

CONSIDERAÇÃO DE GEOMETRIA CURVA NA ANÁLISE
P_ADAPTATIVA DO MEC PARA POTENCIAL

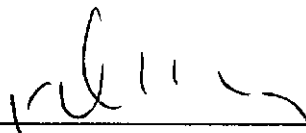
Elizabeth Frauches Netto Siqueira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

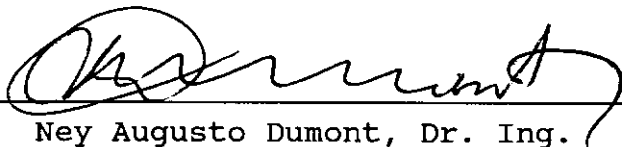
Aprovada por:



Prof. Webe João Mansur, Ph. D.
(Presidente)



Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph. D.



Prof. Ney Augusto Dumont, Dr. Ing.

Rio de Janeiro - RJ - Brasil

Julho - 1991

SIQUEIRA, ELIZABETH FRAUCHES NETTO

Consideração de Geometria Curva na Análise
p-Adaptativa do MEC para Potencial [Rio de
Janeiro] 1991.

VIII, 117 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc.,
Engenharia Civil, 1991).

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE.

1. Elementos de Contorno
2. Análise p-Adaptativa
3. Geometria Curva

I. COPPE/UFRJ

II. Título (Série)

Aos meus pais Jairo e Nilzeth.

A meu marido Marcos, de modo especial.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Webe João Mansur pela excelente orientação e contribuição valiosa de seus ensinamentos, pelo estímulo, dedicação e amizade presentes em todos os momentos.

Ao Prof. José Claudio de Faria Telles pelos conhecimentos transmitidos, pelo interesse e disponibilidade em discutir e pelo incentivo e amizade oferecidos.

Aos amigos e companheiros Dario, Paula, Sagrilo, Moacir, Rafael, Maria Lúcia, Afonso, João Paulo, Mário e Marcílio, dentre outros que comigo conviveram nesses últimos anos, pelo apoio, motivação e bons momentos compartilhados.

A todos os colegas e funcionários da COPPE, que de uma forma ou de outra, deram sua colaboração neste trabalho.

À minha família pelo apoio e compreensão.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

CONSIDERAÇÃO DE GEOMETRIA CURVA NA ANÁLISE
P-ADAPTATIVA DO MEC PARA POTENCIAL

Elizabeth Frauches Netto Siqueira

Julho de 1991

Orientador: Webe João Mansur

Programa: Engenharia Civil

Este trabalho de tese visa o desenvolvimento de procedimentos numéricos para considerar geometria curva na análise p-adaptativa do Método dos Elementos de Contorno para potencial, utilizando funções de forma hierárquicas nas interpolações.

A integração é feita aplicando a transformação cúbica de variáveis com escolha seletiva do número de pontos de integração.

São analisados problemas regidos pela equação de Laplace, fazendo uso de elementos curvos na discretização. Através de comparações, avaliam-se as soluções quanto a precisão, economia e posição dos pontos fontes extremos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.)

CONSIDERATION OF CURVE GEOMETRY IN THE BEM
P-ADAPTIVE FOR POTENTIAL ANALYSIS

Elizabeth Frauches Netto Siqueira

July, 1991

Thesis Supervisor: Webe João Mansur

Department: Civil Engineering

This work aims to develop numerical procedures to consider curve geometries in the BEM p-adaptive analysis for potential problems, using hierarquical interpolation functions.

The integration scheme adopted employs cubic transformation of variables and a selective choice of the number of integration points.

Problems governed by the Laplace Equation are analized and curve boundary elements are employed to discretize boundary geometry. A discussion concerning accuracy, efficiency and best position of extreme source points is presented.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	01
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA POTENCIAL BIDIMENSIONAL .	05
II.1 - Introdução	05
II.2 - Equação de Laplace e Identidades de Green	06
II.3 - Solução Fundamental	10
II.4 - Equação Integral de Contorno	12
CAPÍTULO III - IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA COM PROCEDIMENTO P-ADAPTATIVO	17
III.1 - Introdução	17
III.2 - Discretização do contorno	18
III.3 - Interpolação das variáveis - Funções Hierárquicas	20
III.4 - Representação da geometria	25
III.4.1 - Fórmula geral e Interpolação linear	26
III.4.2 - Cálculo dos parâmetros de interpolação para geometria curva.....	29
III.4.3 - Jacobiano da transformação e Vetor normal .	38
III.5 - Sistema de Equações	40
III.6 - Procedimento p-Adaptativo	46
III.6.1 - Esquema geral	46
III.6.2 - Novo sistema de equações - organização e solução	48

III.6.2 - Indicador e Estimador de Erro	49
CAPÍTULO IV - INTEGRAÇÃO	53
IV.1 - Integral não singular	56
IV.2 - Integral Singular	60
IV.3 - Comportamento do fator $(1/r)\partial r/\partial \eta$	62
CAPÍTULO V - APLICAÇÕES	67
V.1 - Introdução	67
V.2 - Exemplo 1	68
V.2.1 - Análise 1	70
V.2.2 - Análise 2	83
V.3 - Exemplo 2	97
CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES	103
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	107
APÊNDICE A - ASPÉCTOS DA INTERPOLAÇÃO	111
APÊNDICE B - O VALOR DO $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta}$	115

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um dos mais recentes métodos numéricos desenvolvido para resolver problemas físicos modelados por equações diferenciais. Trata-se neste método de transformar a equação diferencial do problema em uma equação integral definida no contorno do corpo. Com a discretização desta equação, um sistema de equações lineares algébricas é formado e sua solução fornece os valores desconhecidos no contorno.

Uma das principais vantagens deste método em relação aos outros, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), é a redução da dimensão do problema. Outras vantagens, como a possibilidade de modelar domínios infinitos, e a de poder tratar adequadamente de problemas com singularidades, tornam o método bastante atraente. Isto não quer dizer que se deva empregar o MEC em substituição a outros. Contudo, para certos tipos de problemas ele é extremamente vantajoso.

Deve-se a BREBBIA [1] a publicação, em 1978, do livro de introdução ao MEC aplicado a potencial e elasticidade. Em 1984, um livro bem mais completo foi publicado por BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]. Hoje o MEC está

mais difundido e várias publicações são encontradas apresentando desenvolvimentos mais recentes, entretanto ainda existe muito o que pesquisar e desenvolver, visto que em alguns tópicos sua aplicação ainda está mais voltada para o ambiente acadêmico.

A utilização do MEC na forma convencional não examina a influência dos erros sobre a solução obtida, devidos às aproximações. Devido a esta falta de critério para avaliar a confiabilidade dos resultados torna-se mais interessante utilizar técnicas auto-adaptativas, onde processos de estimativa de erros e refinamento de solução são algoritmos capazes de minimizar os erros decorrentes das aproximações existentes, de modo a tornar a resposta confiável. São chamados de procedimentos adaptativos por dependerem da informação obtida em uma etapa de cálculo para se efetuar a etapa seguinte e geralmente são auto-adaptativos (não dependem da interferência do usuário).

Para se refinar uma solução, vários parâmetros podem ser adaptados, mas existem quatro opções mais utilizadas:

- refinar a malha (refinamento-h), dividindo-a em elementos menores.
- aumentar o grau do polinômio (refinamento-p), introduzindo um novo grau de liberdade.
- variar a posição dos nós (refinamento-r),

mantendo o mesmo número de graus de liberdade.

- refinamento-hp que é uma combinação do refinamento h com o refinamento p.

ALARCON e REVERTER [3] em 1986, CERROLAZA e ALARCON [4] e RANK [5] em 1987, foram os primeiros a apresentar trabalhos desenvolvidos com técnicas auto-adaptativas usando o MEC para problemas de potencial. PARREIRA [6] também apresentou trabalhos com técnicas auto-adaptativas, estudando problemas de elasticidade linear.

Muitos outros trabalhos foram publicados posteriormente, como o de WILLMERSDORF [7] que, utilizando a versão p-adaptativa do MEC para potencial, pôde verificar a eficiência de se fazer interpolações com funções hierárquicas, conforme RIBEIRO [8] havia conseguido em seu trabalho com o MEF. Uma outra contribuição importante foi dada por PESSOLANI [9], utilizando a formulação h-adaptativa do MEC.

O presente trabalho de tese é dirigido para a solução de problemas de potencial bidimensionais estacionários e utiliza a formulação p-adaptativa do MEC implementada com funções de forma hierárquicas para elementos de geometria curva.

No capítulo II desenvolve-se a formulação direta

do Método dos Elementos de Contorno para problemas de potencial em duas dimensões.

No capítulo III descreve-se a implementação numérica do MEC, apresentando os recursos utilizados, como as funções de forma hierárquicas e o procedimento p-adaptativo. A representação da geometria está também detalhada neste capítulo.

O capítulo IV é dedicado exclusivamente às integrais, apresentando o procedimento empregado no cálculo das integrais não singulares e das integrais singulares, além de apresentar um estudo sobre o termo $(1/r)(\partial r/\partial n)$.

No capítulo V estão as aplicações numéricas realizadas com a finalidade de verificar a precisão da resposta e a convergência das soluções empregando-se elementos com geometria curva. Nas análises são feitas comparações variando-se a posição dos pontos fontes extremos.

Finalmente no capítulo VI estão algumas conclusões obtidas no decorrer do trabalho e sugestões para aperfeiçoamento e continuidade deste estudo.

CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
PARA POTENCIAL BIDIMENSIONAL

II.1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar a formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (MEC) aplicada a problemas de potencial bidimensional.

Para isto, inicialmente é colocada a equação governante dos problemas de potencial estacionários que são estudados neste trabalho, seguida da ferramenta matemática utilizada para desenvolver a formulação direta.

Logo depois são apresentadas as expressões da solução fundamental considerada.

Por último, aplicando uma propriedade da função delta de Dirac e fazendo algumas considerações, é possível mostrar, ainda que resumidamente, como obter a Equação Integral de Contorno para potencial bidimensional.

II.2 EQUAÇÃO DE LAPLACE E IDENTIDADES DE GREEN

Problemas de transmissão de calor onde não há fontes no interior do domínio Ω podem ser expressos pela equação de Laplace :

$$\nabla^2 u(x) = 0 \quad x \in \Omega \quad (\text{II.1})$$

onde ∇^2 é o operador de Laplace, que para domínios bidimensionais é dado por :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

e $u(x)$ é o potencial no ponto x de coordenadas x_1 e x_2 do domínio bidimensional Ω .

No contorno Γ do domínio Ω , prescrevem-se as seguintes condições de contorno para esta equação :

$$\begin{array}{lll} \text{essenciais:} & u(x) = \bar{u}(x) & x \in \Gamma_u \\ \text{e naturais:} & p(x) = \bar{p}(x) & x \in \Gamma_p \end{array} \quad (\text{II.2})$$

onde:

$\bar{u}(x) \rightarrow$ valor do potencial $u(x)$ prescrito no contorno Γ_u

$\bar{p}(x) = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \rightarrow$ valor do fluxo $p(x)$ prescrito no contorno Γ_p

$$\Gamma_u \cup \Gamma_p = \Gamma$$

$n \rightarrow$ coordenada na direção do vetor unitário \vec{n} externo ao domínio.

Com estas equações estão representados os problemas de potencial estacionários bidimensionais lineares que serão estudados aqui através do Método dos Elementos de Contorno.

A figura II.1 esquematiza o domínio Ω com o contorno ($\Gamma_u \cup \Gamma_p$) e o vetor normal \vec{n} em um problema bidimensional.

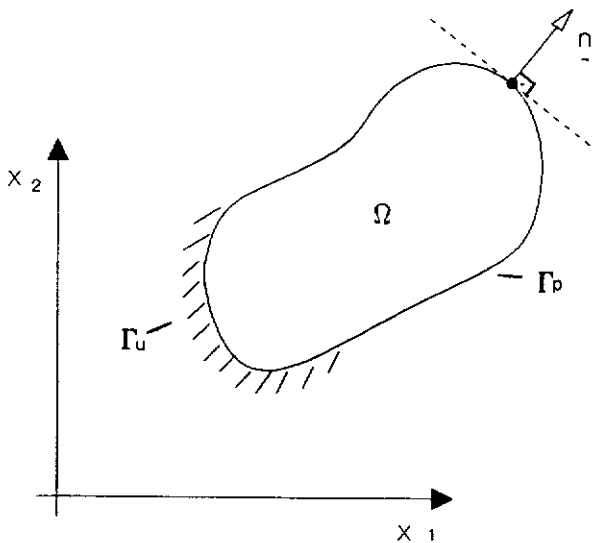


Figura II.1 - Notação

Considerando as funções escalares $u(x)$ e $u^*(x)$, que são o potencial no ponto x , como soluções da equação

de Laplace apresentada em (II.1), pode-se obter as identidades de Green e com elas se chegar à equação integral que serve de base para o desenvolvimento do MEC para potencial.

Para representar expressões, teoremas e derivadas de forma mais simples será usada, além da notação tensorial cartesiana, a convenção de somatório de Einstein para índices repetidos. Também uma vírgula precedida de um índice indica derivada com relação à coordenada correspondente àquele índice.

Assim para $j = 1, 2$:

$$u(x)_{,jj} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} = \nabla^2 u(x) \dots \quad (\text{II.3})$$

Partindo do Teorema da Divergência (CHEN e SALEEB [10]) para o domínio bidimensional, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (u_{,j} u^*)_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{,j} n_j) u^* d\Gamma \quad (\text{II.4})$$

onde:

$$u_{,j} n_j = \frac{\partial u}{\partial n} = p \quad (\text{II.5})$$

$$e \quad (u_{,j} u^*)_{,j} = u^* u_{,jj} + u_{,j} u^*_{,j} \quad (\text{II.6})$$

Com as equações (II.4), (II.5), (II.6), e (II.3) pode-se escrever a 1ª Identidade de Green:

$$\int_{\Omega} u^* (\nabla^2 u) \, d\Omega + \int_{\Omega} u_{,j} u^*_{,j} \, d\Omega = \int_{\Gamma} p u^* \, d\Gamma$$

(II.7)

A primeira identidade de Green correspondente aos campos $u(x)$ e $u^*(x)$ pode também ser escrita como :

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) \, d\Omega + \int_{\Omega} u_{,j} u^*_{,j} \, d\Omega = \int_{\Gamma} u p^* \, d\Gamma$$

(II.8)

Multiplicando-se a equação (II.8) por (-1) e somando-se à equação (II.7), obtém-se a 2ª Identidade de Green :

$$\int_{\Omega} [(\nabla^2 u) u^* - u (\nabla^2 u^*)] \, d\Omega = \int_{\Gamma} (u^* p - p^* u) \, d\Gamma$$

(II.9)

Considerando as equações (II.1) e (II.2) repetidas aqui:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 u &= 0 \\
 u - \bar{u} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_u \\
 p - \bar{p} &= 0 \quad \text{em } \Gamma_p
 \end{aligned}
 \tag{II.10}$$

chega-se diretamente à equação integral:

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Gamma} p u^* d\Omega - \int_{\Gamma} u p^* d\Gamma
 \tag{II.11}$$

que será o ponto de partida, na seção II.4, para dedução das Equações Integrais de Contorno.

II.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

A equação integral básica do método dos elementos de contorno para potencial é obtida a partir da equação (II.11), adotando-se uma função $u^*(\xi, x)$ denominada solução fundamental, que satisfaz :

$$\nabla^2 u^*(\xi; x) = -\delta(\xi; x)
 \tag{II.12}$$

onde x e ξ são dois pontos pertencentes a Ω denominados respectivamente pontos campo e fonte (KELLOG [11]), e $\delta(\xi, x)$ é a função delta de Dirac definida do seguinte modo (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]):

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(\xi, x) = 0 \quad , \quad x \neq \xi \\ \int_{\Omega} \delta(\xi, x) \, d\Omega = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

com a propriedade dada abaixo

$$\int_{\Omega} \delta(\xi, x) f(x) \, d\Omega = f(\xi) \quad \text{se } \xi \in \Omega \quad (\text{II.14})$$

Existem diferentes soluções para a equação (II.12), dependendo do domínio e das condições de contorno adotadas. Neste trabalho considera-se apenas a solução fundamental para o domínio infinito dada pela expressão (II.15) a seguir:

$$u^*(\xi, x) = - \frac{1}{2\pi} \ln(r) + D \quad (\text{II.15})$$

sendo D uma constante arbitrária e r (ver figura II.2) a distância entre os pontos ξ e x dada por:

$$\begin{aligned} r &= (r_1 r_1')^{1/2} \\ r_1 &= x_1(x) - x_1(\xi) \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Para se utilizar $u^*(\xi; x)$ na equação (II.11) deve-se determinar o fluxo correspondente no contorno do problema dado por :

$$p^*(\xi, x) = - \frac{1}{2 \pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{II.17})$$

sendo:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r_i}{r} \cdot n_i \quad (\text{II.18})$$

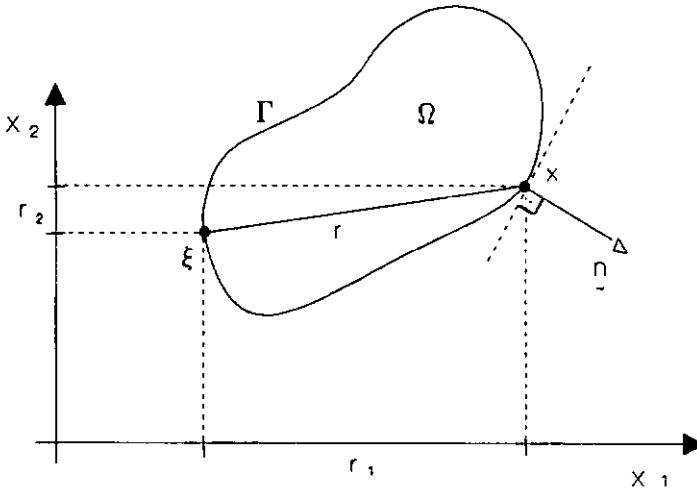


Figura II.2 - Representação da distância $r = r(\xi, x)$

II.4 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A equação integral de contorno que representa a solução da equação de Laplace (II.1) é constituída da equação integral para pontos internos e da equação integral para os pontos do contorno.

A equação integral para pontos internos é obtida a partir da equação (II.11) , utilizando a propriedade da função delta de Dirac dada na equação (II.14) que permite escrever :

$$\int_{\Omega} u(x) \nabla^2 u^*(\xi, x) d\Omega(x) = - \int_{\Omega} u(x) \delta(\xi, x) d\Omega(x) = - u(\xi) \quad (\text{II.19})$$

Substituindo este resultado na equação (II.11), obtém-se a equação integral que permite calcular o potencial $u(x)$ em pontos internos $x = \xi$ a partir de valores $u(x)$ e $p(x)$ no contorno Γ :

$$u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.20})$$

Para determinar a equação para pontos ξ no contorno considera-se, conforme a figura II.3 , o ponto ξ como sendo um ponto interno a um setor circular de raio ϵ (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2] e SILVA [12]).

Assim a equação (II.20) passa a ser:

$$\begin{aligned} u(\xi) = & \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_{\epsilon}} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_{\epsilon}} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) + \\ & + \int_{\Gamma_{\epsilon}} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma_{\epsilon}} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

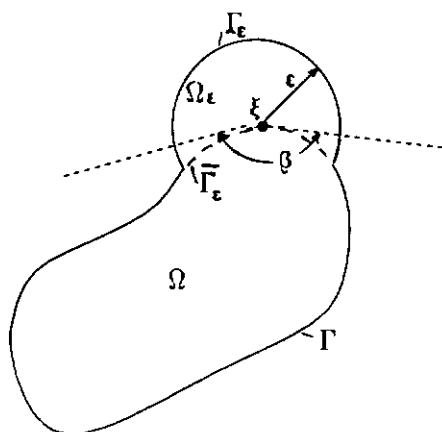
Domínio aumentado: $\Omega + \Omega_\epsilon$

Figura II.3 - Ponto fonte ξ interno ao domínio aumentado pelo setor circular de raio ϵ .

Quando $\epsilon \rightarrow 0$, o ponto ξ passa a ser um ponto do contorno, e a equação (II.21) pode ser reescrita como :

$$\begin{aligned}
 u(\xi) = & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\epsilon} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \\
 & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\epsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) + \\
 & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \\
 & - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x)
 \end{aligned}$$

(II.22)

Supondo que as funções $u(x)$ e $p(x)$ sejam contínuas (ou Holder contínuas) no ponto $x = \xi$, pode-se dizer que as integrais dos dois primeiros limites existem no sentido de Valor Principal de Cauchy (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]) e pode-se demonstrar que os outros dois limites são :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (\text{II.23})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) = - \left(1 - \frac{\beta}{2\pi} \right) u(\xi) \quad (\text{II.24})$$

sendo β o ângulo interno formado pelas tangentes ao contorno Γ no ponto ξ , conforme mostrado na figura (II.3).

Assim a equação (II.22) passa a ser escrita da seguinte forma, válida para pontos ξ no contorno:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2\pi} u(\xi) &= \text{VP} \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \\ &\quad - \text{VP} \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

onde VP quer dizer Valor Principal da integral.

Finalmente, a Equação Integral de Contorno para problemas definidos pela equação (II.1) válida tanto para

os pontos ξ internos quanto para os pertencentes ao contorno, fica da seguinte forma:

$$c(\xi) u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) \quad (\text{II.26})$$

onde $c(\xi)$ vale 1 se ξ é um ponto interno ou vale $\beta/2\pi$ se ξ pertence ao contorno. Para contornos suaves $\beta = \pi$ e $c = 1/2$.

O símbolo VP antes das integrais não é necessário pois estas são obtidas usando integração convencional. Este fato já é conhecido para a primeira das integrais indicadas no lado direito da equação (II.26) e será mostrado no capítulo quatro para a outra integral.

CAPÍTULO III

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA COM PROCEDIMENTO P-ADAPTATIVO

III.1 - INTRODUÇÃO

Descreve-se aqui o processo numérico utilizado para resolver a Equação Integral de Contorno apresentada no capítulo anterior.

Em primeiro lugar mostra-se a discretização do contorno em elementos e como é feita a aproximação dos valores das variáveis sobre estes, utilizando funções de interpolação. Um comentário sobre funções de interpolação hierárquicas é apresentado, incluindo a família destas funções que é adotada .

A seguir é desenvolvido o estudo sobre a representação da geometria, considerando especialmente elementos curvos na discretização, visto que um dos objetivos deste trabalho é fazer esta consideração na análise.

