Figura 31. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-20-2-S .	96
Figura 32. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-20-1-S .	97
Figura 33. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-20-2-S .	98
Figura 34. Resultados do caso 500-20-1-D	100
Figura 35. Resultados do caso 500-20-2-D	101
Figura 36. Resultados do caso 1500-20-1-D	101
Figura 37. Resultados do caso 1500-20-2-D	102
Figura 38. Resultados do caso 3000-20-1-D	102
Figura 39. Resultados do caso 3000-20-2-D	103

Lista de Tabelas

Tabela	1. Designação dos casos	80
Tabela	2. Pesos das juntas.	81
Tabela	3. Análise estática sem onda	82
Tabela	4. Análise estática com onda	83

Simbologia

U	vetor de deslocamentos nodais
\dot{U}	vetor de velocidades nodais
\ddot{U}	vetor de acelerações nodais
$[K]$	matriz de rigidez
σ	tensão.
τ	tensão cisalhante.
σ_p	tensão.
ε	deformação específica axial.
V	volume
T	trabalho (força vezes distância)
A	área da seção transversal.
I	momento de inércia da seção transversal.
E	módulo de elasticidade.
L	comprimento do elemento.
g	aceleração devido à gravidade.
D	diâmetro.
c	curvatura.
N	força axial no elemento.
e	variação do comprimento do elemento.
ψ_1	deformação angular do nó 1.
ψ_2	deformação angular do nó 2.
Φ_i	função de interpolação, representando o deslocamento no interior de um elemento de viga para um deslocamento unitário do grau de liberdade i .
C	configuração.
t_{\max}	tempo máximo de estudo pela análise dinâmica no domínio do tempo.
P	período natural da estrutura.
t	um instante de tempo, t , qualquer.
ω	frequência natural.
λ	amortecimento crítico modal.
p	pressão.
Δt	intervalo de tempo.

$[R]$	matriz de rotação.
$[B]$	matriz de transformação de deslocamentos nodais para generalizados.
x,y	eixos coordenados locais do elemento.
u,v	deslocamentos nas direções x e y, no interior do elemento.
X,Y	eixos coordenados globais.
u_1, v_1, θ_1	deslocamentos nodais do elemento na sua extremidade 1.
u_2, v_2, θ_2	deslocamentos nodais do elemento na sua extremidade 2.
\vec{F}	vetor de forças externas nodais
q	carga distribuída.
\vec{G}	vetor de deslocamentos generalizados
\vec{I}	vetor de forças de inércia.
MF	momento fletor
Q	força cortante
$[C]$	matriz de amortecimento.
$[M]$	matriz de massa.
α, δ	parâmetros do método de Newmark.
ξ, β	parâmetros para a formação da matriz de amortecimento viscoso da estrutura.
ρ	massa específica.
C_d	coeficiente de arraste.
C_m	coeficiente de inércia.
$K(\vec{U}^t)$	vetor de reações da estrutura deformada no instante de tempo t.
\bar{N}	tração mínima no topo do riser.
J	fator de multiplicação sobre o peso do riser para levar em conta o peso das linhas.
γ	peso específico.
Y_{b1}	ordenada da extremidade inferior da região do riser com flutuadores.
Y_{b2}	ordenada da extremidade superior da região do riser com flutuadores.
H	altura da onda, medida do cavado até a crista
d	nível médio da água do mar.
k	número de onda.
W	força peso.

ω	frequência angular da onda.
S	rigidez de mola.
η	elevação da onda em relação ao nível do mar.

Nesta relação foi adotada a seguinte convenção: [G]significa que a grandeza G é uma matriz, enquanto que G representa uma grandeza vetorial. Quando os símbolos existentes nesta lista apãrecem sem indicação de vetor ou matriz, significa que eles representam as mesmas grandezas definidas na lista, só que na forma escalar.

Sub-índices

L	linear.
G	geométrico.
i	direção do grau de liberdade i .
p	potencial.
0	inicial.
a	adicional.
I	instantâneo.
T	tangente.
t	no instante de tempo t .
x	direção x local.
y	direção y local.
n	direção normal à estrutura.
int	interno.
ext	externo.
ef	efetivo.
o	onda.
cor	corrente.
c	circunferencial.
r	radial.
f	fluido interno.
b	material flutuante.
s	aço.
w	água do mar.
h	hidrodinâmico.
ap	aparente.

top topo.

Super-índices

i iteração *i*.

m referente à mola.

e elemento.

T transposta da matriz.

I incremento *I*.

r riser.

L local.

G global.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1) ASPECTOS GERAIS

Devido a escassez de óleo e gas em terra, foi iniciada, há vários anos, a exploração dos recursos existentes no subsolo marinho situado a pequenas profundidades. Devido ao sucesso dessas operações, a produção de petróleo no mar progrediu para profundidades maiores. Hoje, já é considerada a produção em áreas com lâmina d'água da ordem de 1000m e, com isso, aparecem problemas nunca antes enfrentados e que exigem soluções confiáveis e eficientes.

Um importante componente do sistema de exploração, o qual precisa um cuidado muito especial por estar submetido a uma variedade grande de ações ambientais, é o riser. Trata-se de uma tubulação que liga o poço à unidade flutuante e que pode ser utilizada em operações de perfuração, completação e produção, servindo para conduzir um fluido ou levar ferramentas ou equipamentos, como, por exemplo, a coluna de perfuração. É conectado à unidade flutuante por uma junta telescópica e, no fundo, ao BOP (Blow Out Preventer) por uma junta esférica ou flexível. Ao seu lado correm duas tubulações de menor diâmetro, as linhas de "choke" e "kill", úteis no controle das válvulas do BOP e da pressão na cabeça do poço. A figura (1) mostra uma situação típica dessa estrutura. A força aplicada no topo do riser dá-lhe resistência lateral ao carregamento devido ao efeito de viga-coluna. Cargas estáticas originam-se da força normal de arraste causada pela corrente marinha e pelo peso próprio, quando

o topo sofre um deslocamento. Já as cargas dinâmicas são causadas basicamente pelo movimento da embarcação situada na superfície do mar e pela ação das ondas.

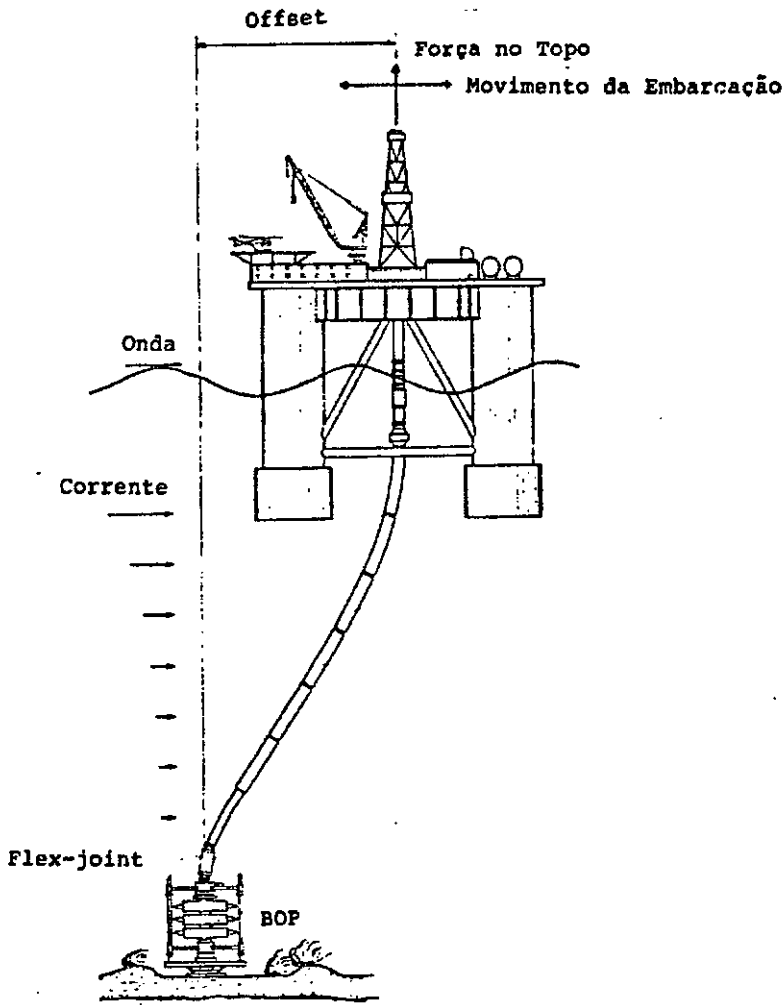


Figura 1. Condição típica de um riser

A garantia da integridade estrutural do riser é uma questão fundamental, já que seu rompimento significa tempo perdido, elevado capital desperdiçado e poluição ambiental. Assim, é necessário dispor de ferramentas adequadas para conseguir um perfeito entendimento do seu comportamento estrutural estático e dinâmico quando

submetido a diversas solicitações, principalmente devido a cargas de ondas periódicas e aleatórias.

O objetivo deste trabalho é, então, o de analisar as características de soluções que permitam estudar e esclarecer esses fenômenos, utilizando para isso princípios de modelação de risers e técnicas de análise numéricas, incluindo o estudo dos diversos aspectos que caracterizam a estrutura (tração efetiva, flex-joint e interação fluido-estrutura) bem como a implementação destas características e procedimentos numéricos para as análises estática e dinâmica.

I.2) PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS

A solução exata das equações diferenciais correspondentes a problemas não lineares é, em geral, impossível. Assim, faz-se necessário utilizar técnicas aproximadas de solução aplicadas diretamente ou depois de se introduzir simplificações adicionais nessas equações diferenciais. Por exemplo, o desenvolvimento de um estudo paramétrico de um riser utilizando-se uma técnica numérica muito refinada pode requerer um tempo muito longo e caro de computação, obrigando, muitas vezes, o analista a considerar simplificações adicionais na geometria, nos carregamentos, no comportamento dos materiais etc.

No caso da análise estrutural de risers, há dois enfoques tradicionais: um, baseado no método da diferenças finitas, e outro no método dos elementos finitos. O primeiro, bastante utilizado no passado para a obtenção de soluções numéricas, baseia-se na transformação das equações diferenciais em algébricas através da introdução de incrementos das variáveis nas equações.

O método dos elementos finitos fornece uma boa aproximação para as equações que governam a resposta do riser. A idéia básica do método é a de que o

domínio pode ser modelado analiticamente através de elementos discretos que o substituiriam. Este método tem a vantagem da sua generalidade, pois permite tratar desde estruturas muito simples até muito complexas. Para se obter uma resposta confiável empregando a modelação por elementos finitos deve-se utilizar uma malha que possa descrever bem a variação das grandezas em estudo ao longo da estrutura.

Apesar de estruturalmente o riser ser bem simples, os diversos fatores que influenciam a sua resposta, como por exemplo, os efeitos de corrente, ondas e movimentos de embarcações, obrigam a efetuar uma análise complexa para se prever seu comportamento, que pode ser estático ou dinâmico. Em alguns casos, uma análise estática fornecerá bons resultados, desde que os efeitos de amplificação dinâmica não sejam importantes. No entanto, quando o período de oscilação do riser é maior do que dois segundos e principalmente quando a frequência da força atuante, causada pelo movimento da embarcação ou pelo mar, for igual ou próxima de uma das suas frequências naturais, é necessário fazer uma análise dinâmica para se avaliar a resposta da estrutura. Esta análise torna-se ainda mais importante à medida que as atividades de perfuração e produção caminham para grandes profundidades.

Há dois métodos de se fazer uma análise dinâmica:

- Análise no domínio do tempo
- Análise no domínio da frequência

Nos dois casos é possível trabalhar-se com o Método da Integração Direta ou com o Método da Superposição Modal.

No método da integração numérica as equações do movimento são integradas ao longo do tempo, utilizando-se um procedimento numérico passo a passo. No método de superposição modal, as equações do movimento sofrem uma mudança

de base para o espaço modal. Uma combinação linear dos modos de vibração é utilizada para descrever a resposta do sistema estrutural.

Na análise no domínio da frequência, os princípios básicos são a superposição de efeitos e a suposição de que todas as parcelas dependentes do tempo são harmônicas e da forma $X = \bar{X}e^{i\omega t}$. Dessa maneira consegue-se eliminar a variável tempo, t , das equações e com isso determinar diretamente a solução do regime permanente sem ter que passar pela resposta transiente. A limitação deste método é que, em geral, ele só se aplica a equações lineares.

O que caracteriza a análise de um riser são os efeitos não lineares inerentes ao problema. Ocorre, então, que, a rigor, eles não podem ser tratados no domínio da frequência pois neste caso, é requerida a linearização das equações de movimento da estrutura. A solução normalmente adotada é a transformação dos termos não lineares em pseudo-cargas. É por causa dessa limitação que o método de análise dinâmica no domínio da frequência não é nem tão geral nem tão preciso quanto um que trabalhe no domínio do tempo.

No caso específico da análise dinâmica de risers submetidos a ondas, a força de arraste hidrodinâmico, que tem uma influência muito forte na resposta, é proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre o mar e a estrutura e cria, então, uma não-linearidade na equação de movimento.

Ultimamente, os modelos de risers têm sido formulados no domínio do tempo, algumas vezes por exigência do próprio problema a ser investigado, outras vezes por se preferir maior generalidade e outras até para evitar a linearização da fórmula de Morison devido à parcela da força de arraste. É certo que as soluções no domínio do tempo fornecem mais generalidade do que as no domínio da frequência pois não precisam de nenhuma aproximação para se levar em conta todas as não linearidades existentes no problema.

I.3) MODELAÇÃO ESTRUTURAL DO RISER

Uma das principais características do desenvolvimento de um projeto confiável e seguro de um riser é a inter-relação entre o processo de construção de um modelo matemático realístico para o problema e a escolha de um método numérico apropriado. A tubulação de um riser pode ser considerada como uma coluna elástica sujeita a esforços de momento fletor, cortante e grandes esforços axiais. Ao longo dela podem ainda existir conexões com ou sem rigidez, como no caso de um flex-joint ou de uma rótula, respectivamente. Internamente, dependendo do tipo de riser, pode haver diversas linhas menores e que precisam ser consideradas na análise.

Sobre o riser podem atuar deslocamentos impostos pela unidade que está na superfície do mar, normalmente uma semi-submersível ou um navio, à qual ele se conecta, além de cargas ambientais como o peso próprio, peso do fluido interno, pressão externa do mar, correntes e ondas. A figura (1) mostra, esquematicamente, a atuação destas forças. O resultado é que surgem forças variáveis no tempo sobre o riser, as quais podem causar grandes deslocamentos e tensões de flexão dependentes do tempo. Estas, por sua vez, podem levar à ruptura, ou mais provavelmente, rompimento por fadiga.

Em estruturas offshore as principais fontes de não linearidade na resposta de risers em águas profundas são:

- Interações fluido-estrutura, resultantes de forças viscosas.
- Não linearidade estrutural geométrica devido a grandes deslocamentos com consideráveis forças axiais.

- Teoria de onda utilizada
- Iteração solo-estrutura

Neste trabalho deu-se prioridade aos dois primeiros itens, ou seja, utilizou-se a onda de Airy e desprezou-se a não linearidade solo-estrutura (assumiu-se que o sistema de fundação fosse muito rígido).

As principais cargas resultantes da atuação de onda e corrente sobre um riser são:

- forças de inércia, proporcionais à aceleração das partículas da água.
- forças não lineares de arraste, proporcionais ao quadrado da velocidade relativa entre a partícula de água e o riser.
- forças oscilatórias de "lift", as quais surgem quando a frequência natural do riser for próxima o suficiente da do "vortex-shedding".

Estas cargas dependem das dimensões do riser e de parâmetros do ambiente marinho, como por exemplo, período e altura da onda e velocidade da corrente.

Em geral, a maior parte da modelação de força hidrodinâmica é até através da fórmula de Morison, a qual contém apenas as parcelas de forças de inércia e de arraste.

No projeto de risers, bem como no de qualquer outro tipo de estrutura sujeita a cargas variáveis ou cíclicas, deve-se atender a dois critérios muito importantes: resistência à tensão máxima e resistência à fadiga. No primeiro caso, as tensões máximas devem ser determinadas, enquanto que no segundo, são importantes as amplitudes das tensões cíclicas e o número esperado de ciclos de aplicação dessas tensões.

Um estudo com ondas randômicas é útil para se prever as tensões máximas e com ondas regulares, para se estimar as amplitudes das tensões alternantes.

Este trabalho propõe-se a estudar métodos convenientes e demais aspectos relevantes na análise não linear de risers em águas profundas. Esta análise envolve corrente, ondas regulares e aplicação do Método dos Elementos Finitos, cuja formulação de elemento que é descrita no capítulo II.

I.4) REVISÃO DA LITERATURA

O comportamento estrutural de risers tem sido alvo de inúmeras publicações. Grande parte do trabalho de pesquisa realizado utiliza o Método dos Elementos Finitos devido as suas características de grande generalidade e precisão. Alguns trabalhos, no entanto, constituem uma exceção ao utilizarem o Método das Diferenças Finitas. É o caso, por exemplo, das análises de risers feitas por BURK (1973), MORGAN e PERET (1975) e BOTKE (1975). Inclusive o programa DERP, para análise dinâmica não linear no domínio da frequência foi desenvolvido com base neste método.

Como foi mencionado no item anterior, as forças hidrodinâmicas não lineares de arraste são muito importantes na análise dinâmica de estruturas offshore. Enquanto no domínio do tempo isto não representa grande dificuldade, no domínio da frequência sim. É por isso que vários pesquisadores se empenham em técnicas de linearização dessas forças. Um trabalho a esse respeito é o de ERTAS e KOZIC (1978), onde eles determinam coeficientes de linearização para o arraste, considerando os efeitos de corrente e onda regular. KROLIKOWSKI e GAY (1980) propuseram uma técnica de linearização melhorada para a análise de risers no domínio da frequência, onde a força hidrodinâmica de arraste é linearizada. Eles fizeram análises com ondas

regulares e irregulares, com e sem corrente. Os autores concluíram que a técnica para solução no domínio da frequência de acordo com a linearização da força de arraste proposta por eles é econômica e dá resultados com boa concordância com relação à análise no domínio do tempo.

GARDNER e KOTCH (1976) abordaram a análise estática e dinâmica de risers pelo Método dos Elementos Finitos, apresentando as equações com as matrizes envolvidas e a influência da força efetiva.

Outro trabalho importante é o de YOUNG, FOWLER, FISHER e LUKE (1978) onde eles fazem uma descrição técnica do modelo utilizado e ainda discutem as diferenças entre risers longos e curtos e quais os parâmetros físicos (fluido interno, força no topo, offset etc.) que mais influenciaram nas respostas obtidas.

LEIRA e REMSETH (1985) fizeram diversas comparações entre quatro métodos para análise dinâmica de risers com relação à acurácia. Os dois primeiros são baseados em simulações no domínio do tempo, enquanto os demais, no domínio da frequência.

Muitos trabalhos procuram explicar fisicamente os efeitos de fluido interno e externo sobre uma tubulação submersa. Dentre eles destaca-se o de PALMER e BALDRY (1974), onde fica demonstrada a existência da tração efetiva. O trabalho de MOORE e COLE (1965) é também interessante pois traz muitos esclarecimentos a respeito de flambagem de tubos causada por forças de empuxo.

SPARKS (1984) publicou um trabalho onde mostra claramente a influência do esforço axial, pressões interna e externa e peso próprio em diferentes aspectos do comportamento de risers. Ele dá exemplos que ajudam a entender essa questão e fórmulas para as tensões na parede da tubulação. Outra publicação que segue nessa

mesma linha, tendendo mais para a parte matemática do problema, é o de McIVER e OLSON (1981).

SAFAI (1983) fez um estudo teórico e numérico, no domínio do tempo, sobre o comportamento dinâmico de risers em águas profundas e que levava em conta os dois tipos principais de não linearidades inerentes ao problema. No final, ele compara os resultados obtidos com os existentes no API BUL 2J (1977).

O trabalho apresentado por McNAMARA e LANE (1984) mostra um método de análise linear e não linear, estático e dinâmico no domínio do tempo, para sistemas offshore, baseado no Método dos Elementos Finitos utilizando o que os autores chamaram de coordenadas convectivas (coordenadas locais, que acompanham o elemento) levando em conta grandes deslocamentos e efeitos não lineares e incluindo, ainda, características especiais dos risers, como, por exemplo, articulações e flex-joint.

Mais recentemente, McNAMARA, O'BRIEN e GILROY (1986) apresentaram a formulação do elemento finito híbrido, tentando determinar, com igual eficiência, os deslocamentos e esforços de linhas flexíveis e rígidas. Depois eles fazem comparações entre resultados desta formulação e de cabos.

Desde que a PETROBRÁS engajou-se no seu programa de capacitação em águas profundas (PROCAP), um dos assuntos que mais tem merecido atenção é o dos risers. Nesta área, a PETROBRÁS tem diversos pesquisadores estudando o assunto, tanto teórica quanto experimentalmente, como mostram os trabalhos de FARIAS, HSU e HIRATA (1981 e 1984) e de BENSIMON, TACCQUES, LOPES e NEVES (1987), por exemplo.

Também a COPPE, que mantém convênio com a PETROBRÁS, realiza importantes pesquisas na área e tem dado grandes contribuições, por exemplo, com relação à aplicação de técnicas novas, como o método de Lanczos, nas análises de

risers. É o caso dos trabalhos de LIMA, COUTINHO, ALVES, LANDAU e EBECKEN (1985 e 1987).

Outro trabalho interessante é o de LIMA e TORRES (1982) onde se discute a importância dos modos de vibração na obtenção dos deslocamentos de estruturas reticuladas.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

II.1) INTRODUÇÃO

O comportamento não linear das estruturas pode se dar através das propriedades do material, da geometria, dos apoios ou de carregamentos não-conservativos.

Hoje em dia, pode-se dizer que o problema de estabilidade envolve geralmente tanto a determinação da carga crítica como a construção da curva não linear carga-deflexão da estrutura. Assim, existem diversos trabalhos publicados que apresentam procedimentos para o uso do método dos elementos finitos na construção dessa curva. Entretanto, devido às variações de abordagem do problema pelos diferentes procedimentos e à relativa complexidade dos métodos, fica difícil obter-se uma compreensão clara dos fundamentos a partir das publicações existentes. Dessa forma, mostramos neste capítulo os conceitos básicos e a metodologia empregada na presente tese na determinação de curvas não lineares carga-deflexão pelo método dos elementos finitos.

Uma hipótese básica é que as rotações das extremidades do elemento relativas ao segmento que une seus extremos na posição deformada sejam pequenas. Esse fato permite que a relação incremental força-deslocamento de um elemento seja tratada como a de uma viga-coluna, melhor até do que a de uma viga curva, por exemplo. No entanto, permite-se a este segmento que tenha grandes translações e rotações. Supõe-se também que o comportamento das estruturas estudadas aqui seja não linear elástico bidimensional (plano x y).

Os problemas não lineares geométricos (conhecidos também por problemas de grandes deslocamentos) podem diferir dos lineares (ou dos pequenos deslocamentos) tanto pelo fato de ocorrerem grandes deflexões, como também pelo fato de existirem tensões axiais tais que, na presença de deslocamentos laterais, têm uma influência significativa na rigidez da estrutura. Enquanto para problemas lineares a matriz de rigidez tem termos constantes, para os geométricos não lineares ela possui termos que dependem da deformada da estrutura. Em outras palavras, em problemas não lineares geométricos a matriz de rigidez $[K]$ que relaciona as forças \underline{F} atuantes na estrutura com seus deslocamentos \underline{U} na equação $[K] \underline{U} = \underline{F}$ deve ser calculada para a posição deformada da estrutura, a qual não é conhecida de antemão. Mais tarde veremos duas maneiras de se resolver esta equação e que foram implementadas nesta tese.

Uma análise não linear por elementos finitos pode ser considerada como tendo três componentes principais: um modelo para o elemento, dependente das funções de interpolação e das relações deslocamento-deformação; um sistema de coordenadas para o elemento e um esquema de resolução do sistema de equações não lineares de equilíbrio. No presente trabalho adotou-se a interpolação linear para os deslocamentos longitudinais e a cúbica para os transversais, pois é o que faz praticamente todos os trabalhos já publicados sobre elementos finitos não lineares para vigas. Com relação ao sistema de coordenadas pode-se ter, dentre outros, o sistema de coordenadas Lagrangeanas para pequenas rotações e o de Euler, definidos mais

adiante. Nos procedimentos de resolução do sistema de equações utiliza-se o método linear incremental (sem iterações), o de Newton-Raphson ou as suas combinações.

II.2) SISTEMAS DE COORDENADAS DO ELEMENTO

Como mencionado anteriormente, pode-se adotar diferentes sistemas de coordenadas de membro na obtenção da matriz de rigidez. Eles estão representados na figura (2). Nela estão mostradas as configurações AB e $A'B^*$ de um elemento viga-coluna antes e depois da deformação, respectivamente, e os eixos xy, que formam o sistema local inicial. As grandezas $u_1^g, v_1^g, \theta_1^g, u_2^g, v_2^g$ e θ_2^g são os deslocamentos globais.

