Instituto de Física

Licenciatura Noturna de Física

PROJETO DE INSTRUMENTAÇÃO DE FINAL DE CURSO

USO DE INFINITÉSIMOS EM AULAS DE FÍSICA NO ENSINO MÉDIO

Aluno: Leonardo Neto do Carmo

Orientador: Prof. Adir Moysés Luiz

SETEMBRO DE 2010

AGRADECIMENTOS

Agradeço sobretudo aos meus pais que sempre tiveram minha educação como prioridade, que mesmo com as inúmeras dificuldades financeiras pelas quais passamos, nunca deixaram de financiar os meus estudos. Agradeço ao professor Adir Moysés Luiz e aos demais membros da banca por toda a atenção que deram a este trabalho. Ao escritor Cleber Monteiro Muniz por me revelar muitas das verdades dolorosas da vida e por me ensinar que a verdadeira felicidade só pode ser encontrada dentro de nós mesmos. Ao Professor José Luiz dos Santos do Colégio Brigadeiro Newton Braga, cuja ajuda foi fundamental para que eu concluísse o estágio. Por fim, agradeço aos meus amigos Flávio Carvalho Silva Fortini e Nivaldo Marschalk Filho, cujo apoio foi muito importante para que eu deixasse para trás os anos de depressão.

RESUMO

Este trabalho trata sobre como os infinitésimos podem ser aplicados ao ensino da física no ensino médio. Mostrarei que os infinitésimos podem ser utilizados para aclarar aspectos conceituais, demonstrar propriedades ou fórmulas e abordar novos elementos.

São feitas considerações históricas sobre a utilização dos infinitésimos e uma exposição sobre as operações infinitesimais que serão utilizadas no decorrer da dissertação. Analiso como os infinitésimos podem ser usados nos estudos da cinemática (escalar e vetorial), trabalho, corrente e potência elétrica num receptor elétrico.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 O objetivo deste trabalho

Todo o desenvolvimento e estudo da física se apóia sobre a idéia fundamental de grandeza; basicamente, uma grandeza é todo conceito que exprime quantitativamente e qualitativamente uma propriedade de determinado corpo ou fenômeno natural. Essa descrição qualitativa e quantitativa de certa propriedade de um corpo ou fenômeno é obtida por intermédio da "medição", procedimento que consiste em obter o valor da grandeza correspondente em função de um valor padrão (unidade), de mesma natureza.

Quando uma grandeza física é definida, é imprescindível que sua definição estabeleça o modo como seu valor é obtido. No caso de uma grandeza fundamental, a definição deve conter os procedimentos utilizados para obter sua unidade e medí-la. Já para uma grandeza derivada, a definição deve englobar a expressão matemática que lhe dá origem [1] [2] .

Sendo as grandezas físicas utilizadas para descrever quantitativamente qualidades de corpos e fenômenos, e uma vez que as grandezas derivadas são dadas por relações matemáticas, decorre que as grandezas físicas são de natureza fortemente matemática. Ora, se os blocos fundamentais utilizados para a construção da física possuem caráter acentuadamente matemático, então o estudo da física fatalmente exigirá o domínio de certas ferramentas matemáticas, sem as quais inviabiliza-se uma compreensão adequada.

Grande parte das grandezas físicas possuem definições que envolvem conceitos do cálculo diferencial e integral, o que representa um obstáculo ao ensino da física no ensino médio, onde o cálculo diferencial e integral há muito foi eliminado.

Nas décadas de 50 e 60, os alunos do curso secundário aprendiam cálculo diferencial e integral, o que acontecia no então chamado terceiro ano colegial. O programa para o ensino de matemática no terceiro ano colegial incluía o ensino de limites, derivadas e integrais. Nessas 2 décadas, a presença do cálculo diferencial e integral não se restringia apenas aos livros de matemática, integrais e derivadas também compareciam nos livros de física. A partir da década de 70, curiosamente quando o ensino brasileiro entrou num processo de acentuada decadência, o estudo do cálculo diferencial e integral no ensino secundário foi tornando-se cada vez mais incompleto e relapso. O enfraquecimento do ensino de cálculo no secundário fez com que, na década de 80, o conteúdo ministrado se resumisse a limites e derivadas ; também nessa época, já não se publicavam livros de física para o secundário que utilizassem integrais e derivadas. Finalmente, na década de 90, o cálculo foi completamente banido do secundário.

A falta do cálculo no ensino médio produz diversas deficiências ao aprendizado e ensino da física, como falta de compreensão conceitual, impossibilidade de se demonstrar certas propriedades ou fórmulas (obrigando o uso de conceitos decorados), restrição de conteúdo etc. Várias dessas deficiências serão abordadas no transcorrer desse trabalho.

Muitos dos obstáculos ocasionados pela ausência do cálculo diferencial e integral no ensino médio podem ser superados através da utilização de infinitésimos, ou melhor, por intermédio da adaptação dos infinitésimos ao ensino de física ("adaptação" porque nesse trabalho não será utilizada a definição estrita de infinitésimo, isto é, número não nulo cujo módulo é menor que qualquer quantidade positiva[3]; mas sim quantidades muito pequenas). Através do uso de quantidades ínfimas, pode-se demonstrar propriedades e fórmulas que, no ensino médio, ficam somente sob o jugo da memorização. Assim como novos conteúdos podem ser abordados.

Esse trabalho tem por objetivo apresentar soluções às dificuldades geradas pela falta do cálculo diferencial e integral no ensino médio, empregando-se para isso os infinitésimos, ou melhor, quantidades muito pequenas. Embora muitos dos pontos aqui apresentados possam ser aplicados ao aluno comum, esse trabalho tem como foco o aluno com conhecimentos matemáticos mais sólidos. Ele também atende ao meu plano de escrever um livro de física que faça largo uso de infinitésimos em demonstrações, o que seria particularmente útil para vestibulandos e professores IME-ITA.

1.2 Abordagem e metodologia

Esse trabalho expõe como os infinitésimos podem ser aplicados ao ensino de física, mais precisamente ao ensino da mecânica e da eletricidade. A esmagadora maioria das aplicações aqui mostradas relacionam-se com a mecânica. No que diz respeito à termodinâmica e física ondulatória, nada foi escrito; em ambas as áreas há forte utilização de funções de 2 variáveis , o que dificulta a abordagem infinitesimal sem o uso de resultados já conhecidos do cálculo diferencial e integral.

Ao iniciar o estudo de cada assunto, procurou-se traçar um análise parcial sobre a abordagem dos livros didáticos, exceto no capítulo 5. Cada assunto não foi abordado em sua plenitude, apenas foram expostos os elementos necessários para uma compreensão adequada do tema proposto por esse trabalho.

No capítulo 2 faço considerações históricas sobre o uso de infinitésimos e trato sobre as operações com infinitésimos que serão utilizadas no decorrer deste trabalho.

No capítulo 3 exponho como os infinitésimos podem ser utilizados no ensino da cinemática escalar, cinemática vetorial e no ensino do tema trabalho e energia.

No capítulo 4 mostro como os infinitésimos podem ser utilizados para explicar a gênese da grandeza corrente e demonstrar a fórmula que expressa a potência total utilizada por um receptor elétrico.

No capítulo 5 apresento as conclusões da monografia.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Os infinitésimos

Um infinitésimo é um número não nulo cujo módulo é menor que qualquer quantidade positiva [3]. Os infinitésimos possuem uma história de mais de dois mil anos e tiveram um papel fundamental para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, sendo utilizados por muitos matemáticos e cientistas.

Arquimedes de Siracusa (287 – 212 A.C.) utilizou infinitésimos para calcular o centro de gravidade de certos volumes e superfícies planas. Arquimedes considerava as superfícies planas como formadas por um número infinito de segmentos de reta (ou retângulos de espessura infinitamente pequena). Já no caso dos sólidos, Arquimedes os considerava como constituídos por um número infinito de discos circulares de espessura zero (infinitamente pequena). Arquimedes chamava esses segmentos de reta e discos de "indivisíveis" [4].

Johannes Kepler (1571 - 1630), em seus estudos sobre o movimento dos planetas, utilizou infinitésimos para calcular a área de setores de elipses. Kepler dividia os setores elípticos em triângulos infinitesimais, a área do setor seria então dada pelo somatório das áreas desses triângulos. Kepler também utilizou infinitésimos para calcular o volume de sólidos de revolução, ele os considerava como a soma de discos circulares infinitesimais [4] [5] [6].

