

# INVESTIGAÇÕES SOBRE UM ESQUEMA NUMÉRICO DESACOPLADO PARA MODELOS DE CIRCULAÇÃO

FERNANDO MONTENEGRO CABRAL DE VASCONCELLOS FILHO

Tese submetida ao corpo docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia (COPPE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia Civil.

Aprovada por:



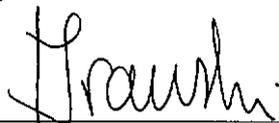
---

*Prof. Paulo Cesar Colonna Rosman - Ph.D.*



---

*Prof. Rui Carlos Vieira da Silva - Dr. Univ.*



---

*Dr. Joel Branski - Ph.D.*

Rio de Janeiro, RJ - BRASIL

1991

VASCONCELLOS FILHO, FERNANDO M. CABRAL DE

Investigações sobre um Esquema Numérico Desacoplado para Modelos de Circulação

xx, 124 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Modelos de Circulação

I. COPPE/UFRJ

II. Investigações sobre um Esquema Numérico Desacoplado para Modelos de Circulação

# Agradecimentos

A Paulo Cesar Colonna Rosman, pela dedicação e entusiasmo que caracterizaram a orientação deste trabalho.

Ao amigo Nelson Luis da Costa Dias, pelo incansável incentivo.

Aos professores e funcionários dos Programas de Engenharia Civil e Engenharia Oceânica da COPPE-UFRJ, colaboradores anônimos deste trabalho.

A todos os meus colegas de mestrado, pela amizade e incentivo.

A meus pais, Fernando e Beatriz, e a toda minha família, pelo carinho e apoio irrestritos.

E especialmente a Marisa e Pedro Lucas, pela convivência, uma por opção, outro por falta de opção, ambos por amor.

*Ainda que eu tivesse o dom da profecia,  
o conhecimento de todos os mistérios  
e de toda a ciência,  
ainda que eu tivesse toda a fé,  
a ponto de transportar montanhas,  
se eu não tivesse a caridade,  
eu nada seria.*

I Cor 13,2

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos  
necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências

INVESTIGAÇÕES SOBRE UM ESQUEMA NUMÉRICO DESACOPLADO  
PARA MODELOS DE CIRCULAÇÃO

Fernando Montenegro Cabral de Vasconcellos Filho

1991

Orientador: Paulo Cesar Colonna Rosman

Programa: Engenharia Civil

A modelação numérica via elementos finitos pode representar os contornos de um corpo d'água irregular de modo mais eficiente que modelos em diferenças finitas. Entretanto, os modelos em diferenças finitas são usualmente resolvidos através de algoritmos altamente eficientes, como por exemplo o ADI ("Alternate Direction Implicit"). Através de um desacoplamento no cálculo das diversas variáveis (elevação do nível d'água, componentes da velocidade, salinidade, etc...) reduz-se o problema à soluções múltiplas de sistemas tridiagonais. Tais esquemas, infelizmente, não são aplicáveis a elementos finitos, tornando o custo computacional, neste caso, bem mais alto.

O presente trabalho propõe um esquema numérico que resolve as equações do movimento através de substituições sucessivas na equação da continuidade, permitindo o desacoplamento, mesmo em elementos finitos, com grande eficiência. São apresentados os resultados de investigações preliminares, nas quais, para testar a viabilidade do esquema, utilizaram-se dois modelos em diferenças finitas para a simulação das condições de escoamento em canais de maré, a partir de uma formulação matemática unidimensional. Um modelo resolve as equações do movimento acopladas, e o outro utiliza o esquema desacoplado proposto.

Verificaram-se assim condições de estabilidade numérica mais rigorosas na utilização do modelo desacoplado, isto porém em se tratando de simulações de casos extremos (para valores já bastante elevados do número de Courrant). Em condições usuais de simulação, o modelo desacoplado proposto mostrou-se praticamente equivalente ao modelo acoplado, tanto em termos de desempenho numérico quanto em precisão de resultados.

Tais resultados permitem antever, de forma cautelosa, excelentes possibilidades para a extensão da técnica a modelos de circulação multidimensionais, empregando inclusive esquemas de elementos finitos, com ganhos significativos em espaço de memória e tempo de processamento.

\* \* \*

Abstract of Thesis Presented to COPPE/UFRJ in Partial Fulfillment of the  
Requirements for the Degree of Master of Sciences

INVESTIGATIONS ON AN UNCOUPLED NUMERICAL SCHEME FOR  
CIRCULATION MODELS

Fernando Montenegro Cabral de Vasconcellos Filho

1991

Thesis Supervisor: Paulo Cesar Colonna Rosman

Department: Civil Engineering

The numerical modelation by the means of finite elements can represent the frontiers of an irregular water body more efficiently than those models employing finite differences. However, finite differences models are usually solved through highly efficient algorithms, such as the ADI (Alternate Direction Implicit). Through an uncoupling in the calculation of the multiple variables (e.g. water level elevation, velocity components, salinity, etc...) it is possible to reduce the problem to multiple solutions of tridiagonal systems. Such algorithms, unfortunately, are not useful in the case of finite elements, what increases its computational costs.

The present thesis proposes a numerical algorithm which solves the equations of movement by making successive substitutions in the continuity equation, allowing uncoupling, even for finite elements, with great efficiency. The results of the preliminary investigation are presented, in which, in order to test the algorithm feasibility, two finite differences models for the simulation of the flow conditions in tidal canals were used, based on a one dimensional mathematics formulation. One of them solves the governing equations in an coupled way, and the other uses the proposed uncoupled algorithm.

More rigorous numerical stability conditions were then verified in using the un-

coupled model, but specifically in the simulations of extreme cases (with Courrant number already highly valued). For usual simulation conditions, the uncoupled model proposed was almost effectively equivalent to the conventional coupled model, concerning both, numerical process and results' precision.

Such results allow the cautelous prevision of excelent possibilities concerning the extension of this technique to multidimensional circulation models, even using finite elements algorithms, leading to a significant economy of memory space and processing time.

\* \* \*

# Índice

	pág.
Agradecimentos	iii
Resumo	v
<i>Abstract</i>	vii
Índice	ix
Índice de Ilustrações	xiii
Lista de Variáveis	xv
1 - INTRODUÇÃO	1
2 - MODELOS MATEMÁTICOS DE ESCOAMENTOS	5
2.1 - Equacionamento Geral	6
2.1.1 - Equação da Continuidade	8
2.1.2 - Equações de Euler / Navier-Stokes	9
2.1.3 - Acelerações de Campo	11
2.1.3.1 - Campo Gravitacional	11
2.1.3.2 - Aceleração de Coriolis	11
2.1.4 - Forma Final das Equações Dinâmicas	12
2.1.5 - Observações sobre as Equações Gerais	13
2.2 - Caso Tridimensional (3D)	14
2.2.1 - Equações Governantes Promediadas	15
2.2.2 - Simplificação das Equações Dinâmicas	18

2.2.3 - Modelação	19
2.3 - Caso Bidimensional Horizontal (2DH)	20
2.3.1 - Equações Governantes Integradas na Profundidade	22
2.3.2 - Modelação	23
2.4 - Caso Unidimensional (1D)	23
2.4.1 - As Equações de Saint-Venant	24
2.5 - Resistência ao Escoamento	26
2.5.1 - Fórmulas mais Comuns	27
2.5.2 - Coeficientes de Resistência	29
2.5.3 - Termo de Atrito na Equação Dinâmica 1D	31
2.5.4 - Tensão de Atrito no Fundo nas Equações Dinâmicas 2DH e 3D	31
 3 - CONSIDERAÇÕES SOBRE A MODELAÇÃO NUMÉRICA	 33
3.1 - Princípios Gerais dos Algoritmos de Diferenças Finitas e Elementos Finitos	34
3.2 - Princípios Gerais do Esquema ADI (“Alternating Direction Implicit”)	36
3.3 - Estabilidade Numérica	38
 4 - DESACOPLAMENTO VIA SUBSTITUIÇÕES SUCESSIVAS	 40
4.1 - Caso Unidimensional (1D)	41
4.1.1 - Canal Lagunar	41
4.1.2 - Equações Discretas no Tempo	43
4.1.3 - Modelo Acoplado	45
4.1.4 - Modelo Desacoplado	46
4.1.5 - Análise Comparativa	50

4.2 -Extensão da Técnica de Desacoplamento à Modelação Multidimensional	53
4.3 -Caso Bidimensional (2DH)	54
4.3.1 - Equações Discretas	54
4.3.2 - Esquema de Desacoplamento	58
4.4 -Caso Tridimensional (3D)	61
4.4.1 - Equações Discretas	61
4.4.2 - Esquema de Desacoplamento	64
5 - MODELO COM CÁLCULO DESACOPLADO PARA CANAIS DE MARÉ 1D	68
5.1 -O Problema em Estudo	69
5.2 -Programa para o Modelo Acoplado	71
5.2.1 - Seções Intermediárias	71
5.2.2 - Seção 1 (Embocadura no Mar)	72
5.2.3 - Seção N (Embocadura na Lagoa)	74
5.2.4 - Fluxograma de Cálculo	75
5.3 -Programa para o Modelo Desacoplado	79
5.3.1 - Seções Intermediárias	79
a) Cálculo das Elevações do Nível d'Água	79
b) Cálculo das Velocidades	81
5.3.2 - Seção 1 (Embocadura no Mar)	82
a) Cálculo das Elevações do Nível d'Água	82
b) Cálculo das Velocidades	82
5.3.3 - Seção N	83
5.3.3.1 - Embocadura na Lagoa como Contorno	83
a) Cálculo das Elevações do Nível d'Água	83

b) Cálculo das Velocidades	84
5.3.3.2 - Hidrograma Afluentes como Contorno	84
a) Cálculo das Elevações do Nível d'Água	84
b) Cálculo das Velocidades	85
c) Dada a Curva $(\eta_N, u_N) \times t$	85
5.3.4 - Fluxograma de Cálculo	86
5.4 - Aplicações	90
5.4.1 - Considerações quanto às Condições Iniciais	90
5.4.2 - Casos Simulados	91
5.4.2.1 - Canal Lagunar	92
5.4.2.2 - Sistema Canal – Lagoa	95
6 - CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	106
Anexo 1 - Equações Gerais dos Escoamentos	108
A1.1 - Equação da Continuidade	108
A1.2 - Equações Dinâmicas	109
Anexo 2 - Modelação de Turbulência	114
Anexo 3 - Equações Governantes 2DH	116
Anexo 4 - As Equações de Saint-Venant	120
Bibliografia	124

\* \* \*

# Índice de Ilustrações

	pág.
CAPÍTULO 2	
Fig. 2.1 - Corpos d'Água Rasos	21
Fig. 2.2 - Escoamento em Canais	25
CAPÍTULO 4	
Fig. 4.1 - Canal Lagunar - Planta e Perfil Esquemáticos	42
Fig. 4.2 - Esquema Matricial para o Sistema de Equações do Modelo Acoplado	47
Fig. 4.3 - Esquemas Matriciais para os Sistemas de Equações do Modelo Desacoplado	50
CAPÍTULO 5	
Fig. 5.1 - Fluxograma de Cálculo para o Modelo Acoplado	78
Fig. 5.2 - Fluxograma de Cálculo para o Modelo Desacoplado	89
Fig. 5.3a - Simul. c/ o Modelo Acoplado: Instabilidades	96
Fig. 5.3b - Simul. c/ o Modelo Desacoplado: Instabilidades	97
Fig. 5.4a - Canal: Elevações do NA e Velocidades ao longo do Tempo	98
Fig. 5.4b - Canal: Perfis de Elevações do NA e Velocidades	99
Fig. 5.5a - Sistema Canal/Lagoa: Velocidades ao longo do Tempo	101
Fig. 5.5b - Sistema Canal/Lagoa: Elevações do NA ao longo do Tempo	102
Fig. 5.5c - Sistema Canal/Lagoa: Perfis de Velocidades (i)	103

Fig. 5.5d	- Sistema Canal/Lagoa: Perfis de Velocidades (ii)	104
Fig. 5.5e	- Sistema Canal/Lagoa: Perfis de Elevações do NA	105

#### Anexo 1

Fig. A1.1	- Variação da Massa Fluida através de um Volume de Controle na Direção $OX$	109
Fig. A1.2	- Forças de Contato em um Volume de Controle na Direção $OX$	111

#### Anexo 4

Fig. A4.1	- Escoamento em Canais (i)	121
Fig. A4.2	- Escoamento em Canais (ii)	122

\* \* \*

# Lista de Variáveis

- $A$  – Área molhada instantânea de uma dada seção transversal de um rio ou canal.
- $A_b$  – Área superficial média de uma dada lagoa ou reservatório.
- $A_k$  – Amplitude da  $k$ -ésima componente harmônica da onda de maré.
- $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$  – Parâmetros discretos utilizados no algoritmo de varredura dupla.
- $a_j$  – Coeficientes lineares das funções de aproximação (método dos resíduos ponderados) ou de interpolação (método dos elementos finitos).
- $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$  – Vetor aceleração.
- $B$  – Largura superficial média de uma dada seção transversal de um rio ou canal.
- $\vec{b}$  – Vetor normal ao fundo em um corpo d'água.
- $C$  – Coeficiente de Chézy / Operador diferencial (Equação da Continuidade).
- $C0aC3$  – Coeficientes da Equação da Continuidade discreta no tempo.
- $C_a$  – Coeficiente de arrasto do vento sobre a superfície livre de um corpo d'água.
- $C_f$  – Coeficiente de atrito no fundo.
- $C_\mu$  – Constante empírica utilizada nos modelos  $k-\epsilon$  (modelação de turbulência).
- $D$  – Domínio de integração de um dado problema (método dos resíduos ponderados).

$F_k$  – Fase da  $k$ -ésima componente harmônica da onda de maré.

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  – Vetor força.

$f$  – Coeficiente de Darcy-Weissbach.

$G$  – Função potencial gravitacional.

$g$  – Aceleração da gravidade.

$H$  – Profundidade instantânea em uma dada posição  $(x, y)$  / Profundidade instantânea média numa dada seção transversal de um rio ou canal.

$h$  – Profundidade fixa em relação a um plano de referência horizontal numa dada posição  $(x, y)$  / Profundidade média fixo em relação a um plano de referência horizontal numa dada seção transversal de um rio ou canal.

$K$  – Coeficiente de Gauckler–Strickler.

$K_{ij}$  – Coeficientes de viscosidade turbulenta.

$k$  – Energia cinética (modelos  $k-\epsilon$ ).

$L$  – Desenvolvimento do eixo principal do escoamento em um rio ou canal.

$L_i(P)$  – Função linear de uma dada grandeza  $P$ .

$MX, MY$  – Operadores diferenciais (Equações da Conservação da Quantidade de Movimento).

$m$  – Massa de uma partícula.

$m_M$  –  $\frac{1}{2}$  do número de diagonais não nulas da matriz característica de um sistema de equações.

$N$  – Número de pontos (seções transversais) de discretização em um rio ou canal (modelação 1D).

$N(P)$  – Função não linear de uma dada grandeza  $P$ .

$NC$  – Número de Courrant.

$n$  – Coeficiente de Manning.

$n_M$  – Dimensão da matriz (quadrada) característica de um sistema de equações.

$\vec{n}$  – Vetor unitário normal à superfície livre de um corpo d'água.

$\vec{n}'$  – Vetor unitário normal ao fundo num corpo d'água.

$OX, OY, OZ$  – Eixos cartesianos arbitrários.

$P$  – Grandeza arbitrária qualquer.

$\bar{P}$  – Média temporal da grandeza  $P$ .

$P'$  – Flutuação da grandeza  $P$  em relação à média temporal  $\bar{P}$ .

$P_a$  – Aproximação do valor da grandeza  $P$  (método dos resíduos ponderados).

$P_j$  – Valores da grandeza  $P$  nos pontos nodais  $j$  (método dos elementos finitos).

$P_M$  – Perímetro molhado de uma dada seção transversal de um rio ou canal.

$p$  – Pressão total em um ponto qualquer.

$p_{atm}$  – Pressão atmosférica.

$p_s$  – Pressão na superfície livre de um corpo d'água.

$Q$  – Vazão média através de um dada seção transversal de um rio ou canal.

$q$  – Vazão unitária média através de um dada seção transversal de um rio ou canal.

$q_L$  – Vazão lateral unitária média em um dado trecho de um rio ou canal.

$R$  – Raio hidráulico de uma dada seção transversal de um rio ou canal.

$r$  – Rugosidade absoluta das paredes de um corpo d'água.

$S$  – Operador diferencial (Expressão da Condição de Contorno Cinemática na Superfície Livre).

$S0aS4$  – Coeficientes da Equação da Condição de Contorno Cinemática na Superfície Livre discreta no tempo.

$S_o$  – Declividade média do fundo em uma dada seção transversal de um rio ou canal.

$S_f$  – Declividade da linha energética em uma dada seção transversal de um rio ou canal.

$\vec{S}$  – Vetor normal à superfície livre de um corpo d'água.

$T$  – Período de tempo arbitrário considerado para fins de promediação no tempo.

$T_k$  – Período da  $k$ -ésima componente harmônica da onda de maré.

$TS$  – Tempo de Simulação (modelação numérica).

$t$  – Variável tempo.

$u$  – Velocidade média numa dada seção transversal de um rio ou canal (1D).

$u^*$  – Velocidade de atrito junto ao fundo de uma dada seção transversal de um rio ou canal.

$\vec{V} = (u, v, w)$  – Vetor velocidade (3D).

$\overline{\vec{V}} = (\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$  – Média temporal do vetor velocidade (3D).

$\vec{V}' = (u', v', w')$  – Flutuação do vetor velocidade  $\vec{V}$  em relação à média temporal  $\overline{\vec{V}}$  (3D).

$\hat{\vec{V}} = (\hat{u}, \hat{v})$  – Vetor velocidade integrado na profundidade (2DH).

$X_0, Y_0$  – Coeficientes das Equações da Conservação da Quantidade de Movimento discretas no tempo.

$x, y, z$  – Variáveis espaciais (posição).

$z_0$  – Valor da posição  $z$  num ponto qualquer.

$\alpha, \beta$  – Parâmetros auxiliares utilizados no processo de desacoplamento proposto neste trabalho.

$\gamma$  – Peso específico.

$\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta t$  – Valores infinitesimais das variáveis  $x, y, z, t$ .

$\delta$  – Espessura da camada limite num escoamento fluido.

$\epsilon$  – Termo dissipativo da viscosidade turbulenta (modelos  $k-\epsilon$ ).

$\epsilon$  – Resíduo de uma variável (método dos resíduos ponderados).

$\eta$  – Valor da posição  $z$  na superfície livre de um corpo d'água.

$\theta$  – Ângulo de latitude.

$\kappa$  – Constante de Von Karman.

$\mu$  – Viscosidade cinemática.

$\nu$  – Viscosidade dinâmica.

$\rho$  – Massa específica.

$\sigma_{ii}$  – Tensão normal — na direção  $i$ .

$\tau_{ij}$  – Tensão tangencial — na direção  $j$ , atuante no plano normal à direção  $i$ .

$\tau_0$  – Tensão de atrito no fundo em uma dada seção transversal de um rio ou canal.

$\tau_i^B$  – Tensão de atrito no fundo na direção  $i$ .

$\tau_i^V$  – Tensão de vento na interface ar/água na direção  $i$ .

$\phi_j$  – Funções de aproximação (método dos resíduos ponderados) ou de interpolação (método dos elementos finitos).

$\varphi$  – Função de ponderação dos resíduos (método dos resíduos ponderados).

$\omega$  – Velocidade angular da Terra.

$\Omega$  – Parâmetro de Coriolis.

\* \* \*

# Capítulo 1

## Introdução

A expressão do princípio da continuidade dos escoamentos pode ser atribuída, originariamente, a Leonardo Da Vinci (1452–1519). Já as equações de Euler, que lançaram os fundamentos da Hidrodinâmica, constituindo-se na base de todo o desenvolvimento subsequente, datam de 1755. Dado um referencial inercial qualquer, definido por um sistema de eixos cartesianos –  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , tais equações descrevem matematicamente, em cada direção, o movimento dos fluidos perfeitos. Newton, posteriormente, daria novo impulso ao estudo dos escoamentos, introduzindo o conceito clássico de viscosidade. Foi assim que diversos pesquisadores — Navier (1823), Poisson (1831), Saint-Venant (1843) e Stokes (1845) — estabeleceram, quase um século depois de Euler, as equações do movimento dos fluidos viscosos, também conhecidas como as equações fundamentais da Hidrodinâmica, ou equações de Navier-Stokes. Osborne Reynolds, em 1895, discutiu as equações de Navier-Stokes, introduzindo o conceito de escoamento médio. Desde então, diversos outros cientistas e pesquisadores notáveis deram importantes contribuições para a aplicação das equações gerais do escoamento aos mais diversos problemas da Hidráulica, estabelecendo modelos específicos e discutindo as limitações da modelação matemática em função dos processos físicos predominantes em cada problema estudado.

As equações de Navier-Stokes expressam, na verdade, a segunda lei de Newton, ou o princípio da conservação da quantidade de movimento aplicado aos escoamentos

fluidos. Já o princípio de conservação da massa é expresso pela chamada equação da continuidade. Para a modelação dos escoamentos em corpos d'água adota-se comumente a hipótese de incompressibilidade dos fluidos, a qual é dada pela condição de que o divergente do campo de velocidades se anula para todo e qualquer ponto do espaço; esta expressão é também conhecida como a equação da continuidade para os escoamentos de fluidos incompressíveis. Com base nas equações da continuidade e de Navier-Stokes podem então ser estabelecidos modelos matemáticos de circulação em corpos d'água. Observa-se, no entanto, que as variáveis do problema, no caso mais geral são: a pressão, as componentes do vetor velocidade, e a massa específica. Verifica-se assim que o número de incógnitas — cinco, excede o número de equações — quatro.

O fechamento do problema, ou seja, o estabelecimento de um mesmo número de equações e de incógnitas, passa, via de regra, por uma equação que caracteriza um estado físico da massa líquida em escoamento — equação de estado. No caso de estuários, por exemplo, esta equação pode ser dada, simplificada, por uma relação direta entre massa específica e salinidade. A salinidade, no entanto, varia no tempo e no espaço, sendo esta variação usualmente formulada através de uma equação de transporte difusivo-advectivo do sal. Caso porém a equação de estado considerasse ainda a interveniência de outros parâmetros (como por exemplo, da temperatura da água), novas equações deveriam ser introduzidas, de modo a se obter um modelo matemático fechado. Os modelos de transporte (de sal ou outras substâncias), no entanto, podem ser desenvolvidos de forma desacoplada, assumindo como dados do problema os campos de pressão e velocidades, obtidos de modelos hidrodinâmicos de circulação, os quais são objeto do presente trabalho.

Considerando-se agora que a massa específica possa ser admitida como uma constante, estabelecem-se, através das equações da continuidade (para os fluidos incompressíveis) e da conservação da quantidade de movimento (Navier-Stokes),

modelos matemáticos de escoamentos que consistem na solução simultânea de quatro equações a quatro incógnitas – pressão e componentes da velocidade. Através de integrações das equações gerais numa ou noutra direção, podem ser estabelecidos modelos mais simples, a duas ou uma dimensão, conforme as características do problema em estudo.

Ocorre porém que as equações da conservação da quantidade de movimento, também chamadas de equações dinâmicas, são na verdade equações diferenciais parciais de segunda ordem não lineares. Assim, à exceção de alguns casos especiais, com condições de contorno bastante simples, não possuem solução analítica conhecida. Decorre daí a grande importância da modelação numérica no estudo dos escoamentos em geral, como uma das ferramentas mais eficazes e econômicas para fins de simulações e previsões.

Os métodos numéricos para a solução computacional de sistemas de equações diferenciais constituem, por si só, uma vasta linha de pesquisa dentro da Engenharia, e que muito tem avançado nos últimos anos, também em função do constante desenvolvimento dos equipamentos. Em recursos hídricos, e especificamente na modelação de escoamentos, utilizam-se, principalmente, algoritmos de diferenças finitas e/ou de elementos finitos, os quais são revistos, de forma sucinta, no presente trabalho.

A modelação via elementos finitos pode, em geral, representar de modo mais eficiente que em diferenças finitas os contornos irregulares de determinados corpos d'água, tendo por isso grande importância, sobretudo na modelação a duas ou três dimensões. Ocorre porém que os modelos em diferenças finitas são usualmente resolvidos através de algoritmos altamente eficientes, como por exemplo o ADI (“Alternating Direction Implicit”). Através de um desacoplamento no cálculo das diversas variáveis (elevação do nível d'água, componentes da velocidade, salinidade, etc...) reduz-se o problema a soluções múltiplas de sistemas tridiagonais. Tais esquemas,

infelizmente, não são aplicáveis a elementos finitos. Em função da geometria dos problemas estudados, dos tipos de condições de contorno, e das limitações impostas às malhas de discretização, por questões de condições de estabilidade numérica dos algoritmos, a modelação a duas ou três dimensões pode assim atingir grandes proporções, em termos de espaço de memória e tempo computacional requeridos, o que equivale na prática a limitações de equipamentos e custos computacionais elevados.

O presente trabalho propõe assim uma técnica de desacoplamento dos cálculos para modelos hidrodinâmicos de circulação, extensível à solução via elementos finitos. Trata-se de uma técnica analítico-numérica, partindo na verdade de operações com as equações governantes dos modelos. Através de substituições sucessivas na equação da continuidade possibilitar-se-ia o desacoplamento dos cálculos de elevações do nível d'água e velocidades, reduzindo-se significativamente o espaço de memória e tempo de processamento necessários, sem prejuízo para a precisão dos resultados.

O trabalho de pesquisa ora realizado constitui-se, na verdade, em investigações preliminares quanto à viabilidade desta técnica, apresentada em detalhes no capítulo 4. Deste modo, foram concentrados esforços no desenvolvimento de um modelo detalhado para a simulação do escoamento em canais de maré unidimensionais, resolvendo-se as equações de Saint-Venant – Navier-Stokes a uma dimensão – através de um esquema de diferenças finitas. Tal modelo foi elaborado em contraposição a um modelo acoplado convencional, de forma a possibilitar uma exaustiva investigação comparativa dos resultados práticos de simulações empregando ou não a técnica de desacoplamento proposta. O capítulo 5 trata especificamente da formulação do modelo e de sua aplicação comparativa, ressaltando os aspectos mais importantes quanto à viabilidade do desacoplamento proposto, e que são objeto das conclusões e recomendações deste trabalho.

\* \* \*

## Capítulo 2

# Modelos Matemáticos de Escoamentos

A representação matemática dos processos físicos que caracterizam um dado problema constitui a principal ferramenta da Engenharia para o estudo do comportamento de estruturas projetadas, e dos efeitos sobre o meio-ambiente das intervenções realizadas pelo homem. A modelação matemática dos escoamentos é feita a partir das equações fundamentais da Hidrodinâmica. Cabe ressaltar que a teoria da Hidrodinâmica deve ser compreendida dentro de um contexto mais amplo, que é o da Mecânica dos Meios Contínuos. A MMC, por sua vez, é o ramo da Mecânica que estuda as tensões e deformações em sólidos, líquidos e gases, admitindo por hipótese que estes materiais possam ser modelados, matematicamente, como um contínuo. É a partir da chamada “hipótese do contínuo” que tem sentido falar em propriedades definidas em um ponto; mais que isso, as funções matemáticas que expressam propriedades físicas, bem como suas derivadas, são contínuas. Podem-se assim expressar, matematicamente, para os escoamentos fluidos, os princípios gerais da Mecânica de conservação da massa e da quantidade de movimento. A simples enunciação matemática destes princípios, porém, introduz um determinado número de incógnitas, relacionadas por um número menor de equações. Somam-se pois a estes princípios algumas equações relacionando tensões e deformações, e/ou estado de movimento; ou seja, as chamadas equações constitutivas para as tensões, ou ainda

as equações de estado. Este é o caminho natural, dentro da MMC, que permite a formulação de teorias específicas, tais quais a Hidrodinâmica.

As equações gerais assim obtidas constituem a base da modelação matemática dos mais diversos problemas da Engenharia Hidráulica; desde aqueles envolvendo o escoamento junto a obras de Engenharia — canais, desvios, etc. — até aqueles concernentes ao escoamento e transporte em corpos d'água naturais, comumente associados à modelação de problemas ambientais.

Cabe ainda ressaltar, em vista do que foi dito no capítulo anterior, que a modelação matemática de escoamentos, em linhas gerais é, no mínimo, centenária. Na maioria dos casos, porém, a modelação completa envolve sistemas de equações diferenciais parciais não lineares de grande complexidade, os quais exigiam, antes do advento da informática, via de regra, inúmeras simplificações para a obtenção de soluções aproximadas. E mesmo atualmente, com todo o avanço das ciências computacionais, muitos modelos de escoamentos exigem soluções numéricas extremamente dispendiosas, pelo espaço de memória e tempo de processamento requeridos. Há ainda problemas que desafiam os limites teóricos do desenvolvimento dos sistemas computacionais, requerendo, para a obtenção de soluções satisfatórias, modelos tidos a rigor como *transcomputacionais* (isto ocorre notadamente no caso de modelação ambiental).

Isto posto, apresentam-se a seguir as equações gerais governantes dos escoamentos líquidos, e sua formulação para modelação matemática de problemas de Engenharia nos casos a três dimensões — 3D, duas dimensões via integração na profundidade — 2DH e a uma dimensão (longitudinalmente) — 1D.

## 2.1 - EQUACIONAMENTO GERAL

As propriedades de uma partícula fluida em movimento dependem, evidente-

mente:

de sua posição na massa fluida;

do instante de tempo considerado; e

de seu estado físico.

O ponto de partida para o equacionamento das grandezas relativas aos escoamentos é a descrição do movimento da massa líquida, a qual pode ser feita, classicamente, de dois pontos de vista distintos: lagrangeano ou euleriano. Na descrição lagrangeana, um elemento infinitesimal contém uma determinada massa líquida que não atravessa suas fronteiras; ou seja, o elemento desloca-se junto com a massa líquida. Deste modo, as coordenadas de cada elemento são função de uma dada posição inicial destes e do tempo decorrido. As velocidades e acelerações em cada ponto são conhecidas através das derivadas temporais de primeira e segunda ordem. Já do ponto de vista euleriano, toma-se um volume de controle infinitesimal, que corresponde a uma região arbitrada do espaço, atravessada pela massa líquida em movimento. O escoamento é assim descrito em pontos fixos e tempos escolhidos arbitrariamente, na forma

$$P = f(x, y, z, t)$$

onde  $P$  pode ser, por exemplo, uma componente de velocidade, a pressão, ou a massa específica do fluido. A descrição euleriana é comumente a mais utilizada, pois requer um tratamento matemático mais simples, e é mais conveniente aos problemas da Engenharia, porquanto trata das propriedades do fluido e seu movimento em pontos especificados (ver Raudkivi e Callander, 1975).