Apresenta-se então a equação na forma discretizada e mostra-se como chegar ao sistema de equações integrais cuja resolução dará os valores de potencial e fluxo nos nós

funcionais.

O procedimento p-adaptativo, que tem fundamental importância nesta análise, é então apresentado, incluindo o novo sistema de equações geradas nas etapas de refinamento e uma discussão sobre os critérios utilizado para controlar o processo.

III.2- DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO

Para se obter a solução numérica dos problemas representados pela Equação Integral de Contorno é necessário que se discretize o contorno em elementos de modo compatível com a geometria e as descontinuidades das variáveis de contorno.

Assim divide-se o contorno Γ , de um corpo bidimensional, em N_e elementos obtendo-se :

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \Gamma_j \quad (\text{III.1})$$

onde:

j → índice para representar o número do elemento.

N_e → número total de elementos.

Elementos Lagrangeanos (figura III.1) são os mais

comumente utilizados em análises bidimensionais com o Método dos Elementos de Contorno (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]). Na figura III.1(a) está ilustrado o elemento constante (superparamétrico) cuja geometria linear é definida por dois pontos nodais extremos. As variáveis de contorno (prescritas e incógnitas) são consideradas constantes em cada elemento, e iguais ao seu valor no ponto médio do elemento.

Na figura III.1(b) estão ilustrados elementos isoparamétricos lineares onde adota-se dois pontos nodais para representar tanto a geometria quanto as variáveis no seu interior. Outro tipo de elemento bastante utilizado é o elemento quadrático com geometria linear (subparamétrico), ilustrado na figura III.1(c).

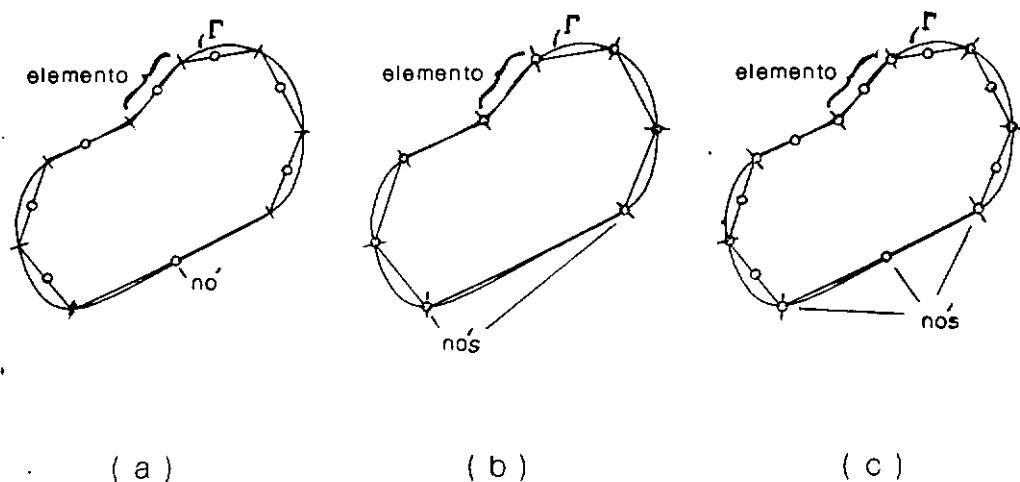


Figura III.1 - Discretização do contorno em elementos constantes (a), lineares (b) e quadráticos (c)

A representação da geometria por funções de interpolação será vista com detalhes na seção III.4.

III.3 - INTERPOLAÇÃO DAS VARIÁVEIS - FUNÇÕES HIERÁRQUICAS

Em métodos de aproximação numérica é fundamental o emprego de funções de aproximação conhecidas como funções de forma (ZIENKIEWICZ e MORGAN [13]). No MEC estas funções são usadas para interpolar a geometria e as variáveis do problema no contorno.

Desta forma, sobre cada elemento j o valor de potencial ou fluxo, que são as variáveis do problema de potencial, são aproximados por meio de funções de interpolação expressas em termos da coordenada adimensional η , chamada de coordenada natural ou local do elemento ($-1 \leq \eta \leq +1$), da seguinte forma:

$$u_j(\eta) = \sum_{k=0}^{\mu} N_k(\eta) a_j^k \quad (\text{III.2})$$

$$p_j(\eta) = \sum_{k=0}^{mp} N_k(\eta) b_j^k \quad (\text{III.3})$$

onde:

$\mu \rightarrow$ índice que identifica a ordem da interpolação do potencial ($\mu \geq 1$).

$m_p \rightarrow$ índice que identifica a ordem da interpolação do fluxo ($m_p \geq 1$).

$N_k(\eta) \rightarrow$ função de interpolação

a_j^k e $b_j^k \rightarrow$ parâmetros desconhecidos

Geralmente as funções $N_k(\eta)$ são as funções de Lagrange (ver figura III.2), assumindo o valor 1 no ponto nodal k do elemento j e zero nos demais. Esta forma de associar funções de interpolação a pontos nodais permite que os parâmetros a_j^k e b_j^k tenham o seguinte significado físico :

$$a_j^k = u_j^k$$

e

$$b_j^k = p_j^k$$

sendo u_j^k e p_j^k , respectivamente valores de potencial e fluxo no nó k do elemento j .

Tanto as variáveis conhecidas (condições de contorno prescritas) quanto as desconhecidas no contorno são interpoladas desta forma.

Entretanto em um procedimento p -adaptativo torna-se apropriado utilizar funções conhecidas como hierárquicas para se interpolar as incógnitas, pois com estas é possível o reaproveitamento de cálculos anteriores minimizando o esforço computacional necessário a obtenção de novas soluções.

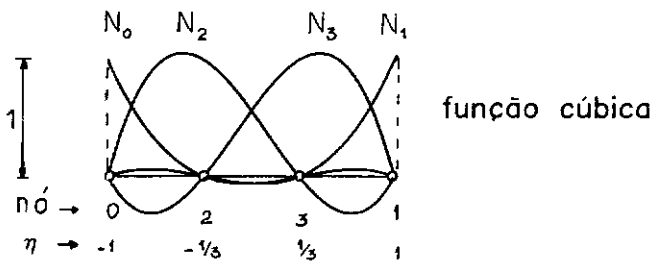
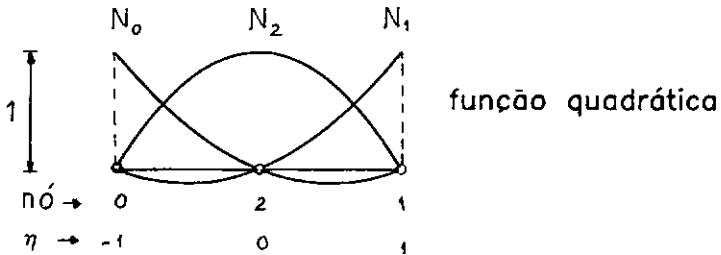
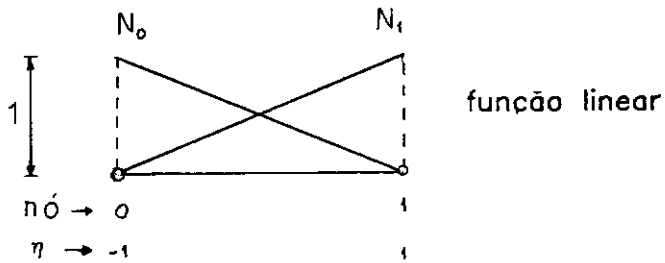


Figura III.2 - Funções de Lagrange sobre elemento representado na coordenada natural η .

Funções de forma hierárquicas são funções que apresentam como principal característica o fato de permanecerem inalteradas quando a ordem da aproximação é aumentada. Isto é, quando utilizam-se funções hierárquicas para interpolar pode-se acrescentar às funções já existentes um novo elemento da família, de ordem mais alta, sem que as funções já utilizadas sejam modificadas. O mesmo não é possível com as funções de Lagrange.

Para se conhecer mais a respeito de funções hierárquicas pode-se consultar as referências [13], [3], [7],[4] e [8].

Na análise bidimensional com elementos de contorno estas funções são unidimensionais e as famílias escolhidas são tais que tenham :

$$N_0(\eta) = \frac{1 - \eta}{2} \quad (\text{III.4})$$

$$N_1(\eta) = \frac{1 + \eta}{2} \quad (\text{III.5})$$

Deste modo a solução obtida com uma aproximação linear de funções hierárquicas ficará igual à que utiliza as funções de Lagrange.

Os coeficientes das funções de ordem maior que 1 devem ser escolhidos de modo que essas funções sejam nulas nos extremos dos elementos ($\eta = \pm 1$) preservando desta forma a continuidade entre elementos.

As equações apresentadas em (III.2) e (III.3) podem ser escritas agora da seguinte forma:

$$u_j(\eta) = N_0(\eta) u_j^0 + N_1(\eta) u_j^1 + \sum_{k=2}^{m_u} N_k(\eta) a_j^k \quad (\text{III.6})$$

$$p_j(\eta) = N_0(\eta) p_j^0 + N_1(\eta) p_j^1 + \sum_{k=2}^{m_p} N_k(\eta) b_j^k \quad (\text{III.7})$$

Aqui apenas os parâmetros a_j^k e b_j^k para $k = 0$ e $k = 1$ têm o significado físico de valor nodal. (ver figura III.3)

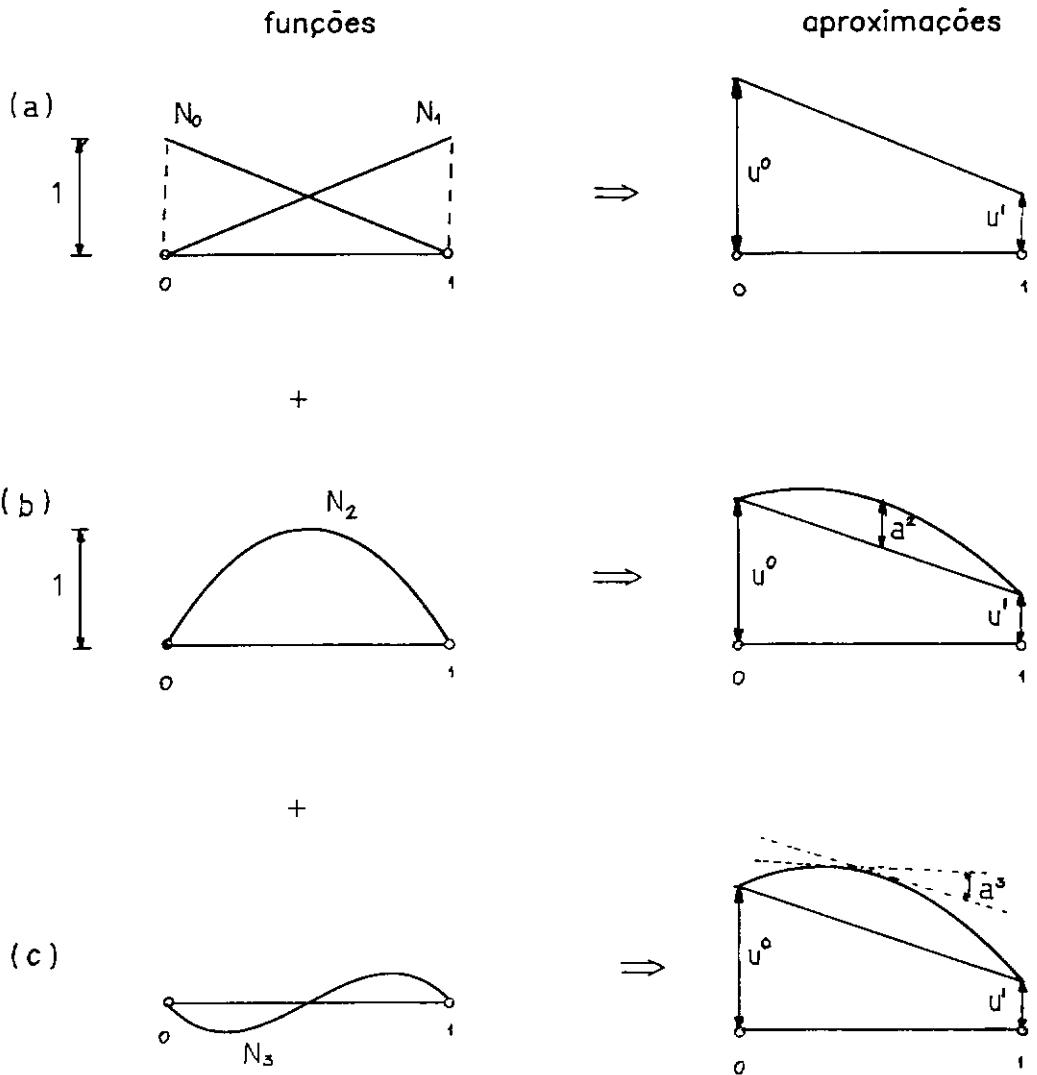


Figura III.3 - Funções hierárquicas - aproximação (a) linear, (b) quadrática e (c) cúbica sobre um elemento .

Das famílias de funções hierárquicas que existem considera-se neste trabalho uma baseada nos polinômios de Chebyshev proposta por DEVL00 [14] :

$$N_k(\eta) = \begin{cases} T_k(\eta) - 1 & \text{p/ } k \text{ par , } k \geq 2 \\ T_k(\eta) - \eta & \text{p/ } k \text{ ímpar , } k \geq 3 \end{cases} \quad (\text{III.8})$$

onde $T_k(\eta)$ são os polinômios de Chebyshev (SPIEGEL [15]) definidos como:

$$\begin{aligned} T_0(\eta) &= 1 \\ T_1(\eta) &= \eta \\ T_k(\eta) &= 2\eta T_{k-1}(\eta) - T_{k-2}(\eta) \quad k \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Neste trabalho optou-se por fazer uso dessa família de funções hierárquicas para se interpolar tanto as incógnitas do problema quanto as condições de contorno prescritas.

III.4 - REPRESENTAÇÃO DA GEOMETRIA

Quando é feita a discretização do contorno de corpos que possuam formas geométricas com curvaturas, através de elementos retos, pode haver necessidade de uma

discretização excessivamente refinada que objetive apenas representar a geometria do contorno. Esta situação é indesejável e pode ser evitada na maioria dos casos, utilizando elementos curvos. Esta representação é ainda mais necessária quando elementos p-adaptativos são utilizados, pois neste tipo de formulação a solução não é melhorada por divisão de elementos (h-adaptativos) mas sim através da introdução de funções de forma de ordem mais elevada.

Partindo desta idéia, estudou-se a consideração de elementos curvos capazes de aproximar melhor contornos não retilíneos, ou retilíneos por partes.

Aqui será mostrada a interpolação da geometria por funções lineares, quadráticas, cúbicas, de quarta e quinta ordem, que se julgou suficiente para representar as mais variadas formas de contorno.

III.4.1 - FÓRMULA GERAL E INTERPOLAÇÃO LINEAR

Para representar a geometria do elemento j , em coordenadas naturais η , é feita uma interpolação com funções de forma, conforme já mencionado na seção anterior, do seguinte modo:

$$V_{\sim j}(\eta) = \sum_{k=0}^{mg} N_{\sim k}(\eta) c_{\sim j}^k \quad (\text{III.10})$$

onde :

$\tilde{V}_j(\eta)$ → vetor de coordenadas cartesianas dos pontos do contorno:

$$\tilde{V}_j(\eta) = \left\{ \begin{array}{l} x(\eta) \\ y(\eta) \end{array} \right\}_j$$

m_g → ordem da geometria do elemento

$$1 \leq m_g \leq \text{ordem máxima}$$

\tilde{c}_j^k → parâmetros de interpolação, inicialmente desconhecidos:

$$\tilde{c}_j^k = \left\{ \begin{array}{l} c_{(x)}^k \\ c_{(y)}^k \end{array} \right\}_j$$

$N_k(\eta)$ → função de interpolação de ordem k ,

$$\tilde{N}_k(\eta) = \tilde{I} N_k \quad \text{com} \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Apenas nesta seção (III.4) é usada a notação cartesiana dos eixos, para não confundir o índice usado para representar a ordem da função com o índice do eixo.

Aqui também optou-se por usar a família de funções hierárquicas que foram apresentadas na seção anterior. Todas as considerações feitas lá valem aqui. Assim os parâmetros \tilde{c} de ordem 0 e 1 têm os valores das coordenadas dos pontos final e inicial do elemento e pode-se reescrever a equação (III.10) como :

$$\tilde{V}_j(\eta) = \tilde{N}_0(\eta) \tilde{V}_j^0 + \tilde{N}_1(\eta) \tilde{V}_j^1 + \sum_{k=2}^{m_g} \tilde{N}_k(\eta) \tilde{c}_j^k$$

(III.11)

$$\text{com } \underset{\sim}{V}_j^0 = \begin{Bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{Bmatrix}_j \quad \text{e} \quad \underset{\sim}{V}_j^1 = \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{Bmatrix}_j$$

Esta equação (III.11) é a fórmula geral para se interpolar, com funções hierárquicas, geometria de qualquer ordem. Resta entretanto obter os parâmetros desconhecidos c_j^k em função dos valores nodais. O cálculo destes parâmetros é apresentado na seção III.4.2, nos itens A, B e C.

De acordo com a equação (III.11), fica óbvio que para um elemento j de geometria linear (figura III.4) os pontos do contorno são interpolados conforme a expressão abaixo:

$$\underset{\sim}{V}_j(\eta) = \underset{\sim}{N}_0(\eta) \underset{\sim}{V}_j^0 + \underset{\sim}{N}_1(\eta) \underset{\sim}{V}_j^1 \quad (\text{III.12})$$

Esta equação na forma matricial fica:

$$\begin{Bmatrix} x(\eta) \\ y(\eta) \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{N}_0(\eta) & 0 & \underset{\sim}{N}_1(\eta) & 0 \\ 0 & \underset{\sim}{N}_0(\eta) & 0 & \underset{\sim}{N}_1(\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^0 \\ y^0 \\ x^1 \\ y^1 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{III.13})$$

com:

$$\underset{\sim}{N}_0 = (\eta - 1) / 2$$

$$\underset{\sim}{N}_1 = (\eta + 1) / 2$$

(III.14)

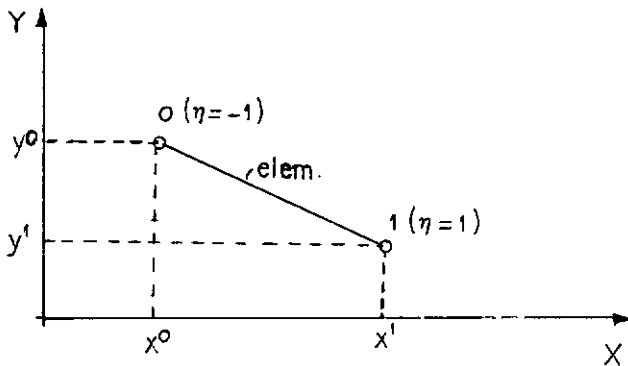


Figura III.4 - Representação de um elemento com geometria linear (em coordenadas cartesianas e na coordenada natural)

III.4.2 - CÁLCULO DOS PARÂMETROS DE INTERPOLAÇÃO PARA GEOMETRIA CURVA.

Agora que se tem a expressão (III.11) válida para interpolar qualquer ponto sobre o contorno de um elemento de geometria curva, utilizando as funções hierárquicas dadas em (III.7), resta obter os parâmetros c_j^k em função dos pontos de coordenadas conhecidas.

Antes porém cabem algumas observações a respeito da escolha dos pontos usados para interpolar a geometria e que farão parte do cálculo dos parâmetros.

Deve-se escolher pontos sobre o contorno do elemento, tais que dadas suas coordenadas cartesianas, se possa interpolar a curva que melhor represente aquele contorno.

Os parâmetros desconhecidos da família hierárquica dependem das coordenadas dos nós geométricos (cartesianos no presente estudo) e das coordenadas naturais a eles associadas.

Neste trabalho as coordenadas naturais associadas aos nós geométricos são as mesmas utilizadas na definição padrão dos polinômios de Lagrange (ZIENKIEWICZ e MORGAN [13]). Assim os parâmetros obtidos são tais que fazem a interpolação por funções hierárquicas coincidir com a interpolação por polinômios de Lagrange, conforme mostrado no apêndice A.

Eventualmente pode-se desejar associar pontos nodais a valores de coordenada natural não coincidentes com o padronizado para polinômios de Lagrange. Neste caso, um mapeamento diferente do convencional ocorre, sendo a transformação de coordenadas que ilustra tal mapeamento também mostrada no apêndice A, para o elemento quadrático.

Pode-se também interpolar a geometria, utilizando-se funções hierárquicas de tal forma que pontos nodais sejam associados a uma sequência qualquer de pontos no espaço η . Se associarmos os pontos nodais às coordenadas

naturais utilizadas na definição das funções hierárquicas, conforme ilustrado na figura III.5 (CERROLAZA [16]) não haverá a preocupação de forçar a coincidência das representações hierárquicas e de Lagrange, não sendo necessário portanto recalcular parâmetros já considerados, quando um novo termo é utilizado para melhorar a representação.

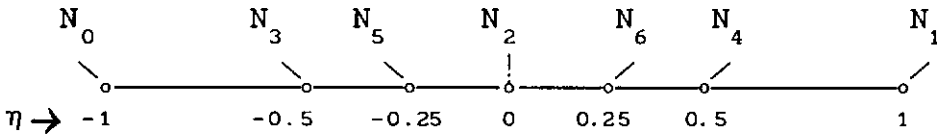


Figura III.5 - Pontos onde são definidas as funções hierárquicas p/ domínio bidimensional.

A escolha dos pontos de interpolação pode ser arbitrária desde que se respeite o intervalo de η sobre o elemento ($-1 \leq \eta \leq +1$) sendo $\eta = 0$ o ponto médio do elemento.

A) Geometria Quadrática ($m_g = 2$)

Para o caso de usar um elemento curvo representado por uma função quadrática, três pontos são definidos sobre o elemento conforme a figura III.6.