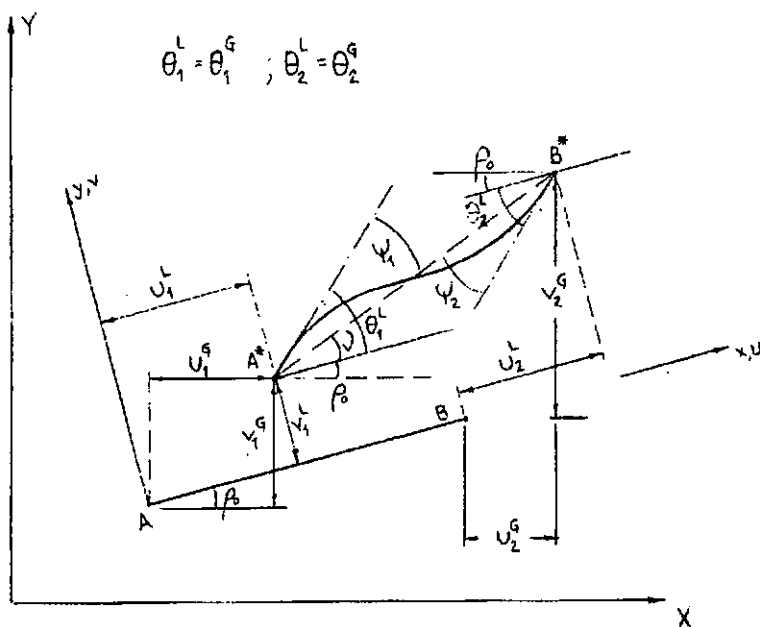


Figura 2. Sistemas de coordenadas de um elemento genérico AB.

II.2.1) COORDENADAS EULERIANAS

Neste sistema os graus de liberdade básicos são definidos com relação ao segmento que une as extremidades do elemento na posição deformada (segmento $A'B'$). O eixo x' é o seu eixo coordenado. Os deslocamentos básicos são ψ_1 , ψ_2 e ΔL , sendo este último a variação de comprimento do segmento AB (isto é, $A'B' - AB$). A matriz de rigidez é obtida no sistema Euleriano e, depois, passada para o sistema global.

II.2.2) COORDENADAS LAGRANGEANAS

No caso da formulação Lagrangeana total, as grandezas físicas são medidas com relação à configuração indeformada da estrutura.

II.2.3) COORDENADAS LAGRANGEANAS PARA PEQUENAS ROTAÇÕES

Neste caso, que pode se denominar de formulação Lagrangeana atualizada, as grandezas físicas são medidas com relação à última configuração em equilíbrio da estrutura imediatamente antes da configuração a ser determinada.

Essa formulação tem a vantagem computacional de que a transformação das matrizes de rigidez para as coordenadas globais é feita através de um ângulo fixo e é, portanto, invariante no procedimento iterativo. Este sistema pode ser usado em problemas envolvendo grandes rotações, desde que o sistema de referência seja atualizado. Este foi o esquema adotado na tese e será descrito detalhadamente mais tarde, ainda neste capítulo.

II.3) FORMULAÇÃO DO ELEMENTO CONVENCIONAL

II.3.1) TEORIA

O princípio dos trabalhos virtuais nos proporciona um meio conveniente para a determinação da relação força-deflexão para um elemento estrutural. Ele estabelece que se as tensões $\underline{\sigma}$ estão em equilíbrio com as forças aplicadas \underline{q} , o trabalho virtual realizado pelas forças externas será igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas, ou seja

$$\delta T_{int} = \delta T_{ext} \quad (II.1)$$

Esta expressão pode ser reescrita, utilizando a notação matricial, da seguinte maneira:

$$\int_V \delta \underline{U}^T \underline{q} dV + \int_A \delta \underline{U}^T \underline{q} dA = \int_V \delta \underline{\bar{\epsilon}}^T \underline{\epsilon} dV \quad (II.2)$$

Colocando a equação acima em função dos deslocamentos nodais de um elemento, chega-se à expressão do tipo

$$\int_V \delta \bar{U}^{e,T} \tilde{N}^T \tilde{q} dV + \int_A \delta \bar{U}^{e,T} \tilde{N}^T \tilde{q} dA = \int_V \delta \bar{U}^{e,T} [B]^T [D] [B] \tilde{U}^e dV \quad (II.3)$$

A barra indica que se trata de um deslocamento virtual.

Cancelando o vetor $\delta \bar{U}^{e,T}$, que é comum a todas as parcelas da equação (II.3) chega-se à relação força-deslocamento desejada:

$$\tilde{F}^e = [K]^e \tilde{U}^e \quad (II.4)$$

II.3.2) MATRIZ DE RIGIDEZ INCREMENTAL

Neste item, todas as grandezas estudadas são tomadas em relação ao sistema local de eixos do elemento. Por simplificação, então, omite-se, aqui somente, o super-índice L, ficando ele subentendido.

Como é mostrado na figura (3), as configurações no final dos incrementos I e (I+1) são denominados por C^I e C^{I+1} , respectivamente. Na passagem de C^I para a C^{I+1} , a primeira deve ser considerada como fixa e a segunda como variável. As componentes dos deslocamentos do elemento em C^{I+1} são medidas com relação ao segmento que une os extremos do elemento em C^I . Nas extremidades elas valem $u_1^I, v_1^I, \theta_1^I, u_2^I, v_2^I, \theta_2^I$.

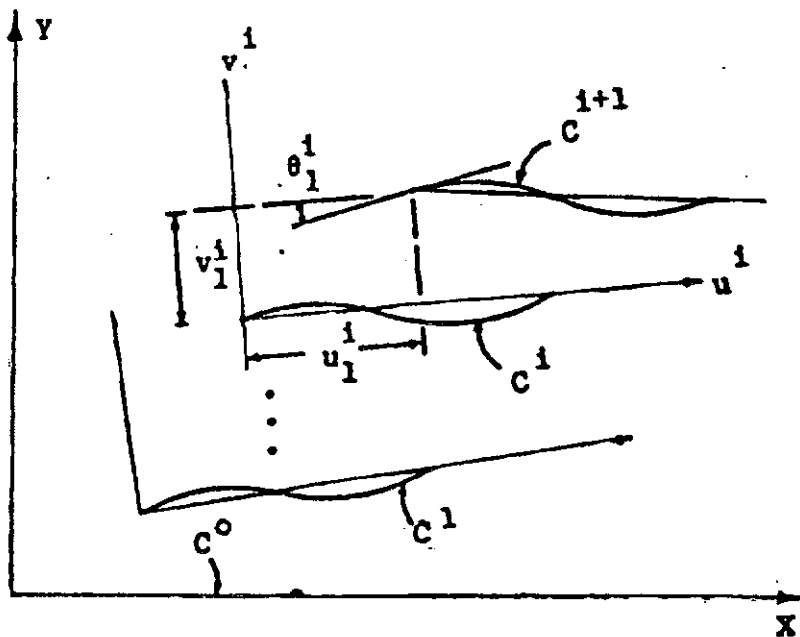


Figura 3. Coordenadas de Lagrange atualizadas a cada incremento I.

Supõe-se que a deformada das configurações até I sejam conhecidas e deseja-se saber como ela será em I + 1. Seja, então, ϵ_o^{I+1} , a deformação específica axial em C^{I+1} , ϵ_o^I , a deformação específica axial em C^I , e $\epsilon_a = \epsilon_o^{I+1} - \epsilon_o^I$. Assim, o trabalho virtual das forças internas na configuração C^{I+1} é dado por

$$\delta T_{int} = \int_V \delta \bar{\epsilon} \sigma dV \quad (II.5)$$

Fazendo uso da Lei Constitutiva, tem-se o seguinte resultado:

$$\delta T_{int} = \int_V \delta \bar{\epsilon} E (\epsilon_o + \epsilon_a) dV$$

Chega-se, portanto, à soma de duas parcelas :

$$\delta T_{int} = E\epsilon_o \int_V \delta \bar{\epsilon} + E \int_V \epsilon_a \delta \bar{\epsilon} \quad (II.6)$$

A relação deformação-deslocamento para um elemento viga-coluna é

$$\epsilon_a = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y \frac{d^2v}{dx^2} \quad (II.7)$$

A expressão para $\bar{\epsilon}$ é a mesma da equação (II.7) só que agora utilizando os deslocamentos virtuais \bar{u} e \bar{v} no interior do elemento.

Na realidade, a contribuição do deslocamento axial para a deformação correspondente é $\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2$. No entanto, como $\frac{du}{dx}$ já é, geralmente, pequeno, o termo quadrático pode ser negligenciado.

É importante notar que como ϵ_a é a variação da deformação específica, u e v da equação (II.7) representam os correspondentes incrementos dos deslocamentos e não os deslocamentos totais.

Para se obter δT_{int} em função dos deslocamentos nodais tem-se que interpolar u , v , \bar{u} , e \bar{v} do interior do elemento em termos dos mesmos. As funções utilizadas para isso são as tradicionais e estão descritas a seguir e valem também para os deslocamentos virtuais.

$$u = \Phi_1 u_1 + \Phi_4 u_2 = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 \quad (II.8)$$

$$v = \Phi_2 v_1 + \Phi_3 \theta_1 + \Phi_5 v_2 + \Phi_6 \theta_2 =$$

$$= \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) v_1 + \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} v_2 +$$

$$(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2})\theta_1 + (-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2})\theta_2 \quad (II.9)$$

Pode-se substituir as expressões de u , v , \bar{u} e $f.\bar{v}$ nas equações que definem ε_e , (II.7), e $\bar{\varepsilon}$ para depois substituir o resultado em em (II.6) e obter, finalmente, a fórmula da matriz de rigidez do elemento em questão. Aplicando-se, então, o princípio dos trabalhos virtuais e realizando todas as operações, chega-se à expressão

$$[K_I^e] \Delta \tilde{U}^e = \Delta \tilde{F}^e \quad (II.10)$$

onde $[K_I]$ é a matriz de rigidez incremental que relaciona os deslocamentos nodais incrementais do do elemento $\Delta \tilde{U}^e$ com suas forças incrementais $\Delta \tilde{F}^e$.

A matriz de rigidez incremental consiste da soma de quatro parcelas

$$[K_I^e] = [K_L^e] + [K_G^e] + EA[K_1^e] + EA[K_2^e] \quad (II.11)$$

sendo

- $[K_L]$ a matriz de rigidez linear convencional, com as partes de flexão e axial desacopladas. É formada por termos constantes.
- $[K_G]$ a matriz de tensão inicial que dá uma aproximação de primeira ordem para a interação entre a força axial e os deslocamentos transversais. Seus termos são função linear da força axial N , existente no início do incremento.
- $[K_1]$ a matriz não linear cujos termos são funções lineares dos deslocamentos incrementais do elemento.
- $[K_2]$ a matriz não linear cujos termos são funções quadráticas dos deslocamentos incrementais do elemento.

As matrizes $[K_f]$ e $[K_s]$ permitem a consideração da variação que ocorre na força axial e nos deslocamentos transversais durante a aplicação do incremento de carga.

As parcelas que formam as matrizes acima estão no Apêndice A.

II.3.3) MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Em alguns casos, os efeitos não lineares devido à variação de esforços e deformações do elemento ao longo do incremento são muito pequenos quando comparados com o efeito não linear das forças e deformações que existem no início do incremento. Neste caso, as matrizes $[K_f]$ e $[K_s]$ podem ser desconsideradas e a matriz de rigidez incremental toma então a seguinte forma:

$$[K_I^e] = [K_T^e] = [K_L^e] + [K_G^e] \quad (II.12)$$

Como $[K_f]$ depende só das forças internas e deformações existentes no início do incremento de carga, ela é comumente conhecida por matriz de rigidez tangente.

II.3.4) MATRIZ DE ROTAÇÃO

Para transformar a matriz de rigidez e o vetor de forças do elemento do sistema local para o global utiliza-se a matriz de rotação $[R]$, definida no Apêndice B. Essas transformações têm a seguinte forma:

$$[K^{e,G}] = [R^{e,T}][K^{e,L}][R^e] \quad (II.13)$$

$$\tilde{F}^{e,G} = [R^e] \tilde{F}^{e,L} \quad (II.14)$$

onde $[K^e]$ é a matriz de rigidez do elemento no sistema local, $[K^e]$ é a mesma matriz só que escrita no sistema global, $\tilde{F}^{e,G}$ é o vetor de forças do elemento no sistema global e $\tilde{F}^{e,L}$ é o mesmo vetor, no sistema local.

II.4) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

Considerando que estamos lidando com segmentos cilíndricos esbeltos, a determinação da matriz de massa dos elementos segue o mesmo procedimento utilizado para membros prismáticos de massa $M(x)$ por unidade de comprimento. Dessa forma, os elementos da matriz de massa consistente do elemento podem ser escritos da seguinte forma

$$M_{ij} = \int_0^L M^e(x) \Phi_i \Phi_j dx \quad (II.15)$$

onde Φ_i e Φ_j são as funções de interpolação para valores unitários dos graus de liberdade i e j .

Utilizando-se as funções polinomiais cúbicas, a matriz de massa consistente pode ser facilmente calculada e ela é apresentada no apêndice C.

A outra contribuição importante para a matriz de massa do sistema é aquela que diz respeito à massa adicional. Esta se deve à aceleração normal relativa entre as partículas fluidas e a estrutura. Utilizando a parcela de inércia da equação de Morison

no sistema local de coordenadas, podemos escrever que a força por unidade de comprimento vale

$$q = M_a^e \ddot{u}_n \quad (II.16)$$

onde \ddot{u}_n é a aceleração transversal local do membro e M_a^e é a massa adicional do elemento por unidade de comprimento. Matematicamente, sua definição é a seguinte:

$$M_a^e = 0.25(C_m - 1)\rho\pi D_{ext}^2 \quad (II.17)$$

Escrevendo a aceleração normal local do membro em termos de suas coordenadas locais através das funções de interpolação tem-se:

$$\ddot{u} = \sum_{i=1}^4 \Phi_i \ddot{u}_i \quad (II.18)$$

Neste caso não existe contribuição na direção axial, por isso i varia desde 1 até 4.

Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais obtém-se que

$$\int_0^L M_a^e \ddot{u}_n \delta u \, dx = \sum_{i=1}^4 I_i \delta u_i \quad (II.19)$$

sendo I_i a força de inércia nodal para o grau de liberdade i .

Substituindo (II.17) e (II.18) em (II.19) e depois de algumas manipulações algébricas, as forças nodais de inércia podem ser escritas da seguinte forma

$$\tilde{I}_i^e = [M_a^e] \tilde{\ddot{U}} \quad (II.20)$$

onde os termos (i,j) da matriz $[M_a^e]$ são definidos pela expressão $M_a^e \int_0^L \Phi_i \Phi_j \, dx$.

A matriz de massa adicional tem, então, uma forma parecida com a matriz de massa consistente e sua definição está no apêndice D.

A soma das matrizes de massa adicional e consistente dará a matriz de massa total do elemento.

II.5) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE AMORTECIMENTO

Se todas as forças de amortecimento que atuam sobre a estrutura pudessem ser determinadas quantitativamente, os termos da matriz de amortecimento de um membro estrutural teriam uma expressão similar à da matriz de massa consistente apresentada no item anterior e que seria:

$$C_{ij} = \int_0^L C(x) \Phi_i \Phi_j dx \quad (II.21)$$

onde $C(x)$ seria o amortecimento viscoso definido ao longo do elemento e Φ_i e Φ_j são as funções de interpolação para valores unitários dos graus de liberdade i e j .

Ocorre, porém, que a determinação do amortecimento viscoso é muito difícil e às vezes impraticável devido às dimensões da estrutura e, conseqüentemente, ao montante de energia requerido para excitar a estrutura a fim de se estudar o decaimento da resposta.

No caso deste trabalho, utiliza-se o que é conhecido por matriz de amortecimento proporcional $[C]$ e é representada por

$$[C] = \xi [M] + \beta [K] \quad (II.22)$$

Os coeficientes ξ e β podem ser determinados se os parâmetros de amortecimento crítico modais, λ_1 e λ_2 , forem conhecidos para duas frequências naturais do riser, ω_1 e ω_2 . Neste caso, a expressão é a seguinte:

$$\xi = \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\lambda_1\omega_2 - \lambda_2\omega_1) \quad (II.23)$$

$$\beta = \frac{2(\omega_2\lambda_2 - \omega_1\lambda_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (II.24)$$

Normalmente, o amortecimento interno para estruturas de aço é da ordem de 1%. É importante notar que a parcela $\xi [M]$ da equação (II.22) adicionará amortecimento às baixas frequências (a resposta seria dominada pelos últimos modos) enquanto a outra parcela, $\beta [K]$, adicionará amortecimento às altas frequências (isto é, a resposta seria dominada pelos primeiros modos).

Uma outra contribuição importante ao amortecimento total do sistema estrutural é o hidrodinâmico. Este tipo de amortecimento se deve ao fato de que na fórmula de Morison, a força de arraste depende do quadrado da velocidade relativa entre a partícula fluida e a estrutura. Pode-se resolver este problema através da realização de iterações internas adicionais sobre a velocidade da estrutura. Este procedimento será mais detalhado no capítulo V.

II.6) CARGAS AMBIENTAIS

As principais cargas ambientais que atuam no riser são as de peso próprio, peso do fluido interno, flutuação, corrente e de onda. A influência das três primeiras no comportamento da estrutura será estudada no capítulo seguinte.

II.7.1) Cargas de corrente

Neste caso adota-se um perfil de distribuição de velocidades ao longo da profundidade, desde o fundo até o nível do mar. Através da fórmula de Morison, transforma-se o perfil de velocidades em um perfil de forças distribuídas sobre o riser.

II.7.2) Cinemática da onda

Para este estudo, empregou-se a teoria linear de Airy, cuja principal suposição é que a amplitude da onda é infinitesimal, ou seja, muito pequena quando comparada com a profundidade da água. A figura (4) mostra as variáveis em questão.

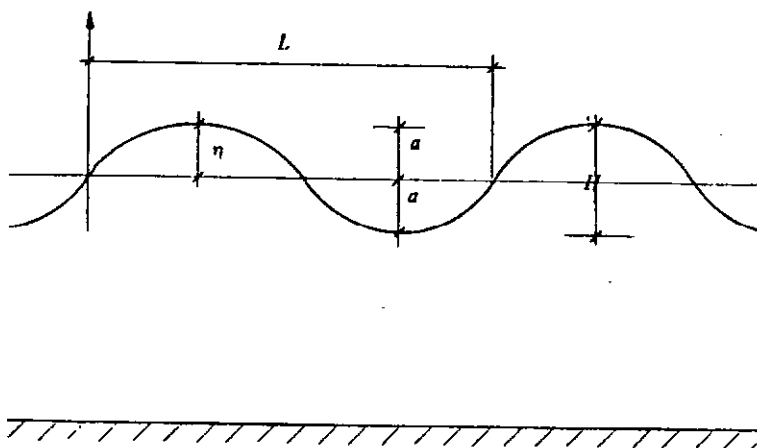


Figura 4. Onda de Airy

Considere-se, então, uma onda progressiva com o deslocamento da superfície do mar dado por

$$\eta(X,t) = \frac{H}{2} \cos(kX - \omega t) \quad (II.25)$$

O potencial de velocidades associado é

$$\phi(X, Y, t) = -\frac{H}{2} \frac{g}{\omega} \frac{\cosh(kY)}{\cosh(kd)} \sin(kX - \omega t) \quad (II.26)$$

O número de onda, k , é dado pela relação não linear de dispersão

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \quad (II.27)$$

A equação acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\frac{\omega^2 d}{g(kd)} = \tanh(kd) \quad (II.28)$$

Construindo a curva de cada termo da equação anterior em um mesmo sistema de eixos, para um determinado valor de $\frac{\omega^2 d}{g}$, observa-se que elas se interceptam em um único ponto. Este ponto de interseção é a solução da equação (II.28), através do qual obtém-se o valor da variável k . Verifica-se que a equação possui apenas uma solução para um dado par ω e d . Numericamente, ela é resolvida por iterações sucessivas. Uma vez obtido k , as equações (II.25) e (II.26) fornecem $\eta(X,t)$ e $\phi(X, Y, t)$, respectivamente.

As velocidades e acelerações de uma partícula fluida são expressas, então, da seguinte forma:

$$\dot{U}_X = \frac{H}{2} \omega_o G_1(Y) \cos(kX - \omega_o t) \quad (II.29)$$

$$\dot{U}_Y = \frac{H}{2} \omega_o G_2(Y) \text{sen}(kX - \omega_o t) \quad (II.30)$$

$$\ddot{U}_X = \frac{H}{2} \omega_o G_1(Y) \text{sen}(kX - \omega_o t) \quad (II.31)$$

$$\ddot{U}_X = \frac{H}{2} \omega_o G_1(y) \cos(kX - \omega_o t) \quad (II.32)$$

onde

$$G_1(Y) = \frac{\cosh(kY)}{\sinh(kd)} \quad (II.33)$$

$$G_2(Y) = \frac{\sinh(kY)}{\sinh(kd)} \quad (II.34)$$

A aceleração total é dada por

$$\frac{d\dot{U}_X}{dt} = \frac{\partial \dot{U}_X}{\partial t} + \dot{U}_X \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial X} \right) + \dot{U}_Y \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial Y} \right) \quad (II.35)$$

$$\frac{d\dot{U}_Y}{dt} = \frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial t} + \dot{U}_X \left(\frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial X} \right) + \dot{U}_Y \left(\frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial Y} \right) \quad (II.36)$$

A teoria de Airy despreza o termo convectivo da aceleração total, ficando só com a derivada parcial no tempo.

Com isso, as equações (II.35) e (II.36) se transformam em $\frac{d\dot{U}_X}{dt} = \frac{\partial \dot{U}_X}{\partial t}$ e $\frac{d\dot{U}_Y}{dt} = \frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial t}$. Ocorre que, para que esta condição seja válida, deve-se ter a seguinte igualdade:

$$\dot{U}_X \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial X} \right) + \dot{U}_Y \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial Y} \right) = \dot{U}_X \left(\frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial X} \right) + \dot{U}_Y \left(\frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial Y} \right) = 0 \quad (II.37)$$

Pode-se reescrever a equação acima para a seguinte forma

$$\dot{U}_X \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial X} - \frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial X} \right) + \dot{U}_Y \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial Y} - \frac{\partial \dot{U}_Y}{\partial Y} \right) = 0 \quad (II.38)$$

A expressão acima equivale a

$$\frac{\partial(\dot{U}_X - \dot{U}_Y)}{\partial X} = \frac{\partial(\dot{U}_X - \dot{U}_Y)}{\partial Y} = 0 \quad (II.39)$$

Conclui-se que, de um ponto de vista matemático, desprezar os termos convectivos significa que a diferença entre as duas componentes de velocidade permanece constante no plano XY, fato este que é irreal e não corresponde exatamente à realidade física do problema. No entanto, como eles têm um valor pequeno, costumam ser desprezados. A fim de avaliar o erro que se comete ao fazer isso é necessário comparar a parte convectiva com a aceleração local, e, para isso, calcula-se, a seguir, o valor da razão $[\dot{U}_X \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial X} \right) + \dot{U}_Y \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial Y} \right)] \left(\frac{\partial \dot{U}_X}{\partial t} \right)^{-1}$.

$$\text{Razão} = \frac{-\pi H}{L} \frac{\cos(kX - \omega t)}{\cosh(kY) \sinh(kd)} \quad (II.40)$$

A função $f(Y) = [\cosh(kY) \sinh(kd)]^{-1}$, é normalmente chamada de decaimento da profundidade.

Na teoria linear de Airy, a relação $\frac{d}{L} > \frac{1}{2}$ caracteriza águas profundas, enquanto que $\frac{d}{L} < \frac{1}{20}$, águas rasas.

No caso de águas profundas, a função de decaimento da profundidade vale aproximadamente 0.01 na superfície do mar e 0.1 no fundo do mar, para o caso em que

$d = 0.5 L$. Observando a expressão (II.40) conclui-se que isso corresponde a uma correção da ordem de $(H/L)/10$ no fundo do mar e de $(H/L)/100$ na superfície e quanto maior for a relação d/L menores serão os valores que a função fornecerá. Como, neste caso, a profundidade é maior que o comprimento da onda e as correções são pequenas na superfície do mar, então os termos convectivos são desprezados.

Ainda em águas profundas, é fácil verificar a seguinte aproximação na relação de dispersão

$$\omega^2 = gk \tanh(kd) \approx gk \quad (II.41)$$

Neste caso, a determinação de k fica imediata.

II.7.3) Cálculo de forças em cilindros esbeltos

Da mesma forma que a corrente, as forças de onda podem, neste caso, ser calculadas pela fórmula de Morison, cuja expressão, nos eixos locais, é dada por

$$q_y = \frac{1}{2} \rho_w D_{ext} C_d (\dot{U}_{o,n} + \dot{U}_{cor,n} - \dot{U}_{r,n}) |\dot{U}_{o,n} + \dot{U}_{cor,n} - \dot{U}_{r,n}| -$$
$$\rho_w \frac{\pi}{4} D_{ext}^2 [C_m \ddot{U}_{o,n} - (C_m - 1) \ddot{U}_{r,n}] \quad (II.42)$$

onde γ é a inclinação do riser.

A fórmula de Morison usada acima está na sua forma mais geral, pois considera a velocidade e a aceleração de um fluido em relação à estrutura do riser, que também está em movimento. Nela não se leva em conta nenhuma componente axial. A fórmula baseia-se na suposição de que a forma da onda incidente é pouco afetada

pela presença da estrutura cilíndrica do riser. No capítulo referente à implementação, será visto como as forças de onda foram calculadas no programa de computador utilizado nesta tese.

Observando a equação (II.42), nota-se que a parcela de arraste da fórmula de Morison (aquela que inclui o termo C_d) é proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre as partículas de água e o riser e, por isso, é não linear.

Com relação à parte inercial da equação (aquela que inclui o termo C_m), tem-se que ela é composta de duas parcelas, $\rho\pi \frac{D_{ext}^2}{4} C_m \ddot{U}_{o,n}$ e $\rho\pi \frac{D_{ext}^2}{4} (C_m - 1) \ddot{U}_{r,n}$, que representam, respectivamente, a força aplicada pela massa de um fluido acelerado que passa por um cilindro fixo e a força inercial causada por um cilindro acelerando em um fluido em repouso. Enquanto a primeira é uma ação aplicada, a outra é uma resistência inercial, o que explica a diferença de sinais entre elas na fórmula de Morison. Essa resistência inercial pode ser interpretada como uma massa adicional que corresponde a um volume de água que deve ser acelerado juntamente com a massa real do cilindro.