É importante observar que a descrição dos escoamentos assume a massa fluida

como um meio contínuo — hipótese do contínuo — desprezando os movimentos moleculares; e ainda uma variação contínua das propriedades do fluido e seu movimento, que equivale a dizer que a grandeza  $P$  no ponto  $x + \Delta x$  pode ser relacionada com  $P$  no ponto  $x$  através de expansão por série de Taylor. Sendo  $x$  um valor infinitesimal, próximo de zero, tomam-se apenas os dois primeiros termos da série, ou seja,

$$P(x + \Delta x, y, z, t) = P(x, y, z, t) + \frac{\partial P}{\partial x} \Delta x$$

O escoamento assim descrito pode ser então equacionado através da aplicação dos princípios de conservação de massa, energia e quantidade de movimento. O estudo dos processos de transporte envolvendo estas três grandezas constitui-se no objeto principal da ciência denominada Hidrodinâmica.

### 2.1.1 - Equação da Continuidade

A equação da continuidade traduz o princípio de conservação da massa, e pode ser expressa, na sua forma mais geral, como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

(a dedução desta equação consta do anexo 1 do presente trabalho).

No caso específico dos modelos de circulação em corpos d'água, assumindo-se a hipótese de incompressibilidade dos fluidos, pode-se escrever que:

$$\text{div} \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

Esta expressão corresponde à chamada equação da continuidade para o escoamento dos fluidos incompressíveis.

### 2.1.2 - Equações de Euler / Navier-Stokes

Estas equações são a expressão matemática do princípio de conservação da quantidade de movimento, podendo também traduzir-se pela segunda lei de Newton,

$$\sum \vec{F}_{externas} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

As forças externas podem ser de dois tipos: de superfície, atuando diretamente por contato — pressão, atrito — ou de campo, induzidas por um campo qualquer — campo gravitacional, campo de uma aceleração centrípeta, ou outros. As forças de superfície são definidas a partir de um tensor de nove componentes, a saber:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Demonstra-se, através do balanço da quantidade de movimento angular, que  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ . Restam assim apenas seis componentes, conhecidas como componentes de Lamé (Méhauté, 1976). As forças de campo podem ser definidas em função de um vetor resultante das acelerações de campo dadas,

$$\vec{a}_c = (a_{cx}, a_{cy}, a_{cz})$$

O produto  $m\vec{a}$  expressa as forças inerciais do escoamento, sendo a aceleração dada pela derivada total da velocidade no tempo. Pode-se assim expressar as equações da conservação da quantidade de movimento, em sua forma mais geral como:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= a_{cx} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= a_{cy} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= a_{cz} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para os fluidos perfeitos, não viscosos, é dado que

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Substituindo estas expressões nas equações gerais chega-se à formulação das chamadas equações de Euler (1755)

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= a_{cx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} &= a_{cy} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} &= a_{cz} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Considerando-se agora os fluidos newtonianos (caso real, fluidos viscosos), as expressões das tensões de superfície são dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} & \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Assumindo-se por hipótese que a viscosidade seja constante, tem-se então:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= a_{cx} + \frac{1}{\rho} \mu \nabla^2 u \\ \frac{Dv}{Dt} &= a_{cy} + \frac{1}{\rho} \mu \nabla^2 v \\ \frac{Dw}{Dt} &= a_{cz} + \frac{1}{\rho} \mu \nabla^2 w \end{aligned} \quad (2.5)$$

Estas são as chamadas equações de Navier-Stokes, também conhecidas como as equações fundamentais da Hidrodinâmica, obtidas de modo independente por diversos pesquisadores — entre eles Navier e Stokes — quase um século depois de Euler.

A dedução completa das equações do movimento (2.3) pode ser encontrada também no anexo 1 do presente trabalho.

### 2.1.3 - Acelerações de Campo

#### 2.1.3.1 - Campo gravitacional

Nas aplicações práticas das equações do movimento o campo gravitacional é usualmente considerado como o único campo de acelerações externo.

Sendo o eixo  $OZ$  vertical, e orientado para cima, define-se uma função potencial,  $G = gz$ , obtendo-se assim o campo de acelerações através do gradiente

$$-\nabla \cdot G = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) gz = (0, 0, -g)$$

Pode-se então substituir as componentes da aceleração de campo nas equações de Navier-Stokes (2.5), sendo:

$$a_{cx}^{(1)} = 0$$

$$a_{cy}^{(1)} = 0$$

$$a_{cz}^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial z}gz = -g$$

#### 2.1.3.2 - Aceleração de Coriolis

Conforme assinalado no início do presente trabalho, a formulação das equações gerais do movimento dos fluidos considera, em princípio, um dado referencial inercial qualquer. Em determinados estudos, porém, sobretudo para os corpos d'água de grandes dimensões, os efeitos da rotação da Terra podem assumir grande importância, devendo ser levados em conta na modelação matemática — é o caso, por exemplo, dos modelos concernentes à circulação oceânica.

As forças resultantes sobre os escoamentos podem ser formuladas a partir da chamada aceleração de Coriolis. Embora caracterizando esforços inerciais, são usualmente tratadas como forças de campo, uma vez decorrentes de um dado campo de acelerações, e expressas formalmente como termos que se somam ao lado direito das equações da conservação da quantidade de movimento. (Uma discussão detalhada sobre estes esforços pode ser encontrada em Méhauté, 1976, não sendo aqui reproduzida por fugir ao escopo deste trabalho.)

Para escoamento quase horizontais, sendo  $OZ$  vertical, o parâmetro de coriolis pode ser escrito como

$$\Omega = 2\omega \sin \theta$$

onde  $\omega$  é a velocidade angular da Terra, e  $\theta$  o ângulo de latitude, por convenção, negativo no Hemisfério Sul e positivo no Norte. Pode-se então levar em conta o efeito de Coriolis nas equações dinâmicas, somando-se ao lado direito das mesmas as seguintes “componentes da aceleração de campo”:

$$a_{cx}^{(2)} = +\Omega v$$

$$a_{cy}^{(2)} = -\Omega u$$

$$a_{cz}^{(2)} = 0$$

#### 2.1.4 - Forma Final das Equações Dinâmicas

Na formulação das equações de Navier-Stokes (2.5) as expressões das tensões tangenciais e normais para os fluidos viscosos foram substituídas nas equações gerais da conservação da quantidade de movimento (2.3), conforme assinalado no item 2.1.2. Se os termos de tensão normal forem considerados agora como

$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx} \quad \sigma_{yy} = -p + \tau_{yy} \quad \sigma_{zz} = -p + \tau_{zz}$$

onde

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad \tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

estas equações podem ser reescritas em função das tensões de contato, isolando-se os termos de pressão. Considere-se ainda o campo gravitacional como o único campo de acelerações externo, e sendo o eixo  $OZ$  vertical, orientado para cima. Levando-se também em conta os termos inerciais devidos à aceleração de Coriolis, chega-se finalmente a:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \Omega v + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \Omega u + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (p + \gamma z) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Esta é uma expressão usual das equações dinâmicas, constituindo, junto com a equação da continuidade (2.1), a base da modelação matemática dos escoamentos líquidos.

### 2.1.5 - Observações sobre as Equações Gerais

A partir das equações gerais da continuidade (2.1) e da conservação da quantidade de movimento (2.3) podem ser estabelecidos modelos matemáticos para quaisquer tipos de escoamentos fluidos, desde problemas uni-dimensionais dos mais simples até aqueles envolvendo complexos movimentos aleatórios e exigindo tratamento tridimensional. No caso dos escoamentos líquidos, assumindo-se as hipóteses de fluido incompressível e viscosidade constante, foram demonstradas anteriormente algumas das simplificações introduzidas nas equações gerais, chegando-se às expressões da continuidade e da conservação da quantidade de movimento para tais condições (2.2

e 2.3, respectivamente). Estas equações podem constituir-se num sistema fechado para a determinação das grandezas fundamentais dos escoamentos — velocidade e pressão — em cada ponto do espaço.

As equações dinâmicas são pois equações diferenciais parciais de segunda ordem de certa complexidade; os termos advectivos de inércia fazem-nas não lineares. Embora não haja solução geral conhecida do sistema de equações dado pela equação da continuidade e pelas equações dinâmicas, em alguns casos especiais, com condições de contorno simples, podem ser obtidas soluções exatas (por exemplo, para o escoamento entre placas paralelas, ou devido à rotação de um disco).

Por fim, é importante assinalar, para fins de modelação, que os escoamentos na natureza só são conhecidos através de grandezas medidas, o que equivale a dizer, promediadas, exigindo assim tratamento matemático adicional das equações gerais apresentadas para a elaboração de modelos matemáticos, conforme será visto na seqüência.

## 2.2 - CASO TRIDIMENSIONAL (3D)

Os modelos de escoamentos líquidos a três dimensões são necessários para o estudo do escoamento e transporte em grandes corpos d'água naturais, onde a variabilidade das grandezas características em quaisquer direções é tal que compromete irremediavelmente os resultados de análises via integrações numa dada direção. Há que se levar em conta, nestes casos, a natureza turbulenta dos escoamentos, caracterizada pela presença de uma enorme gama de vórtices, com uma vasta variação de escalas espaciais e temporais.

A multiplicidade de escalas implica um comportamento fortemente aleatório das propriedades do escoamento. Ainda assim, não há, na dedução das equações de Navier-Stokes, nenhuma hipótese ou consideração limitante para a aplicação a esco-

mentos turbulentos. Isto no entanto exigiria a simulação até as escalas menores, onde as forças de dissipação viscosa têm sentido físico. Para tanto, o esforço numérico seria muito grande, e mesmo com o advento de poderosos computadores, a discretização exigida para a aplicação direta de um modelo matemático baseado nas equações apresentadas inviabiliza o processamento. Segundo Rosman (1987), diversos pesquisadores, em trabalhos recentes, apontam tais tentativas como praticamente *transcomputacionais*.

A solução para o desenvolvimento de modelos matemáticos viáveis parte da promediação das equações governantes. Historicamente, o conceito de escoamento médio foi introduzido em 1895 por Osborne Reynolds, ao discutir as equações de Navier-Stokes.

### 2.2.1 - Equações Governantes Promediadas

A promediação das equações assume uma simplificação padrão na prática dos problemas de Engenharia, que é a separação. As propriedades de um escoamento turbulento são consideradas como sendo a soma de um valor médio, ou de grande escala, com uma parcela de flutuação, ou de pequena escala.

$$P = \bar{P} + P'$$

A substituição de cada variável global do escoamento nas equações governantes por uma relação deste tipo resulta em equações de valores médios, idênticas às anteriores, acrescidas porém de termos envolvendo correlações de pequena escala. Estes termos podem então ser modelados, visando-se a caracterização dos efeitos globais da pequena escala, e não o detalhamento dos processos. É o que será visto a seguir.

A simples promediação de uma grandeza  $P$  é dada por

$$\bar{P}(x, y, z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{(t-T/2)}^{(t+T/2)} P(x, y, z, t') dt'$$

onde  $T$  é um período de tempo arbitrário, tendendo ao infinito. São válidas assim, dentre outras, as seguintes relações:

$$\overline{\bar{P}} = \bar{P} \quad \overline{\bar{P}'} = 0 \quad \overline{\bar{P}P'} = 0$$

conhecidas como postulados de Reynolds.

Ocorre porém que tal procedimento, resultando em variáveis independentes do tempo, faz desaparecer nas equações governantes os termos envolvendo derivadas temporais. Para a maioria dos escoamentos de interesse para a Engenharia não faz sentido utilizar equações independentes do tempo. Na prática então, considera-se o valor médio como

$$\bar{P}(x, y, z, t) = \frac{1}{T} \int_{(t-T/2)}^{(t+T/2)} P(x, y, z, t') dt'$$

onde o período de tempo  $T$  assume um valor finito, porém suficientemente dilatado para fins da promediação.

Assume-se no entanto neste caso, como uma aproximação aceitável, que permanecem válidos os postulados de Reynolds. Uma discussão detalhada dos processos de promediação, suas limitações teóricas, e validade das hipóteses para fins de modelação, é apresentada em Rosman (1987), não sendo aqui reproduzida.

Assim, na equação da continuidade para os escoamento líquidos o vetor de velocidades é simplesmente substituído por um valor médio, escrevendo-se então

$$\text{div} \bar{\vec{V}} = \nabla \cdot \bar{\vec{V}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.7)$$

Já as equações de Navier-Stokes promediadas assumem a forma:

$$\begin{aligned}
\frac{D\bar{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \Omega \bar{v} + \nu \nabla^2 \bar{u} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \right) \\
\frac{D\bar{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \Omega \bar{u} + \nu \nabla^2 \bar{v} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{v'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'} \right) \\
\frac{D\bar{w}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + \gamma z) + \nu \nabla^2 \bar{w} - \left( \frac{\partial}{\partial x} \overline{w'u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{w'v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Estas equações são também conhecidas como as equações de Reynolds. Na verdade, correspondem às equações de Navier-Stokes para os valores médios do escoamento, acrescidas de termos envolvendo correlações de escalas, advindos da promediação dos termos advectivos. Estes termos, posicionados no lado direito das equações, representam as tensões turbulentas, sendo denominados tensor de Reynolds (ver Raudkivi e Callander, 1975). As trocas turbulentas são processo físicos que não possuem representação matemática, exigindo modelação. Os modelos de turbulência mais utilizados na prática até hoje são aqueles baseados no conceito de viscosidade turbulenta; uma aproximação para as tensões turbulentas, por analogia com as tensões viscosas, proposta por Boussinesq em 1877.

Observa-se que a modelação de turbulência constitui um campo aberto a pesquisas dentro da mecânica dos fluidos, e diversos trabalhos recentes discutem as técnicas convencionais comumente empregadas, propondo revisões, ou novas abordagens, em alguns casos com excelentes resultados já comprovados. O anexo 2 do presente trabalho apresenta uma breve revisão sobre modelação de turbulência.

Assim, as equações dinâmicas promediadas, para fins de modelação matemática dos escoamentos líquidos em grandes corpos d'água podem ser apresentadas na forma:

$$\begin{aligned}
\frac{D\bar{u}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \Omega \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{xz}}}{\partial z} \right) \\
\frac{D\bar{v}}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \Omega \bar{u} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{yz}}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + \gamma z) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zz}}{\partial z} \right)$$

Sendo os valores das tensões de contato médias dados por:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx} &= 2K_{xx} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \bar{\tau}_{xy} &= K_{xy} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \\ \bar{\tau}_{yy} &= 2K_{yy} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \bar{\tau}_{xz} &= K_{xz} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \bar{\tau}_{zz} &= 2K_{zz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} & \bar{\tau}_{yz} &= K_{yz} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

onde os coeficientes  $K_{ij}$  correspondem ao tensor viscosidade turbulenta.

### 2.2.2 - Simplificação das Equações Dinâmicas

Uma simplificação usual na prática da Engenharia, para a modelação matemática dos escoamentos em corpos d'água, é a substituição da equação dinâmica na direção  $OZ$  pela chamada aproximação hidrostática, com erro associado desprezível (ver Rosman, 1987):

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Integrando-se esta expressão na profundidade, entre um ponto  $z_0$  qualquer e a posição da superfície livre  $\eta(x, y, t)$ , advém:

$$p = p_s + \rho g(\eta - z_0)$$

Supondo a massa específica  $\rho$  constante, e a pressão na superfície livre  $p_s = p_{atm}$ , também constante, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \rho \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

Estas expressões são então substituídas nas equações dinâmicas nas direções  $OX$  e  $OY$ . Tem-se assim, para fins de modelação, as seguintes equações da conservação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{u}}{Dt} &= -g\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} + \Omega\bar{v} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\tau}_{xz}}{\partial z}\right) \\ \frac{D\bar{v}}{Dt} &= -g\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y} - \Omega\bar{u} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{\tau}_{yz}}{\partial z}\right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

### 2.2.3 - Modelação

Na modelação dos escoamentos a três dimensões as incógnitas do problema são, em princípio, a pressão e as componentes da velocidade em cada direcção. A substituição da equação dinâmica na direcção  $OZ$  pela aproximação hidrostática de pressões reduz o problema à determinação do campo de velocidades e da posição da superfície livre  $\eta$ , empregando-se para tanto a equação da continuidade e as equações da conservação da quantidade de movimento nas direcções  $OX$  e  $OY$ . A determinação de  $\eta$  requer uma outra equação, tomando-se então a chamada condição de contorno cinemática na superfície livre (CCCSL), dada pela equação:

$$\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{\eta}}{\partial y} = \bar{w}\quad (2.11)$$

(válida apenas em  $z = \eta$ ).

Estabelecido então um domínio de modelação, devem ser especificados os campos de pressão (elevação do nível d'água) e/ou velocidades nas fronteiras, além das tensões tangenciais relativas à ação do vento na superfície livre e ao atrito no fundo. Estas tensões são em geral obtidas de relações empíricas, que serão discutidas a

seguir, quando do estudo dos modelos a duas dimensões via integração na profundidade das equações ora apresentadas. (Observa-se que a notação indicando os valores médios de cada grandeza pode ser suprimida, ficando subentendida).

### 2.3 - CASO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL (2DH)

Segundo Rosman (1987), a maioria dos corpos d'água rasos pode ser bem representada por um modelo bi-dimensional no plano horizontal. Para isto é preciso que as escalas verticais do movimento sejam muito menores que as horizontais, e que a coluna d'água seja razoavelmente bem misturada, isto é, com pouca ou nenhuma estratificação vertical.

O presente item apresenta as equações governantes do escoamento obtidas através da integração na profundidade das equações a três dimensões (2.7 e 2.10). Tomando-se um plano de referência conforme indicado na figura 2.1, tem-se

$$H(x, y, t) = h(x, y) + \eta(x, y, t)$$

assim,

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} (x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x, y, z, t) dz$$

Observam-se ainda as seguintes condições de contorno:

na superfície  $\rightarrow z = \eta(x, y, t)$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = w$$

e no fundo  $\rightarrow z = -h$

$$u = v = w = 0$$

Procede-se então à integração em  $OZ$ , entre  $z = -h$  e  $z = \eta$ , de cada uma das equações governantes. Este processo está detalhado no anexo 3 do presente trabalho.

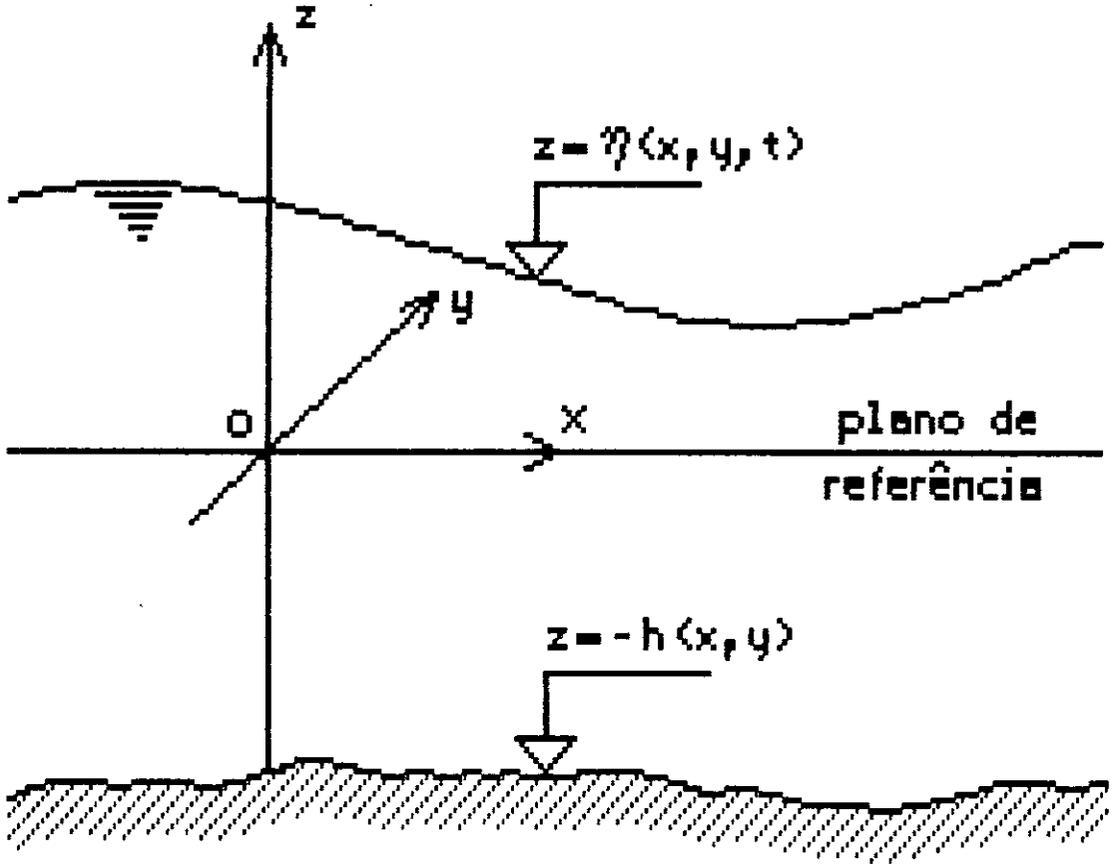


FIGURA 2.1: Corpos d'água Rasos

### 2.3.1 - Equações Governantes Integradas na Profundidade

A equação da continuidade para modelação 2DH é assim dada pela expressão:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} H \hat{u} + \frac{\partial}{\partial y} H \hat{v} = 0 \quad (2.12)$$

As equações da conservação da quantidade de movimento nas direções  $OX$  e  $OY$  são, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{u}}{Dt} = & -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Omega \hat{v} \\ & + \frac{1}{H\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ HK_{xx} \left( 2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ HK_{xy} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{H\rho} \left( \tau_x^V | \vec{\nabla} \cdot S | - \tau_x^B | \vec{\nabla} \cdot B | \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\hat{v}}{Dt} = & -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \Omega \hat{u} \\ & + \frac{1}{H\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ HK_{yx} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ HK_{yy} \left( 2 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{H\rho} \left( \tau_y^V | \vec{\nabla} \cdot S | - \tau_y^B | \vec{\nabla} \cdot B | \right) \end{aligned}$$

Conforme Rosman (1987), para a tensão de vento utilizam-se as expressões:

$$\begin{aligned} \tau_x^V | \vec{\nabla} \cdot S | &= \rho_{ar} C_a U_{10(x)}^2 \\ \tau_y^V | \vec{\nabla} \cdot S | &= \rho_{ar} C_a U_{10(y)}^2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $\rho_{ar}$  é a densidade do ar,  $C_a$  o coeficiente de arrasto, e  $U_{10}$  a velocidade do vento medida 10m acima da superfície livre. Existem diversas fórmulas empíricas para o cálculo de  $C_a$ .

A formulação dos termos de atrito no fundo é objeto de uma discussão detalhada no item 2.5, na seqüência.

### **2.3.2 - Modelação**

Os modelos hidrodinâmicos de circulação em corpos d'água rasos são assim dados pelas equações da continuidade e dinâmicas integradas na profundidade (2.12 e 2.13, respectivamente — do mesmo modo que para o caso 3D, pode-se suprimir a notação indicando a promediação das velocidades, a qual fica subentendida).

As condições de contorno necessárias à modelação devem definir os campos de elevações do nível d'água e de velocidades, sendo as primeiras em geral especificadas ao longo das fronteiras abertas, como por exemplo à entrada de baías e estuários. As condições referentes ao campo de velocidades são geralmente associadas às fronteiras de terra, especificando, via de regra, a componente de velocidade normal à fronteira. Em alguns casos, dependendo do escoamento, pode ser mostrado que estas condições são insuficientes para uma boa definição do modelo; especifica-se então, além delas, a condição de velocidade tangencial nula. Uma discussão mais detalhada a esse respeito pode ser encontrada em Rosman (1987).

### **2.4 - CASO UNIDIMENSIONAL (1D)**

É comum em Engenharia Hidráulica a modelação do escoamento em rios e canais tomando-se as características médias de seções transversais ao longo de seu eixo principal. É o chamado modelo longitudinal, 1D, e sua utilização, embora usual, exige uma criteriosa análise quanto à adequação ao problema, dado o nível de simplificações envolvido, o que pode comprometer os resultados caso determinadas hipóteses e pressuposições não sejam devidamente satisfeitas. Embora o efeito global de curvas ao longo do eixo principal possa ser considerado por coeficientes adicionais de perda de carga, é conveniente que o curso d'água em estudo possua um traçado em planta regular, e o mais retilíneo possível. De um modo geral, o escoamento não deve estar sujeito a variações muito bruscas ou acentuadas de suas características

principais, de forma a ser bem representado pelos valores médios de seções predeterminadas. As seções fornecidas podem ser bastante simples, permanentes e uniformes, ou variar no tempo e no espaço.

O equacionamento matemático do escoamento assim considerado toma por base as mesmas equações gerais da continuidade (2.2) e da conservação da quantidade do movimento (2.3) apresentadas no item 2.1, chegando-se porém a uma formulação evidentemente bem mais simples. As equações de Navier-Stokes unidimensionais equivalem às chamadas equações de Saint-Venant, cuja dedução é apresentada no anexo 4 do presente trabalho.

#### 2.4.1 - As Equações de Saint-Venant

A figura 2.2 mostra um trecho de canal ou rio, assinalando suas principais características médias, podendo-se identificar:

- $Q$  - Vazão afluente ao trecho;
- $A$  - Área molhada da seção transversal;
- $B$  - Largura superficial;
- $\eta$  - Cota da superfície livre;
- $P_M$  - Perímetro molhado da seção transversal;
- $q_L$  - Vazão lateral (contribuições, perdas por infiltração, etc.);
- $S_o$  - Declividade média do fundo;
- $S_f$  - Declividade da linha energética.

Tem-se assim a equação da continuidade 1D expressa como:

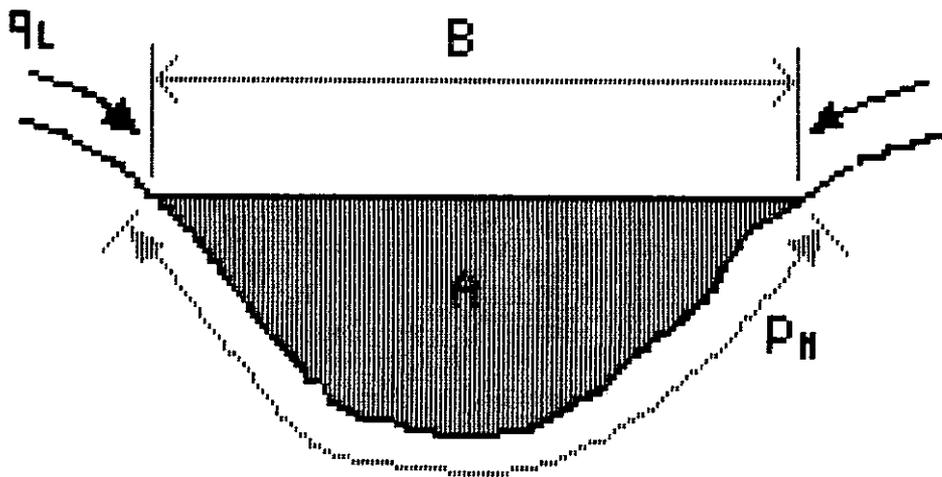
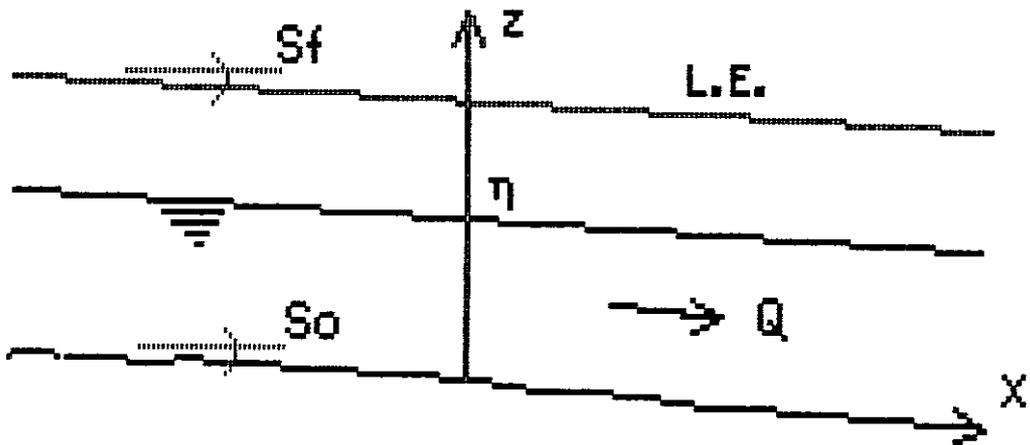


FIGURA 2.2: Escoamento em Canais

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q_L = 0 \quad (2.15)$$

A equação dinâmica 1D é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g(S_0 - S_f) \quad (2.16)$$

Observa-se que  $u = Q/A$  exprime, neste caso, a velocidade média do escoamento numa dada seção transversal. O termo de atrito  $g(S_0 - S_f)$  é substituído por uma das muitas fórmulas empíricas disponíveis, conforme discutido a seguir.

## 2.5 - RESISTÊNCIA AO ESCOAMENTO

Uma vez delineados ao longo deste capítulo os principais aspectos relativos à modelação matemática dos escoamentos, torna-se imprescindível à sua conclusão ao menos uma breve discussão sobre a modelação dos esforços tangenciais junto ao fundo, dada a significativa ordem de grandeza dos efeitos decorrentes sobre o movimento da massa líquida e de cuja avaliação depende fundamentalmente o sucesso dos modelos.

Diversas relações empíricas, estabelecidas desde há muito tempo, têm sido empregadas até hoje. Apesar da eficácia comprovada de algumas destas relações, tanto a nível de experimentos em laboratórios, como na prática dos estudos de Engenharia Hidráulica ao longo de muitas décadas, persistem sérias dificuldades em quantificar adequadamente coeficientes empíricos que traduzam a resistência ao escoamento para os domínios pré-estabelecidos de cada problema em estudo.

No caso dos escoamentos em corpos d'água naturais tais dificuldades decorrem da necessidade de uma avaliação qualitativa generalizável da natureza dos materiais que compõem os leitos dos escoamentos.

Trata-se a seguir dos critérios mais comumente empregados, indicando-se as alternativas mais recomendáveis, conforme o grau de dificuldade inerente a cada caso.

### 2.5.1 - Fórmulas mais Comuns

Sendo a velocidade de atrito, por definição

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$$

onde  $\tau_0$  é a tensão de atrito no fundo; e sabendo-se que para canais com escoamento permanente e uniforme

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} = S_0$$

onde  $R$  é o raio hidráulico (razão da área pelo perímetro molhado) e  $S_0$  a declividade do fundo, assume-se por hipótese, para o caso mais geral de escoamento variado e não permanente, que a declividade da linha energética a um dado instante em uma dada seção qualquer,  $S_f$ , seja coincidente com o valor de  $S_0$  na expressão anterior. Assim, tem-se que:

$$u^* = \sqrt{gRS_f}$$

Admitindo-se, também por hipótese, que a velocidade média numa dada seção possa ser expressa como uma função linear da velocidade de atrito, pode-se então escrever que

$$u \propto \sqrt{RS_f}$$

Com base neste princípio, existem diversas relações empíricas para a perda de carga por atrito, sendo uma das mais difundidas a fórmula de Chézy (1775), o qual foi o primeiro a estabelecer uma relação entre os elementos que definem as condições

de escoamento. Esta fórmula consiste simplesmente na introdução de um coeficiente de proporcionalidade na relação anterior, ou seja,

$$u = C\sqrt{RS_f} \quad (2.17)$$

Observe-se que o coeficiente de Chézy possui assim dimensão  $L^{1/2} / T$ .

