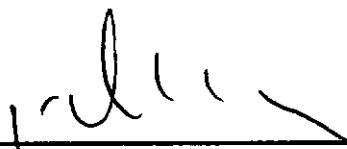


UMA FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONAIS

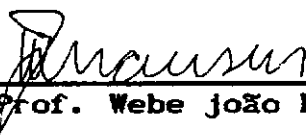
Ademir Aparecido do Prado

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSARIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
ENGENHARIA CIVIL.

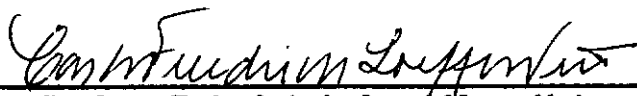
Aprovada por:



Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.
(Presidente)



Prof. Webe João Mansur, Ph.D.



Prof. Carlos Friedrich Loeffler Neto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 1991

Aos meus pais

Artidonio e Helena

AGRADECIMENTOS

Ao professor José Claudio de Faria Telles pela irretocável orientação, pela dedicação e esforço.

Ao professor Webe João Mansur pelo interesse e incentivo.

Aos professores Roberto Fernandes de Oliveira, Sérgio Fernandes Villaça e Ronaldo Carvalho Batista pelo apoio ao longo do curso.

Aos professores e funcionários do Programa de Engenharia Civil da COPPE.

Ao Marcílio, Sandro, Francisco Célio, Waldyr e Sanclér pela amizade e convívio diário.

Ao Assis, Paulo, Rafael, Júlio, Jorge, Célio, Arlene, Suely, Gray, José Antônio, Luís Paulo, Carrer, Paulo Roberto e a todos os colegas da COPPE pela amizade e companheirismo.

Aos meus pais pela dedicação, compreensão e incentivo em todos os momentos e por tudo que me

possibilitou realizar em meus estudos.

As minhas irmãs Lindelma e Helena, e a toda minha família pelo estímulo e interesse.

PRADO, ADEMIR APARECIDO

Uma formulação Hipersingular do Método do Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais [Rio de Janeiro] 1991

IX, 82 p. 29,3 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Elementos de Contorno 2. Formulação hipersingular

I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

Uma formulação Hipersingular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas Bidimensionais

Ademir Aparecido do Prado

Janeiro de 1991

Orientador: José Claudio de Faria Telles.

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno, baseada numa equação integral hipersingular para as incognitas naturais.

São estudados problemas bidimensionais de potencial governados pela equação de Laplace e problemas de elastostática.

São apresentados exemplos cujos resultados foram comparados com as suas soluções analíticas e as soluções obtidas com o Método dos Elementos de Contorno Clássico.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirement for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A HIPERSINGULAR FORMULATION OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR BIDIMENTIONAL PROBLEMS

Ademir Aparecido do Prado

January, 1991

Thesis Supervisor: José Claudio de Faria Telles.

Department: Civil Engeneering.

The objeive of this thesis is to develop an alternative formulation for the Boundary Element Method using a Hipersingular integral equation for natural variables.

Bidimensional problems governad by the Laplace Equation and Elastostatic are solved.

Examples are presented and results are compared with the Classic Boundary Element Method and the exact solution.

ÍNDICE

CAPÍTULO I	INTRODUÇÃO	
I.1	- Generalidades	1
I.2	- Literatura - Equação integral para a incognita natural	3
I.3	- Motivação e objetivos	5
I.4	- Descrição dos capítulos seguintes	6
CAPÍTULO II	FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO M.E.C.	
II.1	- Introdução	8
II.2	- Equação Integral Geral para ponto interno	8
II.3	- Equação Integral Geral para ponto no contorno	12
II.4	- Problemas de potencial	16
II.5	- Problemas de elastostática	17
CAPÍTULO III	FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO M.E.C. PARA POTENCIAL	
III.1	- Introdução	20
III.2	- Equação integral para fluxo em ponto interno	20
III.3	- Equação integral para o fluxo normal em ponto no contorno	23
III.4	- Equação integral para ponto antes do canto	30
III.5	- Equação integral para ponto depois	

	do canto	31
III.6	- Expressão final	33
CAPÍTULO IV	FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO M.E.C. PARA ELASTOSTÁTICA	
IV.1	Introdução	35
IV.2	- Equação integral para tensões numa direção qualquer em ponto interno	35
IV.3	- Equação integral para forças de superfícies	40
CAPÍTULO V	APLICAÇÕES	
V.1	- Introdução	49
V.2	- Exemplo I	49
V.3	- Exemplo II	56
V.4	- Exemplo III	64
V.5	- Exemplo IV	67
V.6	- Exemplo V	70
CAPÍTULO VI	CONCLUSÕES	74
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		76
APENDICE I		79
APENDICE II		81

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 GENERALIDADES

Os problemas de engenharia que têm seu comportamento físico regido por uma ou um conjunto de equações diferenciais, possuem solução exata somente para certos casos de geometria e condições de contorno simples.

Recorre-se, então, a soluções aproximadas através de métodos numéricos de análise, onde a integração das equações diferenciais se transforma na resolução de um sistema de equações algébricas lineares, resultante da discretização dos campos a determinar. O advento dos computadores tornou mais simples a utilização destes métodos, assim como viabilizou o seu uso para a resolução de grandes problemas.

Quanto ao tipo de campos a discretizar, estes métodos podem ser classificados em dois grupos: métodos de domínio e métodos de contorno. Entre os de domínio podem ser destacados o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos, e entre os de contorno o Método dos Elementos de Contorno, ou Método das Equações Integrais de Contorno.

O Método das diferenças Finitas consiste em substituir as derivadas que aparecem nas equações diferenciais por fórmulas de diferença, e calcular as equações diferenciais aproximadas em uma série de pontos. O domínio do problema é, então, substituído por um conjunto discreto de pontos.

No Método dos Elementos Finitos o domínio é subdividido em uma série de subdomínios unidos entre si, denominados "elementos finitos". Sobre cada elemento, são definidas funções de forma, geralmente polinômios, para representar o comportamento da solução. Estas funções são unicamente definidas em termos dos valores da solução em pontos internos ou no contorno de cada elemento. Este desenvolvimento pode ser obtido através de técnicas de resíduos ponderados, princípios variacionais ou um enfoque físico.

No Método dos Elementos de Contorno, as equações diferenciais são transformadas em equações integrais, cujos campos incógnitos aparecem apenas no contorno; reduzindo, assim, em uma unidade a dimensionalidade do problema. Ele pode ser classificado em duas formulações diferentes: indireta e direta.

Na formulação indireta as equações integrais são obtidas da consideração de uma distribuição, ao longo do contorno, de fontes com densidades incógnitas. Pela

imposição das condições de contorno estas densidades são encontradas, e então as incógnitas do problema, no domínio ou no contorno podem ser calculadas. O nome formulação indireta vem do fato de que estas densidades superficiais, incógnitas básicas do método, não têm nenhum significado físico em relação ao problema que elas ajudam a resolver.

Na formulação direta as incógnitas das equações integrais de contorno são, também, incógnitas do problema, o que justifica a classificação de formulação direta. Após o cálculo destas, os valores em qualquer ponto interno podem ser encontrados.

I.2 LITERATURA - EQUAÇÃO INTEGRAL PARA A INCÓGNITA NATURAL

O estabelecimento do M.E.C. é mais recente que o M.D.F. e o M.E.F.. Primeiramente foi desenvolvida a formulação indireta, apresentada em 1963 por JASWON [1] e SYMM [2], para resolver as equações integrais de Fredholm (1903) da teoria do potencial, e KUPDRAZE [3] para resolver problemas de elastostática. A formulação direta só foi apresentada em 1967 por RIZZO [4] para problemas bidimensionais de elastostática.

Nos primeiros trabalhos da formulação direta, caso fosse necessário, as incógnitas naturais (fluxo,

força de superfície) só podiam ser encontradas entre os nós dos elementos, com o uso das funções de interpolação. Ao contrário das incógnitas essenciais (potencial, deslocamento) que podiam ser calculadas diretamente em qualquer ponto do contorno pela equação do M.E.C., após resolvido o sistema de equações.

Um dos primeiros trabalhos que trata do cálculo direto das incógnitas naturais foi apresentado em 1977 por CRUSE [5], que obteve uma equação integral para as tensões em qualquer ponto do contorno de problemas bi e tridimensionais de elastostática. Existia, porém, a restrição do contorno ser suave e não haver descontinuidade das forças de superfícies.

Análogo ao procedimento empregado por CRUSE [5], em 1988 CERROLAZA [6] obteve uma equação para o fluxo normal em pontos do contorno, em problemas tridimensionais de potencial governados pela equação de Laplace. Esta equação também tem restrições: o potencial deve ser contínuo nos pontos considerados, além do aparecimento de derivadas do potencial como incógnitas.

INGBER e MITRA [7] apresentaram em 1989 uma equação para o fluxo normal em pontos do contorno, para problemas bidimensionais de potencial governados pela equação de Laplace. O contorno é considerado suave e o fluxo contínuo.

Em 1988 OKADA et alii [8] apresentaram, para problemas de elastostática, uma equação integral para as derivadas do deslocamento no contorno. Esta é obtida usando como função de ponderação, ao invés da solução da equação diferencial de Cauchy-Navier para um domínio infinito, a sua derivada. Os tensores desta equação têm a mesma ordem de singularidade, que é menor do que as singularidades obtidas da derivação da equação clássica. Também as incógnitas são outras: derivadas do deslocamento e forças de superfícies.

INGBER e RUDOLPHI [9] apresentaram em 1990 a solução de problemas bidimensionais de potencial governados pela equação de Laplace, usando uma formulação baseada em combinações da equação clássica e outra derivada desta. A equação derivada só existe em pontos onde a força de superfície é contínua e o contorno é suave. Nestes pontos foram usados elementos semi-descontínuos. Nesta formulação foram também usados elementos isoparamétricos com interpolação tipo spline Overhauser.

I.3 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

De um estudo sobre refinamento autoadaptativo de malhas com a formulação clássica, onde notou-se que em regiões próximas a singularidades, a análise do erro não

era tão eficaz como em outras regiões, é que chegou-se ao objetivo fundamental deste trabalho: encontrar uma formulação que obtenha melhores resultados nestas regiões. Partiu-se, então, para o desenvolvimento de uma formulação baseada numa equação para as incógnitas naturais; diferente da formulação clássica que é baseada numa equação para as incógnitas essenciais.

Ao contrário de outras formulações, como em [9], que derivam a equação clássica para pontos no contorno, a aqui apresentada deriva a equação para pontos internos e a seguir leva este ponto ao contorno. Isto evita a derivação em pontos onde ocorram descontinuidades geométricas ou físicas, evitando que o contorno tenha que ser suave e não haja descontinuidade das variáveis naturais.

I.4 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS SEGUINTE

O capítulo II apresenta a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno Clássico (M.E.C.C.), que é o ponto de partida para este trabalho.

No capítulo III é desenvolvida a formulação hipersingular do M.E.C. (M.E.C.H.) para problemas bidimensionais de potencial governados pela equação de Laplace.

No capítulo IV está o M.E.C.H. para problemas bidimensionais de elastostática.

O capítulo V contém uma série de exemplos ilustrativos, onde os resultados deste trabalho são comparados com os do M.E.C.C. e em um dos exemplos com a formulação apresentada por INGBER e RUDOLPHI [9].

O capítulo VI apresenta as principais conclusões dos estudos efetuados para a realização desta tese, e algumas sugestões para futuras linhas de investigação.

Os apêndices I e II mostram a possibilidade do uso de integração por partes finitas para simplificar o cálculo do valor principal de integrais dos capítulos III e IV, respectivamente.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO CLÁSSICA DO M.E.C.

II.1 - INTRODUÇÃO

A formulação hipersingular do M.E.C. para problemas bidimensionais de Potencial e Elastostática, que será desenvolvida neste trabalho, é derivada da sua formulação clássica; por isso, apesar de já bem conhecida, ela será apresentada neste capítulo.

Esta apresentação será feita em termos de operadores, tensores e vetores — o que permite desenvolver uma formulação geral para estes problemas.

Na seção II.2 é desenvolvida a equação integral para ponto interno, e em II.3 a equação integral para ponto no contorno.

Nas seções II.4 e II.5 estão as particularizações para problemas bidimensionais de Potencial e Elastostática, respectivamente.

II.2 EQUAÇÃO INTEGRAL GERAL PARA PONTO INTERNO

Seja um problema bidimensional de Potencial ou Elastostática num domínio Ω com contorno $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_p$. Estes

problemas são governados por equações do tipo

$$\mathcal{L}[u(x)] - b(x) = 0 \quad (\text{II.1})$$

submetida às condições de contorno:

essenciais

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_u$$

(II.2)

naturais

$$p(x) = \mathcal{P}[u(x)] = \bar{p}(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_p$$

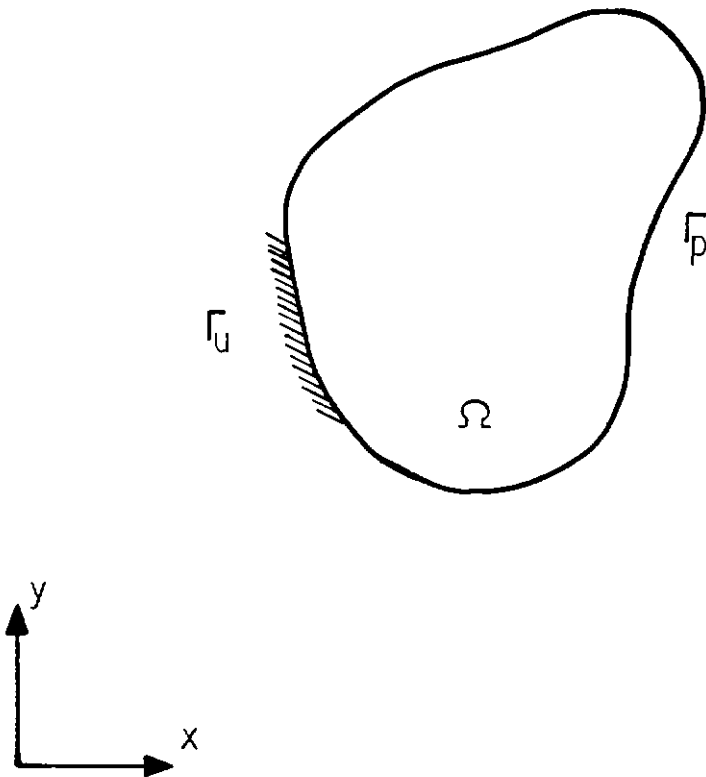


Figura II.1

Domínio Ω com contorno Γ

onde

x ponto de coordenadas (x_1, x_2) no contorno

\mathcal{L} operador diferencial linear de 2^a ordem

\mathcal{P} operador diferencial linear de 1^a ordem

A formulação direta do M.E.C. Clássico para a resolução deste problema será apresentada a partir do Método dos Resíduos Ponderados com a seguinte equação geral de ponderação

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}[u(x)] - b(x)) w \, d\Omega = \int_{\Gamma_p} (p(x) - \bar{p}(x)) w \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (u(x) - \bar{u}(x)) \mathcal{P}[w] \, d\Gamma \quad (II.3)$$

Para eliminar incógnitas no domínio e reduzir o problema apenas a valores no contorno, utilizam-se dois itens que são básicos no M.E.C.:

- (i) Uma relação de reciprocidade, que permite fazer com que o operador \mathcal{L} passe a atuar na função de ponderação e não mais em u . Aqui, esta terá a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}[u(x)] w \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathcal{L}[w] u(x) \, d\Omega + \int_{\Gamma} p(x) w \, d\Gamma -$$

$$\int_{\Gamma} u(x) \varphi[w] d\Gamma \quad (II.4)$$

com u e w pertencentes ao espaço de funções C^2 em Ω e C^1 em Γ .

Substituindo (II.4) em (II.3) obtem-se

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}[w] u(x) d\Omega = \int_{\Omega} b(x) w d\Omega - \int_{\Gamma_U} p(x) w d\Gamma -$$

$$\int_{\Gamma_P} \bar{p}(x) w d\Gamma + \int_{\Gamma_P} u(x) \varphi[w] d\Gamma + \int_{\Gamma_U} \bar{u}(x) \varphi[w] d\Gamma \quad (II.5)$$

ou de uma forma mais geral

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}[w] u(x) d\Omega = \int_{\Gamma} \varphi[w] u(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} w p(x) d\Gamma +$$

$$\int_{\Omega} w b(x) d\Omega \quad (II.6)$$

- (ii) Uma solução fundamental, chamada u^* , como função de ponderação. Esta normalmente é escolhida como a solução da equação (II.1) em um domínio Ω^* e contorno Γ^* no infinito, para uma singularidade discreta num ponto ξ

$$\mathcal{L}[u^*(\xi, x)] + \delta(\xi, x) = 0 \quad (II.7)$$

A outra função de ponderação será, portanto

$$\wp[u^*(\xi, x)] = p^*(\xi, x) \quad (\text{II.8})$$

Substituindo estas funções de ponderação em (II.6) e fazendo uso da propriedade seletiva da função generalizada delta de Dirac $\delta(\xi, x)$, chega-se a uma equação que fornece o valor de u em qualquer ponto ξ do domínio Ω , em função dos valores de u e p no contorno e b no domínio

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma - \int_{\Omega} u^*(\xi, x) b(x) d\Omega \quad (\text{II.9})$$

II.3 EQUAÇÃO INTEGRAL GERAL PARA PONTO NO CONTORNO

Na equação (II.9), $b(x)$ é sempre conhecido no domínio, o mesmo não acontecendo com $u(x)$ e $p(x)$ em todo o contorno. Para que se encontre estas incógnitas, levamos o ponto ξ ao contorno, de modo que se possa estabelecer um sistema de equações integrais referindo-se exclusivamente a estes valores no contorno.

As funções $u^*(\xi, x)$ e $p^*(\xi, x)$ apresentam singularidades quando $x \equiv \xi$, e a integral que contém $p^*(\xi, x)$ não existirá no sentido normal de integração. Para

contornar isso, considera-se o ponto ξ como o limite de um setor circular de raio ε , conforme figura II.2.