A equação (III.11) para esse caso pode ser escrita como:

$$\tilde{V}_j(\eta) = \tilde{N}_0(\eta) \tilde{V}_j^0 + \tilde{N}_1(\eta) \tilde{V}_j^1 + \tilde{N}_2(\eta) \tilde{c}_j^2 \quad (\text{III.15})$$

que escrita na forma matricial fica :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{x}(\eta) \\ \mathbf{Y}(\eta) \end{Bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \tilde{N}_0(\eta) & 0 & \tilde{N}_1(\eta) & 0 & \tilde{N}_2(\eta) & 0 \\ 0 & \tilde{N}_0(\eta) & 0 & \tilde{N}_1(\eta) & 0 & \tilde{N}_2(\eta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{Y}^0 \\ \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{Y}^1 \\ \mathbf{c}_{(x)}^2 \\ \mathbf{c}_{(y)}^2 \end{Bmatrix}_j \quad (\text{III.16})$$

com

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0(\eta) &= (1 - \eta) / 2 \\ \tilde{N}_1(\eta) &= (1 + \eta) / 2 \\ \tilde{N}_2(\eta) &= 2 (\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Definida a função que será adotada é preciso calcular os parâmetros \tilde{c}_j^2 desconhecidos.

Como são dadas as coordenadas cartesianas (x^2, y^2) do ponto 2 em $\eta = 0$, monta-se a matriz de funções de interpolação dada na equação (III.16) e com os valores destas funções para $\eta = 0$, resolve-se o sistema (III.16) encontrando os valores dos parâmetros \tilde{c}_j^2 (Apêndice A):

$$c_{(x)}^2 = \frac{1}{4} (x^0 + x^1 - 2x^2)$$

$$c_{(y)}^2 = \frac{1}{4} (y^0 + y^1 - 2y^2)$$

(III.18)

Desta maneira fica pronta a equação para se interpolar qualquer ponto x do elemento de geometria quadrática.

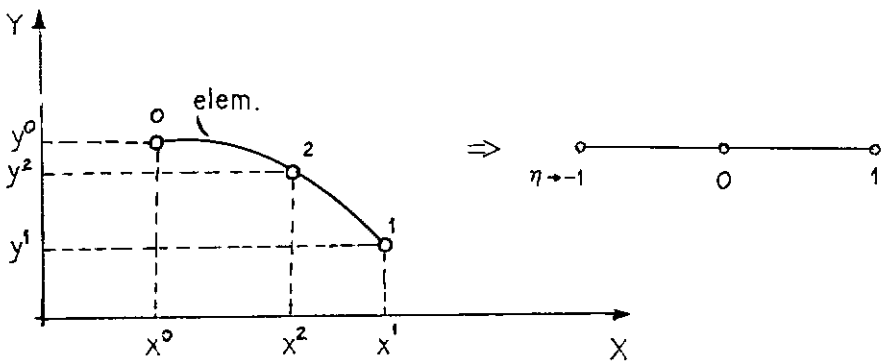


Figura III.6 - Representação de um elemento com geometria quadrática (em coord. cartesianas e na coord. natural)

A seguir estão ilustrados procedimentos para representação da geometria com ordem acima da quadrática. Embora não haja nenhuma complicação adicional, deve-se observar que interpolação de geometria com funções de ordem maior que dois não é recomendada.

B) Geometria Cúbica ($m_g = 3$)

A curva que representará a geometria cúbica de um elemento é definida em quatro pontos escolhidos sobre o contorno deste elemento, conforme está mostrado na figura III.7.

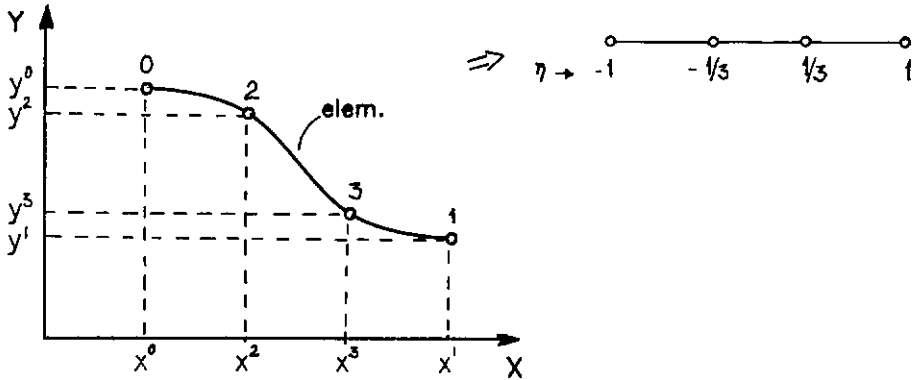


Figura III.7 - Representação de um elemento com geometria cúbica (em coord. cartesianas e na coord. natural).

Para interpolar qualquer ponto $V(x,y)$ sobre esse elemento usa-se a expressão :

$$\tilde{v}_j(\eta) = \tilde{N}_0(\eta) \tilde{v}_j^0 + \tilde{N}_1(\eta) \tilde{v}_j^1 + \sum_{k=2}^3 \tilde{N}_k(\eta) \tilde{c}_j^k$$

(III.19)

que, expressa na forma matricial, fica igual à quadrática, acrescida de um termo \tilde{N}_3 na matriz de funções de

interpolação e de um termo $c_{\tilde{j}}^3$ no vetor de parâmetros.

As funções de interpolação hierárquicas usadas são:

$$N_0(\eta) = (1 - \eta) / 2$$

$$N_1(\eta) = (1 + \eta) / 2$$

$$N_2(\eta) = 2 (\eta^2 - 1)$$

$$N_3(\eta) = 4\eta (\eta^2 - 1)$$

(III.20)

Os coeficientes $c_{\tilde{j}}^2$ e $c_{\tilde{j}}^3$ são calculados da mesma forma apresentada para a geometria quadrática, porém não mais no ponto $\eta = 0$. Agora o sistema é resolvido para $\eta = 1/3$ e $\eta = -1/3$ que são os pontos onde são conhecidas as coordenadas cartesianas.

Os parâmetros $c_{\tilde{j}}$ encontrados são :

$$c_{(x)}^2 = \frac{9}{32} (x^0 + x^1 - x^2 - x^3)$$

$$c_{(y)}^2 = \frac{9}{32} (y^0 + y^1 - y^2 - y^3)$$

$$c_{(x)}^3 = \frac{9}{64} (-x^0 + x^1 + 3x^2 - 3x^3)$$

$$c_{(y)}^3 = \frac{9}{64} (-y^0 + y^1 + 3y^2 - 3y^3)$$

(III.21)

C) Geometria de ordem quatro ($mg = 4$) e de ordem cinco ($mg = 5$)

O mesmo tipo de desenvolvimento feito para as ordens inferiores (quadrática e cúbica) é repetido para interpolar a geometria de um elemento curvo que possa ser representada por uma função de quarta ou quinta ordem. Deve-se apenas observar os novos pontos onde são dadas as coordenadas cartesianas que definem as curvas (figura III.8).

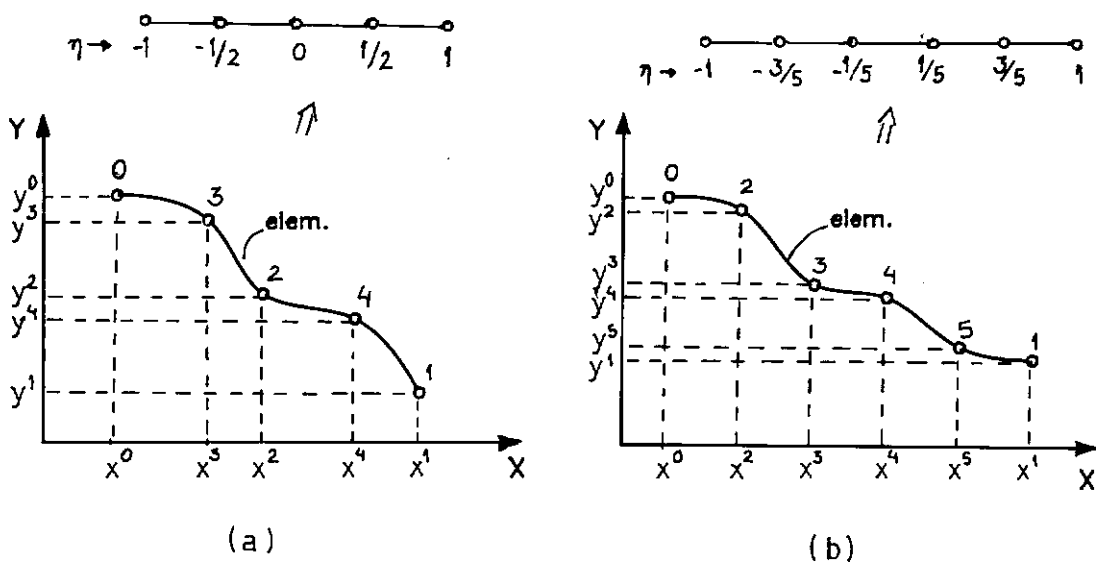


Figura III.8 -Representação de um elemento com geometria :
 (a) de 4ª ordem e (b) de 5ª ordem , (em coord. cartesianas e na coord. natural)

As equações para interpolar os pontos do elemento com geometria de quarta e quinta ordem são respectivamente:

$$\tilde{V}_j(\eta) = \tilde{N}_0(\eta) \tilde{V}_j^0 + \tilde{N}_1(\eta) \tilde{V}_j^1 + \sum_{k=2}^4 \tilde{N}_k(\eta) \tilde{c}_j^k \quad (\text{III.22})$$

$$\tilde{V}_j(\eta) = \tilde{N}_0(\eta) \tilde{V}_j^0 + \tilde{N}_1(\eta) \tilde{V}_j^1 + \sum_{k=2}^5 \tilde{N}_k(\eta) \tilde{c}_j^k \quad (\text{III.23})$$

com :

$$\begin{aligned} \tilde{N}_0(\eta) &= (1 - \eta) / 2 \\ \tilde{N}_1(\eta) &= (1 + \eta) / 2 \\ \tilde{N}_2(\eta) &= 2 (\eta^2 - 1) \\ \tilde{N}_3(\eta) &= 4\eta (\eta^2 - 1) \\ \tilde{N}_4(\eta) &= 8\eta^2 (\eta^2 - 1) \\ \tilde{N}_5(\eta) &= (16\eta^3 - 4\eta) (\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Agora os sistemas que são montados a partir das equações (III.22) e (III.23) são resolvidos respectivamente para η $(-1/2, 0, +1/2)$ e η $(-3/5, -1/5, +1/5, +3/5)$ de onde se obtêm os valores para os parâmetros . Aqui não são apresentadas as expressões analíticas dos parâmetros obtidos com a resolução do sistema, como nas ordens anteriores. Este cálculo, assim como os anteriores, pode ser feito numericamente e este foi o caminho adotado na programação.

III.4.3 - JACOBIANO DA TRANSFORMAÇÃO E VETOR NORMAL

Seja uma curva no espaço definida em forma paramétrica por (ver figura III.9):

$$\underline{r} = x(\eta) \underline{e}_1 + y(\eta) \underline{e}_2$$

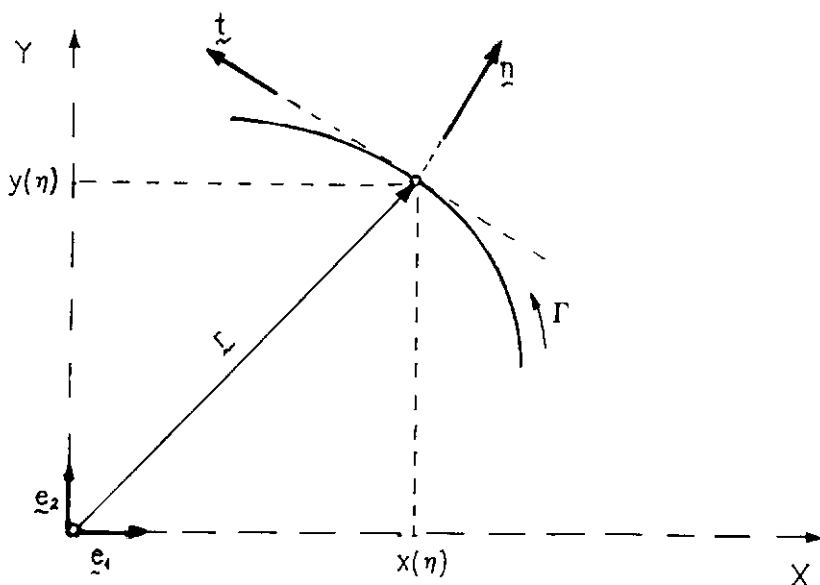


Figura III.9 - Notação de uma curva

A) JACOBIANO

O diferencial total $d\underline{r}$, que é um vetor tangente à curva no ponto considerado, pode ser escrito como :

$$d\underline{r} = \frac{dx}{d\eta} d\eta \underline{e}_1 + \frac{dy}{d\eta} d\eta \underline{e}_2 \quad (\text{III.25})$$

Definindo (\cdot = produto escalar):

$$d\Gamma = \sqrt{\underline{dr} \cdot \underline{dr}} = \left[(dx/d\eta)^2 + (dy/d\eta)^2 \right]^{1/2} d\eta = |J| d\eta \quad (\text{III.26})$$

sendo portanto o Jacobiano $|J|$ da transformação dado por

$$|J| = \left| \frac{d\underline{r}}{d\eta} \right| = \left[(dx/d\eta)^2 + (dy/d\eta)^2 \right]^{1/2} \quad (\text{III.27})$$

B) VETOR NORMAL

O vetor tangente unitário à curva,

$$\underline{t} = t_1 \underline{e}_1 + t_2 \underline{e}_2 \quad (\text{III.28})$$

pode ser calculado por ($|J| = |d\underline{r}/d\eta|$) :

$$\underline{t} = \frac{1}{|J|} \frac{d\underline{r}}{d\eta} = \frac{1}{|J|} (dx/d\eta \underline{e}_1 + dy/d\eta \underline{e}_2) \quad (\text{III.29})$$

Das condições (\times = produto vetorial)

$$\underline{t} \cdot \underline{n} = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$\underline{n} \times \underline{t} = \underline{e}_3 \quad (\text{III.31})$$

obtém-se o vetor normal:

$$\underline{n} = t_2 \underline{e}_1 - t_1 \underline{e}_2 \quad (\text{III.32})$$

ou seja, os cossenos diretores do vetor unitário normal que aponta para fora do domínio são dados por :

$$n_1 = \frac{1}{|J|} \frac{dy}{d\eta} \quad (\text{III.33})$$

$$n_2 = - \frac{1}{|J|} \frac{dx}{d\eta} \quad (\text{III.34})$$

Cabe aqui observar que quando as expressões (III.27), (III.33) e (III.34) são utilizadas :

$$dx / d\eta = \sum_{k=0}^{mg} dN^k/d\eta \quad c_{(x)}^k$$

e

$$dy / d\eta = \sum_{k=0}^{mg} dN^k/d\eta \quad c_{(y)}^k$$

(III.35)

III.5 - SISTEMA DE EQUAÇÕES

Quando u e p não são os valores da solução exata, a equação (II.26) deixa de ser uma identidade. Neste caso aparecerá um resíduo $\psi(\xi)$ no contorno, dado por :

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = & c(\xi) u(\xi) + \int_{\Gamma} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x) - \\ & - \int_{\Gamma} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

O método dos resíduos ponderados (BREBBIA, TELLES e WROBEL [2]) pode então ser empregado para se obter a solução aproximada. Neste caso, a equação de resíduos ponderados correspondente à função de ponderação w^1 é :

$$\int_{\Gamma} \psi(\xi) w^1 d\Gamma = 0 \quad i = 1, \dots, np \quad (\text{III.37})$$

sendo no cálculo do método da colocação :

$$w^1 = \delta(\xi, \xi_1) \quad (\text{III.38})$$

e

$$\int_{\Gamma} \psi(\xi) \delta(\xi, \xi_1) d\Gamma(\xi) = \psi(\xi_1) = 0 \quad i = 1, \dots, np \quad (\text{III.39})$$

Considerando a igualdade indicada na equação (III.36), pode-se escrever a seguinte sentença básica do método dos elementos de contorno, válida apenas para os pontos de colocação :

$$c(\xi_1) u(\xi_1) + \int_{\Gamma} p^*(\xi_1, x) u(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u^*(\xi_1, x) p(x) d\Gamma(x) = 0 \quad (\text{III.40})$$

Como o contorno Γ é representado por um somatório de elementos, a equação (III.40) pode ser expressa de forma discretizada (ξ_1 foi substituído por ξ para evitar excesso de índices):

$$\begin{aligned}
C(\xi) u(\xi) &= \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} u^*(\xi, x) p(x) d\Gamma(x) - \\
&- \sum_{j=1}^{Ne} \int_{\Gamma_j} p^*(\xi, x) u(x) d\Gamma(x)
\end{aligned}
\tag{III.41}$$

Em cada elemento j , $u(x)$ e $p(x)$ são aproximados conforme as equações (III.2) e (III.3) em função da coordenada local η . Pode-se então reescrever a equação (III.41), para ξ pertencente ao elemento i , como :

$$\begin{aligned}
C(\xi) \sum_{k=0}^{mu} N_k(\xi) a_i^k + \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mu} \left(\int_{\Gamma_j} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |J| d\eta \right) a_j^k = \\
= \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mp} \left(\int_{\Gamma_j} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |J| d\eta \right) b_j^k
\end{aligned}
\tag{III.42}$$

que pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
C(\xi) \sum_{k=0}^{mu} N_k(\xi) a_i^k + \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mu} \bar{h}_{ij}^k a_j^k = \\
= \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mp} g_{ij}^k b_j^k
\end{aligned}
\tag{III.43}$$

com:

$$\bar{h}_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |J| d\eta
\tag{III.44}$$

$$g_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |J| d\eta \quad (\text{III.45})$$

onde :

i representa o ponto fonte ξ

j representa o elemento

k é a ordem da interpolação

O primeiro termo do lado esquerdo da equação (III.43) pode ser somado à parcela do segundo que corresponde ao elemento que contém o ponto fonte ξ . Novamente pode-se reescrever, de modo mais simples, a equação para um ponto fonte ξ_i :

$$\sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mu} h_{ij}^k a_j^k = \sum_{j=1}^{Ne} \sum_{k=0}^{mp} g_{ij}^k b_j^k \quad (\text{III.46})$$

observando que:

$$h_{ij}^k = \bar{h}_{ij}^k \quad \text{quando } i \neq j$$

$$h_{ij}^k = C(\xi) N^k(\xi) + \bar{h}_{ij}^k \quad \text{quando } i = j$$

Colocando as condições de contorno prescritas na equação (III.46) e reordenando para que os termos conhecidos fiquem do lado esquerdo da equação, monta-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \Gamma_p} \sum_{k=0}^{mu} h_{ij}^k a_j^k - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{mp} g_{ij}^k b_j^k &= \\
= \sum_{j \in \Gamma_p} \sum_{k=0}^{mp} g_{ij}^k \bar{b}_j^k - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{mu} h_{ij}^k \bar{a}_j^k &
\end{aligned}
\tag{III.47}$$

sendo que os termos do lado direito do sinal de igualdade representam os valores conhecidos com \bar{a}_j^k e \bar{b}_j^k representando os valores prescritos no elemento.

Para cada incógnita tem-se um ponto fonte ξ e assim escrevendo uma equação (III.47) para cada ponto ξ , forma-se um sistema de equações do tipo :

$$\tilde{K} \tilde{X} = \tilde{F} \tag{III.48}$$

onde \tilde{K} é a matriz de coeficientes h e g .

\tilde{X} é o vetor de incógnitas

\tilde{F} é o vetor dos termos independentes (lado direito da equação (III.47))

O cálculo das integrais dos coeficientes h e g está detalhado no capítulo IV.

Lembrando que são usadas funções hierárquicas nas interpolações, a formulação passa a ser hierárquica e a equação (III.47) para cada ponto fonte escreve-se como (WILLMERSDORF [7]):

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \in \Gamma_p} [h_{ij}^0 \quad h_{ij}^1] \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix} - \sum_{j \in \Gamma_u} [g_{ij}^0 \quad g_{ij}^1] \begin{bmatrix} p^0 \\ p^1 \end{bmatrix} \\
& + \sum_{j \in \Gamma_p} \sum_{k=2}^{m_u} h_{ij}^k a_j^k - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=2}^{m_p} g_{ij}^k b_j^k = \\
& = \sum_{j \in \Gamma_p} \sum_{k=0}^{m_p} g_{ij}^k \bar{b}_j^k - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_u} h_{ij}^k \bar{a}_j^k \quad (\text{III.49})
\end{aligned}$$

que representa duas sub-matrizes: uma associada à solução linear e outra às soluções com grau de liberdade de ordem superior.

O posicionamento do ponto fonte, agora é mais livre. No caso linear são posicionados nos extremos dos elementos, caso se deseje garantir a continuidade de potencial e fluxo entre elementos, ou no caso contrário, deslocados para o interior do elemento (MARQUES [17]).

Em funções de ordem superior é interessante localizá-los nos pontos de máximo das funções hierárquicas para reforçar a dominância da diagonal da matriz de coeficientes. Para evitar mal condicionamento da matriz, não se deve colocar pontos fonte próximos dos pontos de integração numérica ou muito próximos entre si, a menos que procedimentos especiais de integração sejam utilizados.

Formulação hierárquica aqui apresentada é muito eficiente nas implementações numéricas com procedimento adaptativo, pois cálculos anteriores são aproveitados reduzindo o esforço e tempo computacionais.

III.6 - PROCEDIMENTO P-ADAPTATIVO

A solução obtida em uma análise numérica apresenta erros decorrentes das aproximações, que podem ser minimizados através de processos de estimativa de erros e refinamento de solução (procedimentos adaptativos).

Nos processos adaptativos pode-se obter soluções com erros dentro de uma tolerância pré-estabelecida, o que torna-se uma grande vantagem.

O procedimento p-adaptativo, que é o adotado neste trabalho, utiliza o refinamento da solução através da introdução de novos graus de liberdade (GL), ou seja, aumentando o grau do polinômio utilizado na aproximação da incógnita nas regiões onde a resposta é ruim. Um resumo de como funciona este procedimento está apresentado a seguir.

III.6.1 - ESQUEMA GERAL

Com a geometria e as condições de contorno estando bem representadas, pode-se iniciar a aproximação das incógnitas com uma interpolação linear, do que resultará (do sistema de equações (III.49)) uma primeira solução linear para as incógnitas. Quando esta resposta não representa bem a solução, é necessário refiná-la onde o resultado não está de acordo com o esperado, introduzindo

então mais parâmetros hierárquicos na aproximação da incógnita.

Para se determinar onde (em que elemento) a resposta está ruim, ou seja, em quais elementos o refinamento é mais eficaz, e estimar o erro total da solução é necessário que se faça uma análise de erros. O erro total é comparado com uma tolerância pré-estabelecida. Caso não se atinja esta tolerância, novas equações são montadas com os novos GL e resolve-se novamente o sistema de equações ampliado, obtendo uma nova solução. Novamente executa-se a etapa de análise de erros. O processo pára quando a tolerância especificada é atingida.