A rigor, o expoente do raio hidráulico não é necessariamente igual a 0,5 e alguns autores propõem outros valores. Gauckler, em 1869, estabeleceu a seguinte relação (MKS):

$$u = KR^{2/3}S_f^{1/2} \quad (2.18)$$

Os valores de  $K$  propostos por Gauckler foram posteriormente revistos por Strickler (1923), tornando-se a expressão acima conhecida como fórmula de Strickler, ou fórmula de Gauckler-Strickler. Na prática, hoje em dia, é comum estimar-se o valor inverso, conforme proposto por Manning (1897); tem-se assim a expressão comum da fórmula de Manning (MKS),

$$u = \frac{1}{n}R^{2/3}S_f^{1/2} \quad (2.19)$$

Outra expressão bastante utilizada é a chamada *fórmula universal* da perda de carga (de Darcy-Weissbach), comumente empregada no cálculo de tubulações. Expressando-se o diâmetro do tubo em função do raio hidráulico, chega-se a:

$$u = \sqrt{\frac{8g}{f}}\sqrt{RS_f} \quad (2.20)$$

onde  $f$  é um coeficiente adimensional.

Através destas ou de outras fórmulas disponíveis, podem ser modeladas as tensões de atrito no fundo nas equações dinâmicas anteriormente apresentadas — 2.10 para o caso 3D, 2.13 para o caso 2DH, e 2.16 para o caso 1D.

## 2.5.2 - Coeficientes de Resistência

A confrontação das diversas fórmulas empíricas apresentadas permite relacionar os diferentes coeficientes de atrito propostos por cada autor. Observa-se que:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} = \frac{R^{1/6}}{n} \quad (2.21)$$

$C$  - coeficiente de Chézy;

$f$  - coeficiente de Darcy-Weissbach;

$n$  - coeficiente de Manning.

Assim, qualquer que seja o caminho escolhido, o problema recairá sempre na escolha arbitrária de um coeficiente empírico, com base na avaliação qualitativa das características do problema.

Existe no entanto uma alternativa, a partir do estabelecimento do perfil de velocidades, o que em muitos casos pode ser feito com bastante confiabilidade. Diversos experimentos em laboratórios realizados nas últimas décadas, permitem estabelecer perfis logarítmicos de velocidade sob determinadas condições, em função da velocidade de atrito, da espessura da camada limite, da rugosidade absoluta das paredes, e do raio hidráulico. Segundo Abbot e Basco (1989), para quaisquer tipos de seções transversais, desde condutos fechados até canais bastante largos, na condição de paredes efetivamente rugosas, a velocidade média pode ser calculada com resultados bastante satisfatórios pela fórmula

$$u = \frac{u^*}{\kappa} \ln \frac{6R}{r/2} \quad (2.22)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Von Karman, usualmente igual a 0,4 para a água, e  $r$  a rugosidade absoluta.

A condição de contorno rugoso pode ser estabelecida pela relação

$$\frac{r}{2\delta} \geq 3$$

sendo  $\delta$  a espessura da camada limite. Para os escoamentos a superfície livre demonstra-se que esta condição é satisfeita na maioria absoluta dos casos; há porém expressões análogas para a condição de paredes lisas, ou casos intermediários, levando em conta a espessura da camada limite — ver Abbot e Basco, 1989.

Pode-se assim substituir a equação 2.22 na fórmula de Chézy (2.17), obtendo-se desta forma a seguinte expressão para o coeficiente de atrito (MKS):

$$C = 18 \log \frac{6R}{r/2} \quad (2.23)$$

Caso se deseje trabalhar com outras fórmulas de atrito, calcula-se o valor do coeficiente de Chézy pela expressão 2.23, podendo o coeficiente desejado ser obtido através de relações simples, conforme a expressão 2.21.

Resta por fim a questão da avaliação do coeficiente de atrito escolhido, ou da rugosidade absoluta do leito, em função de cada problema estudado. No caso de tubulações, canais artificiais, etc., estes valores estão satisfatoriamente bem estabelecidos, em função dos materiais utilizados, encontrando-se tabelados nos livros ou manuais de Hidráulica. Para os corpos d'água naturais, há também indicações de valores dos coeficientes mais utilizados, assim como de rugosidade absoluta, em função de avaliações qualitativas das características dos leitos. Citam-se a seguir, a título de ilustração, os valores de rugosidade compilados por Abbot e Basco (1989).

Leitos em terra, com superfície suave	0,007m
Leitos em cascalho	0,020m
Leitos onde há transporte de sedimento	0,015m a 0,080m
Leitos pedregosos	0,100m
Cursos d'água com vegetação	0,200m
Leitos rochosos	0,300m
Leitos com obstruções	0,500m

Cabe assinalar, aliás, que a rugosidade absoluta é um dado material do problema, podendo inclusive, em alguns casos, prescindir de tais referências, optando-se pela avaliação/medição local. O mesmo não se pode dizer dos coeficientes de atrito, cujos valores são resultados exclusivos de aferições das fórmulas empregadas.

### 2.5.3 - Termo de Atrito na Equação Dinâmica 1D

Na modelação do termo de atrito no caso unidimensional opta-se, no presente trabalho, pelo uso da fórmula de Darcy-Weissbach.

Para canais lagunares, considera-se como o nível de referência aquele correspondente ao NMM (nível médio do mar), sendo  $S_o = 0$ . O termo de atrito é assim dado por  $-gS_f$ . A partir da equação de Darcy-Weissbach (2.20) obtém-se:

$$|S_f| = \frac{f}{8g} \frac{u^2}{R}$$

O sinal de  $S_f$  depende, evidentemente, do sentido do escoamento, podendo-se assim escrever que:

$$-gS_f = -\frac{f}{8} \frac{u |u|}{R}$$

### 2.5.4 - Tensão de Atrito no Fundo nas Equações Dinâmicas 2DH e 3D

A modelação a duas ou três dimensões requer, conforme foi visto, a especificação das tensões de atrito no fundo em cada direção. Nas equações dinâmicas para modelação 2DH (2.13, item 2.3) foram utilizadas expressões do tipo  $\tau_i^B | \nabla \cdot \vec{B} |$  - sendo  $i = x, y$ .

Segundo Rosman (1987), aplica-se a usual lei quadrática. Sendo a tensão de atrito proporcional ao quadrado da velocidade, escreve-se então que:

$$\begin{aligned}\tau_x^B |\vec{\nabla} \cdot B| &\equiv \rho C_f (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)^{1/2} \hat{u} \\ \tau_y^B |\vec{\nabla} \cdot B| &\equiv \rho C_f (\hat{u}^2 + \hat{v}^2)^{1/2} \hat{v}\end{aligned}$$

$C_f$  é o coeficiente dado por uma das fórmulas de resistência disponíveis. Adotando-se por exemplo a expressão de Chézy para a perda de carga (2.17) chega-se à seguinte expressão:

$$\tau_o = \gamma R S_f = \frac{\gamma}{C^2} V^2$$

Sendo assim

$$C_f = \frac{\gamma}{C^2}$$

\* \* \*

# Capítulo 3

## Considerações sobre a Modelação Numérica

Uma vez formulados os sistemas de equações diferenciais parciais que constituem os modelos matemáticos de escoamentos esbarra-se, no passo seguinte, nas dificuldades inerentes à sua solução, de modo possibilitar as simulações e previsões necessárias à otimização das soluções de Engenharia. No passado, grandes esforços eram despendidos pelos engenheiros na busca de métodos analíticos ou gráficos, baseados ainda em umas tantas hipóteses simplificadoras, de forma a se poder solucionar, para casos específicos, os modelos matemáticos há muito estabelecidos. Com o advento da informática, um novo caminho se abriu, a partir do desenvolvimento de métodos numéricos para a solução de sistemas de equações diferenciais parciais desprovidos de soluções analíticas conhecidas. E, à medida do avanço das ciências computacionais, maior a complexidade e o alcance dos chamados modelos numéricos, para as mais diversas áreas de aplicação, incluindo-se aí a Hidrodinâmica.

O presente capítulo apresenta, inicialmente, uma breve explanação sobre os métodos numéricos de diferenças finitas e elementos finitos. Para corpos d'água irregulares, a modelação via elementos finitos mostra-se mais eficiente na representação dos contornos. Entretanto, os modelos em diferenças finitas são usualmente resolvidos através de algoritmos altamente eficientes, como por exemplo o ADI ("Alternate Direction Implicit"); através de um desacoplamento no cálculo das diversas variáveis

reduz-se o problema à soluções múltiplas de sistemas tridiagonais (os quais, por sua vez, podem ser resolvidos através de métodos específicos, mais eficazes, como por exemplo empregando-se um esquema de varredura dupla). Tais esquemas, infelizmente, não são aplicáveis a elementos finitos, tornando os custos computacionais associados a estes últimos em geral bem mais elevados.

### 3.1 - PRINCÍPIOS GERAIS DOS ALGORITMOS DE DIFERENÇAS FINITAS E ELEMENTOS FINITOS

O método das diferenças finitas é uma das principais ferramentas para a solução numérica das equações governantes dos escoamentos. A integração das equações diferenciais parciais é feita através da substituição dos termos diferenciais das equações contínuas por esquemas de diferenças finitas, obtendo-se assim expressões análogas àquelas, a serem resolvidas via computação numérica. As aproximações para os termos diferenciais podem ser obtidas de operações envolvendo expansões em séries de Taylor para as funções e suas derivadas. Define-se o erro de truncamento associado como sendo da ordem dos termos desprezados nas expansões em séries. Deste modo, dada uma grandeza característica  $P$ , variando no tempo e no espaço, podem ser obtidas expressões de diferenças finitas para as derivadas parciais de quaisquer ordens, e com erros associados de  $O(\Delta t; \Delta x)$ ,  $O(\Delta t^2; \Delta x^2)$ , etc. Conforme as operações efetuadas, estes esquemas envolvem valores de  $P$  em pontos diferentes da malha, caracterizando assim esquemas progressivos — envolvendo apenas pontos posteriores; centrados — envolvendo os valores da função em um mesmo número de pontos anteriores e posteriores; ou regressivos — envolvendo apenas pontos anteriores. Observe-se ainda que a modelação via diferenças finitas pode empregar esquemas explícitos — quando os valores num ponto no passo de tempo  $t = (n + 1)\Delta t$  são calculados apenas em função dos valores em pontos no tempo  $t = n\Delta t$ ; ou implícitos —

quando os valores de pontos vizinhos no tempo de simulação  $t = (n + 1)\Delta t$  têm um determinado peso no cálculo do valor da função em cada ponto. Neste último caso, demonstra-se que as ponderações do esquema de cálculo influenciam diretamente na estabilidade numérica (o capítulo 5, na seqüência, apresenta uma discussão sobre a estabilidade numérica dos esquemas de diferenças finitas utilizados na solução das equações de Saint- Venant – item 5.4).

O método dos elementos finitos provém do método de Galerkin o qual, por sua vez, é um dos chamados métodos de resíduos ponderados. Dada uma grandeza  $P$ , variando no tempo e no espaço, e regida por uma equação diferencial,  $L(P) = 0$ , assume-se como solução aproximada do problema uma função do tipo

$$P_a = \sum_{j=0}^N a_j \phi_j$$

onde  $\phi_j$  são funções de aproximação, linearmente independentes, e  $a_j$  são parâmetros a serem determinados. Entrando-se agora com  $P_a$  na equação diferencial original observa-se que  $L(P_a) \neq 0 = \varepsilon$ . Os métodos de resíduos ponderados consistem, basicamente, em distribuir este erro ou resíduo em todo o domínio do problema •  $(D)$ , escrevendo-se assim que

$$\int_D \varphi \varepsilon dV = 0$$

onde  $\varphi$  é uma função de ponderação do erro. A diferença entre os métodos de resíduos ponderados reside, justamente, na escolha desta função de ponderação. Existem assim o método da colocação, o método dos momentos, e o método de Galerkin, entre outros. Este último caracteriza-se pela escolha das funções de ponderação idênticas às funções de aproximação. Observa-se no entanto que os parâmetros  $a_j$ , por determinar, são desprovidos de significado físico, o que resulta em sérias limitações à esta aproximação (ver Abbott, 1989). Substituindo-se alternativamente  $a_j$  por  $P_j$ , correspondente aos valores de  $P$  nos pontos nodais  $j$  de um dado elemento — e, portanto, à solução desejada do problema — pode-se então

entender os valores de  $\phi_j$  como funções de interpolação. Tem-se assim o chamado método dos elementos finitos, utilizando-se comumente funções de interpolação lineares ou quadráticas.

A partir desta visão sumária dos métodos de diferenças finitas e elementos finitos podem ser observadas algumas questões relevantes no tocante à modelação numérica dos escoamentos. A solução das equações de Navier-Stokes via diferenças finitas, sobretudo nos casos a duas e três dimensões, empregando esquemas implícitos, requer a solução, a cada passo de tempo, de sistemas matriciais de equações os quais, em função da geometria do problema em estudo, e das exigências relativas à malha, podem resultar em modelos extremamente onerosos, pelo espaço de memória e tempo de processamento requeridos. O mesmo se verifica nos casos de modelação via elementos finitos. Ocorre porém, no primeiro caso, a possibilidade de se empregar técnicas especialmente desenvolvidas para tornar os algoritmos de cálculo bem mais eficientes, tanto em termos de espaço de memória ocupado, como de tempo de processamento requerido, resultando assim em modelos mais econômicos. Estas técnicas, infelizmente, não se aplicam aos esquemas de elementos finitos. Deste modo, diversos problemas a duas e três dimensões, para os quais, conforme assinalado anteriormente, a discretização em elementos finitos é mais apropriada — descrevendo melhor os contornos físicos do problema — estão ainda sujeitos a limitações quanto às possibilidades de simulação, por serem os modelos disponíveis, em alguns casos, extremamente dispendiosos.

### **3.2 - PRINCÍPIOS GERAIS DO ESQUEMA ADI (“ALTERNATE DIRECTION IMPLICIT”)**

O esquema ADI tem por objetivo promover um desacoplamento do cálculo das diversas variáveis do problema, através de procedimentos exclusivamente numéricos,

visando uma maior simplicidade computacional. Introduzido por Peaceman e Rachford em 1955 é comumente utilizado em modelação a duas dimensões via diferenças finitas. A partir de valores conhecidos das grandezas do problema no tempo  $t = n\Delta t$  são escritas equações discretas que, numa direção arbitrada, permitem o cálculo dos valores característicos em um tempo intermediário,  $t = (n + 1/2)\Delta t$ ; a partir daí, tomando-se a outra direção, calculam-se os valores finais, no tempo  $t = (n + 1)\Delta t$ . Deste modo, reduz-se o problema a soluções múltiplas de sistemas envolvendo matrizes tridiagonais, os quais podem então ser tratados de modo mais eficiente, como por exemplo empregando-se o método (algoritmo) de varredura dupla.

Conforme assinala Abbott (1989), o algoritmo de varredura dupla pode ser considerado como um caso particular do método de eliminação gaussiana para a solução de sistemas matriciais. Para uma dada grandeza  $P$ , variando no tempo e no espaço, sendo conhecida uma relação discreta implícita no tempo da forma

$$A_i P_{i+1}^{n+1} + B_i P_i^{n+1} + C_i P_{i-1}^{n+1} = D_i \quad (3.1)$$

estabelece-se um sistema matricial para a solução de  $P$  a cada ponto  $i$  (variando de  $i = 1$  a  $i = ii$ ) no tempo  $t = (n + 1)\Delta t$ , onde a matriz principal é do tipo matriz banda, com 3 diagonais não nulas — matriz tridiagonal. O esquema de varredura dupla consiste em assumir uma relação linear entre  $P_{i+1}$  e  $P_i$ , no tempo  $n + 1$ , introduzindo deste modo duas variáveis discretas independentes adicionais,  $E_i$  e  $F_i$ , escrevendo-se então que

$$P_{i+1}^{n+1} = E_i P_i^{n+1} + F_i \quad (3.2)$$

Operando-se com estas duas equações pode-se estabelecer que

$$E_{i-1} = \frac{-C_i}{A_i E_i + B_i} \quad (3.3)$$

$$F_{i-1} = \frac{D_i - A_i F_i}{A_i E_i + B_i} \quad (3.4)$$

Assim, a partir da condição de contorno conhecida em  $i = ii$ , podem ser estabelecidos os valores de  $E_{ii-1}$  e  $F_{ii-1}$ ; e a partir destes, empregando-se sucessivamente as equações 3.3 e 3.4, todos os demais valores discretos de  $E$  e  $F$ , até o ponto  $i = 1$ . Sendo dado um contorno conhecido neste ponto, calculam-se então, através da equação 3.2, os valores de  $P$ , desde  $i = 1$  até  $i = ii$ , no tempo  $n + 1$ . Daí o nome, varredura dupla, pelo fato de se percorrer a malha, sucessivamente, num e noutro sentido.

Dado que o tempo de processamento depende, essencialmente, do porte dos sistemas matriciais a serem resolvidos — e da eficiência dos algoritmos empregados para tanto, fica evidente a superioridade de um modelo via diferenças finitas empregando o esquema ADI/Varredura Dupla, em relação a um outro, via elementos finitos, sob esse ponto de vista.

### 3.3 - ESTABILIDADE NUMÉRICA

Considerando-se as condições iniciais para a simulação numérica de um dado problema, as condições de contorno conhecidas, e dados intervalos de espaço e tempo fornecidos ( $\Delta x$  e  $\Delta t$ ) chega-se, após um dado tempo de simulação  $TS$ , aos parâmetros que caracterizam uma condição final do problema. A solução do problema é assim dada pelos valores calculados a cada ponto discreto no tempo e no espaço. Considerando-se agora a gama de todas as combinações possíveis de  $\Delta x$  e  $\Delta t$  para fins de modelação, pode-se definir um conjunto de soluções que conduzem àquela condição final, a partir de uma mesma condição inicial dada. Um esquema numérico para a solução de modelos matemáticos é dito estável, se todas as soluções contidas neste conjunto possuírem valores finitos, para todo e qualquer elemento

considerado — ver Abbot (1989).

Destarte, dado um sistema de equações diferenciais que definem o modelo matemático concebido para um problema físico qualquer, sua solução através da discretização espaço-temporal de um dado domínio de interesse — solução numérica — envolve algoritmos de discretização que caracterizam os chamados esquemas numéricos; esquemas estes que encerram, via de regra, um determinado grau de instabilidade numérica. É possível, no entanto, verificar analiticamente sob que condições um dado esquema numérico apresenta-se estável. A principal ferramenta matemática utilizada neste tipo de análise são as transformadas de Fourier, a partir de expansões em séries de Fourier. A chamada análise de Fourier estabelece uma “ponte” entre as equações diferenciais parciais, contínuas, e sua representação numa forma discreta, correspondente às equações numéricas; pode-se assim investigar o modo como as respostas ao equacionamento discreto diferem daquelas decorrentes das equações contínuas (conforme Abbott, 1989). Em função destas análises são estabelecidas as chamadas condições de estabilidade de um esquema numérico. Estas condições estabelecem em geral limitações para a fixação dos intervalos de discretização espaço-temporal, de modo a assegurar a estabilidade do esquema — fixando-se, por exemplo, intervalos de variação permissíveis para o número de Courant,  $NC$ , diretamente proporcional a  $\Delta t/\Delta x$ .

Uma discussão detalhada a esse respeito pode ser encontrada em Abbott e Basco (1989). O modelo desenvolvido para o presente trabalho de investigações sobre a viabilidade de um esquema analítico-numérico de desacoplamento mostra-se, na prática, bastante estável, não tendo sido assim desenvolvidas análises teóricas de estabilidade para os esquemas utilizados. No capítulo 5, porém, estão ilustrados alguns casos de instabilidade numérica, para simulações em condições extremas das malhas de discretização.

\* \* \*

## Capítulo 4

# Desacoplamento via Substituições Sucessivas

Conforme discutido no capítulo anterior, o desacoplamento do cálculo das elevações do nível d'água e das componentes da velocidade reduz os modelos numéricos de escoamentos à solução consecutiva de sistemas tridiagonais, com significativa redução do espaço de memória requerido e do tempo de processamento, resultando assim em custos computacionais bem mais baixos. O presente capítulo apresenta um esquema numérico para a solução das equações do movimento — equação da continuidade e equações dinâmicas — através de sucessivas substituições na equação da continuidade, permitindo desta forma o desacoplamento.

O objetivo último do esquema proposto é possibilitar o desacoplamento para esquemas de elementos finitos, mais eficazes na representação dos contornos de um corpo d'água irregular. Estes esquemas são usualmente empregados na modelação a duas ou três dimensões e carecem ainda, conforme assinalado, de algoritmos mais eficientes para a redução dos custos computacionais e, inclusive, a viabilização da modelação de determinados problemas de grande complexidade (sobretudo nas áreas de estudos relacionados à qualidade do meio-ambiente).

O presente trabalho, no entanto, objetiva definir a viabilidade numérica do esquema proposto, através de pesquisas preliminares, tendo-se concentrado esforços na modelação de canais de maré 1D, para os quais foi desenvolvido um modelo

desacoplado completo, em contraposição a um modelo acoplado convencional. A exaustiva análise de casos utilizando um e outro modelo leva a algumas importantes conclusões quanto à eficácia e aos cuidados necessários no emprego desta técnica de desacoplamento.

Destarte, discute-se a seguir o desenvolvimento teórico detalhado para a formulação de um modelo 1D, e seu desacoplamento, indicando-se a partir daí os principais passos para a extensão da técnica de substituições sucessivas aos casos de modelação 2DH e 3D. A forma final do modelo para canais de maré 1D, bem como sua aplicação em comparação com o modelo acoplado é apresentada na seqüência, no capítulo 5.

## 4.1 - CASO UNIDIMENSIONAL (1D)

### 4.1.1 - Canal Lagunar

O modelo matemático de escoamento longitudinal em canais é dado pelas equações da continuidade e dinâmica 1D, também chamadas equações de Saint-Venant (capítulo 2, equações 2.15 e 2.16).

Toma-se como exemplo um canal lagunar, conforme mostrado esquematicamente na figura 4.1, identificando-se:

- NMM - nível médio do mar;
- $T$  - período da onda de maré;
- $h$  - profundidade em relação ao NMM;
- $\eta$  - cota da superfície livre numa dada seção transversal .

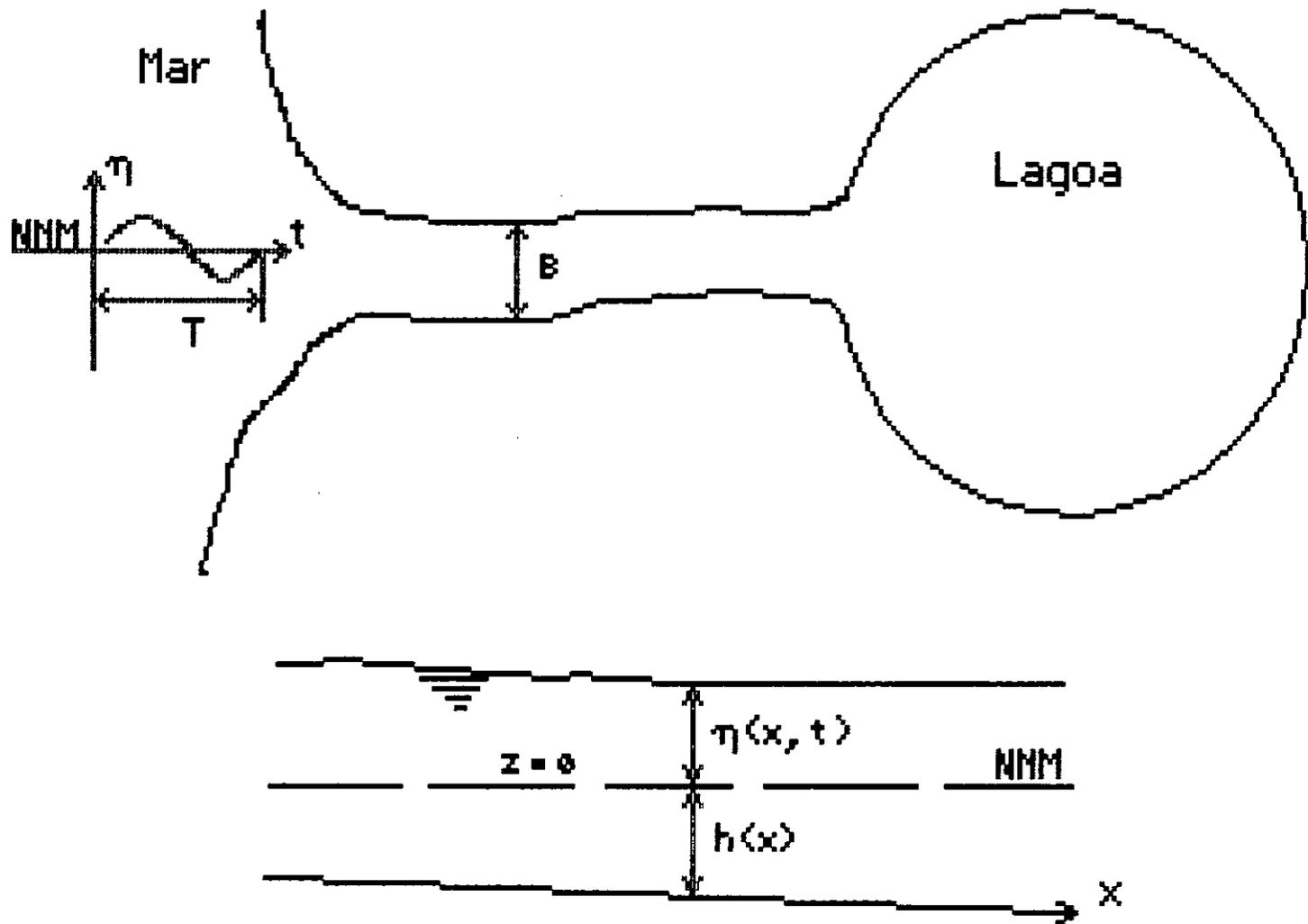


FIGURA 4.1: Canal Lagunar - Planta e Perfil esquemáticos

A vazão lateral  $q_L = 0$ . O termo de atrito pode ser modelado pela expressão de Darcy-Weissbach — sendo  $f$  um coeficiente de atrito empírico e  $R$  o raio hidráulico da seção transversal (ver capítulo 2, item 2.5). As equações governantes assumem assim as expressões:

continuidade

$$B \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [uB(h + \eta)] = 0 \quad (4.1)$$

conservação da

quantidade de movimento

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{f u |u|}{8 R} \quad (4.2)$$

Estas equações são a base do modelo numérico desacoplado desenvolvido neste trabalho, conforme apresentado no capítulo 5. A condição de contorno na embocadura com o mar é sempre do tipo  $\eta(t)$  dada, correspondendo à oscilação de maré em relação ao NMM. A condição mais usual na outra extremidade do canal especifica uma relação entre  $\eta(t)$  e  $u(t)$ , como por exemplo, fornecendo-se um hidrograma afluente.

#### 4.1.2 - Equações Discretas no Tempo

Procede-se então à discretização temporal das equações anteriormente apresentadas, empregando-se para tanto esquemas usuais com erro associado de  $O(\Delta t^2)$ . Segundo Rosman (1987), para os termos não lineares que podem ser escritos como o produto de duas funções lineares, pode ser utilizada a chamada fatoração implícita. Assim, dada uma grandeza  $P = P(x, t)$ , cuja derivada temporal é expressa como o produto de  $L_1$  e  $L_2$  — funções lineares de  $P$  — tem-se que:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = L_1(P) \cdot L_2(P) = \frac{1}{2} (L_1^{n+1} \cdot L_2^n + L_1^n \cdot L_2^{n+1})$$

onde  $L_i^n$  corresponde ao valor de  $L_i$  no tempo  $t = n\Delta t$  e  $L_i^{n+1}$  ao valor de  $L_i$  no tempo  $t = (n + 1)\Delta t$ . Observa-se que, caso  $L_1(P)$  ou  $L_2(P)$  seja uma constante recai-se no esquema de Crank-Nicholson.

Para os termos não lineares que não podem ser expressos deste modo, representando-os como

$$\frac{\partial P}{\partial t} = N(P) \cdot L(P)$$

onde  $N(P)$  é uma função não linear de  $P$ , ainda segundo Rosman (1987), pode-se adotar o seguinte esquema de discretização:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( N^n \cdot L^n - N^{n-1} \cdot L^{n+1} \right) + N^n \cdot L^{n+1}$$

Note-se também que, se  $N(P)$  for constante recai-se no esquema de Crank-Nicholson para  $L(P)$ , e se  $L(P)$  for constante obtém-se o esquema de Adam-Baschfort de segunda ordem para  $N(P)$ .

Obtêm-se assim as expressões da continuidade e da conservação da quantidade de movimento discretas no tempo:

continuidade

$$\frac{2B}{\Delta t} (\eta^{n+1} - \eta^n) = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ Bu^{n+1} (h + \eta^n) + Bu^n (h + \eta^{n+1}) \right] \quad (4.3)$$

conservação da

quantidade de movimento

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = \\ & -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta^{n+1} + \eta^n) - \frac{f}{8} \left( \frac{|u^n|}{R^n} u^n + \frac{|2u^n - u^{n-1}|}{2R^n - R^{n-1}} u^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Estas equações são a base de quaisquer modelos numéricos para canais de maré 1D, devendo ser expressas numa forma discreta no espaço, para aplicação a uma dada malha de pontos escolhida. É a partir daí que se pode então optar por um esquema

acoplado convencional, ou lançar mão de um de processo analítico de substituições para desacoplamento dos cálculos, conforme apresentado nos itens a seguir.

### 4.1.3 - Modelo Acoplado

O desenvolvimento de um modelo acoplado, convencional, consiste simplesmente na discretização espacial das equações do movimento para o estabelecimento de um sistema implícito a cada passo de tempo, com duas equações discretas para cada ponto de uma dada malha onde se desejam obter os valores da velocidade e da elevação do nível d'água,  $u$  e  $\eta$ , respectivamente. Utilizam-se então, para os pontos intermediários, esquemas de diferenças centradas, com erro associado de  $O(\Delta x^2)$ .

Assim,

$$\frac{\partial P^k}{\partial x} = \frac{P_{i+1}^k - P_{i-1}^k}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

onde  $P^k$  é uma grandeza discreta no tempo  $k$ , variando espacialmente, e os índices  $i + 1$  e  $i - 1$  representam pontos discretos no espaço.