GARRISON (1980) concluiu, no seu trabalho, que o coeficiente de inércia, C_m , para um fluxo acelerado sobre um cilindro fixo deve exceder o coeficiente de inércia para um cilindro acelerado em um fluido estático de 1. Isso é exatamente o que está expresso na equação (II.42), quando se usa C_m para multiplicar $\ddot{U}_{o,n}$ e $C_m - 1$ para multiplicar $\ddot{U}_{r,n}$. Deve-se prestar atenção a este fato pois se $C_m < 1$, então $C_m - 1 < 0$, o que implica que há uma redução da massa do riser.

CAPÍTULO III

CARACTERÍSTICAS DO RISER

III.1) INTRODUÇÃO

O riser fica quase na sua totalidade submerso e está sujeito a uma série de ações ambientais, como os efeitos de força axial, pressões interna (do fluido) e externa (do mar), peso próprio, movimentos da embarcação, ondas e correntes. Essas influências precisam ficar bem entendidas a fim de se evitar problemas, como por exemplo, o mal tensionamento do riser e erros no cálculo das tensões limites, o que poderia provocar sérias perdas, tanto de material quanto de fluido transportado. Assim, o objetivo deste capítulo é estudar as características do riser, sua equação diferencial e todos os fatores que entram no seu projeto.

III.2) EQUAÇÃO DIFERENCIAL DO RISER

Sobre um segmento de um riser vibrando atuam diversas forças, dentre as quais se destacam as forças ambientais, como foi dito anteriormente, esforços internos (momento fletor, esforço cortante e axial), pressões interna e externa e forças inerciais. A equação diferencial que expressa o equilíbrio deste sistema estrutural é

$$q_x = m_x \frac{d^2 U_x}{dt^2} + \frac{d^2}{dY^2} \left(EI \frac{d^2 U_x}{dY^2} \right) - \frac{d}{dY} \left(N \frac{dU_x}{dY} \right) -$$

$$(\gamma_{int} A_{int} - \gamma_{ext} A_{ext}) \frac{dU_x}{dY} - (p_{int} A_{int} - p_{ext} A_{ext}) \frac{d^2 U_x}{dY^2} \quad (III.1)$$

onde

q_x carga por unidade de comprimento devido a corrente, onda

e

velocidade relativa entre o riser e o mar.

$m_x \frac{d^2 U_x}{dt^2}$ força de inércia.

$\frac{d^2}{dY^2} \left(EI \frac{d^2 U_x}{dY^2} \right)$ variação da tensão cizalhante.

$\frac{d}{dY} \left(N \frac{dU_x}{dY} \right)$ componentes laterais das forças axiais por unidade de comprimento devido à variação de N ao longo do comprimento.

$(\gamma_{int} A_{int} - \gamma_{ext} A_{ext}) \frac{dU_x}{dY} - (p_{int} A_{int} - p_{ext} A_{ext}) \frac{d^2 U_x}{dY^2}$ forças laterais por unidade de comprimento. Essas forças são os efeitos das pressões interna e externa na inclinação e curvatura do riser, respectivamente.

Esta equação foi deduzida detalhadamente por YOUNG e FOWLER (1978).

A pressão interna de um riser é basicamente hidrostática, devido ao peso do fluido interno, sendo que, às vezes, pode haver uma pressão adicional por algum equipamento. A pressão externa é simplesmente hidrostática, devido à água do mar.

A análise de um riser consiste em resolver a equação diferencial acima. Para isso, as propriedades geométricas e do material, bem como as condições de contorno da estrutura são supostas conhecidas. As cargas de onda e corrente dependem da velocidade e da aceleração do riser e das partículas de água. Por esse motivo a equação torna-se não linear e a sua resolução analítica é praticamente impossível. Daí, então, surge a necessidade de se utilizar técnicas numéricas que resolvam esse problema. No caso desta tese, utilizou-se a análise dinâmica no domínio do tempo por Newmark.

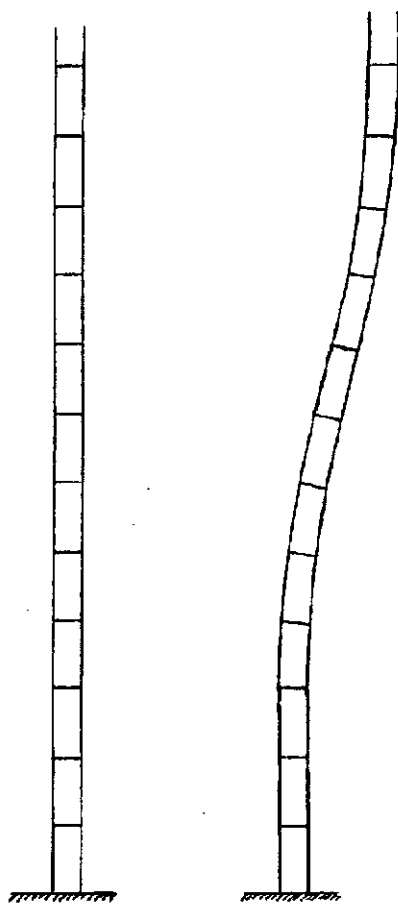


Figura 5. Esquema simplificado de risers conectados

Uma situação muito possível na área offshore é aquela mostrada na figura (5), onde as duas linhas resistem às forças ambientais, e estão interligadas ao longo do comprimento de forma que tenham a mesma deformada. Neste caso, pode-se somar as equações diferenciais de cada linha. Em outras palavras, deslocamentos e todas as suas derivadas serão as mesmas para ambas as estruturas. Dessa forma, soma-se os coeficientes Y , $\frac{dU_x}{dY}$ e $\frac{d^2U_x}{dY^2}$, o que significa somar as forças efetivas, pesos aparentes, EI e massas.

Este procedimento nos leva, então, ao conceito de "multi-line risers", isto é, um riser com inúmeras linhas menores em seu interior. Se elas participarem da resistência estrutural, pode-se adotar o raciocínio exposto no parágrafo anterior.

III.3) PRINCÍPIOS BÁSICOS

O princípio de Arquimedes é facilmente explicado da maneira que segue. Considere-se uma porção de fluido limitada por uma superfície fechada, imaginária, como mostrado na figura (6a) pela linha tracejada. Se o fluido limitado por essa superfície for retirado e substituído pela força distribuída que ele exercia sobre ela, conforme está mostrado na figura (6b), não haveria modificação alguma no equilíbrio do fluido externo adjacente. O diagrama de corpo livre dessa porção de fluido antes de ser removida (figura (6c)) mostra que a resultante das forças de pressão atuantes sobre ela deve ser igual e oposta a seu peso e deve passar por seu centro de gravidade. Se esta porção de fluido for substituída por um corpo de mesmo formato, a ação das forças distribuídas sobre sua superfície será idêntica à das que atuavam sobre a porção fluida retirada. Dessa forma, o princípio de Arquimedes afirma que um corpo submerso total ou parcialmente em um líquido sofre a ação de uma força igual e oposta ao peso de fluido deslocado.

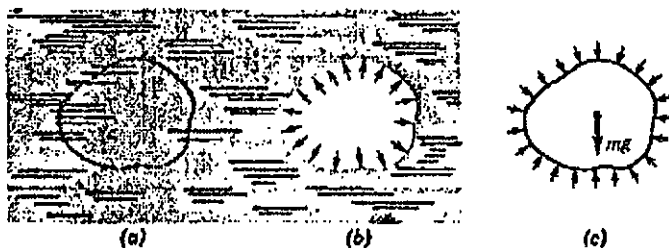


Figura 6. Ilustração do princípio de Arquimedes

É importante ressaltar os seguintes pontos a respeito da lei:

- ela só pode ser aplicada a um campo de pressões que seja fechado, ou seja, um campo que envolva toda a superfície do corpo submerso.
- ela não diz nada a respeito de forças ou tensões internas do corpo submerso.

Um outro ponto muito importante relacionado com o princípio de Arquimedes é o seguinte: da mesma forma que os efeitos do campo de pressões do fluido externo e do peso próprio da porção do fluido envolvida não produzem força resultante, eles também não produzem momento resultante em ponto algum do fluido (o qual não teria a menor condição de resistir às tensões de flexão que surgiriam). Assim, em qualquer parte de um corpo submerso o momento induzido por um campo de pressões fechado é exatamente o mesmo, mas no sentido contrário que o produzido pelo seu empuxo.

III.4) FORÇAS INTERNAS EM UM CORPO SUBMERSO

As forças atuantes numa parte de um corpo submerso, como aquelas indicadas pela porção inferior à linha tracejada, mostrada na figura (7), incluem um campo de pressões que não é fechado pois a área A_{ext} não está em contato com o fluido. Assim, a fim de aplicar o princípio de Arquimedes precisa-se adicionar a pressão externa que está faltando para fechar o campo de pressões e, simultaneamente, retirar essa mesma força ($p_{ext}A_{ext}$) que surge, para não alterar o sistema. Esse raciocínio está indicado na figura (7). Dessa forma, o sistema pressão/força atuante sobre a porção inferior do corpo pode ser decomposta em duas parcelas. Aquela que contém o campo de pressões fechado pode ser pensada como o empuxo (peso de fluido deslocado pelo corpo submerso). Somando-se então esse empuxo com o peso real teremos o peso aparente do segmento inferior.

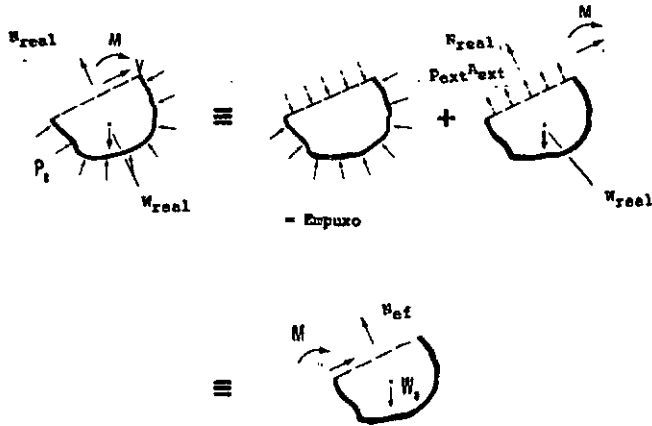


Figura 7. Tração efetiva e peso aparente de um corpo submerso

A força $p_{ext}A_{ext}$, igual e oposta àquela artificialmente pela pressão p_{ext} , criada para fechar o campo de pressões, pode ser adicionada ao esforço real existente, perpendicular à seção, dando como resultante o que se chama de força efetiva, ou seja

$$N_{ef} = N_{real} + p_{ext}A_{ext} \quad (III.2)$$

Nesta tese, o termo 'real' é utilizado no sentido de não ser aparente, de estar realmente atuando na estrutura.

A figura (7) mostra que a força efetiva pode ser obtida pela imposição do equilíbrio de forças na direção normal à seção e que por isso ela só depende do peso aparente. De posse da força efetiva, pode-se obter a força real na seção pela simples aplicação da equação acima.

As demais forças atuantes na seção, esforço cortante e momento fletor, são as mesmas que atuam tanto no sistema peso real/força real como no sistema peso aparente/força efetiva.

III.5) FORÇA EFETIVA EM UM RISER

O raciocínio exposto no item anterior pode muito bem ser estendido para a análise de forças internas em um segmento de um riser. A questão se complica um pouco mais, agora, pois tem-se que considerar o efeito das pressões externa e interna atuantes na sua parede. No procedimento adotado, que está mostrado na figura (8), foram omitidos os esforços de momento fletor e cortante, concentrando-se somente nas forças axiais mas a consideração desses esforços não altera em nada as conclusões a serem obtidas.

Conforme mostrado na figura (8) e seguindo uma linha de raciocínio análoga àquela mostrada no item anterior, divide-se, então, o sistema em um somatório de três parcelas: na primeira atuam as pressões externas, cuja resultante dá o empuxo sobre o segmento fechado; na segunda tem-se somente as pressões internas, cuja resultante dá o peso confinado do fluido interno e na última parcela temos, além das forças de tração real sobre a parede do riser, o peso próprio do mesmo e as forças correspondentes às pressões interna e externa acrescentadas ao se fechar o segmento imaginariamente, só que, agora, no sentido oposto. Então, a soma do empuxo com o peso do fluido interno mais o peso real do segmento do riser (W_{real}) dá como resultante o que se chama de peso aparente desse segmento com seu fluido interno.

Da mesma maneira, a força efetiva é o somatório da força axial real atuando sobre as paredes do riser (N_{real}) com as forças iguais e opostas àquelas criadas artificialmente pelo acréscimo das pressões interna e externa nas extremidades do segmento.

Assim, conclui-se que o sistema de forças equivalente final deve produzir as mesmas deflexões e curvaturas que o sistema original.

Com base no que foi explicado e no que está mostrado na figura (8) pode-se afirmar que as fórmulas para a força efetiva e peso aparente são, respectivamente

$$N_{ef} = N_{real} + p_{ext} A_{ext} - p_{int} A_{int} \quad (III.3)$$

$$W_{ap} = W_{real} - \gamma_{ext} A_{ext} + \gamma_{int} A_{int} \quad (III.4)$$

As equações acima são gerais e valem também para linhas mais complexas, com qualquer seção transversal, feito de qualquer material, preenchido com fluido compressível de densidade variável a diferentes pressões.

De tudo que foi visto, então, conclui-se que há duas maneiras diferentes de se calcular as curvaturas e deformações de um riser: a primeira é através do peso aparente e da força efetiva e a segunda é a partir da força real axial atuante na parede, do peso próprio e das pressões hidrostáticas interna e externa. Esta última é, em geral, mais complicada do que a primeira pois nela deve-se tomar o cuidado de se levar em conta corretamente todos os efeitos da pressão hidrostática, o que não é muito simples se tivermos configurações mais complexas de risers. Certamente os dois métodos darão mesmo resultado.

Observando as expressões (III.3) e (III.4), fica evidente que a parcela que diz respeito à pressão externa tem o mesmo efeito na estabilidade estrutural que uma força de tração, que é o de enrijecer lateralmente o riser (na fórmula (III.3) ela é adicionada à da força axial, enquanto que na (III.4) ela diminui o peso aparente) mas a parcela referente à pressão interna tem o efeito oposto. Esse fato pode ser melhor entendido pela figura (9). Nela, verifica-se que a resultante das forças de pressão externa aponta para o centro de curvatura do segmento (ou seja, quer retificá-lo), enquanto a das forças de pressão interna aponta na direção contrária (isto é, quer encurvar mais ainda o segmento).

A mesma conclusão poderia ser obtida observando-se a equação diferencial (III.1). Nota-se nela que se o riser estivesse vazio e no ar, a sua força axial real e seu peso próprio por unidade de comprimento seriam os coeficientes das parcelas de curvatura e da inclinação, respectivamente. No entanto, quando as pressões externa e interna existem, elas afetam os seus deslocamentos da mesma maneira que a força axial.

Assim, conceitualmente falando, temos dois tipos de forças axiais a considerar: a real, para o cálculo das tensões membranais e a efetiva, para o cálculo dos deslocamentos, efeitos de flexão e estabilidade .

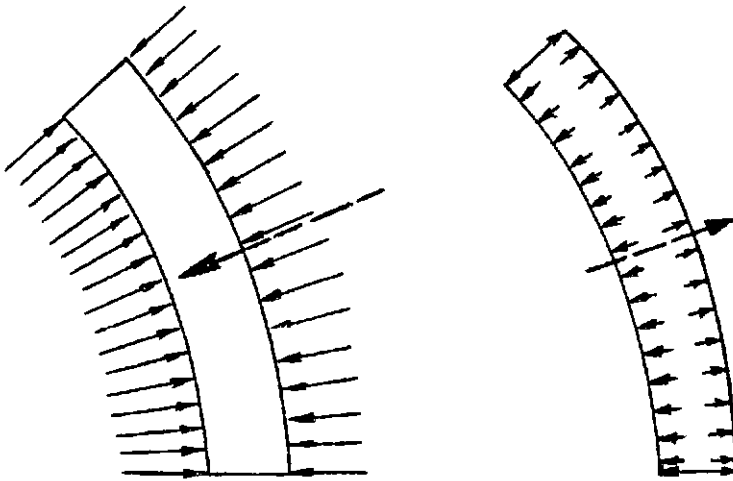


Figura 9. Pressões externa e interna de um segmento de riser

Estes conceitos valem mesmo quando existem forças externas atuando sobre o riser ou quando o fluido interno está em movimento. Neste caso fricção com a parede do riser modifica a distribuição interna de forças entre a parede da linha e o fluido interno mas não muda a força total da coluna, ficando, assim, inalterada a força efetiva.

Se tomarmos o diferencial da força efetiva com relação ao comprimento verificaremos que, para o caso estático, a variação da força efetiva ao longo do riser depende somente de seu peso aparente. Portanto, a melhor maneira de se obter a força real sobre a parede do riser é a seguinte: através da força no topo e do peso aparente pode-se calcular a força efetiva em qualquer ponto, a qual, aplicada na equação (III.3), fornece a força real.

Deve-se portanto ter sempre em mente que a força efetiva é uma realidade física e que deve ser levada em conta nos modelos de elementos finitos para risers. Sabemos que uma força axial de tração enrijece a viga para um carregamento lateral mas uma de compressão torna-a mais flexível, podendo leva-la a uma condição de flambagem elástica. O mesmo raciocínio se aplica para a força efetiva no caso risers. Veremos alguns exemplos a seguir que exemplificarão o assunto.

1) Flambagem de duas colunas pressurizadas

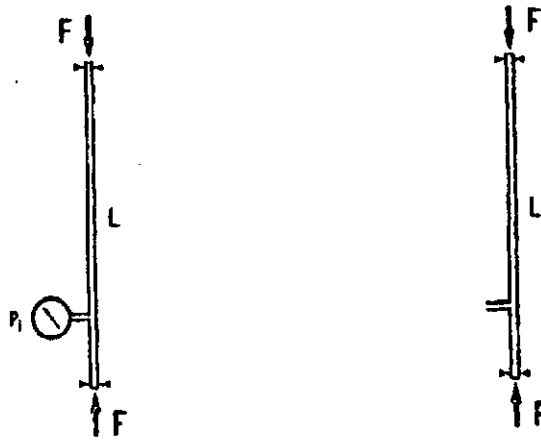


Figura 10. Tubos pressurizados

Sejam dadas duas colunas circulares iguais com diâmetro externo D_{ext} e interno D_{int} , articuladas nas extremidades permitindo que se desloquem na direção axial. Ambas estão submetidas à mesma carga de compressão F , sendo que uma tem pressão interna, p_{int} , nula (figura (10) à direita) e a outra não (figura (10) à esquerda).

Pode parecer, à primeira vista, que para uma dada força na parede do tubo, F , a condição de flambagem seria atingida se se aplicasse uma pressão interna tal que

a força efetiva N_{ef} do tubo fosse suficientemente negativa, ou seja, tal que fosse igual à carga crítica de flambagem do mesmo. No entanto, não é isso que ocorre. Para o tubo da direita tem-se

$$N_{ef} = -F - p_{int} A_{int} = -F$$

pois $p_{int} = 0$ enquanto que para o tubo da esquerda tem-se que a força axial numa extremidade vale $p_{int} A_{int} - F$. Assim, a sua força efetiva é dada por

$$N_{ef} = p_{int} A_{int} - F - p_{int} A_{int} = -F$$

As duas colunas, então, estão submetidas à mesma força compressiva efetiva, que vale F . Como é ela quem controla os efeitos de flambagem e flexão de tubos com pressão interna e externa, as duas colunas flambarão para a mesma carga F , ou seja, para

$$F = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

onde L = comprimento dos tubos.

É importante ressaltar que a força real sobre a parede do riser depende da pressão interna do tubo (isto será mostrado mais claramente no próximo item mas pela equação (III.3) já se pode ver isso) mas como ela é apenas uma parcela da força efetiva do tubo, não controla a flexão e a flambagem.

2) Flambagem de cabo pendurado no mar

Um cabo está sendo descido verticalmente em águas profundas como mostra a figura (11). A força de empuxo $p_{ext} A_{ext}$, gerada na extremidade inferior pela pressão hidrostática, será de compressão e maior que a força necessária para causar flambagem

no cabo se ele estivesse no ar e com o mesmo comprimento submerso. As forças axiais atuantes no cabo são, em termos reais

- extremidade inferior: $p_{ext} A_{ext}$, compressão.
- extremidade superior: F , tração.

Em termos efetivos são

- extremidade inferior: $-p_{ext} A_{ext} + p_{ext} A_{ext} = 0$.
- extremidade superior: F , tração.

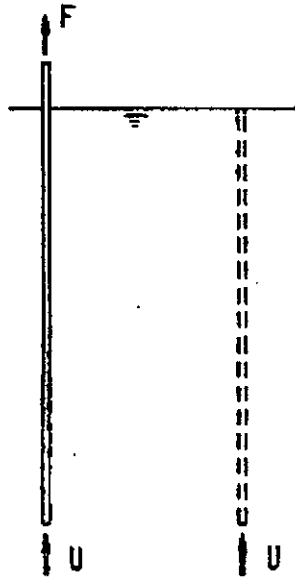


Figura 11. Cabo suspenso e submerso

Ou seja, a força axial efetiva será sempre positiva (tração) ao longo do cabo.

Conclui-se, então, que um cabo pendurado em um líquido nunca flambará, por mais que ele seja descido.

3) Flambagem de um tubo de extremidades abertas

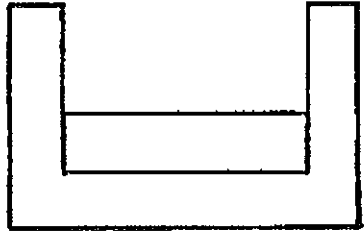


Figura 12. Pressão extrema num tubo oco de extremidades abertas

Imagine um tubo oco, retilíneo, inicialmente com pressão interna nula, apoiado numa superfície horizontal e com suas extremidades abertas e em contato com as paredes de um bloco rígido, como mostrado na figura (12).

Se for aplicada somente uma pressão interna no tubo, verifica-se que a força axial real atuante na sua parede é nula (a pressão exerce uma força sobre as paredes do bloco) mas a força axial efetiva vale $-p_{int} A_{int}$, de compressão. Portanto, o tubo pode vir a flambar se a pressão atingir o valor crítico.

4) Flambagem de um tubo de extremidades fechadas

Suponha o mesmo tubo do exemplo anterior, também com com pressão interna inicial nula, só que, agora, com suas extremidades fechadas e não existe mais o bloco rígido. Se se aplicar novamente uma pressão interna, tem-se que a força real axial sobre a parede do tubo vale $p_{int} A_{int}$. Ela é de tração e é conhecida, em ingles, por pressure end load. Já a força axial efetiva será $p_{int} A_{int} - p_{int} A_{int} = 0$. Conclui-se, então, que o tubo jamais flambará, por maior que seja a pressão interna.

III.6) MÍNIMA FORÇA AXIAL NO TOPO

A discussão anterior tem uma grande importância pois permite que se faça uma estimativa inicial a respeito do tensionamento do riser. Como se viu no item anterior, a força efetiva é definida por:

$$N_{ef}(Y, t) = N(Y, t) + p_{ext}A_{ext} - p_{int}A_{int} \quad (III.5)$$

onde $N_{ef}(Y, t)$ e $N(Y, t)$ são, respectivamente, a força axial efetiva e real do riser num ponto de ordenada Y , no tempo t .

As equações para as pressões interna e externa são, respectivamente:

$$p_{ext} = \gamma_w(d - Y) \quad \text{para } Y \leq d \quad (III.6)$$

$$p_{int} = p_a + \gamma_f(L' - Y) \quad (III.7)$$

onde p_a é a pressão interna aplicada no topo do riser. A força real atuante na parede do riser pode ser escrita da seguinte forma:

$$N(Y, t) = N_{top} + p_a A_{int} - \int_Y^{L'} J \gamma_s A_s dY + \left[\int_Y^{Y_{b2}} (\gamma_w - \gamma_b) A_b dY \right]_{Y_{b1}}^{Y_{b2}} \quad (III.8)$$

onde os colchetes na última parcela significam que esta só existe quando $Y \leq Y_{b2}$ e que a integração só pode ser feita para $Y_{b1} < Y < Y_{b2}$. Quando $Y < Y_{b1}$, a equação acima transforma-se para

$$N(Y, t) = N_{top} + p_a A_{int} - \int_Y^{L'} J \gamma_s A_s dY + A_b (\gamma_w - \gamma_b) (Y_{b2} - Y_{b1}) \quad (III.9)$$

Se $\gamma_s A_s$ puder ser considerada constante ao longo do riser (e é o que se fará), então a integral dá como resultado $J\gamma_s A_s(L' - Y)$.

Substituindo então as expressões (III.6), (III.7) e (III.9) em (III.5) tem-se

$$N_{ef}(Y,t) = (Y,t) = N_{top} + \gamma_w(d - Y)A_{ext} - [p_a + \gamma_f(L' - Y)]A_{int} - \\ J\gamma_s A_s(L' - Y) + p_a A_{int} + A_b(\gamma_w - \gamma_b)(Y_{b2} - Y_{b1}) \quad (III.10)$$

É interessante notar que a parcela $p_a A_{int}$ contribui para a força axial real sobre a parede do riser, ou seja, sobre a sua tensão membranal mas não para a força efetiva, onde ela é cancelada.