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), aluno de Galileu , desenvolveu o "Método dos Indivisíveis de Cavalieri". O tratado de Cavalieri é pouco objetivo e carece de clareza, seu conceito de "indivisível" não ficou suficientemente inteligível. Mas tudo indica que o "indivisível" de uma superfície plana seja uma corda (um retângulo de espessura infinitésima). E o "indivisível" de um sólido seja dado por uma seção desse sólido (volume delimitado por duas seções paralelas e separadas por uma distância infinitésima) [4] [5].

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) interpretava toda curva como um somatório de segmentos de reta infinitesimais. Ele também considerava a superfície sob o gráfico de uma função como dada por um somatório de retângulos infinitesimais (ver equação 2 mais adiante) [4].

Apesar de os infinitésimos terem sido largamente utilizados por cientistas e matemáticos, e de terem produzido incontáveis resultados válidos, esses sempre foram alvo de muitas críticas e questionamentos. O próprio conceito de "número não nulo cujo módulo é menor que qualquer quantidade positiva" carece de formalismo matemático, não existe tal número.

Arquimedes, ao usar seus "indivisíveis" para calcular o centro de gravidade de determinados volumes e superfícies planas, admitiu que seu trabalho carecia de um rigor lógico completo. Em outros trabalhos, Arquimedes utilizou os infinitésimos em caráter puramente heurístico, posteriormente demonstrando rigorosamente seus resultados [4] [5].

Christiaan Huygens (1629 – 1695) considerava o Método dos Indivisíveis de Cavalieri como meio de encontrar novos resultados, mas não como demonstração. Huygens considerava os infinitésimos introduzidos por Cavalieri como forma de facilitar novos desenvolvimentos ou descobertas, como um método intuitivo e desprovido de rigor matemático utilizado para a construção de novos conhecimentos (método heurístico) [4].

Leibniz também teve problemas para estabelecer os fundamentos de seu cálculo; algumas vezes encarava seus infinitésimos como quantidades finitas, outras vezes os interpretava como números menores que qualquer quantidade significativa. Newton também enfrentou essa dificuldade [4] [7].

O cálculo baseado em infinitésimos carecia de rigor lógico aceitável, de formalismo matemático. Crescia entre a comunidade de matemáticos o desejo por um cálculo mais preciso. Isso se deu na década de 1780, quando a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para o matemático que desenvolvesse um formalismo rigoroso para o cálculo. O vencedor foi Simon Antoine Jean L'Huillier (1750 – 1840), que introduziu o conceito de limite [8].

Nos anos subsequentes, o formalismo desenvolvido por L'Huillier foi aperfeiçoado por Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), em seus cursos na École Polytechnique. Outros elementos do cálculo moderno foram introduzidos por matemáticos como Karl Weierstrass (1815 - 1897), Bernard Bolzano (1781 – 1848) etc. [8]

Com o estabelecimento de um formalismo rigoroso para o cálculo, os matemáticos preferiram abolir os infinitésimos da matemática (lembrando que os infinitésimos foram reabilitados à matemática por Abraham Robinson (1918 – 1974), na década de 1960) [9][10]. Porém, físicos e engenheiros continuaram a utilizar largamente os infinitésimos, e ainda utilizam. Mesmo em livros de cálculo, encontramos infinitésimos.

O difuso uso de infinitésimos por físicos e engenheiros se deve a sua eficiência, praticidade e natureza intuitiva. O uso de infinitésimos produz resultados válidos mais rapidamente e ocupa menos espaço que limites, integrais de Riemann etc., além de possibilitarem uma compreensão mais profunda sobre o problema estudado (por serem mais intuitivos, facilitam a visualização).

Ademais, a maioria dos físicos e engenheiros prefere pensar nos infinitésimos como números de módulo finito, mas extremamente pequenos (esse será o ponto de vista adotado nesse trabalho). Isso elimina o desconforto causado pela definição:"Um infinitésimo é um número não nulo cujo módulo é menor que qualquer quantidade positiva."

Por mais que a maioria dos matemáticos evite usar os infinitésimos em sua prática (principalmente os que se dedicam à análise) , o uso de infinitésimos por físicos e engenheiros permanece consistente e inalterado. Sua natureza fecunda lhes garantirá uso por mais muitos e muitos anos.

2.2 Operações com infinitésimos

Abordarei aqui as operações com infinitésimos que serão utilizadas no decorrer deste trabalho, são elas: derivação, integração e integração de linha.

Dada uma função f(x), sua função derivada é tradicionalmente definida como:

$$\frac{df}{dx} = \mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Mas essa é a definição utilizada no cálculo moderno, no cálculo baseado em limites. No cálculo estritamente infinitesimal, onde o conceito de limite é substituído pelo uso de infinitésimos, a derivada de uma função f(x) é dada por:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \qquad (1)$$

Onde dx é um infinitésimo.

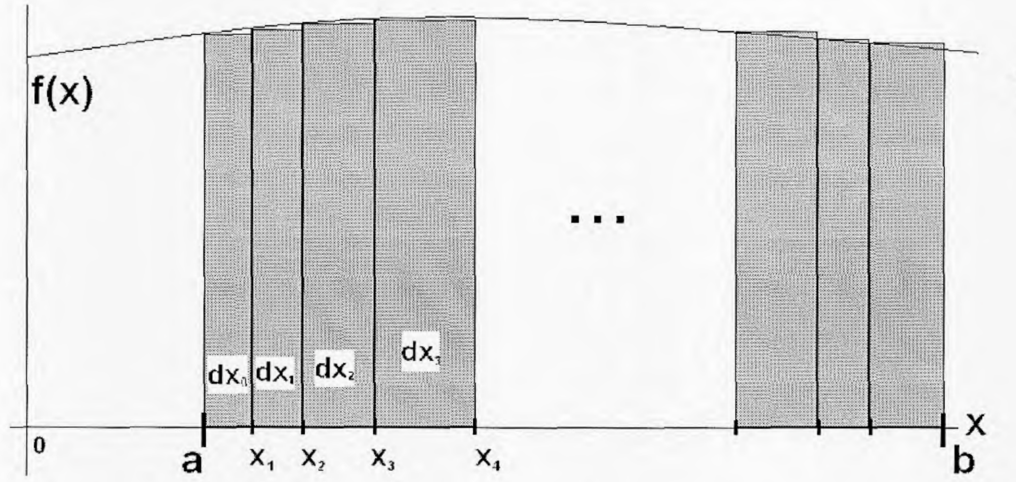
No cálculo baseado em limites, a área A sob o gráfico de uma função f(x) é dada pelo limite de uma soma de Riemann:

$$A = \mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0} \left(\sum f(x)\Delta x\right) = \int f(x)dx$$

Já no cálculo baseado em infinitésimos, a área A sob o gráfico de uma função f(x) é dada por:

$$A = \sum f(x)dx = \int f(x)dx \tag{2}$$

Isto é, a área é dada pelo somatório das áreas dos retângulos infinitesimais sob o gráfico de f(x) (figura 1).



$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)dx_0 + f(x_1)dx_1 + f(x_2)dx_2 + f(x_3)dx_3 + \ldots = S$$

Figura 1. A área sob o gráfico de uma função f(x) é dada pelo somatório das áreas dos retângulos infinitesimais sob o gráfico.

Dada uma função vetorial **F**, a integral de linha dessa função sobre uma curva C, no cálculo baseado em limites, é dada por:

$$S = \mathrm{Lim}_{\Delta r \to 0}\left(\sum \mathbf{F} \bullet \Delta \mathbf{r}\right) = \int_c \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$

Porém, no cálculo baseado em infinitésimos, a integral de linha de uma função vetorial **F** sobre uma curva C (figura 2) é dada por:

$$S = \sum \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_c \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \tag{3}$$

Onde d**r** representa sucessivos deslocamentos infinitesimais superpostos à curva C.