Observe-se que, para os pontos inicial e final da discretização espacial devem ser empregados esquemas de diferenças finitas com a mesma ordem de grandeza do erro associado. Nestes pontos porém, uma ou outra equação é substituída por uma condição de contorno que pode ser, de uma forma geral, a explicitação de uma das grandezas envolvidas, de suas derivadas parciais, ou ainda uma função relacionando estes valores. Em se tratando da modelação do escoamento em canais lagunares, buscando-se conhecer os valores da velocidade  $u$  e elevação do nível d'água  $\eta$ , é comum a especificação da variação das elevações do nível d'água com o tempo na embocadura do canal no mar, e de uma relação entre as grandezas características na outra extremidade (como por exemplo, fornecendo-se um hidrograma afluente). Entretanto, visando-se a apresentação do esquema de desacoplamento proposto, através da formulação de modelos perfeitamente equivalentes, com ou sem desacoplamento,

não são consideradas, por ora, as equações concernentes aos pontos extremos. cujo tratamento matemático pode ser feito de forma análoga. No capítulo 5, a seguir, em que se trata da formulação e aplicação do modelo desacoplado para canais de maré 1D, são apresentadas então as formulações completas considerando os diversos tipos possíveis de condições de contorno, e discutindo-se em detalhes as limitações assim impostas à técnica de desacoplamento.

Chega-se assim, com a introdução do esquema de discretização espacial nas equações governantes discretas no tempo (4.3 e 4.4) às seguintes expressões: continuidade

$$\begin{aligned}
 & -B_{i-1}u_{i-1}^n\eta_{i-1}^{n+1} - B_{i-1}\left(h_{i-1} + \eta_{i-1}^n\right)u_{i-1}^{n+1} + B_i\frac{4\Delta x}{\Delta t}\eta_i^{n+1} \\
 & + B_{i+1}u_{i+1}^n\eta_{i+1}^{n+1} + B_{i+1}\left(h_{i+1} + \eta_{i+1}^n\right)u_{i+1}^{n+1} = \\
 & = B_i\frac{4\Delta x}{\Delta t}\eta_i^n - B_{i+1}h_{i+1}u_{i+1}^n + B_{i-1}h_{i-1}u_{i-1}^n
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

conservação da

quantidade de movimento

$$\begin{aligned}
 & -g\eta_{i-1}^{n+1} - u_i^n u_{i-1}^{n+1} + \left(\frac{4\Delta x}{\Delta t} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n + f\frac{\Delta x}{4}\frac{2u_i^n - u_i^{n-1}}{2R_i^n - R_i^{n-1}}\right)u_i^{n+1} \\
 & + g\eta_{i+1}^{n+1} + u_i^n u_{i+1}^{n+1} = \frac{4\Delta x}{\Delta t}u_i^n - g\left(\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n\right) - f\frac{\Delta x}{4}\frac{|u_i^n|}{R_i}u_i^n
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

O modelo acoplado convencional consiste pois na aplicação direta destas equações a uma dada malha de  $N$  pontos resultando, a cada passo de tempo, num sistema definido por uma matriz de dimensões  $2N \times 2N$  com 7 diagonais não nulas, conforme indicado na figura 4.2.

#### 4.1.4 - Modelo Desacoplado

O primeiro passo para o desacoplamento proposto é a explicitação, na equação dinâmica discreta no tempo (4.4), da velocidade no tempo  $t = (n + 1)\Delta t$ , em função



anterior. Com isto, é possível chegar a uma expressão para  $u^{n+1}$  na forma

$$u^{n+1} = -\alpha g \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} + \alpha \beta \quad (4.7)$$

onde

$$\alpha = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{f |2u^n - u^{n-1}|}{8 |2R^n - R^{n-1}|} \right)^{-1}$$

$$\beta = \frac{2}{\Delta t} u^n - g \frac{\partial \eta^n}{\partial x} - \frac{f |u^n|}{8 R^n} u^n - u^n \frac{\partial}{\partial x} (2u^n - u^{n-1})$$

Esta expressão pode então ser substituída na equação da continuidade discreta no tempo (4.3), procedendo-se em seguida à discretização espacial da mesma, empregando-se para tanto um esquema de diferenças finitas com erro associado de  $O(\Delta x^2)$ , da mesma forma que para o modelo acoplado. Como resultado obtém-se uma equação discreta a qual, aplicada aos  $N$  pontos de uma malha pré-definida, possibilita o cálculo implícito dos valores de elevação do nível d'água, de forma desacoplada. Para os pontos intermediários, esta substituição de (4.7) em (4.3), e sua discretização espacial através de um esquema de diferenças centradas resulta numa equação onde apenas os valores de  $\eta(x_i, t)$  são incógnitos.

$$\left\{ \left[ B_{i+1} \alpha_{i+1} (\eta_{i+1}^n + h_{i+1}) - 4B_i \alpha_i (\eta_i^n + h_i) - B_{i-1} \alpha_{i-1} (\eta_{i-1}^n + h_{i-1}) \right] \frac{g}{2\Delta x} - \right.$$

$$\left. B_{i-1} u_{i-1}^n \right\} \eta_{i-1}^{n+1} + \left[ B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} + B_i \frac{4}{\Delta x} \alpha_i g (\eta_i^n + h_i) \right] \eta_i^{n+1} +$$

$$\left\{ \left[ -B_{i+1} \alpha_{i+1} (\eta_{i+1}^n + h_{i+1}) - 4B_i \alpha_i (\eta_i^n + h_i) + B_{i-1} \alpha_{i-1} (\eta_{i-1}^n + h_{i-1}) \right] \frac{g}{2\Delta x} \right.$$

$$\left. + B_{i+1} u_{i+1}^n \right\} \eta_{i+1}^{n+1} = B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} \eta_i^n - B_{i+1} \alpha_{i+1} \beta_{i+1} (\eta_{i+1}^n + h_{i+1}) +$$

$$B_{i-1} \alpha_{i-1} \beta_{i-1} (\eta_{i-1}^n + h_{i-1}) - B_{i+1} u_{i+1}^n h_{i+1} + B_{i-1} u_{i-1}^n h_{i-1} \quad (4.8)$$

onde

$$\alpha_j = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{f |2u_j^n - u_j^{n-1}|}{8 |2R_j^n - R_j^{n-1}|} \right)^{-1}$$

$$\beta_j = \frac{4\Delta x}{\Delta t} u_j^n - g (\eta_{j+1}^n - \eta_{j-1}^n) - \frac{f\Delta x}{4} \frac{|u_j^n|}{R_j^n} u_j^n - u_j^n (2u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1} - 2u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1})$$

sendo  $j = i - 1, i$  ou  $i + 1$ .

Os valores de elevação do nível d'água calculados através desta equação podem então ser substituídos numa das duas equações governantes discretas no tempo e no espaço — equação da continuidade (4.5) ou equação da conservação da quantidade de movimento (4.6) (conforme apresentadas para o desenvolvimento do modelo acoplado no item anterior). Esta substituição resulta numa equação discreta a qual, aplicada novamente aos pontos da malha, permite o cálculo desacoplado das velocidades.

Deve ser observado que, no cálculo das elevações do nível d'água foram utilizadas ambas as equações, da continuidade e da conservação da quantidade de movimento, substituindo-se esta naquela. Ocorre no entanto que, para o cálculo das velocidades, sendo conhecidos os valores de elevação do nível d'água, necessita-se apenas de uma das equações. A escolha recai na equação da continuidade, visto ser esta uma condição essencial a ser preservada na modelação do escoamento. Verificou-se, na prática, que com esta opção também se obtém uma maior estabilidade numérica do modelo, conforme será visto no capítulo seguinte, quando da discussão sobre a aplicação do modelo desacoplado, em comparação com o acoplado convencional. Assim, sendo os valores de  $\eta^{n+1}$  conhecidos, pode-se reescrever a equação da continuidade discreta no tempo e no espaço (4.5), mantendo-se do lado esquerdo apenas os termos em  $u^{n+1}$ , que são as incógnitas remanescentes:

$$\begin{aligned} & -B_{i-1} (h_{i-1} + \eta_{i-1}^n) u_{i-1}^{n+1} + B_{i+1} (h_{i+1} + \eta_{i+1}^n) u_{i+1}^{n+1} = \\ & = B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} \eta_i^n - B_{i+1} h_{i+1} u_{i+1}^n + B_{i-1} h_{i-1} u_{i-1}^n \\ & + B_{i-1} u_{i-1}^n \eta_{i-1}^{n+1} - B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} \eta_i^{n+1} - B_{i+1} u_{i+1}^n \eta_{i+1}^{n+1} \end{aligned} \quad (4.9)$$



Apesar disso, são evidentes as diferentes concepções dos algoritmos apresentados, que em termos de processamento traduzem-se pelas diferentes características dos sistemas matriciais de equações lineares resolvidos a cada passo de tempo (figuras 4.1 e 4.2).

O espaço de memória requerido para a solução computacional dos modelos é função do número de elementos que compõem as matrizes a serem processadas, variando naturalmente com o número de pontos da discretização fornecida. É também sabido que o tempo de processamento de tais modelos dependerá, basicamente, do tempo gasto pela rotina de solução de sistemas matriciais empregada, sobretudo para problemas de grandes dimensões. No caso das matrizes tipo banda, ou seja, matrizes que podem armazenadas tomando-se apenas os elementos de um certo número de diagonais não nulas, acima e abaixo da diagonal principal, o processamento pode ser efetuado ocupando um espaço de memória bem menor, e de modo mais rápido, operando-se com vetores reduzidos. Em se tratando de matrizes tridiagonais — matrizes tipo banda onde apenas a diagonal principal e as duas adjacentes são não nulas — podem ser empregadas técnicas ainda mais eficazes, tais como o método de varredura dupla, descrito no capítulo anterior.

Para os modelos ora em questão, os esquemas apresentados nas figuras 4.1 e 4.2 consideram apenas o equacionamento dos pontos intermediários da discretização, conforme anteriormente assinalado. A rigor, a imposição das condições de contorno acrescentam aos sistemas algumas diagonais; em conseqüência, as matrizes do esquema desacoplado não são tridiagonais. Em vista disso optou-se, em ambos os modelos, pelo emprego de uma mesma rotina para a solução de matrizes tipo banda. O algoritmo fornecido pelo pacote de rotinas denominado LINPACK (Dongarra et al, 1979) pode ser considerado um dos mais eficientes disponíveis atualmente, sendo o tempo de solução dos sistemas estimado como diretamente proporcional a  $n_M m_M^2$ , onde  $n_M$  é a dimensão da matriz quadrada, e  $m_M$  a metade do número de diagonais

não nulas da matriz (bandas).

Deste modo, podem ser avaliadas, a grosso modo, as principais diferenças entre ambos os modelos apresentados, no que concerne ao espaço de memória requerido número de elementos não nulos da matriz — e tempo de processamento. em função de uma mesma malha com  $N$  pontos discretos para cálculo da elevação do nível d'água e velocidade média. É o que mostra o quadro a seguir.

MALHA COM $N$ PONTOS:	Espaço de Memória	Tempo de processamento
cálculo acoplado	$14N$	$2N \times 3^2 = 18N$
cálculo desacoplado	$2 \times 3N = 6N$	$2 \times (N \times 1^2) = 2N$
redução percentual	60%	90%

Apesar dos resultados comparativos apresentados vale a afirmação de que, para modelação 1D, ambos os modelos são praticamente equivalentes na prática. Isto porque, quanto ao ganho em espaço de memória, embora se possa chegar efetivamente a cerca de 60%, isto pouco representa para a maioria dos casos que se queiram estudar, visto que dificilmente o número de seções de um canal fornecidas para análise atinge um valor tal que torne o espaço de memória um fator limitante ao processamento, mesmo em micro-computadores pessoais. Quanto ao tempo de processamento, o ganho percentual assinalado é uma aproximação teórica, dificilmente atingido na prática para problemas modelados desta forma. De fato, segundo Don-garra et al (1979), a estimativa do tempo de processamento pode ser bastante imprecisa nos casos em que  $n_M$  e/ou  $m_M$  são pequenos, ou da mesma ordem de grandeza — a maioria dos problemas relativos a escoamento em canais, utilizando modelação 1D, recai nestes casos, invalidando as estimativas apresentadas, tanto para um como para outro modelo.

Ainda assim, os números apresentados servem como um indicativo concreto das vantagens do algoritmo desacoplado sobre o acoplado convencional. Mesmo para

problemas 1D, em estudos eventualmente requerendo uma exaustiva discretização dos canais, e/ou dispondo de sérias limitações de equipamentos, o modelo desacoplado pode vir a ser uma ferramenta bastante útil. Importa no entanto o fato do desacoplamento proposto prescindir de qualquer simplificação nas hipóteses para modelação, obtendo na prática resultados perfeitamente equivalentes aos do modelo acoplado. Destarte, vislumbra-se a possibilidade da extensão desta técnica aos casos a duas ou três dimensões, com base nos mesmos princípios e obtendo, aí sim, ganhos reais para a simulação numérica, com influência direta nos custos computacionais.

## 4.2 - EXTENSÃO DA TÉCNICA DE DESACOPLAMENTO À MODELAÇÃO MULTIDIMENSIONAL

A partir do caso exposto do desacoplamento dos cálculos de elevações do nível d'água e velocidades para modelação de canais, é possível destacar os princípios da técnica proposta, estabelecendo os procedimentos necessários à sua extensão para aplicação em modelação multidimensional, inclusive via elementos finitos.

A discretização temporal das equações governantes via diferenças finitas resulta em expressões cujos termos incógnitos — expressos no tempo  $t = (n + 1)\Delta t$  — são as grandezas fundamentais do problema e suas derivadas espaciais. Para possibilitar o desacoplamento dos cálculos é preciso, antes de se proceder à discretização espacial, e independentemente do método ou esquema escolhido para tanto, explicitar cada uma das componentes da velocidade a partir das equações dinâmicas. Isto se faz mediante a substituição dos termos que envolvem derivadas espaciais destas componentes por diferenciais de funções envolvendo apenas termos conhecidos, nos tempos anteriores; ou seja, efetuando-se nestes, e apenas nestes casos, extrapolações do tipo

$$\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2P^n - P^{n-1})$$

onde  $P = u, v, w$ , conforme a equação utilizada – componente que se deseje explicitar.

As expressões assim obtidas para cada componente da velocidade podem então ser substituídas nas demais equações, num processo progressivo, de forma que se possa obter, a partir das discretizações espaciais que se seguem, sistemas desacoplados para a socução de cada variável do problema ao longo de toda a malha. Este processo vai depender do número e da forma das equações utilizadas, motivo pelo qual são detalhados a seguir os principais passos no desacoplamento dos cálculos para modelos 2DH e 3D.

## 4.3 - CASO BIDIMENSIONAL HORIZONTAL (2DH)

### 4.3.1 - Equações Discretas

Conforme apresentado no capítulo 2, item 2.3.1, as equações governantes para o escoamento integradas na profundidade (2.12 e 2.13) podem ser escritas na forma continuidade

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} H u + \frac{\partial}{\partial y} H v = 0$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OX$

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} = & -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Omega v \\ & + \frac{1}{H\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ H K_{xx} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ H K_{xy} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{H\rho} \left[ (\rho_{ar} C_a U_{10(x)}^2) - C_f (u^2 + v^2)^{1/2} u \right] \end{aligned}$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OY$

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} = & -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \Omega u \\ & + \frac{1}{H\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ HK_{yx} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ HK_{yy} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right\} \\ & + \frac{1}{H\rho} \left[ (\rho_{ar} C_a U_{10(y)}^2) - C_f (u^2 + v^2)^{1/2} v \right] \end{aligned}$$

(observação - os termos de tensão de vento na superfície e tensão de atrito no fundo foram substituídos pelas expressões igualmente indicadas no capítulo 2). A modelação numérica dos escoamentos parte, usualmente, da discretização temporal destas equações via um esquema de diferenças finitas; utilizando-se, como no caso 1D (item 4.1.1), um esquema de fatoração implícita com erro associado de  $O(\Delta t^2)$ , obtêm-se:

continuidade

$$\begin{aligned} 2 \frac{\eta^{n+1} - \eta^n}{\Delta t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u^{n+1} (h + \eta^n) + u^n (h + \eta^{n+1}) \right] + \\ \frac{\partial}{\partial y} \left[ v^{n+1} (h + \eta^n) + v^n (h + \eta^{n+1}) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OX$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial y} + v^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} = \\ -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta^{n+1} + \eta^n) + \Omega (v^{n+1} + v^n) + \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{(h + \eta^{n+1})} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (h + \eta^{n+1}) K_{xx} \left( 2 \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} \right) \right] + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left[ (h + \eta^{n+1}) K_{xy} \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} \right) \right] + \frac{1}{(h + \eta^n)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (h + \eta^n) K_{xx} \left( 2 \frac{\partial u^n}{\partial x} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ (h + \eta^n) K_{xy} \left( \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{\partial v^n}{\partial x} \right) \right] \right\} + \quad (4.11) \\
& \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{(h + \eta^{n+1})} + \frac{1}{(h + \eta^n)} \right] (\rho_{ar} C_a U_{10(x)}^2) - \frac{C_f}{(h + \eta^n)} [(u^n)^2 + (v^n)^2]^{1/2} u^n - \\
& \quad \left\{ \frac{2C_f}{(h + \eta^n)} [(u^n)^2 + (v^n)^2]^{1/2} - \frac{C_f}{(h + \eta^{n+1})} [(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2]^{1/2} \right\} u^{n+1}
\end{aligned}$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OY$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n) + u^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial y} + v^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} = \\
& \quad -g \frac{\partial}{\partial y} (\eta^{n+1} + \eta^n) - \Omega (u^{n+1} + u^n) \\
& \quad \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{1}{h + \eta^{n+1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (h + \eta^{n+1}) K_{yx} \left( \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} \right) \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ (h + \eta^{n+1}) K_{yy} \left( 2 \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \right) \right] \right\} + \frac{1}{(h + \eta^n)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (h + \eta^n) K_{yx} \left( \frac{\partial v^n}{\partial x} + \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) \right] + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ (h + \eta^n) K_{yy} \left( 2 \frac{\partial v^n}{\partial y} \right) \right] \right\} + \quad (4.12) \\
& \frac{1}{\rho} \left[ \frac{1}{(h + \eta^{n+1})} + \frac{1}{(h + \eta^n)} \right] (\rho_{ar} C_a U_{10(y)}^2) - \frac{C_f}{(h + \eta^n)} [(u^n)^2 + (v^n)^2]^{1/2} v^n - \\
& \quad \left\{ \frac{2C_f}{(h + \eta^n)} [(u^n)^2 + (v^n)^2]^{1/2} - \frac{C_f}{(h + \eta^{n+1})} [(u^{n+1})^2 + (v^{n+1})^2]^{1/2} \right\} v^{n+1}
\end{aligned}$$

No caso da modelação via elementos finitos, o primeiro passo para a solução do problema consiste em escrevê-lo na forma integral, resultando na chamada formulação residual ponderada das equações governantes (ver capítulo 3). A discretização temporal da formulação residual ponderada pode ser efetuada através

dos esquemas ora empregados, resultando em equações cujos integrandos correspondem às equações discretas apresentadas — 4.10, 4.11 e 4.12.

Isto feito, parte-se para a subdivisão do domínio do problema em um número finito de elementos, substituindo-se então as equações governantes na forma integral pelo somatório das equações integrais aplicadas a cada elemento. A discretização espacial é dada pela escolha das funções de interpolação que definirão a geometria dos elementos e as demais grandezas.

Não se pretende aqui detalhar o equacionamento discreto via elementos finitos ou qualquer outro método para a solução dos problemas de escoamentos 2DH, mas apenas indicar os passos necessários à solução desacoplada dos mesmos. Neste intuito, é suficiente assinalar que a discretização espacial resulta, necessariamente, em equações que podem ser escritas, através de uma notação compacta, como:

continuidade

$$C1u_D^{n+1} + C2v_D^{n+1} + C3\eta_D^{n+1} = C0$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OX$

$$X1u_D^{n+1} + X2v_D^{n+1} + X3\eta_D^{n+1} = X0$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OY$

$$Y1u_D^{n+1} + Y2v_D^{n+1} + Y3\eta_D^{n+1} = Y0$$

O detalhamento das expressões de  $C_i, X_i$  e  $Y_i$ , deste modo, além de ser função dos métodos e esquemas particulares adotados em cada modelo, torna-se secundário para a compreensão da exposição que se segue, sendo por esta razão omitido no

presente texto. É suficiente ter em mente que tais operadores são sempre funções exclusivas de parâmetros expressos em tempos anteriores, e portanto conhecidos; e que cada variável discreta representa na verdade um conjunto de valores destas variáveis em diferentes pontos da malha. Ou seja, que cada termo das equações anteriores pode ser expandido, como por exemplo,

$$X1u_D^{n+1} = (X1)_1u_1^{n+1} + (X1)_2u_2^{n+1} + \dots$$

Torna-se assim bastante simples a exposição e compreensão das sucessivas operações de substituição necessárias de forma a se estabelecer, de modo seguro e inequívoco, os procedimentos que viabilizam o desacoplamento pretendido.

### 4.3.2 - Esquema de Desacoplamento

Conforme assinalado no item 4.2, o desacoplamento parte da explicitação das componentes da velocidade,  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ , tomando-se para tanto as equações dinâmicas (nas direções  $OX$  e  $OY$ , respectivamente). A equação 4.11, devidamente modificada, onde necessário, permite assim obter a seguinte expressão para  $u^{n+1}$ :

$$u^{n+1} = \frac{1}{\alpha} \left( \beta_1 v^{n+1} + \beta_2 \eta^{n+1} + \beta_3 \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial y} + \beta_0 \right) \quad (4.13)$$

onde:

$$\alpha = \frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u^n}{\partial x} + \left\{ \frac{2C_f}{h + \eta^n} [(u^n)^2 + (v^n)^2]^{1/2} - \frac{C_f}{h + 2\eta^n - \eta^{n-1}} [(2u^n - u^{n-1})^2 + (2v^n - v^{n-1})^2]^{1/2} \right\}$$

$$\beta_1 = -\frac{\partial u^n}{\partial y} + \Omega$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\rho h + 2\eta^n - \eta^{n-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} K_{xx} 2 \frac{\partial}{\partial x} (2u^n - u^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial y} K_{xy} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (2u^n - u^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial x} (2v^n - v^{n-1}) \right] \right\}$$

$$\beta_3 = \frac{1}{\rho h + 2\eta^n - \eta^{n-1}} K_{xx} (2u^n - u^{n-1}) \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x}$$

$$\beta_4 = \frac{1}{\rho h + 2\eta^n - \eta^{n-1}} K_{xy} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (2u^n - u^{n-1}) \frac{\partial}{\partial x} (2v^n - v^{n-1}) \right]$$

$$\begin{aligned} \beta_0 = & \frac{2}{\Delta t} u^n - u^n \frac{\partial}{\partial x} (2u^n - u^{n-1}) - v^n \frac{\partial}{\partial y} (2u^n - u^{n-1}) - g \frac{\partial}{\partial x} \eta^n + \Omega v^n + \\ & \frac{1}{\rho h + 2\eta^n - \eta^{n-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ h K_{xx} 2 \frac{\partial}{\partial x} (2u^n - u^{n-1}) \right] \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ h K_{xy} \frac{\partial}{\partial y} (2u^n - u^{n-1}) + \frac{\partial}{\partial x} (2v^n - v^{n-1}) \right] \right\} + \\ & \frac{1}{\rho h + \eta^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ (h + \eta^n) K_{xx} \left( 2 \frac{\partial u^n}{\partial x} \right) \right] + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[ (h + \eta^n) K_{xy} \left( \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{\partial v^n}{\partial x} \right) \right] \right\} + \\ & \frac{1}{\rho} \left( \frac{1}{h + 2\eta^n - \eta^{n-1}} + \frac{1}{h + \eta^n} \right) (\rho_{ar} C_a U_{10(x)}^2) - \frac{C_f}{h + \eta^n} [(u_n)^2 + (v_n)^2]^{1/2} u^n \end{aligned}$$

A expressão para  $v^{n+1}$ , obtida da equação 4.12, é em tudo análoga à anterior. A partir destas expressões é possível propor um esquema de desacoplamento, através de substituições sucessivas. As substituições são feitas, como no caso 1D, preliminarmente à discretização espacial; esta última, qualquer que seja o método ou esquema empregado, resulta em equações discretas conforme apresentadas anteriormente (item 4.3.1), porém envolvendo apenas uma variável discreta por vez ( $\eta_D^{n+1}$ ,  $u_D^{n+1}$ , ou  $v_D^{n+1}$ ), permitindo assim a solução desacoplada de cada uma delas. É o que se apresenta a seguir, de forma itemizada.

1. Equação da Continuidade discreta no tempo (4.10)

$$\longrightarrow C(u^{n+1}, v^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$$

2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção  $OX$  discreta no tempo (4.11)

$$\longrightarrow MX(u^{n+1}, v^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$$

2A. Explicitar  $u^{n+1}$  na equação anterior

$$\longrightarrow u^{n+1}(v^{n+1}, \eta^{n+1}, \text{ e suas derivadas espaciais}) \quad (4.13)$$

3. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na direção  $OY$  discreta no tempo (4.12)

$$\longrightarrow MY(u^{n+1}, v^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$$

3A. Explicitar  $v^{n+1}$  na equação anterior

$$\longrightarrow v^{n+1}(u^{n+1}, \eta^{n+1}, \text{ e suas derivadas espaciais})$$

4. Substituir, alternadamente a cada passo de tempo,

$$[3A] \text{ em } [2] \longrightarrow u^{n+1}(\eta^{n+1}, \text{ e suas derivadas espaciais})$$

$$[2A] \text{ em } [3] \longrightarrow v^{n+1}(\eta^{n+1}, \text{ e suas derivadas espaciais})$$

observação - as explicitações são possíveis porque as equações obtidas em [2A] e [3A] não incluem derivadas espaciais de  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ .

5. Substituir, alternadamente a cada passo de tempo,

$$[3A] \text{ em } [1] \longrightarrow C(u^{n+1}, \eta^{n+1})$$

$$[2A] \text{ em } [1] \longrightarrow C(v^{n+1}, \eta^{n+1})$$

6. Calcular  $\eta^{n+1}$ , substituindo (alternadamente a cada passo de tempo)

$$[4] \text{ em } [5] \longrightarrow C(\eta^{n+1}) = 0$$

observação - o cálculo de  $\eta^{n+1}$  é feito através da solução do sistema de equações

desacopladas decorrente da discretização espacial da expressão diferencial obtida, na forma:

$$C1\eta_D^{n+1} = (C1)_1\eta_1^{n+1} + (C1)_2\eta_2^{n+1} + \dots = (C0)_i$$

7. Substituir, alternadamente a cada passo de tempo, [4] em [1]  $\rightarrow C(v^{n+1}, \eta^{n+1}) / C(u^{n+1}, \eta^{n+1})$

8. *Calcular, alternadamente a cada passo de tempo,  $v^{n+1}$  e  $u^{n+1}$ , substituindo,  $\eta^{n+1}$  (de [6]) em [7]  $\rightarrow C(v^{n+1}) = 0 / C(u^{n+1}) = 0$*

observação - a partir da discretização espacial, resolvem-se os sistemas de equações obtidos:

$$C2v_D^{n+1} = (C2)_1v_1^{n+1} + (C2)_2v_2^{n+1} + \dots = (C0)_{ii}$$

$$C3u_D^{n+1} = (C3)_1u_1^{n+1} + (C3)_2u_2^{n+1} + \dots = (C0)_{iii}$$

9. *Calcular, alternadamente a cada passo de tempo,  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$ , substituindo,  $\eta^{n+1}$  (de [6]) e  $v^{n+1}$  ou  $u^{n+1}$  (de [8]) em [1]  $\rightarrow C(u^{n+1}) = 0 / C(v^{n+1}) = 0$*

observação - resolvem-se sistemas análogos aos do item [8]

10. Voltar a [4] para o passo seguinte de tempo, até o limite para simulação.

## 4.4 - CASO TRIDIMENSIONAL (3D)

### 4.4.1 - Equações Discretas

Conforme apresentado no capítulo 2, itens 2.2.1 e 2.2.2, as equações governantes para os escoamento 3D (2.7, 2.10 e 2.11) podem ser escritas na forma continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OX$

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Omega v + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OY$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - \Omega u + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right)$$

CCCSL

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} = w$$

sendo esta última — condição de contorno cinemática na superfície livre — válida apenas em  $z = \eta$ .

Procede-se então à necessária discretização temporal das equações dinâmicas nas direções  $OX$  e  $OY$ , empregando-se os mesmos esquemas de diferenças anteriormente detalhados, obtendo-se assim:

continuidade

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0 \quad (4.14)$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OX$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial y} + v^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} + u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial z} + \\ w^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial z} = -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta^{n+1} + \eta^n) + \Omega (v^{n+1} + v^n) + \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xx}^{n+1} + \tau_{xx}^n) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy}^{n+1} + \tau_{xy}^n) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}^{n+1} + \tau_{xz}^n) \right]$$

conservação da

quantidade de movimento

na direção  $OY$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n) + u^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial y} + v^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + u^{n+1} \frac{\partial v^n}{\partial z} + \\ w^n \frac{\partial v^{n+1}}{\partial z} = -g \frac{\partial}{\partial y} (\eta^{n+1} + \eta^n) - \Omega (u^{n+1} + u^n) + \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy}^{n+1} + \tau_{xy}^n) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yy}^{n+1} + \tau_{yy}^n) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{yz}^{n+1} + \tau_{yz}^n) \right]$$

CCCSL

$$\frac{2}{\Delta t} (\eta^{n+1} - \eta^n) + u^{n+1} \frac{\partial \eta^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial x} + v^{n+1} \frac{\partial \eta^n}{\partial y} + v^n \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial y} = u^{n+1} + u^n \quad (4.17)$$

Os princípios para a aplicação do método dos elementos finitos são os mesmos já detalhados quando da apresentação do caso 2DH — formulação residual ponderada, discretização temporal via diferenças finitas (conforme as equações anteriores), subdivisão do domínio do problema em um número finito de elementos para discretização espacial das equações, e escolha das funções de interpolação.

Qualquer que seja o método de discretização espacial empregado, ou os esquemas adotados, as expressões resultantes, constituindo-se no próprio modelo numérico, podem ser notadas na forma:

continuidade

$$C1u_D^{n+1} + C2v_D^{n+1} + C3w_D^{n+1} = C0$$

conservação da  
quantidade de movimento  
na direção  $OX$

$$X1u_D^{n+1} + X2v_D^{n+1} + X3w_D^{n+1} + X4\eta_D^{n+1} = X0$$

conservação da  
quantidade de movimento  
na direção  $OY$

$$Y1u_D^{n+1} + Y2v_D^{n+1} + Y3w_D^{n+1} + Y4\eta_D^{n+1} = Y0$$

CCCSL

$$S1u_D^{n+1} + S2v_D^{n+1} + S3w_D^{n+1} + S4\eta_D^{n+1} = S0$$

Onde os coeficientes são funções de parâmetros conhecidos (definidos nos tempos anteriores), e as variáveis discretas são definidas em diferentes pontos da malha.