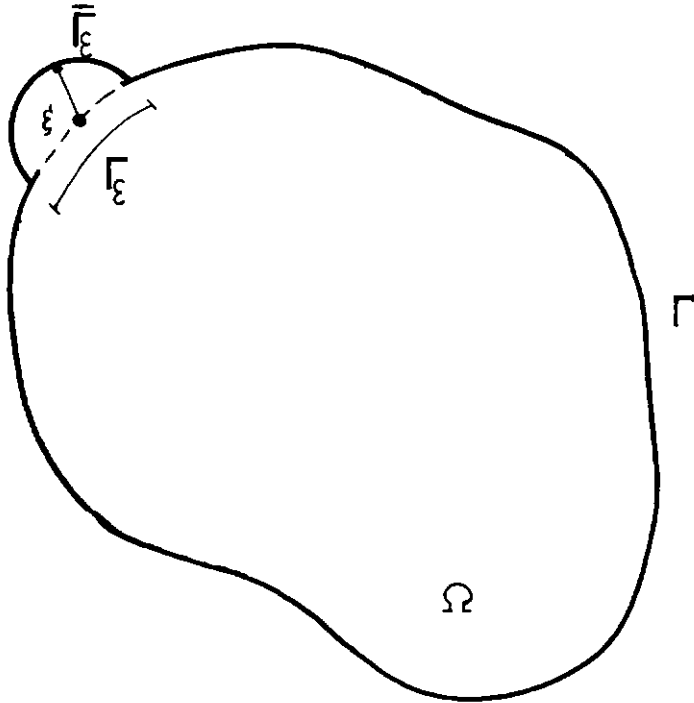


Figura II.2

Ponto no contorno como limite de ponto do domínio

A equação (II.9) ficará

$$u(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} u^*(\xi, x) b(x) d\Omega(x) \quad (II.10)$$

Para problemas bi-dimensionais de potencial e elastostática tem-se que

$$u^*(\xi, x) = O(\ln r)$$

$$p^*(\xi, x) = O\left(\frac{1}{r}\right)$$
(II.11)

Decompondo a integral à esquerda de (II.10), e tendo em vista que a função $u^*(\xi, x)$, apesar de descontínua quando $x \equiv \xi$, é integrável em todos os pontos do contorno, a equação (II.10) se transforma em

$$u(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) + \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \right\} =$$

$$\int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Omega} u^*(\xi, x) b(x) d\Omega(x)$$
(II.12)

Se $u(x)$ satisfaz a condição de continuidade de Hölder, a integral sobre $\Gamma + \bar{\Gamma}_\varepsilon$ existe no sentido do valor principal de Cauchy $\left(\int \right)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x)$$
(II.13)

A integral sobre o arco de círculo pode ser

escrita da seguinte forma

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)] d\Gamma(x) +$$

$$u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.14})$$

Da condição de continuidade de $u(x)$, a primeira integral acima desaparece, restando

$$u(\xi) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.15})$$

Então, a expressão final para pontos no contorno será

$$C(\xi)u(\xi, x) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) -$$

$$\int_{\Omega} u^*(\xi, x) b(x) d\Omega(x) \quad (\text{II.16})$$

sendo o termo livre

$$C(\xi) = I + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.17})$$

II.4 PROBLEMAS DE POTENCIAL

Para problemas de potencial as variáveis, operadores, relação de reciprocidade, solução fundamental e o termo livre da equação de contorno, são os seguintes

VARIÁVEIS

- u potencial
- p fluxo
- b densidade de fontes no domínio

OPERADORES

- $\Delta = \nabla^2$ Laplaciano
- $\partial = \frac{\partial}{\partial n}$ derivada em direção à normal exterior

RELAÇÃO DE RECIPROCIDADE

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u(x) u^*(x) d\Omega(x) = \int_{\Omega} \nabla^2 u^*(x) u(x) d\Omega(x) +$$

$$\int_{\Gamma} u^*(x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u(x) p^*(x) d\Gamma(x)$$

que é o segundo teorema de Green.

SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

$$u^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$p^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n} = - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

TERMO LIVRE

$$c(\xi) = \frac{2\pi - \Delta\theta}{2\pi} \quad (\Delta\theta \text{ conforme fig. II.3})$$

II.5 PROBLEMAS DE ELASTOSTÁTICA

Em problemas de Elasticidade tem-se o seguinte:

VARIÁVEIS

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_x \quad u_y]^T && \text{vetor deslocamento} \\ \mathbf{p} &= [p_x \quad p_y]^T && \text{vetor força de superfície} \\ \mathbf{b} &= [b_x \quad b_y]^T && \text{vetor força de massa} \end{aligned}$$

OPERADORES

$$\mathfrak{L} = G \nabla^2 + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div} \quad \rightarrow \text{Cauchy-Navier}$$

$$\mathfrak{D} = 2G \frac{\partial}{\partial n} + G(n \wedge \text{rot}) + \frac{1}{1-2\nu} n \text{ div} \rightarrow \text{f. de superfície}$$

RELAÇÃO DE RECIPROCIDADE

$$\int_{\Omega} \tau_{1j,j}(x) u_1^*(x) d\Omega(x) = \int_{\Omega} \tau_{1j,j}^*(x) u_1(x) d\Omega(x) +$$

$$\int_{\Omega} p_1(x) u_1^*(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_1^*(x) u_1(x) d\Gamma(x)$$

que é o segundo teorema de Betti

SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

$$u_{1j}^*(\xi, x) = - \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left((3-4\nu) \ln(r) \delta_{1j} - r_{,1} r_{,j} \right)$$

$$p_{1j}^*(\xi, x) = - \frac{G}{4\pi(1-\nu)r} \left([(1-2\nu)\delta_{1j} + 2r_{,1}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,1}n_j - r_{,j}n_1) \right)$$

TERMO LIVRE

$$c_{1j}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} K1 + (n'_x n'_y - n_x n_y) & n_x^2 - n_x'^2 \\ n_x^2 - n_x'^2 & K1 - (n'_x n'_y - n_x n_y) \end{bmatrix}$$

onde

$$K1 = 2(1-\nu)[2\pi - \Delta\theta]$$

- n_j componentes da normal à tangente antes do ponto ξ
- n'_j componentes da normal à tangente depois do ponto ξ
- $\Delta\theta$ ângulo externo formado por estas tangentes

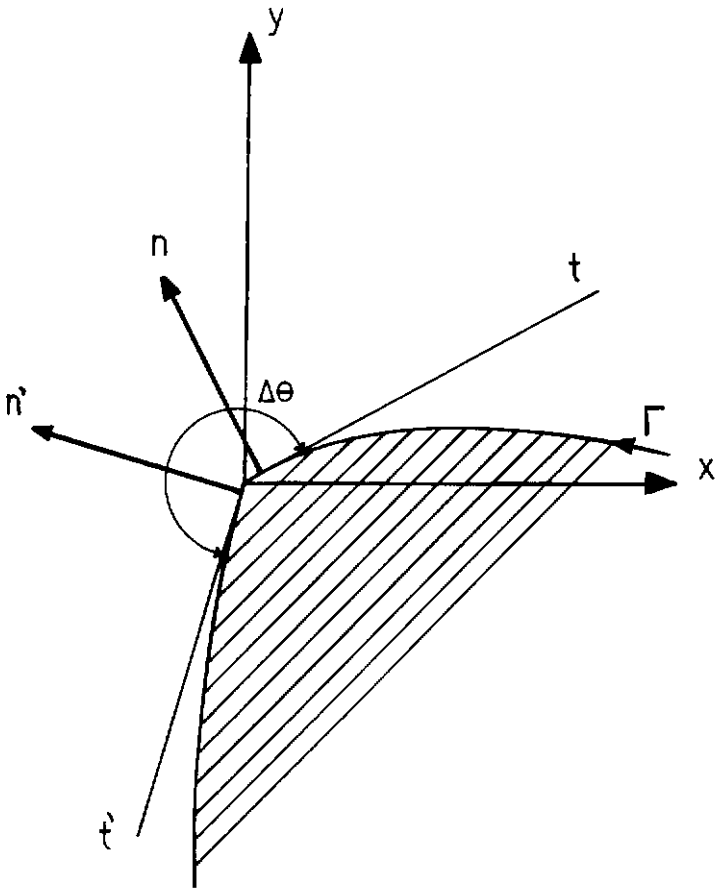


Figura II.3

Variáveis para o cálculo do termo livre $C(\xi)$

CAPÍTULO III

FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO M.E.C. PARA POTENCIAL

III. - INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas bidimensionais de Potencial, denominada "FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR".

Na seção III.2 será desenvolvida a Equação Integral Hipersingular que fornece o Fluxo em ponto interno, e na III.3 em ponto do contorno.

Nas seções III.4 e III.5 são apresentadas as equações para nós antes e depois de pontos em contorno com geometria não suave, e na seção III.6 a expressão final para o M.E.C.H..

III.2 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA O FLUXO EM PONTO INTERNO

Seja um problema de Potencial definido numa região bidimensional Ω encerrada pelo contorno $\Gamma = \Gamma_U + \Gamma_P$ com as seguintes condições de contorno:

essenciais

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_U \quad (\text{III.1A})$$

naturais

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_P \quad (\text{III.1B})$$

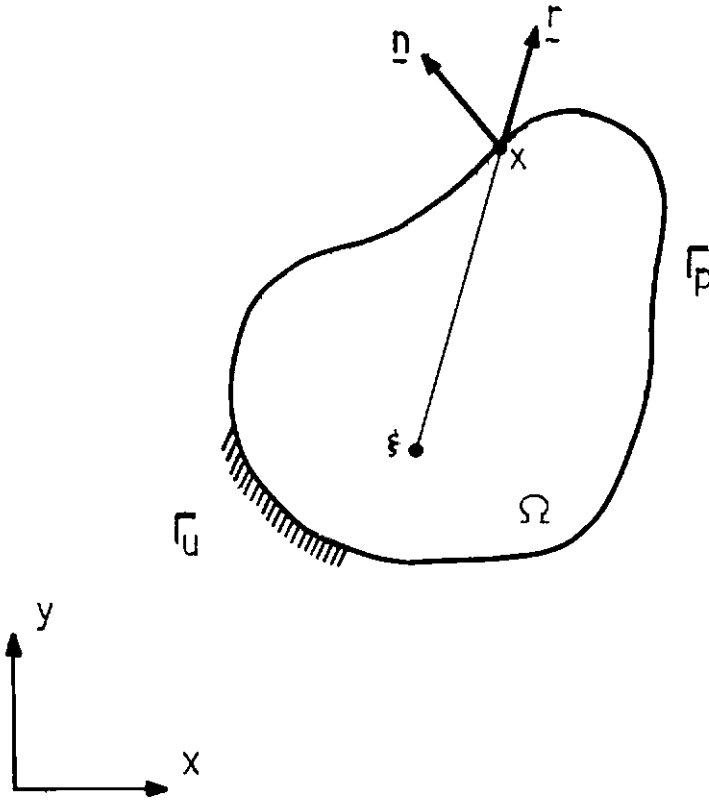


Figura III.1

Região bidimensional com domínio Ω e contorno Γ

onde

- x ponto de coordenadas (x_1, x_2) no contorno — ponto campo
- ξ ponto interno — ponto fonte
- n vetor unitário da normal exterior, num ponto x do do contorno
- r vetor unitário no sentido de $\bar{\xi}x$

A equação integral no domínio para a derivada do

potencial (fluxo) será obtida tomando-se a Equação Integral de Contorno Clássica para um ponto interno ξ (desprezando fontes no domínio)

$$u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) q(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.2})$$

onde

$$u^*(\xi, x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (\text{III.2})$$

$$p^*(\xi, x) = \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial n(x)} = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n(x)} \quad (\text{III.4})$$

e derivando-a em relação a uma direção dada por um vetor unitário m

$$\frac{\partial}{\partial m(\xi)} \left(u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \right) = \frac{\partial}{\partial m(\xi)} \left(\int_{\Gamma} u^*(\xi, x) q(x) d\Gamma(x) \right) \quad (\text{III.5})$$

Como $u^*(\xi, x)$ e $p^*(\xi, x)$ pertencem a classe de funções C^∞ (exceto possivelmente em pontos singulares), podemos usar a regra de Leibniz

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)} + \int_{\Gamma} \frac{\partial p^*(\xi, x)}{\partial m(\xi)} u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(\xi, x)}{\partial m(\xi)} q(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.6})$$

Escrevendo-a em uma forma mais simples

$$p_m(\xi) + \int_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.7})$$

onde

$$U^*(\xi, x) = - \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial m(\xi)} \quad (\text{III.8})$$

$$P^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi r^2} \left(2 \frac{\partial r}{\partial n(x)} \frac{\partial r}{\partial m(\xi)} + m_1 \cdot n_1 \right) \quad (\text{III.9})$$

tem-se a forma final da equação.

III. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA O FLUXO NORMAL EM PONTO NO CONTORNO

A equação (III.7) toma uma forma diferente quando o ponto ξ pertence ao contorno. Sendo necessário analisar com cuidado o comportamento dos integrandos, pois a condição $x \equiv \xi$ ($r=0$) provoca singularidades na equação. Daí considera-se o ponto ξ como o limite de um ponto interior envolvido por um setor circular de raio ε , conforme figura III.2.

Tomando a direção m como sendo a da normal exterior no ponto ξ ,

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial m(\xi)} = \frac{\partial u(\xi)}{\partial n(\xi)} = p(\xi) \quad (\text{III.10})$$

é o fluxo na direção normal em ξ . Tem-se então

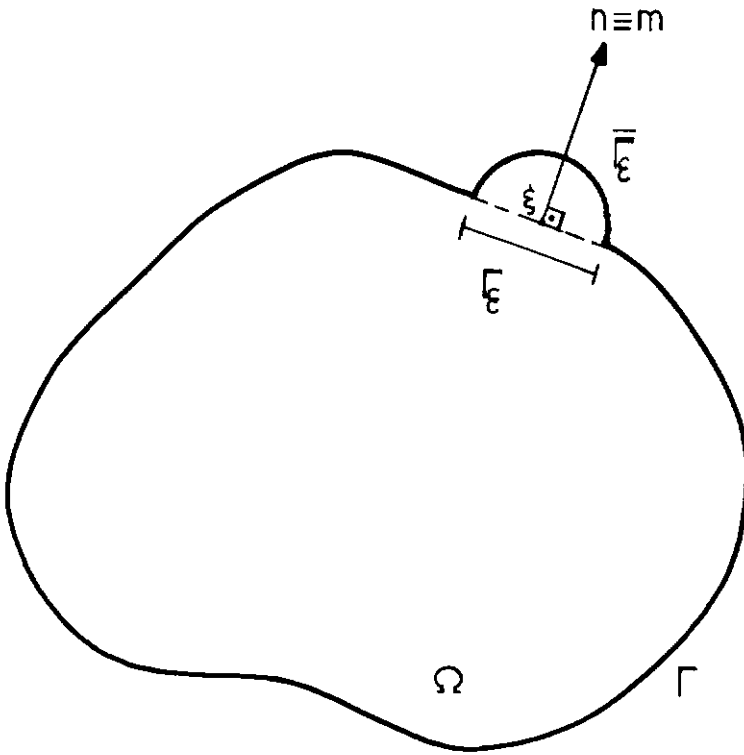


Figura III.2

Ponto no contorno como o limite de ponto do domínio

$$p(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x)$$

(III.11)

Subtraindo-se um potencial constante em todos os pontos, e igual a $u(\xi)$, o valor do fluxo não se altera, e a equação se transforma em

$$p(\xi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)] d\Gamma(x) =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon + \bar{\Gamma}_\epsilon} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.12})$$

Pode-se decompor a integral à esquerda, na equação anterior, da seguinte forma: $I1 = I1A + I1B$

$$I1A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} P^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)] d\Gamma(x) \quad (\text{III.13})$$

$$I1B = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)] d\Gamma(x) \quad (\text{III.14})$$

Para a integral ao longo do arco circular $\bar{\Gamma}_\epsilon$ (I1B), o tensor $P^*(\xi, x)$ torna-se mais simples

$$P^*(\xi, x) = - \frac{1}{2\pi\epsilon^2} m_i \cdot n_i \quad (\text{III.15})$$

isto porque

$$n_i = r_{,i}$$

$$\frac{\partial r}{\partial n(x)} = 1 \quad (\text{III.16})$$

$$\frac{\partial r}{\partial m(\xi)} = - r_{,i} m_i = - m_i n_i$$

$$\text{sendo} \quad \frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} = - \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = - r_{,i}$$

como mostra a figura a seguir.

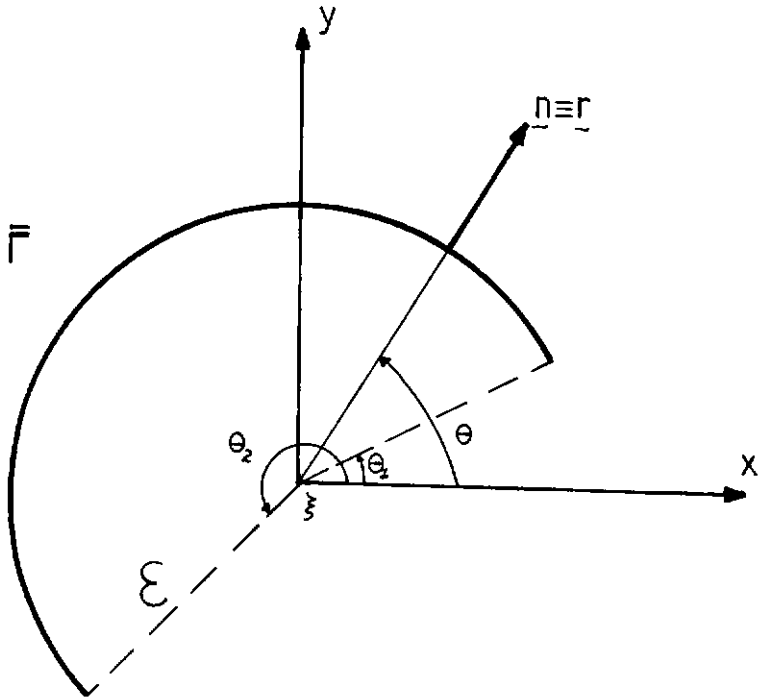


Figura III.3
Arco de círculo

Expressando esta integral em coordenadas locais, mediante a expansão em série de Taylor em torno de ξ do potencial $u(x)$, tem-se

$$I_{1B} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}} - \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} (m_x n_x + m_y n_y) (\bar{u}_{,x} n_x + \bar{u}_{,y} n_y) \varepsilon \, d\Gamma(x) \quad (\text{III.17})$$

sendo $\bar{u}_{,i} = u_{,i}(\xi)$.