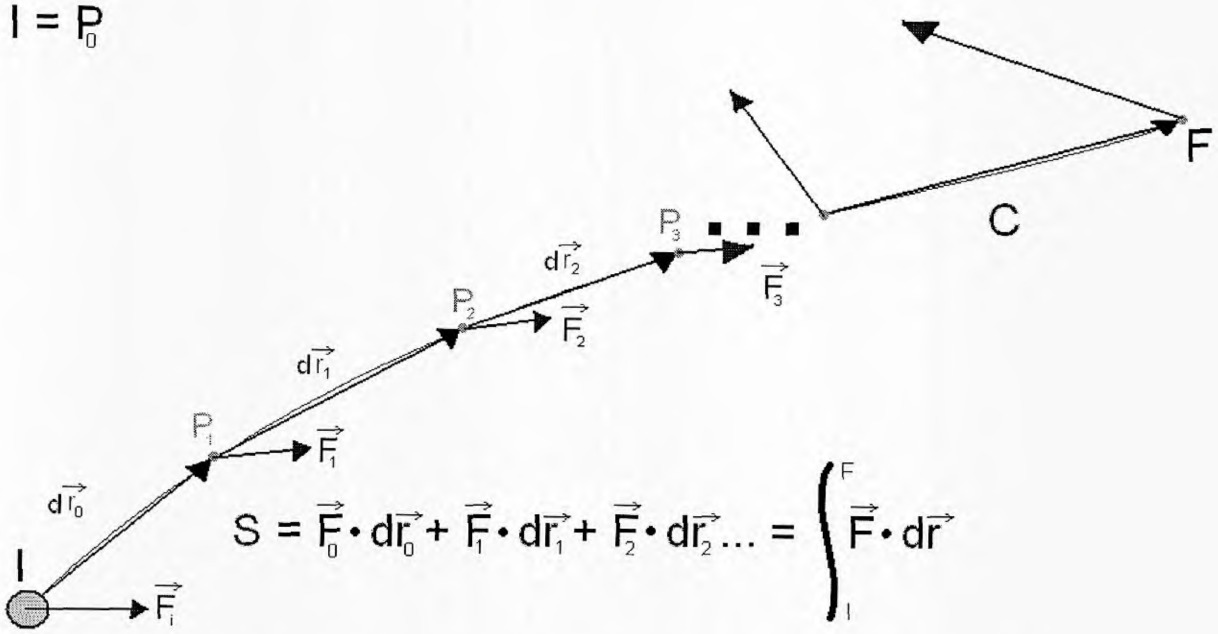


Figura 2. A integral de linha de uma função vetorial **F** sobre uma curva C é dada pelo somatório dos produtos escalares **F•dr**.

Nesse trabalho, não será utilizado o cálculo baseado em limites, mas sim o cálculo baseado em infinitésimos.

Nas operações acima, cada infinitésimo é uma quantidade de módulo infinitamente pequeno. Porém, nos próximos capítulos, adotarei a concepção que físicos e engenheiros tem sobre infinitésimos, isto é, os infinitésimos como quantidades extremamente pequenas, mas não infinitamente pequenas. Também utilizarei uma notação diferente para designá-los.

3 APLICAÇÕES DOS INFINITÉSIMOS NO ENSINO DA MECÂNICA

3.1 O uso de infinitésimos no ensino da cinemática escalar

3.1.1 Introdução

A cinemática é o ramo da física que estuda o movimento dos corpos, sem se preocupar com as causas (forças) que lhe dão origem [1]. O estudo da cinemática baseia-se mormente sobre os conceitos de posição, velocidade e aceleração. Muitos dos resultados e definições da cinemática envolvem conceitos do cálculo diferencial e integral, o que representa um problema para o ensino da cinemática no ensino médio, onde o cálculo há muito foi banido.

Velocidade e aceleração são dadas por derivadas, conceito não lecionado aos estudantes do ensino médio, o que resulta numa compreensão reduzida por parte do aluno. Percebe-se que o aluno aprende a calcular a velocidade e a aceleração, mas tem uma idéia muito vaga sobre o que essas são.

A seguinte propriedade:

"A área sob o gráfico da velocidade (aceleração) fornece a variação da posição (velocidade)."

De extrema importância no estudo da cinemática, procede da operação de integração, algo não ensinado ao estudante do ensino médio. Prevalecendo então simples memorização sem entendimento. Infelizmente, no que diz respeito à cinemática, prevalece a simples memorização e o "sei calcular, mas não faço a mínima idéia do que estou calculando".

Essa compreensão falha que cerca o estudo da cinemática é reforçada pela maneira que professores e livros didáticos tratam o assunto. Analisarei parcialmente a abordagem feita por alguns livros didáticos, identificando os pontos que considero críticos, que são: velocidade instantânea, aceleração instantânea e a relação entre a área sob o gráfico da velocidade (aceleração) e a variação da posição (velocidade).

No livro "Física Fundamental" [11], consta a seguinte explicação para a velocidade instantânea:

"*Consideremos que você esteja dirigindo um carro numa estrada.*

Suponhamos também que você anote a velocidade do carro no decorrer do tempo, obtendo a tabela ao lado (tabela colocada abaixo) .

Tempo ou horário	*Velocidade em km/h*
7 h	*60*
7 h 15 min	*80*
7 h 40 min	*50*
8 h	*20*

Tabela 1.

O valor da velocidade do carro num determinado instante denomina-se velocidade escalar instantânea.

Exemplo:

Às 7 h o velocímetro estava marcando 60 km/h. Isto significa que no instante t = 7 h a velocidade do carro era 60 km/h, isto é, o carro percorreria 60 km se mantivesse a velocidade assinalada naquele instante" (páginas 20 e 21) [11].

A explicação dada pelos autores do livro "Física Fundamental" pode ser resumida a: "Velocidade instantânea é o que velocímetro marca."

Definir a velocidade instantânea simplesmente como a velocidade num determinado instante deixa uma série de questões em aberto. Como posso obter a velocidade num instante se, quando calculo a velocidade média, faço uso de um intervalo de tempo? Nada pode deslocar-se em um instante, como posso obter uma velocidade sem deslocamento? O que é a velocidade instantânea afinal, o que ela representa e como pode ser calculada? A definição de velocidade dada pelos autores não é fisicamente aceitável; quando definimos uma grandeza física, não deve haver dúvidas sobre como podemos calculá-la.

Quando os autores tratam sobre a aceleração instantânea, embora desta vez o façam de maneira fisicamente aceitável, prevalece novamente uma explicação incompreensível para o aluno de ensino médio (ao menos na esmagadora maioria das vezes):

"A aceleração instantânea é a que corresponde a um instante dado.

Para tanto devemos reduzir cada vez mais o intervalo de tempo, tornando-o próximo de zero.

A definição matemática é:

$$a = lim_{\Delta t \to 0}\, a_m = lim_{\Delta t \to 0}\, (\Delta v/\Delta t)$$

Em que a é a aceleração escalar instantânea."

Para o aluno de ensino médio, o conceito de limite é completamente estranho. Os autores erram ao não tratar o conceito de limite com maior profundidade, ao não dar alguns exemplos simples envolvendo limites. Para o aluno, $a = lim_{\Delta t \to 0}\ a_m = lim_{\Delta t \to 0}\ (\Delta v/\Delta t)$ não faz sentido algum, ficando o conceito de aceleração instantânea ininteligível.

Ainda no livro "Física Fundamental", quando os autores expõem a relação entre a área sob o gráfico da velocidade (aceleração) e a variação da posição (velocidade), o fazem sem nenhum tipo de demonstração (páginas 30, 41 e 47) [11]. Simplesmente assumem que a área sob o gráfico da velocidade (aceleração) fornece a variação da posição (velocidade), ficando o aluno com mais uma coisa para decorar.

Alberto Gaspar, em seu livro "Física" [12], fornece a seguinte explicação para a velocidade instantânea: *"Quando o intervalo de tempo em que se mede o deslocamento é infinitamente pequeno, ou seja, quanto o intervalo de tempo é um instante ($\Delta t \to 0$), a velocidade média é a velocidade nesse instante. Portanto, nesse caso, a velocidade média é igual à velocidade instantânea"*(página 34) [12].

Já para a aceleração instantânea, Gaspar diz:

"... aceleração instantânea é a aceleração média num instante, ou seja, num intervalo de tempo infinitamente pequeno ($\Delta t \to 0$)" (página 35) [12].

Gaspar peca por não exemplificar como velocidade e aceleração instantâneas podem ser calculadas a partir do chamado "intervalo infinitamente pequeno", algo que facilitaria a assimilação dos conceitos; bem como por não esclarecer porque aceleração e velocidade instantâneas recebem essas definições. Do modo como essas definições foram apresentadas, são completamente ignoradas pelos alunos, que, além de não entenderem, não vêem aplicação.

Gaspar, ao tratar da relação existente entre a área sob o gráfico da velocidade (aceleração) e a variação da posição (velocidade), também o faz sem nenhum tipo de demonstração. O aluno novamente se vê obrigado a simplesmente memorizar (páginas 42 e 46) [12].