#### 4.4.2 - Esquema de Desacoplamento

Adotam-se aqui os mesmos procedimentos já detalhados para o caso 2DH, obtendo-se expressões explícitas para  $u^{n+1}$  e  $v^{n+1}$  a partir das equações dinâmicas nas direções  $OX$  e  $OY$  discretas no tempo (4.15 e 4.16, respectivamente). Observa-se ainda que o valor de  $w^{n+1}$  pode ser explicitado diretamente a partir da equação da condição de contorno cinemática na superfície livre discreta no tempo (4.17), sem nenhuma substituição prévia. Propõe-se assim um esquema de desacoplamento, apresentado a seguir de forma itemizada, aonde se busca, através de substituições sucessivas, chegar a formulações discretas envolvendo apenas uma variável por vez, o que equivale a dizer, a sistemas desacoplados para o cálculo de  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ,  $w^{n+1}$ , e  $\eta^{n+1}$ .

1. Equação da Continuidade discreta no tempo  
 $\longrightarrow C(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) = 0$
  
2. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção  $OX$  discreta no tempo  
 $\longrightarrow MX(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$
  
- 2A. Explicitar  $u^{n+1}$  na equação anterior  
 $\longrightarrow u^{n+1}(v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}$  e suas derivadas espaciais)
  
3. Equação da Conservação da Quantidade de Movimento na Direção  $OY$  discreta no tempo  
 $\longrightarrow MY(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$
  
- 3A. Explicitar  $v^{n+1}$  na equação anterior  
 $\longrightarrow v^{n+1}(u^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}$  e suas derivadas espaciais)
  
4. Equação da Condição de Contorno Cinemática na Superfície Livre discreta no tempo  
 $\longrightarrow S(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$
  
- 4A. Explicitar  $w^{n+1}$  na equação anterior  
 $\longrightarrow w^{n+1}(u^{n+1}, v^{n+1}, \eta^{n+1}$  e suas derivadas espaciais)
  
5. Substituir, alternadamente a cada passo de tempo.
  - 5.1. [2A] em [1]  $\longrightarrow C(v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$   
 [3A] em [1]  $\longrightarrow C(u^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$
  - 5.2. [2A] em [3]  $\longrightarrow MY(v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$   
 [3A] em [2]  $\longrightarrow MX(u^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$
  - 5.3. [2A] em [4]  $\longrightarrow S(v^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$   
 [3A] em [4]  $\longrightarrow S(u^{n+1}, w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$

5.2A. Explicitar  $v^{n+1} / u^{n+1}$  em [5.2]

→  $v^{n+1}(w^{n+1}, \eta^{n+1}$  e suas derivadas espaciais)

→  $u^{n+1}(w^{n+1}, \eta^{n+1}$  e suas derivadas espaciais)

6. Substituir, alternadamente a cada passo de tempo,

6.1. [5.2A] em [5.1] →  $C(w^{n+1}, \eta^{n+1}) = 0$

6.2. [5.2A] em [5.3] →  $w^{n+1}(\eta^{n+1})$

7. Calcular  $\eta^{n+1}$ , substituindo, alternadamente a cada passo de tempo.

[6.2] em [6.1] →  $C(\eta^{n+1}) = 0$

observação - obtém-se assim um sistema desacoplado para o cálculo de  $\eta^{n+1}$ ,  
dado por:

$$C1(\eta_D^{n+1}) = (C1)_1 \eta_1^{n+1} + (C1)_2 \eta_2^{n+1} + \dots = (C0)_i$$

8. Substituir

8.1.  $\eta^{n+1}$  (de [7]) em [2] →  $MX(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1})$

8.2.  $\eta^{n+1}$  (de [7]) em [3] →  $MY(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1})$

Neste ponto, deve ser observado que as equações discretas no tempo

$$[1] C(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) = 0$$

$$[8.1] M_X(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) = 0$$

$$[8.2] M_Y(u^{n+1}, v^{n+1}, w^{n+1}) = 0$$

para a solução das incógnitas restantes,  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  e  $w^{n+1}$ , são perfeitamente análogas às equações governantes discretas no tempo para o caso 2DH, que tem por incógnitas  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$  e  $\eta^{n+1}$ . O esquema de desacoplamento, portanto, segue daí em diante os mesmos passos indicados para aquele caso — conforme item 4.3.2., até [9]. No passo

seguinte de tempo, volta-se a [5] no esquema ora indicado, resolvendo-se novamente o problema 3D de modo desacoplado, até o limite de tempo para simulação.

\* \* \*

## Capítulo 5

# Modelo com Cálculo Desacoplado para Canais de Maré 1D

O presente capítulo apresenta um modelo para canais de maré 1D com cálculo desacoplado de elevações do nível d'água e velocidades através de substituições sucessivas na equação da continuidade, conforme o desenvolvimento teórico proposto no capítulo anterior — o problema a ser modelado é aquele introduzido no item 4.1.1.

Inicialmente, são discutidas as hipóteses de modelação e os tipos de condições de contorno usuais em estudos desta natureza. A seguir, apresenta-se um modelo acoplado convencional para este caso, desenvolvido por Rosman para análises do escoamento no canal do Jardim de Alah, que faz a ligação da lagoa Rodrigo de Freitas com o mar, no Rio de Janeiro (Calixto, 1990). Discute-se então o desenvolvimento completo do modelo desacoplado, a partir da formulação apresentada no capítulo 4, item 4.1.3, enfocando-se os aspectos numéricos mais relevantes para a programação, com base no trabalho de pesquisa ora desenvolvido. Este trabalho, conforme assinalado, objetivou a avaliação da viabilidade da técnica de desacoplamento proposta a partir da investigação do caso de modelação 1D. Por fim, são apresentados e discutidos os resultados de diversas simulações empregando um e outro modelo.

## 5.1 - O PROBLEMA EM ESTUDO

Os diversos parâmetros característicos dos canais de maré 1D são mostrados, de forma esquemática, em planta e perfil, na figura 4.1 do capítulo 4, item 4.1.1. O escoamento é governado pelas chamadas equações de Saint-Venant (capítulo 2, item 2.4).

A geometria do canal é considerada como invariante no tempo (modelo de fundo fixo), sendo porém possível fornecer valores da largura superficial  $B$  e da profundidade em relação ao NMM (nível médio do mar)  $h$  variando espacialmente de forma discreta. Não são consideradas contribuições ou perdas ao longo do canal, as quais, caso necessário, podem ser traduzidas pela inclusão na equação da continuidade de uma vazão lateral  $q_L$  (ver capítulo 2, item 2.4).

As condições de contorno usuais são a especificação da variação do nível d'água do oceano na embocadura do canal —  $\eta = \eta_0$ , e da vazão no lado da lagoa (extremidade interna do canal). Considerando que no mar e na lagoa as profundidades e velocidades são tais que as perdas por atrito são ínfimas, e que o tempo de propagação da onda de maré desde a entrada da lagoa até o ponto interno mais extremo é pequeno em relação ao período da maré, pode-se admitir que a superfície da água na lagoa permaneça praticamente horizontal, ou seja, que a maré esteja sempre em fase dentro da lagoa. Admitindo-se também, como hipótese simplificadora, que os espelhos d'água da lagoa na baixamar e na preamar tenham aproximadamente a mesma área  $A_b$ , a condição de contorno no lado da lagoa pode então ser escrita como:

$$\frac{\partial \eta_N}{\partial t} = \frac{B_N}{A_b} (h_N + \eta_N) u_N \quad (5.1)$$

onde o índice  $N$  indica que as variáveis são tomadas na última seção transversal do canal considerada na modelação. Neste caso, o funcionamento da lagoa pode ser entendido de modo análogo ao de um pistão, oscilando em função da carga exercida na outra extremidade do canal e das condições de escoamento ao longo deste. Um

modelo matemático assim estabelecido pode ainda ser utilizado, para uma geometria simples do problema em estudo, fornecendo-se seções transversais ao eixo principal do escoamento que adentram na lagoa, até um limite que se julgar conveniente para a área remanescente. Se isto for feito até o desenvolvimento completo do eixo principal estabelecido para o escoamento, considerando-se então  $A_b = 0$ , tem-se na prática uma condição de hidrograma afluente nulo na extremidade do canal. A condição de contorno que fornece, ao invés da área superficial de uma lagoa, um hidrograma afluente, é tratada a seguir.

Sendo conhecidas as vazões afluentes no tempo em uma dada seção transversal, distante um certo comprimento da embocadura do canal no mar, pode-se então simular o escoamento ao longo deste comprimento, escrevendo-se como condição de contorno nesta seção, a cada tempo do hidrograma, a seguinte equação, discreta no tempo e no espaço

$$u_N^k (h_N + \eta_N^k) = q_N^k \quad (5.2)$$

onde  $q_N$  é o valor conhecido da vazão afluente no tempo  $k$ , dividido pela largura superficial do canal na seção  $N$ ,  $B_N$ .

Em ambos os casos, a formulação da condição de contorno estabelece, na verdade, uma relação entre elevação do nível d'água e velocidade na seção considerada. Fornecendo-se uma área superficial da lagoa ou hidrograma afluente nulos, igualam-se ambas as equações, sendo a condição de contorno rigorosamente a mesma, conforme assinalado. As aplicações do modelo desacoplado desenvolvido, apresentadas na parte final deste capítulo, ilustram este e outros casos, utilizando uma ou outra condição de contorno.

## 5.2 - PROGRAMA PARA O MODELO ACOPLADO

O presente item trata das formulações discretas das equações governantes para o modelo acoplado convencional, apresentando o fluxograma de cálculo que serve de base para o programa utilizado. Desenvolvido por Rosman a partir da necessidade de modelação do canal do Jardim de Alah — que faz a ligação entre a lagoa Rodrigo de Freitas e o mar, no Rio de Janeiro (Calixto, 1990), foi assim bastante testado, apresentando excelente convergência e estabilidade numérica. Justifica-se pois sua escolha como referencial para o desenvolvimento de um modelo 1D desacoplado, análogo nos formatos de entrada e saída, permitindo uma análise comparativa de desempenhos.

### 5.2.1 - Seções Intermediárias

Tomando-se a embocadura no mar como a referência inicial do cálculo discreto (seção transversal número 1 —  $S_1$ ), e caminhando-se em direção à lagoa com incrementos constantes iguais a  $\Delta x$ , até uma dada seção “final” do canal (seção transversal número  $N$  —  $S_N$ ), é possível chegar-se a uma formulação discreta das equações da continuidade e da conservação da quantidade de movimento, válidas a cada seção transversal intermediária,  $S_i$ . Empregando-se esquemas de diferenças centradas com erros associados para as discretizações temporal e espacial de  $O(\Delta t^2)$  e  $O(\Delta x^2)$ , conforme detalhado no capítulo anterior (item 4.1.2), obtêm-se as seguintes expressões discretas no tempo e no espaço (4.5 e 4.6):

continuidade

$$\begin{aligned} & -B_{i-1}u_{i-1}^n\eta_{i-1}^{n+1} - B_{i-1}(h_{i-1} + \eta_{i-1}^n)u_{i-1}^{n+1} + B_i\frac{4\Delta x}{\Delta t}\eta_i^{n+1} \\ & + B_{i+1}u_{i+1}^n\eta_{i+1}^{n+1} + B_{i+1}(h_{i+1} + \eta_{i+1}^n)u_{i+1}^{n+1} = \\ & B_i\frac{4\Delta x}{\Delta t}\eta_i^n - B_{i+1}h_{i+1}u_{i+1}^n + B_{i-1}h_{i-1}u_{i-1}^n \end{aligned}$$

conservação da

quantidade de movimento

$$\begin{aligned}
 & -g\eta_{i-1}^{n+1} - u_i^n u_{i-1}^{n+1} + \left( \frac{4\Delta x}{\Delta t} + u_{i+1}^n + u_{i-1}^n + f \frac{\Delta x}{4} \frac{2u_i^n - u_i^{n-1}}{2R_i^n - R_i^{n-1}} \right) u_i^{n+1} \\
 & + g\eta_{i+1}^{n+1} + u_i^n u_{i+1}^{n+1} = \frac{4\Delta x}{\Delta t} u_i^n - g (\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n) - f \frac{\Delta x}{4} \frac{u_i^n}{R_i} u_i^n
 \end{aligned}$$

Observa-se, na equação dinâmica, que o termo  $2R_i^n - R_i^{n-1}$  exprime, na verdade, o valor do raio hidráulico no tempo  $n + 1$ . Sendo este uma função não linear da elevação do nível d'água, seria a rigor mais exato, ao invés de utilizar diretamente esta extrapolação temporal, extrapolar-se primeiro o valor de  $\eta_i^{n+1}$ , que pode então ser empregado no cálculo de  $R_i^{n+1}$ . Tal procedimento contribui pouco, ou quase nada, para a otimização do modelo acoplado; mostra-se porém, na prática, relevante para a melhoria das condições de convergência e estabilidade do modelo desacoplado, sendo por esta razão aqui mencionado.

### 5.2.2 - Seção 1 (Embocadura no Mar)

Na embocadura do canal com o mar são conhecidos os valores de elevações do nível d'água. O programa do modelo acoplado considera, como contorno na seção inicial,  $S1$ , uma dada curva de maré, da forma:

$$\eta_1(t) = \sum_{k=1}^{NCH} A_k \sin \frac{2\pi t}{T_k + F_k} \quad (5.3)$$

onde  $A_k$  é uma dada amplitude de oscilação do nível d'água em relação ao NMM (nível médio do mar),  $T_k$  o período, e  $F_k$  a fase, referidos à  $k$ -ésima componente harmônica da maré (sendo NCH o número de componentes harmônicas da maré). Esta expressão é na verdade uma igualdade que resolve diretamente os valores de elevações do nível d'água em  $S1$  a qualquer tempo dado, restando assim, como

incógnitas, os valores das velocidades no tempo. Deve portanto ser utilizada em substituição a uma das equações governantes em  $S1$ .

Opta-se pela manutenção da equação da conservação da quantidade de movimento para o cálculo das velocidades tomando-se então a expressão discreta no tempo, conforme formulada no capítulo anterior, item 4.1.1 (equação 4.4):

conservação da

quantidade de movimento

$$\frac{2}{\Delta t} (u^{n+1} - u^n) + u^{n+1} \frac{\partial u^n}{\partial x} + u^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} (\eta^{n+1} + \eta^n) - \frac{f}{8} \left( \frac{|u^n|}{R^n} u^n + \frac{|2u^n - u^{n-1}|}{2R^n - R^{n-1}} u^{n+1} \right)$$

A discretização espacial desta equação para a seção inicial exige, evidentemente, um esquema progressivo de diferenças, devendo ser mantida a mesma ordem de grandeza do erro associado,  $O(\Delta x^2)$ . Para uma dada grandeza  $P$ , discreta no tempo  $k$ , calcula-se então a derivada em  $OX$  como sendo:

$$\frac{\partial P_1^k}{\partial x} = \frac{-3P_1^k + 4P_2^k - P_3^k}{2\Delta x}$$

Aplicando-se este esquema aos termos em  $\eta$  e  $u$  na equação (4.4), chega-se a:

$$\begin{aligned} -3g\eta_1^{n+1} + \left( \frac{4\Delta x}{\Delta t} - 6 - u_1^n + 4u_2^n - u_3^n + f \frac{\Delta x}{4} \frac{|2u_1^n - u_1^{n-1}|}{2R^n - R^{n-1}} \right) u_1^{n+1} \\ 4g\eta_2^{n+1} + 4u_1^n u_2^{n+1} - g\eta_3^{n+1} - u_1^n u_3^{n+1} = \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\frac{4\Delta x}{\Delta t} u_1^n - g(-3\eta_1^n + 4\eta_2^n - \eta_3^n) - f \frac{\Delta x}{4} \frac{|u_1^n|}{R_1^n}$$

As expressões 5.3 e 5.4 permitem assim o equacionamento discreto de  $S1$ , sendo os parâmetros da primeira equação fornecidos como o contorno conhecido do escoamento na embocadura com o mar.

### 5.2.3 - Seção N (embocadura na Lagoa)

O programa para o modelo acoplado considera ainda como condição de contorno na outra extremidade do canal uma lagoa com área superficial aproximadamente constante. A oscilação do nível d'água na lagoa é assumida como sendo uniforme, e corresponde igualmente à variação da elevação do nível d'água na última seção transversal considerada do canal,  $SN$ . A expressão matemática de uma tal condição é dada pela equação 5.1, conforme assinalado anteriormente. Procedendo-se então à discretização temporal desta equação, através de um esquema de fatoração implícita — com erro associado de  $O(\Delta t^2)$  (ver capítulo 4, item 4.1.1), obtém-se:

$$\left( \frac{2A_b}{B_N \Delta t} - u_N^n \right) \eta_N^{n+1} - (h_N + \eta_N^n) u_N^{n+1} = \frac{2A_b}{B_N \Delta t} - \eta_N^n + h_N u_N^n \quad (5.5)$$

Esta equação, discreta no tempo e no espaço, relaciona valores de  $u_N$  e  $\eta_N$  no tempo  $t = (n+1)\Delta t$ , devendo assim substituir uma das duas equações governantes na seção  $SN$ .

A escolha, mais uma vez, recai na substituição da equação da continuidade, mantendo-se a equação da conservação da quantidade de movimento como complementar. A expressão desta equação discreta no tempo é dada pela equação 4.2, apresentada no capítulo 4, item 4.1.1 — aqui reproduzida no item anterior. Sua discretização espacial para aplicação à última seção considerada do escoamento no canal requer um esquema regressivo de diferenças finitas com erro associado igualmente de  $O(\Delta x^2)$ :

$$\frac{\partial P_N^k}{\partial x} = \frac{3P_N^k - 4P_{N-1}^k + P_{N-2}^k}{2\Delta x}$$

onde  $P^k$  representa uma grandeza qualquer, discreta no tempo  $k$ . A aplicação deste esquema à equação 4.2 resulta em:

$$3g\eta_N^{n+1} + \left( \frac{4\Delta x}{\Delta t} + 6 - u_N^n - 4u_N - 1^n + u_N - 2^n + f \frac{\Delta x}{4} \frac{2u_N^n - u_N^{n-1}}{2R^n - R^{n-1}} \right) u_N^{n+1}$$

$$-4g\eta_{N-1}^{n+1} - 4u_N^n u_{N-1}^{n+1} + g\eta_{N-2}^{n+1} + u_N^n u_{N-2}^{n+1} = \quad (5.6)$$

$$\frac{4\Delta x}{\Delta t} u_N^n - g(3\eta_N^n - 4\eta_N - 1^n + \eta_N - 3^n) - f \frac{\Delta x}{4} \frac{|u_N^n|}{R_N^n}$$

As expressões 5.5 e 5.6 permitem assim o equacionamento discreto de  $SN$ , sendo o parâmetro  $A_b$  da primeira equação fornecido como o contorno conhecido do escoamento na embocadura com a lagoa.

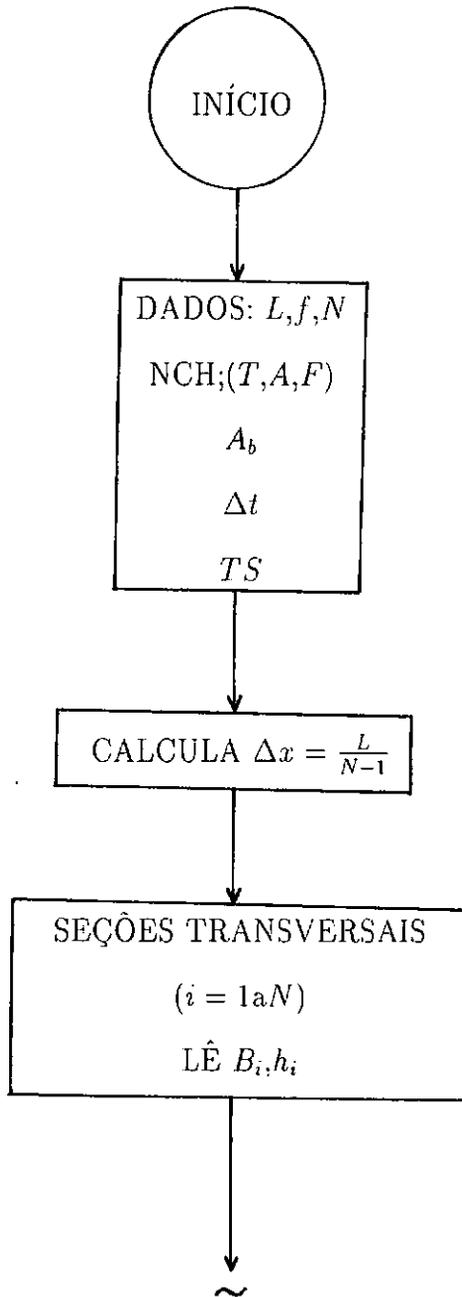
### 5.2.4 - Fluxograma de Cálculo

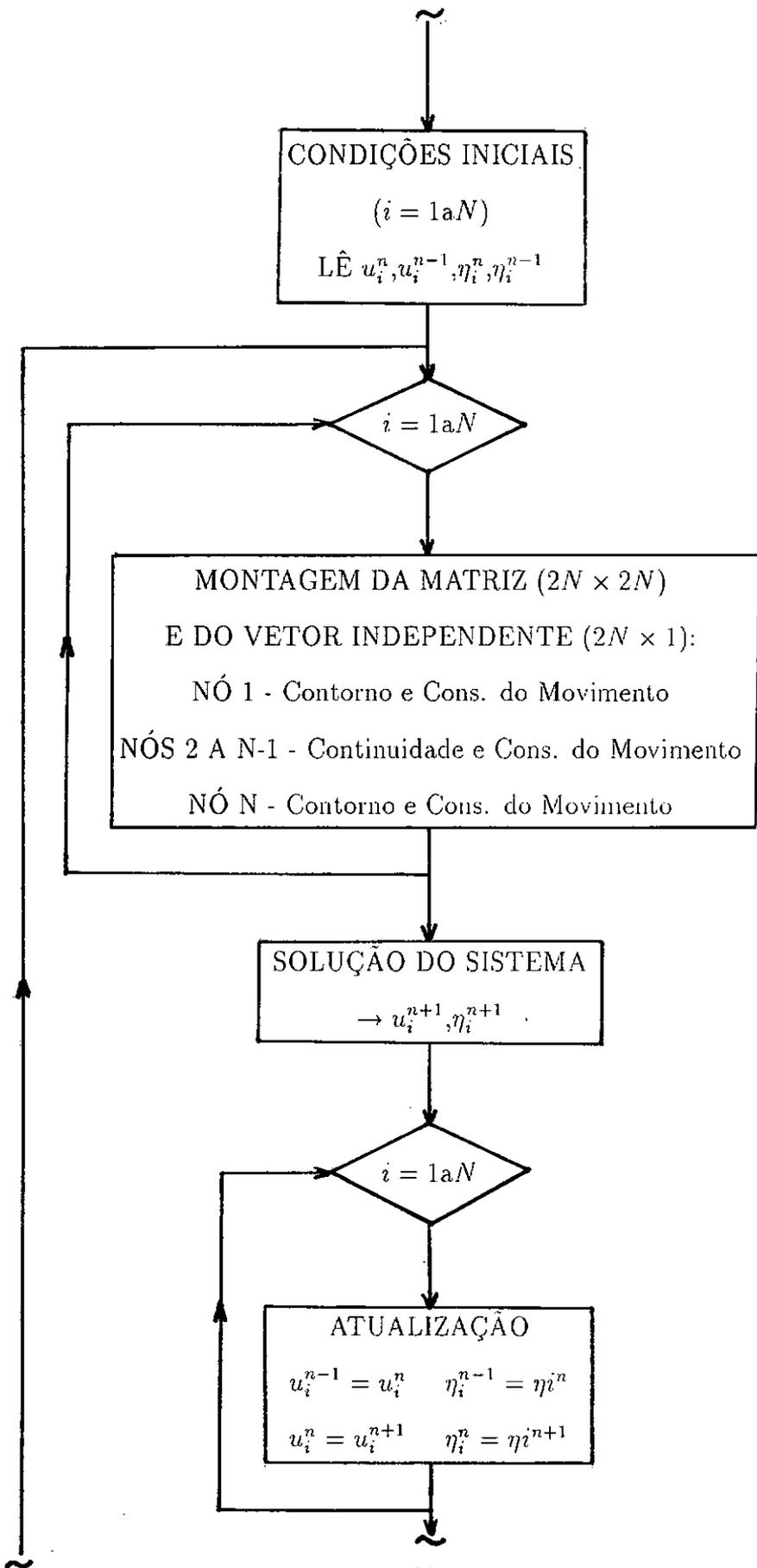
As equações apresentadas nos item 5.2.1 a 5.2.3 constituem um único sistema fechado para a solução das elevações do nível d'água e das velocidades em cada seção transversal de um dado canal lagunar, devendo ser conhecidos:

- $L$  - comprimento total do canal para simulação;
- $f$  - coeficiente de atrito de Darcy-Weissbach para as paredes do canal;
- $N$  - número de seções transversais consideradas;
- $B$  - largura superficial de cada seção transversal;
- $h$  - profundidade média de cada seção em relação ao NMM;
- NCH - número de componentes harmônicas da maré;
- $T, A, F$  - período, amplitude e fase de cada componente;
- $A_b$  - área superficial da lagoa;
- $\Delta t$  - intervalo de tempo de simulação;
- $\eta^n, \eta^{n-1}$  - elevações do nível d'água em cada seção, nos tempos  $t = n\Delta t$  e  $t = (n-1)\Delta t$ ;

- $u^n, u^{n-1}$  - velocidades em cada seção, nos tempos  $t = n\Delta t$  e  $t = (n - 1)\Delta t$ .

Podem-se assim calcular as elevações do nível d'água e as velocidades no tempo  $t = (n+1)\Delta t$ , em cada seção transversal, conforme o fluxograma de cálculo mostrado na figura 5.1.





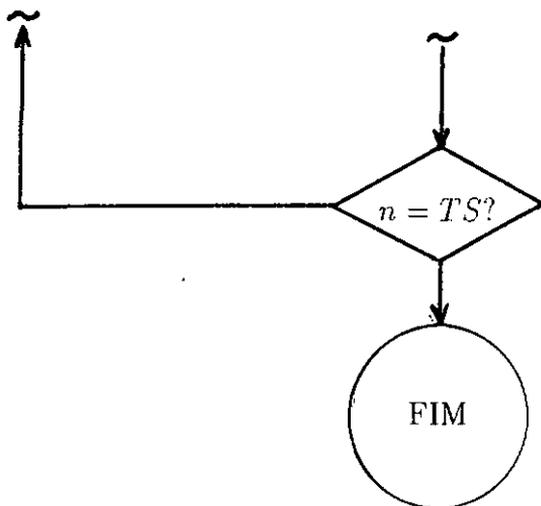


FIGURA 5.1: Fluxograma de Cálculo para o Modelo Acoplado

Para a solução do sistema matricial de equações o programa do modelo acoplado utiliza uma subrotina altamente eficiente para a resolução de matrizes banda, proveniente do pacote de subrotinas conhecido como LINPACK (Dongarra et al. 1979).

Outro procedimento de cálculo utilizado, de forma opcional, é a filtragem dos resultados a cada passo de tempo. O filtro substitui cada valor calculado da elevação do nível d'água e da velocidade, em cada seção transversal, por uma média ponderada entre estes e seus vizinhos adjacentes. O peso do valor obtido para a própria seção no cálculo da média pode ser fixado, a cada simulação, entre 0,50 e 0,95, não sendo admitidos valores fora desta faixa. A filtragem é um procedimento comum na modelação numérica, e visa reduzir "ruídos numéricos", tornando a variação espacial dos resultados mais "bem comportada". Os valores nas fronteiras não são incluídos neste processo de promediação.

### 5.3 - PROGRAMA PARA O MODELO DESACOPLADO

A partir da concepção de um método de desacoplamento dos cálculos de elevações do nível d'água e velocidades, via substituições sucessivas na equação da continuidade, apresentada no capítulo anterior, foi desenvolvido um modelo desacoplado para canais de maré 1D, cujo programa possui, basicamente, as mesmas características principais daquele desenvolvido para o modelo acoplado convencional. As formulações discretizadas e o fluxograma de cálculo do modelo para a programação são apresentadas nos itens a seguir.

#### 5.3.1 - Seções Intermediárias

##### a) Cálculo das Elevações do Nível d'Água

Para as seções transversais intermediárias —  $S_2$  a  $S_{N-1}$ , utilizando-se um esquema de fatoração implícita para a discretização temporal das equações da continuidade e da conservação da quantidade de movimento — com erro associado de  $O(\Delta t^2)$ , e explicitando-se o valor de  $u^{n+1}$  nesta última, para substituição na equação da continuidade, chega-se, através da discretização espacial via esquema de diferenças centradas, também com erro de  $O(\Delta x^2)$ , à seguinte equação discreta para o cálculo das elevações do nível d'água (capítulo 4, item 4.1.3):

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ B_{i+1} \alpha_{i+1} (\eta_{i+1}^n + h_{i+1}) - 4B_i \alpha_i (\eta_i^n + h_i) - B_{i-1} \alpha_{i-1} (\eta_{i-1}^n + h_{i-1}) \right] \frac{g}{2\Delta x} - \right. \\ & \quad \left. B_{i-1} u_{i-1}^n \right\} \eta_{i-1}^{n+1} + \left[ B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} + B_i \frac{4}{\Delta x} \alpha_i g (\eta_i^n + h_i) \right] \eta_i^{n+1} + \\ & \left\{ \left[ -B_{i+1} \alpha_{i+1} (\eta_{i+1}^n + h_{i+1}) - 4B_i \alpha_i (\eta_i^n + h_i) + B_{i-1} \alpha_{i-1} (\eta_{i-1}^n + h_{i-1}) \right] \frac{g}{2\Delta x} \right. \\ & \quad \left. + B_{i+1} u_{i+1}^n \right\} \eta_{i+1}^{n+1} = B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} \eta_i^n - B_{i+1} \alpha_{i+1} \beta_{i+1} (\eta_{i+1}^n + h_{i+1}) + \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$B_{i-1}\alpha_{i-1}\beta_{i-1}(\eta_{i-1}^n + h_{i-1}) - B_{i+1}u_{i+1}^n h_{i+1} + B_{i-1}u_{i-1}^n h_{i-1}$$

onde

$$\alpha_j = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x} + \frac{f |2u_j^n - u_j^{n-1}|}{8 R_j^{(n+1)*}} \right)^{-1}$$

$$\beta_j = \frac{2}{\Delta t} u_j^n - g \frac{\partial \eta_j^n}{\partial x} - \frac{f |u_j^n|}{8 R_j^n} u_j^n - u_j^n \frac{\partial}{\partial x} (2u_j^n - u_j^{n-1})$$

sendo

$$R_j^{(n+1)*} = \frac{B_j (h_j + 2\eta_j^n - \eta_j^{n-1})}{B_j + 2(h_j + 2\eta_j^n - \eta_j^{n-1})}$$

para  $j = i - 1$  ou  $i + 1$

Esta equação difere daquela apresentada no capítulo 4 (4.8), pela consideração do termo  $R^{(n+1)*}$ , teoricamente equivalente a  $2R^n - R^{n-1}$ , porém acarretando, na prática, um melhor desempenho do modelo desacoplado, conforme mencionado no item 5.2.1.