Em coordenadas polares

$$I_{1B} = - \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(m_x \bar{u}_{,x} \cos^2 \theta + (m_x \bar{u}_{,y} + m_y \bar{u}_{,x}) \operatorname{sen} \theta \operatorname{cose} + m_y \bar{u}_{,y} \operatorname{sen}^2 \theta \right) d\theta \quad (\text{III.18})$$

$$I_{1B} = - \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{p(\xi)}{2} \left[\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{(m_x \bar{u}_{,x} - m_y \bar{u}_{,y})}{4} \left[\operatorname{sen} 2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{(m_x \bar{u}_{,y} + m_y \bar{u}_{,x})}{2} \left[\operatorname{sen}^2 \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} \quad (\text{III.19})$$

Decompondo, como acima, a integral à direita da equação (III.12), chega-se a $I_2 = I_{2A} + I_{2B}$

$$I_{2A} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.20})$$

$$I_{2B} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.21})$$

Expressando o integrando de I_{2B} em coordenadas polares

$$U^*(\xi, x) = \frac{1}{2\pi\epsilon} (m_x \operatorname{cose} + m_y \operatorname{sene}) \quad (\text{III.22})$$

$$p(x) = u_{,x} n_x + u_{,y} n_y = u_{,x} \operatorname{cose} + u_{,y} \operatorname{sene} \quad (\text{III.23})$$

resulta em

$$I_{2B} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon} (m_x \cos\theta + m_y \operatorname{sen}\theta) (u_{,x} \cos\theta + u_{,y} \operatorname{sen}\theta) \varepsilon \, d\theta \quad (\text{III.24})$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow u_{,i} = \bar{u}_{,i}$, então

$$I_{2B} = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(m_x \bar{u}_{,x} \cos^2\theta + (m_x \bar{u}_{,y} + m_y \bar{u}_{,x}) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + m_y \bar{u}_{,y} \operatorname{sen}^2\theta \right) d\theta \quad (\text{III.25})$$

que é igual a (III.18) com o sinal trocado, portanto

$$I_{2B} = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{p(\xi)}{2} \left[\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{(m_x \bar{u}_{,x} - m_y \bar{u}_{,y})}{4} \left[\operatorname{sen}2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{(m_x \bar{u}_{,y} + m_y \bar{u}_{,x})}{2} \left[\operatorname{sen}^2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} \quad (\text{III.26})$$

A integral I2A - I1A existirá no sentido do valor principal de Cauchy. Com isto a equação (III.11) resultará em

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \left(2\pi - \left[\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right) p(\xi) - \frac{(m_x \bar{u}_{,x} - m_y \bar{u}_{,y})}{2} \left[\operatorname{sen}2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} - (m_x \bar{u}_{,y} + m_y \bar{u}_{,x}) \left[\operatorname{sen}^2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} =$$

$$\oint_{\Gamma} \left[U^*(\xi, x) p(x) - P^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)] \right] d\Gamma(x) \quad (\text{III.27})$$

Como é mostrado no apêndice I, usando integração por partes finitas a equação acima pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ \left(2\pi - \left[\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right) p(\xi) - \frac{(m_x \bar{u}_{,x} - m_y \bar{u}_{,y})}{2} \left[\text{sen} 2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} - \right. \\ \left. (m_x \bar{u}_{,y} + m_y \bar{u}_{,x}) \left[\text{sen}^2 \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \right\} + \\ \oint_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \oint_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.28})$$

que tem integrais com a ordem de singularidade aumentada em uma unidade quando comparada com a respectiva equação do Método dos Elementos de Contorno Clássico.

Esta equação envolve como incógnitas, além de u e p , a derivada de u em relação às coordenadas cartesianas, a não ser para contornos suaves, onde

$$\theta_2 - \theta_1 = \pi$$

$$\left[\text{sen} 2\theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0 \quad (\text{III.29})$$

$$\left[\text{sen}^2 \theta \right]_{\theta_1}^{\theta_2} = 0$$

e a equação é simplificada para

$$\frac{1}{2} p(\xi) + \oint_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \oint_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.30})$$

Para outros tipos de contorno, as derivadas devem ser eliminadas para que a equação possa ser diretamente implementada. Isto será feito a seguir.

III.4 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTO ANTES DO CANTO

Supondo um ponto fonte ξ imediatamente antes de um canto e um ponto ξ' depois

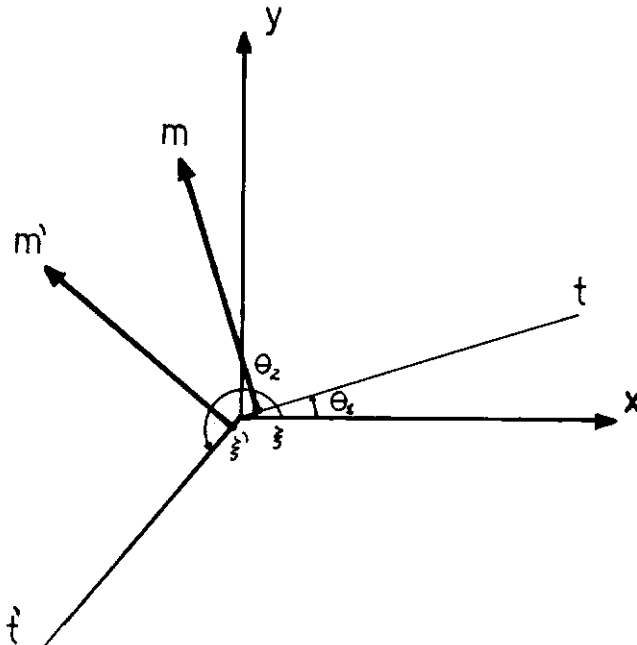


Figura III.4

Ponto fonte antes de canto

Na figura anterior pode-se ver que:

$$\text{sene}\theta_1 = - m_x$$

$$\text{cose}\theta_1 = m_y$$

(III.31)

$$\text{sene}\theta_2 = - m'_x$$

$$\text{cose}\theta_2 = m'_y$$

Substituindo estes valores na equação (III.28)
pode-se chegar a

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ (2\pi - \Delta\theta) p(\xi) + (m_x m'_y - m_y m'_x) (\bar{u}_{,x} m'_x + \bar{u}_{,y} m'_y) \right\} +$$

$$\int_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.32})$$

Notando que $\bar{u}_{,x} m'_x + \bar{u}_{,y} m'_y$ é o fluxo normal no ponto ξ' ,
pode-se eliminar as derivadas de u e chegar a

$$\frac{(2\pi - \Delta\theta)}{2\pi} p(\xi) + \frac{(m_x m'_y - m_y m'_x)}{2\pi} p(\xi') +$$

$$\int_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.33})$$

III.5 EQUACAO INTEGRAL PARA PONTO DEPOIS DO CANTO

Considerando agora o ponto fonte ξ após o canto,

e o ponto ξ' antes, conforme figura III.5, tem-se

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta_1 &= - \frac{m'_x}{m'} \\ \text{cos}\theta_1 &= \frac{m'_y}{m'} \end{aligned}$$

(III.34)

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta_2 &= - \frac{m_x}{m} \\ \text{cos}\theta_2 &= \frac{m_y}{m} \end{aligned}$$

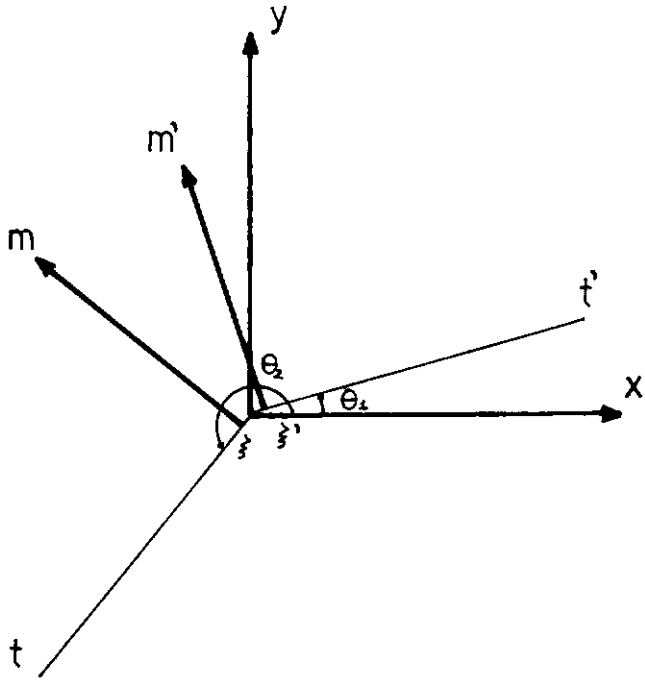


Figura III.5

Ponto fonte depois do canto

Substituindo estes valores na equação (III.28) pode-se chegar a

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ (2\pi - \Delta\theta) p(\xi) - (m_x m'_y - m_y m'_x) (\bar{u}_x, m'_x + \bar{u}_y, m'_y) \right\} +$$

$$\oint_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \oint_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.35})$$

Eliminando as derivadas como anteriormente

$$\frac{(2\pi - \Delta\theta)}{2\pi} p(\xi) - \frac{(m_x m'_y - m_y m'_x)}{2\pi} p(\xi') +$$

$$\oint_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = \oint_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{III.36})$$

III.6 EXPRESSÃO FINAL

As derivadas do potencial foram eliminadas, restando como incógnitas apenas u e p . O termo livre é escrito em função do fluxo normal em pontos imediatamente antes e depois do canto, dos cossenos diretores das normais e do ângulo externo encerrado pelas tangentes nestes pontos.

As equações (III.33) e (III.36) podem ser resumidas numa única, que será denominada EQUAÇÃO INTEGRAL HIPERSINGULAR DE CONTORNO PARA POTENCIAL

$$C p(\xi) + C' p(\xi') + \oint_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) =$$

$$\oint_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \quad (\text{ III.37 })$$

onde

$$C = 1 - \frac{\Delta\theta}{2\pi} \quad (\text{ III.38 })$$

$$C' = \frac{1}{2\pi} (n_x^A n_y^D - n_x^D n_y^A) \quad (\text{ III.39 })$$

com os superíndices significando Antes e Depois do canto.

CAPÍTULO IV

FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR DO M.E.C. PARA ELASTOSTÁTICA

IV.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo descreve uma FORMULAÇÃO HIPERSINGULAR do Método dos Elementos de Contorno aplicada a problemas bidimensionais de Elastostática.

Na seção IV.2 será desenvolvida uma Equação Integral Hipersingular que fornece as componentes de tensões num plano qualquer passando por um ponto interno, e na seção IV.3 a Equação Integral Hipersingular para forças de superfícies.

IV.2 - EQUAÇÃO INTEGRAL PARA TENSÕES NUMA DIREÇÃO QUALQUER EM PONTO INTERNO

Considere-se um corpo elástico bidimensional em equilíbrio num domínio Ω e contorno $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_p$ com as seguintes condições de contorno

- essenciais

$$u(x) = \bar{u}(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_u \quad (\text{IV.1A})$$

- naturais

$$p(x) = \bar{p}(x) \quad \text{se } x \in \Gamma_p \quad (\text{IV.1B})$$

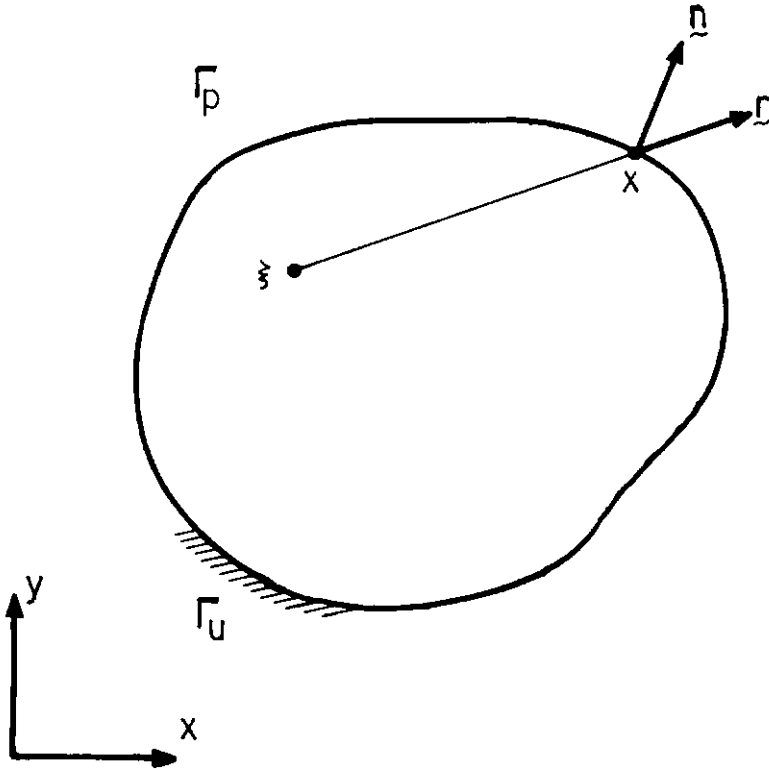


Figura IV.1

Corpo em equilíbrio

onde

x ponto de coordenadas (x_1, x_2) no contorno — ponto campo

ξ ponto interno — ponto fonte

n vetor unitário da normal exterior ao contorno Γ

r vetor unitário no sentido de $\bar{\xi}x$

O estado tensional em um ponto interno ξ pode ser obtido, conforme Telles [11], substituindo as

derivadas, em relação as coordenadas de ξ , da identidade de Somigliana nas relações deformações-deslocamentos para produzir o tensor deformação

$$\varepsilon_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} \dot{u}_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \dot{p}_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) \quad (IV.1)$$

onde

$$\dot{u}_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad (IV.2)$$

$$\dot{p}_{ijk}^*(\xi, x) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [\delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4(r_{,i} r_{,j} r_{,k}) + (1-2\nu) (\delta_{ik} n_j + \delta_{kj} n_i + 2r_{,i} r_{,j} n_k) + 2\nu (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) r_{,k} - \delta_{ij} (1-2\nu) n_k \right\} \quad (IV.3)$$

Substituindo-o na lei de Hooke resulta na expressão

$$\tau_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, x) p_k(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p_{ijk}^*(\xi, x) u_k(x) d\Gamma(x) \quad (IV.4)$$

onde

$$u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}) + \right. \\ \left. 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (IV.5)$$

$$p_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - \right. \\ \left. 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu) \cdot \right. \\ \left. (2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (IV.6)$$

Se se conhecem as componentes, segundo os eixos cartesianos, de tensões τ_{ij} no ponto ξ ; as componentes de tensão que atuam num plano qualquer, de normal m , passando por ξ , conforme figura IV.2, podem ser obtidas pela formula de Cauchy

$$p_i(\xi) = \tau_{ij}(\xi) m_j \quad (IV.7)$$

Substituindo (IV.4) na fórmula acima, chega-se a Equação Integral para as componentes de tensão num plano qualquer de normal m , para ponto interno

$$p_i(\xi) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.8})$$

onde

$$U_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) - \frac{\partial r}{\partial m} [2r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}] \right\} \quad (\text{IV.9})$$

$$P_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ -\frac{\partial r}{\partial m} \left[2\frac{\partial r}{\partial n} (\nu\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) + 2\nu n_i r_{,j} + 2(1-2\nu)n_j r_{,i} \right] + m_k n_k [2\nu r_{,i} r_{,j} + (1-2\nu)\delta_{ij}] + 2\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)m_i r_{,j} + \nu m_j r_{,i}] + (1-2\nu)m_j n_i - (1-4\nu)m_i n_j \right\} \quad (\text{IV.10})$$

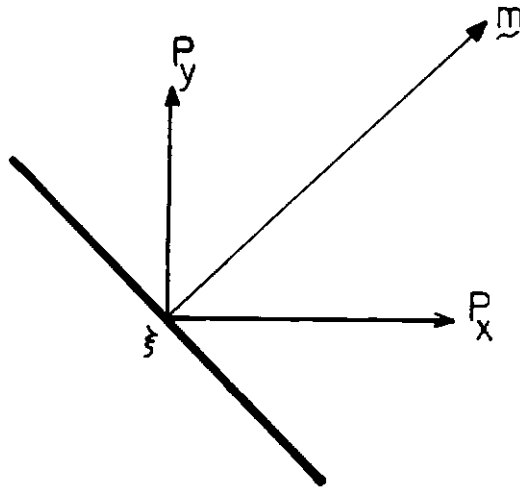


Figura IV.2

Componentes de tensões num plano de normal m

IV.3 - EQUAÇÃO INTEGRAL PARA FORÇAS DE SUPERFÍCIES

Para ter-se as tensões no contorno, age-se como na formulação de Potencial. Considera-se o ponto ξ como o limite de um ponto interior envolvido por um setor circular de raio ε , conforme figura III.2.

Tomando a direção de m como sendo a da normal exterior no ponto ξ ($m \equiv n(\xi)$), as componentes de tensão $p_i(\xi)$ serão as forças de superfícies em ξ

$$p_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{i,j}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{i,j}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma(x) \right\} \quad (IV.11)$$

Aplicando uma translação e uma rotação de corpo rígido, conforme figura IV.3, não se alteram os valores das tensões, e a equação se transforma em

$$p_i(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{i,j}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \bar{\Gamma}_\varepsilon} P_{i,j}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \right\} \quad (IV.12)$$

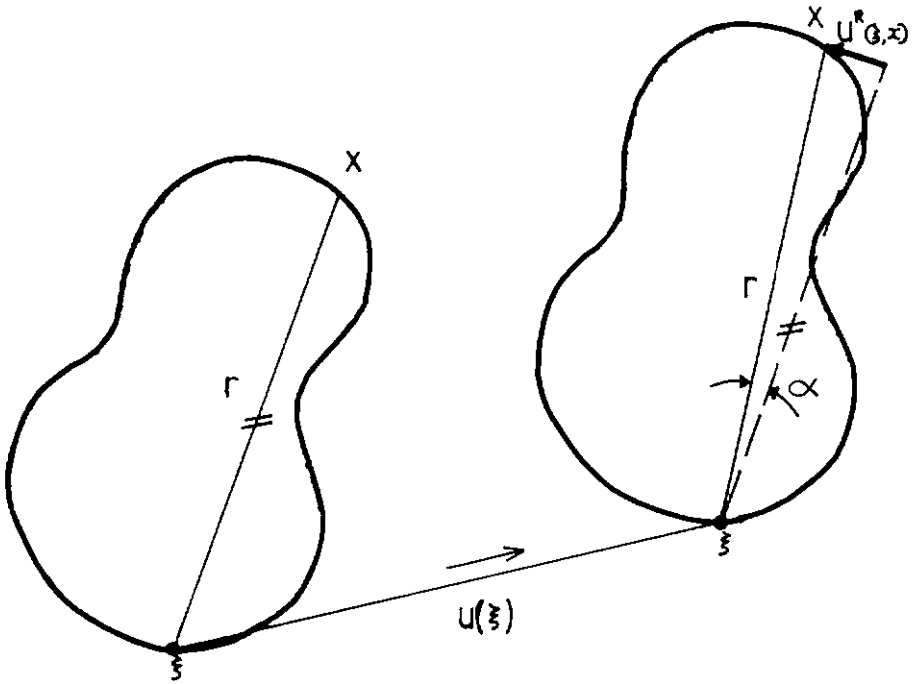


Figura IV.3

Translação e rotação de corpo rígido

sendo

$u(\xi)$ translação do ponto ξ

$u^R(\xi, x)$ deslocamento do ponto x causado por uma rotação α no ponto ξ

Considerando o deslocamento $u^R(\xi, x)$ muito pequeno comparado à distancia r , podemos considera-lo como sendo normal a r , conforme figura IV.4, e igual a

$$u^R(\xi, x) = \alpha r$$

(IV.13)

Suas componentes serão

$$u_x^R(\xi, x) = -\alpha r \operatorname{sen} \theta$$

(IV.14)

$$u_y^R(\xi, x) = \alpha r \operatorname{cos} \theta$$

com o valor de α sendo igual a

$$\alpha = -\frac{u_x(x) - u_x(\xi)}{r} \operatorname{sen} \theta + \frac{u_y(x) - u_y(\xi)}{r} \operatorname{cos} \theta \quad (\text{IV.15})$$