Se definirmos a força mínima de pretensão do riser, \bar{N} , como sendo aquela necessária para produzir uma força efetiva nula na base do mesmo, então, fazendo $N_{ef}(0,t) = 0$ na equação (III.10) obteremos:

$$\bar{N} = (J\gamma_s A_s + \gamma_f A_{int})L' - \gamma_w d A_{ext} - A_b(\gamma_w - \gamma_b)(Y_{b2} - Y_{b1}) \quad (III.11)$$

A expressão acima baseia-se no fato do riser estar na vertical e \bar{N} é considerado como um mínimo absoluto, apesar dele suportar um pouco de compressão na base antes de flambar.

Ocorre que, em condições de mar, o riser pode não estar na vertical e o ângulo que ele faz com uma linha vertical passando pelo "balljoint" é geralmente maior que 10° antes que ele tenha, neste ponto, força efetiva nula. Assim, a força axial mínima necessária para tensionar o riser acaba sendo sempre maior que \bar{N} .

IV.7) TENSÕES NA PAREDE DO RISER

A força circunferencial induzida pela pressão e a força axial real atuantes na parede do riser independem do material. Mas a distribuição resultante das tensões (axial, circunferencial e radial) dependem. Por exemplo, risers flexíveis são compostos de diversas camadas reforçadas para resistirem a diferentes forças. Se houver interação entre as camadas, este fato deve ser levado em conta no cálculo de tensões e deformações.

As fórmulas apresentadas a seguir foram apresentadas pela primeira vez por Lamé. Ele mostrou que a média das tensões radial e circunferencial é igual em todos os pontos da seção transversal da parede do riser. Com isso, temos que, por efeito de Poisson, a deformação específica axial também o será. Dessa forma, a seção transversal permanece plana depois de aplicado o carregamento. As tensões triaxiais que atuam na parede de um riser estão mostradas na figura (13) e são expressas pelas seguintes fórmulas:

- Axial

$$\sigma_{real} = \sigma_p + \sigma_{ef} \quad (III.12)$$

- Circunferencial

$$\sigma_c = \sigma_p + \tau \quad (III.13)$$

- Radial

$$\sigma_r = \sigma_p - \tau \quad (III.14)$$

onde

$$\sigma_{ef} = \frac{T_{ef}}{A_{ext} - A_{int}} \quad (III.15)$$

e

$$\sigma_p = \frac{p_{int}A_{int} - p_{ext}A_{ext}}{A_{ext} - A_{int}} \quad (III.16)$$

$$\tau = \frac{(p_{int} - p_{ext})A_{int}A_{ext}}{(A_{ext} - A_{int})A_r} \quad (III.17)$$

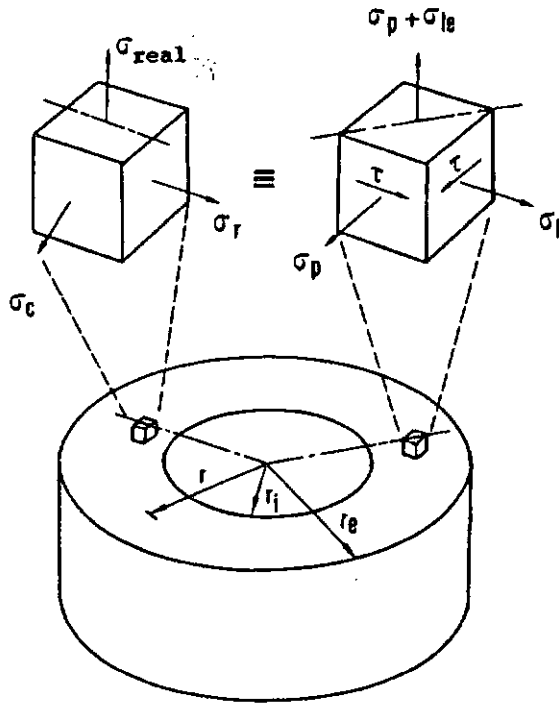


Figura 13. Tensões na parede de um tubo com pressões interna e externa

A tensão efetiva tem esse nome porque vem da divisão da força efetiva pela área da seção transversal da parede. Apesar da tensão efetiva se originar da força efetiva, a primeira tem um interesse mais restrito por se aplicar somente a tubos cilíndricos elásticos enquanto que a segunda tem uma aplicação geral. A tensão de efeito de extremidade, σ_p , tensão de efeito de extremidade recebe esse nome pois é igual a tensão axial que seria induzida na parede da tubulação, devido às pressões interna e externa, se ela fosse cortada e fechada na seção em consideração.

Utilizando-se o círculo de Mohr, pode-se chegar a dois modos simples de se representar as tensões da parede, conforme representado na figura (13). As tensões nos dois cubos são inteiramente equivalentes. resumindo, pode-se afirmar que, em todos os pontos da seção da parede, temos :

- Uma tensão de origem hidrostática, constante e igual à tensão de efeito de extremidade. Esta tensão pode ser de compressão ou de tração.
- Uma tensão cizalhante atuante a 45° das direções radiais. Esta tensão varia ao longo da seção e tem seu valor máximo na superfície interna
- Uma tensão efetiva axial constante. Ela pode ser vista como sendo o montante que a tensão real da parede (σ_{real}) ultrapassa a tensão hidrostática (σ_p).

CAPÍTULO IV

PROCEDIMENTOS DE RESOLUÇÃO

IV.1) INTRODUÇÃO

Veremos neste capítulo os procedimentos numéricos utilizados nas análises desta tese. Na parte estática foram implementados o método linear incremental e o não linear incremental. A figura (14) mostra uma representação gráfica deles. Na parte dinâmica utilizou-se o método de Newmark.

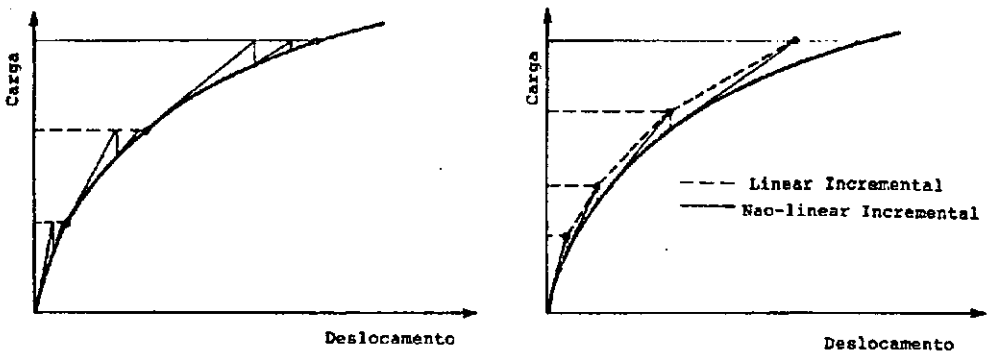


Figura 14. Procedimentos incrementais: linear e não linear

IV.2) ANÁLISE ESTÁTICA

IV.2.1) MÉTODO LINEAR INCREMENTAL

Neste método, a carga é aplicada em uma série de pequenos incrementos e em cada um deles a variação dos deslocamentos é calculada através da matriz de rigidez tangente descrita anteriormente, ou seja, $K_T = K_L + K_E$. No início de cada incremento de carga, a geometria deformada (usada para atualizar a matriz de rotação) e os esforços internos (usados na formação de K_E) são utilizados na obtenção da matriz de rigidez da estrutura. Além disso, o comprimento do elemento na matriz K_E deve ser atualizado a fim de se levar em conta as variações do mesmo. O fato de que a parte linear da deformação permanece pequena permite que se mantenha o valor do comprimento, na matriz linear, constante e igual ao seu valor original. O incremento de carga é então aplicado e os deslocamentos incrementais correspondentes são calculados resolvendo-se a equação $[K_T]\Delta \underline{U} = \Delta \underline{F}$. Esses incrementos de deslocamentos são então utilizados no cálculo da variação das forças internas. Os valores dos deslocamentos, reações e esforços atualizados são determinados adicionando-se os incrementos dessas grandezas aos valores existentes previamente. Estes novos deslocamentos e esforços totais são, agora, utilizados para formar a matriz de rigidez para o próximo incremento de carga.

Uma das mais importantes características deste método é que, para um dado incremento de carga, a matriz K_T depende somente das deformações e forças internas existentes no início do incremento. As variações dos deslocamentos e esforços que ocorrem durante a aplicação da carga incremental são desprezadas. É por esse motivo

que a solução numérica tende a se afastar da solução exata, como mostrado na figura (14), e, para minimizar esse problema, deve-se usar incrementos relativamente pequenos de carga ao se aplicar o método. A vantagem é que a matriz $[K_T]$ permanece constante durante o cálculo dos deslocamentos incrementais e basta resolver uma única vez o sistema de equações para se obter os resultados desejados. O algoritmo do método é apresentado no capítulo V sobre implementação.

IV.2.2) MÉTODO NÃO LINEAR INCREMENTAL

Este método emprega a matriz de rigidez fornecida na equação (II.10). Como as parcelas $[K_f]$ e $[K_g]$ são funções dos deslocamentos incrementais que ocorrem durante a aplicação do incremento de carga e como essas quantidades não são conhecidas no início do incremento, é preciso empregar um processo iterativo a fim de se obter a solução. O primeiro passo do procedimento é idêntico ao método linear incremental, ou seja, através da geometria deformada e dos esforços internos no início do incremento, as matrizes $[K_L]$ e $[K_E]$ são formadas, enquanto $[K_f]$ e $[K_g]$ são nulas. A matriz $[K_T] = [K_L] + [K_E]$ é, então, utilizada para se determinar uma primeira aproximação dos deslocamentos incrementais para a carga atuante. Desse momento em diante, um esquema iterativo é empregado, no qual a matriz de rigidez é continuamente atualizada. As matrizes $[K_L]$ e $[K_E]$ não variam ao longo das iterações, pois a primeira consiste apenas de termos constantes e a segunda possui termos em N e L que são, respectivamente, a força axial e o comprimento existentes no início do incremento. Da mesma forma, a matriz de rotação, $[R]$, permanece constante durante a iteração, sendo atualizada somente no início de um novo incremento. Assim, $[K_f]$ e $[K_g]$ são as únicas parcelas da matriz de rigidez que variam ao longo do processo iterativo. Elas são atualizadas utilizando-se os deslocamentos incrementais calculados anteriormente.

Apesar de existirem diversas maneiras de se executar a iteração, o método de Newton-Raphson é o mais difundido e aceito. Por isso ele também foi empregado aqui. O procedimento consiste na determinação do desequilíbrio entre as forças de membro e as cargas nodais externas atuantes ao final de cada iteração. As forças desequilibradas assim obtidas são então usadas para se calcular as correções dos deslocamentos incrementais. A figura (14) exemplifica o funcionamento do método e o seu algoritmo é mostrado no capítulo V.

IV.3) ANÁLISE DINÂMICA NO TEMPO

Em um determinado instante $t = \Delta t$, a equação de equilíbrio dinâmico do sistema estrutural, discretizado por elementos finitos, com relação à sua configuração de referência e no sistema global de eixos pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]\ddot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + [C]\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t} + \underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t}) = \underline{F}(t + \Delta t, \underline{U}_{t+\Delta t}, \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}) \quad (IV.1)$$

sendo

$\underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t})$ = o vetor de reações nodais estruturais.

$\underline{F}(t + \Delta t, \underline{U}_{t+\Delta t}, \dot{\underline{U}}_{t+\Delta t})$ = o vetor de cargas atuantes no instante $t + \Delta t$ e que depende do deslocamento e velocidade da estrutura.

$$t \geq t_0$$

e associada às seguintes condições iniciais $\underline{U}_{t=0} = \underline{U}_0$ e $\dot{\underline{U}}_{t=0} = \dot{\underline{U}}_0$.

A determinação das matrizes envolvidas já foi vista no capítulo II.

Matematicamente, a equação acima representa um sistema de equações diferenciais de segunda ordem e a sua resolução pode ser feita através de dois métodos: o da integração direta e o da superposição modal. No primeiro, as equações (IV.1) são integradas utilizando-se um processo numérico passo a passo, onde o termo direto significa que antes da integração numérica não é feita nenhuma transformação na forma das equações. Já no segundo método faz-se uma mudança das equações de equilíbrio para uma forma mais efetiva em termos de integração numérica: nada mais é do que uma mudança de base onde passamos dos deslocamentos nodais \underline{U} para os deslocamentos generalizados \underline{D} através da relação $\underline{U} = [\underline{B}]\underline{D}$, sendo $[\underline{B}]$ uma matriz quadrada. O objetivo desta transformação é obter matrizes de massa, rigidez e amortecimento com banda menor do que as do sistema original e a matriz $[\underline{B}]$ deve ser escolhida de forma que se cumpra tal objetivo. Apesar de, na teoria, podermos escolher várias matrizes $[\underline{B}]$, na prática uma matriz de transformação eficiente é aquela que utiliza os modos de vibração livre da estrutura, daí o nome de superposição modal.

A resolução de um sistema de equações não lineares incrementais na análise dinâmica no tempo é feita utilizando-se os procedimentos da formulação incremental com o esquema iterativo apresentado no capítulo V.

Na prática emprega-se dois tipos diferentes de integração direta no tempo: a explícita e a implícita. O que caracteriza a primeira é o fato de que a determinação dos deslocamentos no instante $t + \Delta t$ é feita nas condições de equilíbrio no tempo t ; ela é usada extensivamente em análises de propagação de onda e o método das diferenças centrais é o seu operador de integração mais comum. Já a integração implícita usa a condição de equilíbrio no instante $t + \Delta t$ e é empregada principalmente em problemas de vibração estrutural onde a frequência de excitação é muito menor que as frequências naturais da estrutura. Por isso, neste trabalho só utilizaremos o segundo tipo.

IV.3.1) MÉTODO IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO DIRETA

A integração numérica direta tem dois princípios básicos:

- Em vez de querer satisfazer a equação de equilíbrio dinâmico em qualquer instante de tempo t , ela procura satisfazer apenas em alguns instantes, espaçados de Δt . Isto significa que se impõe o equilíbrio em pontos discretos do intervalo de tempo em estudo. É por isso que as técnicas de integração no tempo para a análise dinâmica empregam o mesmo enfoque descrito na análise estática incremental, só que desta vez devem ser incluídas as forças de inércia e as de amortecimento.
- Dentro de cada intervalo de tempo Δt assume-se um tipo de variação para os deslocamentos, velocidades e acelerações. É esse tipo de variação adotado que vai determinar a precisão, estabilidade e custo da solução.

Assim, o procedimento geral do método é o seguinte: divide-se o tempo de estudo, de 0 a t_{\max} , em n intervalos iguais a Δt e com a integração numérica no tempo obtém-se uma solução aproximada nos instantes 0, Δt , $2\Delta t$, ..., t , $t + \Delta t$, ..., t_{\max} . O algoritmo de integração é obtido assumindo-se que quando se vai buscar a solução no instante $t + \Delta t$, já se sabe as soluções nos intervalos anteriores, desde 0 até t . Como os cálculos realizados para se obter a resposta em um determinado instante t são típicos para qualquer instante $t + \Delta t$, pode-se, então estabelecer o algoritmo a ser utilizado para a obtenção da solução em todos os pontos discretos do tempo.

A estabilidade do método de integração direta é estudada analisando-se o comportamento da solução numérica para condições arbitrárias. Assim, define-se que uma integração é incondicionalmente estável se a solução para quaisquer condições iniciais não cresce ilimitadamente para qualquer incremento Δt , em particular quando $\Delta t/P$ é grande, onde P é o período natural da estrutura. O método é apenas

condicionalmente estável quando o mesmo só ocorre se $\Delta t / P$ é menor do que um certo valor, usualmente chamado de limite de estabilidade. O método de Newmark, empregado nesta tese, se enquadra no primeiro caso.

Suponha que todas as cargas atuantes em um riser, bem como os seus deslocamentos e esforços, sejam conhecidos no tempo t e que deseja-se obter essas mesmas grandezas em $t + \Delta t$. Como o problema, agora, é não linear, o processo iterativo de Newton-Raphson é utilizado a fim de se atingir a convergência para a configuração de equilíbrio.

Como os deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura são desconhecidos no instante $t + \Delta t$, precisa-se fazer algumas suposições a fim de resolver o sistema de equações dinâmicas. A técnica utilizada nesta tese é a de Newmark por ser incondicionalmente estável e mais eficiente que outros métodos testados, como por exemplo, o das diferenças centrais.

Neste método as suposições feitas podem ser traduzidas pelas seguintes expressões:

$$\tilde{U}_{t+\Delta t} = \tilde{U}_t + [(1 - \delta)\tilde{\dot{U}}_t + \delta\tilde{\dot{U}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (IV.2)$$

$$\tilde{U}_{t+\Delta t} = \tilde{U}_t + \tilde{\dot{U}}_t\Delta t + [(\frac{1}{2} - \alpha)\tilde{\ddot{U}}_t + \alpha\tilde{\ddot{U}}_{t+\Delta t}]\Delta t^2 \quad (IV.3)$$

onde α e δ são parâmetros cujos valores influenciam a estabilidade e precisão da integração. Newmark propôs originalmente como um processo incondicionalmente estável o método da aceleração média constante, para o qual $\delta = 0.5$ e $\alpha = 0.25$. Neste trabalho, foi desenvolvido um programa de computador onde estes parâmetros são fornecidos como dados de entrada. Assim podemos estudar melhor a influência deles no processo integração no tempo.

Em geral, o método de Newmark aplica-se quando o lado direito da equação de equilíbrio dinâmico (IV.1) depende somente de t . Mas no caso de estruturas offshore a força hidrodinâmica é função da velocidade relativa fluido-estrutura (como foi visto no item II.7.3). A velocidade do fluido pode ser determinada em $t + \Delta t$ mas o mesmo não ocorre com a da estrutura pois faz parte da resolução do sistema de equações. É por isso que esse método não se aplica diretamente ao problema estudado aqui e uma modificação envolvendo iterações internas adicionais se faz necessária.

As expressões (IV.2) e (IV.3) ainda dependem dos deslocamentos e velocidades no instante $t + \Delta t$, que são desconhecidos. Temos, então, que fazer algumas manipulações algébricas a fim de expressar $\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$ em função de grandezas conhecidas. Assim, da equação (IV.3) tira-se que

$$\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} = \frac{\Delta U}{\alpha \Delta t^2} - \frac{\dot{\tilde{U}}_t}{\alpha \Delta t} + (1 - \frac{1}{2\alpha}) \ddot{\tilde{U}}_t \quad (IV.4)$$

onde $\Delta U = \tilde{U}_{t+\Delta t} - \tilde{U}_t$.

Substituindo a expressão acima na equação (IV.2) obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\tilde{U}}_t + [(1 - \delta) \ddot{\tilde{U}}_t + \frac{\delta}{\alpha \Delta t^2} \Delta U - \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \dot{\tilde{U}}_t - \frac{\delta}{\alpha} (\frac{1}{2} - \alpha) \ddot{\tilde{U}}_t] \Delta t \\ \dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \Delta U + (1 - \frac{\delta}{\alpha}) \dot{\tilde{U}}_t + (1 - \frac{\delta}{2\alpha}) \Delta t \ddot{\tilde{U}}_t \end{aligned} \quad (IV.5)$$

As relações básicas do método de Newmark são então as seguintes:

$$\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} = a_1 \Delta U + a_2 \dot{\tilde{U}}_t + a_3 \ddot{\tilde{U}}_t \quad (IV.6)$$

$$\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} = a_4 \Delta U + a_5 \dot{\tilde{U}}_t + a_6 \ddot{\tilde{U}}_t \quad (IV.7)$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\delta}{\alpha \Delta t} & a_4 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2} \\ a_2 &= 1 - \frac{\delta}{\alpha} & a_5 &= \frac{-1}{\alpha \Delta t} \\ a_3 &= (1 - \frac{\delta}{2\alpha}) \Delta t & a_6 &= 1 - \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

onde α e δ são parâmetros.

Fazendo uma expansão de primeira ordem da função $\underline{U}_{t+\Delta t} \rightarrow \underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t})$ nas vizinhanças de \underline{U}_t fica-se com

$$\underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t}) \simeq \underline{K}(\underline{U}_t) + [\underline{K}_t](\underline{U}_{t+\Delta t} - \underline{U}_t) \quad (IV.8)$$

A expressão acima permite que nos livremos dos termos não lineares $\underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t})$ e os substituamos pela matriz de rigidez não linear tangente no instante t , $[\underline{K}_t]$.

Dessa forma, as iterações básicas são executadas da mesma maneira como mostrado na figura (14). Para isso, as equações acima são escritas da seguinte forma

$$\underline{\dot{U}}_{t+\Delta t}^{(i)} = a_1(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)}) + a_1(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - \underline{U}_t) + a_2 \underline{\dot{U}}_t + a_3 \underline{\ddot{U}}_t \quad (IV.9)$$

$$\underline{\ddot{U}}_{t+\Delta t}^{(i)} = a_4(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)}) + a_4(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)} - \underline{U}_t) + a_5 \underline{\dot{U}}_t + a_6 \underline{\ddot{U}}_t \quad (IV.10)$$

com

$$\Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{(i)} = \underline{U}_{t+\Delta t}^{(i)} - \underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (IV.11)$$

$$\underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i)}) = \underline{K}(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)}) + \Delta \underline{U}_{t+\Delta t}^{(i)} [\underline{K}_T(\underline{U}_{t+\Delta t}^{(i-1)})] \quad (IV.12)$$

Combinando as equações (IV.1), (IV.9), (IV.10) e (IV.11) e (IV.12) fica-se, finalmente, com a equação final de equilíbrio dinâmico

$$[K_{eq}]\Delta U^{(l)} = F_{eq} \quad (IV.13)$$

onde

$$[K_{eq}] = [K_I] + a_1[C] + a_4[M] \quad (IV.14)$$

$$F_{eq} = F(t + \Delta t, \tilde{U}_{t+\Delta t}, \tilde{\dot{U}}_{t+\Delta t}) - K(\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(l-1)}) -$$

$$[C][a_1(\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(l-1)} - U_t) + a_2\tilde{\dot{U}}_t + a_3\tilde{\ddot{U}}_t] -$$

$$[M][a_4(\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(l-1)} - U_t) + a_5\tilde{\dot{U}}_t + a_6\tilde{\ddot{U}}_t] \quad (IV.15)$$

Se F_{eq} dependesse só do tempo, a equação (IV.13) seria resolvida de tal modo que, depois de um certo número de iterações, $\Delta U^{(n)}$ tenderia a zero. Porém, em nosso caso, o vetor de cargas é função não linear de $\tilde{\dot{U}}_{t+\Delta t}$ e essa grandeza ainda não é conhecida no instante $t + \Delta t$, quando se vai montar e resolver o sistema de equações de equilíbrio dinâmico. É necessário, então, realizar iterações internas adicionais em cima da velocidade $\tilde{\dot{U}}_{t+\Delta t}$. Inicialmente, determina-se a velocidade da estrutura pela equação (IV.9), que será utilizada na determinação da força de onda e corrente. Empregando-se o método de Newmark obtem-se o vetor de deslocamentos $\Delta U^{(n)}$ com o qual se calcula $\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(n)}$. Compara-se, então, este vetor de deslocamentos com o anterior, $\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(n-1)}$. Se for menor que a tolerância estabelecida parte-se para um novo intervalo de tempo, caso contrário atualiza-se a velocidade estrutural com a equação (IV.9) e recomeça-se o processo. O fluxograma das iterações está mostrado no capítulo V.

Depois de obtido $\tilde{U}_{t+\Delta t}$ podemos utilizar as equações (IV.6) e (IV.7) para o cálculo dos vetores velocidade e aceleração. Após a determinação destas grandezas, parte-se para o instante de tempo seguinte.

A equação de análise iterativa não linear dinâmica representada por (IV.13), utilizando o método de integração implícita no tempo, tem a mesma forma da equação incremental (II.9), considerada na análise estática, exceto que o lado direito contém agora a contribuição das parcelas de inércia e amortecimento do sistema estrutural. De uma maneira geral, então, pode-se esperar que todas as técnicas iterativas de resolução se apliquem também ao problema da análise dinâmica em questão.

Conforme Bathe, é de se esperar que na análise dinâmica, a convergência seja mais rápida que na estática devido à contribuição da matriz de massa na formação da matriz de rigidez efetiva e essa contribuição torna-se dominante quando o intervalo de tempo é pequeno. Consequentemente, a convergência na análise dinâmica é sempre alcançada, desde que o intervalo seja suficientemente pequeno.

Outro ponto importante é o reconhecimento de que as iterações são muito importantes numa análise dinâmica não linear pois qualquer erro cometido em um determinado instante do processo de resolução afetará todas as demais soluções que vierem a ser obtidas nos intervalos subsequentes. Realmente, como a resposta é muito dependente do caminho percorrido, a análise dinâmica não linear exige um maior rigor nas iterações a cada instante de tempo do que na análise estática.

CAPÍTULO V

IMPLEMENTAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS DE RISERS

V.1) INTRODUÇÃO

Ao se fazer um programa de computador para o estudo de risers, além de toda a implementação que o tipo de elemento finito empregado requer, existem certas características que são específicas do problema a ser estudado e que devem ser levadas em conta, como por exemplo, força efetiva. Essas características serão discutidas a seguir.

V.2) ESTUDO PLANAR DO PROBLEMA

Adotou-se, para o estudo desta tese, a modelação no plano X Y. Um dos principais motivos para isso é o fato de que, para projetos de risers e aplicações em operações, as configurações das ondas e os perfis de corrente não são ainda bem conhecidas mesmo para o caso planar; assim, para o caso tridimensional, a pesquisa precisa continuar.

O movimento planar despreza os efeitos torsionais, assume que a onda, corrente e os deslocamentos de translação do riser ocorrem no plano do papel e ainda

que os momentos fletores e os deslocamentos angulares atuam em eixos perpendiculares a esse plano. Para o caso de águas profundas, podemos supor que os efeitos de torção são desprezíveis pois mesmo para comprimentos pequenos de risers (30 m) a embarcação teria que sofrer um grande deslocamento de "yaw" antes que as linhas tensionadoras pudessem transmitir o ângulo de torção para a estrutura submersa.