Observe-se ainda que, para uma dada seção  $S_i$ , esta equação inclui termos em  $\alpha$  e  $\beta$  correspondentes às seções  $S_{i-1}$ ,  $S_i$  e  $S_{i+1}$ . Deste modo, visto que estes parâmetros incluem, por sua vez, derivações espaciais de  $\eta$  e  $u$ , devem ser adotados esquemas progressivos de diferenças finitas para os termos  $\alpha_{i-1}$  e  $\beta_{i-1}$ , quando  $i = 2$ ; esquemas regressivos para os termos  $\alpha_{i+1}$  e  $\beta_{i+1}$  quando  $i = N - 1$ ; e esquemas centrados, indistintamente, nos demais casos. Conseqüentemente, a equação 5.7, apesar de válida para todas as seções transversais intermediárias,  $S_2$  a  $S_{N-1}$ , assume formulações distintas para  $S_2$ ,  $S_3$  a  $S_{N-2}$ , e  $S_{N-1}$ . As expressões para  $\alpha$  e  $\beta$  discretos no tempo e no espaço, empregando-se os esquemas de diferenças finitas detalhados anteriormente, são:

$$\alpha_1 = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{-3u_1^n + 4u_2^n - u_3^n}{2\Delta x} + \frac{f |2u_1^n - u_1^{n-1}|}{8 R_1^{(n+1)*}} \right)^{-1}$$

$$\beta_1 = \frac{4\Delta x}{\Delta t} u_1^n - g(-3\eta_1^n + 4\eta_2^n - \eta_3^n) - \frac{f\Delta x}{4} \frac{|u_1^n|}{R_1^n} u_1^n - u_1^n (-6u_1^n + 8u_2^n - 2u_3^n + 3u_1^{n-1} - 4u_2^{n-1} + u_3^{n-1})$$

$$\alpha_i = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{f}{8} \frac{|2u_i^n - u_i^{n-1}|}{R_i^{(n+1)*}} \right)^{-1}$$

$$\beta_i = \frac{4\Delta x}{\Delta t} u_i^n - g(\eta_{i+1}^n - \eta_{i-1}^n) - \frac{f\Delta x}{4} \frac{|u_i^n|}{R_i^n} u_i^n - u_i^n (2u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1} - 2u_{i-1}^n + u_{i-1}^{n-1})$$

$$\alpha_N = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{3u_N^n - 4u_{N-1}^n + u_{N-2}^n}{2\Delta x} + \frac{f}{8} \frac{|2u_N^n - u_N^{n-1}|}{R_N^{(n+1)*}} \right)^{-1}$$

$$\beta_N = \frac{4\Delta x}{\Delta t} u_N^n - g(3\eta_N^n - 4\eta_{N-1}^n + \eta_{N-2}^n) - \frac{f\Delta x}{4} \frac{|u_N^n|}{R_N^n} u_N^n - u_N^n (6u_N^n - 8u_{N-1}^n + 2u_{N-2}^n - 3u_N^{n-1} + 4u_{N-1}^{n-1} - u_{N-2}^{n-1})$$

## b) Cálculo das Velocidades

Uma vez conhecidos os valores das elevações do nível d'água em cada seção transversal, no tempo  $n + 1$ , o problema da determinação das velocidades reduz-se simplesmente à aplicação de uma das equações governantes, com os termos em  $\eta^{n+1}$  situados do lado direito da igualdade. Conforme assinalado no capítulo 4, item 4.1.3, esta escolha recai na equação da continuidade. Testes preliminares realizados empregando a equação da conservação da quantidade de movimento indicaram uma certa instabilidade numérica do modelo desacoplado assim desenvolvido, com problemas de convergência em dadas simulações, as quais podem ser efetuadas sem problemas através do modelo acoplado. Importa, destarte, preservar a continuidade, condição

essencial dos escoamentos, procedendo-se às substituições sempre nesta equação - - daí a expressão comumente empregada neste no presente trabalho. "cálculo desacoplado de elevações do nível d'água e velocidades via substituições sucessivas na equação da continuidade".

A equação discreta para o cálculo das elevações corresponde assim à própria equação utilizada no programa para o modelo acoplado (equação 4.5); ou ainda, reescrevendo-a, passando para o lado direito da igualdade todos os termos conhecidos (conforme capítulo 4, item 4.1.3), tem-se (equação 4.9):

$$\begin{aligned}
 & -B_{i-1} (h_{i-1} + \eta_{i-1}^n) u_{i-1}^{n+1} + B_{i+1} (h_{i+1} + \eta_{i+1}^n) u_{i+1}^{n+1} = \\
 & = B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} \eta_i^n - B_{i+1} h_{i+1} u_{i+1}^n + B_{i-1} h_{i-1} u_{i-1}^n \\
 & + B_{i-1} u_{i-1}^n \eta_{i-1}^{n+1} - B_i \frac{4\Delta x}{\Delta t} \eta_i^{n+1} - B_{i+1} u_{i+1}^n \eta_{i+1}^{n+1}
 \end{aligned}$$

### 5.3.2 - Seção 1 (Embocadura no Mar)

#### a) Cálculo das Elevações do Nível d'água

O cálculo desacoplado das elevações do nível d'água conta, nesta seção, com um fechamento inequívoco, dado pelos valores conhecidos de  $\eta(t)$ , que são a própria condição de contorno do problema. Do mesmo modo que no modelo acoplado, pode-se incluir no problema uma equação de oscilação periódica do nível do mar devido à maré (ver equação 5.3).

#### b) Cálculo das Velocidades

Para o cálculo desacoplado das velocidades, embora não se disponha de uma condição de contorno específica, é possível estabelecer um problema fechado, a partir dos valores conhecidos das elevações do nível d'água. Utiliza-se, pelas mesmas razões

já expostas, a equação da continuidade, que em sua forma discreta no tempo (ver capítulo 4, item 4.1.1) corresponde a:

$$\frac{2B}{\Delta t} (\eta^{n+1} - \eta^n) = -\frac{\partial}{\partial x} [Bu^{n+1}(h + \eta^n) + Bv^n(h + \eta^{n+1})]$$

A discretização espacial desta equação, para aplicação em S1, deve empregar esquema progressivo de diferenças finitas com erro associado de  $O(\Delta x^2)$ — ver item 5.2.2. Mantendo-se então do lado esquerdo da igualdade apenas os termos em  $u^{n+1}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} -3(h_1 + \eta_1^n)u_1^{n+1} + 4(h_2 + \eta_2^n)u_2^{n+1} - (h_3 + \eta_3^n)u_3^{n+1} &= -\frac{4\Delta x}{\Delta t} (\eta_1^{n+1} - \eta_1^n) \\ + 3(h_1 + \eta_1^{n+1})u_1^n - 4(h_2 + \eta_2^{n+1})u_2^n + (h_3 + \eta_3^{n+1})u_3^n &\quad (5.8) \end{aligned}$$

### 5.3.3 - Seção N

#### 5.3.3.1 - Embocadura na Lagoa como Condição de Contorno

a) Cálculo das elevações do Nível d'Água

Sendo o contorno do problema dado pela embocadura do canal em uma lagoa ou reservatório, pode-se formular matematicamente esta condição através da equação 5.1 (item 5.1). Conforme assinalado para o caso do modelo acoplado (item 5.2.3), a discretização desta equação resulta em (equação 5.5):

$$\left(\frac{2A_b}{B_N \Delta t} - u_N^n\right) \eta_N^{n+1} - (h_N + \eta_N^n) u_N^{n+1} = \frac{2A_b}{B_N \Delta t} - \eta_N^n + h_N u_N^n$$

Para o desacoplamento do cálculo, é preciso substituir nesta equação o valor de  $u_N^{n+1}$  por uma função de  $\eta_N^{n+1}$ . Toma-se portanto, da mesma forma que para as seções intermediárias, o valor de  $u^{n+1}$  obtido da equação da conservação da quantidade de

movimento discreta no tempo — ver capítulo 4, item 4.1.3 — dado pela expressão 4.7, que aplicada à seção N fornece:

$$u_N^{n+1} = -\alpha_N g \frac{\partial \eta_N^{n+1}}{\partial x} + \alpha_N \beta_N \quad (5.9)$$

onde

$$\alpha_N = \left( \frac{2}{\Delta t} + \frac{\partial u_N^n}{\partial x} + \frac{f |2u_N^n - u_N^{n-1}|}{8 R_N^{(n+1)*}} \right)^{-1}$$

$$\beta_N = \frac{2}{\Delta t} u_N^n - g \frac{\partial \eta_N^n}{\partial x} - \frac{f |u_N^n|}{8 R_N^n} u_N^n - u_N^n \frac{\partial}{\partial x} (2u_N^n - u_N^{n-1})$$

Procedendo-se então às derivações necessárias dos termos de 5.9, através de esquemas regressivos de diferenças finitas com erro associado de  $O(\Delta x^2)$  (conforme mencionado no item 5.2.3), e substituindo-se a expressão assim obtida para  $u_N^{n+1}$  na equação do contorno discreta (5.5) chega-se finalmente à equação para o cálculo desacoplado de  $\eta_N^{n+1}$ :

$$\frac{\alpha_N g}{2\Delta x} (h_N + \eta_N^n) \eta_{N-2}^{n+1} - \left[ \frac{2\alpha_N g}{\Delta x} (h_N + \eta_N^n) \right] \eta_{N-1}^{n+1} + \left[ \frac{2A_b}{B\Delta t} + \frac{3\alpha_N g}{2\Delta x} (h_N + \eta_N^n) - u_N^n \right] \eta_N^{n+1} = \frac{2A_b}{B\Delta t} \eta_N^n + h_N u_N^n + (h_N + \eta_N^n) \alpha_N \beta_N \quad (5.10)$$

(sendo as expressões de  $\alpha_N$  e  $\beta_N$  as mesmas fornecidas no item 5.3.1, alínea a.)

## b) Cálculo das Velocidades

Conhecidos os valores das elevações do nível d'água na seção N, obtêm-se  $u_N$  explicitamente, através da equação 5.5, utilizado-os então como condição de contorno.

### 5.3.3.2 - Hidrograma Afluente como Condição de Contorno

#### a) Cálculo das elevações do Nível d'Água

Sendo fornecido um hidrograma afluente na seção “final” N, isto equivale, mate-

maticamente, à equação 5.2 (conforme assinalado na introdução deste capítulo):

$$u_N^k (h_N + \eta_N^k) = q_N^k$$

onde  $q_N$  é a vazão unitária (por unidade de largura do canal) no tempo  $k$ . Sendo o hidrograma fornecido de forma discreta, os valores de  $q_N$  podem ser obtidos, a qualquer tempo, via interpolação. Pode-se então escrever, de forma discreta no tempo que:

$$u_N^{n+1} (h_N + \eta_N^n) + u_N^n (h_N + \eta_N^{n+1}) = q_N^n + q_N^{n+1} \quad (5.11)$$

Para o cálculo desacoplado das elevações do nível d'água, substitui-se nesta expressão a equação 5.9, devidamente discretizada para  $SN$ , do mesmo modo que anteriormente (item 5.3.3.1, alínea a); obtém-se assim a seguinte equação discreta:

$$\left[ \frac{-3\alpha_N g}{2\Delta x} (h_N + \eta_N^n) + u_N^n \right] \eta_N^{n+1} + \left[ \frac{4\alpha_N g}{2\Delta x} (h_N + \eta_N^n) \right] \eta_{N-1}^{n+1} - \left[ \frac{\alpha_N g}{2\Delta x} (h_N + \eta_N^n) \right] \eta_{N-2}^{n+1} = q_N^n + q_N^{n+1} - u_N^n h_N - \alpha_N \beta_N (h_N + \eta_N^n) \quad (5.12)$$

## b) Cálculo das Velocidades

O cálculo das velocidades para a seção transversal  $SN$ , onde é dado o hidrograma afluente, e uma vez calculadas as elevações do nível d'água, é feito de modo bastante simples, analogamente ao caso anterior (embocadura na lagoa como condição de contorno), substituindo-se os valores conhecidos de  $\eta_N^{n+1}$  na expressão matemática original da condição de contorno, equação 5.2.

## c) Dada a Curva $(\eta_N, u_N) \times t$

Uma outra forma de introduzir a condição de contorno na seção N, no caso de se dispor de uma curva-chave neste local, é obter diretamente nesta curva, para

cada vazão do hidrograma afluente, as elevações do nível d'água, podendo-se assim calcular também os valores da velocidade. O programa permite, como padrão de entrada, que se forneça, ao invés das vazões, uma curva  $(\eta, u) \times t$  para  $SN$ . Os problemas de fechamento numérico ficam assim bastante simplificados nesta seção, sendo impostos, como contorno, os valores de  $\eta_N^{n+1}$  e  $u_N^{n+1}$  a cada passo de tempo, prescindindo de um maior detalhamento.

### 5.3.4 - Fluxograma de Cálculo

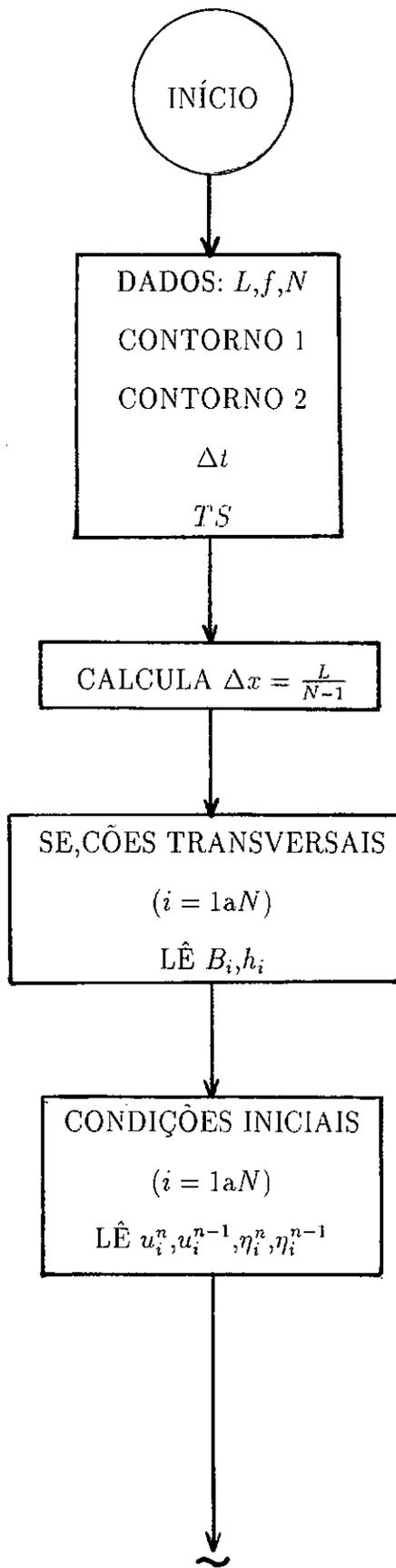
As equações apresentadas nos itens 5.3.1 a 5.3.3 permitem a solução de dois sistemas de equações consecutivos no tempo  $t = (n + 1)\Delta t$  — o primeiro para a determinação das elevações d nível d'água, e o segundo para as velocidades. Os dados necessários são os mesmos do modelo acoplado (item 5.2.4), sendo que, como contorno na embocadura com o mar, podem ser fornecidos:

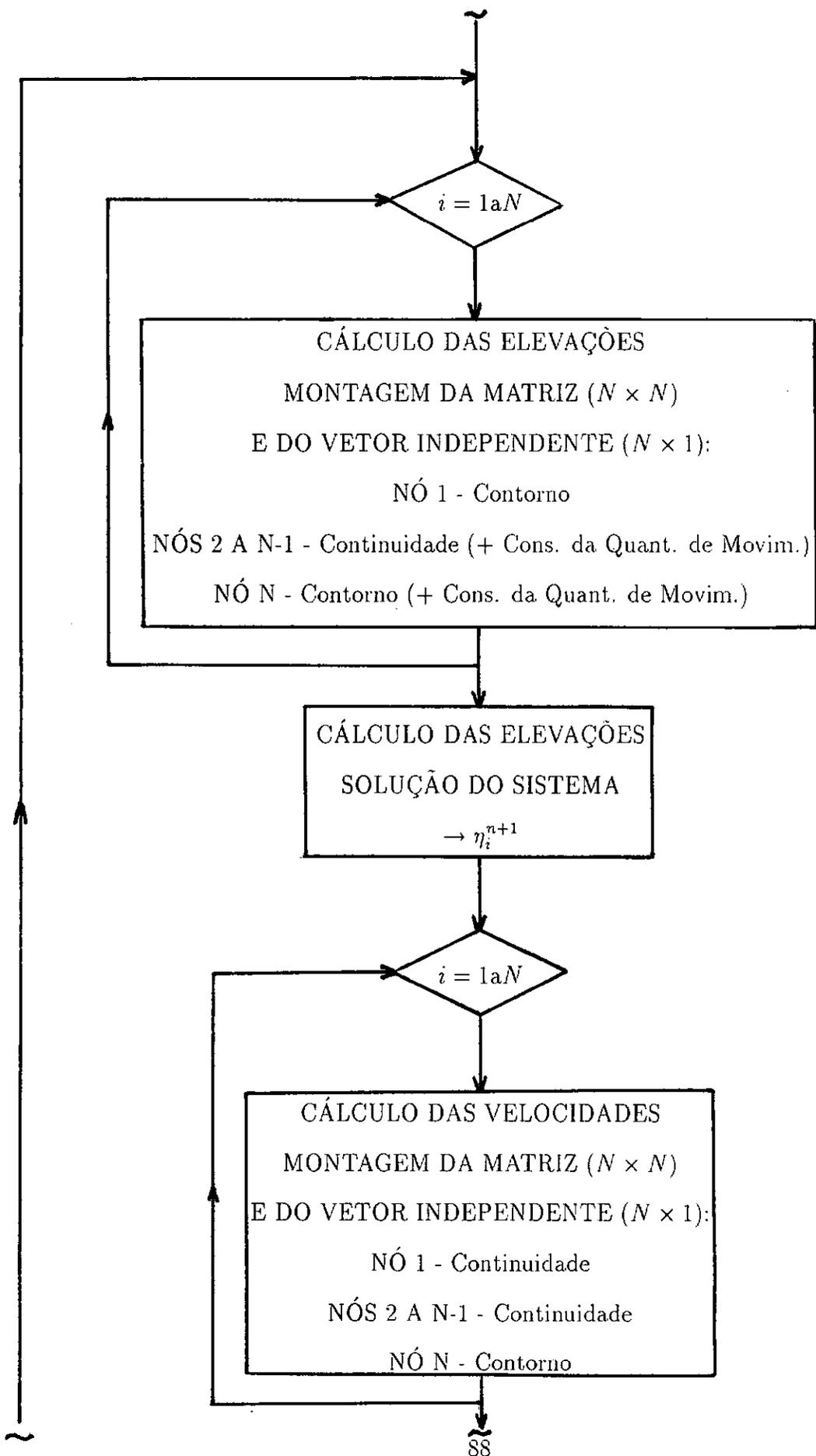
- NCH - número de componentes harmônicas da maré, e
- $T, A, F$  - período, amplitude e fase de cada componente; *ou*
- $\eta_1 \times t$  - curva de elevações do nível d'água no tempo.

Como condição de contorno na outra extremidade do canal podem ser especificados:

- $A_b$  - área superficial de uma lagoa ou reservatório; *ou*
- $q_N \times t$  - hidrograma afluente numa dada seção transversal N; *ou*
- $(\eta_N, u_N) \times t$  - curva de elevações do nível d'água e velocidades no tempo.

O programa para o modelo desacoplado, pode assim ser apresentado, de forma esquemática, pelo fluxograma de cálculo da figura 5.2.





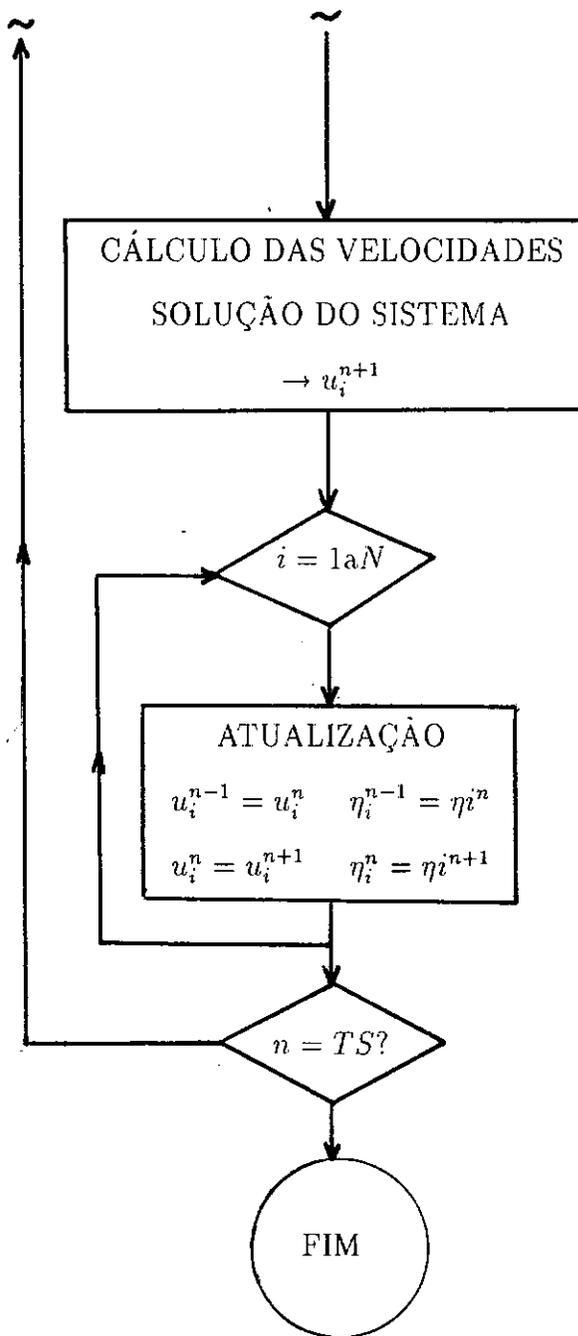


FIGURA 5.2: Fluxograma de Cálculo para o Modelo Desacoplado

Para a solução dos sistemas matriciais adota-se também aqui um programa auxiliar proveniente do pacote de subrotinas denominado LINPACK (Dongarra et al, 1979). A filtragem opcional dos resultados a cada passo de tempo foi igualmente

incluída neste programa, sendo porém posicionada, necessariamente, logo após a solução dos sistemas matriciais em cada caso. Assim, os valores de elevações do nível d'água utilizados no cálculo das velocidades correspondem, de forma rigorosa, àqueles que serão retidos para o processamento no passo de tempo seguinte.

## **5.4 - APLICAÇÕES**

### **5.4.1 - Considerações quanto às Condições Iniciais**

A primeira questão que se coloca para a simulação de problemas práticos através dos modelos anteriormente apresentados diz respeito às condições iniciais. Conforme os algoritmos de cálculo apresentados — ver fluxogramas para o modelo acoplado e desacoplado, figuras 5.1 e 5.2 — é necessário, a cada passo de tempo, conhecer os valores característicos de elevações do nível d'água e velocidades em dois tempos anteriores. Os valores no tempo pré-anterior, na verdade, têm influência restrita, afetando apenas o cálculo do termo de atrito na equação dinâmica — ver equacionamento, itens 5.2 e 5.3. Assim sendo, e dada a pequena magnitude dos intervalos de tempo de simulação comumente empregados, justifica-se na prática o fornecimento de apenas uma condição; ou seja, quando o tempo anterior coincide com o tempo inicial (início da simulação), e apenas neste caso, os programas assumem que os valores de elevações do nível d'água e velocidades no tempo pré-anterior são idênticos àqueles do tempo anterior, isto é, aos valores fornecidos como condição inicial do problema. Alternativamente, para fins de testes apenas, foram feitas simulações preliminares utilizando este tipo de procedimento, obtendo-se com isso, algum tempo depois, valores característicos tabelados a cada passo de tempo, e com evolução temporal condizente com os resultados qualitativos esperados. Simulando-se então

novamente os mesmos casos, foram fornecidos aos programas os valores em dois passos de tempo consecutivos como condições iniciais do problema. Os resultados assim obtidos, em diversos casos simulados, apresentaram-se rigorosamente idênticos para as simulações preliminares e finais, comprovando assim que o procedimento de inicialização adotado nas versões finais dos programas de cálculo é aceitável, sem nenhuma influência mensurável sobre os resultados.

Ainda com respeito aos valores iniciais de cálculo, esbarra-se na necessidade de conhecer, ao longo de todo o comprimento do canal, as elevações do nível d'água e velocidades médias num tempo qualquer, para início de simulação. Verifica-se na prática que, estando os canais de maré sujeitos a inversões no fluxo e oscilações dos níveis d'água em relação ao NMM (nível médio do mar), embora isto ocorra, a certos intervalos de tempo, de forma localizada em diferentes seções transversais, é válido fornecer, como valores iniciais, elevações do nível d'água e velocidades nulas em todas as seções discretas. Deste modo, sujeito às oscilações do nível d'água na primeira seção junto à embocadura no mar, e dada uma condição de contorno pré-fixada na outra extremidade, o canal responde incontinenti, passando a apresentar as características esperadas de oscilações no escoamento. Nos casos em que a imposição de condições iniciais nulas suscitar alguma dúvida quanto aos resultados quantitativos da simulação matemática, pode-se simplesmente estender a simulação numérica por dois ou mais ciclos de maré, quando, devido ao distanciamento, o escoamento "esquece" suas características iniciais, acomodando-se ao processo de oscilação que lhe é imposto por fatores externos — a partir de seus contornos.

#### **5.4.2 - Casos Simulados**

Objetivando-se neste trabalho a comparação de desempenhos dos modelos acoplado, convencional, e desacoplado proposto, toma-se por base um canal lagunar hipotético, conforme detalhado a seguir.

#### 5.4.2.1 - Canal Lagunar

Os principais dados relativos ao canal são:

- extensão total - 905 *m*;
- largura superficial - variando de 18,0 *m* junto à embocadura no mar a 20,0 *m* junto à lagoa;
- profundidade em relação ao NMM - variando de 1,20 *m* junto à embocadura no mar a 1,60 *m* junto à lagoa;
- coeficiente de resistência ao escoamento (Darcy-Weissbach) - 0,041.

A condição de maré empregada na simulação, é dada por:

- componentes harmônicas - 1;
- período - 12 h;
- amplitude - 0,5 *m*;
- fase - 0°.

Foram efetuadas então diversas simulações com um e outro modelo, fornecendo-se como contorno na outra extremidade do canal uma lagoa com área superficial média de  $2,0 \times 10^6 \text{ m}^2$ . As variantes investigadas envolveram uma combinação dos seguintes casos:

- número de Courant variando aproximadamente de 1,0 a 10,0 ( $\Delta x = 45,25 \text{ m}$  e  $\Delta t = 10 \text{ s}$  a 100 *s*);
- utilização ou não do mecanismo de filtragem;
- dados relativos à onda de maré fornecidos de forma contínua (ambos os modelos) ou discreta (apenas para o modelo desacoplado);

- especificação como contorno junto à lagoa do hidrograma gerado a partir de simulações em que se fornece a área superficial desta (apenas para o modelo desacoplado).

Após uma gama de testes, em que se procurou explorar ao máximo as possibilidades do problema numérico, podem ser feitas as observações que se seguem.

- O modelo acoplado, conforme esperado, é bastante estável, simulando sem problemas os mais diversos tipos de discretização, com ou sem o emprego do mecanismo de filtragem; as diferenças relativas entre os valores de elevações do nível d'água e velocidades calculados em cada caso são bastante reduzidas (da ordem de 1%, ou pouco mais), não sendo possível caracterizar simulações impróprias.
- O modelo desacoplado é menos estável, apresentando problemas de convergência em alguns casos — número de Courant elevado, ausência de mecanismo de filtragem. Em outras situações, embora os resultados sejam qualitativamente satisfatórios, verificam-se diferenças aparentemente acentuadas em relação àqueles obtidos com o modelo acoplado, sendo possível inferir a inadequação de algumas simulações. Com efeito, a análise das variações temporais dos parâmetros em cada seção permite concluir que estes erros, ou diferenças, são devidos mais a variações de fase do que de amplitude, variações estas de pequena ordem, apesar da repercussão sobre valores pontuais instantâneos. Isto ocorre notadamente em função de definições de valores de contorno.
- Ao se reproduzir com precisão as condições do escoamento nas seções extremas (condições de contorno), obtém-se um excelente desempenho do modelo desacoplado, com resultados rigorosamente coincidentes com aqueles do modelo acoplado (diferenças da ordem de 1%).

Visando ilustrar o que foi dito antes, reproduzem-se aqui os resultados de simulações com ambos os modelos, para um número de Courrant da ordem de 4,5. O modelo acoplado tem como condições de contorno a curva de maré dada na embocadura com o mar, e a área especificada da lagoa. O modelo desacoplado toma igualmente a curva de maré num extremo, mas considera porém o hidrograma gerado na última seção oposta, a partir da simulação anterior. Em ambos os casos o mecanismo de filtragem foi ativado. O gráfico da figura 5.3a mostra a variação temporal dos parâmetros característicos numa dada seção intermediária do canal, para um dado período de maré. A figura 5.3b apresenta as variações espaciais destes mesmos parâmetros, ao longo de todo o eixo do canal, em instantes de tempo pré-selecionados, correspondentes à preamar e baixamar de um ciclo de maré.

Para condições extremas de simulação, adotando-se intervalos de tempo bastante dilatados, podem ocorrer problemas de estabilidade numérica — ver capítulo 3, item 3.3. Segundo assinalam Abbott e Basco (1989), que nem todos os casos de soluções instáveis são devidos à inadequabilidade do modelo numérico e parâmetros associados. Alguns fenômenos de instabilidade, segundo os autores, decorrem em maior grau da física do problema, em casos onde os termos advectivos das equações governantes são responsáveis por uma forte não linearidade. Quando isto ocorre, seguem os autores, “mesmo uma onda harmônica simples propagando-se de um extremo a outro em um canal retangular irá gerar ondas com componentes harmônicas superiores (comprimento de onda =  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ , ...) à medida em que o tempo avança”. Deste modo, a energia da onda vai sendo transferida para ondas mais curtas, acumulando componentes de ordem elevada. Em conseqüência, até mesmo um esquema numérico que em outros casos mostra-se estável, “pode apresentar oscilações irreais, à medida em que tenta se acomodar a este processo...”<sup>1</sup>. Esta discussão é ilustrada pelas figuras 5.4.a e 5.4.b, onde se apresenta, para os modelos

---

<sup>1</sup>Tradução pelo autor do original em Inglês

acoplado e desacoplado, respectivamente, a variação temporal dos parâmetros numa dada seção intermediária do canal. Em ambos os casos, os resultados de simulações para discretizações com número de Courant bastante elevados são plotados contra os resultados esperados — para malhas de discretização usuais. Verifica-se que o modelo desacoplado apresenta-se instável antes do modelo acoplado convencional, embora isto só ocorra para intervalos de discretização bastante superiores àqueles comumente adotados para modelos de escoamento em canais.