Um esquema geral de um procedimento auto-adaptativo versão-p pode ser descrito como:

1º passo: obter a primeira solução para as incógnitas

2º passo: fazer a análise de erros

3º passo: se está dentro da tolerância

então interrompe o processo

senão monta-se novo sistema de equações aumentando o GL das incógnitas ; obtem-se nova solução e retorna-se ao 2º passo

III.6.2 - NOVO SISTEMA DE EQUAÇÕES - ORGANIZAÇÃO E SOLUÇÃO

Ao introduzir novas funções de interpolação, aumentando o grau do polinômio, o sistema de equações modifica-se passando a apresentar três novos blocos de integrais na matriz \tilde{K} da equação (III.48): \tilde{K}_{nm} - novas funções de interpolação com velhos pontos de colocação; \tilde{K}_{mn} - velhas funções de interpolação com novos pontos de colocação; \tilde{K}_{mm} - novas funções de interpolação com novos pontos de colocação, conforme esquematizado abaixo (ALARCON e REVERTER [3]):

$$\left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_{nn} & \tilde{K}_{nm} \\ \hline \tilde{K}_{mn} & \tilde{K}_{mm} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \tilde{X}_n \\ \hline \tilde{X}_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \tilde{F}_n \\ \hline \tilde{F}_m \end{array} \right]$$

onde n refere-se aos GL da malha inicial

m refer-se aos GL a serem refinados

A solução do primeiro sistema de equações linear montado é obtida aqui pelo método da eliminação de Gauss e para os novas soluções também utilizou-se neste trabalho o método de Gauss mas com o cuidado de se aproveitar a triangularização de \tilde{K}_{nn} realizada na solução anterior. Isto quer dizer que realizou-se a eliminação gaussiana somente sobre os termos adicionais da matriz ampliada.

Quando novas equações são acrescentadas ao sistema é preciso escolher a posição do ponto fonte para montar uma

nova equação e, como já foi dito anteriormente, estes são colocados próximos dos máximos das funções de interpolação e no elemento que está sendo refinado, de modo a não coincidir com outro ponto fonte. A técnica empregada foi a criação de uma tabela para a coordenada natural do ponto fonte em função da ordem da função de interpolação correspondente (WILLMERSDORF [7]). Os pontos fontes se colocam então nos extremos do elemento, na metade, no quarto anterior, no quarto posterior, no oitavo anterior e assim sucessivamente, coincidindo com os pontos de definição das funções hierárquicas (ver figura III.5 apresentada na seção III.4.2).

III.6.3 - INDICADOR E ESTIMADOR DE ERRO

O que faz a diferença entre um programa com procedimento auto-adaptativo e um programa convencional é a presença de uma rotina de análise de resíduos e refinamento seletivo baseado na distribuição destes resíduos.

Após cada solução calcula-se o parâmetro denominado 'estimador', que deve informar por comparações com tolerâncias pré estabelecidas se a presente solução é boa. O estimador, juntamente com a tolerância definem o critério de parada.

Para se conseguir fazer o refinamento seletivo é necessário identificar a precisão da resposta. Isto é feito

através do 'indicador', que aponta regiões de resposta piores e redefine a malha de acordo com um critério pré estabelecido.

O erro que um refinamento auto-adaptativo tenta reduzir é o erro introduzido por discretização insuficiente. As estimativas destes erros podem ser feitas a-priori ou a-posteriori.

Estimativas de erro a-posteriori utilizam as informações obtidas após a obtenção de uma solução aproximada, e em geral baseiam-se no cálculo dos resíduos destas soluções (ZIENKIEWICZ, GAGO e KELLY [18]).

O resíduo r pode ser calculado em qualquer ponto do contorno através da forma discretizada da equação (III.47) considerando \tilde{a} e \tilde{b} soluções aproximadas :

$$\begin{aligned}
 r(\eta) = & \sum_{j \in \Gamma_p} \sum_{k=0}^{m_u} h_{1j}^k \tilde{a}_j^k - \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_p} g_{1j}^k \tilde{b}_j^k - \\
 & - \sum_{j \in \Gamma_p} \sum_{k=0}^{m_p} g_{1j}^k \tilde{b}_j^k + \sum_{j \in \Gamma_u} \sum_{k=0}^{m_u} h_{1j}^k \tilde{a}_j^k
 \end{aligned}
 \tag{III.50}$$

Neste trabalho utiliza-se para indicador de erro a expressão:

$$\lambda_j = \int_{\Gamma_j} r(\eta)^2 d\Gamma
 \tag{III.51}$$

que foi baseada na proposta de RANK [19] onde a integral é realizada numericamente, sendo $r(\eta)$ o resíduo.

Após o cálculo dos indicadores de erro, todos os elementos que tiveram o indicador maior que uma dada fração do maior indicador da solução são refinados (ZIENKIEWICZ [18] e RIBEIRO [8]):

$$\lambda_j \geq \alpha \lambda_{\max} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{III.52})$$

onde λ_j → indicador de erro do elemento j
 λ_{\max} → maior indicador na solução atual
 α → constante

Se $\alpha = 0$ refinam-se todos os elementos e se $\alpha = 1$ refina-se apenas o elemento que possui o maior indicador.

O valor da constante α é fornecida pelo usuário. Este valor depende do problema, porém α não influencia na precisão da solução. Uma opção que tem dado bons resultados é adotar:

$$0.25 \leq \alpha \leq 0.75$$

O critério de parada também é uma fase importante na análise de erros e foi utilizado aqui o somatório dos indicadores em todos os elementos do contorno, ou seja o estimador de erros pode ser dado como:

$$\int_{\Gamma} r(\eta)^2 d\Gamma \quad (\text{III.53})$$

Esta integral é nula para a solução exata e o refinamento pára quando:

$$\int_{\Gamma} r(\eta)^2 d\Gamma < \text{TOL} \quad (\text{III.54})$$

sendo TOL a tolerância estabelecida pelo usuário.

Para tornar a expressão (III.53) adimensional pode-se modificá-la da seguinte maneira:

$$\frac{\int_{\Gamma} r(\eta)^2 d\Gamma}{L \int_{\Gamma} u(x) p(x) d\Gamma} \quad (\text{III.55})$$

onde:

$L \rightarrow$ perímetro do contorno Γ

$$\int_{\Gamma} u(x) p(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} \bar{u}(x) p(x) d\Gamma + \int_{\Gamma} u(x) \bar{p}(x) d\Gamma$$

$u(x)$ e $p(x) \rightarrow$ soluções aproximadas

O cálculo do resíduo no MEC implica em uma integração ao longo de todo o contorno e foi utilizada a quadratura gaussiana com número de pontos de Gauss igual em todos os elementos e fixo em todas as soluções. Este cálculo é uma operação cara, porém não inviabiliza o método pois deve-se observar que em um método p-adaptativo a malha usada para discretizar o problema pode ser bastante grosseira. Isto significa que o cálculo é efetuado em poucos elementos, além de se evitar a montagem de equações desnecessárias utilizando a formulação hierárquica.

CAPÍTULO IV

INTEGRAÇÃO

Um dos assuntos que merece maior atenção no MEC refere-se a integração. Neste trabalho integrações numéricas serão empregadas para calcular os coeficientes h_{1j}^k e g_{1j}^k , vistos no capítulo anterior.

A dedução da equação integral do MEC para problemas de potencial, resulta em que as integrais indicadas na equação (II.26) devem ser efetuadas no sentido de valor principal de Cauchy. Entretanto, no caso da formulação direta para a equação de Laplace, estas integrais podem ser feitas no sentido usual conforme será comentado neste capítulo.

Resolver essas integrais analiticamente, levando-se em conta elementos curvos, torna-se praticamente inviável. A integração numérica geralmente pode ser feita utilizando-se o sistema de quadratura gaussiana, porém uma dificuldade surge quando o ponto fonte ξ_1 pertence ao elemento que está sendo integrado.

Ocorre que as integrais são funções de u^* e p^* que por sua vez dependem da distância r entre o ponto fonte ξ_1 e o ponto campo x no elemento j e quando $\xi = x$ (isto

é $r = 0$) as funções u^* e p^* tornam-se singulares:

$u^* \rightarrow$ apresenta singularidade da ordem $\ln(r)$

$$\ln(r) \rightarrow \infty$$

$p^* \rightarrow$ apresenta singularidade da ordem $1/r$

$$1/r \rightarrow \infty$$

Cuidados especiais também devem ser tomados quando o ponto fonte ξ_1 está muito próximo do ponto x , porém não pertence ao elemento que está sendo integrado. Neste caso as funções u^* e p^* tornam-se quase-singulares requerendo um tratamento especial antes de se usar quadratura de Gauss (Integral quase-singular).

Para se resolver as integrais isto é, na solução de h_{ij}^k e g_{ij}^k , consideram-se dois casos:

$i \neq j \Rightarrow$ o ponto fonte 'i' não pertence ao elemento j sobre o qual se integra: $r(\xi, x) \neq 0$

$i = j \Rightarrow$ o ponto fonte 'i' pertence ao elemento j sobre o qual se integra : ocorre $r(\xi, x) = 0$

No primeiro caso ($i \neq j$) estão incluídas as chamadas integrais não singulares, ou seja, as integrais suaves e as quase-singulares.

No segundo caso ($i = j$) estão as integrais singulares que são as integrais sobre os elementos que

contribuem para a diagonal principal da matriz de influência.

A solução das integrais é feita utilizando a integração numérica de Gauss associada a uma escolha seletiva do número de pontos de integração baseada na distância mínima relativa D do elemento j para o ponto fonte ξ_1 . O número de pontos de integração aumenta à medida que esta distância diminui.

Para as integrais quase-singulares e singulares empregou-se, neste trabalho, a técnica proposta por TELLES [20] que consiste em se fazer uma transformação não linear de coordenadas, expressa por uma transformação polinomial de 3º grau da forma:

$$\eta(\gamma) = a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d \quad (\text{IV.1})$$

onde

η é a coordenada natural do elemento;

γ é a coordenada transformada;

a, b, c, d são parâmetros dependentes da posição relativa entre o ponto fonte e o elemento integrado (TELLES [20]).

A transformação cúbica proposta por TELLES [20] automaticamente produz uma concentração dos pontos de integração de Gauss em torno da singularidade.

IV.1 - INTEGRAL NÃO SINGULAR

Aqui o ponto fonte 'i' não se localiza sobre o elemento j integrado e os coeficientes h_{ij}^k e g_{ij}^k são calculados por:

$$h_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |J| d\eta \quad (\text{IV.2})$$

$$g_{ij}^k = \int_{\Gamma_j} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |J| d\eta \quad (\text{IV.3})$$

As expressões acima, com integração numérica de Gauss, tornam-se :

$$h_{ij}^k = \sum_{l=1}^{NG} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |J| W_l \quad (\text{IV.4})$$

$$g_{ij}^k = \sum_{l=1}^{NG} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |J| W_l \quad (\text{IV.5})$$

sendo:

NG → número total de pontos de Gauss

W_l → fator peso associado ao ponto de Gauss l

η → valor de η no ponto l

p^*, u^*, N e $|J|$ → já definidos e também com valores associados ao ponto l.

Quando o ponto fonte 'i' está muito próximo do elemento que contém o ponto campo x tornando as funções u^* e p^* quase singulares, as expressões acima requerem muitos pontos de Gauss para se obter resultados precisos além de ser necessário subdividir esses elementos em subelementos.

Um caminho para se evitar a subdivisão e até para melhorar a eficiência da integração, proposto por TELLES [20] é utilizado aqui. Trata-se da transformação cúbica de variáveis apresentada em (IV.1) e repetida abaixo:

$$\eta(\gamma) = a \gamma^3 + b \gamma^2 + c \gamma + d$$

Considera-se, segundo TELLES [20], que $\bar{\eta}$ é a coordenada no sistema local do ponto mais próximo de ξ sobre o eixo- η encontrada no espaço real e não depois da transformação, e \bar{r} é um parâmetro livre. Assim:

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial \gamma} \right|_{\bar{\eta}} = \bar{r} \quad (\text{IV.6})$$

Neste caso, o Jacobiano da transformação é :

$$J(\bar{\gamma}) = G = 3 a \gamma^2 + 2 b \gamma + c \quad (\text{IV.7})$$

com os coeficientes a, b, c, d dados por:

$$a = (1 - \bar{r}) / Q \quad (\text{IV.8})$$

$$b = -3 (1 - \bar{r}) \bar{\gamma} / Q \quad (\text{IV.9})$$

$$c = (\bar{r} + 3 \bar{\gamma}^2) / Q \quad (\text{IV.10})$$

$$d = -b \quad (\text{IV.11})$$

sendo

$$Q = 1 + 3 \bar{\gamma}^2 \quad (\text{IV.12})$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} = & \sqrt[3]{ \left[-q + \sqrt{ (q^2 + p^3) } \right] } + \\ & + \sqrt[3]{ \left[-q - \sqrt{ (q^2 + p^3) } \right] } + \frac{\bar{\eta}}{1 + 2\bar{r}} \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

$$q = \frac{1}{2(1+2\bar{r})} \left[\left(\bar{\eta} (3-2\bar{r}) - \frac{2\bar{\eta}^3}{1+2\bar{r}} \right) \frac{1}{1+2\bar{r}} - \bar{\eta} \right] \quad (\text{IV.14})$$

$$p = \frac{1}{3(1+2\bar{r})^2} \left[4\bar{r} (1 - \bar{r}) + 3(1 - \bar{\eta}^2) \right] \quad (\text{IV.15})$$

O parâmetro livre \bar{r} pode ser tomado como função de D de modo que produza um erro mínimo de integração no sentido dos mínimos quadrados :

$$\begin{aligned}
 \bar{r} &= 0.85 + 0.24 \ln(D), & 0.05 \leq D \leq 1.3 \\
 \bar{r} &= 0.893 + 0.0832 \ln(D), & 1.3 \leq D \leq 3.618 \\
 \bar{r} &= 1, & 3.618 \leq D
 \end{aligned}
 \tag{IV.16}$$

onde a distância D é calculada pela fórmula:

$$D = 2 R_{\min} / |x(1, \bar{\eta}) - x(-1, \bar{\eta})| \tag{IV.17}$$

aqui R_{\min} é a distância mínima calculada no espaço real de ξ até o ponto mais próximo localizado sobre o elemento integrado e o símbolo $| \quad |$ significa a distância entre dois pontos no espaço real.

Os coeficientes dados em (IV.4) e (IV.5) tornam-se:

$$h_{ij}^k = \sum_{l=1}^{NG} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |G| |J| W_l \tag{IV.18}$$

$$g_{ij}^k = \sum_{l=1}^{NG} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |G| |J| W_l \tag{IV.19}$$

Observa-se que quando $\bar{r} = 1$ a transformação degenera para $\eta = \gamma$ e $G = 1$, ou seja, tem-se a integração numérica de Gauss comum - Integral suave.

IV.2 - INTEGRAL SINGULAR

Aqui o ponto fonte 'i' está localizado sobre o elemento j integrado e os coeficientes h_{ij}^k e g_{ij}^k são:

$$h_{ii}^k = c(\xi) N_k(\xi) + \int_{\Gamma_i} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |J| d\eta \quad (\text{IV.20})$$

$$g_{ii}^k = \int_{\Gamma_i} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |J| d\eta \quad (\text{IV.21})$$

sendo p^* e u^* as soluções fundamentais dadas pelas equações (II.15) e (II.17).

Devido as singularidades que ocorrem aqui (singularidade logarítmica e de $1/r$, respectivamente de u^* e p^*) a mesma transformação (TELLES [20]) que pode ser utilizada para integrais quase-singulares é empregada aqui, porém com a seguinte condição:

$$\left. \frac{\partial^2 \eta}{\partial^2 \gamma} \right|_{\bar{\eta}} = 0 \quad (\text{IV.22})$$

O jacobiano que é dado pela equação (IV.7) suaviza a singularidade e a integração comum de Gauss pode ser usada. Os parâmetros a, b, c, d são dados por:

$$a = 1 / Q \quad (\text{IV.23})$$

$$b = -3 \bar{\gamma} / Q \quad (\text{IV.24})$$

$$c = 3 \gamma^2 / Q \quad (\text{IV.25})$$

$$d = - b \quad (\text{IV.26})$$

sendo

$$Q = 1 + 3 \bar{\gamma}^2 \quad (\text{IV.27})$$

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{(\bar{\eta} \eta^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\eta} \eta^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (\text{IV.28})$$

onde $\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1$.

Agora as expressões (IV.20) e (IV.21), utilizando Gauss, tornam-se:

$$h_{11}^k = c(\xi) N_k(\xi) + \sum_{l=1}^{NG} N_k(\eta) p^*(\xi, x) |G| |J| W_l \quad (\text{IV.29})$$

$$g_{11}^k = \sum_{l=1}^{NG} N_k(\eta) u^*(\xi, x) |G| |J| W_l \quad (\text{IV.30})$$

A singularidade que aparece no coeficiente h_{11}^k devido ao termo $1/r$ não acarreta nenhuma dificuldade no cálculo deste coeficiente quando a análise é feita para elementos de geometria reta porque o fator $\partial r / \partial n$, que multiplica $1/r$, presente no integrando da equação (IV.20) é nulo

Mas se a geometria não é reta, como é o caso da consideração feita neste trabalho, este fator $(\partial r/\partial n)$ não é mais identicamente nulo porque o vetor normal não é perpendicular ao vetor r em todo ponto do contorno (ver figura IV.1).



Figura IV.1 - Representação do vetor normal no elemento
(a) elemento reto e (b) elemento curvo.

Para se conhecer o comportamento deste fator $(1/r) \cdot (\partial r/\partial n)$ no integrando, na presença do ponto singular, um estudo foi elaborado e está relatado na seção seguinte.

IV.3 - COMPORTAMENTO DO FATOR $(1/r)\partial r/\partial n$

A integral da expressão (IV.20) pode ser explicitada da seguinte maneira:

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_i} N_k(\eta) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} |J| d\eta \quad (\text{IV.31})$$

considera-se:

$$I = N_k(\eta) \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} |J|$$

$$P = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

Desenhar a curva do termo P para verificar o que ocorre no ponto singular é o objetivo da análise que se segue:

Considera-se um elemento quadrático de geometria curva correspondendo ao arco de círculo dado na figura IV.2 a seguir:

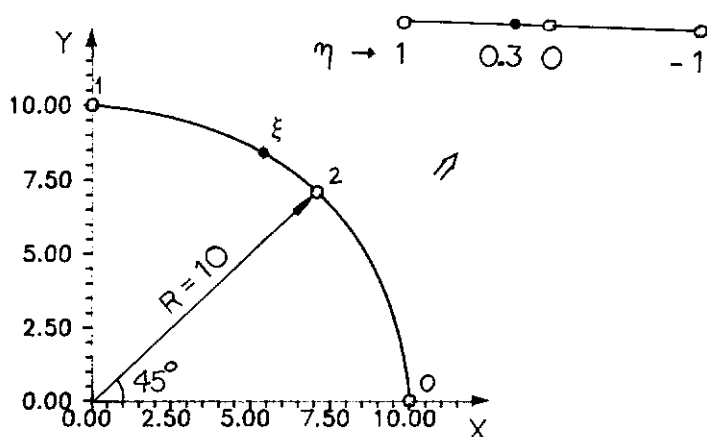


Figura IV.2 - Representação de um elemento quadrático (arco de círculo) no sistema de coord. XY e em coord. natural.

Substituindo os dados deste elemento nas equações dadas em (III.15) e (III.18) para elemento de geometria

quadrática, obtém-se:

$$x(\eta) = 5(1-\eta) + 5(1-\sqrt{2})(\eta^2-1)$$

$$y(\eta) = 5(1+\eta) + 5(1-\sqrt{2})(\eta^2-1)$$

com estas expressões para o cálculo das coordenadas em qualquer ponto η , gerou-se um programa numérico para efetuar o cálculo de P, com η tendo uma variação de -1 a +1 e incremento de 0.0125 de forma a passar bem próximo do ponto singular $\xi = 0.3$ e observar o comportamento da curva.

Os resultados obtidos podem ser vistos nas figuras IV.3 e IV.4.

Analisando os gráficos apresentados nessas figuras, pôde-se verificar o seguinte:

-a curva representativa do fator $\partial r/\partial n$ se comportou como esperado, tendendo a zero no ponto singular, mas com valores diferentes de zero no resto do elemento. Exatamente no ponto singular não é possível se determinar numericamente o valor do fator $(\partial r/\partial n)$ pois aí $r = 0$, por isso aparece uma descontinuidade na curva.

-a curva $(1/r)(\partial r/\partial n)$ teve um comportamento diferente do que se poderia supor. Ela é suave próximo do ponto singular tendendo a um número finito e diferente de zero. Aqui também aparece uma descontinuidade na curva

próximo a coordenada natural do ponto singular, porque aí não é possível determinar numericamente o valor do termo P.