Antônio Máximo e Beatriz Alvarenga, em seu livro "Física"[13], definem a velocidade instantânea da seguinte forma: *"se um corpo está em movimento variado, sua velocidade instantânea, ao passar por uma dada posição, é dada pelo valor da velocidade média $V_m = d/t$, sendo t o menor possível[1]"* (página 44) [13].

A semelhança de Alberto Gaspar, Antônio Máximo e Beatriz Alvarenga não dão qualquer tipo de informação sobre como a velocidade pode ser calculada a partir de um "t o menor possível", nem esclarecem o porquê da definição supracitada.

Antônio e Beatriz só definem a aceleração para o movimento uniformemente acelerado (página 46) [13], o que representa uma perda de generalidade e restrição de conteúdo enormes.

Embora o M.U.V. seja o movimento mais complexo estudado pelos alunos de ensino médio, como os alunos poderão resolver questões que envolvam a área sob o gráfico da aceleração? Se eles só conhecem aceleração constante, como reagirão a um gráfico com aceleração variável?

Antônio e Beatriz não tratam sobre a relação existente entre a área sob o gráfico da velocidade (aceleração) e a variação da posição (velocidade), relegando uma propriedade de suma importância.

José Luiz Sampaio e Caio Sérgio Calçada, em seu livro "Universo da Física", volume 1 [14], definem a velocidade instantânea e a aceleração instantânea de maneira idêntica ao visto no livro "Física Fundamental" (páginas 60 e 95)[14]. Porém, os autores tiveram a preocupação de introduzir conceitos do cálculo diferencial e integral nos "complementos" (páginas 73 e 134)[14], garantindo assim uma boa explicação. De fato, o estudante que se dispuser a ler as páginas de complemento, terá a melhor explicação sobre velocidade e aceleração disponível para os livros de ensino médio.

Já no que diz respeito à área sob o gráfico da velocidade, Calçada e Sampaio demonstram que, para o movimento uniforme, a área sob o gráfico da velocidade fornece a variação da posição. Posteriormente, generalizam esse resultado para qualquer tipo de movimento (páginas 102 e 103) [14]. No caso da aceleração, apenas dizem que a área sob o gráfico fornece a variação da velocidade, sem fazer qualquer tipo de conexão (página 129)[14]. Em ambos os casos, prevalece novamente a memorização sem entendimento, já que somente o resultado para o movimento uniforme foi demonstrado. A abordagem adotada pelos livros didáticos reforça toda a memorização sem entendimento e debilidade conceitual que cerca o ensino de cinemática no secundário.

Não tratarei aqui do modo como os professores ensinam cinemática em classe, pois ele em muito se assemelha ao visto nos livros didáticos. Perceba que todas as deficiências de explicação supracitadas têm como causa principal a ausência do cálculo diferencial e integral no ensino médio, o que está de acordo com o que vem sendo dito desde o início desse trabalho. A seguir será apresentada uma abordagem baseada em infinitésimos que pode ser utilizada para contornar esses problemas.

3.1.2 Funções posição × tempo e seus gráficos

Para que esse trabalho não se torne prolixo, as matérias aqui abordadas não serão mostradas em sua plenitude. Apenas serão expostos os elementos indispensáveis para a apresentação adequada do tema proposto. No presente caso, não se explicará assuntos como origem, caráter relativo do movimento, orientação da trajetória etc.

A cinemática tem origem na pergunta: "Onde e quando?"

Portanto, nada mais natural do que estudar como a posição varia com o tempo. Em geral, a posição de uma partícula é dada por uma função do tempo. Como exemplos, tomemos uma função do M.R.U.A. e outra do M.R.U. :

$x(t) = t^2$
$x(t) = 2t - 5$

Para que os alunos familiarizem-se com as funções que fornecem a posição em função do tempo, convém mandá-los achar a posição para diversos valores conhecidos de t, o que pode ser feito através da utilização de tabelas. Para as 2 funções anteriores, organizamos:

t	$x(t) = t^2$	$x(t) = 2t - 5$
1	1	-3
2	4	-1
3	9	1
4	16	3
5	25	5
6	36	7
7	49	9
8	64	11
9	81	13

Tabela 2.

Em geral, para os alunos do primeiro ano do ensino médio, a cinemática é dada logo no começo do ano letivo, quando os alunos ainda não tiveram contato suficiente com funções. Portanto, é imprescindível que, concomitantemente ao ensino da cinemática, o professor faça um apanhado sobre as funções utilizadas (gráficos, modo como t gera x(t) etc.) .

Quando os alunos assimilarem o modo como a função posição × tempo fornece a posição, isto é, a posição num instante t_0 é dada pelo valor de x(t) que obtemos ao substituir t por t_0 , então é hora de passar aos gráficos. Por exemplo, para as 2 funções mostradas na tabela 2, tem-se os gráficos indicados nas figuras 3 e 4.

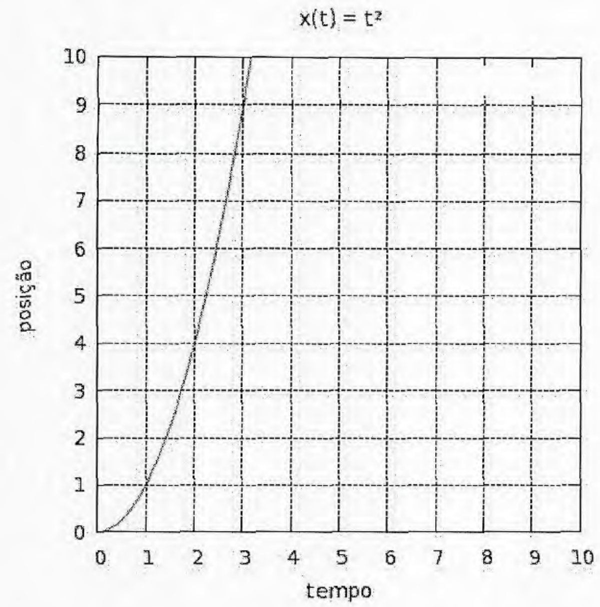


Figura 3. Gráfico da função horária do M.R.U.A. $x(t) = t^2$.

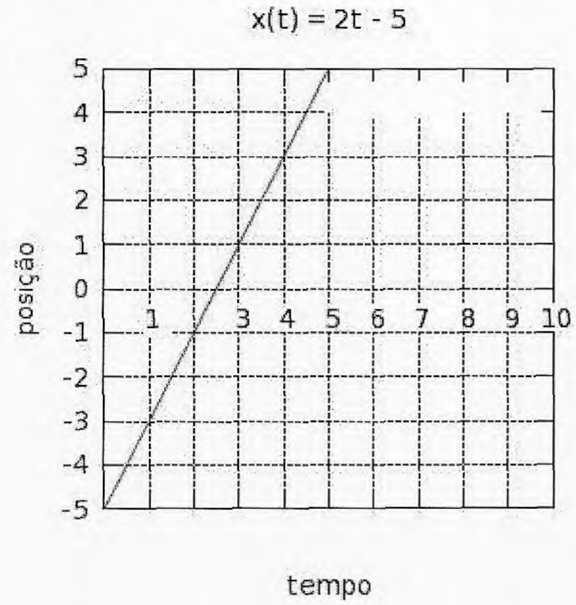


Figura 4. Gráfico da função horária do M.R.U. $x(t) = 2t - 5$.

No momento em que os alunos estiverem aptos para lidar com as funções que fornecem a posição em função do tempo e seus gráficos, então é hora de iniciar o estudo da velocidade, aceleração e da relação existente entre a área sob o gráfico da velocidade (aceleração) e a variação da posição (velocidade). Comecemos pela velocidade média.

3.1.3 A velocidade média

A velocidade média é definida como a razão do deslocamento pelo correspondente intervalo de tempo. Sendo x = x(t) a função que fornece o deslocamento em função do tempo para uma partícula, a velocidade média dessa partícula para o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dada por:

$$V_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{4}$$

Por exemplo, sendo x(t) = 1 + 2t a função que fornece a posição em função do tempo para uma partícula em um M.R.U., com t dado em s e x dado em m, a velocidade média da partícula no intervalo de tempo [1, 4] será:

$$V_m = \frac{x(4) - x(1)}{4 - 1} = \frac{9 - 3}{3} = \frac{6}{3} = 2\text{m/s}$$

No caso da função horária $x(t) = 2 + t + t^2$, onde t é dado em s e x em m, para o mesmo intervalo de tempo usado acima, tem-se:

$$V_m = \frac{x(4) - x(1)}{4 - 1} = \frac{22 - 4}{3} = \frac{18}{3} = 6\text{m/s}$$

O conceito de velocidade média é relativamente fácil de compreender. O cálculo da velocidade média é algo bastante simples, bastando alguns poucos exemplos para que os alunos o assimilem. A velocidade instantânea é definida a partir do conceito de velocidade média.