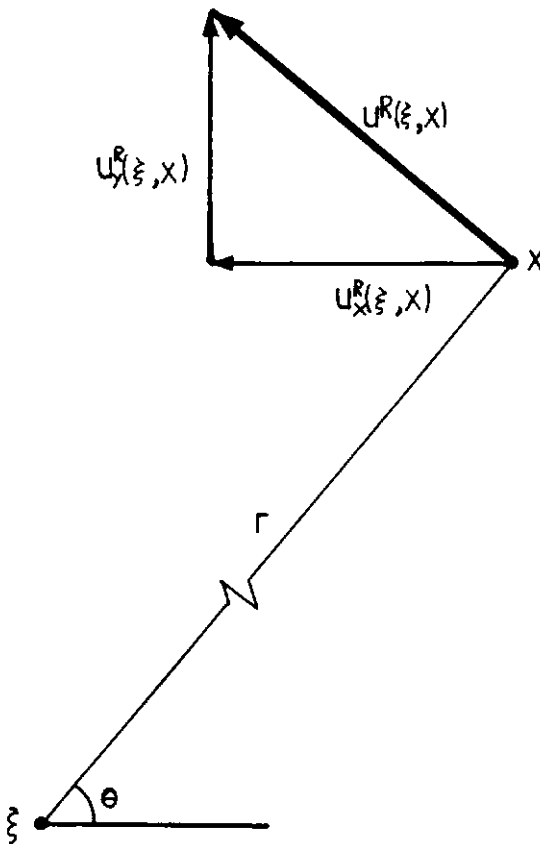


Figura IV.4

Deslocamento causado por rotação em ξ

A segunda integral de (IV.12) pode ser decomposta da seguinte forma

$$I2 = I2A + I2B$$

$$I2A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\epsilon} P_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \quad (IV.16)$$

$$I2B = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\epsilon} P_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \quad (IV.17)$$

Ao longo do arco de círculo $\bar{\Gamma}_\epsilon$, conforme figura III.3, tem-se o seguinte:

- como $r \equiv n$, o tensor $P_{ij}^*(\xi, x)$ é simplificado

$$P_{ij}^*(\xi, x) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)\epsilon^2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] \quad (IV.18)$$

- como o deslocamento é contínuo, ele pode ser expresso mediante uma expansão em série de Taylor em torno de ξ

$$u_j(x) - u_j(\xi) = \epsilon \bar{u}_{j,k} n_k \quad (IV.19)$$

$$\text{sendo } \bar{u}_{j,k} = u_{j,k}(\xi)$$

- O valor de α será dado por

$$\alpha = \bar{u}_{x,x} m_x m_y - \bar{u}_{x,y} m_x^2 + \bar{u}_{y,x} m_y^2 - \bar{u}_{y,y} m_x m_y \quad (IV.20)$$

Substituindo (IV.18), (IV.19), (IV.20) na integral I2B, tem-se em coordenadas polares que

$$I2B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} \frac{G}{2\pi(1-\nu)\varepsilon^2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] \cdot$$

$$[\varepsilon \bar{u}_{j,k} n_k - u_j^R(\xi, x)] \varepsilon d\theta \quad (IV.21)$$

$$I2B = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] \cdot$$

$$[\bar{u}_{j,k} n_k - u_j^R(\xi, x)] d\theta \quad (IV.22)$$

Decompondo, como acima, a primeira integral de (IV.12), tem-se: $I1 = I1A + I1B$

$$I1A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (IV.23)$$

$$I1B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) \quad (IV.24)$$

Ao longo de $\bar{\Gamma}_\varepsilon$ o tensor é simplificado

$$U_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)\varepsilon} \left\{ (1-2\nu) (m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) + [2n_i n_j + (1-2\nu)\delta_{ij}] m_k n_k \right\} \quad (IV.25)$$

e a integral I1B, escrita em coordenadas polares, fica

$$I1B = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{e_1}^{e_2} \left\{ (1-2\nu) (m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) + [2n_i n_j + (1-2\nu)\delta_{ij}] m_k n_k \right\} p_j(x) de \quad (IV.26)$$

A integral I1A - I2A existirá no sentido do Valor Principal de Cauchy. Com isto, mais I1B e I2B, a equação (IV.12) resultará em

$$P_1(\xi) + \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \int_{e_1}^{e_2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] .$$

$$[\bar{u}_{j,k} n_k - u_j^R(\xi, x)] d\theta - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ (1-2\nu) (m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) + \right.$$

$$\left. [2n_i n_j + (1-2\nu) \delta_{ij}] m_k n_k \right\} p_j(x) d\theta =$$

$$\int_{\Gamma} \left[U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) - P_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi) - u_j^R(\xi, x)] \right] d\Gamma(x) \quad (IV.27)$$

Como é mostrado no apêndice II, usando integração por partes finitas a equação acima pode ser expressa da seguinte forma

$$P_i(\xi) + \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [m_k n_k (\delta_{ij} - 6n_i n_j) + m_j n_i + m_i n_j] .$$

$$[\bar{u}_{j,k} n_k - u_j^R(\xi, x)] d\theta - \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ (1-2\nu) (m_j r_{,i} - m_i r_{,j}) + \right.$$

$$\left. [2n_i n_j + (1-2\nu) \delta_{ij}] m_k n_k \right\} p_j(x) d\theta - \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) =$$

$$- \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \quad (IV.28)$$

Esta equação envolve como incognita, além de u e p , a derivada de u em relação aos eixos cartesianos. A não ser para contornos suaves, onde

$$\frac{1}{2} P_{1j}(\xi) - \int_{\Gamma} U_{1j}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) =$$

$$- \int_{\Gamma} P_{1j}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \quad (IV.29)$$

Para outros tipos de contorno, as derivadas devem ser eliminadas para que a equação possa ser diretamente implementada.

Isto é feito com o auxílio de alguns casos, como estados uni e biaxial de tensão e cisalhamento puro, com os quais pode-se chegar a uma equação onde o termo livre pode ser escrito em função das forças de superfícies em pontos imediatamente antes e depois do canto, dos cossenos diretores das normais e do ângulo externo encerrado pelas tangentes nestes pontos. Esta equação, denominada EQUAÇÃO INTEGRAL HIPERSINGULAR DE CONTORNO PARA ELASTOSTÁTICA, será

$$C p(\xi) + C' p(\xi') - \int_{\Gamma} U_{1j}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) =$$

$$- \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \quad (\text{IV.30})$$

onde

$$C = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(2\pi-\Delta\theta) - \alpha m_y m'_y sg & [-(2-3\nu) + \alpha m_x m'_y] sg \\ [2-3\nu + \alpha m_y m'_x] sg & 2(1-\nu)(2\pi-\Delta\theta) - \alpha m_x m'_x sg \end{bmatrix}$$

$$C' = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} \alpha [4-3\nu-2m_x'^2] & -\beta [-3(1-\nu)+2m_y'^2] - \gamma \\ \beta [-3(1-\nu)+2m_x'^2] - \gamma & \alpha [4-3\nu-2m_y'^2] \end{bmatrix} * sg$$

sendo

$$\alpha = m_x m'_y - m_y m'_x$$

$$\beta = m_x m'_x + m_y m'_y$$

$$\gamma = m_x m'_x - m_y m'_y$$

$$sg = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \text{ está antes do canto} \\ -1 & \text{se } \xi \text{ está depois do canto} \end{cases}$$

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados 4 exemplos de potencial e um de elastostática, resolvidos com a formulação hipersingular apresentada neste trabalho e com a formulação clássica. Os resultados são comparados com as soluções exatas, que são conhecidas para todos os problemas analisados.

Para cada uma das formulações foi implementado um programa com elementos contínuos e interpolação linear das variáveis físicas. Para uma maior precisão, as integrais singulares foram resolvidas analiticamente.

V.2 - EXEMPLO I

Este exemplo consiste de um problema de potencial com o domínio sendo um quadrado unitário. A solução exata é dada pelas equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,y) = \cosh(x) \operatorname{sen}(y) \\ p(x,y) = \operatorname{senh}(x) \operatorname{sen}(y) n_x + \cosh(x) \cos(y) n_y \end{array} \right. \quad (V.1)$$

As condições de contorno são mostradas na figura abaixo

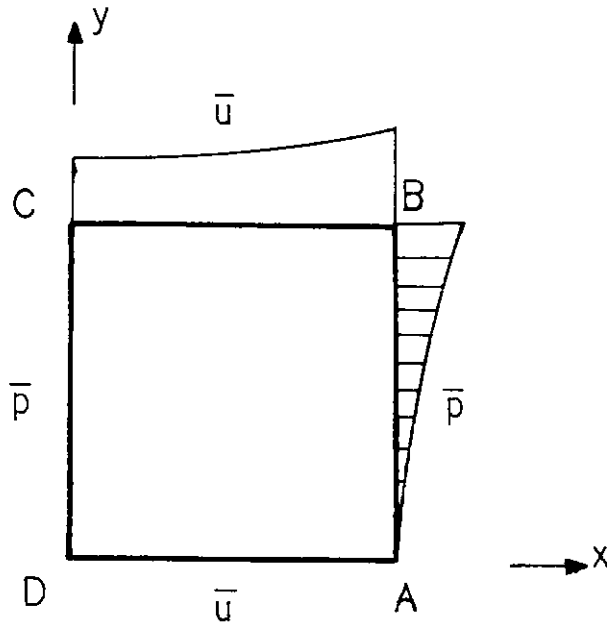


Figura V.1

Condições de contorno do exemplo 1

Para a resolução deste problema, inicialmente discretizou-se cada lado em três elementos iguais. Posteriormente, refinou-se a malha com a subdivisão de cada elemento em dois com comprimentos iguais, conforme mostra a figura a seguir

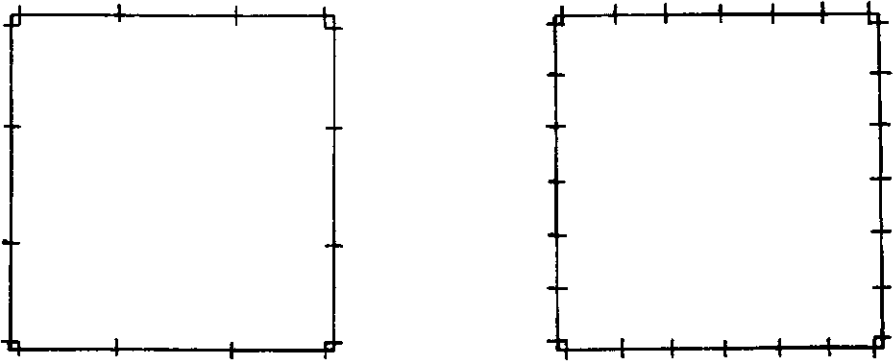
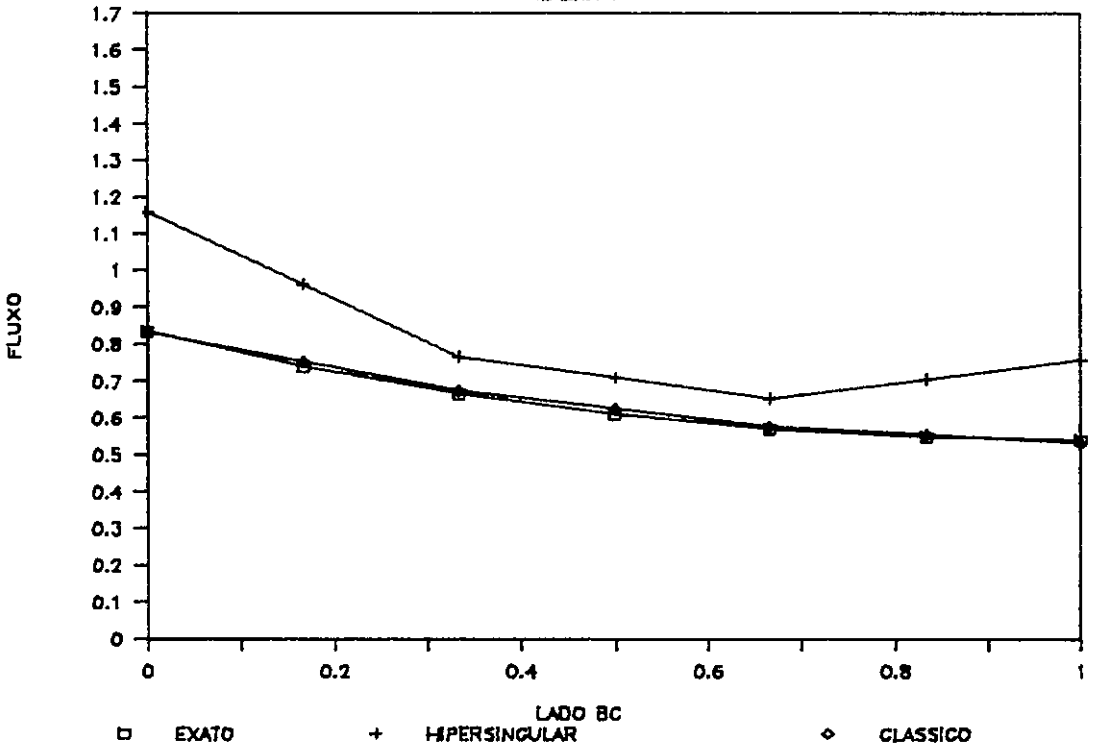


Figura V.2

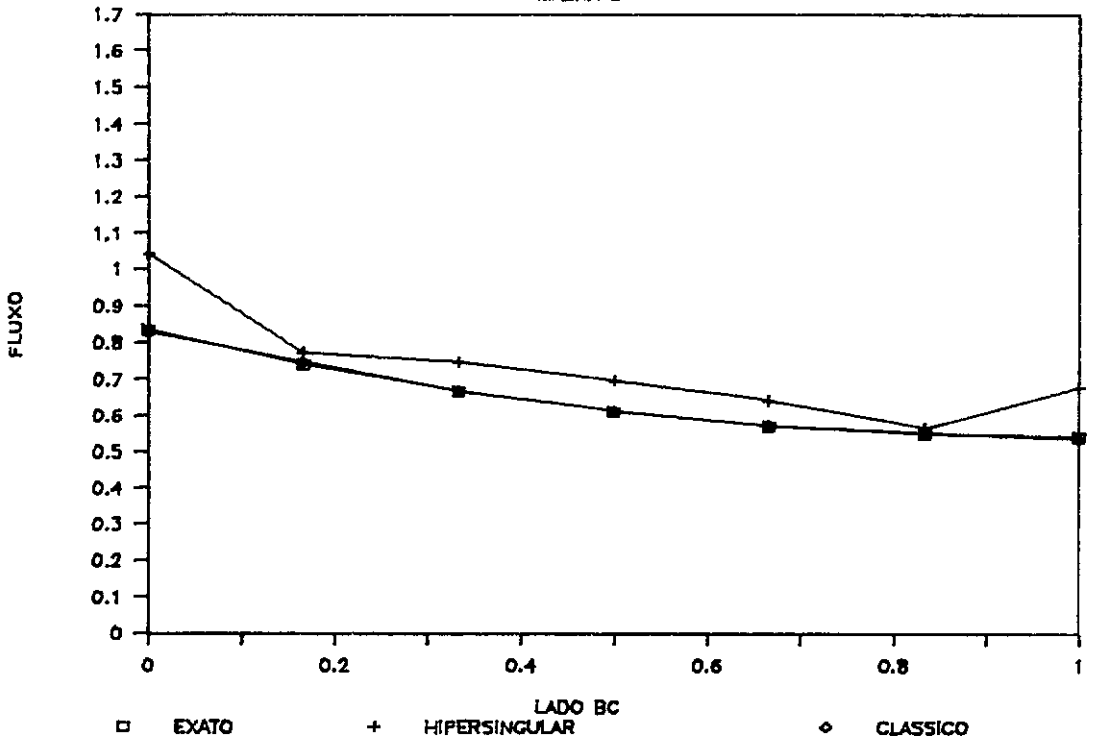
Malhas

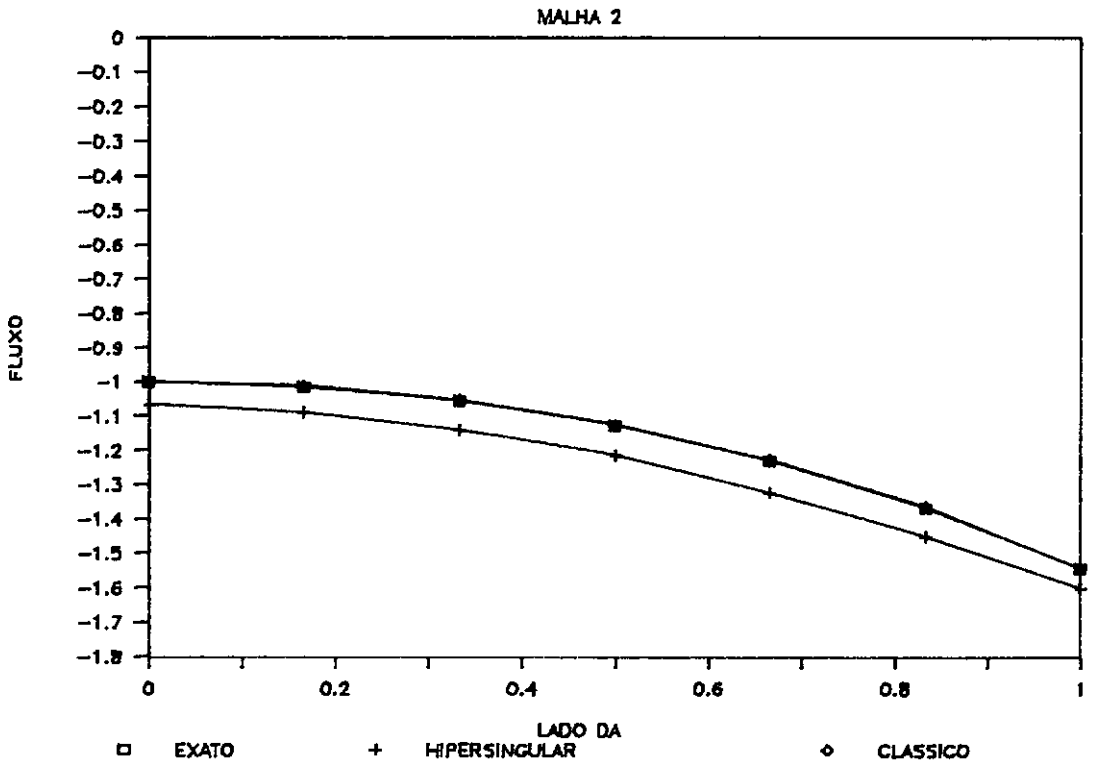
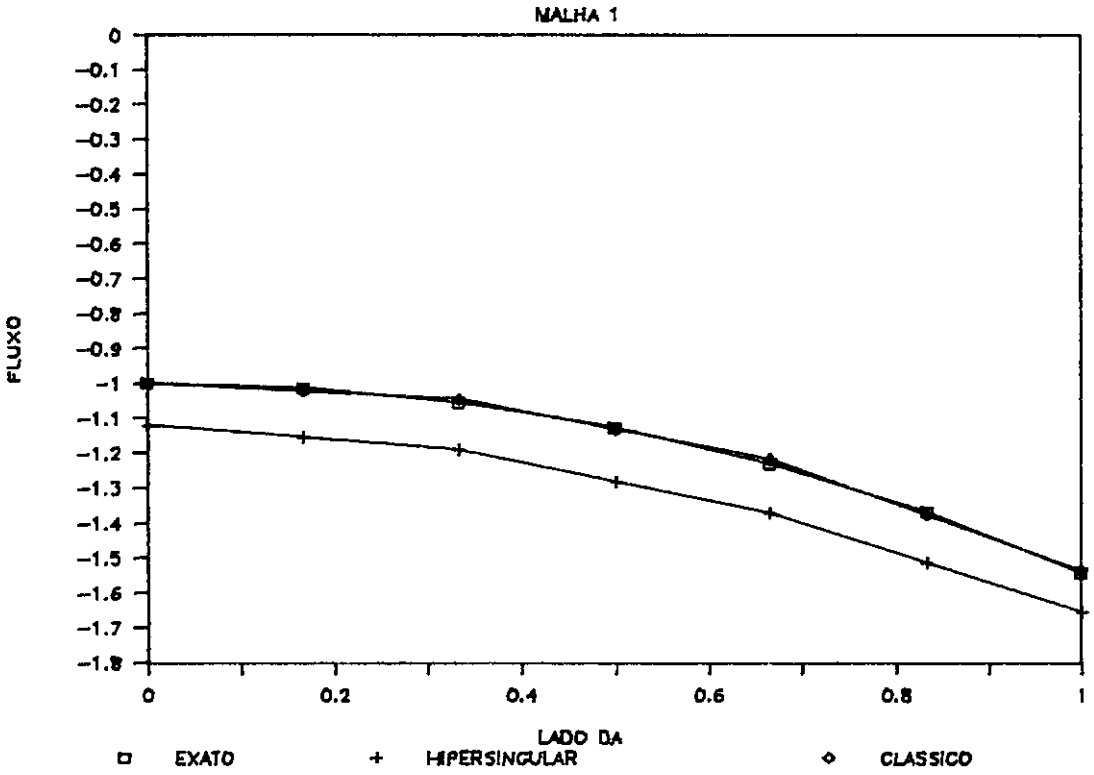
Os resultados para o potencial e o fluxo são mostrados nos gráficos a seguir.