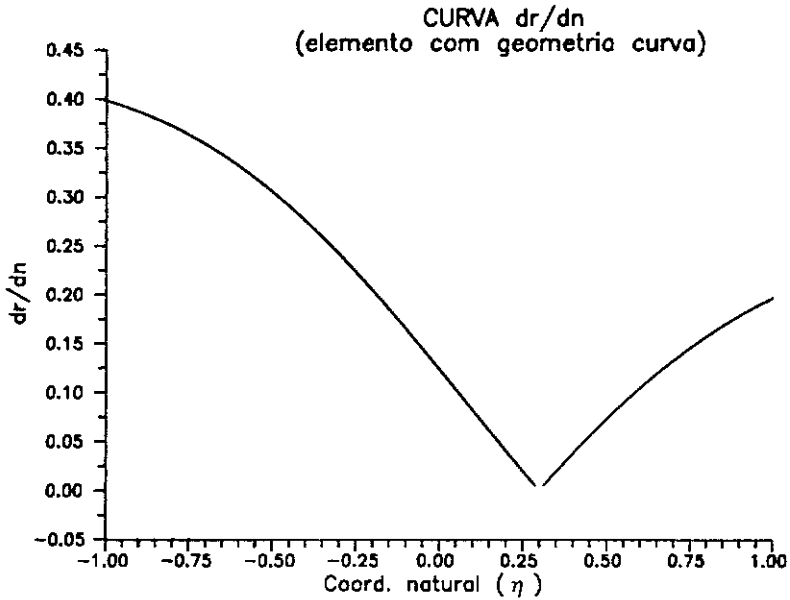


Figura IV.3

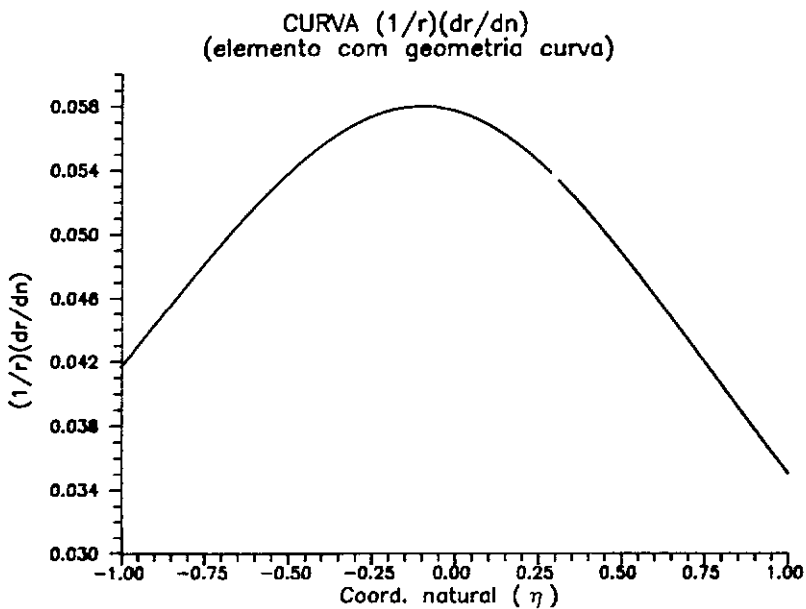


Figura IV.4

Com base nestas informações um estudo mais aprimorado foi elaborado chegando-se à seguinte conclusão (MANSUR, TELLES, PRODANOFF e FRAUCHES [21]):

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{1}{2\rho(\xi)}$$

onde $\rho(\xi)$ é o raio de curvatura do contorno Γ no ponto fonte ξ .

Um resumo do cálculo deste limite pode ser visto no apêndice B.

CAPÍTULO V

APLICAÇÕES

V.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de problemas regidos pela equação de Laplace que foram resolvidos pelo programa implementado.

O programa, que foi implementado seguindo os procedimentos vistos nos capítulos anteriores, foi instalado no computador IBM-4381, do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, partindo do programa desenvolvido por WILLMERSDORF [7] em um microcomputador. Os algoritmos foram escritos na linguagem Pascal, armazenando os dados em listas simplesmente encadeadas (SCHIMTIZ e TELES [22]).

As discretizações iniciais foram as mais simples possíveis, de modo a dar maior evidência ao processo auto-adaptativo, porém sem deixar de ser compatível com a geometria e condições de contorno.

As ordens de interpolação para as incógnitas e condições de contorno são independentes, sendo que na primeira solução as incógnitas são interpoladas com função linear em todos os elementos.

Na entrada de dados do programa o usuário pode escolher a ordem máxima que deseja para interpolar as incógnitas, sendo que esta ordem pode variar de um até onze. A geometria, conforme está no capítulo III, pode ser interpolada com funções de no máximo ordem cinco.

O valor adotado para tolerância de parada foi da ordem de $1,0 \times 10^{-7}$ para a maioria das análises realizadas. Este valor foi tomado como referência dos exemplos de geometria reta testados por WILLMERSDORF [7].

O estimador de erro empregado neste trabalho, que está apresentado no capítulo III, ainda é provisório e um estudo melhor sobre ele é necessário.

Todas as análises presentes aqui foram efetuadas no equipamento mencionado com precisão dupla, mas utilizou-se também softwares aplicativos em micro computador na obtenção dos gráficos e figuras apresentadas.

V.2 - EXEMPLO 1

Foi resolvido como primeiro exemplo um círculo extraído de um domínio retangular (figura V.1) onde está definida uma função que atende à equação de Laplace.

No sistema de coordenadas XY a solução analítica é dada pela função:

$$u = 100 - (100/L) X \quad (V.1)$$

portanto no sistema de coordenadas $x'y'$ a solução analítica é

$$u = 100 - (100/L) (x' + L/2) \quad (V.2)$$

São feitas duas análises para este exemplo, uma com malha mais grosseira (análise 1) e outra utilizando uma malha mais refinada (análise 2).

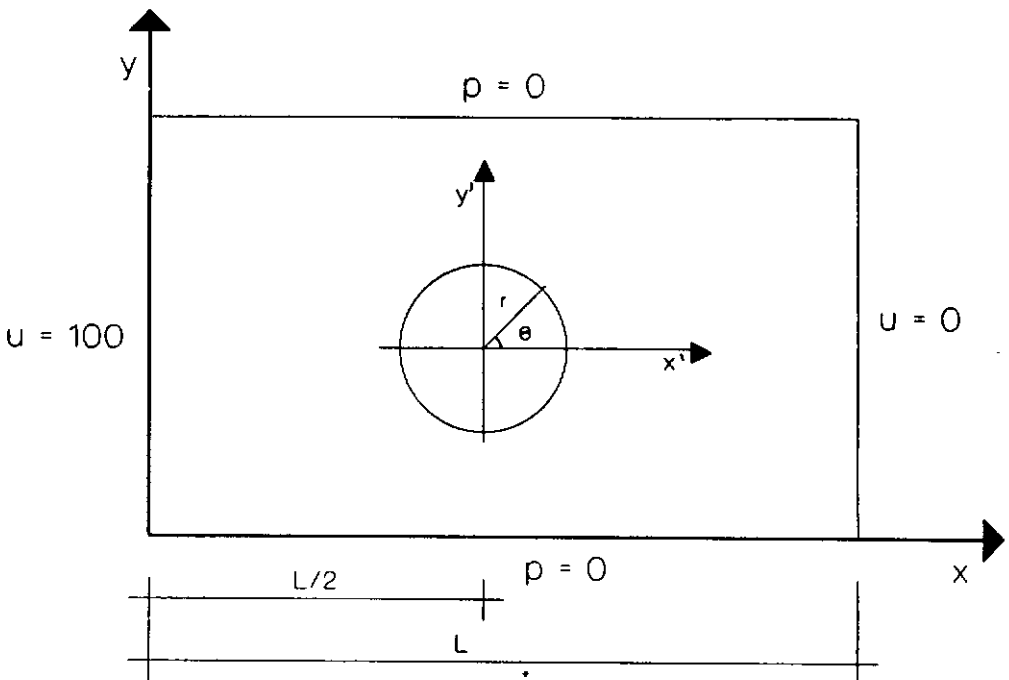


Figura V.1 - Representação do exemplo 1

Para as análises apresentadas a seguir adotou-se

$L = 100$ e $r = 10$.

V.2.1 - ANÁLISE 1

Para esta análise, a discretização do contorno foi feita utilizando elementos quadráticos conforme mostra a figura V.2.

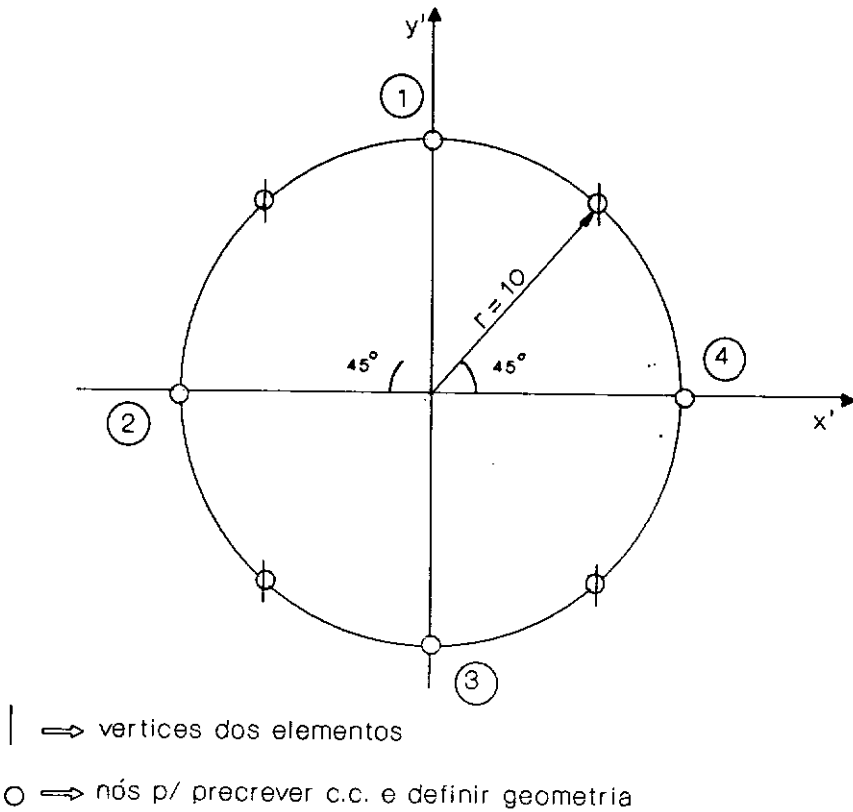


Figura V.2 - Malha de elementos de contorno utilizada na análise 1

De acordo com a equação (V.2) e os valores adotados para r e L , o potencial e o fluxo no contorno circular mostrado na figura V.2 podem ser calculados respectivamente por :

$$u = 50 - x' \quad \text{ou} \quad u = 50 - 10 \cos(\theta) \quad (\text{V.3})$$

$$e \quad p = - \cos(\theta) \quad (\text{V.4})$$

Entretanto o contorno da análise numérica não é circular. Neste caso, o potencial em pontos nodais ainda pode ser calculado por (V.3) e é representado exatamente pelas funções de interpolação quadráticas (ordem 2) utilizadas. O mesmo não ocorre com o fluxo. Os seus valores nodais devem ser calculados a partir da direção da normal na geometria discretizada, e a representação através de polinômios é sempre aproximada. Então o fluxo é dado por:

$$p = - n_1 \quad (\text{V.5})$$

onde n_1 é o cosseno diretor na direção x , do vetor unitário normal.

Foi prescrito potencial interpolado com funções de ordem 2 em todos os elementos do contorno e os valores, calculados pela expressão V.3, estão na tabela V.1.

O valor da constante α , presente no critério de refinamento empregado (equação III.52), adotado para este exemplo é igual a 0.5. Isto quer dizer que a ordem de interpolação da incógnita aumenta em todos os elementos cujos indicadores relativos sejam maiores que 50%.

A tolerância adotada aqui foi igual a 1.0×10^{-7} e a ordem máxima adotada para a interpolação das incógnitas foi igual a dez.

Elem.	η	Potencial (u)
1	-1	42.92893
	0	50.0
	1	57.07107
2	-1	57.07107
	0	60.0
	1	57.07107
3	-1	57.07107
	0	50.0
	1	42.92893
4	-1	42.92893
	0	40.0
	1	42.92893

Tabela V.1 - Potencial prescrito no contorno da figura V.2

Todos os vértices são do tipo interpolado, isto é o ponto fonte é deslocado para o interior do elemento e ao invés de ter um ponto fonte em cada vértice vão existir dois pontos fontes para cada vértice (ver figura V.3). Deste modo são montadas duas equações para cada vértice, o que equivale dizer neste exemplo que têm-se 8 equações na solução linear.

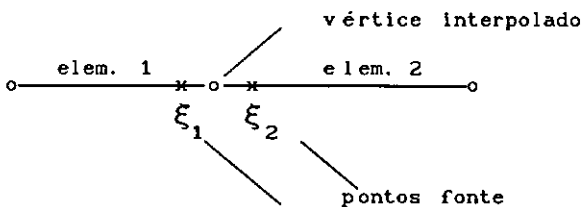


Figura V.3 - Elemento com vértice interpolado.

Para os nós interpolados, a coordenada natural dos pontos fontes correspondentes às funções lineares, representada aqui pela letra t , foi igual a 0.934. A mesma análise foi feita também para $t = 0.800$.

O processo p-adaptativo foi interrompido quando atingiu a tolerância dada para as duas análises. Isto ocorreu na solução número quatro, ficando a malha com interpolação para as incógnitas de ordem três nos elementos 1 e 3 e permanecendo com a ordem dois nos elementos 2 e 4.

Na tabela V.2 pode-se observar esta solução p-adaptativa junto com a solução exata no contorno aproximado, assim como o erro percentual encontrado, calculado por:

$$E = \frac{\text{sol. exata} - \text{sol. aprox.}}{\text{sol. exata}} \times 100\% \quad (\text{V.6})$$

Os resultados, podem também ser observados pelas figuras V.4 e V.5, onde têm-se as curvas representativas da solução exata e da solução analítica no círculo junto com os valores encontrados para o fluxo com a quarta solução p-adaptativa, respectivamente para a análise com $t = 0.934$ e $t = 0.800$.

Os duplos sinais em um mesmo ponto que aparecem nas figuras equivalem à descontinuidades que apareceriam no traçado da curva representativa da quarta solução p-adaptativa. Estes pontos correspondem aos vértices

interpolados dos elementos. Portanto um dos sinais corresponde ao valor no nó final de um elemento e o outro corresponde ao valor no nó inicial do elemento adjacente.

Observa-se que os resultados são melhores na solução com $t = 0.934$, ou seja quando o ponto fonte está mais próximo da extremidade dos elementos. E isto fica mais claro observando a figura V.6 onde representaram-se as duas soluções no elemento 2. Para os nós extremos os resultados são piores, provavelmente por serem interpolados.

Elem	η	4ª solução adaptativa				solução exata no contorno aproximado
		$t = 0.934$	E(%)	$t = 0.800$	E(%)	
1	-1	- 0.62504	2.02	- 0.62205	2.49	-0.63795
	0					0.0
	1	0.62549	1.95	0.62213	2.47	0.63795
2	-1	0.75296	2.22	0.74783	2.89	0.77008
	0	0.99167	0.83	0.99333	0.67	1.0
	1	0.75298	2.22	0.74782	2.89	0.77008
3	-1	0.62573	1.86	0.62221	2.47	0.63795
	0					0.0
	1	- 0.62529	1.98	- 0.62214	2.48	-0.63795
4	-1	- 0.75253	2.28	- 0.74775	2.90	-0.77008
	0	- 0.99182	0.82	- 0.99335	0.67	-1.0
	1	- 0.75251	2.28	- 0.74775	2.90	-0.77008

Tabela V.2 - Fluxo nos elementos da análise 1 :

3ª Solução p-adaptativa X solução exata

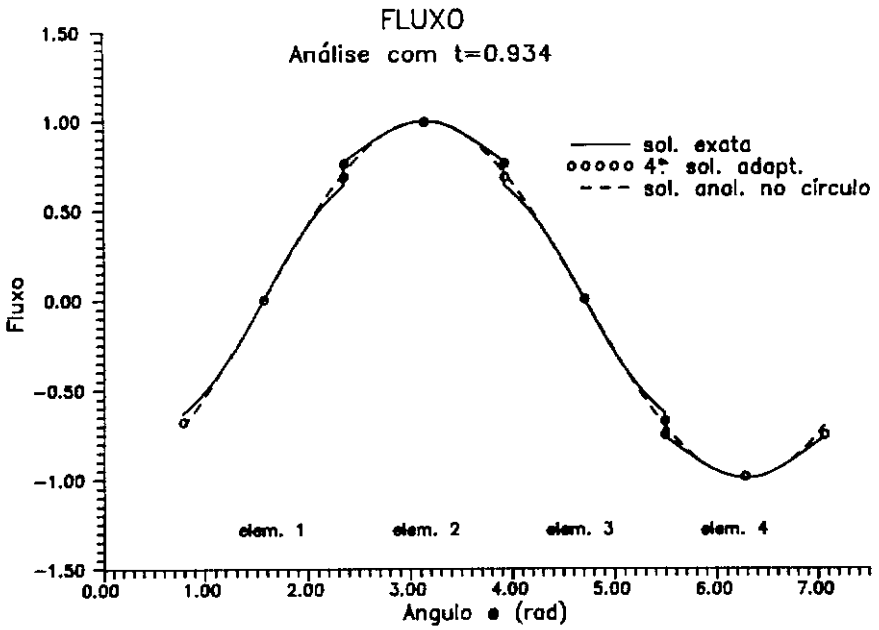


Figura V.4

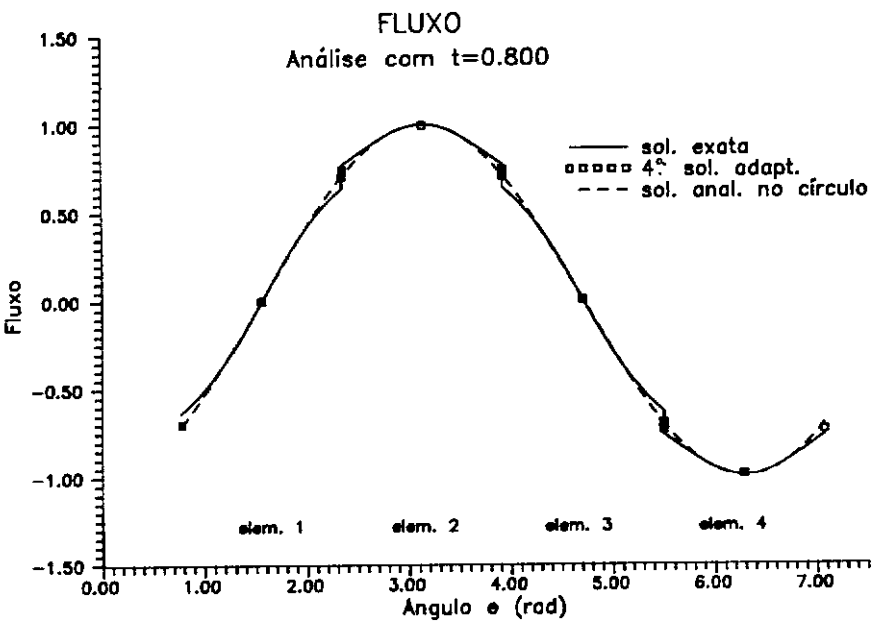


Figura V.5

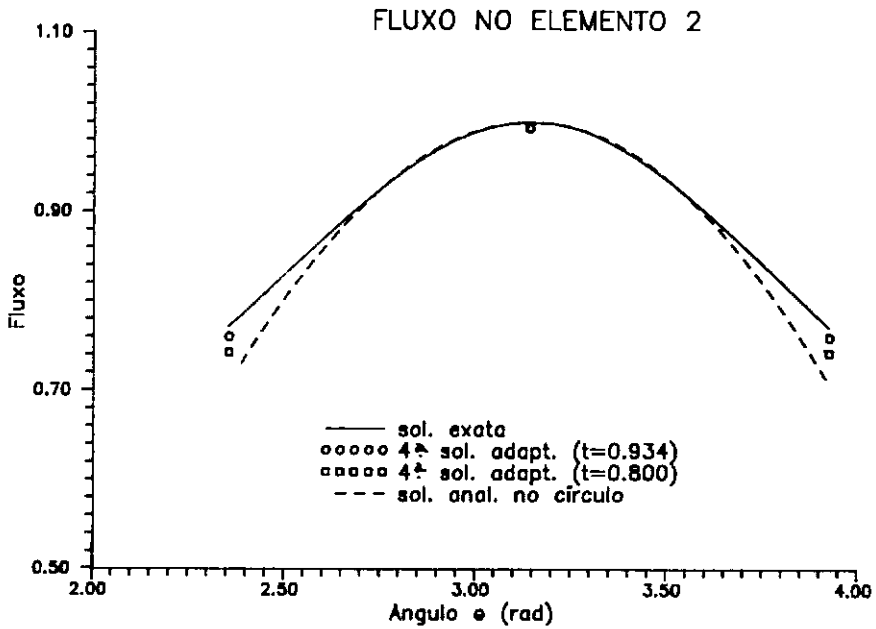


Figura V.6.

Alterou-se a tolerância para 1×10^{-9} para verificar se realmente havia convergido na solução quatro. Pode-se observar, tanto na análise com $t=0.943$ como na análise com $t=0.800$, que os elementos 1 e 3 permaneceram com ordem 3 de interpolação após a quarta solução e somente os elementos 2 e 4 foram sendo refinados. O procedimento parou quando se resolvia o sistema de equações para a solução número 13, com a interrupção da execução indicando que a matriz de coeficientes refinada era singular. Na solução número 13 os elementos 2 e 4 não foram refinados pois estes já tinham atingido a ordem máxima adotada para esta análise.

A história do refinamento pode ser acompanhada pela figura V.7 ,onde estão indicados a ordem da interpolação de cada elemento e o número de graus de liberdade total da solução.

O comportamento de algumas das soluções p-adaptativas nos nós extremos e centrais dos elementos pode ser observado nas tabelas V.3 e V.4. Na tabela aparecem espaços não preenchidos, porque nas respectivas soluções a incógnita não é calculada para o nó central do elemento.

Com o aumento do grau de liberdade (ou seja, da ordem das funções de interpolação) a resposta, que parecia ter convergido na solução quatro, começa a oscilar nos vértices após a solução número oito. Pode-se observar pela tabela que na análise com o ponto fonte mais próximo do extremo do elemento (análise com $t=0.934$), a oscilação é muito discreta. Esta oscilação é mais acentuada na análise que considera a coordenada natural dos pontos fontes correspondentes às funções lineares, para os nós interpolados (no caso os vértices), mais afastada do extremo dos elementos, isto é na análise com $t=0.800$.

Como não se observa uma melhora significativa na precisão da resposta com o aumento da ordem de interpolação pode ser que o refinamento p-adaptativo esteja efetuando soluções desnecessárias devido a tolerância muito baixa que foi dada. Talvez isto também esteja provocando a oscilação

na resposta.

Para ilustrar este comportamento, na figura V.8 representou-se o valor das incógnitas encontrados com as soluções p-adaptativas no nó inicial do elementos 2, para a solução com $t=0.800$.

Pela figura parece que não converge e isto pode estar ocorrendo por estar na faixa de "round off errors", de erros de integração ou ainda devido a malha ser muito grosseira.

A evolução do estimador em função do número de graus de liberdade está mostrada na figura V.9. Existem erros numéricos que impedem o estimador de ir para zero, que podem ser devido aos fatores já mencionados. Estes erros vão se acumulando e piorando o refinamento da solução, que passa a oscilar.