Outro ponto a se notar é que a condição das velocidades de onda e corrente atuarem no mesmo plano é conservadora, já que a soma das duas parcela é maior do que a soma vetorial das mesmas, ou seja, $A + B > \sqrt{A^2 + B^2}$.

Mesmo que se tivesse que partir para um estudo tridimensional, isto não acarretaria grandes dificuldades pois basicamente seria acrescentar ao programa já existente mais um eixo coordenado.

V.3) FLEX-JOINT

Frequentemente, em risers rígidos, tem-se conexões elásticas do tipo flex-joint, cujo esquema típico está mostrado na figura (15). São mecanismos que resistem à rotação relativa das extremidades dos elementos que eles unem.

Em um programa de computador para a análise de risers, o flex-joint pode ser modelado como um elemento viga-coluna especial, com rigidez apenas à flexão. No entanto, para apresentar uma formulação mais geral, estudaremos um elemento viga-coluna representando um segmento de riser ao qual acopla-se outros elementos viga-coluna especiais (cada um simulando uma conexão elástica e em um dos seis graus de liberdade do elemento), porém com rigidez apenas nas direções dos graus de liberdade em que estão. A situação está representada na figura (16). Na verdade, o que

se tem são molas axiais nas direções locais 1, 2, 4 e 5 e molas rotacionais nas direções 3 e 6 . Essas molas têm comprimento nulo e massa nula.

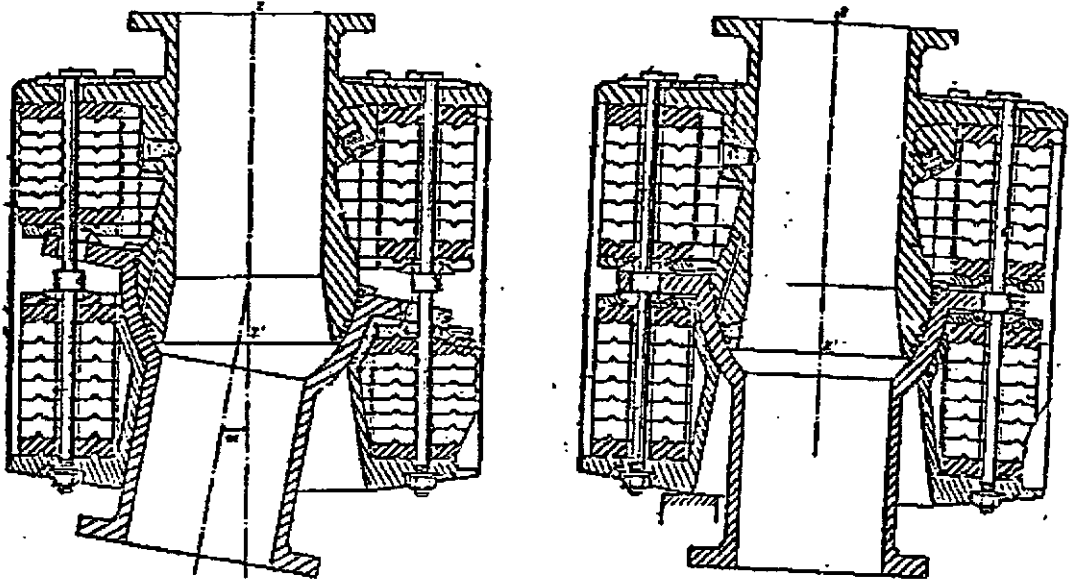


Figura 15. Exemplificação do funcionamento de um flex-joint

A matriz de rigidez completa de uma dessas articulações pode ser expressa da seguinte forma:

$$[K^m] = \begin{bmatrix} [K_*^m] & -[K_*^m] \\ -[K_*^m] & [K_*^m] \end{bmatrix} \quad (V.1)$$

sendo que para as molas situadas no grau de liberdade i , com $i \leq 6$ tem-se

- para $i = 1$ e 4

$$[K_*^m] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.2)$$

- para $i = 2$ e 5

$$[K_*^m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.3)$$

- para $i = 3$ e 6

$$[K_*^m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (V.4)$$

O objetivo é obter a matriz de rigidez de um elemento com molas acopladas em seus graus de liberdade.

Uma suposição importante é a de que as molas não podem ter carregamento sobre elas, ou seja, seus vetores de forças de engastamento perfeito (FEP) são sempre nulos.

Os graus de liberdade 1, 2, 3, 4, 5 e 6 são considerados internos, enquanto que 1', 2', 3', 4', 5' e 6', externos.

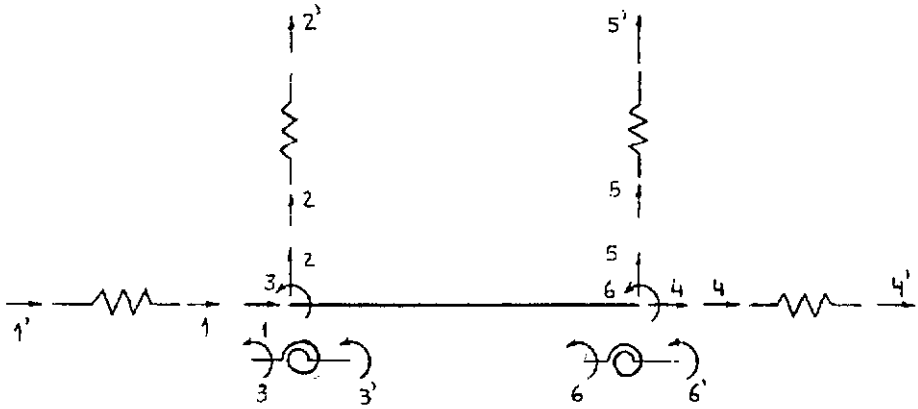


Figura 16. Acoplamento de um elemento viga-coluna com molas

Fazendo então o acoplamento dos sete elementos representados na figura (16) tem-se a matriz de rigidez expandida abaixo:

$$[K^e] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & -[K_{12}] \\ -[K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad (V.5)$$

sendo

$$[K_{11}] = \begin{bmatrix} K_{11} + S_1 & -S_1 & K_{12} & 0 & K_{13} & 0 \\ -S_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{21} & 0 & K_{22} + S_2 & -S_2 & K_{23} & 0 \\ 0 & 0 & -S_2 & S_2 & 0 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{32} & 0 & K_{33} + S_3 & -S_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_3 & S_3 \end{bmatrix} \quad (V.6)$$

$$[K_{22}] = \begin{bmatrix} K_{44} + S_4 & -S_4 & K_{45} & 0 & K_{46} & 0 \\ -S_4 & S_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{54} & 0 & K_{55} + S_5 & -S_5 & K_{56} & 0 \\ 0 & 0 & -S_5 & S_5 & 0 & 0 \\ K_{64} & 0 & K_{65} & 0 & K_{66} + S_6 & -S_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S_6 & S_6 \end{bmatrix} \quad (V.7)$$

$$[K_{21}] = [K_{12}]^T = \begin{bmatrix} K_{41} & 0 & K_{42} & 0 & K_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{51} & 0 & K_{52} & 0 & K_{53} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61} & 0 & K_{62} & 0 & K_{63} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (V.8)$$

A matriz $[K']$ é de 12 x 12 e para voltarmos à ordem de 6 x 6 fazemos, então, uma condensação dos graus de liberdade internos, ficando apenas os externos e é através destes que o elemento se ligará aos demais. Uma vez obtida a matriz de rigidez do novo elemento, o tratamento dispensado, daqui para frente, a ele é o mesmo que para o elemento comum, com exceção dos seguintes pontos:

- Se estivermos utilizando o método de Newton-Raphson em uma análise não linear com as matrizes $[K_1]$ e $[K_2]$, então os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade precisam ser calculados em cada iteração pois estes entram na formação daquelas matrizes.
- Se estivermos usando molas não lineares entre dois elementos, então os deslocamentos nos graus de liberdade internos precisam ser calculados sempre pois a rigidez da mola passa a depender dos deslocamentos relativos entre os dois elementos (que correspondem à deformação das molas).

Com relação ao vetor de forças de engastamento perfeito do elemento condensado, o único trabalho é o de expandi-lo para doze posições, deixando naquelas, correspondentes aos graus internos, os valores originais e nas demais o valor zero, já que, como foi anteriormente, o vetor FEP é nulo para as molas. Depois, então, o vetor é condensado junto com o elemento.

Um ponto importante a se notar é que, por exemplo, se colocarmos um flex-joint, do tipo daquele mostrado na figura (15), entre dois elementos, os graus de liberdade de translação dos nós que chegam nessa articulação devem estar conectados pois o flex-joint atua somente na rotação relativas deles. A formulação apresentada aqui permite isso. O mesmo ocorre com as molas acopladas nas demais direções.

A matriz de massa de uma mola é nula e deve ser levada em conta na hora da formação da matriz de massa total do sistema estrutural. Apesar deste procedimento resultar em uma matriz de massa total singular, o esquema de resolução numérica é estável pois como vimos no capítulo de análise dinâmica no tempo, a matriz de rigidez efetiva é composta do somatório das matrizes de massa, amortecimento e rigidez. Assim, se a matriz de massa tiver parcelas nulas na diagonal, correspondendo a um elemento de mola, a matriz total não será singular devido à existência de termos não nulos nas posições correspondentes da matriz de rigidez.

V.4) APOIOS ELÁSTICOS

Foram previstos também apoios elásticos (lineares ou não) para o riser. Esse tipo de facilidade pode ser útil, por exemplo, para simular alguma ligação dele com outra estrutura ou mesmo alguma condição especial de apoio no solo.

A implementação deste apoio é bem fácil, bastando para isso acrescentar, na matriz de rigidez da estrutura, a rigidez da mola em questão ao termo da diagonal

correspondente ao grau de liberdade do apoio. Se a mola for linear, então essa rigidez é constante, caso contrário ela dependerá do seu deslocamento (deformação).

V.5) CÁLCULO DAS FORÇAS DO MAR

Neste trabalho, o cálculo das forças de onda e corrente sobre cilindros inclinados segue a metodologia proposta por BORGMAN (1958), segundo a qual, primeiro calcula-se as componentes da velocidade e aceleração das partículas da água normais ao riser para depois, então, obter as forças correspondentes.

O vetor unitário, situado na direção do membro em questão, é expresso, matematicamente, pela fórmula

$$\underline{c} = (c_x, c_y) \quad (V.9)$$

onde c_x e c_y são os cossenos diretores do membro.

Os vetores de velocidade e aceleração das partículas podem ser combinados com aquele vetor de orientação do membro por meio de uma análise vetorial para se determinar as componentes normais das forças.

Conforme mostrado na figura (17), o produto vetorial $\underline{c} \times \underline{v}$ dá como resultado um vetor, \underline{v}' , perpendicular ao plano A formado por esses vetores. Fazendo o produto vetorial $\underline{v}' \times \underline{c}$ obtem-se finalmente o vetor \underline{v}'' que é a componente normal do vetor \underline{v} no plano do papel. O vetor \underline{v} usado aqui é genérico, podendo representar tanto a velocidade como a aceleração de uma partícula d'água sobre o riser.

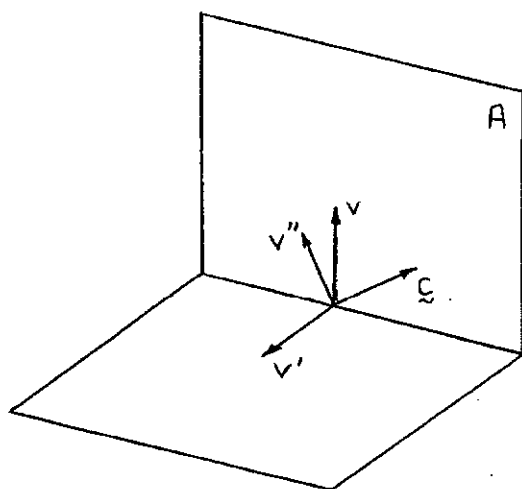


Figura 17. Esquema de decomposição de um vetor

Depois de realizar as operações vetoriais, explicadas acima, para a análise em questão, fica-se, finalmente, com as seguintes expressões para as componentes normais da velocidade e aceleração no sistema local do elemento

$$\dot{U}_{x,n} = \dot{U}_x - c_x(c_x\dot{U}_x + c_y\dot{U}_y) \quad (V.10)$$

$$\dot{U}_{y,n} = \dot{U}_y - c_y(c_x\dot{U}_x + c_y\dot{U}_y) \quad (V.11)$$

$$\ddot{U}_{x,n} = \ddot{U}_x - c_x(c_x\ddot{U}_x + c_y\ddot{U}_y) \quad (V.12)$$

$$\ddot{U}_{y,n} = \ddot{U}_y - c_y(c_x\ddot{U}_x + c_y\ddot{U}_y) \quad (V.13)$$

Uma vez calculadas as componentes normais, é só aplicá-las na fórmula de Morison e obter as correspondentes forças.

V.6) ALGORITMOS UTILIZADOS

Nos itens seguintes, descreve-se os algoritmos implementados no programa de computador deste trabalho e que foram explicados anteriormente. Os dois primeiros referem-se a uma análise estática enquanto o terceiro é empregado na análise dinâmica.

Método linear incremental

1. Leitura dos dados
2. $i = 0$
3. Incremento i : $i = i + 1$
4. Formação das matrizes linear, tensão inicial e de rotação de cada elemento.
5. Cálculo do incremento de carga.
6. Formação da matriz global da estrutura
7. Aplicação das condições de contorno.
8. Resolução do sistema de equações.
9. Atualização dos deslocamentos e coordenadas.
10. Atualização dos valores totais dos esforços e reações.
11. Retorna-se ao passo 2 para um novo incremento de carga, caso ainda exista.

Método não linear incremental

1. Leitura dos dados
2. $i = 0$
3. Incremento i : $i = i + 1$
4. Formação das matrizes linear, tensão inicial e de rotação de cada elemento.

5. Cálculo do incremento de carga.
6. Formação da matriz global da estrutura
7. $j = 0$
8. Iteração j : $j = j + 1$
9. Se $j \geq 2$ então forma-se a matriz global da estrutura
10. Aplicação das condições de contorno.
11. Se $j \geq 2$ então calcula-se o vetor de desequilíbrio de carga.
12. Resolução do sistema de equações.
13. Atualização dos deslocamentos incrementais.
14. Formação das matrizes K_1 e K_2
15. Cálculo dos valores totais dos esforços e reações.
16. Repete-se os passos 8 - 15 até que a convergência seja atingida.
17. Atualização das coordenadas e dos deslocamentos totais.
18. Retorna-se ao passo 3 para um novo incremento de carga, caso ainda exista.

Método de Newmark

Para cada intervalo de tempo $t + \Delta t$ tem-se:

1. Como aproximação inicial, faz-se que o vetor de deslocamentos em $t + \Delta t$ receba o vetor de deslocamentos em t .
2. $j = 0$
3. incremento j : $j = j + 1$

4. Como estimativa inicial, calcula-se a velocidade estrutural do incremento $j-1$ pela equação (IV.9).
5. Determinação do vetor de carregamento.
6. $i=0$
7. Faz-se $U_{l\Delta t}^{(0)} = U_{l\Delta t}^{(-1)}$
8. iteração i : $i=i+1$
9. Cálculo das reações nodais.
10. Cálculo do vetor de cargas nodais equivalente.
11. Cálculo da matriz de rigidez equivalente.
12. Imposição das condições de contorno.
13. Resolução do sistema de equações.
14. Atualização dos deslocamentos incrementais da iteração i : $U_{l\Delta t}^{(i)} = \Delta U^{(i)} + U_{l\Delta t}^{(i-1)}$.
15. Se a convergência foi atingida continua, caso contrário retorna-se ao passo 8.
16. Faz-se $U_{l\Delta t} = U_{l\Delta t}^{(i)}$
17. Atualização dos esforços, reações, deslocamentos, velocidades e acelerações.
18. Comparação entre $U_{l\Delta t}^{(i)}$ e $U_{l\Delta t}^{(i-1)}$. Caso a convergência se verifique vai-se para o intervalo de tempo seguinte, caso contrário retornar ao passo 3.

No capítulo seguinte serão mostrados diversos exemplos que foram estudados com base nos algoritmos apresentados aqui e cujos resultados permitirão a sua avaliação.

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS

VI.1) INTRODUÇÃO

Neste capítulo estão os resultados de exemplos estudados com o objetivo de aferir e demonstrar a capacidade do programa de computador implementado, baseado no que foi exposto nos capítulos anteriores.

No primeiro caso, faz-se uma comparação entre os métodos incrementais linear e não linear aplicados a uma viga engastada num extremo e livre no outro. Também se deseja estudar os algoritmos implementados para um caso de grandes deslocamentos.

O segundo exemplo é uma comparação de resultados de um estudo paramétrico de um riser, tal como descrito na API BUL 2J (1977). Trata-se de uma linha rígida, submetida a diversas solicitações como onda, corrente e deslocamento imposto no topo. Foram feitas diversas análises variando alguns parâmetros (profundidade, força de topo e deslocamento imposto) e os resultados, organizados em tabelas e gráficos.

O terceiro exemplo é uma extensão do anterior. Trata-se da análise do mesmo riser do segundo exemplo quando submetido a uma onda de Airy e movimento harmônico horizontal imposto no topo.

VI.2) ANÁLISE ESTÁTICA DE VIGA COM GRANDES DESLOCAMENTOS

Este exemplo consta de uma viga engastada em uma extremidade e livre na outra, com um carregamento, p , uniformemente aplicado ao longo do seu comprimento. O objetivo é comparar os dois procedimentos de cálculo da curva carga-deflexão, apresentados no capítulo IV.

Os dados para o exemplo são os seguintes:

Seção transversal da viga	1m x 1m
Comprimento da viga	10m
Carregamento uniforme, p	variável
Módulo de elasticidade	12000,0 tf/m ²

A viga foi discretizada em 20 elementos de igual comprimento e estudada por dois métodos: o linear incremental e o não-linear incremental (Newton-Raphson). O carregamento foi aplicado em 100 incrementos iguais. A seguir plotou-se o gráfico da relação carregamento X deslocamento transversal da extremidade livre para esses dois procedimentos, juntamente com a solução exata encontrada por HOLDEN (1972). A figura (18) mostra o resultado encontrado.

A convenção utilizada na figura foi a seguinte:

Eixo das abscissas: valor da carga p .

Eixo das ordenadas: relação entre o deslocamento transversal da extridade livre e o comprimento da viga.

A é a curva do processo linear incremental.

B é a curva do processo não-linear incremental.

C é a curva da solução exata.

D é a curva da solução linear.

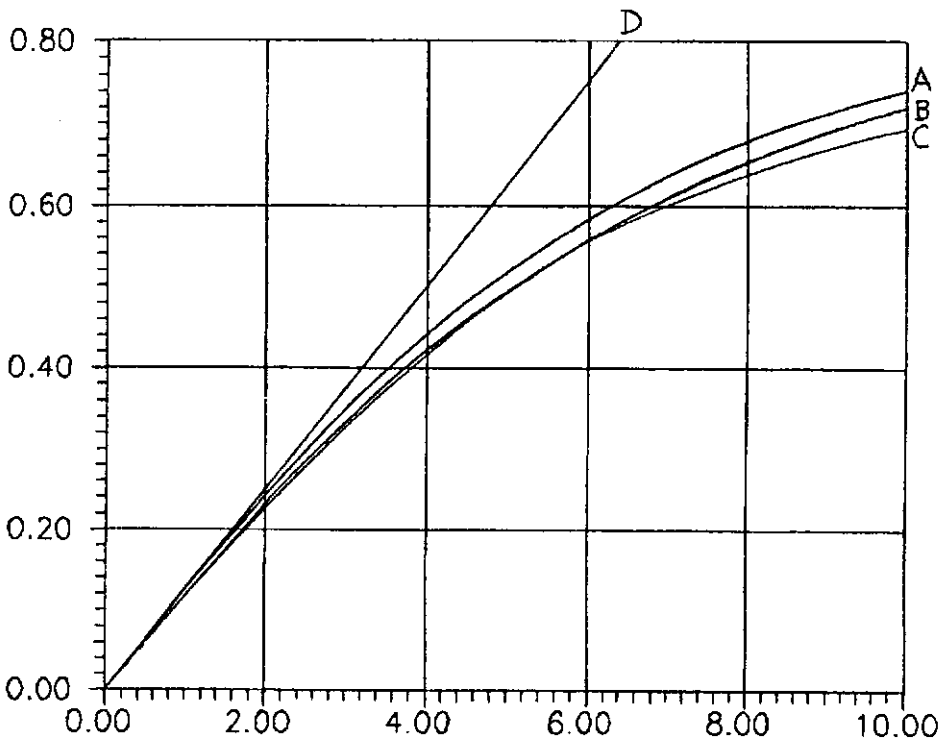


Figura 18. Análise de uma viga tipo "cantilever" para grandes deslocamentos

VI.3) ANÁLISE ESTÁTICA DE UM RISER

A figura (1) mostra as condições da estrutura estudada. Trata-se de um riser rígido, de 0,4064 m de diâmetro externo e 0,0159m de espessura, com um fluido interno ao longo dele. Na sua extremidade inferior existe uma articulação sem rigidez rotacional, conhecida por "lower ball joint" e na superior há uma outra, o "support ring". Não há nenhuma articulação ou conexão intermediária. O riser é composto de várias juntas, de 15,24 m de comprimento, interligadas pelas extremidades.

O riser está conectado a uma semi-submersível e, por conseguinte, submetido a deslocamentos impostos na extremidade superior. Supõe-se, ainda, que as forças de onda e corrente atuem na mesma direção.

Ao longo do riser correm duas linhas auxiliares, conhecidas por "choke" e "kill". Elas aumentam a área de exposição às ondas e correntes mas não contribuem para a rigidez da estrutura.

Foram feitas 12 análises estáticas, 6 com onda e outras 6 sem. Cada caso do grupo de seis era caracterizado por um conjunto de parâmetros que assumiam determinados valores. Esses 12 casos têm uma designação no API BULLETIN, onde estão descritos, mas aqui, para melhor organizar os parâmetros em tabelas, receberam a seguinte nomenclatura:

casos 500-0-1 (sem onda) e 500-20-1-S (com onda): E-1

casos 500-0-2 (sem onda) e 500-20-2-S (com onda): E-2

casos 1500-0-1 (sem onda) e 1500-20-1-S (com onda): E-3

casos 1500-0-2 (sem onda) e 1500-20-2-S (com onda): E-4

casos 3000-0-1 (sem onda) e 3000-20-1-S (com onda): E-5

casos 3000-0-2 (sem onda) e 3000-20-2-S (com onda): E-6

Os parâmetros geométricos e mecânicos que definem os casos estudados estão organizados na tabela 1.

Parâmetro	E-1	E-2	E-3	E-4	E-5	E-6
Profundidade do mar (m)	152,4	152,4	457,2	457,2	914,4	914,4
Comprimento do riser (m)	158,5	158,5	463,3	463,3	920,5	920,5
Força no topo (kN)	533,7	889,7	1290,0	2224,1	1290,0	2224,1
Offset estático (m)	4,572	4,572	13,716	13,716	27,432	27,432

Tabela 1. Designação dos casos: Esta tabela relaciona todos os valores dos parâmetros que foram usados nas análises estática e dinâmica.

Os dados constantes para todas as análises são os seguintes:

Distâncias verticais

- . do nível do mar ao topo do riser 15,24m
- . do solo marinho à articulação 9,144m

Massas específicas

- . água do mar 1025,00 kg/m³
- . fluido interno 1440,00 kg/m³

Módulo de elasticidade 21085000,0 tf/m²

Altura da onda 6,096 m

Período da onda 9s

Constantes para cálculo da força hidráulica

- . coeficiente de drag 0,7
- . coeficiente de inércia 1,5
- . diâmetro efetivo 0,6604m

O perfil da corrente é linear, variando de zero, no nível do lower ball joint, até 0,256 m/s na superfície.

O peso de cada junta que forma o riser, já incluindo todas as linhas associadas, fluido interno e flutuadores, pode ser resumido na tabela abaixo.

	Com flutuador	Sem flutuador
Peso no ar (kN)	38,35	41,84
Peso na água do mar (kN)	32,41	13,55

Tabela 2. Pesos das juntas.

Nos casos E-5 e E-6, foram acrescentados flutuadores ao riser para reduzir o seu peso aparente, permitindo assim que a força vertical no topo fosse a mesma dos casos E-3 e E-4.

A estrutura foi discretizada em 100 elementos, todos de mesmo comprimento. A numeração dos nós e elementos foi sequencial, a partir de 1 e seguiu de baixo para cima. O método utilizado foi o de Newton-Raphson, descrito no capítulo IV. Estas análises estáticas tiveram que ser realizadas em duas etapas: na primeira, aplicou-se somente as cargas de peso próprio e a força vertical no topo e na segunda, as demais cargas. Esta divisão se fez necessária pois como o riser é uma estrutura flexível, se tivessemos aplicado todas as cargas diretamente sobre a estrutura indeformada, ela não teria rigidez lateral suficiente para resistir a elas. Da maneira como a análise foi feita, ao final da primeira etapa o riser já adquiriu rigidez para resistir às cargas da etapa seguinte. Enquanto esta teve 100 incrementos a outra teve 10.

Os resultados obtidos estão apresentados nas tabelas 3 e 4.