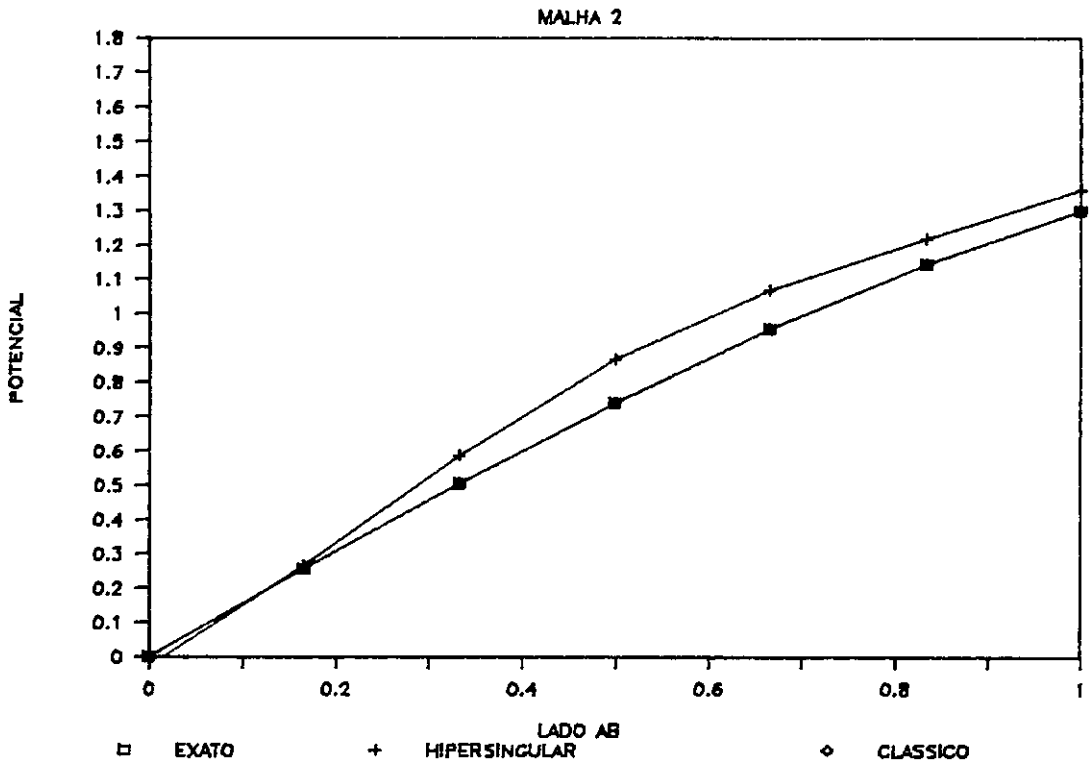
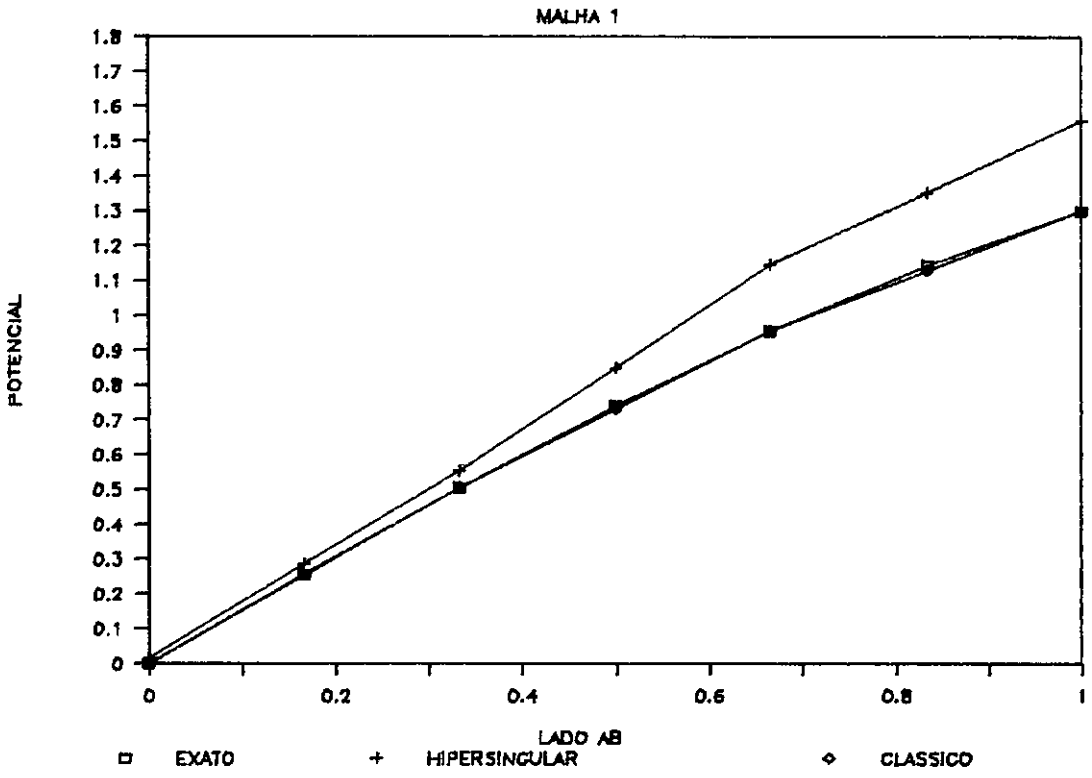
MALHA 1



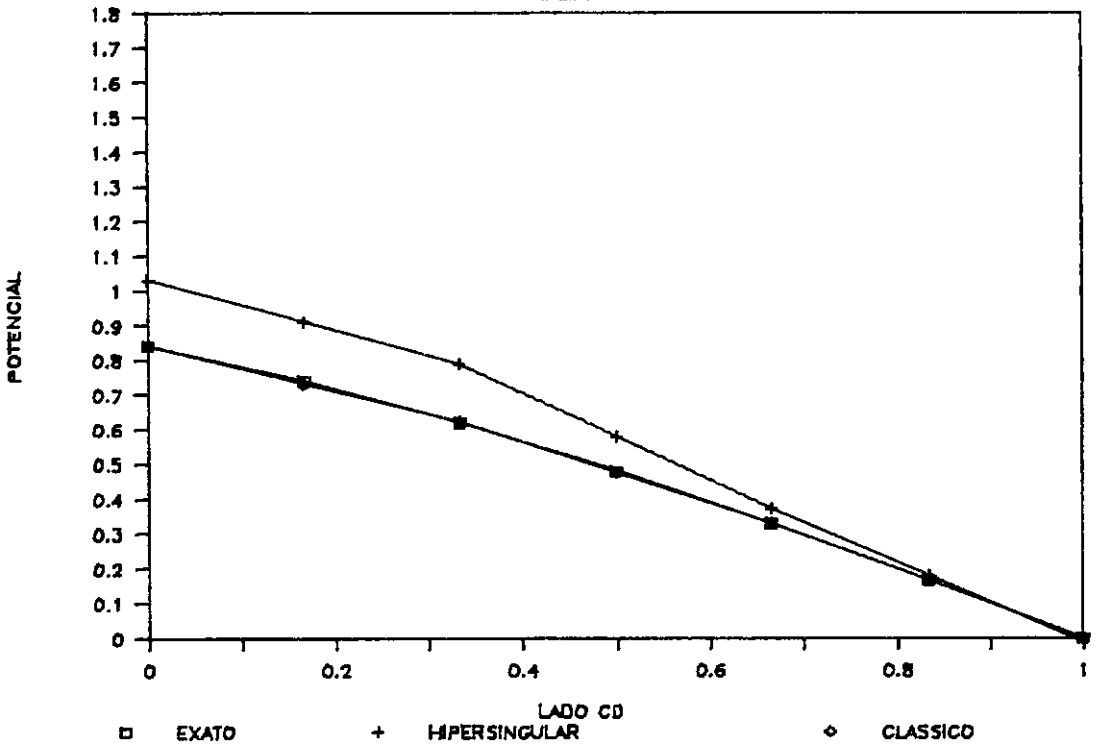
MALHA 2



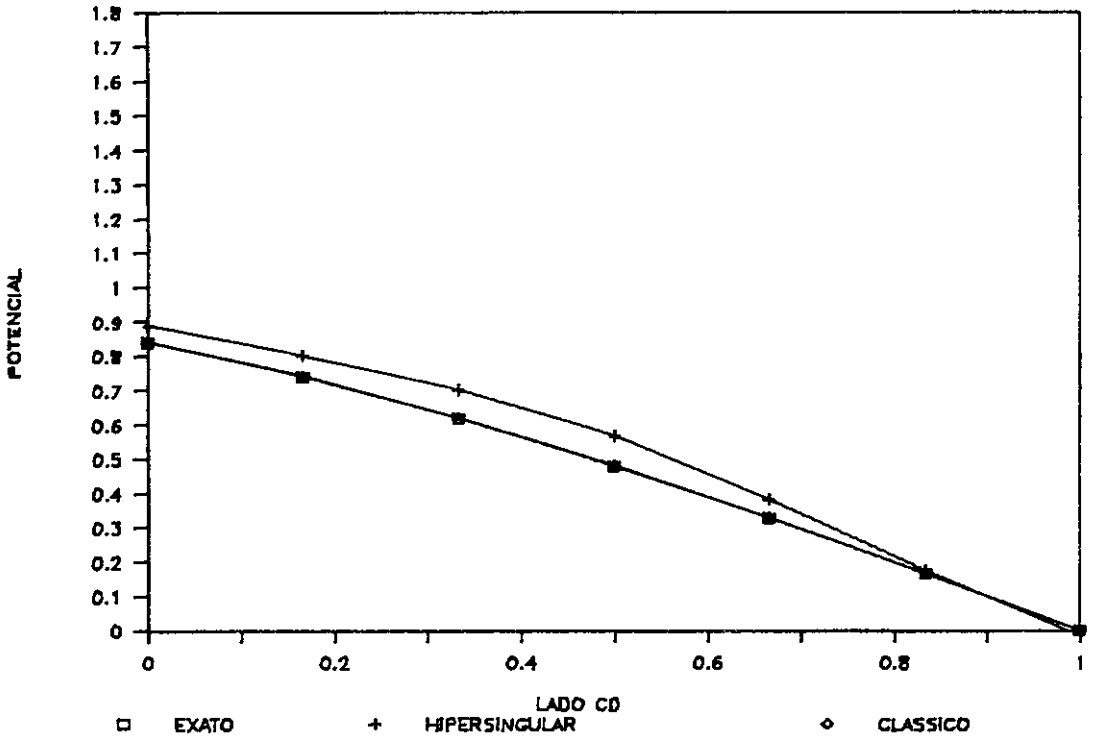




MALHA 1



MALHA 2



V.3 - EXEMPLO II

O domínio deste problema é um quadrado de lado igual a 6. A solução exata está representada na figura abaixo e é dada por

$$u(x, y) = \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{\pi y}{6} \right)}{\operatorname{senh} (\pi)} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{6} \right) + 1$$

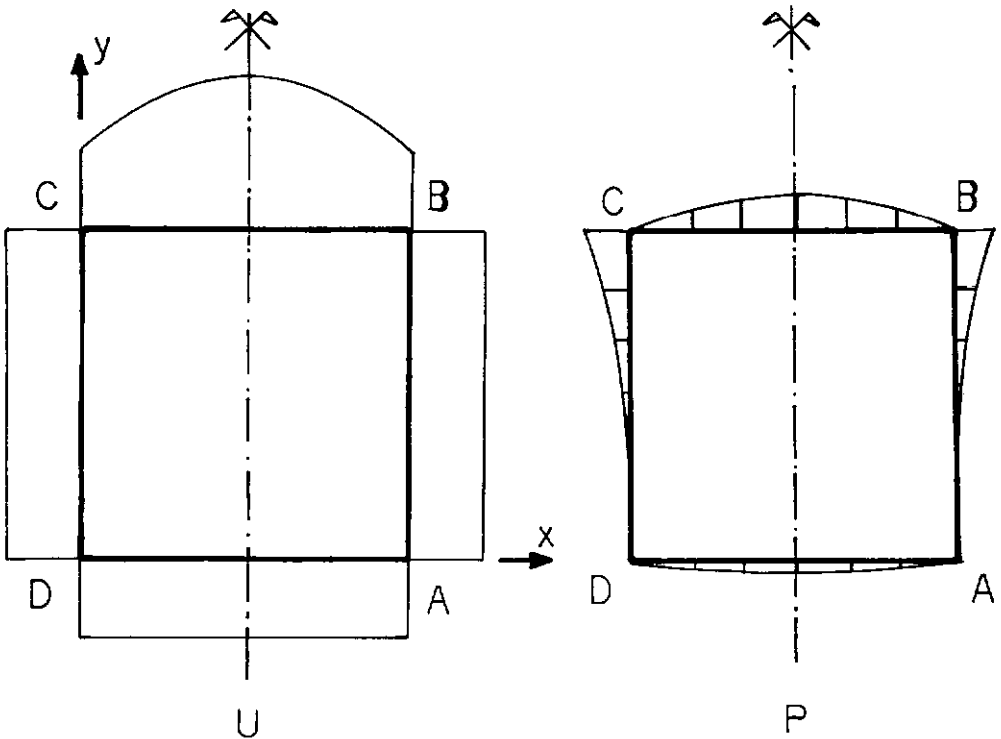


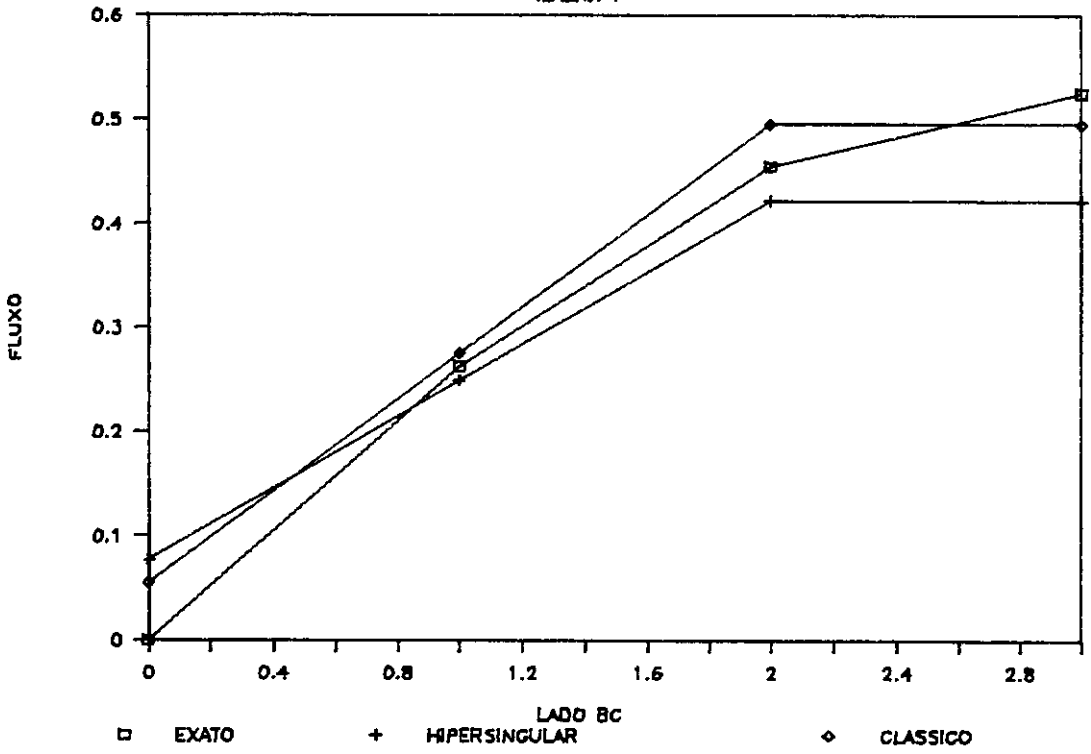
Figura V.3

Solução exata

A discretização é semelhante a adotada no exemplo anterior. Este exemplo foi resolvido para duas combinações diferentes de condições de contorno: na primeira, prescreveu-se potencial nos lados BC e DA e fluxo nos lados AB e CD, na segunda, fez-se o contrário. Os resultados para estas combinações são dados pelos gráficos a seguir.