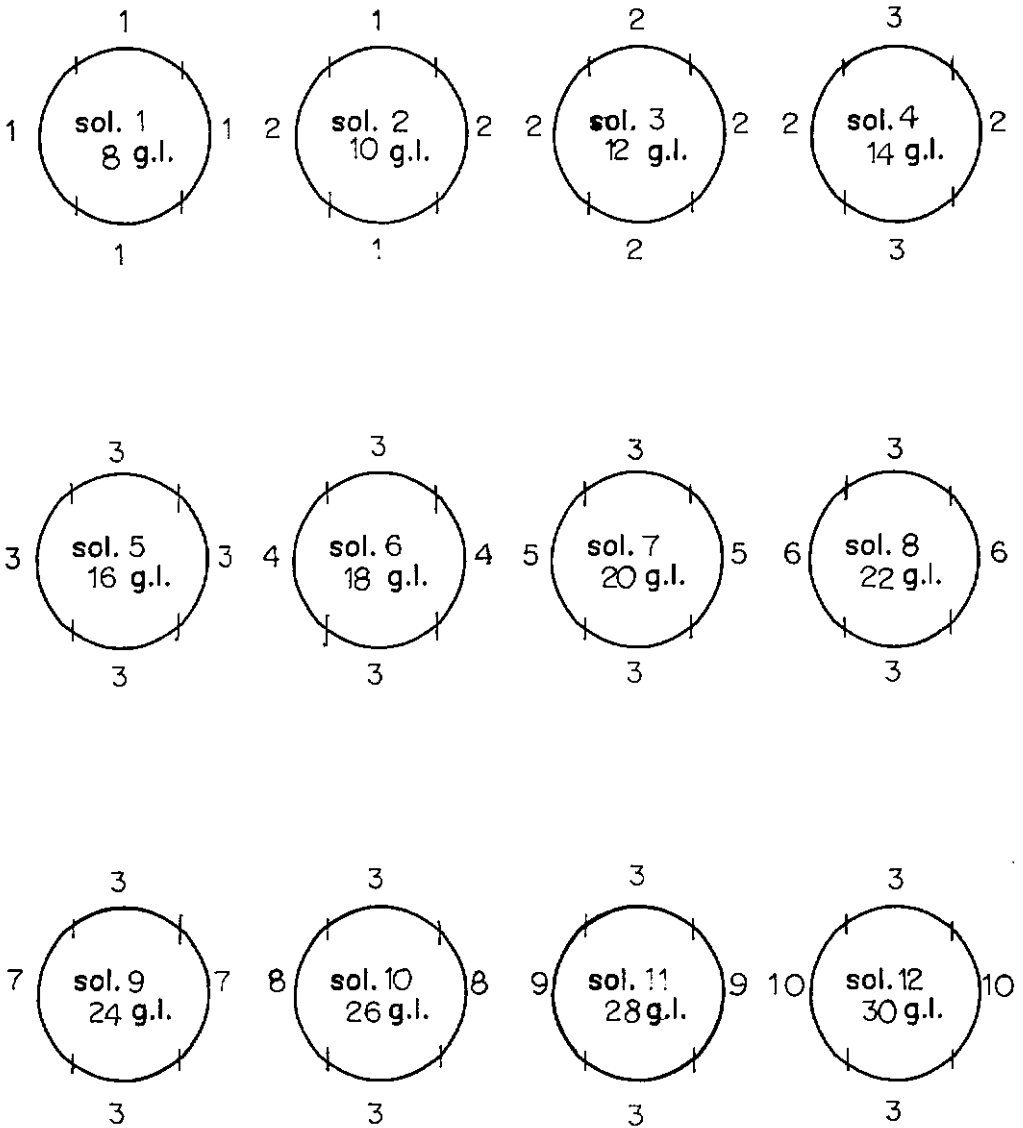


Figura V.7 - História do refinamento.

Elem.	η	solução 1	solução 2	solução 3	solução 4
1	-1	-0.70850	-0.68220	-0.68206	-0.62504
	0			-0.00007	
	1	0.70864	0.68236	0.68250	0.62549
2	-1	0.87699	0.75847	0.75850	0.75296
	0		0.99277	0.99277	0.99167
	1	0.87699	0.75847	0.75850	0.75298
3	-1	0.70864	0.68236	0.68250	0.62573
	0			-0.00007	
	1	-0.70850	-0.68220	-0.68206	-0.62529
4	-1	-0.87685	-0.75808	-0.75806	-0.75253
	0		-0.99292	-0.99292	-0.99182
	1	-0.87685	-0.75808	-0.75806	-0.75251
Elem.	η	solução 5	solução 8	solução 10	solução 12
1	-1	-0.62497	-0.62507	-0.62694	-0.62798
	0				
	1	0.62558	0.62553	0.62735	0.62835
2	-1	0.75393	0.75694	0.72428	0.70219
	0		0.99214	0.99185	0.99190
	1	0.75201	0.75696	0.72430	0.70220
3	-1	0.62564	0.62577	0.62757	0.62857
	0				
	1	-0.62535	-0.62531	-0.62716	-0.62819
4	-1	-0.75326	-0.75560	-0.72164	-0.69855
	0		-0.99217	-0.99187	-0.99192
	1	-0.75179	-0.75560	-0.72162	-0.69854

Tabela V.4 - Comportamento das soluções p-adaptativas (nós extremos e centrais dos elementos) para a análise 1 com $t=0.934$

Elem.	η	solução 1	solução 2	solução 3	solução 4
1	-1	-0.70504	-0.70285	-0.70282	-0.62205
	0			-0.00001	
	1	0.70506	0.70287	0.70290	0.62213
2	-1	0.88937	0.74103	0.74103	0.74783
	0		0.99405	0.99405	0.99333
	1	0.88937	0.74103	0.74103	0.74782
3	-1	0.70506	0.70287	0.70290	0.62221
	0			-0.00001	
	1	-0.70504	-0.70285	-0.70282	-0.62214
4	-1	-0.88935	-0.74095	-0.74095	-0.74775
	0		-0.99408	-0.99408	-0.99335
	1	-0.88935	-0.74095	-0.74095	-0.74775
Elem.	η	solução 5	solução 8	solução 10	solução 12
1	-1	-0.62166	-0.62411	-0.67102	-0.55400
	0				
	1	0.62229	0.62415	0.67097	0.55375
2	-1	0.74455	0.73174	0.29216	1.73217
	0		0.99270	0.99394	0.98883
	1	0.75112	0.73172	0.29214	1.73218
3	-1	0.62183	0.62422	0.67101	0.55372
	0				
	1	-0.62231	-0.62419	-0.67107	-0.55398
4	-1	-0.74437	-0.73122	-0.29043	-1.72691
	0		-0.99271	-0.99395	-0.98885
	1	-0.75114	-0.73122	-0.29045	-1.72689

Tabela V.3 - Comportamento das soluções p-adaptativas (nós extremos e centrais dos elementos) para a análise com $t=0.800$

Comportamento das soluções
no nó inicial do elemento 2

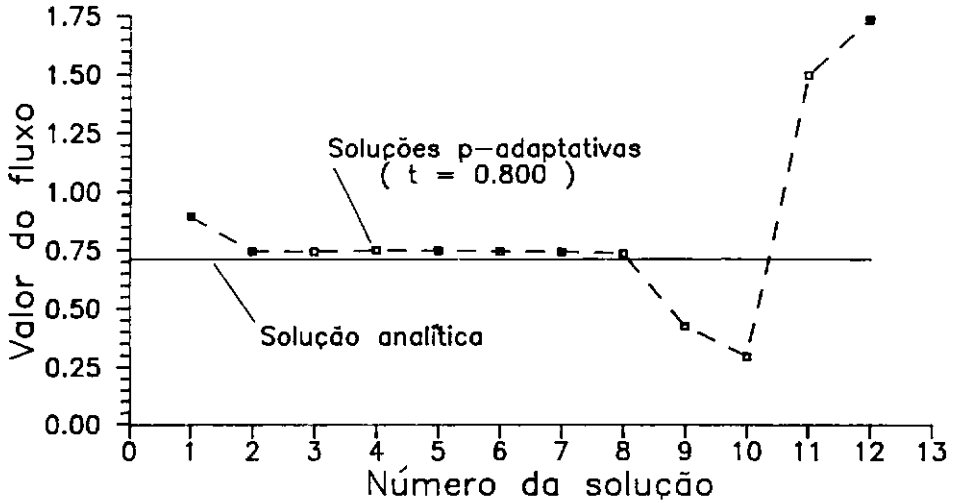


Figura V.8 - Valor da incógnita (fluxo) no nó inicial do elemento 2 (análise com $t = 0.800$)

ESTIMADOR

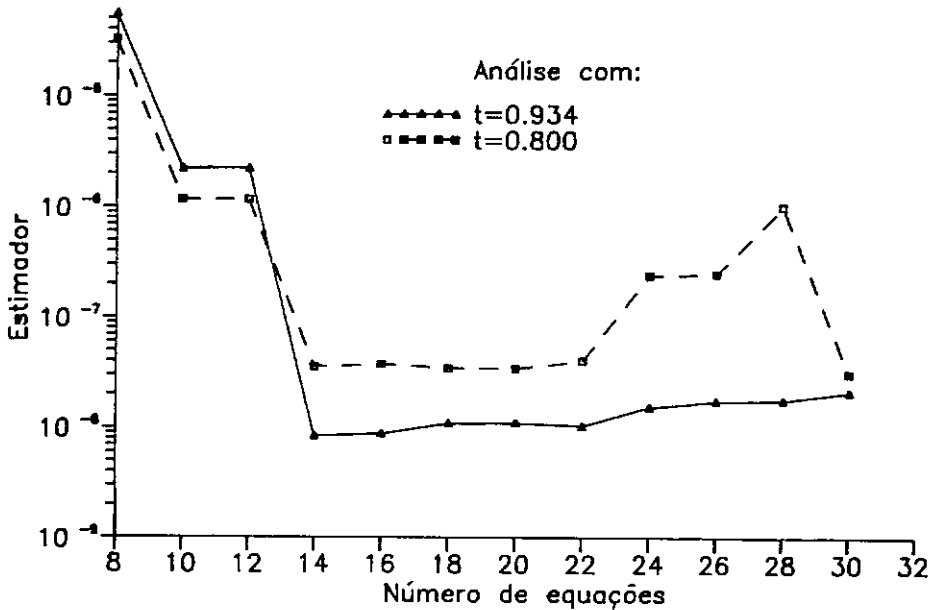


Figura V.9 -

As oscilações observadas junto com o comportamento anormal do estimador levaram ao teste de mais alguns exemplos para se verificar se o mesmo se repetia. Pensou-se inicialmente em tentar uma malha menos grosseira para o mesmo exemplo e prescrever condições de contorno mistas. Estas análises podem ser vistas a seguir.

V.2.2 - ANÁLISE 2

Nesta análise a malha de elementos de contorno usada está representada na figura V.10. Os elementos também são isoparamétricos quadráticos e os valores de potencial e fluxo nos nós dos elementos podem ser obtidos pelas expressões (V.3) e (V.5).

Entretanto, como nesta análise a malha é mais refinada que a anterior, os valores de fluxo no círculo (calculados com a expressão (V.4)) são próximos dos valores exatos (calculados no contorno discretizado com a expressão (V.5)) e assim servem para comparação.

Foram resolvidos dois problemas: prescrevendo o potencial em todos os elementos (problema de Dirichlet) e com potencial e fluxo prescritos (problema de Cauchy) conforme consta na tabela V.5. Os valores prescritos para o fluxo foram calculados com a expressão (V.4).

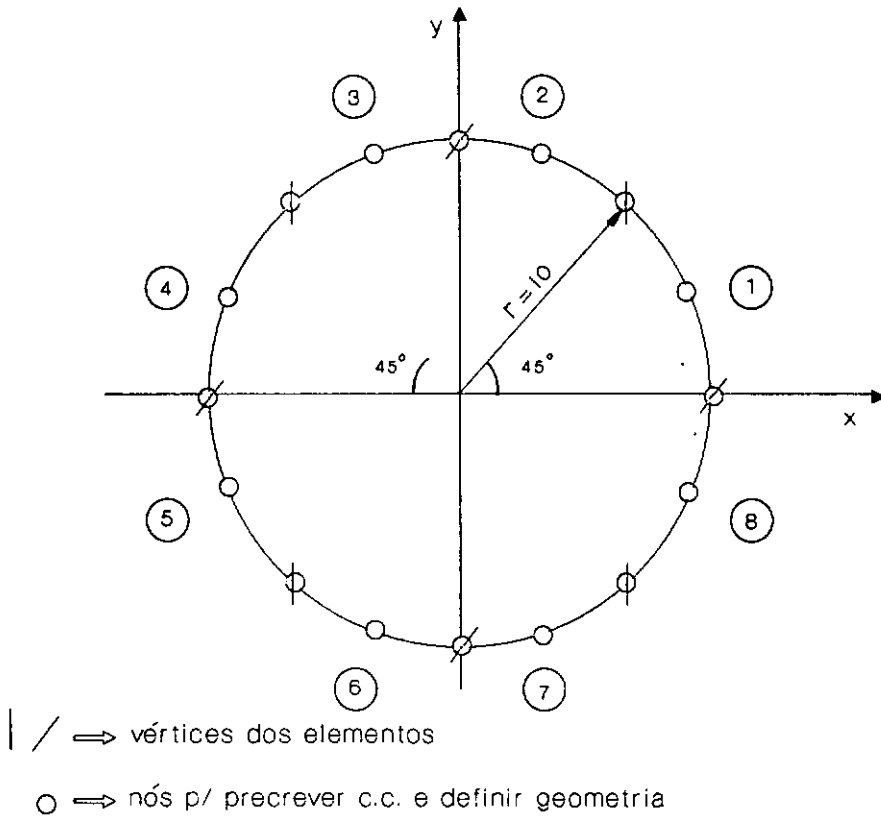


Figura V.10 - Malha de Elementos de contorno p/ análise 2.

Elem.	Dirichlet		Cauchy	
	Tipo	Ordem	Tipo	Ordem
1	\bar{u}	2	\bar{u}	2
2	\bar{u}	2	\bar{u}	2
3	\bar{u}	2	\bar{p}	2
4	\bar{u}	2	\bar{p}	2
5	\bar{u}	2	\bar{p}	2
6	\bar{u}	2	\bar{p}	2
7	\bar{u}	2	\bar{u}	2
8	\bar{u}	2	\bar{u}	2

Tabela V.5 - Tipo e ordem das condições de contorno prescritas (\bar{u} = potencial, \bar{p} = fluxo).

Os 8 elementos são interpolados nos nós inicial e final, com a coordenada dos pontos fonte das funções lineares igual a 0.934 e 0.800.

O valor da constante α é o mesmo adotado no exemplo anterior: $\alpha = 0.5$. Aqui adotou-se para tolerância de parada 1.0×10^{-7} e seis para ordem máxima de interpolação das incógnitas.

Para o problema de Dirichlet o refinamento p-adaptativo parou quando atingiu a tolerância especificada, tanto para a análise com $t=0.934$ como para $t=0.800$. Isto ocorreu na solução número 3.

Os estimadores encontrados nesta solução foram :

$$\text{estim} = 4.7 \times 10^{-8} \quad , \text{ com } t = 0.934$$

$$\text{estim} = 3.0 \times 10^{-8} \quad , \text{ com } t = 0.800$$

Para o problema de Cauchy o processo p-adaptativo parou também quando atingiu a tolerância especificada, porém isto ocorreu na solução número 5 para a análise com $t = 0.934$ e na solução 4 para a análise com $t = 0.800$. Os valores encontrados para os estimadores das soluções finais foram :

$$\text{estim} = 4.177 \times 10^{-8} \quad , \text{ com } t = 0.934$$

$$\text{estim} = 8.314 \times 10^{-8} \quad , \text{ com } t = 0.800$$

A história de refinamento nos elementos pode ser vista nas tabelas V.6 e V.7.

Análise com $t = 0.934$ e $t = 0.800$									
Sol.	Elementos								N ^o Eq.
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
2	2	1	1	2	2	1	1	2	20
3	2	2	2	2	2	2	2	2	24

Tabela V.6 - Ordens de interpolação das incógnitas:
Problema de Dirichlet

Análise com $t = 0.934$									
Sol.	Elementos								N ^o Eq.
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
2	1	1	1	2	2	1	1	1	18
3	1	1	2	2	2	2	1	1	20
4	2	1	2	2	2	2	1	2	22
5	2	2	2	2	2	2	2	2	24
Análise com $t = 0.800$									
Sol.	Elementos								N ^o Eq.
	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
2	1	1	1	2	2	1	1	1	18
3	1	1	2	2	2	2	1	1	20
4	2	1	2	2	2	2	1	2	22

Tabela V.7 - Ordens de interpolação das incógnitas:
Problema de Cauchy

Nas tabelas V.8 e V.9 têm-se a solução final p-adaptativa e as soluções analíticas, no contorno aproximado (exata) e no círculo, nos nós extremos e centrais dos elementos de ambos os problemas.

Para o problema de Dirichlet a solução com $t=0.934$ não foi melhor que a solução com $t=0.800$ em todos os elementos, como foi observado na análise 1 feita com a mesma tolerância. Já para o problema de Cauchy, nos elementos em que a incógnita era o potencial, a solução com $t = 0.800$ foi aparentemente melhor.

O comportamento do estimador de erro está representado nas figuras V.11 e V.12.

Elem.	η	solução final p-adaptativa		solução analítica (exata)	solução analítica no círculo
		t = 0.934	t = 0.800		
1	-1	-1.00466	-1.00512	-0.99990	-1.0
	0	-0.92144	-0.92196	-0.92388	-0.92388
	1	-0.71577	-0.71325	-0.71703	-0.70711
2	-1	-0.70584	-0.70819	-0.69708	-0.70711
	0	-0.38088	-0.38189	-0.38268	-0.38268
	1	-0.00885	-0.00357	-0.01407	0.0
3	-1	0.00519	0.00358	0.01407	0.0
	0	0.38358	0.38188	0.38268	0.38268
	1	0.70249	0.70820	0.69708	0.70711
4	-1	0.71243	0.71326	0.71703	0.70711
	0	0.92415	0.92195	0.92388	0.92388
	1	1.00101	1.00513	0.99990	1.0
5	-1	1.00101	1.00513	0.99990	1.0
	0	0.92415	0.92195	0.92388	0.92388
	1	0.71243	0.71326	0.71703	0.70711
6	-1	0.70249	0.70820	0.69708	0.70711
	0	0.38358	0.38188	0.38268	0.38268
	1	0.00519	0.00358	0.01407	0.0
7	-1	-0.00885	-0.00357	-0.01407	0.0
	0	-0.38088	-0.38189	-0.38268	-0.38268
	1	-0.70584	-0.70819	-0.69708	-0.70711
8	-1	-0.71577	-0.71325	-0.71703	-0.70711
	0	-0.92144	-0.92196	-0.92388	-0.92388
	1	-1.0047	-1.00512	-0.99990	-1.0

Tabela V.8 - Valor das incógnitas para o problema de Dirichlet (nos nós extremos e centrais)

Elem.	η	solução final p-adaptativa		solução analítica (exata)	solução analítica no círculo
		$t = 0.934$	$t = 0.800$		
1	-1	-1.00441	-1.00620	-0.99990	-1.0
	0	-0.92114	-0.92332	-0.92388	-0.92388
	1	-0.71535	-0.71471	-0.71703	-0.70711
2	-1	-0.70473	-0.72461	-0.69708	-0.70711
	0	-0.38058		-0.38268	-0.38268
	1	-0.00156	-0.02123	-0.01407	0.0
3	-1	49.99456	49.99911	50.0	50.0
	0	53.81881	53.83506	53.82683	53.82683
	1	57.06506	57.07614	57.07107	57.07107
4	-1	57.06059	57.07209	57.07107	57.07107
	0	59.22879	59.24942	59.23879	59.23879
	1	59.99018	60.00133	60.0	60.0
5	-1	59.99018	60.00133	60.0	60.0
	0	59.22879	59.24942	59.23879	59.23879
	1	57.06059	57.07209	57.07107	57.07107
6	-1	57.06506	57.07614	57.07107	57.07107
	0	53.81881	53.83506	53.82683	53.82683
	1	49.99456	49.99911	50.0	50.0
7	-1	-0.00156	-0.02121	-0.01407	0.0
	0	-0.38058		-0.38268	-0.38268
	1	-0.70473	-0.72461	-0.69708	-0.70711
8	-1	-0.71535	-0.71471	-0.71703	-0.70711
	0	-0.92114	-0.92332	-0.92388	-0.92388
	1	-1.00441	-1.00620	-0.99990	-1.0

Tabela V.9 - Valor das incógnitas para o problema de Cauchy (nos nós extremos e centrais)

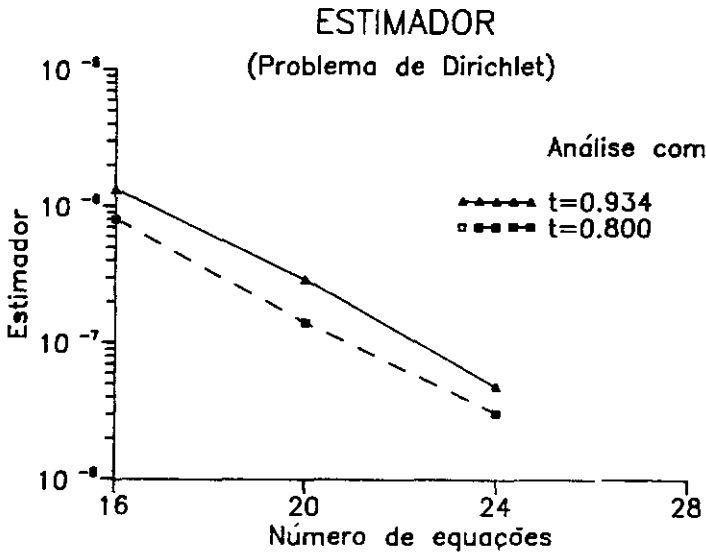


Figura V.11

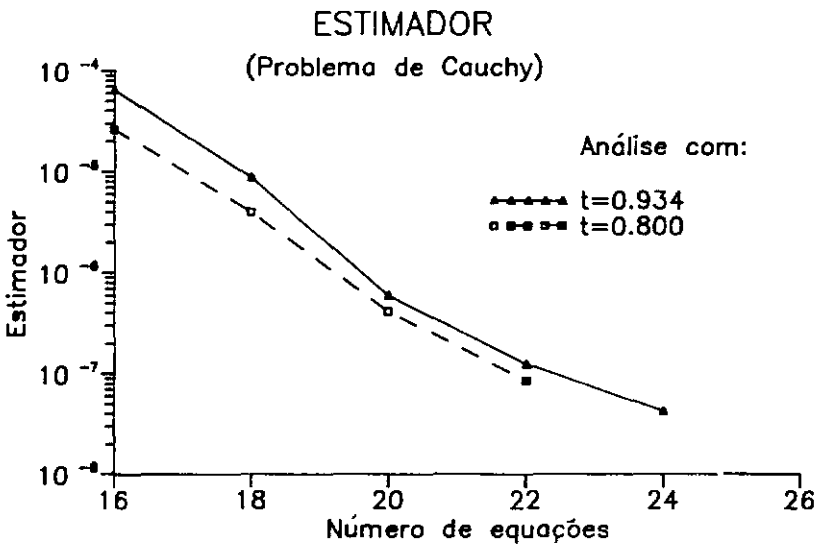


Figura V.12 -

Como o estimador ainda não havia atingido um patamar, foi dada uma tolerância mais baixa igual a 1×10^{-9} e aumentou-se a ordem máxima de interpolação das incógnitas para 11 para que a malha sofresse mais refinamento p .