CASO API	MÁX. TENSÃO FLEXÃO		MÁX. TENSÃO TOTAL	ÂNGULO	
	VALOR	LOCAL ACIMA LBJ		LBJ	TOP
500-0-1					
média	17443,7	33,83	29923,3	2,94	0,82
range	2068,4	10,67	3447,4	0,23	0,06
P	17010,0	31,70	29753,0	2,91	0,84
500-0-2					
média	6481,1	35,05	46884,4	2,20	1,21
range	1310,0	10,67	137,9	0,08	0,03
P	6351,3	31,7	47059,4	2,19	1,21
1500-0-1					
média	38679,6	35,66	65431,3	6,14	0,48
range	13375,8	14,94	5722,6	0,59	0,10
P	36330,1	32,43	66257,5	5,87	0,50
1500-0-2					
média	4136,9	33,83	114246,2	2,55	1,12
range	275,8	11,88	689,5	0,11	0,04
P	4024,8	27,80	114440,3	2,54	1,13
3000-0-1					
média	59708,6	42,67	76049,2	10,13	0,24
range	16547,4	19,81	23373,2	2,50	0,11
P	53037,5	36,82	69274,2	9,65	0,26
3000-0-2					
média	2620,0	38,1	114315,1	2,69	1,06
range	758,4	24,38	620,5	0,05	0,08
P	2454,0	36,82	114220,5	2,67	1,06

Tabela 3. Análise estática sem onda: Esta tabela mostra uma comparação entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho (designado por P), com base na teoria apresentada, e os existentes no API BULLETIN (1977).

CASO API	MÁX. TENSÃO FLEXÃO		MÁX. TENSÃO TOTAL	ÂNGULO	
	VALOR	LOCAL ACIMA LBJ		LBJ	TOP
500-20-1-S					
média	40403,3	140,51	65569,2	3,66	-0,79
range	13651,6	16,76	12824,3	0,55	0,53
P	41258,8	137,89	65988,5	3,55	-0,77
500-20-2-S					
média	29440,6	141,12	72670,7	2,51	0,24
range	9928,5	15,24	10411,1	0,34	0,36
P	30201,9	139,48	73325,9	2,46	0,23
1500-20-1-S					
média	40472,2	35,66	84460,8	6,31	-0,31
range	8135,8	9,14	9928,5	0,71	0,33
P	37350,5	32,43	85709,3	6,03	-0,31
1500-20-2-S					
média	14685,8	147,14	126380,9	2,61	0,67
range	4412,6	17,07	5584,8	0,13	0,14
P	15270,0	444,76	126954,4	2,58	0,65
3000-20-1-S					
média	60053,4	44,20	85701,9	10,14	-0,63
range	22752,7	13,72	13100,0	2,56	0,28
P	53648,3	36,82	85604,2	9,78	-0,58
3000-20-2-S					
média	14272,2	904,65	126243,0	2,73	0,55
range	6205,3	17,07	8273,7	0,12	0,16
P	15124,7	902,09	126940,2	2,70	0,56

Tabela 4. Análise estática com onda: Esta tabela mostra uma comparação entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido neste trabalho (designado por P), com base na teoria apresentada, e os existentes no API BULLETIN (1977).

A fim de melhorar a compreensão dos resultados conseguidos, foram plotadas as curvas das deformações e tensões do riser para cada caso estudado. Os gráficos 22 a 33 mostram a distribuição das tensões axial (indicada pela parte linear), flexão (dada pela diferença das duas curvas) e axial + flexão (dada pela parte curva do gráfico) ao longo do riser. A figura (22) indica melhor essas tensões.

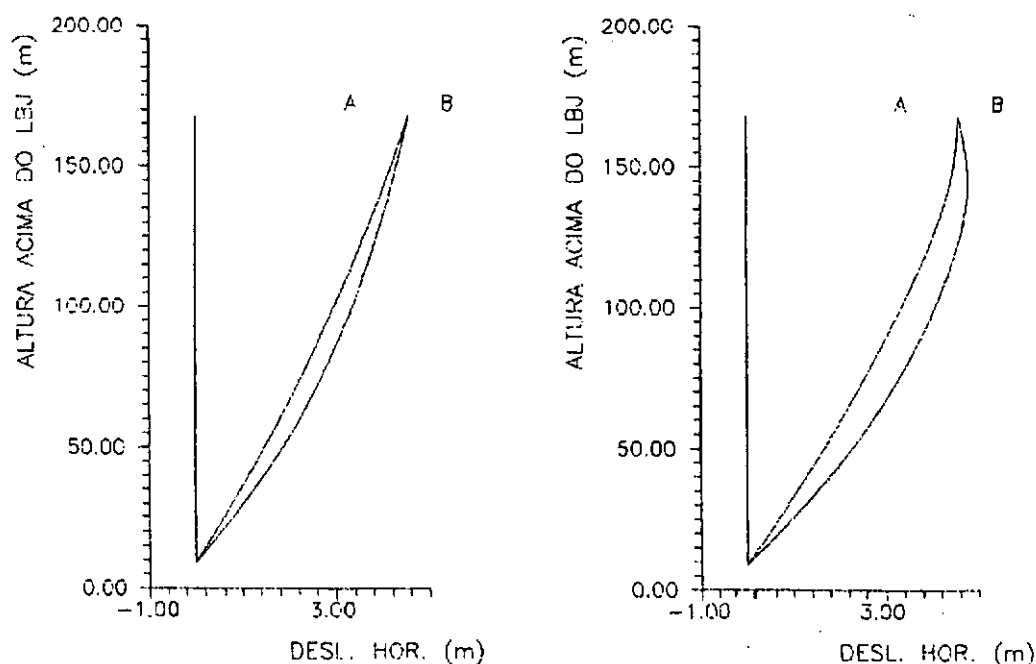


Figura 19. Deformadas 1 e 2: O gráfico da esquerda mostra a deformada do riser para os casos 500-0-1 (curva B) e 500-0-2 (curva A) enquanto que o da direita mostra a deformada para os casos 500-20-1-S (curva B) e 500-20-2-S (curva A).

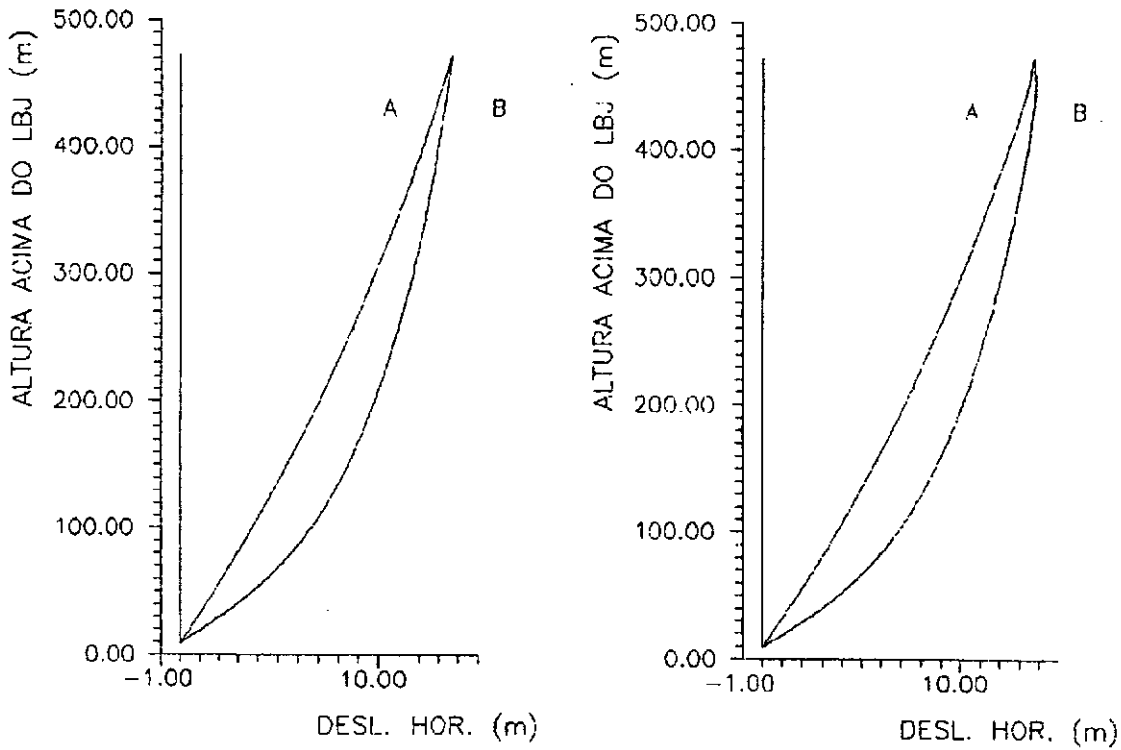


Figura 20. Deformadas 3 e 4: O gráfico da esquerda mostra a deformada do riser para os casos 1500-0-1 (curva B) e 1500-0-2 (curva A) enquanto que o da direita mostra a deformada para os casos 1500-20-1-S (curva B) e 1500-20-2-S (curva A).

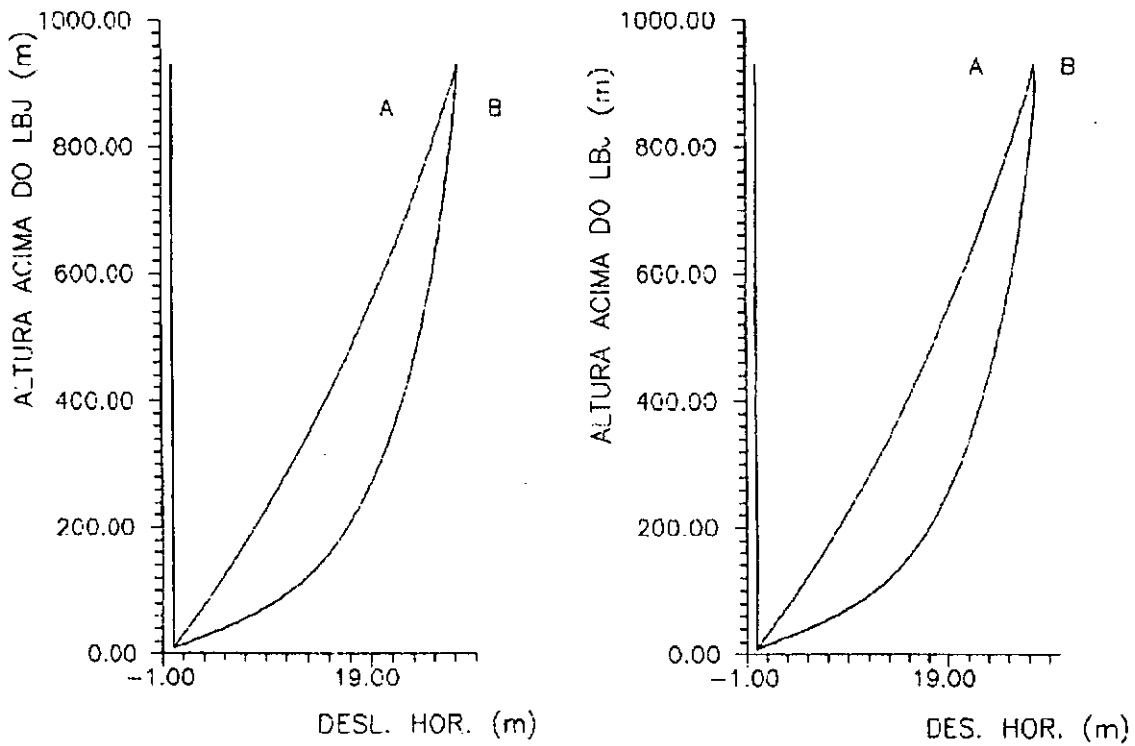


Figura 21. Deformadas 5 e 6: O gráfico da esquerda mostra a deformada do riser para os casos 3000-0-1 (curva B) e 3000-0-2 (curva A) enquanto que o da direita mostra a deformada para os casos 3000-20-1-S (curva B) e 3000-20-2-S (curva A).