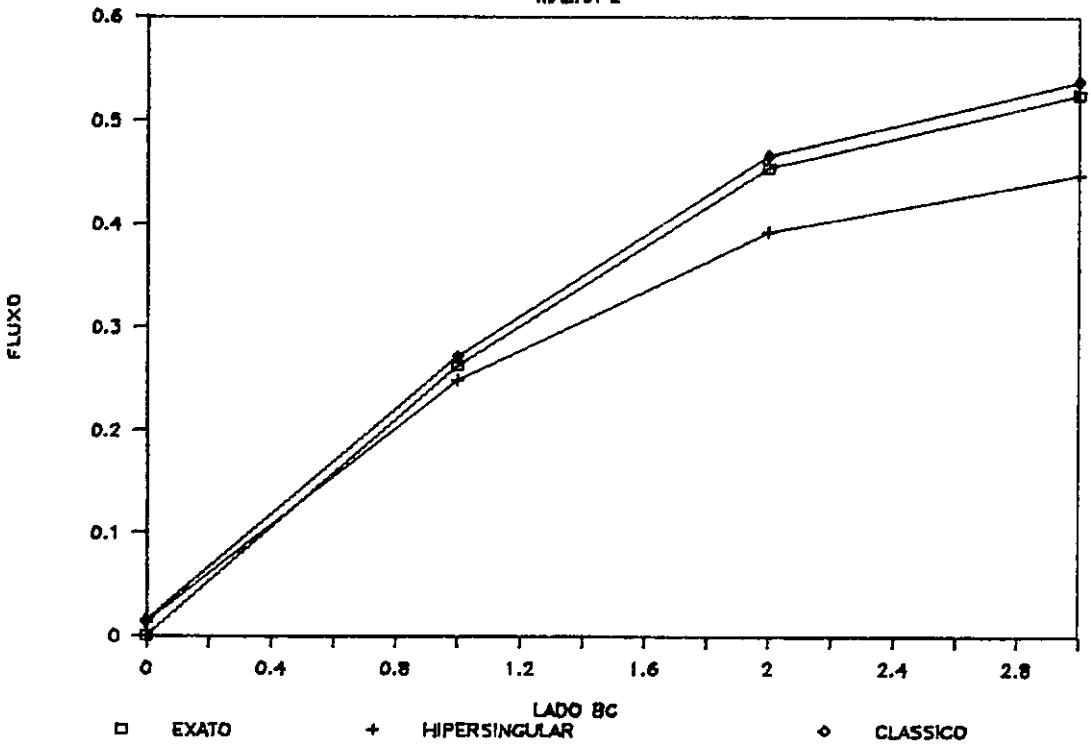
PRIMEIRA C. C.

MALHA 1



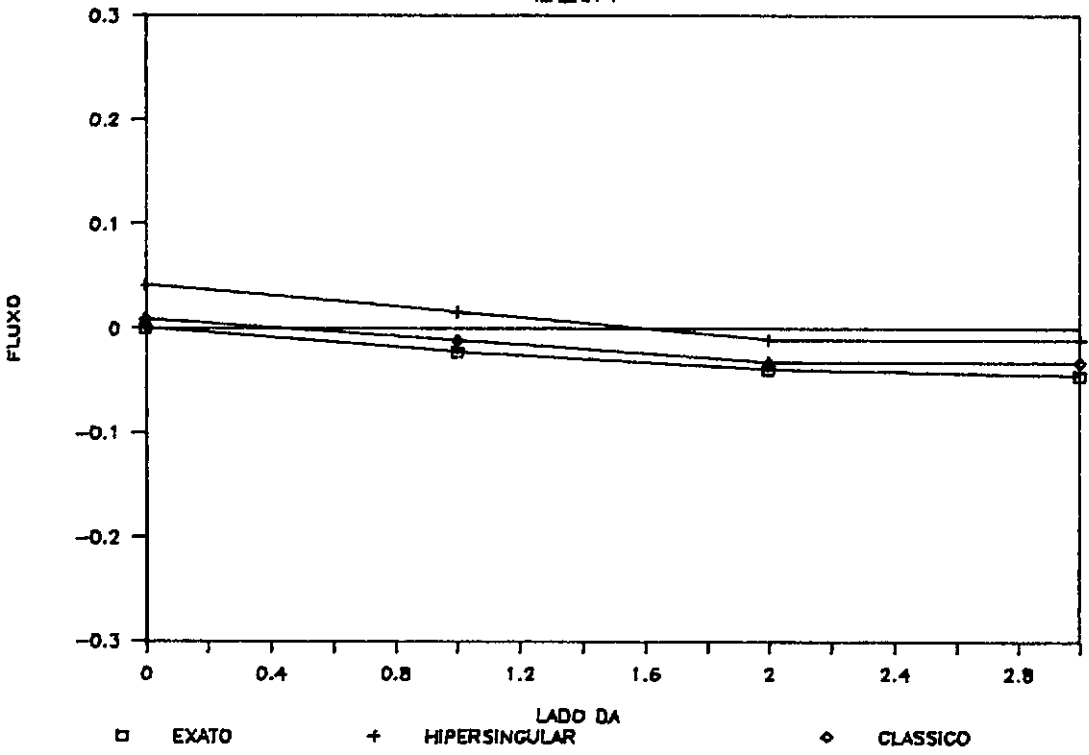
PRIMEIRA C. C.

MALHA 2



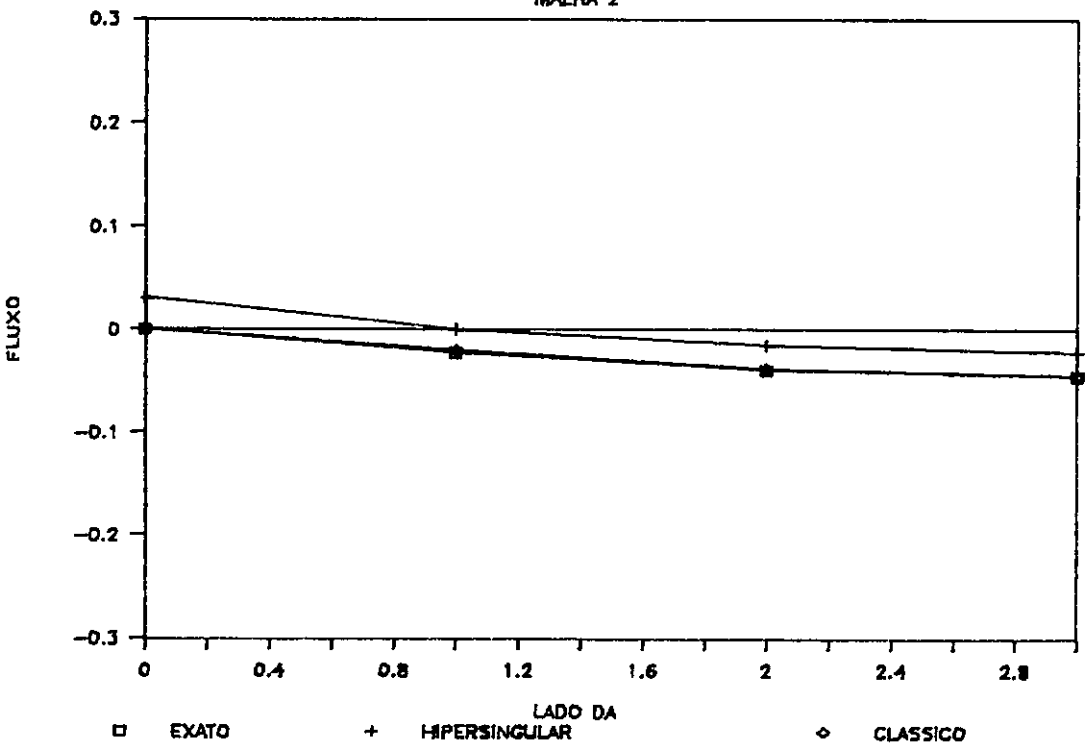
PRIMEIRA C. C.

MALHA 1



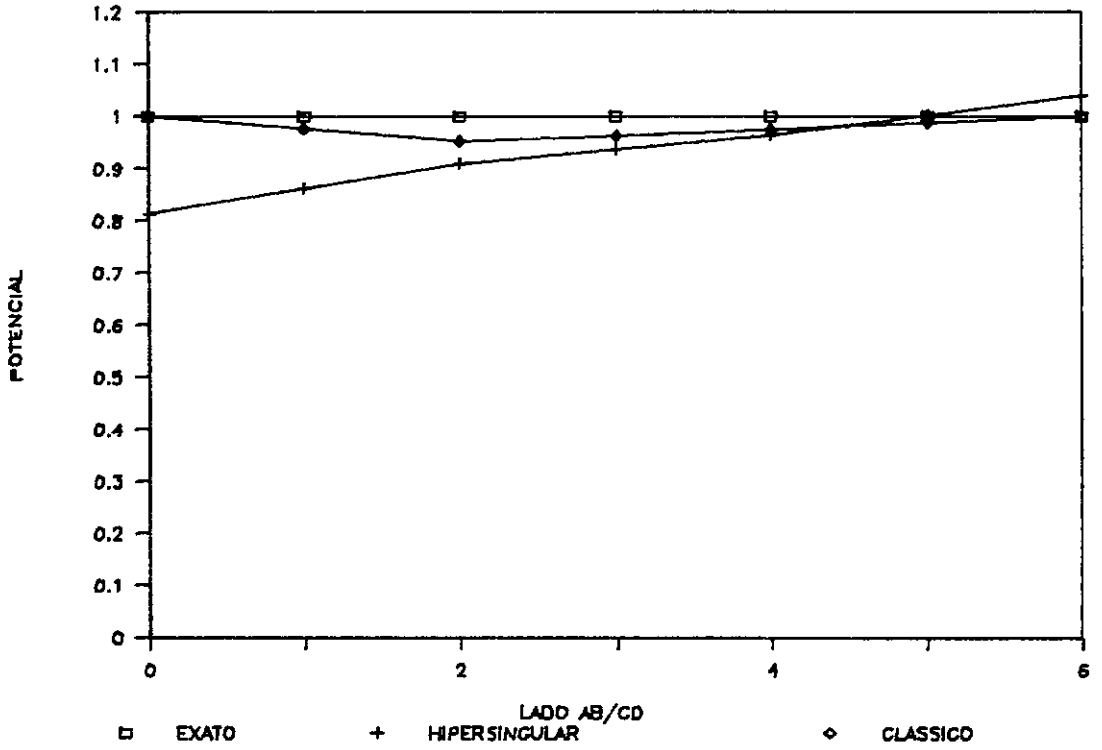
PRIMEIRA C. C.

MALHA 2



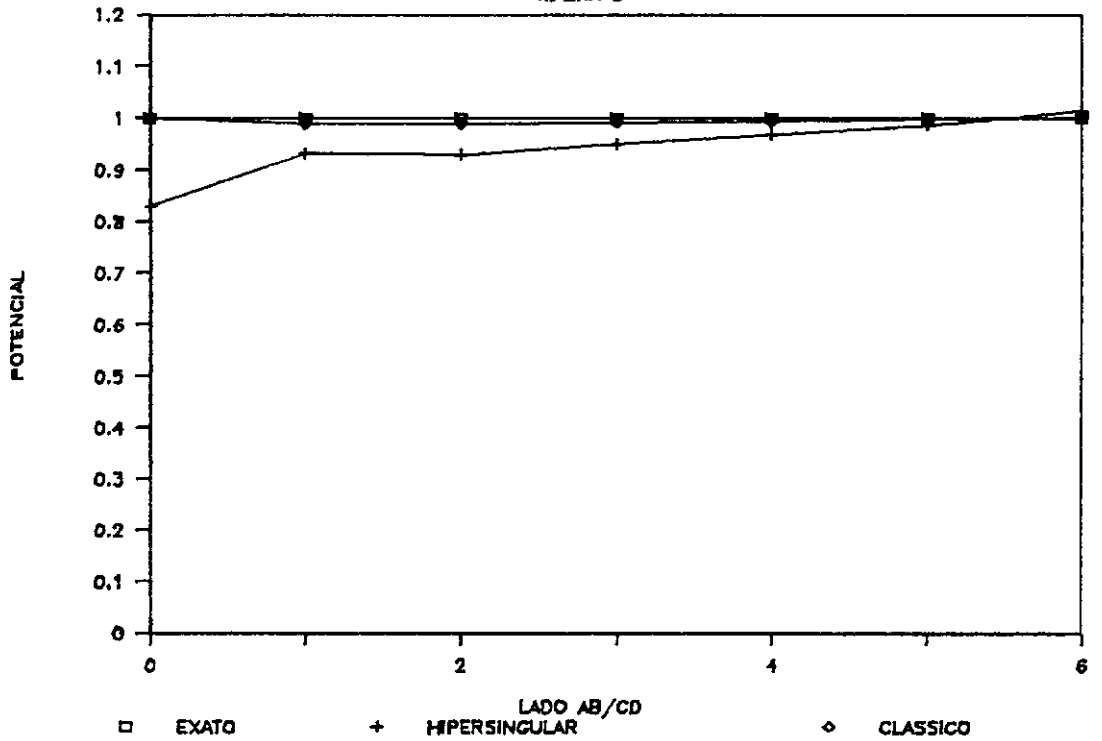
PRIMEIRA C. C.

MALHA 1



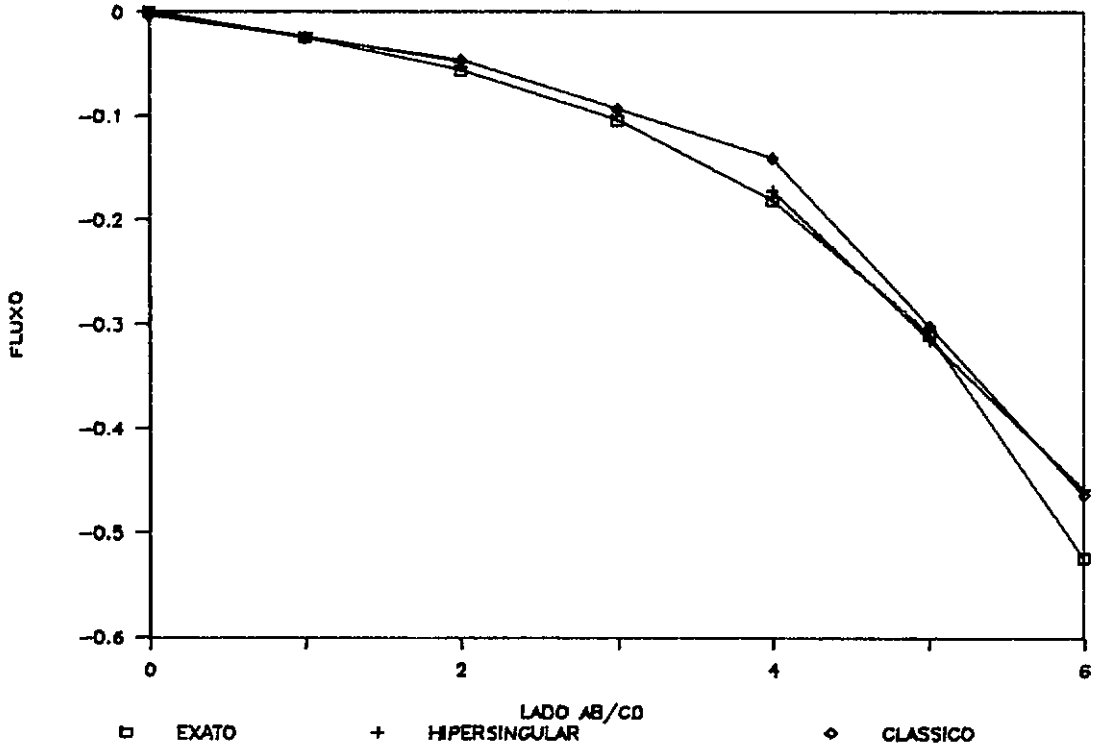
PRIMEIRA C. C.

MALHA 2



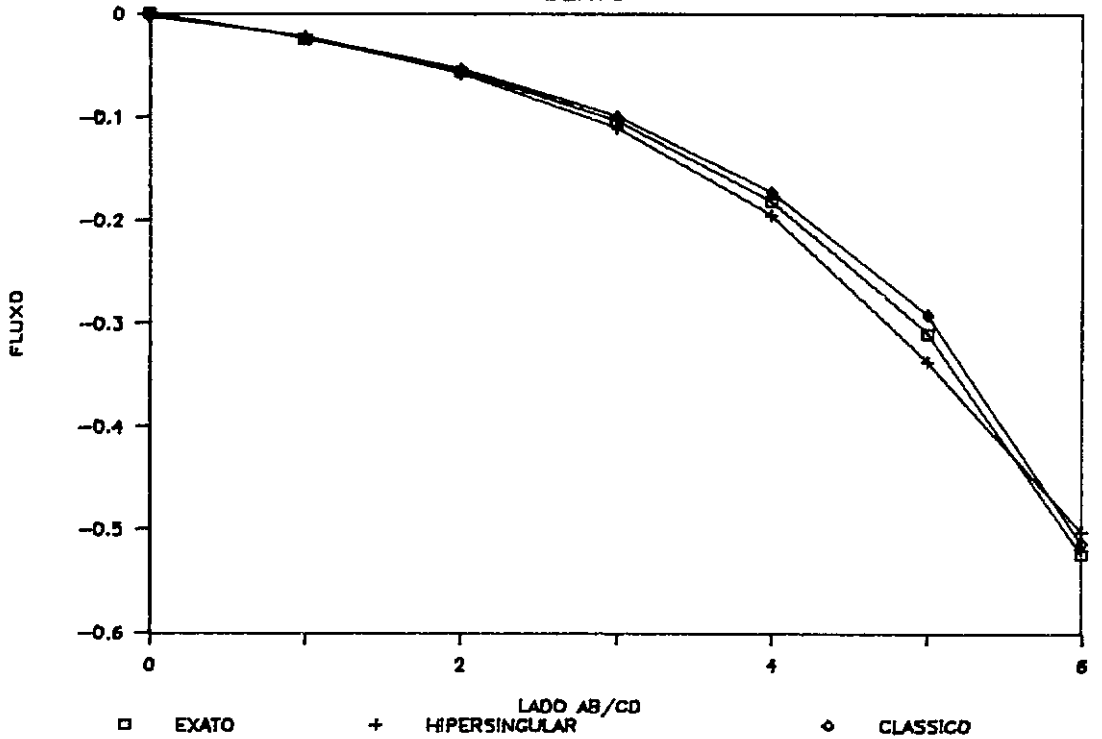
SEGUNDA C. C.