3.1.4 A definição da velocidade instantânea

Sendo x = x(t) a função que fornece a posição de uma partícula em função do tempo, a velocidade instantânea dessa partícula no instante t é dada pela velocidade média no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$, onde $\Delta_p t$ é um intervalo de tempo muito, muito pequeno (a partir de agora, utilizaremos o símbolo " Δ_p" para designar quantidades extremamente pequenas). Isto é :

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{(t + \Delta_p t) - t} = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} \tag{5}$$

Frente à definição de velocidade instantânea, não há como deixar de lançar dois questionamentos:

Por que a velocidade instantânea é definida dessa maneira?

Qual é o valor de $\Delta_p t$ e o quão pequeno $\Delta_p t$ deve ser?

Essas são dúvidas que fatalmente acometerão os alunos. Ambas guardam uma correlação estreita e serão respondidas a seguir.

3.1.5 Esclarecimentos sobre a velocidade instantânea

O conceito de velocidade tem por gênese a pergunta: "O quão rápido a posição de um corpo muda?" A grandeza velocidade nasce da necessidade de descrever a celeridade do movimento, de qualificarmos e quantificarmos o quão rápido a posição de uma partícula aumenta ou diminui.

A velocidade média nos proporciona uma descrição para a rapidez do movimento, porém, sua descrição carece de profundidade. Por exemplo, suponhamos que um pai encarregue seu filho de buscar uma encomenda num lugar a 60 km de distância, e que para isso ceda o automóvel da família ao filho. Considere que o filho faça os 120 km de ida e volta em 1 hora, mas que, ao retornar, resolva parar o carro numa lanchonete bem próxima da casa por 1 hora, com o objetivo de que seu pai não descubra que ele "correu" com o carro. Suponhamos que, quando o filho retorna à casa, o pai, sem saber da artimanha de seu filho, resolva calcular a velocidade média empreendida pelo rapaz; a fim de ter uma idéia sobre a celeridade com que o filho trafegou (descobrir se o filho não "correu" com o carro). O pai então encontra $V_m = 120$ km/2h = 60 km/h, ficando com a falsa impressão de que seu filho percorreu cerca de 60 km a cada 1 hora e provavelmente conduziu o automóvel de forma responsável.

A descrição fornecida pela velocidade média não expõe como foi feito o movimento, havendo a necessidade de uma grandeza que descreva o movimento mais detalhadamente. Mas como definir tal grandeza? A resposta para essa pergunta é obtida via análise gráfica.

Observe os gráficos das figuras 5 e 6:

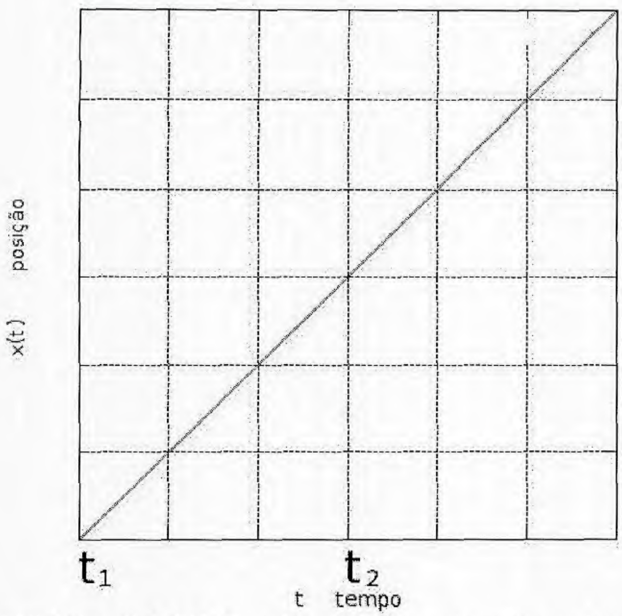


Figura 5. Gráfico do M.R.U. x(t) = t (mesma escala em ambos os eixos).

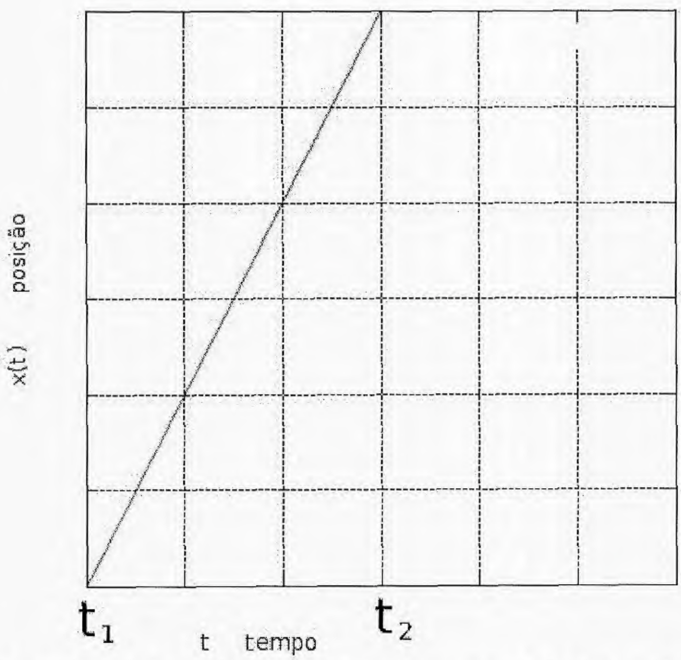


Figura 6. Gráfico do M.R.U. x(t) = 2t (mesma escala em ambos os eixos).

No intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, verifica-se que o movimento se processa com maior rapidez no gráfico da figura 6. Repare que a reta representativa da figura 6 é mais "inclinada" do que a reta da figura 5, o que nos sugere uma ligação entre maior inclinação e maior celeridade. De fato, conforme podemos observar na figura 7, quanto maior a inclinação da reta representativa, maior a rapidez com que se processa o movimento.

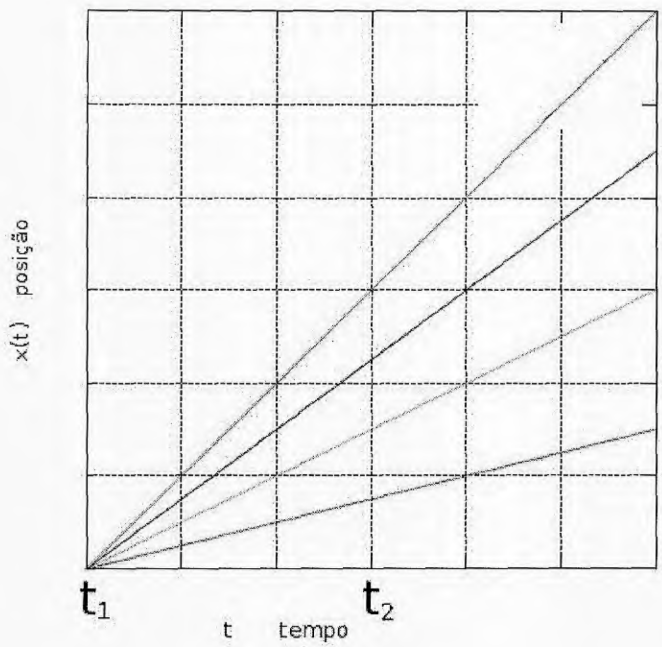


Figura 7. Curvas representativas de movimentos uniformes. Inclinações (coeficientes angulares) respectivamente iguais a 1, ¾ , ½ e ¼ (mesma escala em ambos os eixos). Quanto maior a inclinação da reta, mais rápido se processa o movimento e vice-versa.

Essa relação entre maior inclinação e maior rapidez não vale apenas para movimentos representados por retas, mas sim para qualquer tipo de movimento. Conforme podemos ver na figura 8, quanto mais "inclinada" for a curva representativa, maior a celeridade do movimento.