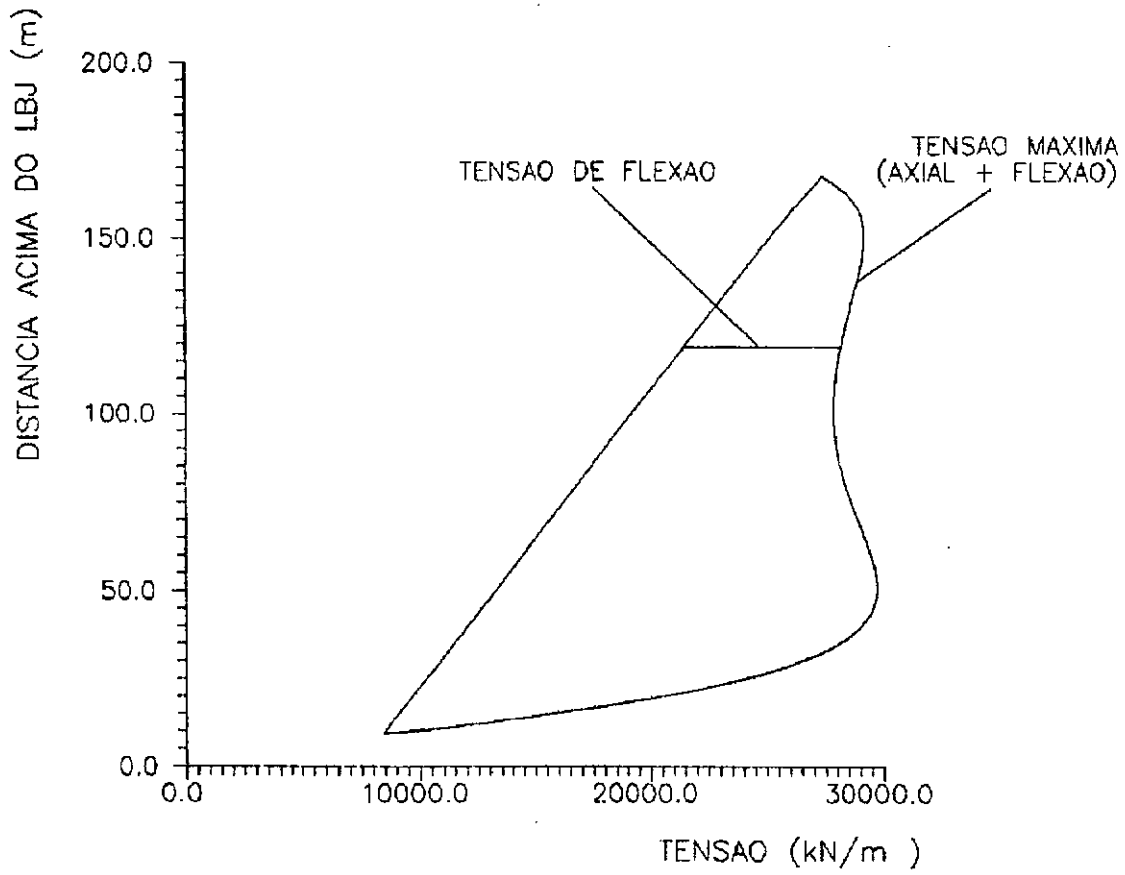


Figura 22. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-0-1

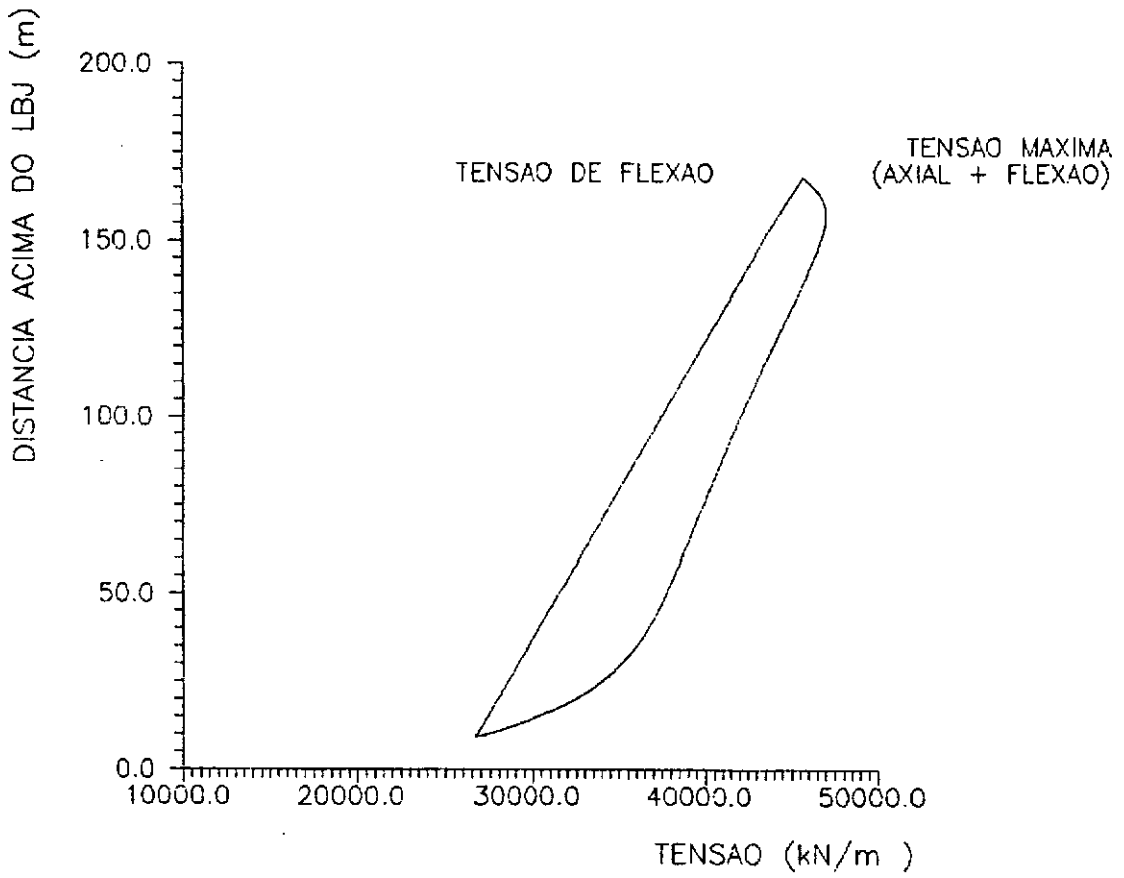


Figura 23. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-0-2

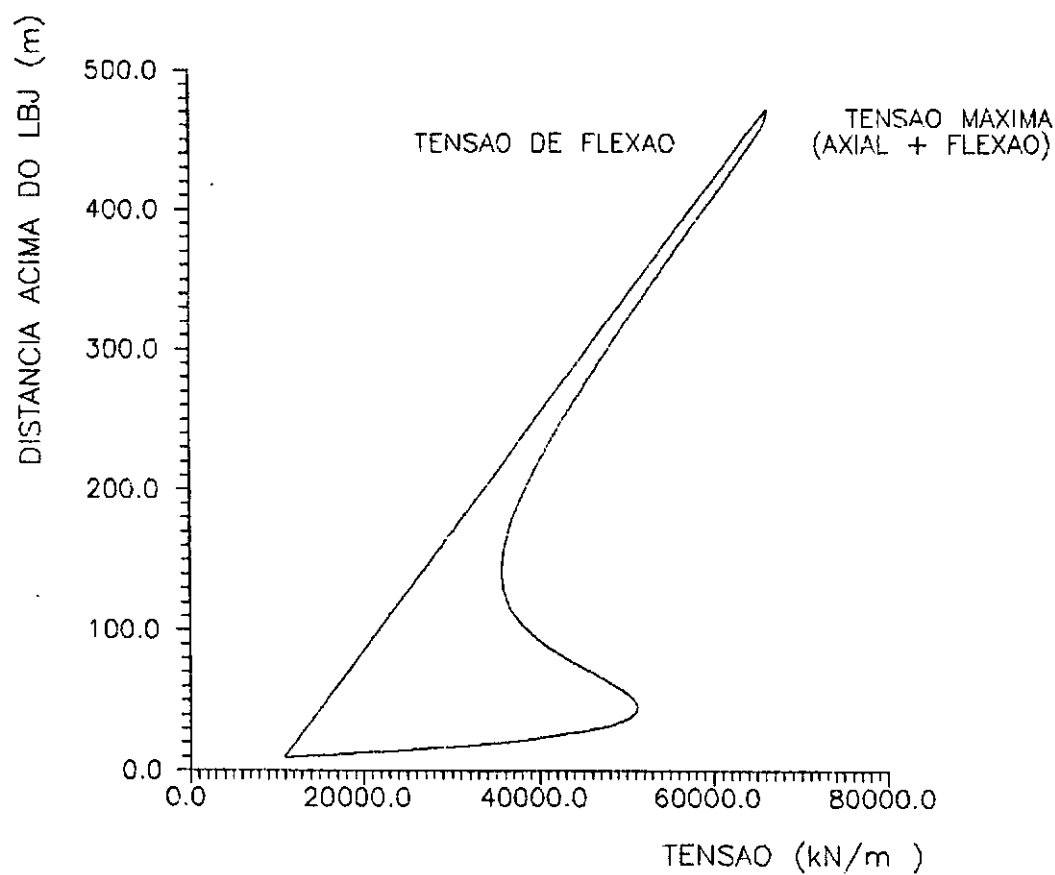


Figura 24. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-0-1

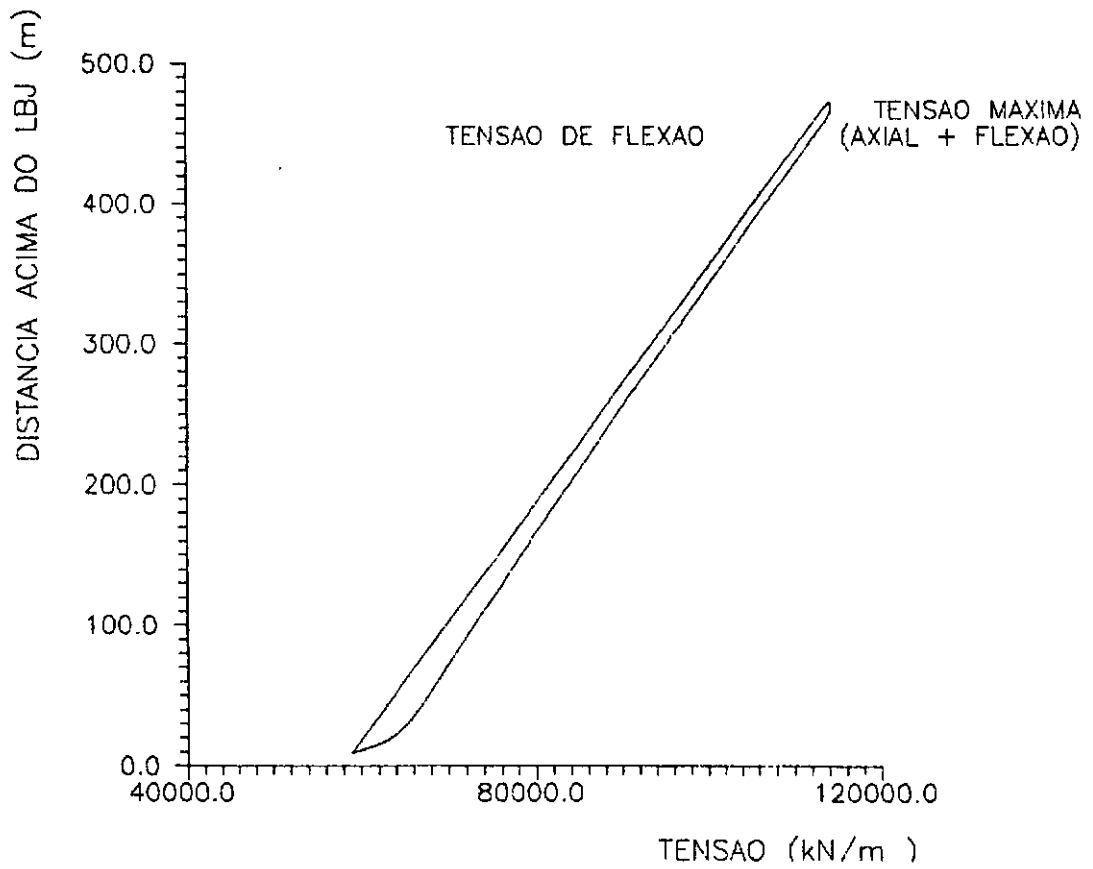


Figura 25. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-0-2

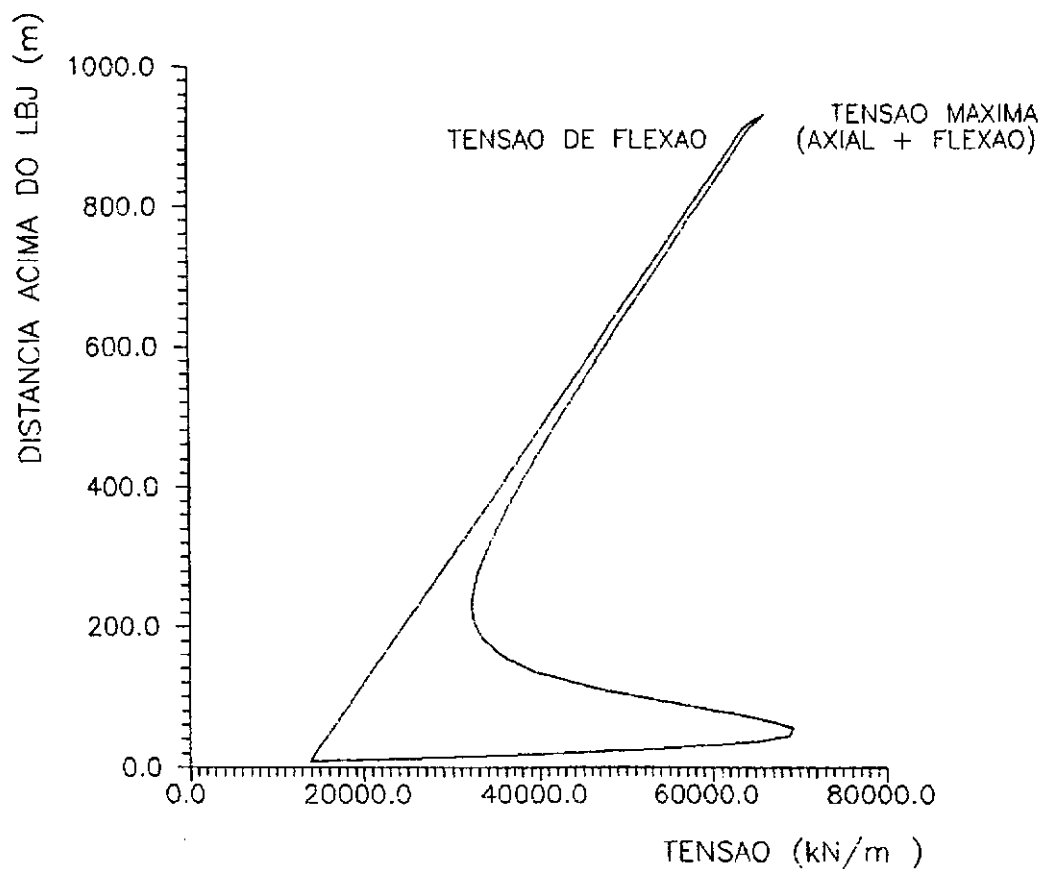


Figura 26. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-0-1

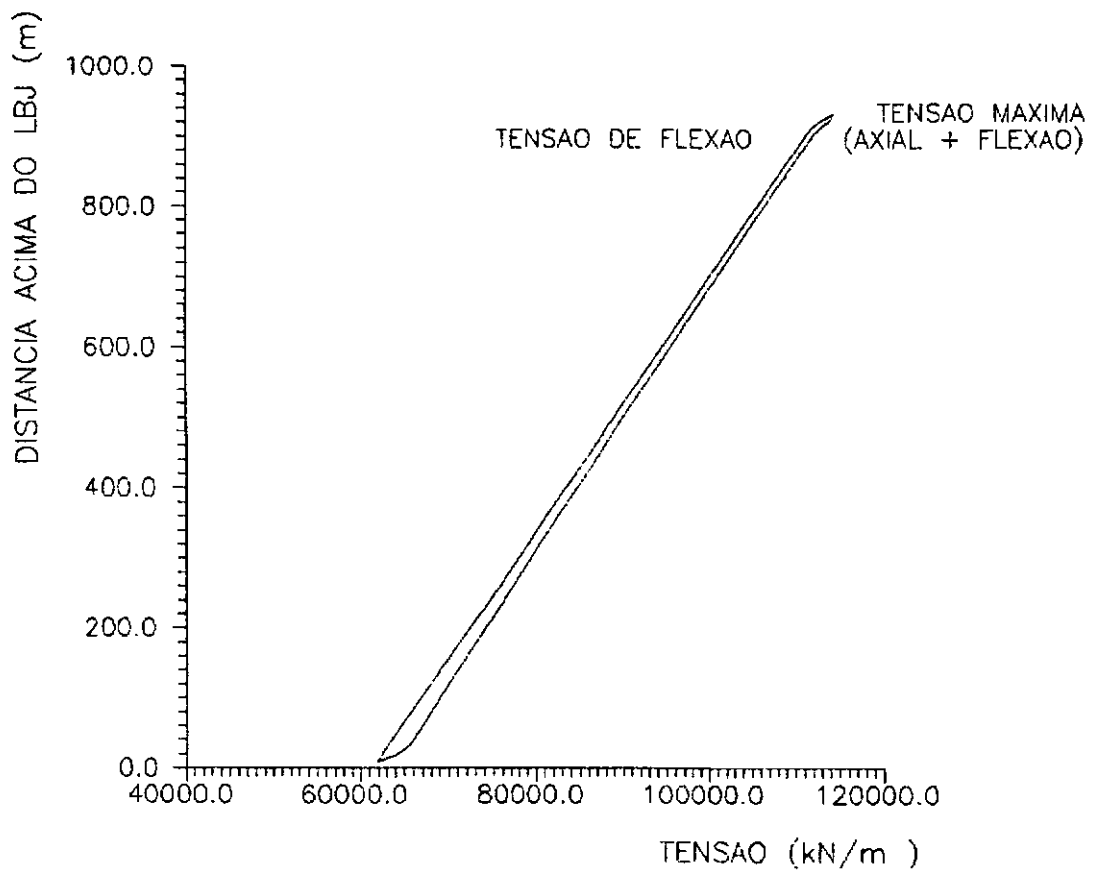


Figura 27. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-0-2

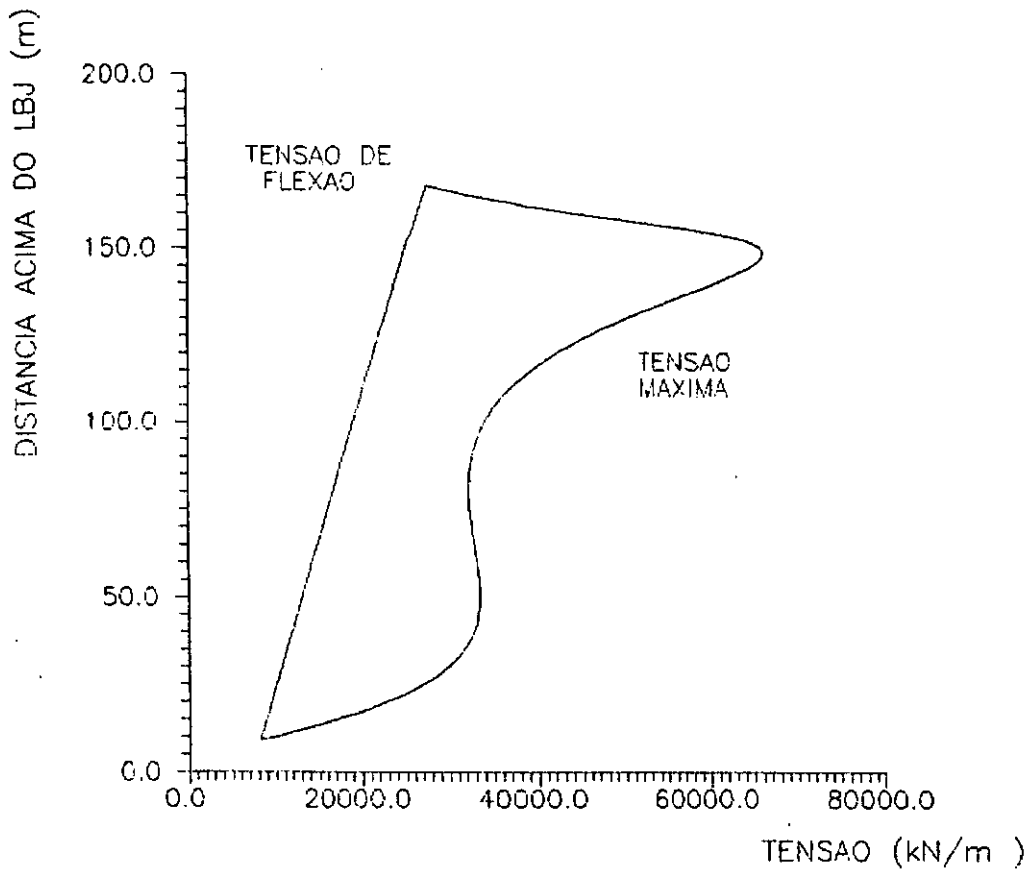


Figura 28. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-20-1-S

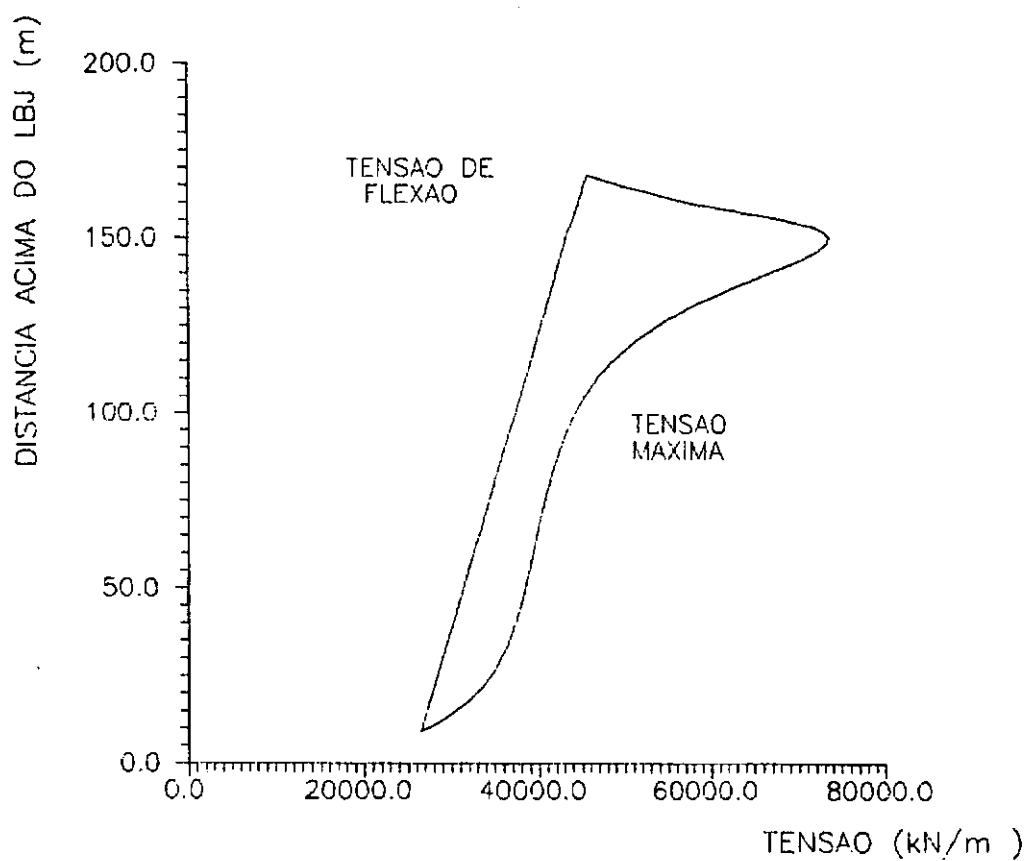


Figura 29. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 500-20-2-S

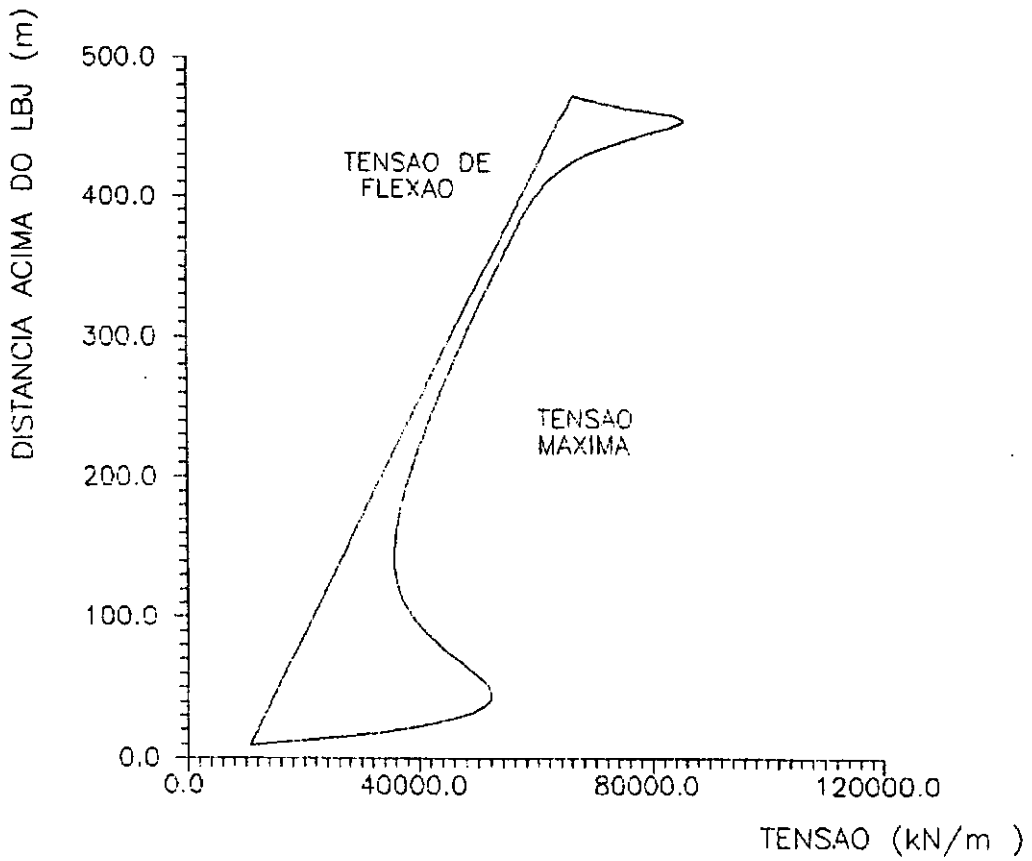


Figura 30. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-20-1-S

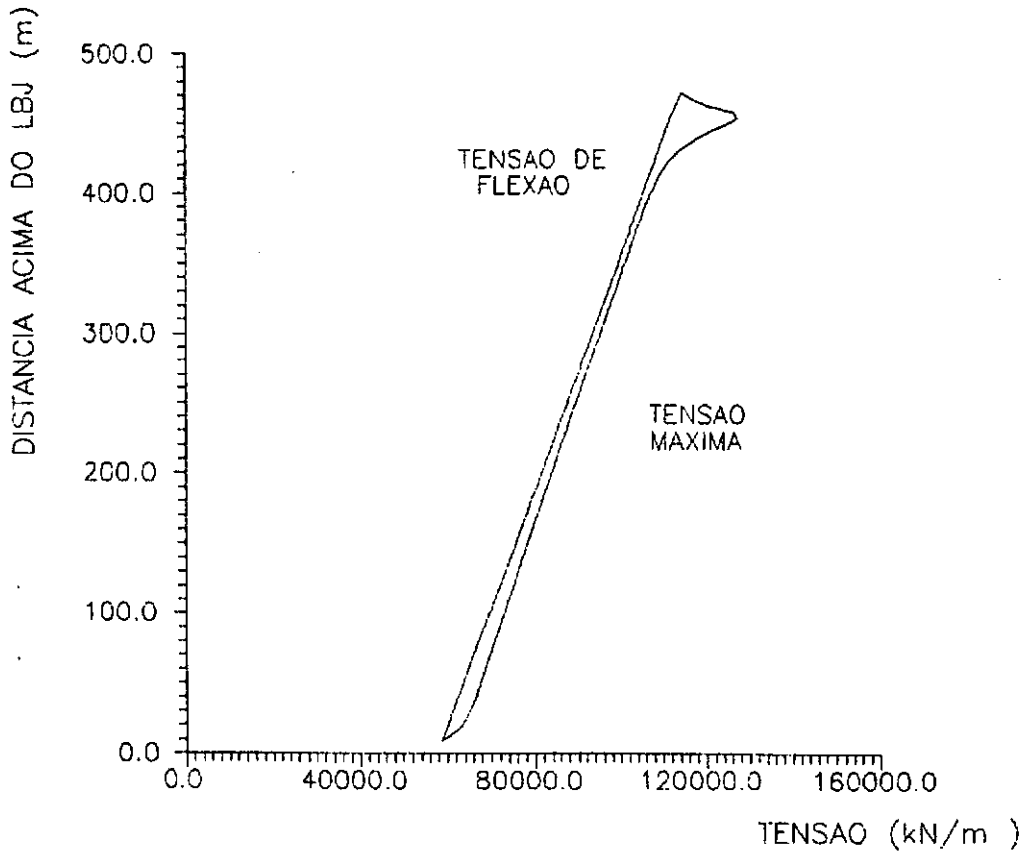


Figura 31. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 1500-20-2-S

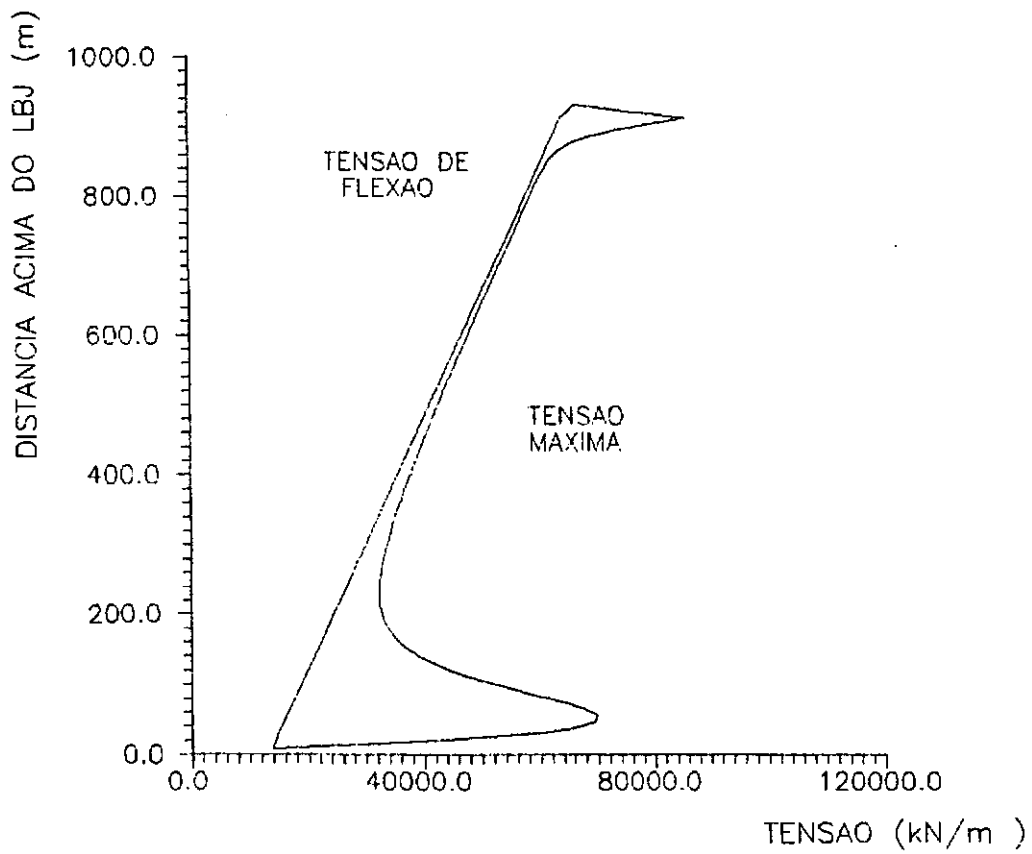


Figura 32. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-20-1-S

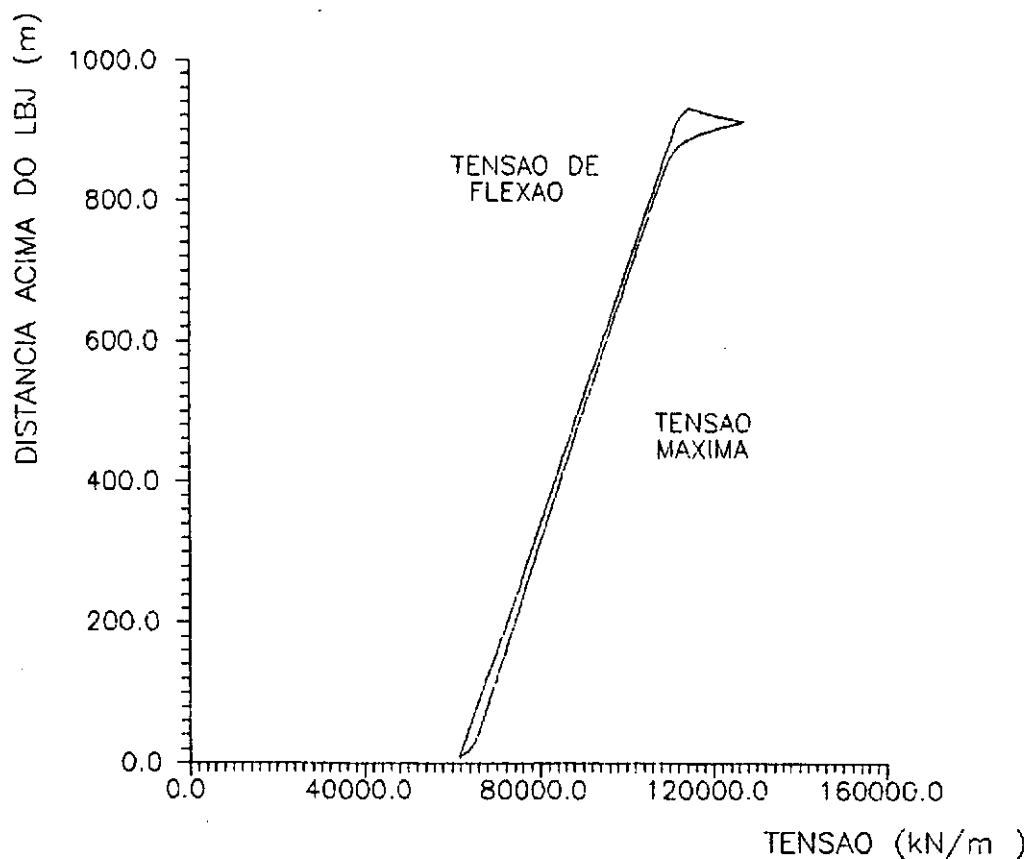


Figura 33. Tensões axiais e de flexão ao longo do riser para o caso 3000-20-2-S

A fim de testar o procedimento adotado na implementação do flex-joint em um elemento, foram feitos dois conjuntos de testes tendo por base os casos da tabela 4:

1. Colocou-se um flex-joint de rigidez infinita no ponto médio do do riser
2. Como condição de apoio, o nó 1 foi engastado e o elemento 1 teve esse mesmo nó liberado à flexão.

Os resultados obtidos foram os mesmos que constam na tabela 4 bem como nas figuras 28 a 33.

VI.4) ANÁLISE DINÂMICA DE UM RISER

Neste terceiro exemplo faz-se a análise dinâmica dos risers estudados no exemplo anterior, valendo, portanto, os mesmos dados de entrada. Dessa forma, serão vistos 6 casos, adicionando-se os seguintes dados:

Amplitude do movimento de "surge" da embarcação	0,6096m
Ângulo de fase do movimento de surge, em graus	15

Assume-se, aqui, que o período do movimento de "surge" é o mesmo que o da onda.

A defasagem de 15° dada acima corresponde ao ângulo de fase do pico do "surge", o qual vem depois do pico da onda.

Um ponto importante a ressaltar aqui é que a análise dinâmica foi feita a partir dos resultados finais da análise estática. O procedimento foi o seguinte: ao final de cada análise estática guardou-se a configuração da estrutura bem como seus esforços e reações em um determinado arquivo. Ao se iniciar a análise dinâmica a primeira tarefa era ler este arquivo para recuperarmos essas grandezas e daí se poder calcular a matriz de rigidez da estrutura.

O tempo total de integração utilizados em todos os casos foi de 65s, o que equivale a aproximadamente 7 ciclos de onda e o intervalo de tempo foi de 0.15s.

O API submeteu este problema a oito diferentes programas, cada um desenvolvido por uma determinada organização. Ocorre que os resultados da análise dinâmica variaram muito e, por isso, não puderam ser postos na forma de tabelas como nas análises estáticas. Eles foram, então, plotados nos gráficos mostrados nas figuras (34) a (39). Esses gráficos são as envoltórias dos máximos e mínimos alcançados pelo parâmetro em questão (deslocamento horizontal na parte esquerda e momento fletor na parte direita) conforme os resultados dos oito participantes. Os mesmos casos foram submetidos ao programa desenvolvido neste trabalho e os resultados plotados sobre os mesmos gráficos a fim de permitir a comparação entre eles. A linha cheia representa os perfis apresentados pelo API e a tracejada, os perfis desta tese.

Nos gráficos seguintes foi utilizada a seguinte notação para os eixos coordenados:

H (ordenada) para distâncias acima do LBJ, em m.

D (abscissa) para deslocamentos horizontais, em m.