#### 5.4.2.2 - Sistema Canal-Lagoa

Num passo seguinte, com fins à verificação do desempenho do modelo desacoplado, optou-se por estabelecer um eixo longitudinal do escoamento adentrando pela lagoa, preservando-se a área total de cerca de  $2,0 \times 10^6 \text{ m}^2$ . Objetivou-se com isto obter resultados equivalentes aos anteriores para o escoamento no canal, assegurando porém um melhor nível de confiabilidade dos testes, dado que a condição de contorno relativa à lagoa, antes fornecida de forma analítica, passou então a ser dada pela indiscutível condição física de vazão nula no extremo oposto ao canal.

Os dados relativos à lagoa são:

- extensão do eixo do escoamento - aproximadamente 1300 m;
- largura superficial - variando de 20 m (embocadura do canal) a 2000 m na parte central, e permanecendo constante até a última seção;
- profundidade em relação ao NMM - variando de 1,60 m (embocadura do canal) a 3,50 m no extremo final.

O modelo acoplado admite tal simulação fornecendo-se a área superficial remanescente da lagoa, que é nula. Já o modelo desacoplado permite que se forneça, alternativamente, um hidrograma afluyente nulo na última seção transversal dada (os

FIGURA 5.3a  
Canal: Elevacoes do NA e Velocidades ao longo do Tempo

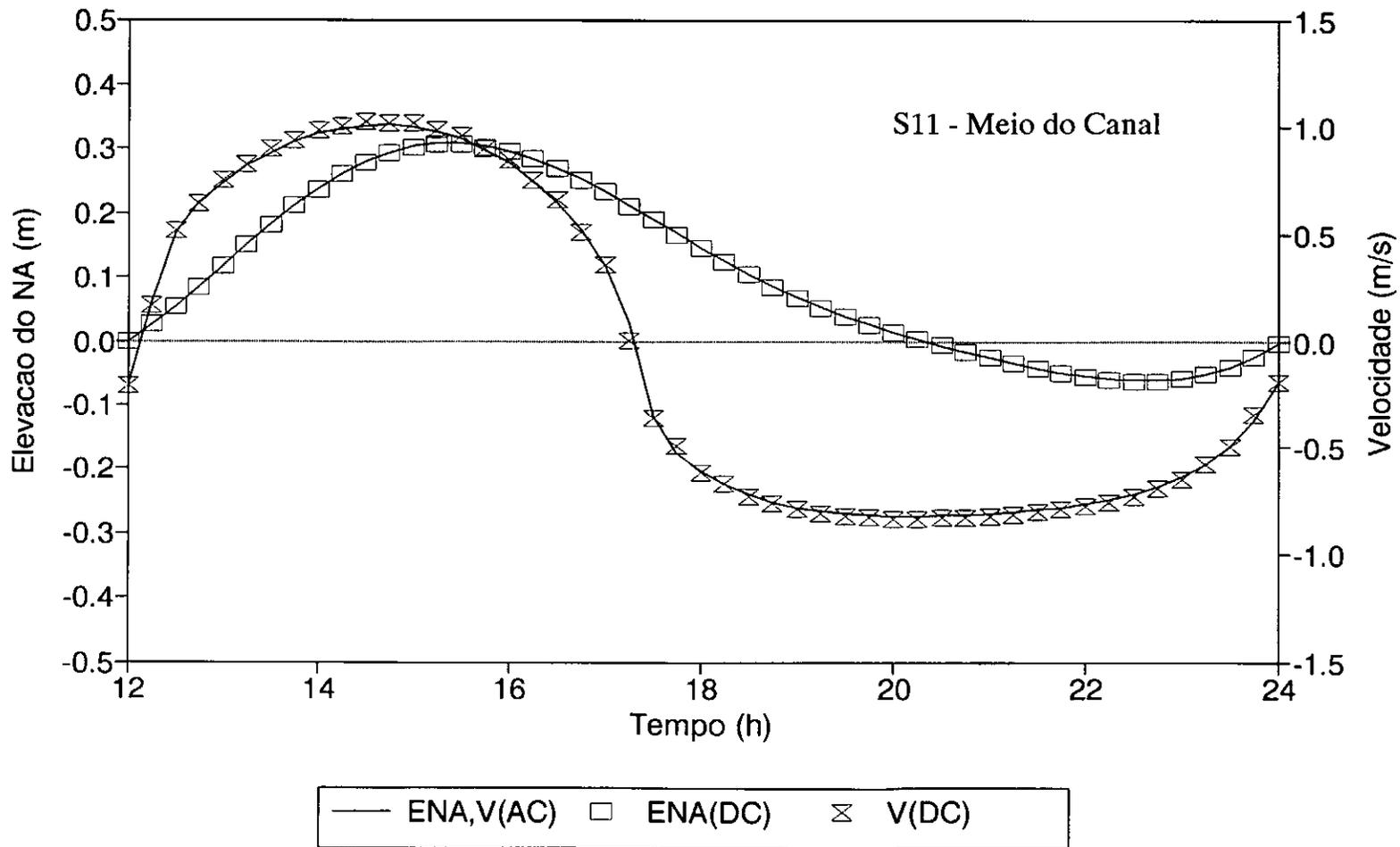


FIGURA 5.3b  
Canal: Perfis de Elevacoes do NA e Velocidades

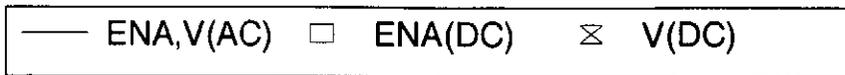
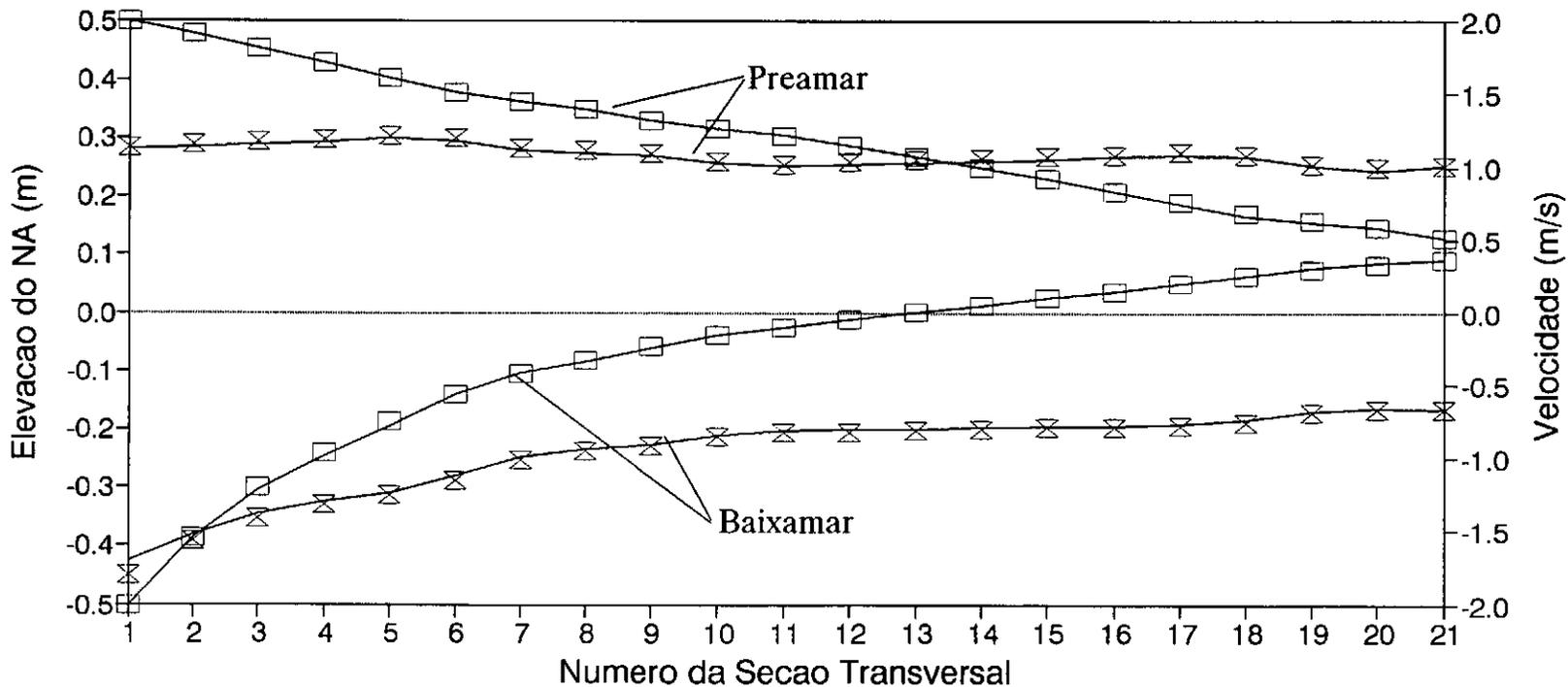


FIGURA 5.4a  
Simul. c/ o Modelo Acoplado: Instabilidades (NC = 40)

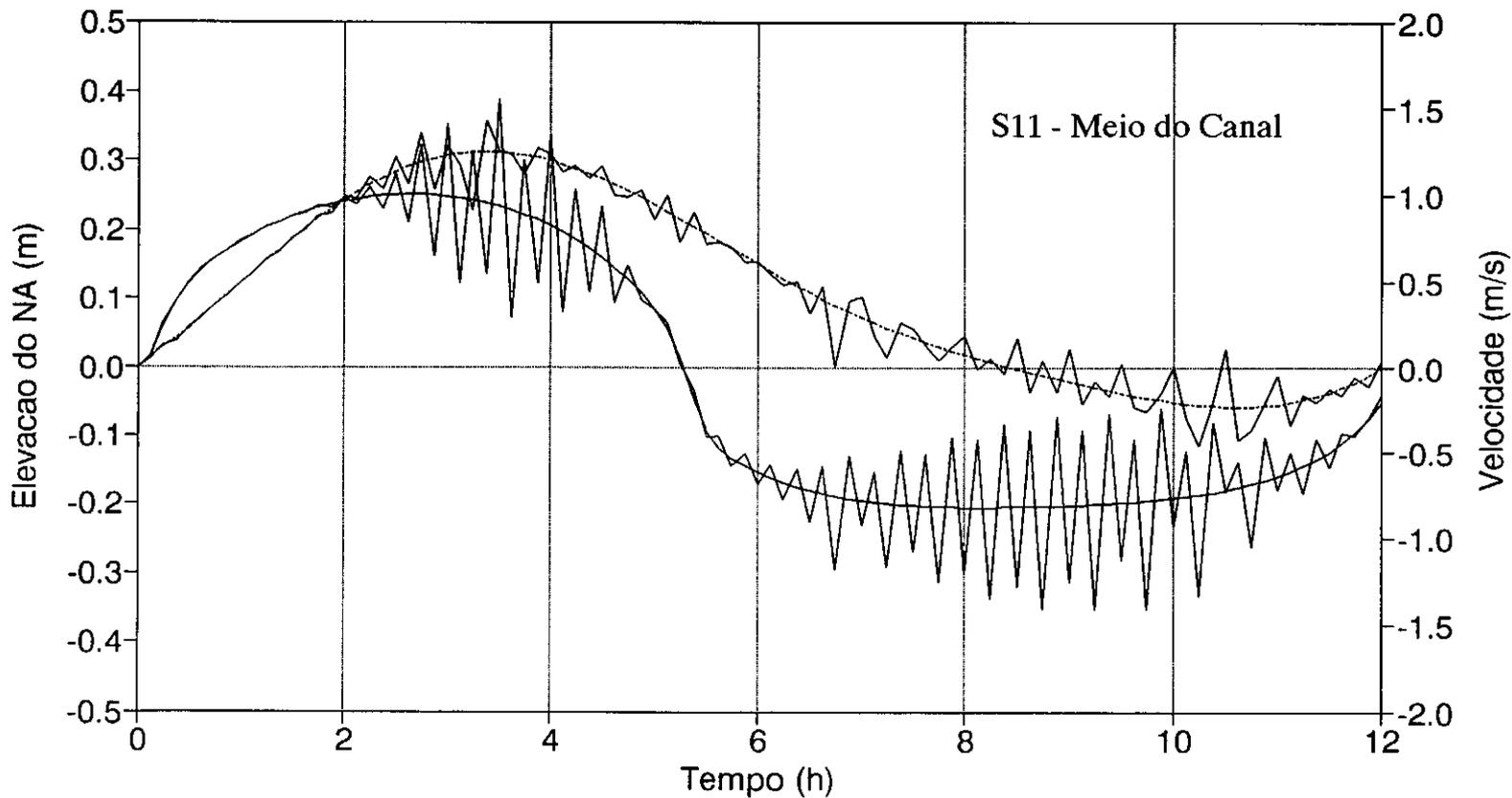
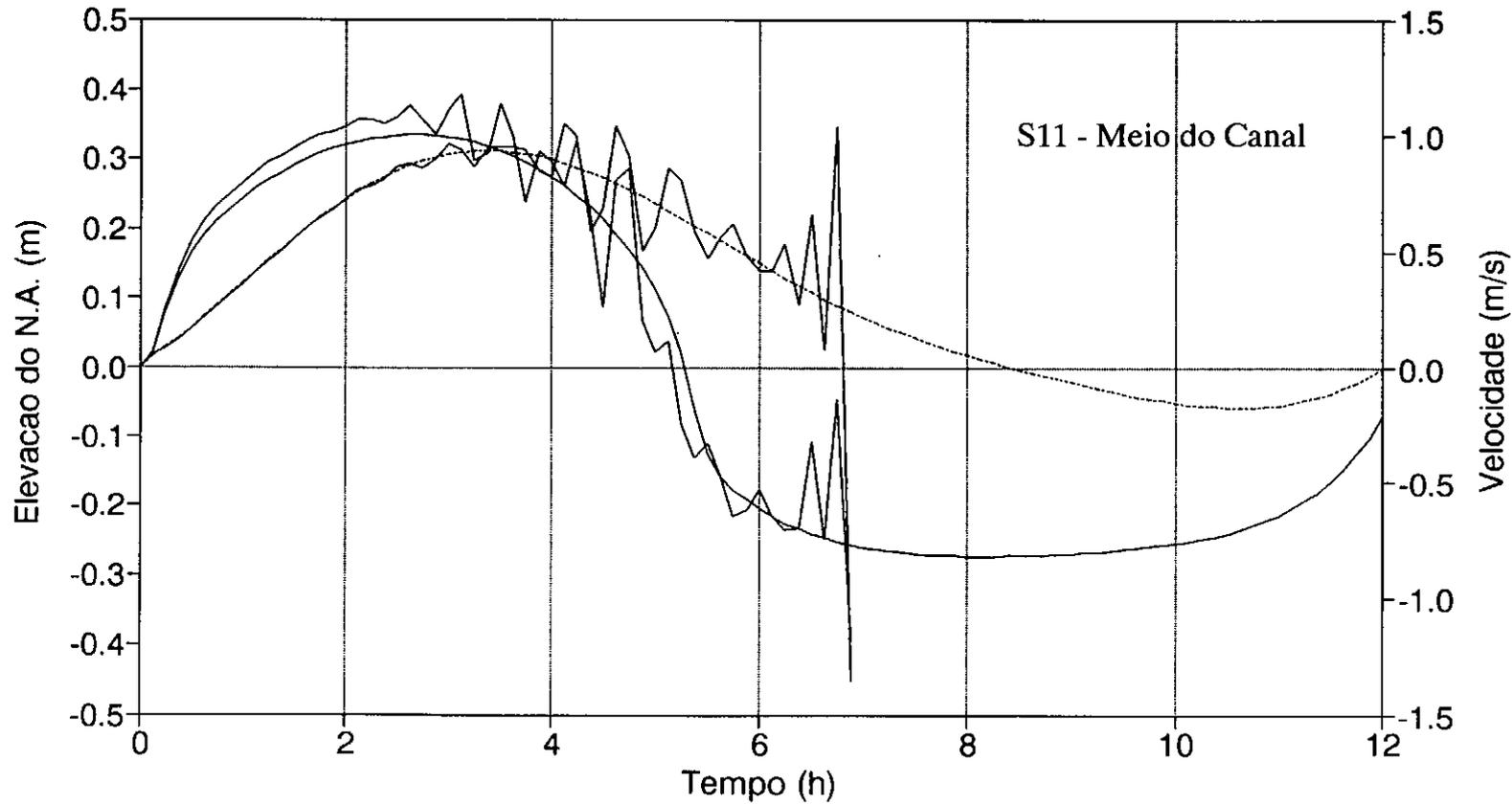


FIGURA 5.4b  
Simul. c/ o Modelo Desacoplado: Instabilidades (NC = 13)



..... Elevacao do N.A. — Velocidade

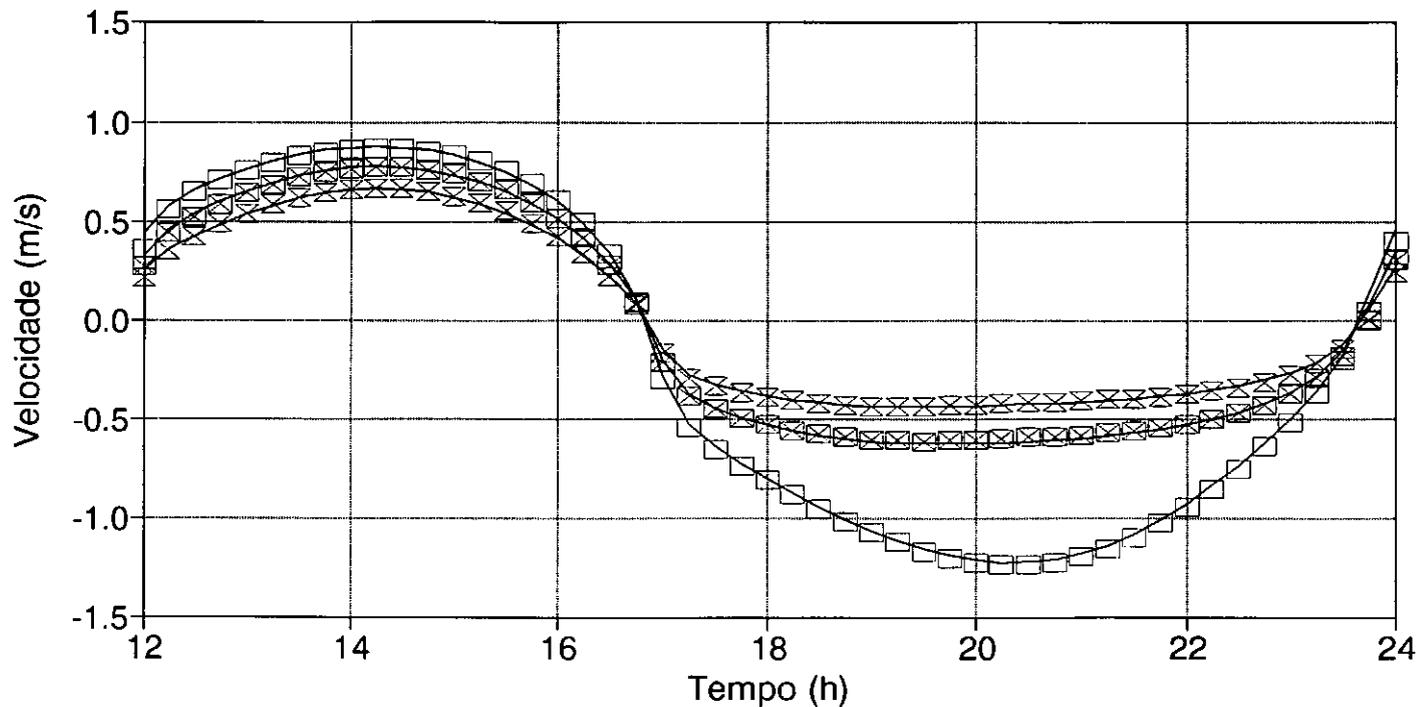
resultados, testados, foram rigorosamente equivalentes). As simulações foram feitas com  $\Delta x = 75 \text{ m}$  e  $\Delta t = 50 \text{ s}$  — número de Courant de aproximadamente 2,5 ao longo do canal e chegando a 4,0 na lagoa. Empregou-se, em ambos os modelos, o mecanismo de filtragem.

As figuras 5.5a e 5.5b apresentam os gráficos da variação temporal dos parâmetros característicos ao longo de um dado período de maré, para seções correspondentes a: embocadura no mar, 1/2 do desenvolvimento do canal e embocadura na lagoa. As figuras 5.5c a 5.5e apresentam a variação espacial destes mesmos parâmetros, desde a embocadura no mar até o desenvolvimento completo do eixo do escoamento na lagoa, para determinados instantes de tempo pré-selecionados de um ciclo de maré, correspondentes a: meia maré enchente, preamar, meia maré vazante e baixamar. Em quase todos os casos observa-se, conforme esperado, uma excelente superposição dos resultados das simulações empregando os modelos acoplado e desacoplado.

Ocorre porém uma significativa diferença nos valores calculados da velocidade para a primeira seção transversal (embocadura no mar), a cada início de ciclo de maré, com repercussão ao longo do canal. Esta diferença, no entanto, só é percebida através da observação das variações espaciais da velocidade nos tempos de meia maré enchente (figura 5.5d), passando despercebida numa primeira análise da curva de variações temporais na seção inicial ou em outras quaisquer (figuras 5.5a e 5.5b). Mais que isto, esta discrepância desaparece rapidamente, não sendo mais notada para os resultados de preamar (figura 5.5c), embora reapareça ao final do ciclo. Isto se explica pela análise mais detalhada das curvas de variações temporais as quais, apesar de praticamente coincidentes, apresentam com efeito mínimas variações de fase, responsáveis por estas discrepâncias. Pode-se assim concluir que tais diferenças, apesar de acentuadas em termos absolutos, são bem menos relevantes do que possam parecer.

\* \* \*

FIGURA 5.5a  
Sistema Canal/Lagoa: Velocidades ao longo do Tempo



S1 - Embocadura no Mar

S11 - Meio do Canal

S21 - Embocadura na Lagoa

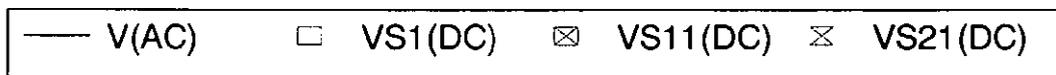
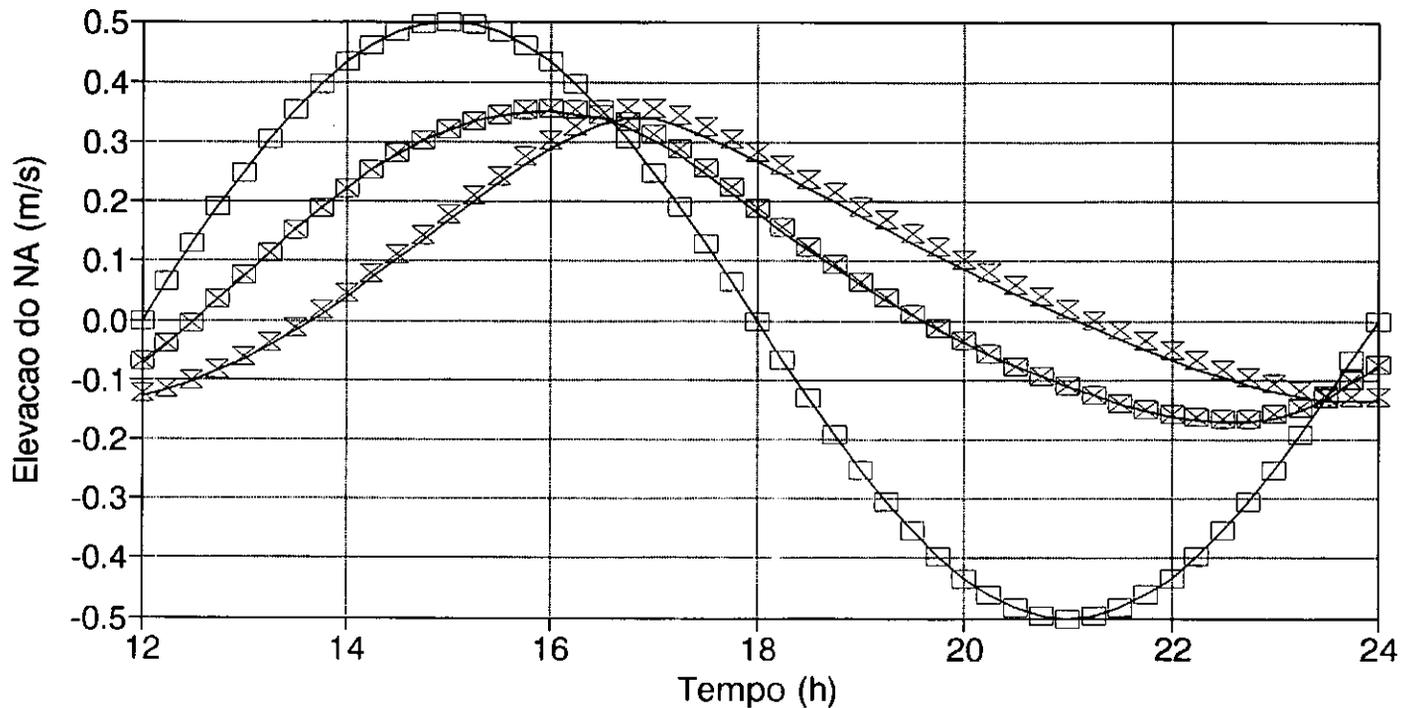


FIGURA 5.5b  
 Sistema Canal/Lagoa: Elevacoes do NA ao longo do Tempo



S1 - Embocadura no Mar

S11 - Meio do Canal

S21 - Embocadura na Lagoa

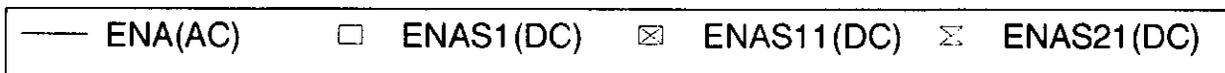


FIGURA 5.5c  
 Sistema Canal/Lagoa: Perfis de Velocidades (i)

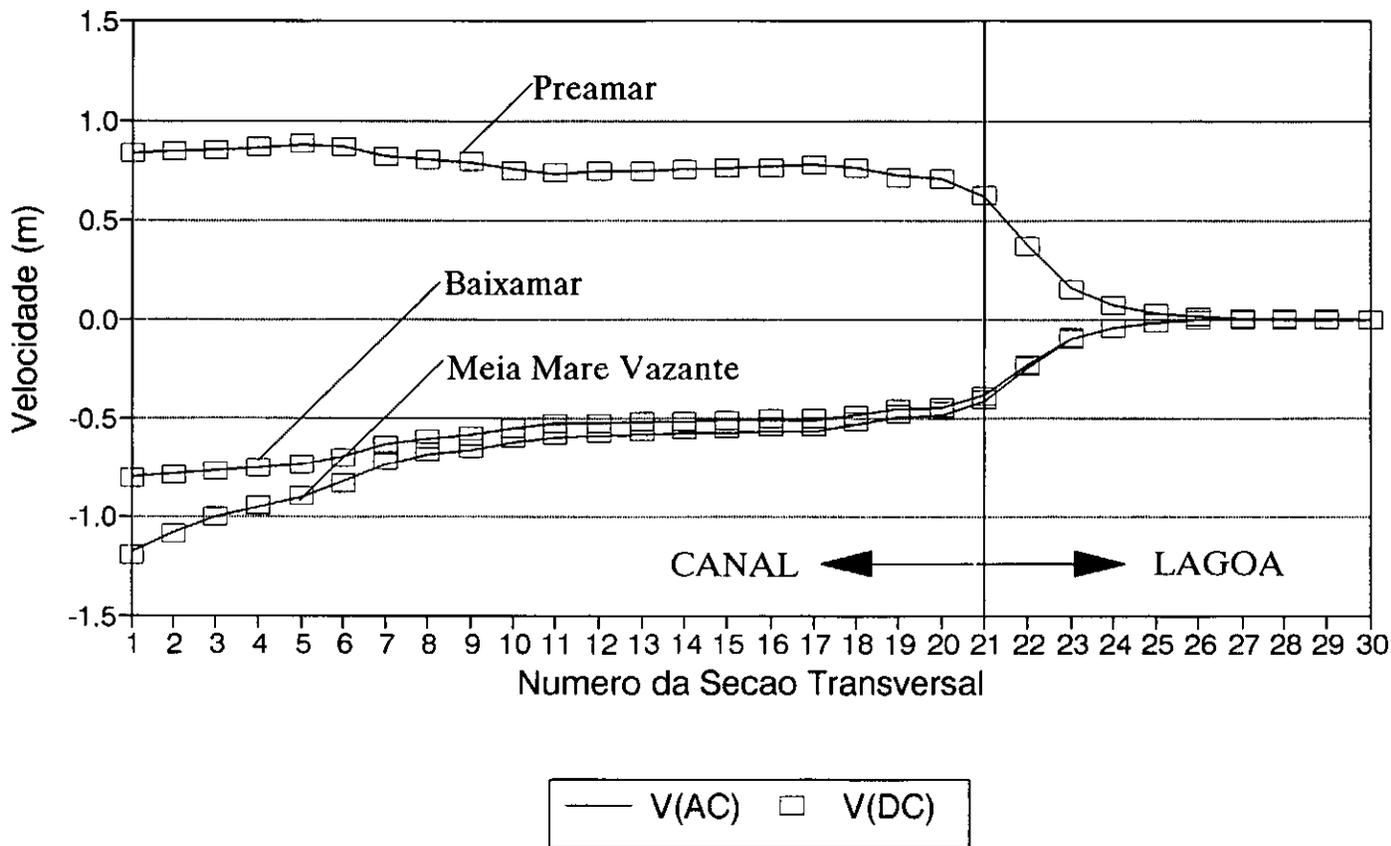


FIGURA 5.5d  
Sistema Canal/Lagoa: Perfis de Velocidades (ii)