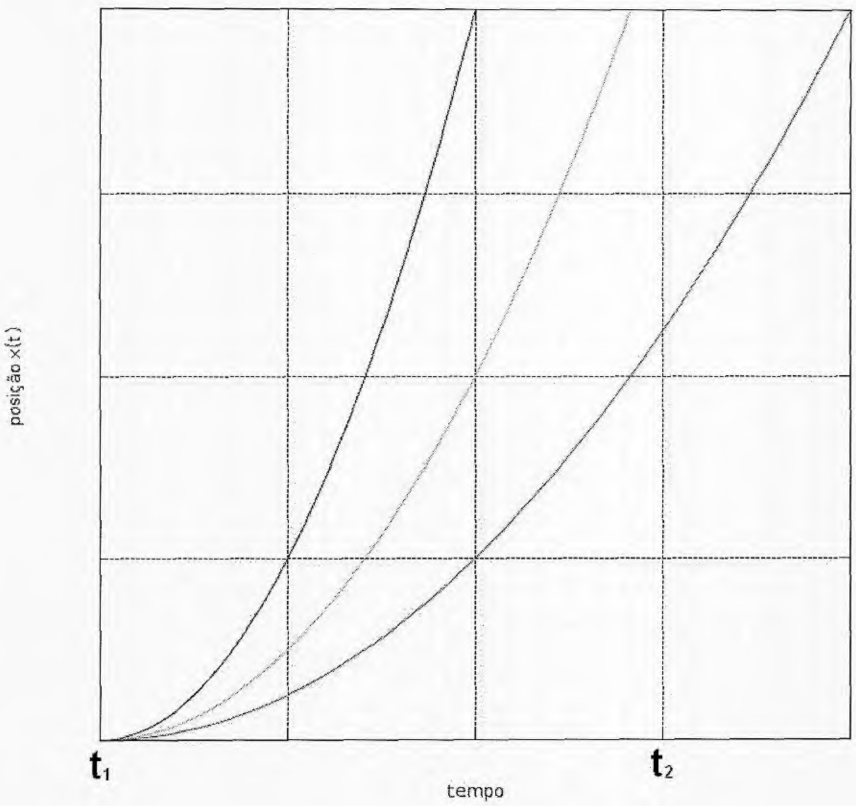


Figura 8. Curvas representativas de movimentos uniformemente variados. Quanto mais "inclinada" é a curva, maior a celeridade do movimento e vice-versa.

Para qualquer movimento, existe portanto uma ligação entre maior inclinação e maior rapidez.

Para uma reta representativa, a inclinação é constante e dada (quantificada) por seu coeficiente angular. Já para uma curva não reta, a inclinação varia, sendo diferente para cada ponto. Para uma curva não reta, a inclinação num ponto t é dada (quantificada) por m(t), onde m(t) é o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto t (figura 9).

Quanto maior m(t) (a inclinação), maior a rapidez com que se processa o movimento em t. Portanto, podemos dizer que m(t) mede a rapidez do movimento, quantificando a rapidez em cada instante. Logo, nada mais natural do que definir a grandeza procurada, que chamaremos de "velocidade instantânea" (ou simplesmente "velocidade") e representaremos por V(t), como V(t) = m(t).

Solucionado o problema de definirmos uma grandeza que descreva com mais exatidão a celeridade do movimento, outro problema surge: Como calcularemos essa grandeza?

Para os que já estudaram cálculo diferencial e integral, a resposta é patente ; basta calcular a derivada da função horária. Mas o aluno de ensino médio não conhece a operação de derivação, havendo a necessidade de se estabelecer uma solução alternativa.

Para calcularmos m(t), e por conseguinte V(t), devemos estar inteirados da seguinte propriedade geométrica: Se $\Delta_p t$ é suficientemente pequeno para que a porção da curva $x(t) \times t$ correspondente ao intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ seja praticamente reta, então essa porção e a reta tangente à curva no ponto t são aproximadamente paralelas (figura 10).

Logo, se $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva $x(t) \times t$ localizada entre t e $t + \Delta_p t$ seja praticamente reta, então m(t) e a inclinação dessa porção são muito próximos, de modo que, de acordo com a figura 9:

$$V(t) = m(t) \approx \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t}$$

Mas, nesse caso, a diferença entre o valor exato de m(t) e $[x(t + \Delta_p t) - x(t)] \div \Delta_p t$ é tão ínfima, que podemos simplesmente substituir o sinal de aproximadamente ($\approx$) pelo sinal de igual, obtendo:

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t}$$

Que é a equação (5).

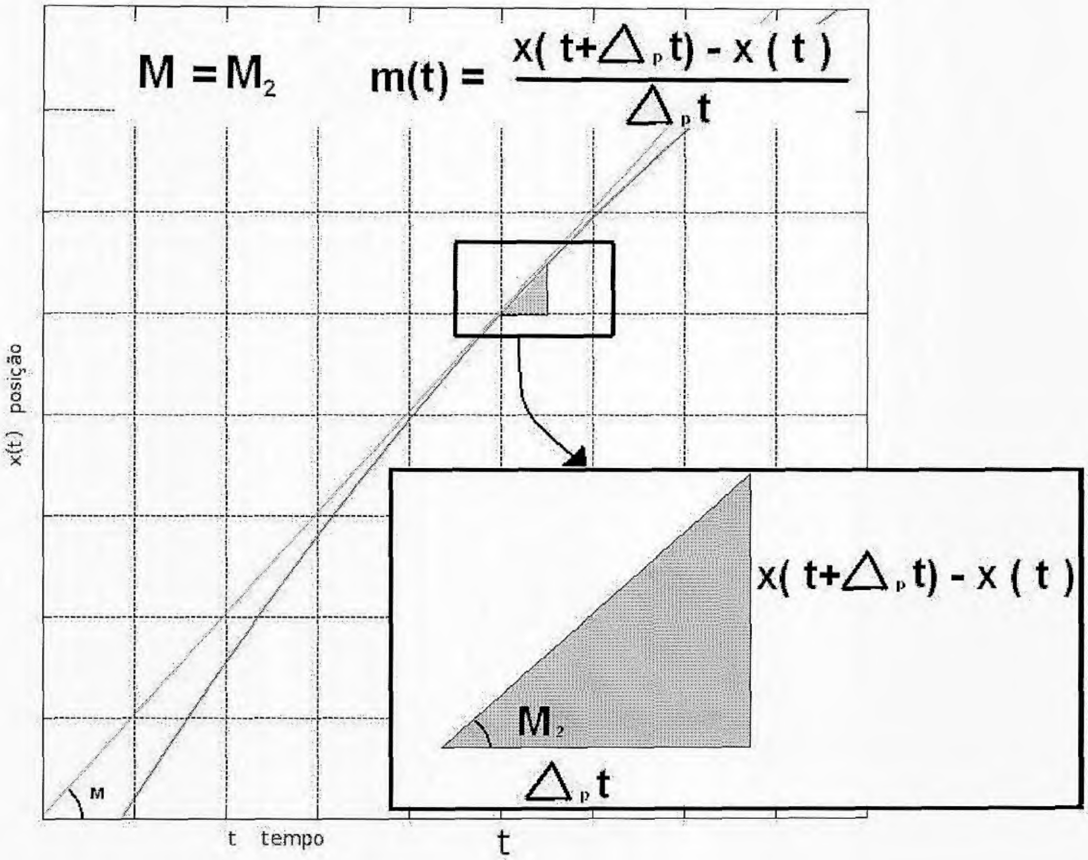


Figura 9. Se a porção correspondente ao intervalo [t, t + $\Delta_p t$] for aproximadamente reta, então essa porção e a reta tangente à curva no ponto t são praticamente paralelas e $m(t) = [\ x(t + \Delta_p t) - x(t)\ ] \div \Delta_p t$.

Portanto, para calcularmos a velocidade, basta tomar $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva $x(t) \times t$ correspondente ao intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ seja praticamente reta e então fazer :

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t}$$

É importante observar que, ao escolhermos " $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva $x(t) \times t$ correspondente ao intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ seja praticamente reta", é necessário ter em mente que o gráfico utilizado para tal deve estar na proporção 1:1; caso contrário, o gráfico ficará disforme, o que pode acarretar erros de julgamento.

Repare que existem infinitos valores de $\Delta_p t$ para os quais a porção da curva $x(t) \times t$ localizada entre t e $t + \Delta_p t$ é praticamente reta, de modo que para cada um deles encontra-se um valor diferente para V(t); porém, esses valores são tão próximos que podemos simplesmente considerá-los como iguais (o que elimina qualquer tipo de ambiguidade). Adiante, será dado um exemplo sobre isso.