Para o problema de Dirichlet com $t=0.934$, quando o programa estava resolvendo o sistema de equações da solução número 14, o procedimento foi interrompido, indicando que a matriz de coeficientes era singular. Usando $t=0.800$ o programa foi interrompido na solução 13.

No problema de Cauchy o programa foi interrompido quando verificava a convergência das soluções 16 e 17, respectivamente para a análise com $t=0.934$ e $t=0.800$, com uma mensagem de erro.

As configurações finais da malha, mostrando a ordem de interpolação das incógnitas no elemento e o número de graus de liberdade, podem ser vistas na figura V.13

O que se observou com esta análise foi o mesmo observado na análise 1: com o aumento da ordem das funções de interpolação a resposta foi oscilando, principalmente nos vértices dos elementos para a análise com $t=0.800$. Verificou-se, entretanto, que para o problema de Cauchy com $t=0.934$, nos elementos em que a incógnita foi o potencial, a resposta oscila muito pouco, parecendo convergir.

Para ilustrar isto apresenta-se na figura V. 14 o

comportamento das soluções p-adaptativas no nó inicial do elemento 4 para o problema de Dirichlet, e nas figuras V.15 e V.16 o comportamento das soluções p-adaptativas nos nós iniciais dos elementos 1 e 4 para o problema de Cauchy.

Os problemas observados também se refletem no comportamneto do estimador que é mostrado nas figuras V.17 e V.18.

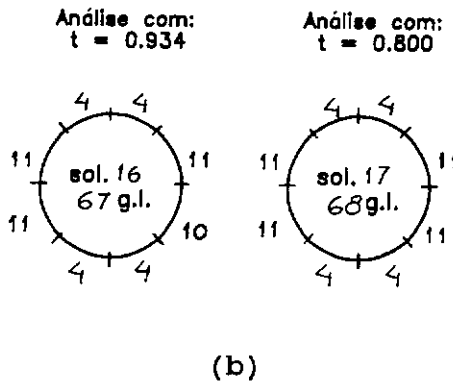
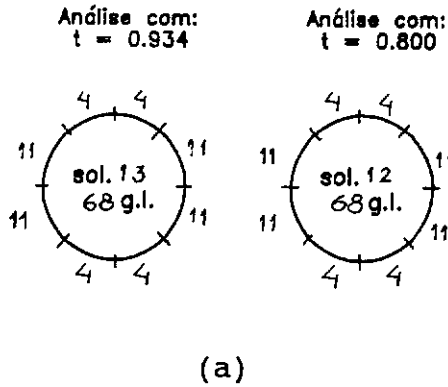
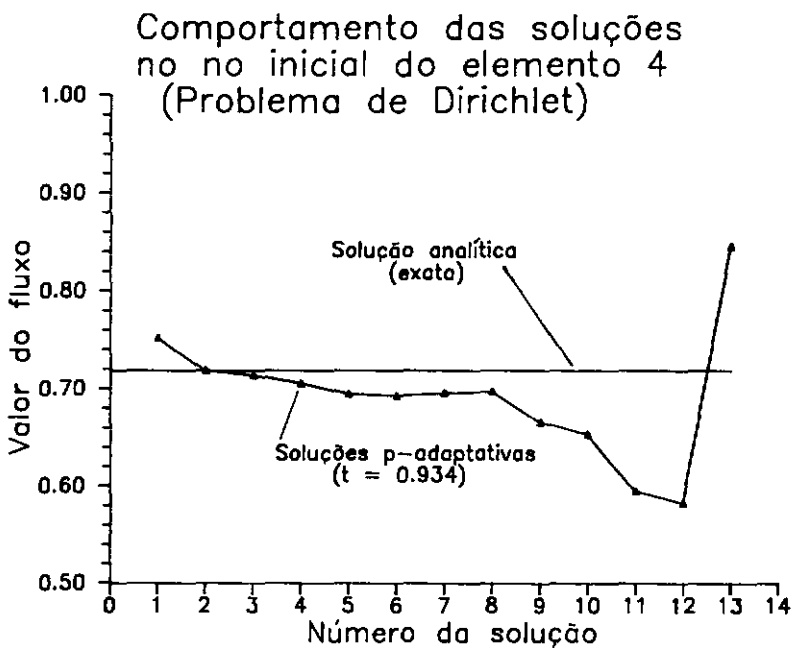
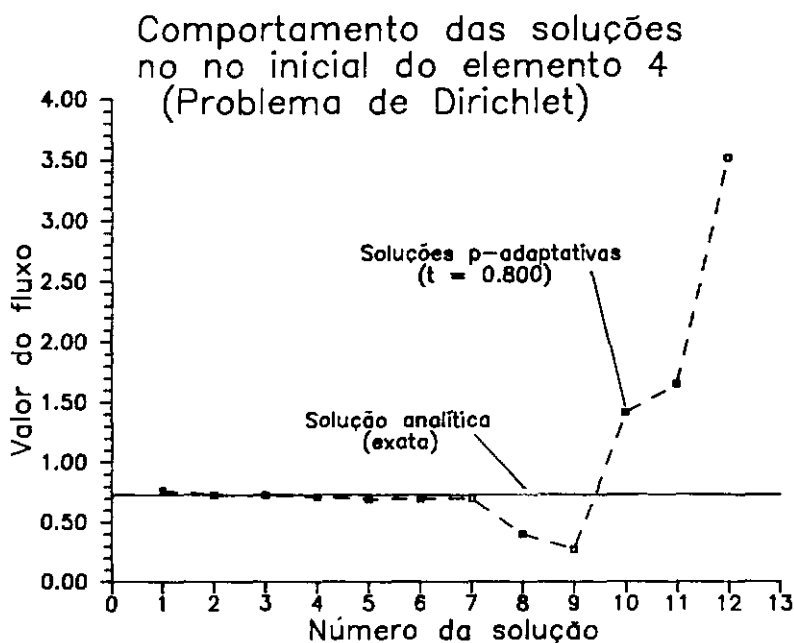


Figura V.13 - Ordens de interpolação das incógnitas na solução final p-adaptativa: (a) problema de Dirichlet, (b) problema de Cauchy



(a)



(b)

Figura V.14 - Valor da incógnita (fluxo) no nó inicial do elemento 4 (problema de Dirichlet):
(a) análise com $t=0.934$, (b) análise com $t=0.800$

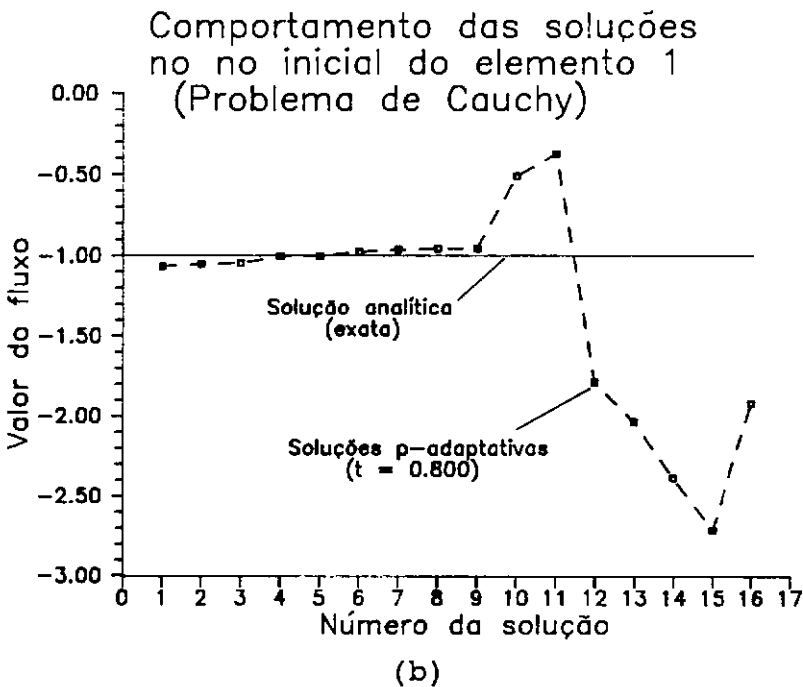
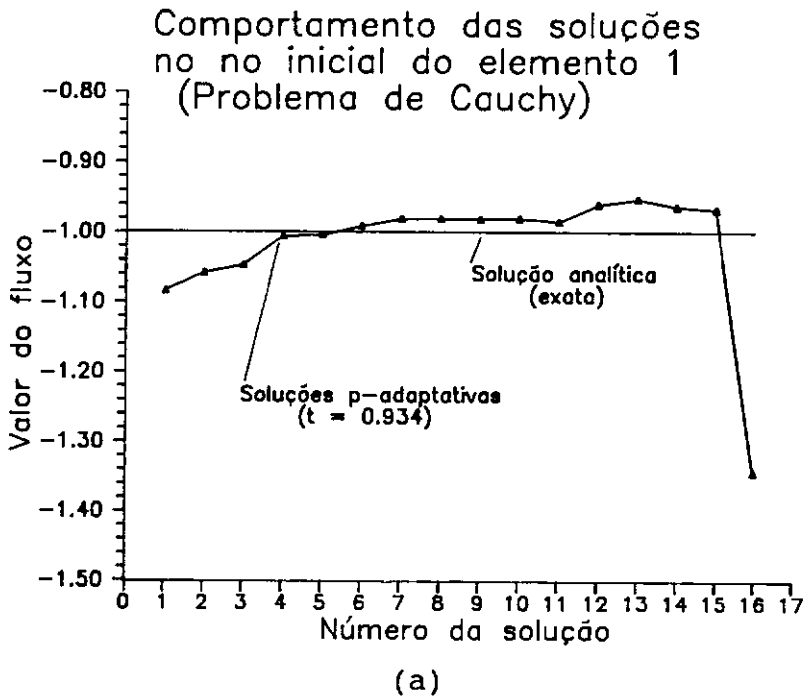


Figura V.15 - Valor da incógnita (fluxo) no nó inicial do elemento 1 (problema de Cauchy):
(a) análise com $t=0.934$, (b) análise com $t=0.800$

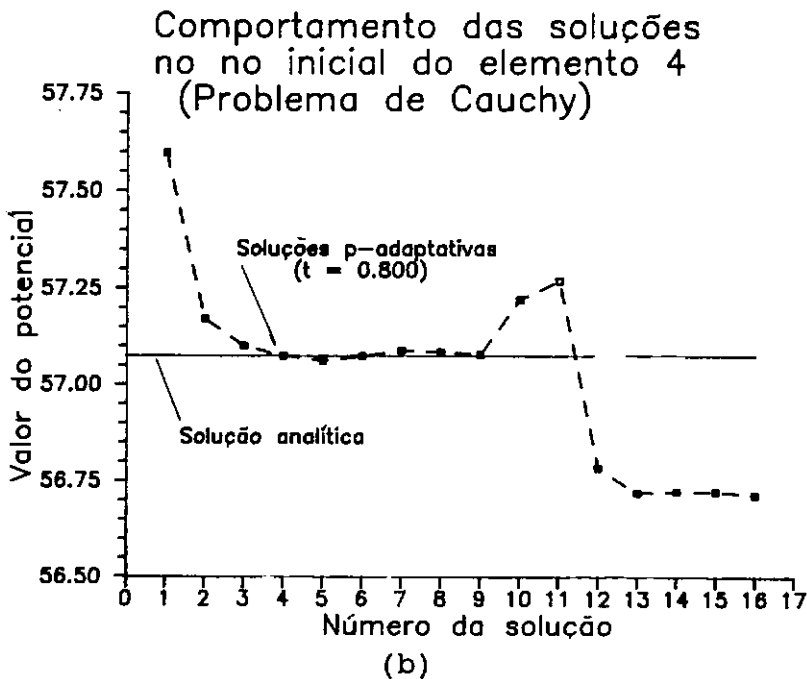
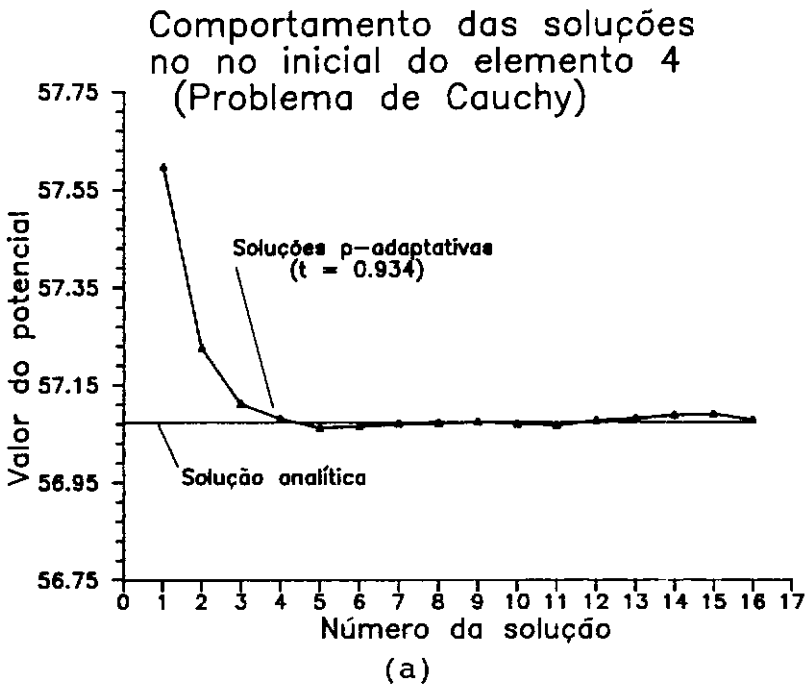


Figura V.16 - Valor da incógnita (potencial) no nó inicial do elemento 4 (problema de Cauchy):
(a) análise com $t=0.934$, (b) análise com $t=0.800$

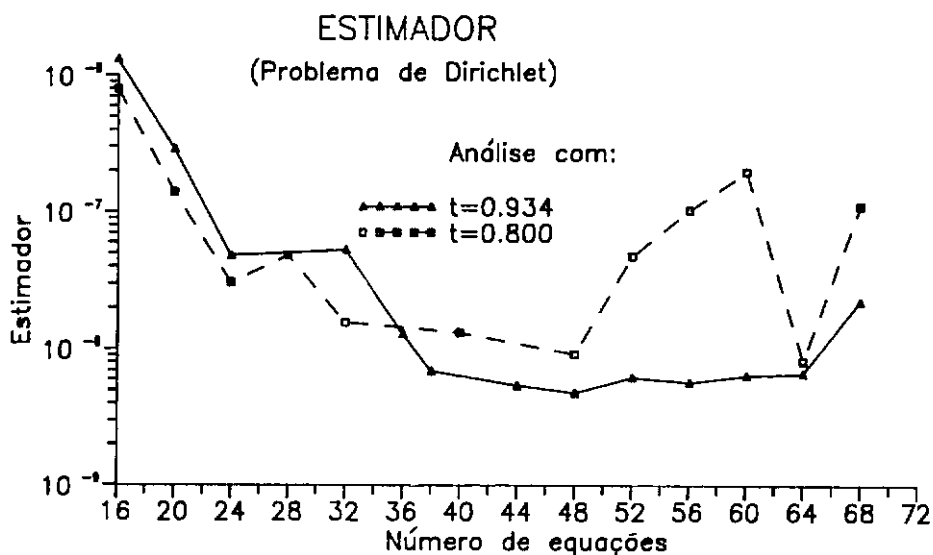


Figura V.17 -

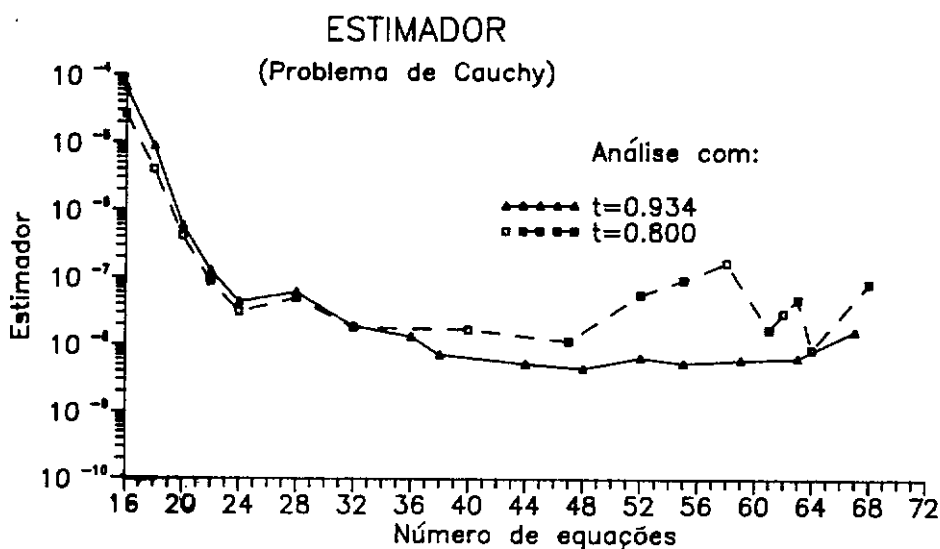


Figura V.18 -

V.3 - EXEMPLO 2

O segundo exemplo analisado foi um problema de transferência de calor em domínio semi-circular com solução analítica dada por $u = -\sqrt{r} \cdot \cos(\theta/2)$ e condições de contorno dadas pela figura V.19.

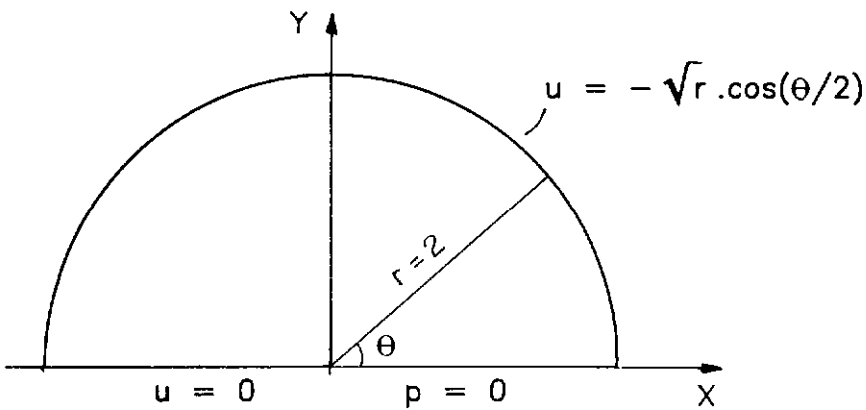


Figura V.19 - Problema de transferência de calor

A discretização foi feita utilizando cinco elementos, sendo três elementos curvos (quadráticos) na parte do contorno não linear conforme a figura V.20.

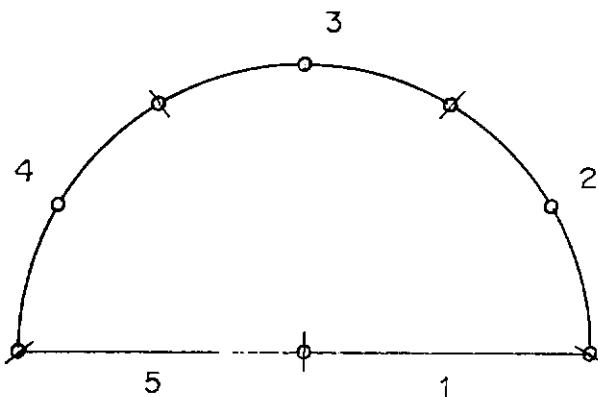


Figura V.20 - Malha de elementos de contorno p/ o exemplo 2

Neste problema as incógnitas são o fluxo nos elementos 2, 3, 4 e 5 e o potencial no elemento 1. O valor das condições de contorno prescritas nos elementos pode ser vista na tabela V.10.

Elem.	Tipo	Ordem	η	Valor
1	\bar{p}	1	-1	0.0
			1	0.0
2	\bar{u}	2	-1	-1.4142
			0	-1.3660
			1	-1.2247
3	\bar{u}	2	-1	-1.2247
			0	-1.0
			1	-0.7071
4	\bar{u}	2	-1	-0.7071
			0	-0.3660
			1	-0.0000
5	\bar{u}	1	-1	-0.0
			1	-0.0

Tabela V.10 - Condições de contorno prescritas.

O critério de refinamento empregado (equação III.52) teve aqui também a constante α igual a 0.5. A tolerância adotada foi de 5.0×10^{-7} e a ordem máxima de interpolação para as incógnitas adotada foi 10. Esta análise foi feita para $t = 0.934$.

O refinamento p-adaptativo foi interrompido quando a solução atingiu a tolerância especificada. Isto aconteceu na solução número 11.

Após a primeira solução, com elementos lineares, a análise de erros indicou que apenas os elementos 1 e 5 deveriam ser refinados e isto ocorreu também nas soluções seguintes, até que na solução número 10 o elemento 4 foi refinado para a ordem 2 e na solução 11 o elemento 2 e 3 também foram refinados para a ordem 2 eo elemento 4 para ordem 3.

A sequência de refinamento pode ser acompanhada pela tabela V.11.

Este mesmo exemplo havia sido analisado por WILLMERSDORF [7] utilizando elementos retos na discretização e com as mesmas considerações que foram feitas aqui. Com o objetivo de se fazer uma comparação das duas análises (uma utilizando elementos curvos e a outra utilizando elementos retos) apresentam-se na tabela V.12 alguns parâmetros obtidos com as duas análises e na figura V.21 a configuração da malha final nas duas análises. Na tabela V.12 os valores encontrados no nó final do elemento 5 referem-se à coordenada $x = 0.01$, pois no ponto $x = 0$ (que corresponde a $\eta = 1$) o fluxo possui uma singularidade.