MALHA 1



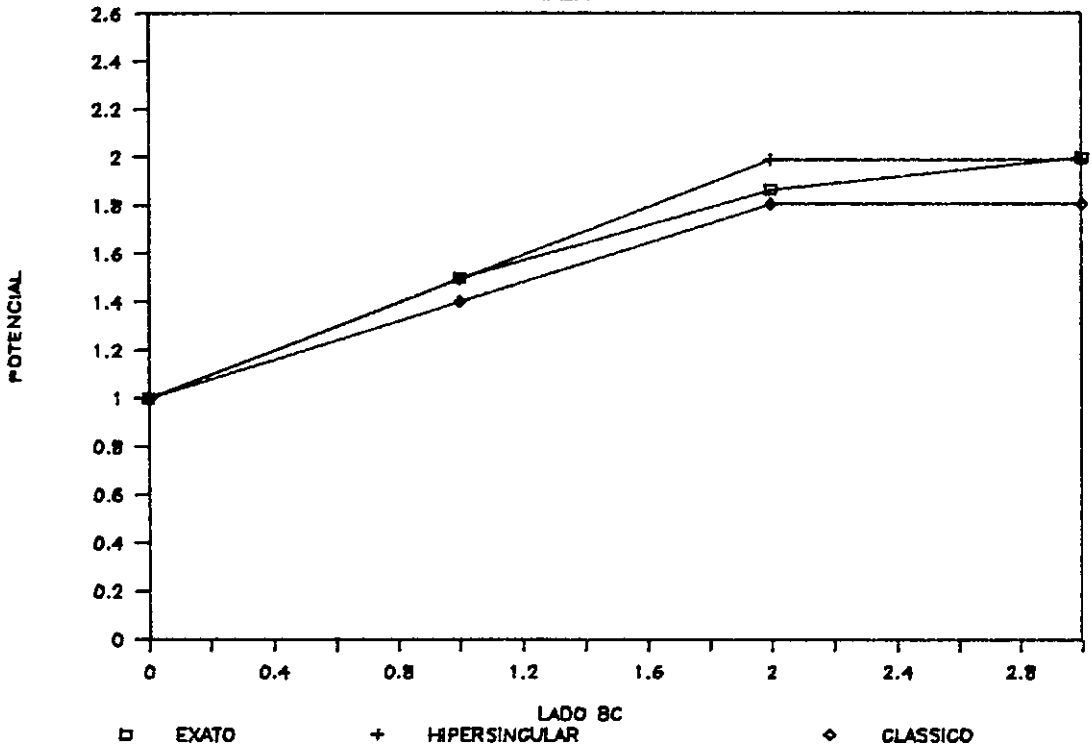
SEGUNDA C. C.

MALHA 2



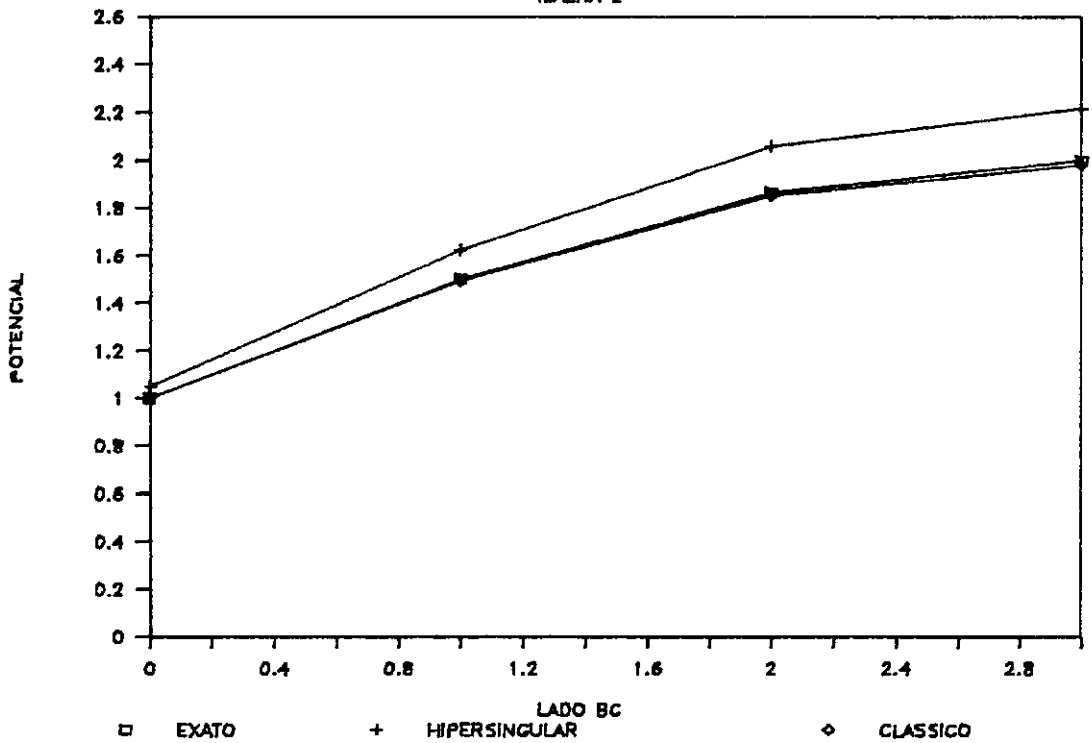
SEGUNDA C. C.

MALHA 1



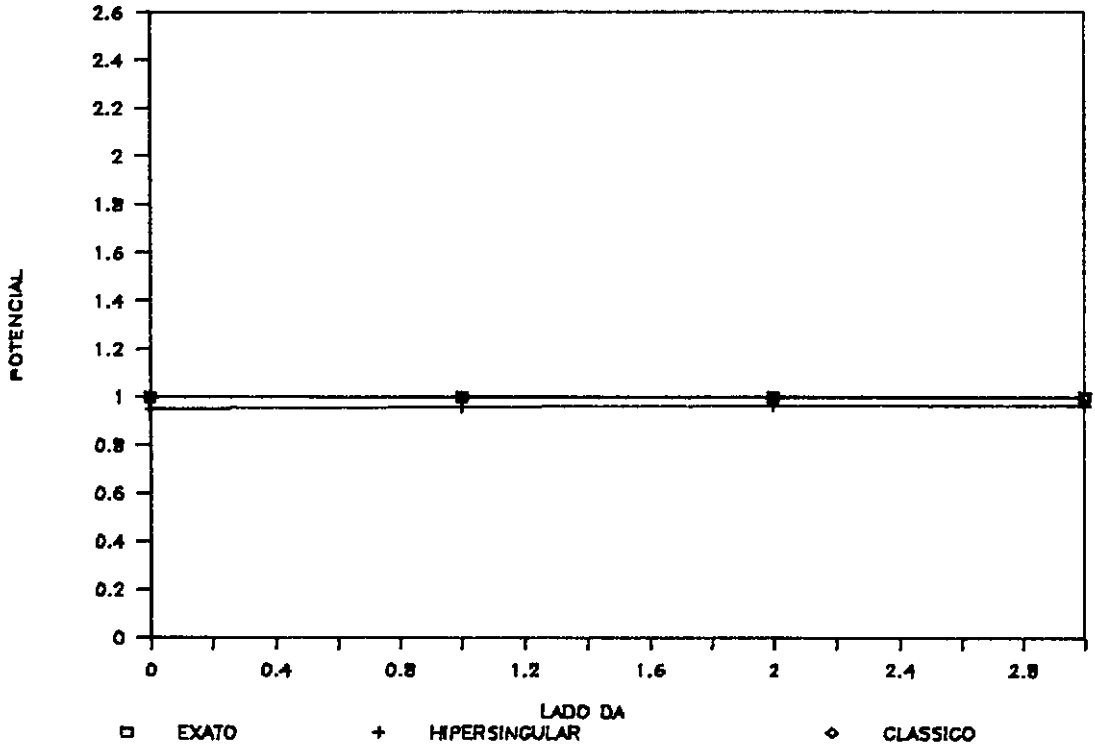
SEGUNDA C. C.

MALHA 2



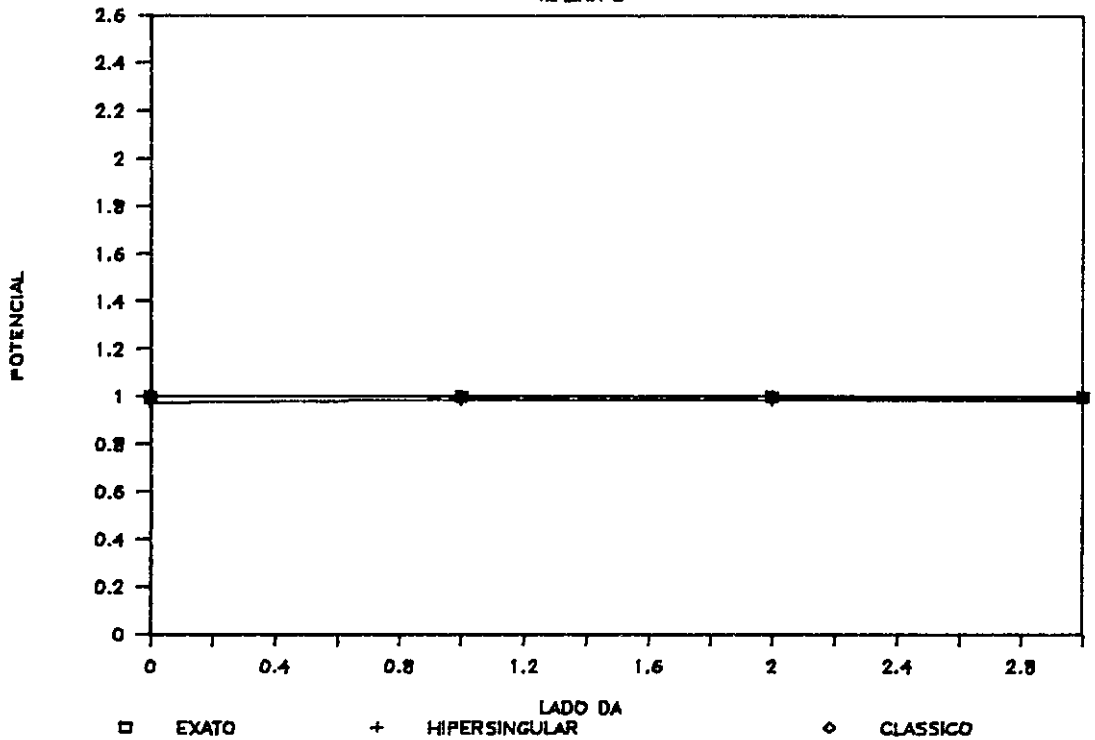
SEGUNDA C. C.

MALHA 1



SEGUNDA C. C.

MALHA 2



V.4 - EXEMPLO III

A geometria deste exemplo é dada por uma região em forma de L, como mostrado na figura V.4. As condições de contorno, também indicadas na figura, são consistentes com a solução analítica dada pela equação

$$u(r, \theta) = r^{2/3} \text{sen}(2\theta/3) \quad (V.2)$$

onde r e θ são as coordenadas polares.

Este problema possui simetria em relação ao eixo que passa por AD.

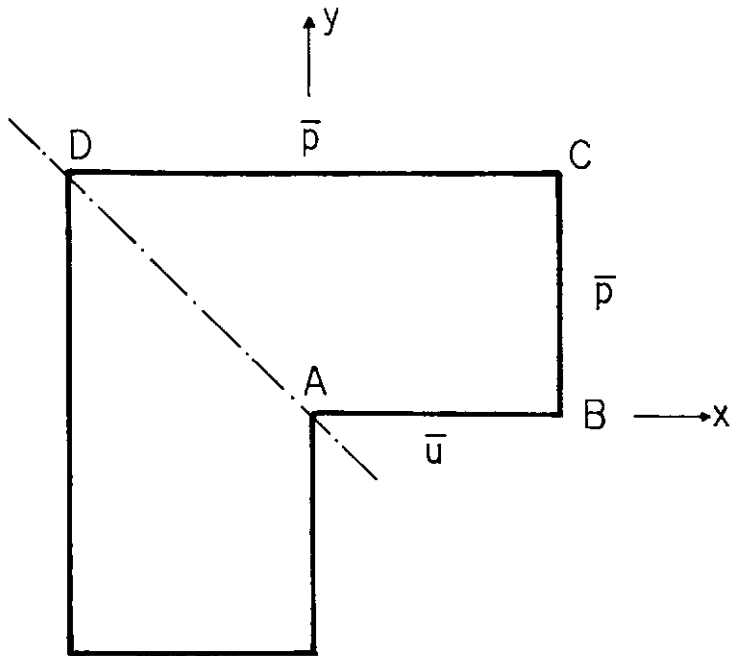


Figura V.4

Geometria e condições de contorno

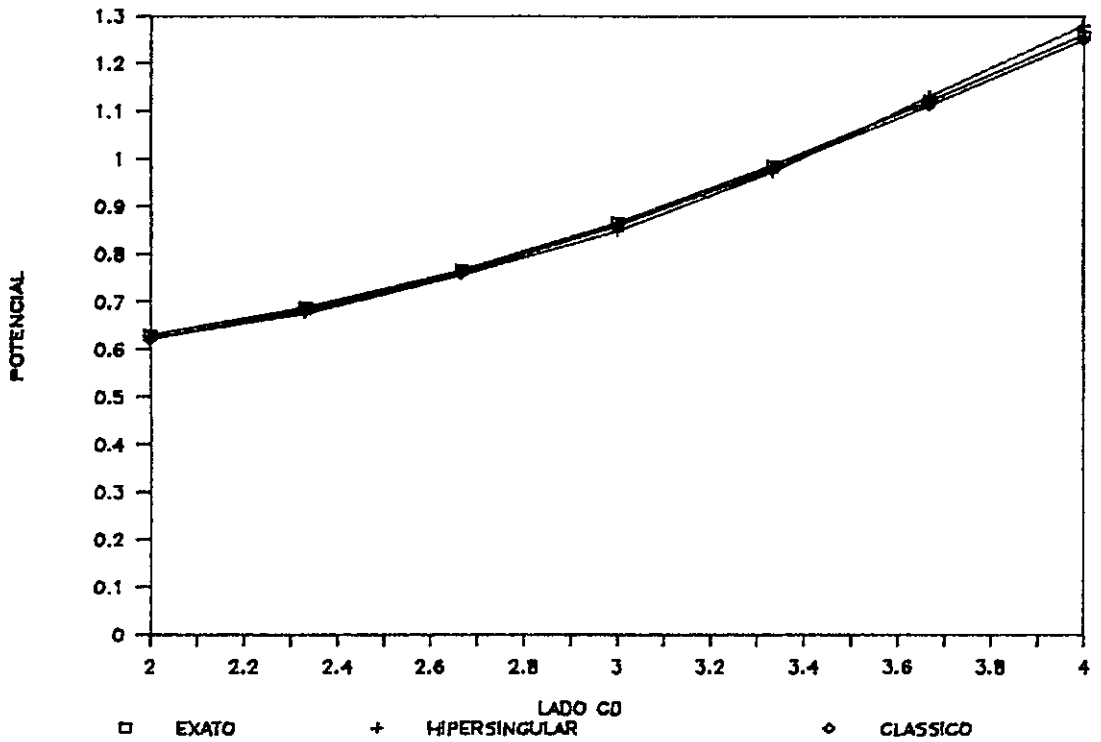
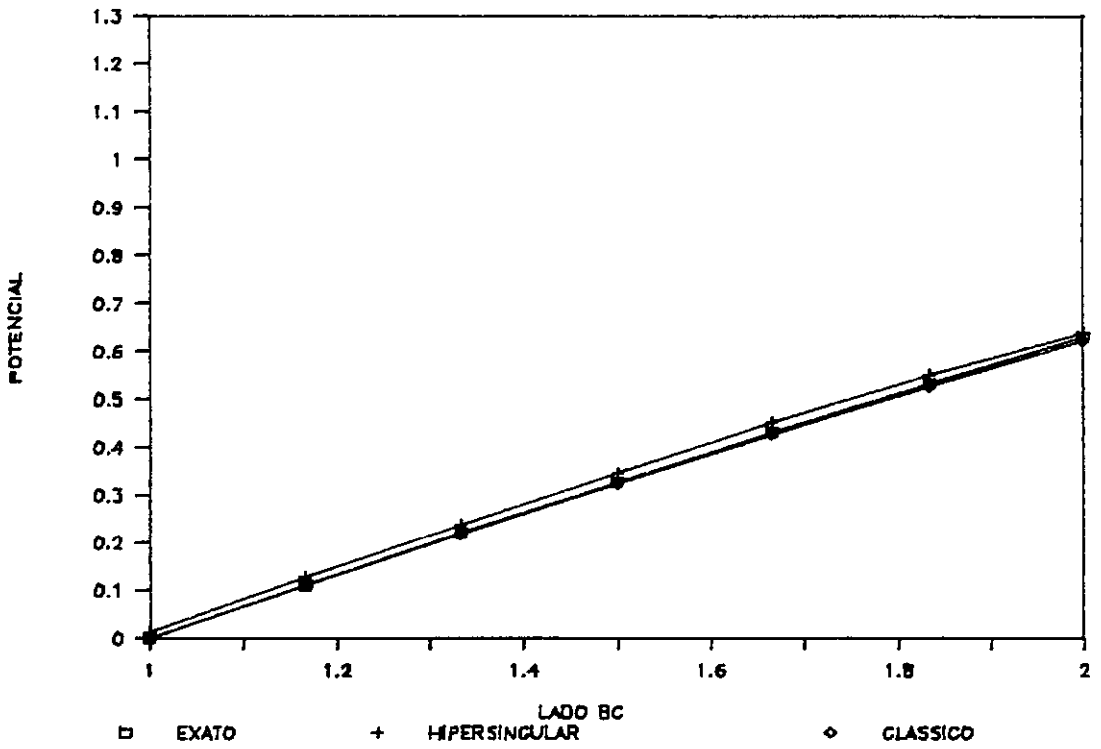
Inicialmente discretizou-se cada um dos lados em 6 elementos. Nos lados onde o fluxo é precrito (BC e CD), os elementos tem o mesmo comprimento; e onde o potencial que é precrito (AB), os nós foram colocados mais próximos da origem, por causa da singularidade que existe neste ponto.

A comparação dos valores do potencial nos lados BC e CD pode ser vista nos gráficos a seguir.

Os valores do fluxo no lado AB são dados na tabela I. Também são apresentados valores para uma segunda malha, obtida do refinamento da primeira com a colocação de mais 3 nós na região próxima a singularidade

X	EXATO	MALHA 1		MALHA 2	
		M.E.C.H.	M.E.C.C.	M.E.C.H.	M.E.C.C.
.0051	-3.8730			-3.6343	-2.7905
.0154	-2.6796			-2.6318	-2.6915
.0325	-2.0890	-1.9985	-1.4453	-2.0628	-2.0233
.0515	-1.7919			-1.7695	-1.7672
.0727	-1.5980	-1.5885	-1.5974	-1.5770	-1.5632
.1452	-1.2684	-1.2748	-1.2225	-1.2483	-1.2355
.2904	-1.0067	-1.0152	-.9802	-.9868	-.9808
.5808	-.7990	-.8113	-.7806	-.7792	-.7814
1.0	-.6666	-.6694	-.6422	-.6530	-.6426

Tabela I



V.5 - EXEMPLO IV

Trata-se de um semicírculo com os valores exatos dados na figura V.6.

Foi prescrito o potencial ao longo do eixo x e o fluxo no contorno circular. Na origem há uma descontinuidade de potencial, e como no M.E.C.C. não se pode prescrever o potencial em nós com as mesmas coordenadas, usou-se nesta região uma discretização do seguinte tipo (o que não é necessário para o M.E.C.H.)