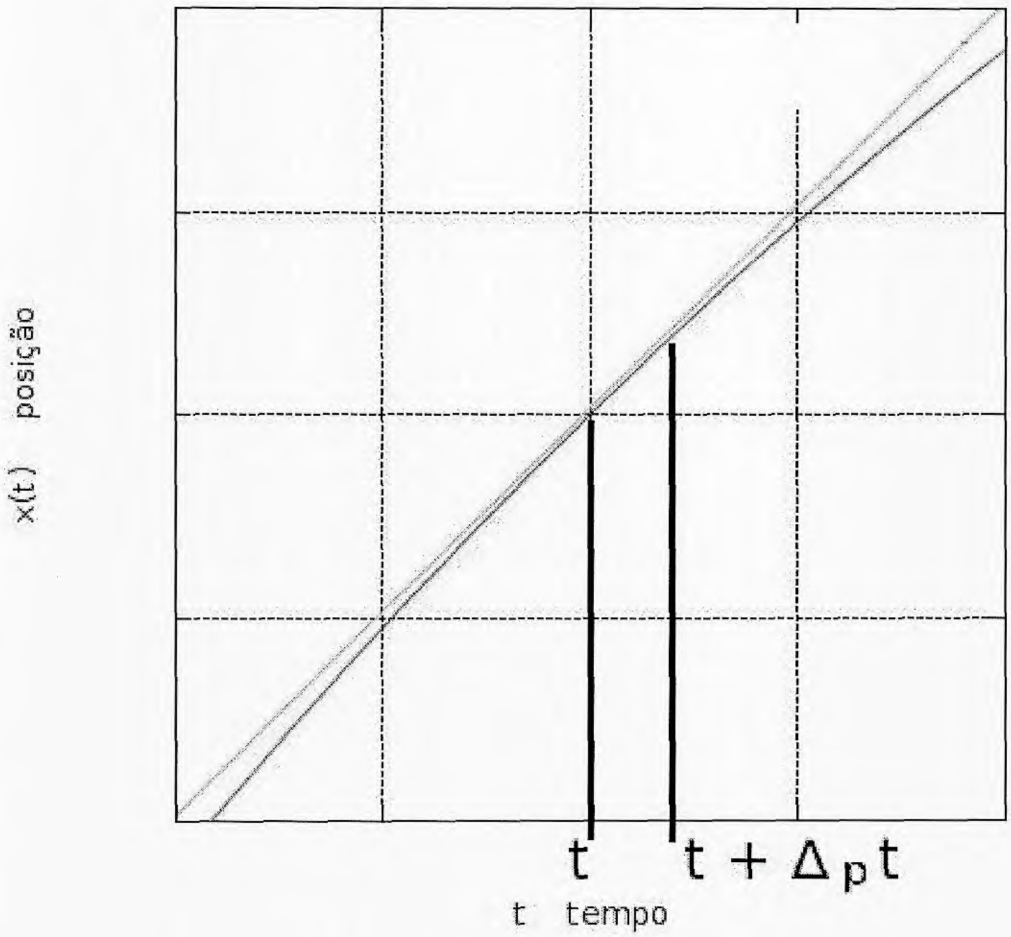


Figura 10. Se $\Delta_p t$ é suficientemente pequeno para que a porção localizada entre t e $t + \Delta_p t$ seja praticamente reta, então essa porção e a reta tangente à curva no ponto t são aproximadamente paralelas. Na figura, a porção da curva localizada entre t e $t + \Delta_p t$ é praticamente paralela à reta que tangencia a curva no ponto t.

As considerações feitas anteriormente nesta seção esclarecem porque a velocidade instantânea é definida como:

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t}$$

Bem como não deixam dúvidas sobre o caráter de $\Delta_p t$. Podemos então passar aos exemplos sobre como calcular a velocidade instantânea.

3.1.6 O cálculo da velocidade instantânea

Segundo o que foi visto anteriormente, para calcularmos a velocidade instantânea, tomamos um $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a parte da curva $x(t) \times t$ compreendida entre t e t + $\Delta_p t$ seja praticamente reta e então fazemos:

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t}$$

Em geral, para encontrarmos um $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a parte da curva $x(t) \times t$ compreendida entre t e t + $\Delta_p t$ seja praticamente reta", basta tomar um $\Delta_p t$ muitíssimo menor que todos os coeficientes da função horária e muitíssimo menor que 1, bem como muitíssimo menor que t (t para o qual deseja-se encontrar a velocidade) e x(t). Desse modo, podemos então escolher um $\Delta_p t$ conveniente sem a necessidade de "graficar" x(t).

Considere as 6 funções a seguir, onde x(t) é dado em metros e t em segundos:

(a) $x(t) = 2 + 3t$ (M.R.U.)
(b) $x(t) = 3 + 5t - 2t^2$ (M.R.U.A.)
(c) $x(t) = \text{sen}(t)$ (M.H.S.)
(d) $x(t) = \cos(t)$ (M.H.S.)

Para cada uma delas, vamos calcular a velocidade instantânea no instante t = 1.

(a) $x(t) = 2 + 3t$ (M.R.U.)

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{2 + 3t + 3\Delta_p t - 2 - 3t}{\Delta_p t} = \frac{3\Delta_p t}{\Delta_p t} = 3 \text{ m/s}$$

V(t) = 3 m/s, qualquer que seja o instante t. Aqui não foi necessário tomar um $\Delta_p t$, mas isso mudará nos exemplos posteriores.

(b) $x(t) = 3 + 5t - 2t^2$ (M.R.U.A.)

$$V(t) = \frac{x(t+\Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{3 + 5(t + \Delta_p t) - 2(t + \Delta_p t)^2 - 3 - 5t + 2t^2}{\Delta_p t} =$$

$$\frac{3 + 5t + 5\Delta_p t - 2t^2 - 4t\,\Delta_p t - 2\,\Delta_p t^2 - 3 - 5t + 2t^2}{\Delta_p t} = \frac{5\Delta_p t - 4t\,\Delta_p t - 2\,\Delta_p t^2}{\Delta_p t} = 5 - 4t - 2\Delta_p t$$

Tomando-se $\Delta_p t = 10^{-4}$, obtém-se para $t = 1$:

$V(1) = 5 - 4 - 2 \times 10^{-4} = 0{,}9998$ m/s ≈ 1 m/s

(c) $x(t) = \mathrm{sen}(t)$ (M.H.S.)

$$V(t) = \frac{x(t+\Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{\mathrm{sen}(t + \Delta_p t) - \mathrm{sen}(t)}{\Delta_p t} = \frac{\mathrm{sen}(t)\cos(\Delta_p t) + \mathrm{sen}(\Delta_p t)\cos(t) - \mathrm{sen}(t)}{\Delta_p t}$$

Tomando-se $\Delta_p t = 0{,}001$, obtém-se para $t = 1$:

$$V(1) = \frac{\mathrm{sen}(1)\cos(0{,}001) + \mathrm{sen}(0{,}001)\cos(1) - \mathrm{sen}(1)}{0{,}001} = \frac{0{,}00054}{0{,}001} = 0{,}54 \text{ m/s}$$

(d) $x(t) = \cos(t)$ (M.H.S.)

$$V(t) = \frac{x(t+\Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{\cos(t + \Delta_p t) - \cos(t)}{\Delta_p t} = \frac{\cos(t)\cos(\Delta_p t) - \mathrm{sen}(\Delta_p t)\mathrm{sen}(t) - \cos(t)}{\Delta_p t}$$

Tomando-se $\Delta_p t = 0{,}00001$, obtém-se para $t = 1$:

$$V(1) = \frac{\cos(1)\cos(0{,}00001) - \mathrm{sen}(0{,}00001)\mathrm{sen}(1) - \cos(1)}{0{,}00001} = -0{,}8414 \text{ m/s}$$

Nos exemplos acima, foram escolhidos valores arbitrários de $\Delta_p t$ que satisfazem a condição imposta para o cálculo da velocidade, isto é, a porção da curva $x(t) \times t$ compreendida entre t e $t + \Delta_p t$ deve ser praticamente reta. Conforme dito anteriormente, para calcularmos a velocidade instantânea, podemos tomar qualquer um dos infinitos valores de $\Delta_p t$ que obedecem a essa condição, encontrando praticamente sempre o mesmo valor para a velocidade instantânea (praticamente !). Tomemos a função posição **(b)** como exemplo. Observe a tabela 3:

$x(t) = 3 + 5t - 2t^2$ (M.R.U.A.)		
t	$\Delta_p t$	V(t) (com 5 casas decimais)
1	0,00001	0,99998
1	0,00002	0,99996
1	0,00003	0,99994
1	0,0001	0,99980
1	0,0002	0,99960
1	0,0003	0,99940
1	0,001	0,99800
1	0,002	0,99600
1	0,003	0,99400

Tabela 3.