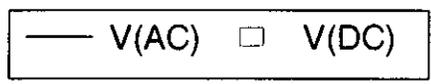
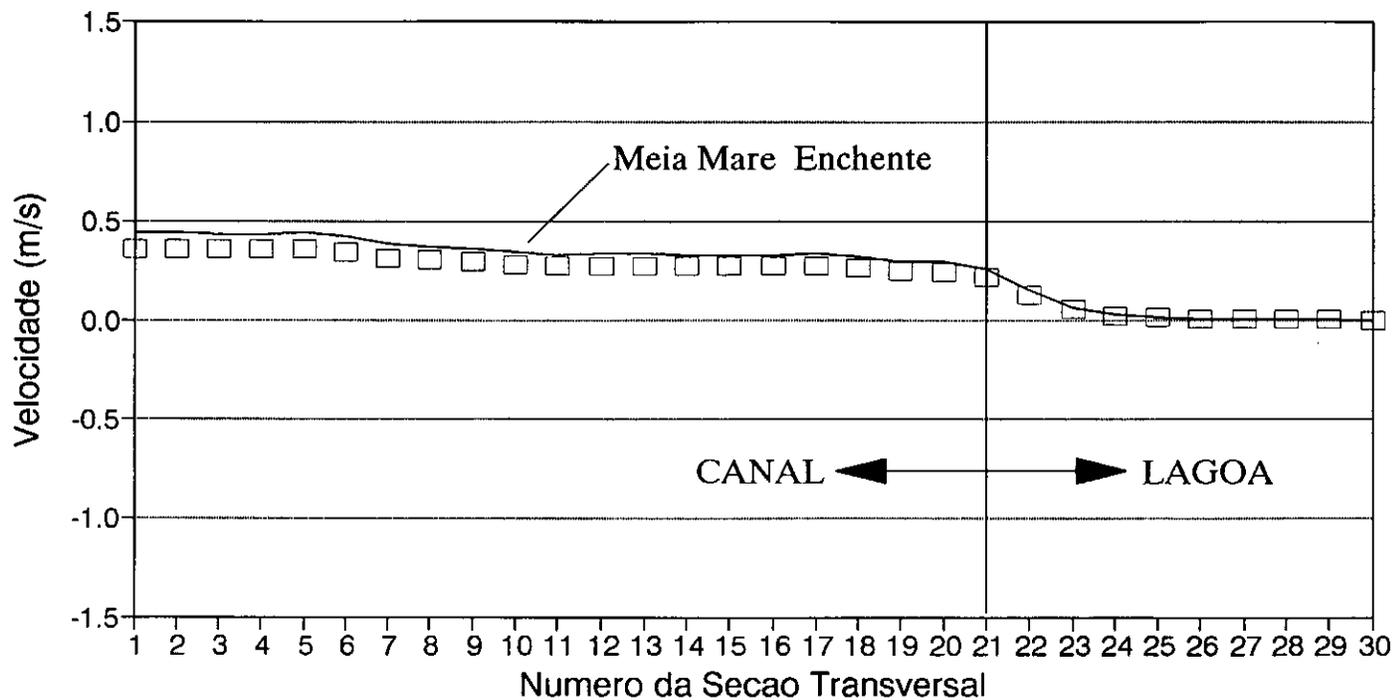
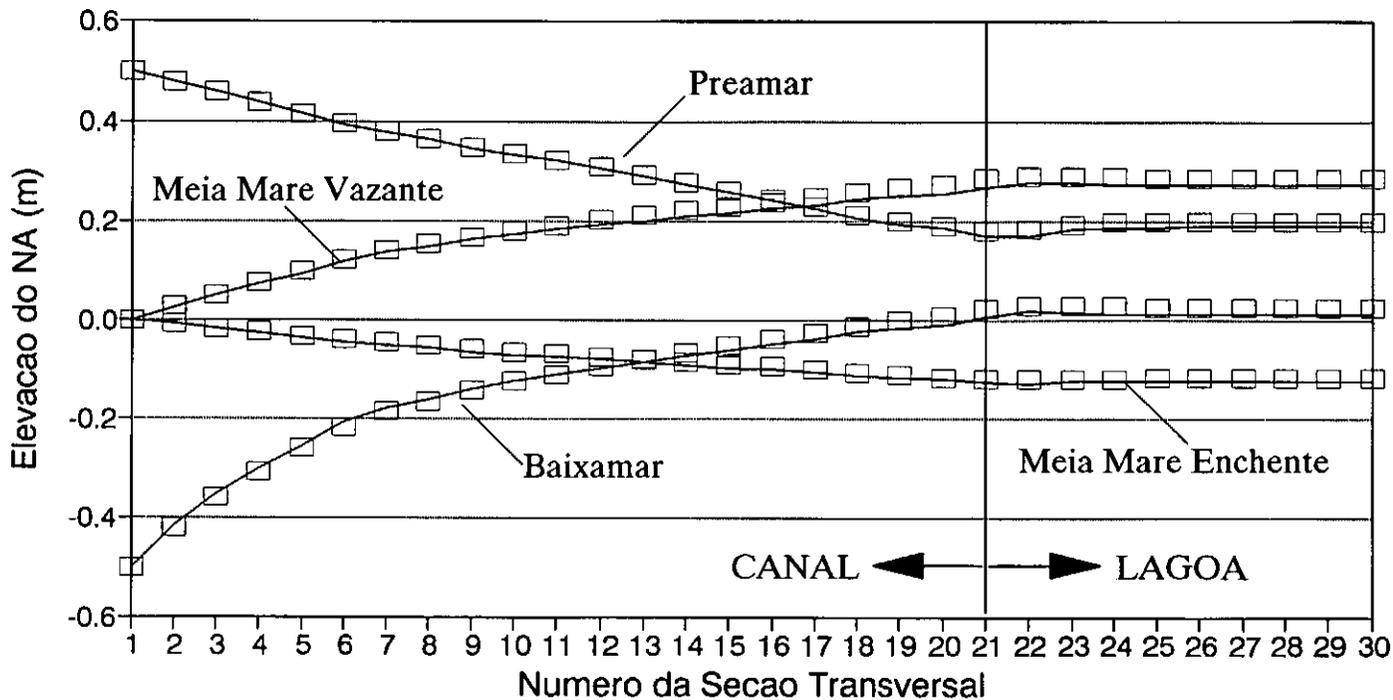


FIGURA 5.5e  
 Sistema Canal/Lagoa: Perfis de Elevacoes do NA



— ENA(AC)    □ ENA(DC)

# Capítulo 6

## Conclusões e Recomendações

A técnica de desacoplamento proposta, via substituições sucessivas na equação da continuidade, apresenta-se, para o caso de canais de maré 1D, modelados via esquema de diferenças finitas, perfeitamente viável, do ponto de vista prático. Conforme se depreende da análise dos gráficos com os resultados de diversas simulações, apresentados no capítulo 5, não há, do ponto de vista de precisão dos resultados, diferenças significativas entre os valores obtidos via um modelo acoplado convencional e via o modelo desacoplado proposto. A única ressalva fica por conta dos valores calculados nos contornos, onde o desacoplamento acarreta, por assim dizer, uma “carência” de formulações matemáticas específicas.

Deve ser lembrado também, que à medida em que se consideram intervalos de discretização para fins de simulação resultantes em números de Courant progressivamente maiores, o modelo desacoplado apresenta-se numericamente instável bem antes que o modelo acoplado convencional — embora isto só ocorra para valores já bastante elevados do número de Courant. Somando-se a isto, uma pequena modificação no algoritmo de cálculo do termo de atrito, praticamente sem repercussões no caso do modelo acoplado, mostrou-se relevante no desenvolvimento do modelo desacoplado, conforme assinalado no capítulo 5 (item 5.2.1). Além disso, enquanto que o uso do mecanismo de filtragem tem pouca ou nenhuma influência em determinadas simulações com o modelo acoplado, mostra-se necessário para assegurar

a convergência dos resultados do modelo desacoplado quando cresce o número de Courant. Estes e outros aspectos, também assinalados no capítulo 5, embora não apresentem, do ponto de vista prático, qualquer reflexo significativo sobre o desempenho do modelo desacoplado, revelam, no mínimo, uma maior “sensibilidade” deste algoritmo, exigindo portanto cuidados na extensão da técnica proposta a outros casos de modelação.

Conforme já ressaltado em ocasiões anteriores, o modelo desacoplado 1D não apresenta, para fins de simulações de casos, nenhuma vantagem significativa em relação ao modelo convencional. Importa, sim, a equivalência dos resultados, sendo seu algoritmo fundamentalmente diferente daquele do cálculo acoplado, pelo que isso pode representar em termos de economia de espaço de memória e tempo de processamento, no caso da extensão da técnica a modelação a duas ou três dimensões (conforme discutido no capítulo 4, itens 4.3 e 4.4). Nestes casos, ainda que a modelação desacoplada condicione as simulações a restrições mais severas no espaçamento das malhas, os ganhos podem ser relevantes, com uma sensível diminuição dos custos computacionais envolvidos.

O modelo desenvolvido para canais de maré 1D mostrou-se, destarte, um exercício prático de pesquisa altamente válido, sendo recomendável. como seqüência a este trabalho, o desenvolvimento de modelos de circulação multidimensionais via elementos finitos, empregando o mesmo processo analítico-numérico de substituições sucessivas para o desacoplamento dos cálculos dos diversos parâmetros envolvidos.

\* \* \*

# Anexo 1

## Equações Gerais Dos Escoamentos

### A1.1 - Equação da Continuidade

A equação da continuidade traduz o princípio de conservação da massa, e pode ser formulada através do balanço de massa para um dado volume de controle (figura A1.1).

Tem-se assim, nas direções  $OX$ ,  $OY$ , e  $OZ$  de um sistema arbitrado de eixos cartesianos,

massa que entra

$$\rho u \Delta y \Delta z \Delta t + \rho v \Delta x \Delta z \Delta t + \rho w \Delta x \Delta y \Delta t$$

massa que sai

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y \Delta z \Delta t + \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \Delta z \Delta t + \left[ \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta z \right] \Delta x \Delta y \Delta t =$$
$$= \rho u \Delta y \Delta z \Delta t + \rho v \Delta x \Delta z \Delta t + \rho w \Delta x \Delta y \Delta t + \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

variação total da massa

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \Delta t = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Procedendo-se ao balanço de massa,

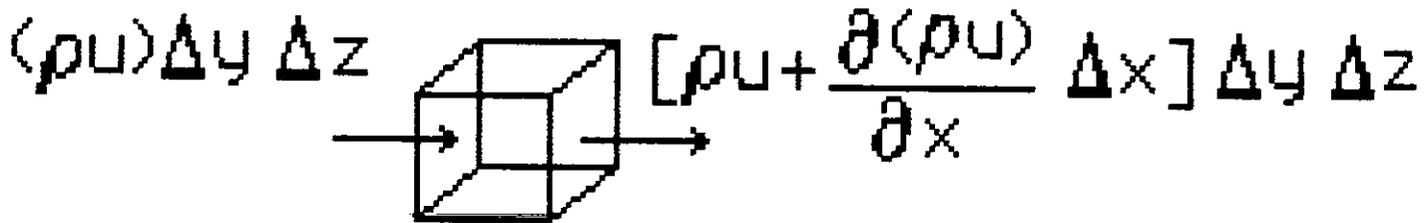
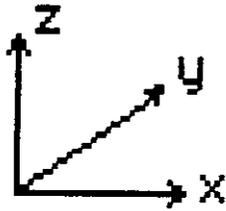


FIGURA A1.1: Variação da Massa Fluida através de um Volume de Controle na direção  $OX$

variação total da massa - (massa que entra - massa que sai) = 0, ou seja,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Esta é a forma geral da equação da continuidade a três dimensões para escoamentos fluidos, apresentada no capítulo 2 (item 2.1.1)

## A1.2 - Equações Dinâmicas

As equações dinâmicas são a expressão matemática do princípio de conservação da quantidade de movimento. Podem também ser mais facilmente apresentadas como uma expressão da segunda lei de Newton,

$$\sum \vec{F}_{externas} = m\vec{a}$$

Conforme assinalado no capítulo 2 (item 2.1.2) as forças externas podem ser de dois tipos: de superfície, atuando diretamente por contato — pressão, atrito — ou de campo (induzidas por um campo qualquer) — campo gravitacional, campo de uma aceleração centrípeta, ou outros.

As forças de superfície ou de contato podem ser representadas atuando sobre um volume de controle, em cada uma de suas faces, para cada direção (figura A1.2).

Observa-se assim que estas forças são definidas por um tensor de nove componentes,

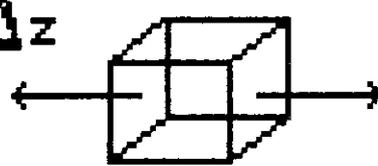
$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

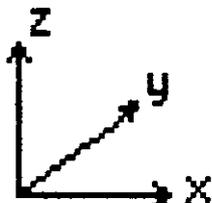
Demonstra-se que na verdade  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , restando assim seis componentes, conhecidas como componentes de Lamé (Méhauté, 1976). O somatório das forças de contato é então dado pela soma das resultantes em cada direção.

$$\begin{aligned} \sum F_{contato\ x} &= \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ \sum F_{contato\ y} &= \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \\ \sum F_{contato\ z} &= \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

No caso das forças de campo, dado um campo de aceleração qualquer, a força resultante numa partícula será:

$$F_{campo} = \text{aceleração} \times (\text{massa/volume}) \times \text{volume da partícula}$$

$$\sigma_{xx} \Delta y \Delta z \quad \leftarrow \quad \left( \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$$




$$T_{zx} \Delta x \Delta y \quad \leftarrow \quad \left( T_{zx} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta x \Delta y$$

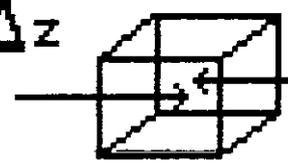

$$T_{yx} \Delta x \Delta z \quad \leftarrow \quad \left( T_{yx} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial x} \Delta x \right) \Delta x \Delta z$$


FIGURA A1.2: Forças de Contato em um Volume de Controle na direção  $Ox$

Assim, pode-se escrever que

$$F_{\text{campo } x} = a c_x \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$F_{\text{campo } y} = a c_y \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$F_{\text{campo } z} = a c_z \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

Por fim, a aceleração resultante será:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

onde a componente em cada direção corresponde, numa descrição euleriana, à chamada derivada total no tempo da velocidade naquela direção. Assim,

$$a_x = \frac{du(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Esta derivação recebe também a denominação de derivada material ou substantiva, sendo comumente representada como  $D/Dt$ . As componentes  $a_y$  e  $a_z$  são análogas, e pode-se escrever em suma que:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} \quad a_y = \frac{Dv}{Dt} \quad a_z = \frac{Dw}{Dt}$$

Voltando-se à expressão  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  obtém-se então:

$$\sum F_{\text{contato } x} + F_{\text{campo } x} = \rho \frac{Du}{Dt} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\sum F_{\text{contato } y} + F_{\text{campo } y} = \rho \frac{Dv}{Dt} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\sum F_{\text{contato } z} + F_{\text{campo } z} = \rho \frac{Dw}{Dt} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= ac_x + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dv}{Dt} &= ac_y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \frac{Dw}{Dt} &= ac_z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right)\end{aligned}$$

que constituem as equações da conservação da quantidade de movimento em sua forma mais geral, conforme apresentado no capítulo 2 (item 2.2.2).

\* \* \*

## Anexo 2

# Modelação de Turbulência

Conforme assinalado no capítulo 2 (item 2.2.1) as correlações de escala introduzidas nas equações gerais dos escoamentos pelo processo de promediação no tempo representam as trocas turbulentas: processos físicos que não possuem representação matemática, exigindo portanto modelação. Observa-se que a modelação de turbulência é um campo aberto a pesquisas, e diversos trabalhos recentes discutem as técnicas convencionais mais comumente empregadas até hoje, e propõem revisões dos modelos adotados, ou mesmo novas técnicas, em alguns casos com excelentes resultados comprovados. O presente trabalho não tem a pretensão de discutir o assunto em profundidade, visando apenas apresentar, de forma sucinta, um pouco do estado da arte neste campo. A exposição a seguir baseia-se em Rodi (1984).

Os modelos mais utilizados são de dois tipos, a saber: utilizando o conceito de viscosidade turbulenta (aproximação de Boussinesq), e modelos de fechamento de segunda ordem. Os primeiros baseiam-se no princípio de que o estado de turbulência é caracterizado por uma escala de velocidades, e esta é relacionada com as tensões viscosas. Já os modelos de fechamento de segunda ordem consideram por princípio que, ainda que se caracterize adequadamente o transporte de escala de velocidades, o transporte de turbulência é mal avaliado. Partem assim para o estabelecimento de

equações diferenciais de transporte para as tensões turbulentas. Embora contando, deste modo, com equações bem justificadas, acrescentam ao problema muitos termos por modelar, e de maior complexidade matemática, sendo por estes motivos pouco utilizados na prática até hoje.

Boussinesq, em 1877, propôs uma expressão para as tensões turbulentas análoga a das tensões viscosas, advindo daí o conceito de viscosidade turbulenta. Há modelos de turbulência simples que admitem uma viscosidade turbulenta constante; sua aplicação é em geral restrita a problemas em que os efeitos do transporte de turbulência nas equações dinâmicas não são significativamente importantes. Um pouco mais genéricos são os modelos que relacionam a viscosidade turbulenta diretamente com o campo de velocidades médias, sendo o primeiro e mais conhecido o modelo de Prandtl, de 1925. Os modelos mais generalizáveis dentre os que se baseiam em Boussinesq, são aqueles utilizando equações de energia; especificamente, os chamados modelos  $k-\epsilon$ , nos quais a viscosidade turbulenta é assumida como sendo igual a:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

onde  $C_\mu$  é uma constante empírica,  $k$  a energia cinética e  $\epsilon$  um termo dissipativo. São então escritas equações diferenciais de transporte para  $k$  e  $\epsilon$ . O “preço” do fechamento assim obtido é o ajuste necessário de um certo número de constantes empíricas destas equações.

\* \* \*

## Anexo 3

# Equações Governantes 2DH

O presente anexo apresenta a integração vertical das equações governantes (da continuidade e da conservação da quantidade de movimento) para modelação de corpos d'água rasos.

No capítulo 2 (item 2.3), foram assinaladas as condições de contorno necessárias à integração. Lembrando ainda que

$$H(x, y, t) = h(x, y) + \eta(x, y, t)$$

e assim,

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} (x, y, t) = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\eta} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (x, y, z, t) dz$$

pode-se então proceder à integração de cada uma das equações governantes, empregando-se a regra de Lienitz para os termos diferenciais.

Tomando-se a equação da continuidade (capítulo 2, item 2.1.1, equação 2.2)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

e efetuando-se a integração vertical advém:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + u|_{z=-h} \frac{\partial (-h)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz -$$

$$u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + u|_{z=-h} \frac{\partial(-h)}{\partial y} + w|_{z=\eta} - w|_{z=-h} = 0$$

Aplicando as condições de contorno e fazendo as integrações necessárias chega-se a:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} H \hat{u} + \frac{\partial}{\partial y} H \hat{v} = 0$$

que é a forma final da equação da continuidade 2DH, conforme apresentada no capítulo 2 (item 2.3.1).

A equação dinâmica na direção  $OX$  (ver capítulo 2, item 2.1.4) pode ser escrita na forma:

$$\frac{Du}{Dt} = \Omega v + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right)$$

Integrando esta equação na profundidade tem-se:

$$\begin{aligned} H \frac{D\hat{u}}{Dt} = H\Omega\hat{v} &+ \frac{1}{\rho} \left( \int_{-h}^{\eta} \eta \sigma_{xx} dz - \sigma_{xx}^{SL} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \sigma_{xx}^{FDO} \frac{\partial h}{\partial x} + \right) \\ &\frac{1}{\rho} \left( \int_{-h}^{\eta} \eta \tau_{xy} dz - \tau_{xy}^{SL} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \tau_{xy}^{FDO} \frac{\partial h}{\partial y} + \right) \\ &\frac{1}{\rho} \left( \int_{-h}^{\eta} \eta \tau_{xz} dz - \tau_{xz}^{SL} \frac{\partial \eta}{\partial z} - \tau_{xz}^{FDO} \frac{\partial h}{\partial z} + \right) \end{aligned}$$

Para lidar com os valores de tensões especificados na superfície livre (SL) e no fundo (FDO), aplicam-se as condições de contorno dinâmicas: as tensões no fluido devem ser iguais às tensões do vento na superfície e de atrito no fundo. Assim, na superfície:

$$\sigma_{xx}n_x + \tau_{xy}n_y + \tau_{xz}n_z = \tau_x^V$$

onde

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = \frac{\vec{\nabla} \cdot S}{|\nabla \cdot \vec{S}|}$$

sendo

$$\vec{\nabla} \cdot S = \left( -\frac{\partial \eta}{\partial x}, -\frac{\partial \eta}{\partial y}, -\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)$$

E no fundo:

$$\sigma_{xx}n'_x + \tau_{xy}n'_y + \tau_{xz}n'_z = \tau_x^B$$

onde

$$\vec{n}' = (n'_x, n'_y, n'_z) = \frac{\vec{\nabla} \cdot B}{|\nabla \cdot \vec{B}|}$$

sendo

$$\vec{\nabla} \cdot B = \left( \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

Lembrando ainda, do item 2.1.2, que

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

e sendo as derivadas parciais de  $p$  em  $x$  e  $y$  conhecidas em função da substituição da equação dinâmica na direção  $OZ$  pela aproximação hidrostática (ver capítulo 2, item 2.2.2), pode-se reescrever a equação integrada como:

$$\begin{aligned} H \frac{D\hat{u}}{Dt} = H\Omega\hat{v} &+ \frac{1}{rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h} \eta \left( -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) dz + \\ &\frac{1}{rho} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h} \eta \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dz \\ &\frac{1}{rho} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-h} \eta \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dz \\ &\frac{1}{rho} \left( \tau_x^V | \vec{\nabla} \cdot S | - \tau_x^B | \vec{\nabla} \cdot B | \right) \end{aligned}$$

Efetuada as integrações restantes, e adotando-se a aproximação de Boussinesq para as tensões turbulentas (capítulo 2, item 2.2.1, e anexo 2). chega-se a:

$$H \frac{D\hat{u}}{Dt} = -Hg \frac{\partial \eta}{\partial x} + \Omega \hat{v} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ HK_{xx} \left( 2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ HK_{xy} \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \right] \right\} \\ + \frac{1}{\rho} \left( \tau_x^v | \vec{\nabla} \cdot S | - \tau_x B | \vec{\nabla} \cdot B | \right)$$

Analogamente, na direção  $OY$  tem-se:

$$H \frac{D\hat{v}}{Dt} = -Hg \frac{\partial \eta}{\partial y} - \Omega \hat{u} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ HK_{yx} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ HK_{yy} \left( 2 \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} \right) \right] \right\} \\ + \frac{1}{\rho} \left( \tau_y^v | \vec{\nabla} \cdot S | - \tau_y B | \vec{\nabla} \cdot B | \right)$$

Estas equações constituem-se assim na expressão das equações dinâmicas a duas dimensões, via integração na profundidade (2DH), conforme apresentadas no capítulo 2, item 2.3.1.

\* \* \*

## Anexo 4

# As Equações de Saint-Venant

As equações de Navier-Stokes unidimensionais podem ser obtidas através de integrações sucessivas das equações a três dimensões, do mesmo modo que é feito no caso das equações a duas dimensões — conforme demonstrado anteriormente, no anexo 3. Sendo largamente empregadas em Engenharia Hidráulica, nos estudos referentes a escoamentos em rios e canais, são também conhecidas como as equações de Saint-Venant, ou equações do escoamento gradualmente variado não permanente em canais. Sua dedução, alternativamente, pode ser feita de modo análogo à dedução das equações de Navier-Stokes — ver anexo 1 — tomando-se uma trecho infinitesimal de um canal, conforme apresentado na figura A4.1, identificando-se os seguintes termos:

- $Q$  - vazão afluente ao trecho;
- $A$  - área molhada da seção transversal;
- $B$  - largura superficial;
- $\eta$  - cota da superfície livre;
- $P_M$  - perímetro molhado da seção transversal;

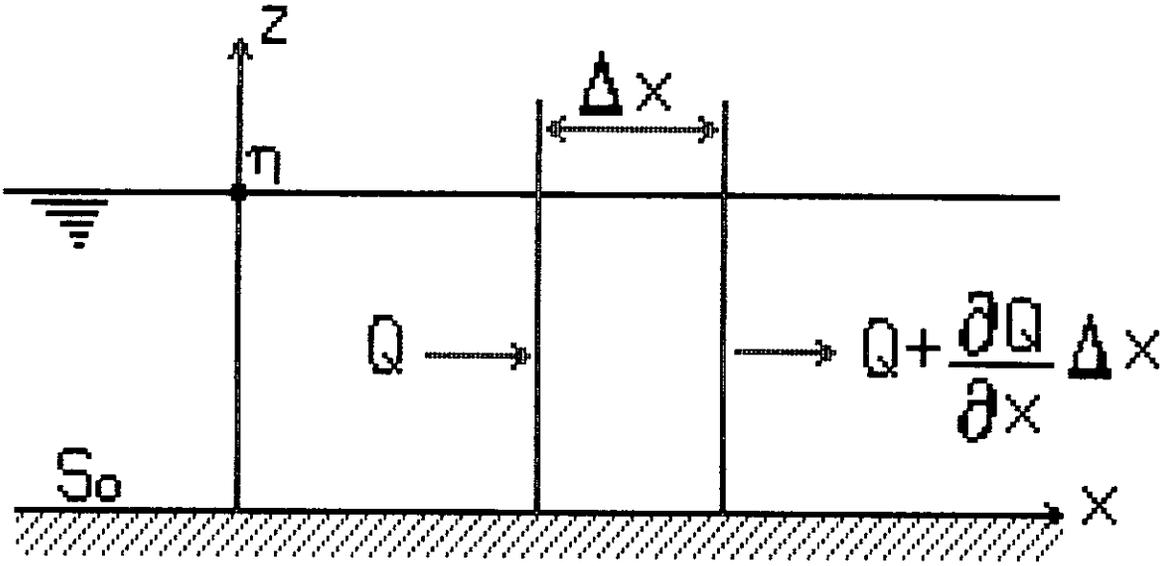


FIGURA A4.1: Escoamento em Canais (i)

- $q_L$  - vazão lateral;
- $S_0$  - declividade média do fundo.

A vazão efluente é expressa, conforme mostrado na figura A4.1, por uma expansão em série de Taylor, tomando-se apenas os dois primeiros termos. Pelo princípio da conservação da massa pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$-\rho \frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x = \rho \frac{\partial A}{\partial t} \Delta x + \rho q_L \Delta x$$

Simplificando, obtém-se a expressão final da equação da continuidade  $1D$ , conforme apresentada no capítulo 2, item 2.4.1:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q_L = 0$$

A equação dinâmica, ou da conservação da quantidade de movimento  $1D$  é obtida do mesmo modo que na dedução das equações de Navier-Stokes (item 2.1.2), pela

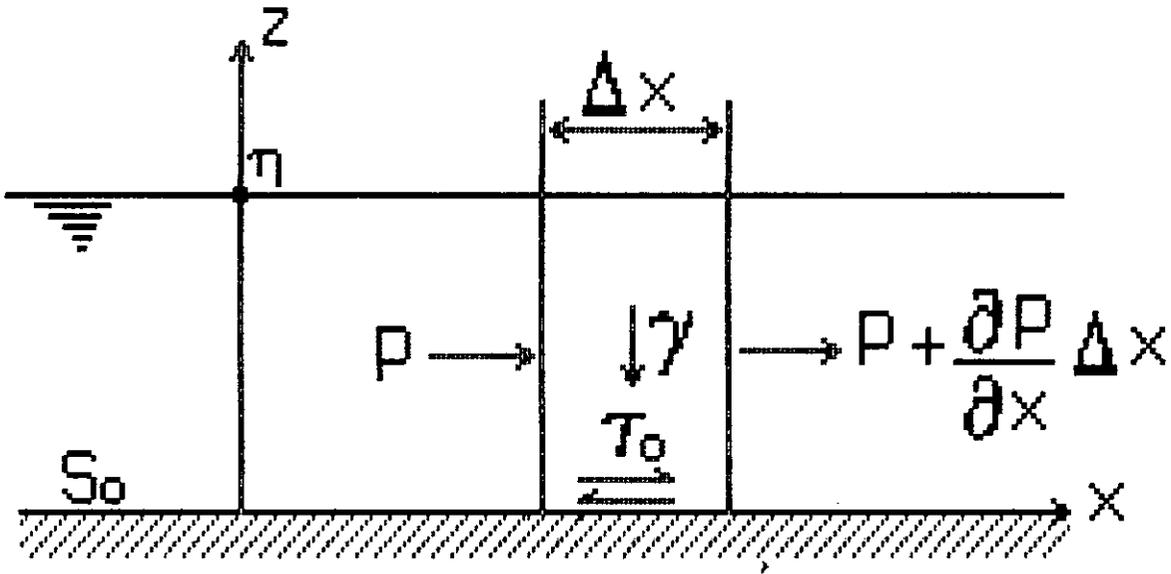


FIGURA A4.2: Escoamento em Canais (ii)

segunda lei de Newton,  $\sum \vec{F}_{externas} = m\vec{a}$ . As forças externas de contato são o atrito e a pressão, e considera-se como força de campo apenas o peso próprio (figura A4.2). Assumindo-se distribuição hidrostática de pressões, e sendo as variações das propriedades do escoamento no trecho dadas pela expansão em série de Taylor (dois primeiros termos), pode-se então escrever

$$\rho A \Delta x \frac{Du}{Dt} = \gamma A \Delta x S_0 - \gamma \frac{\partial \eta}{\partial x} \Delta x A - \tau_0 P_M \Delta x$$

sendo

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Fazendo a substituição e dividindo-se ambos os lados por  $\rho A \Delta x$ , tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g S_0 - \frac{\tau_0}{\rho R}$$

onde  $R = A/P$  (raio hidráulico). Para canais com escoamento permanente e uniforme demonstra-se que

$$\frac{\tau_0}{\gamma R} = S_f$$

sendo  $S_f$  a declividade da linha energética. Pode-se então reescrever a equação do movimento como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + g(S_0 - S_f)$$

que é a expressão final da equação dinâmica 1D, conforme apresentado no capítulo 2, item 2.4.1.

\* \* \*

# Bibliografia

1. ABBOTT, M. B. e BASCO, D. R. (1989). "Computational Fluid Dynamics — An Introduction for Engineers". Longman Scientific & Technical, // Nova York.
2. CALIXTO, Robson José (1990). "Estabilidade Hidráulico-Sedimentológica de Embocaduras de Canais de Maré — O Caso da Lagoa Rodrigo de Freitas - RJ". Tese de Mestrado, PEnO, COPPE-UFRJ.
3. DONGARRA, J. J., BUNCH, J. R., MOLER, C. B. and STEWART, G. W. (1979). "LINPACK User's Guide". SIAM, Filadélfia.
4. LE MÉHAUTÉ, Bernard (1976). "An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves". Springer-Verlag, Nova York.
5. RAUDKIVI, A. J. e CALLANDER, R. A. (1975). "Advanced Fluid Mechanics — An Introduction". Edward Arnold (Publishers), Londres.
6. RODI, Wolfgang (1984). "Turbulence Models and their Application in Hydraulics — A State of the Art Review". Von Karman Institute for Fluid Dynamics, Univ. Karlsruhe, Alemanha.
7. ROSMAN, Paulo Cesar C. (1987). "Modeling Shallow Water Bodies Via Filtering Techniques". PhD Thesis, Department of Civil Engineering. Massachusetts Institute of Technology.

\* \* \*