T (abscissa) para tensão de flexão, em $\times 10 \text{ kN/m}^2$

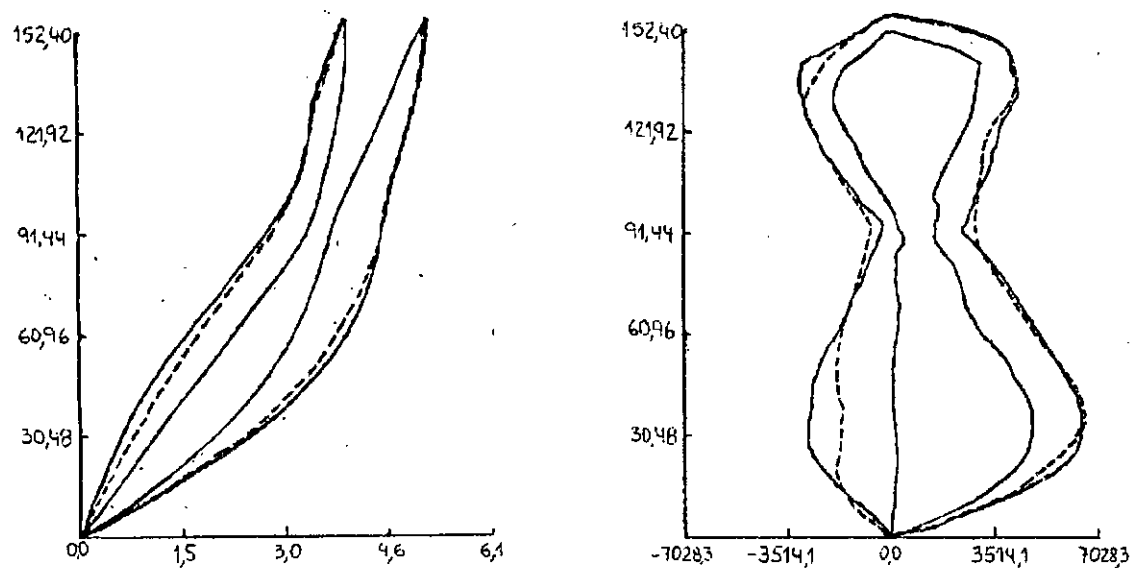


Figura 34. Resultados do caso 500-20-1-D

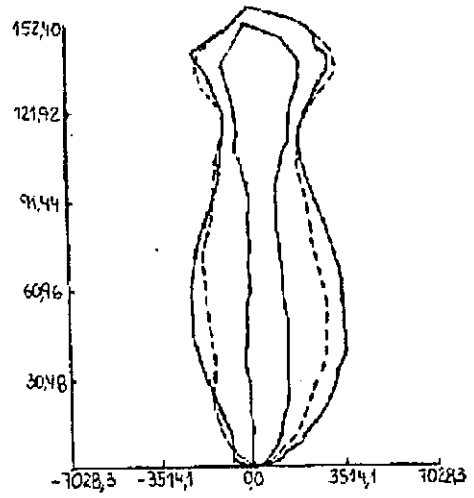
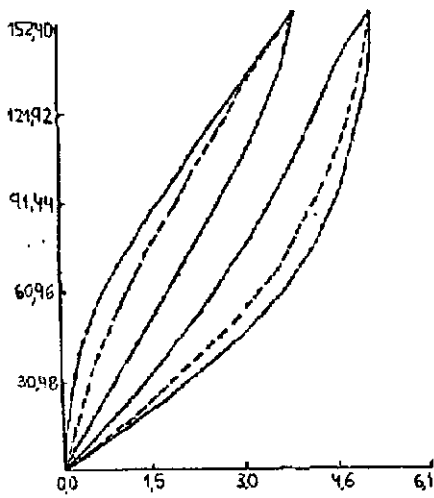


Figura 35. Resultados do caso 500-20-2-D

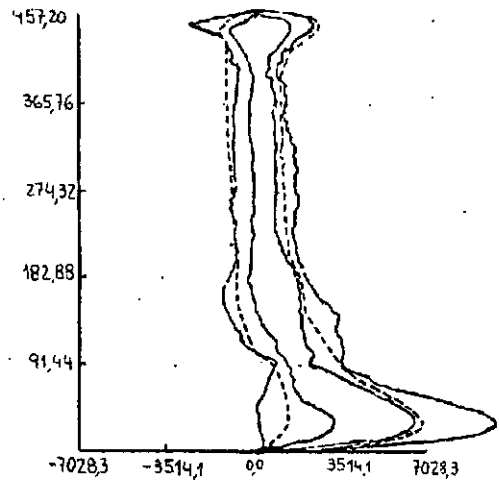
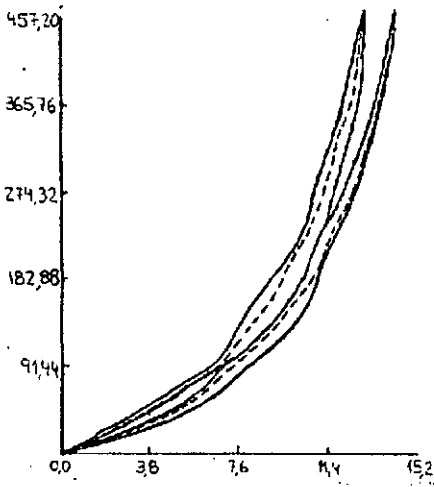


Figura 36. Resultados do caso 1500-20-1-D

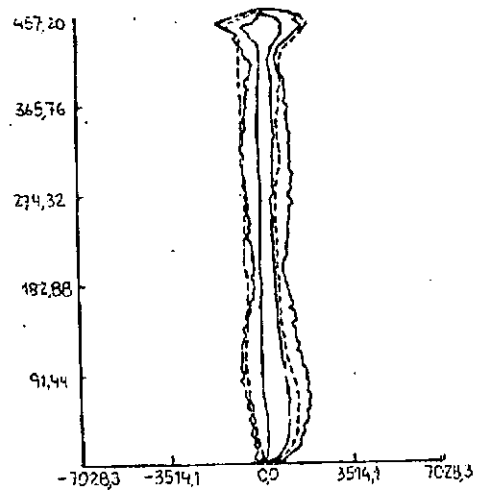
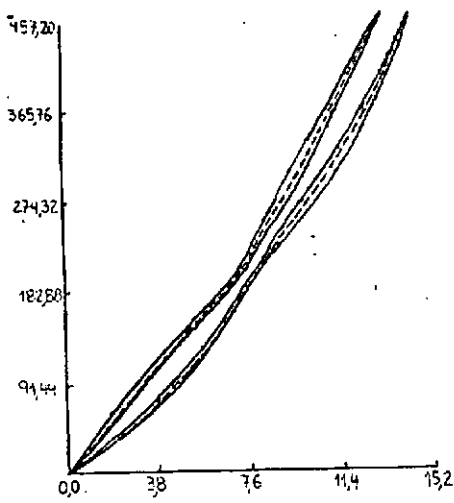


Figura 37. Resultados do caso 1500-20-2-D

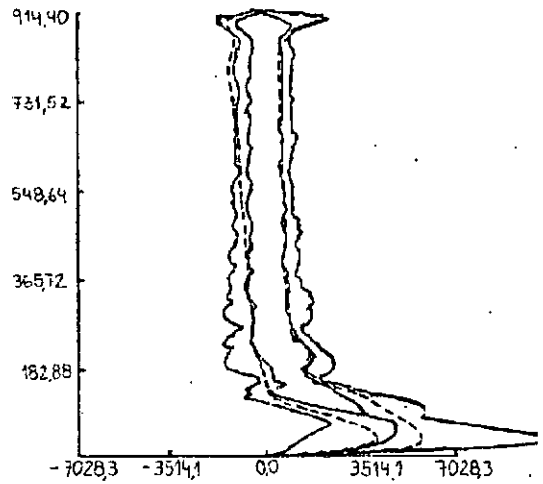
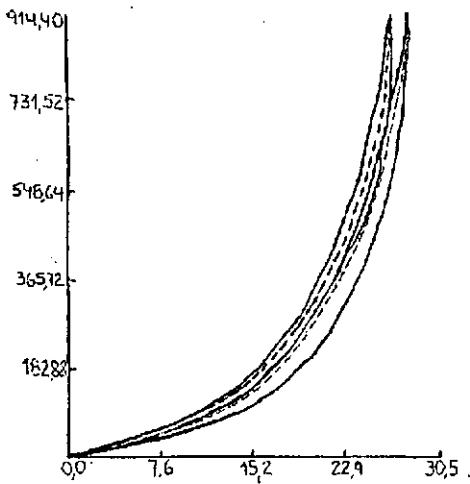


Figura 38. Resultados do caso 3000-20-1-D

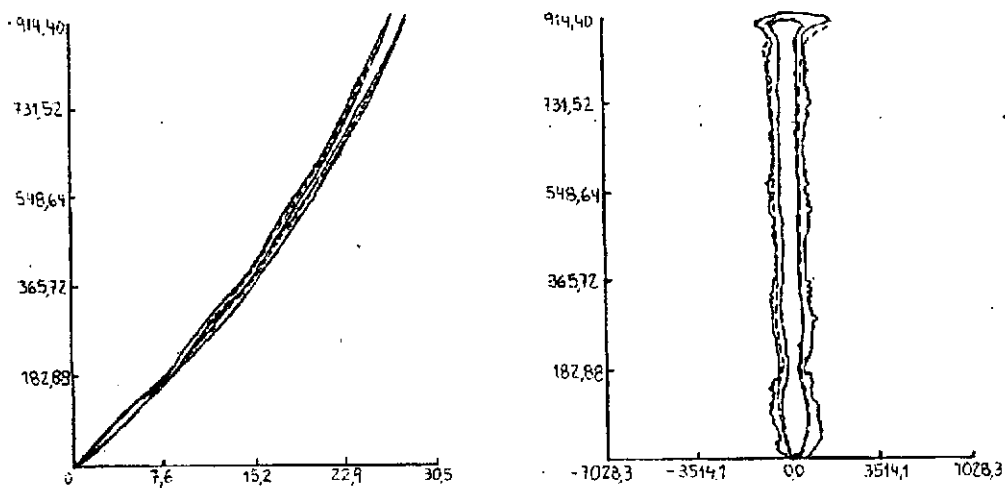


Figura 39. Resultados do caso 3000-20-2-D

VI.5) ANÁLISE DOS RESULTADOS

Pelo que foi exposto, pode-se concluir que os resultados obtidos foram bem satisfatórios quando comparados com outros existente.

No primeiro exemplo ficou comprovado que o método linear incremental tende a se afastar cada vez mais da solução real, já que ela não faz iterações dentro do incremento. Como a análise de um riser envolve fortes não linearidades, este método, em geral, não parece ser indicado. Já o método de Newton-Raphson, por fazer iterações através das matrizes K_1 e K_2 , é mais eficiente e mais adequado que o primeiro. A diferença encontrada entre a solução por este método e a exata de HOLDEN (1972) pode ser explicada pelo fato de se estar utilizando funções de interpolação diferentes.

No segundo exemplo os resultados conseguidos com o programa implementado nesta tese estiveram dentro dos intervalos de variação valores e próximos das médias apresentadas pelo API. Isso comprova a eficiência e facilidade de se trabalhar com o sistema tração efetiva/peso aparente em vez do sistema tração real/peso real, e a boa concordância com os resultados apresentados pelos demais programas das organizações que participaram do boletim do API.

No terceiro exemplo os resultados obtidos também podem ser considerados satisfatórios em relação ao que está no API pois acompanharam bem as variações, ao longo dos risers, das grandezas, apesar de algumas vezes terem saído dos limites mostrados no referido boletim. Dentre outros fatores que poderiam afetar os resultados, a teoria de onda utilizada é uma delas. As características da onda de Airy utilizada foi explicada no capítulo II.

Comparando-se os resultados conseguidos nos itens VI.3 e VI.4, pode-se tirar importantes conclusões como, por exemplo:

- As tensões máximas de flexão são majoradas na análise dinâmica em relação à estática, o que já era de se esperar.

- Às vezes, a análise dinâmica modifica a posição da máxima tensão de flexão em relação à estática. É o caso, por exemplo, dos casos 500-20-1-S (pelo qual a máxima tensão de flexão ocorre na parte superior do riser) e 500-20-1-D (que indica que a máxima tensão ocorre na parte inferior).
- Risers de pequeno comprimento apresentam maiores deslocamentos que os mais compridos, quando submetidos a forças laterais. Também para essa mesma condição, quanto maior a força de tração no topo, menores são os deslocamentos.

De tudo isso, conclui-se que uma análise dinâmica para risers é importante, principalmente para águas profundas, onde as não linearidades têm maior influência.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Este trabalho foi desenvolvido no intuito de se implementar, em um programa de computador, características específicas da análise de risers e, assim, adquirir um maior conhecimento nesta área. Outro objetivo era o de estudar um modelo apropriado para essa análise em águas profundas, o que implica em trabalhar com um problema fortemente não-linear.

Para isso partiu-se de um programa de análise não linear de pórtico plano, sobre o qual foram feitas diversas modificações, tanto alterando rotinas já existentes como acrescentando outras. Ao longo desse processo, transformou-se, então, o programa original em um programa de análise de risers, com as características mencionadas no parágrafo anterior.

Utilizou-se uma formulação de elemento finito capaz de levar em conta as não linearidades envolvidas numa análise de riser. Ela está explicada no capítulo II. Foram também estudados dois procedimentos de resolução de sistemas de equações não lineares, incluindo suas vantagens e desvantagens.

Procurou-se esclarecer a influência de diversas grandezas como peso próprio, fluido interno e externo no cálculo dos deslocamentos e os da estrutura.

Mostrou-se também um método de implementação de uma articulação flexível acoplada a um elemento. Isso foi feito no programa através de uma subrotina que recebe a matriz de rigidez do elemento em questão junto com a rigidez de cada mola e fornece já a matriz de

rigidez desse elemento com as molas acopladas. Assim foi possível dar liberações de momento e introduzir flex-joint em um riser. Os resultados com esse assunto foram satisfatórios.

Adotou-se a utilização do sistema tração efetiva/peso aparente para o cálculo de deslocamentos, o que provou ser realmente mais fácil quanto à sua utilização do que o sistema tração real/ peso real. Os valores obtidos com a utilização do programa implementado nesta tese mostrou uma boa concordância com aqueles do API, como mostra as tabelas 3 e 4.

A análise dinâmica foi feita no domínio do tempo utilizando o método de Newmark para resolver o sistema de equações incrementais do sistema estrutural. Os resultados também podem ser considerados bons pois seguiram o mesmo tipo de variação daqueles do API.

É por todos esses motivos que se acredita que os objetivos desta tese foram alcançados. Nesta área de análise estrutural de risers existe muito campo para pesquisa e como sugestão para estudos futuros, poderia-se sugerir os seguintes pontos:

- Aplicação de teorias de ondas não lineares como, por exemplo, Stokes II e Stokes V.
- Continuar estudando a influências das não linearidades vistas neste trabalho para outros casos de risers em águas profundas.
- Aplicação de estados de mar à análise
- Estudo da influência de "vortex shedding"
- Análise risers em "hang-off", ou seja, com sua extremidade inferior livre.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- API BULLETIN ON COMPARISON OF MARINE DRILLING RISER ANALYSIS (1977)
, First Edition.
- BATHE, K. J. (1976), "Static and Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis Using ADINA", Massachusetts Institute of Technology , Report 82448-2, Cambridge, Massachusetts.
- BATHE, K. J. (1982), "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall
- BENJAMIN, A. C. (1982), "Análise Não-linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos", Tese M. Sc., COPPE/UFRJ
- BENSIMON, L. C. C., TACCQUES, R. R., LOPES, T. A. P. e NEVES, M. A. S. (1987), "Current Induced Vibration: Real Scale Testing of a Riser Fairing", Proceedings of the 6th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 586-597.
- BORGMAN, E. L. (1958), "Computation of Ocean Wave Forces on Inclined Cylinders", Trans-American Geophysical Union , pp 885-888.
- BRUCE, E. B. e METCALF, M. F. (1980), "Nonlinear Dynamic Analysis of Coupled Axial and Lateral Motions of Marine Risers", Offshore Technology Conference , Houston, Texas, Paper No. 2776, Vol. 1, pp 403-412.
- BURKE, B. G. (1974), "An Analysis of Marine Risers for Deep Water", Journal of Petroleum Technology , pp 455-465.
- CHAJES, A. e CHURCHILL, J. E. (1987), "Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods", Journal of Structural Engineering , Vol. 113, No. 6, pp 1221-1235.

- EBECKEN, N. F. F., LIMA, E. C. P. e MOURELLE, M. M. (1985), "Nonlinear Transient Motion of Deepsea Risers", Proceedings of the 5th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 531-540.
- FARIAS, F. M., HSU, L. e HIRATE, M. H. (1981), "On the Design and Dynamic Analysis of a Riser", Proceedings of the 3th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 414-435.
- FARIAS, F. M., HSU, L. e HIRATA, M. H. (1984), "Risers de Perfuração", Boletim Técnico da Petrobrás , Rio de Janeiro, No. 27, pp 275-297.
- FERRANTE, A. J. e BREBBIA, C. A. (1979), "Computational Methods for the Solution of Engineering Problems", Pentech Press , Londres.
- GARDNER, T. N. e KOTCH, M. A. (1976), "Dynamic Analysis of Risers and Caissons by the Finite Element Method", Offshore Technology Conference , Dallas, Texas, Paper No. 2651, Vol. 3, pp 405-421.
- GARRISON, C. J. (1980), "A Review of Drag and Inertia Forces on Circular Cylinders ", Offshore Technology Conference , Houston, Texas, Paper No. 3760, Vol. 2, pp 205-218.
- HOLDEN, J. T. (1972), "On the Finite Deflections of Thin Beams", International Journal Solids Structures , Vol. 8, pp 1051-1055.
- JENNINGS, A. (1968), "Frame Analysis Including Change of Geometry", Journal of Structural Division , ASCE, Vol. 94, No. ST3, pp 627-644.
- KROLIKOWSKI, L. P. e GAY, T. A. (1980), "An Improved Linearization Technique for Frequency Domain Riser Analysis", Proceedings of the Offshore Technology Conference , Houston, Texas, Paper No. 3777, Vol. 2, pp 341-353.

- LEIRA, B. J. e REMSETH, S. N. (1985), "A Comparison of Linear and Nonlinear Methods for Dynamic Analysis of Marine Risers", Proceedings on the 4th International Conference on Behaviour of Offshore Structures (BOSS'85) , Delft, Netherlands, Vol. 2, pp 383-394.
- LIMA, E. C. P. e TORRES, A. L. F. L. (1982), "The Higher Modes Contribution in the Dynamic Analysis of Framed Structures", Second Brazilian Symposium on Piping and Pressure Vessels , Salvador, Vol. 2, pp 355-372.
- LIMA, E. C. P., COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., LANDAU, L. e EBECKEN, N. F. F. (1985), "An Improved Reduced Basis Technique for Dynamic Analysis of Offshore Structures", Proceedings of the 5th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 514-530.
- LIMA, E. C. P., COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., LANDAU, L. e EBECKEN, N. F. F. (1987), "Direct Integration of the Steady-State Solution in Time Domain", Proceedings of the 6th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 463-473.
- LIVESLEY, R. K. (1970), "Metodos Matriciales para Calculo de Estructuras", Editorial Blume
- MATHISEN, K. M. e BERGAN, P. G. (1986), "Nonlinear Static Analysis of Flexible Risers", Proceedings of the Fifth International Offshore Mechanics and Arctic Engineering (OMAE) Symposium , Vol. 3, pp 337-345.
- McIVER, D. B. e OLSON, R. J. (1981), "Effective Tension - Now You See It, Now You Don't", 37th Mechanical Engineering Workshop and Conference Petroleum , Division ASME, Dallas, pp 177-187.
- McNAMARA, J. F. e LANE, M. (1984), "Practical Modeling for Articulated Risers and Loading Columns", Journal of Energy Resources Technology , Vol. 106, No. 4, pp 444-450.

- McNAMARA, J. F., O'BRIEN, P. J. e GILSON, S. G. (1986), "Nonlinear Analysis of Flexible Risers Using Hybrid Finite Elements", Proceedings of the Fifth International Offshore Mechanics and Artic Engineering (OMAE) Symposium , Vol. 3, pp 371-377.
- MOORE, P. L. e COLE, F. W. (1965), "Does Buoyancy Cause Buckling of Drill Collars and Drill Pipes?", The Oil and Gas Journal , pp 108-110.
- MOURELLE, M. M. (1984), "Análise de Estruturas Marítimas e Sistemas Flexíveis Constituídos por Cabos", Tese M. Sc., COPPE/UFRJ
- MOURELLE, M. M. e EBECKEN, N. F. F. (1983), "A Computational System for the Analysis of Marine Structures with Cable Arrays", Proceedings of the 4th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 227-250.
- PALMER, A. C. e BALDRY, J. A. S. (1974), "Lateral Buckling of Axially Constrained Pipelines", Journal of Petroleum Technology , Houston, Texas, pp 1283-1284.
- SAFAI, V. H. (1984), "Nonlinear Dynamic Analysis of Deep Water Risers ", Applied Ocean Research , Vol. 5, No. 4, pp 215-225.
- SPANOS, P-T. D. e CHEN, T. W. (1980), "Vibrations of Marine Riser Systems", Journal of Energy Resources Technology , Austin, Texas, Vol. 102, pp 203-210.
- SPARKS, C. P. (1984), "The Influence of Tension, Pressure and Weight on Pipe and Riser Deformations and Stresses", Transactions of the ASME , Vol. 106, pp 46-54.
- VALENZUELA, E. (1985), "Nonlinear Dynamic Behaviour of Deep Water Marine Structures", Dissertação para Ph. D., Universidade do Texas
- VALENZUELA, E., ROESSET, J., MIKSAD, R. W. e FERRANTE, A. J. (1983), "Non-linear Behavior of Deep Marine Structures", Proceedings of the 4th International Symposium on Offshore Engineering , Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp 198-215.

- WEN, R. K. e RAHIMZADEH, J. (1983), "Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element", Journal of Structural Engineering , ASCE, Vol. 109, No. 8, Paper No. 18188, pp 1952-1971.
- YOUNG, R. D. (1981), "Methods of Analysis for Marine Riser Design and Operations", 37th Petroleum Mechanical Engineering Workshop and Conference , Dallas, Texas.
- YOUNG, R. D. e FOWLER, J. R. (1978), "Mathematics of the Marine Riser" The Energy Technology Conference and Exhibition , Houston, Texas.
- YOUNG, R. D., FOWLER, J. R. e LONG, J. R. (1983), "Marine Riser Design is Simplified", Oil & Gas Journal Report , pp 129-145.
- YOUNG, R. D., FOWLER, J. R., LUKE, R. R. e FISHER, E. A. (1978), "Dynamic Analysis as an Aid to the Design of Marine Risers", Journal of Pressure Vessel Technology , Transactions of ASME, Vol. 100, pp 200-205.

APÊNDICE A - TERMOS DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A equação (II.10) define a matriz de rigidez total de um elemento como a soma de quatro parcelas. Cada uma delas é uma matriz simétrica, cujos termos são fornecidos a seguir

Matriz Linear

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Matriz de Tensao Inicial

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6N}{5L} & \frac{N}{10} & 0 & \frac{-6N}{5L} & \frac{N}{10} \\ 0 & \frac{N}{10} & \frac{2NL}{15} & 0 & \frac{-N}{10} & \frac{-NL}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6N}{5L} & \frac{-N}{10} & 0 & \frac{6N}{5L} & \frac{-N}{10} \\ 0 & \frac{N}{10} & \frac{-NL}{30} & 0 & \frac{-N}{10} & \frac{2NL}{15} \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

onde

N é a força axial que existe no elemento no início do incremento e que vale $E\epsilon_0 A$, sendo A a seção transversal do elemento.

L é o comprimento do elemento no início do incremento.

Nas duas matrizes seguintes são dados todos os termos não nulos.

Matriz K_1

$$K_1(1,2) = K_1(4,5) = -K_1(2,4) = -K_1(1,5) = \frac{6}{5L^2} (v_2 - v_1) - \frac{1}{10L} (\theta_1 + \theta_2) \quad (A.3)$$

$$K_1(1,3) = -K_1(3,4) = \frac{1}{10L} (v_2 - v_1) - \frac{1}{30} (\theta_2 - 4\theta_1) \quad (A.4)$$

$$K_1(1,6) = -K_1(4,6) = \frac{1}{10L} (v_2 - v_1) - \frac{1}{30} (\theta_1 - 4\theta_2) \quad (A.5)$$

$$K_1(2,2) = K_1(5,5) = -K_1(2,5) = \frac{6}{5L^2} (u_2 - u_1) \quad (A.6)$$

$$K_1(3,3) = K_1(6,6) = \frac{2}{15} (u_2 - u_1) \quad (A.7)$$

$$K_1(3,6) = \frac{-1}{30} (u_2 - u_1) \quad (A.8)$$

$$K_1(3,5) = K_1(5,6) = -K_1(2,3) = -K_1(2,6) = \frac{-1}{10L} (u_2 - u_1) \quad (A.9)$$

Matriz K_2

$$K_2(2,2) = -K_2(5,5) = -K_1(2,5) = \frac{1}{140} \left[\frac{18\theta_1^2}{L} + \frac{18\theta_2^2}{L} + \frac{432}{L^3} (v_2 - v_1)^2 - \frac{108}{L^2} (v_2 - v_1)(\theta_1 + \theta_2) \right] \quad (A.10)$$

$$K_2(2,3) = -K_2(3,5) = \frac{1}{280} \left[-3\theta_1^2 + 3\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_2 + \frac{108}{L^2} (v_2 - v_1)^2 - \frac{72\theta_1}{L} (v_2 - v_1) \right] \quad (A.11)$$

$$K_2(2,6) = -K_2(5,6) = \frac{1}{280} \left[3\theta_1^2 - 3\theta_2^2 + 6\theta_1\theta_2 + \frac{108}{L^2} (v_2 - v_1)^2 - \frac{72\theta_2}{L} (v_2 - v_1) \right] \quad (A.12)$$

$$K_2(3,3) = \frac{1}{140} \left[12L\theta_1^2 + L\theta_2^2 - 3L\theta_1\theta_2 + \frac{18}{L} (v_2 - v_1)^2 + 3(v_2 - v_1)(\theta_1 - \theta_2) \right] \quad (A.13)$$

$$K_2(3,6) = \frac{1}{280} [-3L\theta_1^2 - 3L\theta_2^2 + 4L\theta_1\theta_2 - 6(v_2 - v_1)(\theta_1 - \theta_2)] \quad (A.14)$$

$$K_2(6,6) = \frac{1}{140} [L\theta_1^2 + 12L\theta_2^2 - 3L\theta_1\theta_2 + \frac{18}{L}(v_2 - v_1)^2 + 3(v_2 - v_1)(\theta_2 - \theta_1)] \quad (A.15)$$

APÊNDICE B - MATRIZ DE ROTACÃO

A matriz de transformação do sistema local para o global, de um elemento viga-coluna, conforme as fórmulas (II.13) e (II.14), é a seguinte:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

onde θ é o ângulo entre o eixo global X e o local x.

APÊNDICE C - MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE

A matriz de massa consistente para um elemento prismático é da seguinte forma:

$$[M_c] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

APÊNDICE D - MATRIZ DE MASSA ADICIONAL

A matriz de massa adicional para um elemento prismático é da seguinte forma:

$$[M_c] = \frac{(C_m - 1)D_h^2 D_e \pi \rho}{1680} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (D.1)$$