Como era esperado, há uma economia na entrada de dados da análise com elementos curvos, devido à utilização

de um número menor de elementos.

O comportamento das soluções foi praticamente o mesmo, com a vantagem da análise com elementos curvos que obteve as respostas com um número menor de graus de liberdade. Isto pode ser visualizado no comportamento do estimador que está representado na figura V.22.

Análise com $t = 0.934$						
Sol.	Elementos					N ^o Eq.
	1	2	3	4	5	
1	1	1	1	1	1	10
2	1	1	1	1	2	11
3	2	1	1	1	2	12
4	2	1	1	1	3	13
5	3	1	1	1	4	15
6	4	1	1	1	5	17
7	4	1	1	1	6	18
8	4	1	1	1	7	19
9	5	1	1	1	8	21
10	6	1	1	2	9	24
11	7	2	2	3	10	29

Tabela V.11 - Sequência de refinamento: Ordens de interpolação das incógnitas

Análise	Solução final p-adaptativa		
	num.	N- Eq.	Estimador
com elementos curvos	11	29	3.844×10^{-7}
com elementos retos (Wilmerdorf)	13	37	2.925×10^{-7}

Análise	Solução final p-adaptativa		
	η	Elem. 1 (potencial)	Elem. 5 (≈ 8) (fluxo)
com elementos curvos	-1	-0.16414	0.36645
	0		0.49706
	1	-1.42564	4.54831
com elementos retos	-1	-0.1617	0.37896
	0		0.49749
	1	-1.41309	4.56959
solução analítica	-1	0.0	0.3536
	0	-1.0	0.5
	1	-1.4142	5.0

Tabela V.12 - Análise p-adaptativa com elementos curvos X
análise p-adaptativa com elementos retos

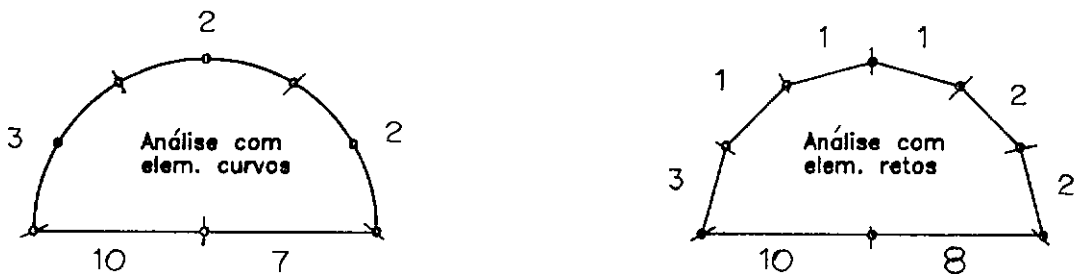


Figura V.21 - Ordens de interpolação das incógnitas na
solução final

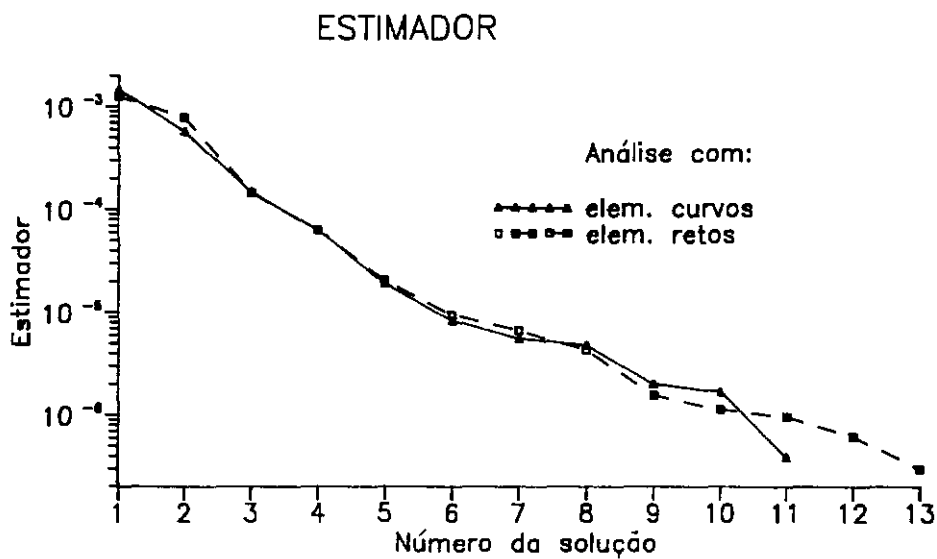


Figura V.22 -

CAPÍTULO VI

CONCLUSÕES

Os métodos numéricos utilizam aproximações e estas introduzem erros que afetam a precisão da resposta. Estes erros são devidos à interpolação das variáveis e da geometria do problema. Os erros devidos à aproximação da geometria do corpo podem ser reduzidos, ou pelo refinamento excessivo (elementos pobres) ou empregando-se elementos de ordem mais elevada. O fato de aparecerem erros devido a aproximação da geometria fica bastante evidenciado no caso de discretizações de contornos curvos com elementos lineares.

A consideração de geometria curva na análise tem outra vantagem, além de reduzir os erros devidos à interpolação, gerando soluções mais precisas e confiáveis. Essa vantagem é com relação à economia que se consegue devido ao uso de um número menor de elementos na discretização. Esta economia é ainda maior quando se utilizam procedimentos p-adaptativos.

O MEC já tem a vantagem de ter a dimensão do problema reduzida fazendo com que se discretize apenas o contorno do corpo a ser analisado. Assim um número menor de elementos é empregado na discretização do problema em comparação com outros métodos. Ao se utilizar a formulação

p-adaptativa do MEC um número menor ainda de elementos pode ser utilizado, porque na versão-p de procedimentos auto-adaptativos o grau do polinômio é que aumenta e malhas menos divididas podem ser empregadas. Isto torna o trabalho de geração de dados de entrada bastante simples.

Neste trabalho, utilizando o MEC com a formulação p-adaptativa, procurou-se verificar as vantagens de considerar geometria curva na análise e observar o comportamento das soluções.

Tendo como referência os exemplos abordados no capítulo V, pode-se constatar claramente que realmente é mais econômico utilizar elementos curvos para representar geometrias de forma não linear (vide exemplo 2).

Nos exemplos apresentados, à medida que funções de ordens mais altas são introduzidas na interpolação da incógnita, a resposta começa a oscilar e parece não convergir, principalmente nas análises com os pontos fontes extremos mais afastados dos vértices. A tolerância muito apertada para o nível de erros presentes na análise implica em um aumento do grau das interpolações, sem nenhum benefício adicional, e ao contrário pode ter as consequências drásticas mostradas nos exemplos estudados.

Este comportamento pode ser devido a alguns fatores que precisam ser mais pesquisados. Pode-se estar diante de "round off errors", erros de integração ou

descondicionamento. O mal comportamento do estimador de erros provavelmente tem a mesma origem dos problemas citados acima.

Aqui deve-se ressaltar que o estimador utilizado ainda é provisório e a análise de erros no MEC ainda não está totalmente desenvolvida. É preciso que se desenvolvam as ferramentas matemáticas mais confiáveis para controlar o processo de refinamento, como já são no MEF, para que se possa então conseguir um melhor resultado.

O indicador e o estimador de erros utilizados aqui foram os mesmos utilizados por WILLMERSDORF [7]. Pesquisas de novos indicadores e estimadores é uma das sugestões para se continuar este trabalho.

Algumas comparações apresentadas no trabalho visaram determinar o valor ótimo da coordenada natural para colocação dos pontos fontes extremos. Este estudo foi prejudicado pelos mesmos problemas já comentados. Para se chegar a uma conclusão sobre a localização ótima dos pontos fontes é necessário um estudo mais apurado, que fica também como sugestão para a continuidade do trabalho.

Exemplos com ordem mais alta de interpolação para a geometria, como permite o programa, não foram testados devido aos problemas que foram constatados já com a geometria quadrática, valendo ressaltar que interpolação de ordem muito alta de geometria não resolve.

Algumas alterações no programa implementado contribuiriam muito para a continuidade deste trabalho, como introduzir a consideração de simetria e também fazer uma combinação das técnicas auto-adaptativas versão p e versão h.

Uma outra observação seria com relação ao equipamento utilizado. Exceto para análises muito complexas, um programa de análise numérica com procedimento p-adaptativo como este não precisa necessariamente de ser instalado em um computador de grande porte, tendo em vista que o tempo de execução não exige isto. Os mesmos resultados podem ser alcançados utilizando micros.

Finalmente cabe acrescentar que as aplicações de procedimentos auto-adaptativos são muito vastas, sendo inevitável que na medida que algoritmos confiáveis sejam desenvolvidos eles sejam incorporados aos programas que utilizam o Método dos Elementos de Contorno.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] BREBBIA, C. A. - The Boundary Element Method for Engineers - Pentech Press, London, (1978).
- [2] BREBBIA, C. A. , TELLES, J. C. F. , WROBEL, L. C. - Boundary Elements Techniques - Spring-Verlag, Berlim, (1984).
- [3] ALARCON, E. , REVERTER , A. - P-Adaptive Boundary Elements - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 23, 801-829, (1986).
- [4] CERROLAZA, M. , ALARCON, E. - P-Adaptive Boundary Elements for Three-Dimensional Potencial Problems - Communications in Aplied Numerical Methods, vol. 3, 335-344, (1987).
- [5] RANK, E. - Adaptive Boundary Element Method - Boundary Elements IX, 259-279, Editors C. A. Brebbia et al. Springer-Verlag, Berlim, (1987).
- [6] PARREIRA, P. - Self Adaptive P-hierárquical Boundary Elements in Elastostatics - Boundary Elements IX, 352-373, Editors C.A. Brebbia et al. Springer-Verlag, Berlim, (1987).
- [7] WILLMERSDORF, R. B. - Formulação P-adaptativa do Método

dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de potencial - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1988).

[8] RIBEIRO, F. L. B. - Formulação Hierárquica do Método dos Elementos Finitos: Refinamento auto-adaptativo versão p aplicado a problemas de elasticidade - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1986).

[9] PESSOLANI, R. B. V. - Formulação h auto-adaptativa de Elementos de Contorno para problemas de potencial e elasticidade - Tese de M. Sc., PUC, Rio de Janeiro, (1989).

[10] CHEN, WAI-FAH , SALEEB, A. F. - Constitutive Equations for Engineering Materials, John Wiley and Sons, Inc., (1982).

[11] KELLOG, O. O. - Foundations of Potential Theory - Dover, New York, (1953).

[12] SILVA, J. J. R. - MEC3DE - Um Programa para análise tridimensional com o método dos elementos de contorno - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).

[13] ZIENKIEWICZ, O. C. , MORGAN, K. - Finite Elements and Aproximation - Wiley - Interscience, New York, (1983).

- [14] DEVLOO, P. R. B. - An H-P Adaptive finite Element Method for Steady State Compressible flow - Ph. D. Thesis, University of Texas at Austin, Austin, (1987).
- [15] SPIEGEL, M. R. - Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas, McGraw-Hill, São Paulo, (1973).
- [16] CERROLAZA, M. - Elementos de Contorno p-adaptables : Desarrollo y Aplicaciones en Teoria del Potencial y elastostática - Tesis Doctoral, Madri, (1988).
- [17] MARQUES, E. - Combinação dos Métodos de Elementos de Contorno e Elementos Finitos: aplicação a problemas de Potencial - Tese de M. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1986).
- [18] ZIENKIEWICZ, O. C. , GAGO, J. P. de S. R. , KELLY, D. W. , - The Hierarquical Concept in finite Element Analisys - Computers and Structures, vol. 16, 53-65 , (1983).
- [19] RANK, E. - Adaptivity and Accuracy Estimation for Finite Elements and Boundary Integral Element Methods - Accuracy Estimates and Adaptivity in Finite Element Computation, John Wiley & Sons, (1986).
- [20] TELLES, J. C. F. - A self-adaptive Co-ordinate

Transformation for Efficient numerical evaluation
of General Boundary Element Integrals -
International Journal for Numerical Methods in
Engineering, vol. 24, 959-973, (1987).

[21] MANSUR, W. J. , TELLES, J. C. F., PRODANOFF, J. A.,
FRAUCHES, E., On BEM Singular Integrals for
two-dimensional Potencial Applications,
COPPE/UFRJ, Civil Engineering Department, a ser
publicado.

[22] SCHIMITZ, E. A. , TELES, A. A. S. - Pascal e Técnicas
de Programação - LTC Editora, Rio de Janeiro,
(1985).

APÊNDICE A

ASPÉCTOS DA INTERPOLAÇÃO

Sobre um elemento unidimensional j se faz a interpolação de uma função ϕ conforme a expressão abaixo:

$$\phi_j = N_0(\eta) \phi_j^0 + N_1(\eta) \phi_j^1 + \sum_{j=2}^{om} N_k(\eta) c_j^k \quad (A.1)$$

com as funções de interpolação N pertencentes a uma família de funções hierárquicas.

Utilizando as coordenadas naturais idênticas às das funções de Lagrange para se interpolar a função ϕ , obtêm-se parâmetros c^k tais que substituindo na equação (A.1) transformam as funções hierárquicas N_k nas funções de Lagrange.

O caminho a seguir para se demonstrar isto pode ser visto no exemplo a seguir:

Interpolação quadrática (Para a coordenada x):

$$x_j = N_0(\eta) x_j^0 + N_1(\eta) x_j^1 + N_2(\eta) c_j^2 \quad (A.2)$$

com :

$$\begin{aligned} N_0(\eta) &= 1/2 (1 - \eta) \\ N_1(\eta) &= 1/2 (1 + \eta) \\ N_2(\eta) &= 2 (\eta^2 - 1) \end{aligned} \quad (A.3)$$

Dado o ponto x^2 em $(\eta = 0)$:

$$x_j^2 = N_0(0) x_j^0 + N_1(0) x_j^1 + N_2(0) c_j^2 \quad (\text{A.4})$$

$$\therefore c_j^2 = \frac{x_j^2 - N_0(0) x_j^0 - N_1(0) x_j^1}{N_2(0)} = \frac{1}{4} (x_j^0 + x_j^1 - 2x_j^2)$$

(A.5)

substituindo este valor na equação (A.2) tem-se:

$$x_j = N_0(\eta) x_j^0 + N_1(\eta) x_j^1 + N_2(\eta) \frac{1}{4} (x_j^0 + x_j^1 - 2x_j^2)$$

$$x_j = (N_0(\eta) + 1/4 N_2) x_j^0 + (N_1(\eta) + 1/4 N_2) x_j^1 - 1/2 N_2(\eta) x_j^2$$

com as funções hierárquicas dadas em (A.3):

$$x_j = [1/2(1-\eta) + 1/4 (2\eta^2-2)] x_j^0 + [1/2(1+\eta) + 1/4(2\eta^2-2)] x_j^1 - 1/2(2\eta^2-2) x_j^2$$

$$x_j = [1/2 - \eta/2 + \eta^2/2 - 1/2] x_j^0 + [1/2 + \eta/2 + \eta^2/2 - 1/2] x_j^1 - (\eta^2-1) x_j^2$$

simplificando chega-se a :

$$x_j = [1/2 \eta(\eta-1)] x_j^0 + [1/2 \eta(1+\eta)] x_j^1 + [(1-\eta^2)] x_j^2$$

(A.6)

onde as expressões entre colchetes são as funções de Lagrange para interpolação quadrática respectivamente:

$$\begin{aligned} N_0(\eta) &= 1/2 [\eta(\eta - 1)] \\ N_1(\eta) &= 1/2 [\eta(1 + \eta)] \\ N_2(\eta) &= (1 - \eta^2) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Usando este mesmo raciocínio pode-se fazer a mesma demonstração acima para a interpolação cúbica, de quarta e quinta ordem, tanto para a coordenada x como para a coordenada y .

A definição da geometria mostrada na expressão (A.6) foi feita considerando-se:

$$\begin{aligned} x(\eta) \Big|_{\eta=-1} &= x^0 \\ x(\eta) \Big|_{\eta=0} &= x^2 \\ x(\eta) \Big|_{\eta=1} &= x^1 \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

A correspondência indicada em (A.8) pode ser modificada, o que acarretará modificações em (A.6) também. Por exemplo alterando-se a correspondência previamente definida para o nó central de tal forma que:

$$\begin{aligned} x(\eta) \Big|_{\eta=-1} &= x^0 \\ x(\eta) \Big|_{\eta=\bar{\eta}} &= x^2 \\ x(\eta) \Big|_{\eta=1} &= x^1 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

com $\bar{\eta}$ escolhido de forma a não se localizar na metade do comprimento do elemento.

Obtém-se (ver figura A.1):

$$x_j = N_0(\eta) x_j^0 + N_1(\eta) x_j^1 + N_2(\eta) x_j^2 \quad (\text{A.10})$$

com :

$$N_0 = \frac{(1-\eta)(\bar{\eta}-\eta)}{2(\bar{\eta}-1)}$$

$$N_1 = \frac{(1+\eta)(\bar{\eta}-\eta)}{2(\bar{\eta}-1)}$$

(A.11)

$$N_2 = \frac{1}{1-\bar{\eta}^2} (1+\eta)(1-\eta)$$

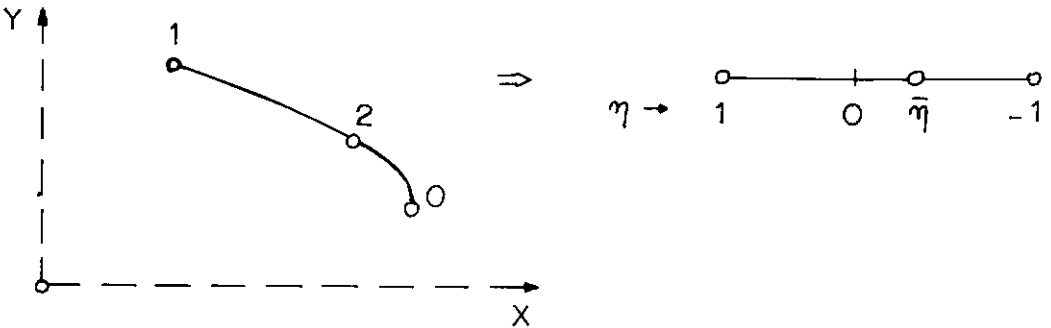


Figura A.1 - Elemento quadrático com nó central não localizado na metade do comprimento da curva.

APÊNDICE B

$$\text{O VALOR DO } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n}$$

O cálculo do limite acima indicado será apresentado aqui de maneira sucinta, porém para maiores esclarecimentos sugere-se que seja consultada a referência [21], de onde foi extraído o que se segue:

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{B.1})$$

Para um ponto localizado na curva $r = r(\theta)$ (ver figura B.1):

$$\frac{\partial r(\theta)}{\partial n(x)} = \underline{v} \cdot \underline{n} = r(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \Gamma} = \frac{r(\theta)}{\sqrt{\left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 + \left[r(\theta) \right]^2}} \quad (\text{B.2})$$

assim:

$$L = \lim_{r \rightarrow 0} = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 + \left[r(\theta) \right]^2}} = \frac{1}{\frac{\partial r(\theta)}{\partial r}} \quad (\text{B.3})$$

A expressão para o raio de curvatura $\rho(x)$ em coordenadas polares é:

$$\rho(x) = \frac{\left\{ \left[r(\theta) \right]^2 + \left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\}^{3/2}}{\left[r(\theta) \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 - r(\theta) \frac{\partial^2 r(\theta)}{\partial \theta^2}} \quad (\text{B.4})$$

Quando $r(\theta) \rightarrow 0$, o limite da expressão acima é:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \quad (\text{B.5})$$

Comparando as equações (B.1), (B.3), e (B.5) obtém-se:

$$L = \frac{1}{2\rho(\xi)} \quad (\text{B.6})$$

que é o valor do limite procurado.

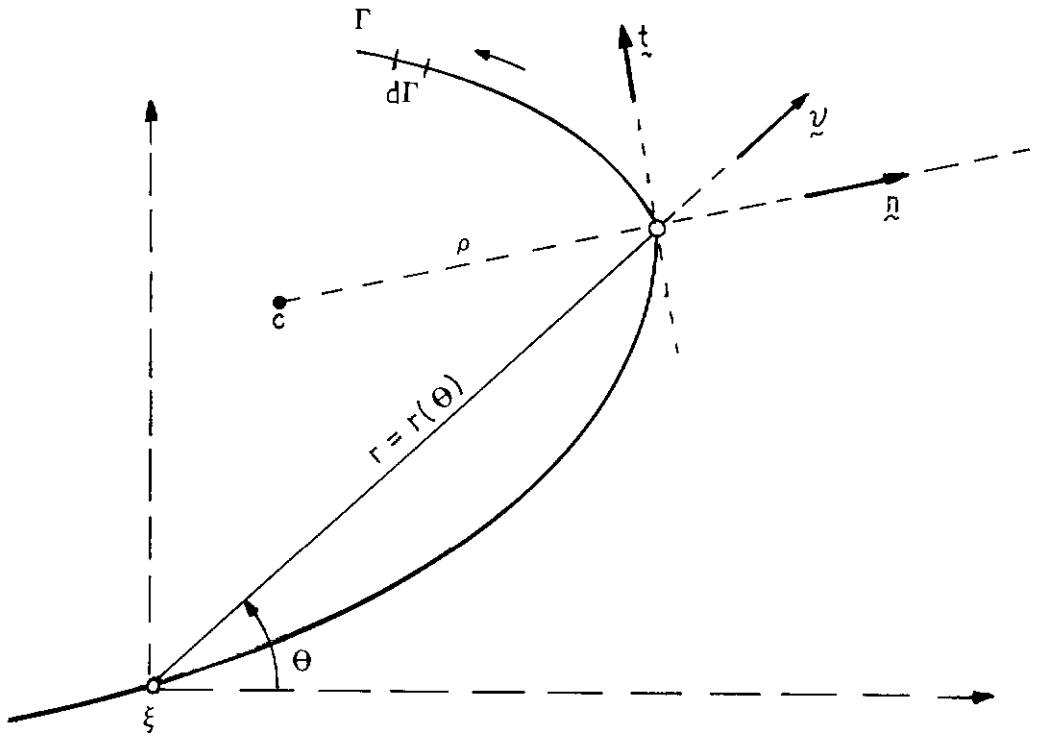


Figura B.1 - Representação de uma curva em coordenadas polares. \hat{n} é o vetor unitário normal externo ao contorno Γ , \hat{t} é vetor unitário tangente e \hat{u} é o vetor unitário na direção da linha que liga os pontos ξ e x . c é o centro de curvatura e ρ é o raio de curvatura.