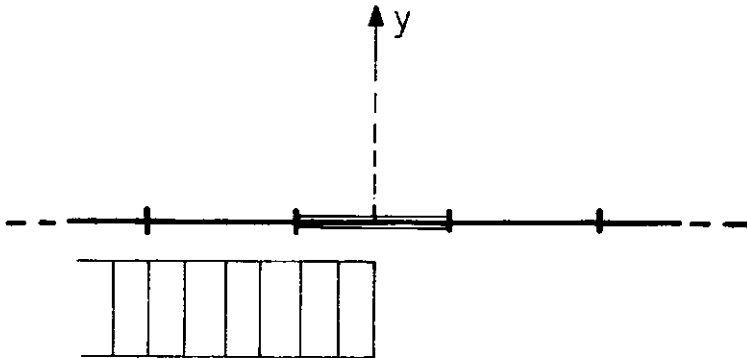


Figura V.5

Discretização adotada para o M.E.C.C. próximo a origem

Foram feitas duas análises, e em ambas o contorno circular foi discretizado em 8 elementos iguais. As coordenadas dos nós no elemento reto, juntamente com os valores do fluxo, são mostrados nas tabelas II e III.

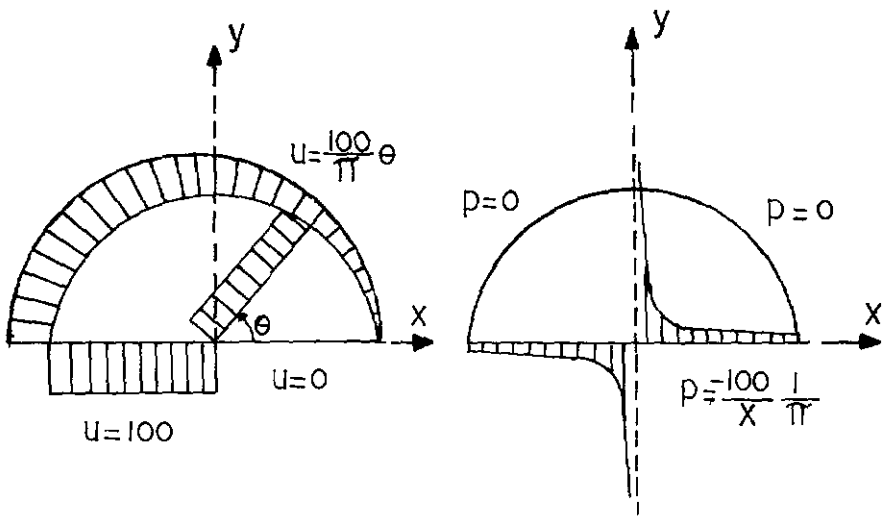


Figura V.6
Valores exatos

		MALHA 1	
X	EXATO	M.E.C.H.	M.E.C.C.
1.	-31.80	-31.83	-47.53
3.	-10.60	-10.61	-6.13
6.	-5.30	-5.30	-5.54
10.	-3.18	-3.18	-2.94
20.	-1.59	-1.59	-1.54
30.	-1.06	-.82	-.89

Tabela II

		MALHA 2	
X	EXATO	M.E.C.H.	M.E.C.C.
.09	-353.68	-353.68	-602.06
.17	-187.24	-187.24	-153.76
.45	-70.70	-70.74	-66.54
.8	-39.08	-39.79	-36.97
1.8	-17.70	-17.68	-15.88
4.0	-7.96	-7.96	-7.13
10.0	-3.18	-3.18	-2.84
20.0	-1.59	-1.58	-1.55
30.0	-1.06	-.82	-.88

Tabela III

V.6 - EXEMPLO V

Trata-se de um problema de elastostática, com a geometria, condições de contorno e a malha indicadas na figura abaixo

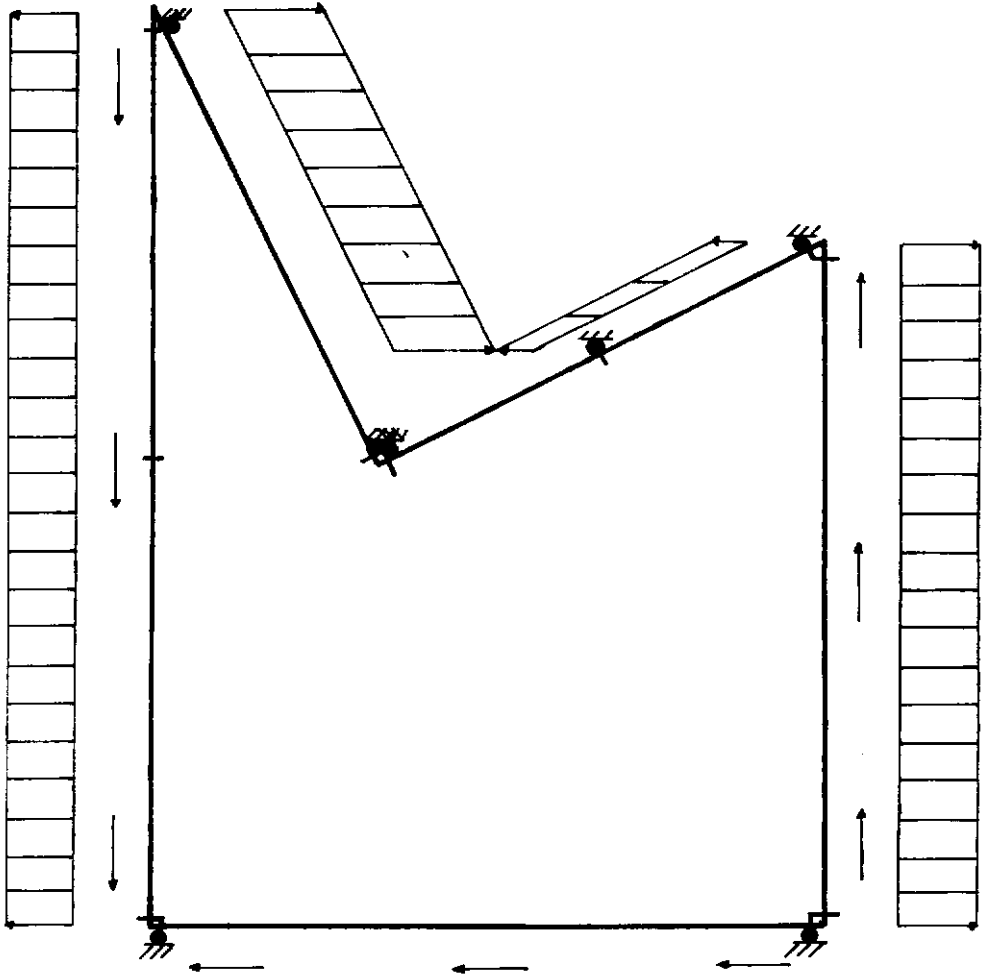


Figura V.7

Geometria, C.C. e malha

Neste exemplo, u e p variam linearmente, o que permite constatar a viabilidade do M.E.C.H. para problemas de elastostática. Os resultados estão na saída do programa a seguir.

 SOLUCAO DE PROBLEMAS DE ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL
 PELO METODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
 FORMULACAO HIPER-SINGULAR

EXEMPLO V

#####

§ ESTADO PLANO DE TENSAO

-MODULO DE ELASTICIDADE E = 5.
 -COEFICIENTE DE POISSON PO= .30000

§ PROBLEMA COM CONTORNO FINITO

PROBLEMA SEM SIMETRIA

-NUMERO DE ELEMENTOS= 7
 -NUMERO DE NOS= 12
 -NUMERO DE PONTOS INTERNOS = 0

COORDENADAS DOS NOS DO CONTORNO

NO	X	Y	P.ELE	COL	DUPLO
1	3.0000	1.0000	1	1	2
2	3.0000	1.0000	2	2	1
3	2.0000	.5000	3	0	-
4	1.0000	.0000	3	1	5
5	1.0000	.0000	4	2	4
6	.0000	2.0000	4	1	7
7	.0000	2.0000	5	2	6
8	.0000	.0000	6	0	-
9	.0000	-2.0000	6	1	10
10	.0000	-2.0000	7	2	9
11	3.0000	-2.0000	7	1	12
12	3.0000	-2.0000	1	2	11

CONETIVIDADE DOS ELEMENTOS

ELEM	NO INIC	NO FINAL	COMPRIMENTO
1	12	1	3.0000
2	2	3	1.1180
3	3	4	1.1180
4	5	6	2.2361
5	7	8	2.0000
6	8	9	2.0000
7	10	11	3.0000

* NUMERO DE DESLOCAMENTOS PRESCRITOS= 10
 * NUMERO DE FORCAS DE SUPERFICIES PRESCRITAS = 11

DESLOCAMENTOS PRESCRITOS

NO	U	V
1		.0000
2		.0000
3		.0000
4		.0000
5		.0000
6		.0000
7		.0000
10	.0000	.0000
11		.0000
12		.0000

FORCAS DE SUPERFICIE PRESCRITAS

NO	U	V
1	2.0000	.0000
2	.8944	.0000
3	.8944	.0000
4	.8944	.0000
5	2.6833	.0000
6	2.6833	.0000
7	-2.0000	.0000
8	-2.0000	-2.0000
9	-2.0000	-2.0000
11	-2.0000	.0000
12	2.0000	.0000

 R E S U L T A D O S
 #####

DESLOCAMENTOS NO CONTORNO E FORCAS DE SUPERFICIE

NO	U	V	PX	PY
1	4.2120	.0000	2.0000	2.0000
2	4.2120	.0000	.8944	-.3578
3	3.3280	.0000	.8944	-.3578
4	2.4440	.0000	.8944	-.3578
5	2.4440	.0000	2.6833	2.0572
6	4.1600	.0000	2.6833	2.0572
7	4.1600	.0000	-2.0000	-2.0000
8	2.0800	.0000	-2.0000	-2.0000
9	.0000	.0000	-2.0000	-2.0000
10	.0000	.0000	-2.0000	-.6000
11	1.0920	.0000	-2.0000	-.6000
12	1.0920	.0000	2.0000	2.0000

TENSOES NOS NOS E PONTOS INTERNOS

NO/PT	SX	SXY	SY	SZ
1	2.0000	2.0000	.6000	.0000
2	2.0000	2.0000	.6000	.0000
3	2.0000	2.0000	.6000	.0000
4	2.0000	2.0000	.6000	.0000
5	2.0000	2.0000	.6000	.0000
6	2.0000	2.0000	.6000	.0000
7	2.0000	2.0000	.6000	.0000
8	2.0000	2.0000	.6000	.0000
9	2.0000	2.0000	.6000	.0000
10	2.0000	2.0000	.6000	.0000
11	2.0000	2.0000	.6000	.0000
12	2.0000	2.0000	.6000	.0000

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Foi constatado que a formulação apresentada nesta tese se mostrou viável como técnica numérica para a resolução de problemas bidimensionais de potencial e elastostática.

Verificou-se que em regiões onde não há variações acentuadas nas variáveis físicas (potencial e fluxo), como pode ser visto nos exemplos I e II, o M.E.C.C. apresentou resultados mais precisos.

Já nos exemplos III e IV, o M.E.C.H. se mostrou melhor. Então o objetivo fundamental desta tese foi alcançado: uma formulação que dê melhores resultados que a formulação clássica, em regiões próximas a singularidades.

O M.E.C.H. aceita que se prescreva iguais condições de contorno em nós duplos. Por isso ele é capaz de modelar adequadamente problemas com variáveis essenciais descontínuas, o que não é possível no M.E.C.C..

No M.E.C.H. aqui apresentado, os nós podem estar em qualquer tipo de contorno, suave ou não, assim como em pontos onde as variáveis naturais são descontínuas; o que não é possível com formulações até então conhecidas.

O exemplo V mostrou a viabilidade do M.E.C.H. para problemas de elastostática, ficando a sua análise para problemas mais complexos como sugestão para futuras investigações.

Outra sugestão é o desenvolvimento de uma formulação mista (M.E.C.H. e M.E.C.C.).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] JASWON, M.A., Integral equation methods in potencial theory - I, *Proc. Roy. Soc.*, 273(A), 23-32 (1963)
- [2] SYMM, G.T., Integral equations methods in potencial theory, *Proc. Roy. Soc.*, 275(A), 33-46 (1963)
- [3] KUPDRAZE, V.D., *Potential Methods in Theory of Elasticity*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem (1963)
- [4] RIZZO, F.J., An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics, *Quart. Appl. Math.*, 25, 83, (1967)
- [5] CRUSE, T.A., Mathematics foundations of the BIEM in Solid Mechanics, Report. AFOSR-TR-77-1002, Pratt & Whitney Aircraft Group. (1967)
- [6] CERROLAZA R., M., *Elementos de Contorno p-adaptables: Desarrollo y Aplicaciones en Teoria del Potencial y Elastostatica*, Tesis Doctoral, Madrid (1988)
- [7] INGBER, M.S. e MITRA, A.K., The evaluation of the normal derivative along the boundary in the

direct boundary element method, *Appl. Math. Modelling*, 13, 32-40 (1989)

- [8] OKADA, H., RAJIYAH, H. e ATLURI, S.N., A Novel Displacement-Gradiente Boudary Element Method for Elastic Stress Analysis with High Accuracy, *ASME Journal of Applied Mechanics*
- [9] INGBER, M.S. e RUDOLPHI, T.J., Solution of potencial problems using combinations of the regular and derivative boundary integral equations, *Appl. Math. Modelling*, 14, 536-543 (1990)
- [10] BREBIA, C.A., TELLES, J.C.F. e WROBEL, L.C., *Boundary Element Techniques: Theory and Applic. in Eng.*, Springer-Verlag, Berlim (1984)
- [11] TELLES, J.C.F., *The Boundary Elements Method Applied to Inelastic Problems*, Springer - Verlag, Berlim (1983)
- [12] KUTT, H.R., *On the numerical evaluation of finet-part integrals involving an algebraic singularity*, Special Report WISK 179, Pretoria, National Research Institute for Mathematical Sciences (1975)
- [13] KUTT, H.R., *Quadrature formulae for finite-part integrals*, Special Report WISK 178, Pretoria, National Research Institute for Mathematical

Sciences (1975)

- [14] BRANDÃO, M.P., Improper Integrals in Theoretical Aerodynamics: The Problem Revisited, *AIAA Journal*, 25, 9 (1987)

- [15] ERDOGAN, F. e KAYA A.C., On the solution of integral equations with strongly singular kernels, *Quartely of applied mathematics*, XLV, 1 (1987)

- [16] PARREIRA, P.G.S.V., *Analise do erro no método dos elementos de fronteira em elasticidade*, Tese de Doutorado, Universidade Técnica de Lisboa (1987)

APÊNDICE I

Neste apêndice é mostrado que com a utilização de integração por partes finitas, pode-se desprezar o potencial constante $u(\xi)$ no cálculo do valor principal da integral em (III.27).

Integrais por partes finitas são uma consistente extensão do conceito de integrais regulares, isto é, uma integral regular (ou no sentido de valor principal) é também uma integral por partes finitas [12], portanto

$$\begin{aligned} I_{2A} - I_{1A} &= \int_{\Gamma} [U^*(\xi, x) p(x) - P^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)]] d\Gamma(x) \\ &= \int_{\Gamma} [U^*(\xi, x) p(x) - P^*(\xi, x) [u(x) - u(\xi)]] d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (A1.1)$$

que pode ser desmembrada da seguinte forma

$$\int_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) + u(\xi) \int_{\Gamma} P^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (A1.2)$$

Por equilíbrio tem-se que

$$\int_{\Gamma} p^*(\xi, x) d\Gamma(x) = - \int_{\Omega} \delta(\xi, x) d\Omega(x) \quad (A1.3)$$

$$\oint_{\Gamma} p^*(\xi, x) d\Gamma(x) = - \oint_{\Omega} \delta(\xi, x) d\Omega(x) \quad (A1.4)$$

Derivando ambos os lados da equação acima em relação a direção da normal exterior em ξ , tem-se

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial p^*(\xi, x)}{\partial m} d\Gamma(x) = - \oint_{\Omega} \frac{\partial \delta(\xi, x)}{\partial m} d\Omega(x) \quad (A1.5)$$

A derivada da função delta de Dirac tem a seguinte propriedade

$$\int_{\Omega} f(x) \delta'(\xi, x) d\Omega(x) = - f'(\xi) \quad (A1.6)$$

Então (A1.5) resulta em

$$\oint_{\Gamma} p^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \frac{\partial(1)}{\partial m} = 0 \quad (A1.7)$$

Portanto a integral I1A se resumirá a

$$\oint_{\Gamma} U^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \oint_{\Gamma} P^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \quad (A1.8)$$

APÊNDICE II

Neste apêndice é mostrado que com a utilização de integração por partes finitas, pode-se desprezar o deslocamento devido a translação de corpo rígido $u_j(\xi)$, no cálculo do valor principal da integral em (IV.27).

Aplicando a propriedade de integração por partes finitas apresentada no apêndice anterior, tem-se

$$IA = I1A - I2A$$

$$IA = \int_{\Gamma} [U_{1,j}^*(\xi, x) p_j(x) - P_{1,j}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi) - u_j^R(\xi, x)]] d\Gamma(x) \quad (A2.1)$$

$$IA = \int_{\Gamma} [U_{1,j}^*(\xi, x) p_j(x) - P_{1,j}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j(\xi) - u_j^R(\xi, x)]] d\Gamma(x) \quad (A2.2)$$

A integral acima pode ser desmembrada da seguinte forma

$$IA = IAa - IAb$$

$$IAa = \int_{\Gamma} U_{1,j}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} P_{1,j}^*(\xi, x) [u_j(x) - u_j^R(\xi, x)] d\Gamma(x) \quad (A2.3)$$

$$IAb = u_j(\xi) \int_{\Gamma} P_{1,j}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (A2.4)$$

A integral IAb é semelhante a integral

(A1.7).

Por equilíbrio tem-se que

$$\int_{\Gamma} p_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \delta(\xi, \mathbf{x}) \delta_{1j} \, d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.5})$$

$$\oint_{\Gamma} p_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) = - \oint_{\Omega} \delta(\xi, \mathbf{x}) \delta_{1j} \, d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.6})$$

Derivando ambos os lados da equação acima em relação a direção da normal exterior em ξ , tem-se

$$\oint_{\Gamma} \frac{\partial p_{1j}^*(\xi, \mathbf{x})}{\partial m} \, d\Gamma(\mathbf{x}) = - \oint_{\Omega} \frac{\partial \delta(\xi, \mathbf{x})}{\partial m} \delta_{1j} \, d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.7})$$

$$\oint_{\Gamma} P_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) = \frac{\partial \delta_{1j}}{\partial m} = 0 \quad (\text{A2.8})$$

Portanto a integral IA se resumirá a

$$IA = \int_{\Gamma} U_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}) \, d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} P_{1j}^*(\xi, \mathbf{x}) [u_j(\mathbf{x}) - u_j^R(\xi, \mathbf{x})] \, d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{A2.9})$$