Veja que, no exemplo acima, para os diversos valores de $\Delta_p t$ escolhidos (que satisfazem a condição de cálculo da velocidade), encontramos praticamente sempre o mesmo valor para a velocidade, $V(t) = 1$.

Podemos ainda encontrar o valor da velocidade instantânea sem que haja a necessidade de escolher um determinado valor para $\Delta_p t$. Através de simples ponderações, pode-se determinar a velocidade unicamente em função do tempo ($V(t) = f(t)$). Voltemos às 6 funções horárias acima:

(a) $x(t) = 2 + 3t$ (M.R.U.)

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{2 + 3t + 3\Delta_p t - 2 - 3t}{\Delta_p t} = \frac{3\Delta_p t}{\Delta_p t} = 3 \text{ m/s}$$

$V(t) = 3$ m/s, qualquer que seja t.

(b) $x(t) = 3 + 5t - 2t^2$ (M.R.U.A.)

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = 5 - 4t - 2\Delta_p t$$

De acordo com o que foi exposto anteriormente, $\Delta_p t$ muitíssimo menor que todos os coeficientes da função horária e muitíssimo menor que 1, bem como muitíssimo menor que t e x(t). Portanto, o termo $-2\Delta_p t$ possui tamanho desprezível, podendo ser simplesmente suprimido da equação. Obtém-se então:

$$V(t) = 5 - 4t$$

(c) $x(t) = sen(t)$ (M.H.S.)

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{sen(t)cos(\Delta_p t) + sen(\Delta_p t)cos(t) - sen(t)}{\Delta_p t}$$

Para acharmos a velocidade associada a uma função horária que envolve as funções seno e cosseno, devemos ter em mente as seguintes propriedades trigonométricas:

$0 < x << 1 \rightarrow sen(x) \approx x$

$0 < x << 1 \rightarrow cos(x) \approx 1$

Como os alunos nem sempre estão familiarizados com tais propriedades, convém apresentar uma tabela com alguns exemplos numéricos, apresentados na tabela 4:

x (6 casas decimais)	sen(x) (6 casas decimais)	cos(x) (6 casas decimais)
0,010000	0,009999	0,999950
0,002000	0,001999	0,999998
0,000300	0,000299	0,999999
0,000040	0,000039	0,999999

Tabela 4.

Quanto menor o valor de x, maior a proximidade entre sen(x) e x, bem como entre cos(x) e 1; isso não ficou muito evidente na tabela acima porque o número de casas decimais foi restringido a 6. Como estamos lidando com valores extremamente pequenos de $\Delta_p t$, podemos impor $sen(\Delta_p t) = \Delta_p t$ e $cos(\Delta_p t) = 1$, substituindo o sinal de aproximadamente ($\approx$) pelo sinal de igual. Portanto, para a função horária **(c)**, tem-se:

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{sen(t)cos(\Delta_p t) + sen(\Delta_p t)cos(t) - sen(t)}{\Delta_p t} =$$

$$\frac{\text{sen}(t)\,.\,1 + \Delta_p t\,.\,\cos(t) - \text{sen}(t)}{\Delta_p t} = \frac{\Delta_p t\,.\,\cos(t)}{\Delta_p t} = \cos(t)$$

(d) $x(t) = \cos(t)$ (M.H.S.)

$$V(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t} = \frac{\cos(t + \Delta_p t) - \cos(t)}{\Delta_p t} = \frac{\cos(t)\cos(\Delta_p t) - \text{sen}(\Delta_p t)\text{sen}(t) - \cos(t)}{\Delta_p t}$$

Como $\text{sen}(\Delta_p t) = \Delta_p t$ e $\cos(\Delta_p t) = 1$, vem que :

$$V(t) = \frac{\cos(t)\,.\,1 - \Delta_p t\,.\,\text{sen}(t) - \cos(t)}{\Delta_p t} = \frac{-\Delta_p t\,.\,\text{sen}(t)}{\Delta_p t} = -\text{sen}(t)$$

Vemos, portanto, que, por intermédio de aproximações, pode-se determinar a função velocidade × tempo ($V = f(t)$) sem a necessidade de tomar um $\Delta_p t$ específico. Não existe nenhuma regra geral sobre como tais aproximações são feitas (assim como não existe nenhuma regra geral para o cálculo de derivadas), a compreensão sobre como a função velocidade × tempo é calculada vem pela extensa análise de exemplos e pela resolução de exercícios. Todavia, frequentemente as aproximações consistem em desprezar termos que envolvam potências inteiras de $\Delta_p t$ ou impor $\text{sen}(\Delta_p t) = \Delta_p t$ e $\cos(\Delta_p t) = 1$.

Repare que, para calcular a velocidade instantânea, não se utilizou infinitésimos em sua definição estrita, isto é, "número não nulo cujo módulo é menor que qualquer quantidade positiva" [3], mas sim quantidades muito pequenas. Nesse trabalho, prevalece a concepção que físicos e engenheiros têm sobre infinitésimos, isto é, os infinitésimos como quantidades ínfimas.

Reitero que é imprescindível que se faça um apanhado sobre as propriedades das funções utilizadas, principalmente no que diz respeito às funções seno e cosseno.

Feita a exposição sobre como podemos calcular a velocidade instantânea a partir da posição em função do tempo, passemos então ao problema inverso: Conhecendo a função velocidade, como podemos calcular a posição em função do tempo?

3.1.7 A área sob o gráfico da velocidade e o deslocamento

Para encontrarmos o deslocamento partindo da velocidade em função do tempo, devemos estar inteirados da seguinte propriedade: A área sob o gráfico da velocidade × tempo fornece a variação da posição.

A seguir, será dada uma demonstração para tal propriedade.

Considere um gráfico V(t) × t qualquer (figura 11). A fim de calcularmos a área sob a porção da cuva localizada entre 2 instantes t_i e t_f, dividimos o intervalo [t_i, t_f] em um número N (muito grande) de subintervalos extremamente pequenos [t_i, t_1], [t_1, t_2], [t_2, t_3], [t_3, t_4], [t_4, t_5], [t_5, t_6] ... [t_{N-2}, t_{N-1}] e [t_{N-1}, t_f], de modo que o comprimento $\Delta_p t_{n-1}$ de cada subintervalo [t_{n-1}, t_n] obedeça a condição imposta para o cálculo da velocidade. Posteriormente, sobre cada subintervalo [t_{n-1}, t_n] constrói-se um retângulo de base $\Delta_p t_{n-1}$ e de altura V(t_{n-1}), obtendo-se então o que se vê na figura 11.

A área sob a porção localizada entre os instantes t_i e t_f será aproximadamente igual ao somatório das áreas dos retângulos construídos:

$$A[\, t_i,\, t_f \,] \approx \Delta_p t_0 . V(\, t_i \,) + \Delta_p t_1 . V(\, t_1 \,) + \Delta_p t_2 . V(\, t_2 \,) + \Delta_p t_3 . V(\, t_3 \,) + \ldots + \Delta_p t_{N-3} . V(\, t_{N-3} \,) + \Delta_p t_{N-2} . V(\, t_{N-2} \,) + \Delta_p t_{N-1} . V(\, t_{N-1} \,)$$

Mas a diferença entre a área sob a porção da curva compreendida entre t_i e t_f e o somatório das áreas dos retângulos é tão ínfima, que podemos simplesmente substituir o sinal de aproximadamente (≈) pelo sinal de igual. Obtemos então:

$$A[\, t_i,\, t_f \,] = \Delta_p t_0 . V(\, t_i \,) + \Delta_p t_1 . V(\, t_1 \,) + \Delta_p t_2 . V(\, t_2 \,) + \Delta_p t_3 . V(\, t_3 \,) + \ldots + \Delta_p t_{N-3} . V(\, t_{N-3} \,) + \Delta_p t_{N-2} . V(\, t_{N-2} \,) + \Delta_p t_{N-1} . V(\, t_{N-1} \,)$$

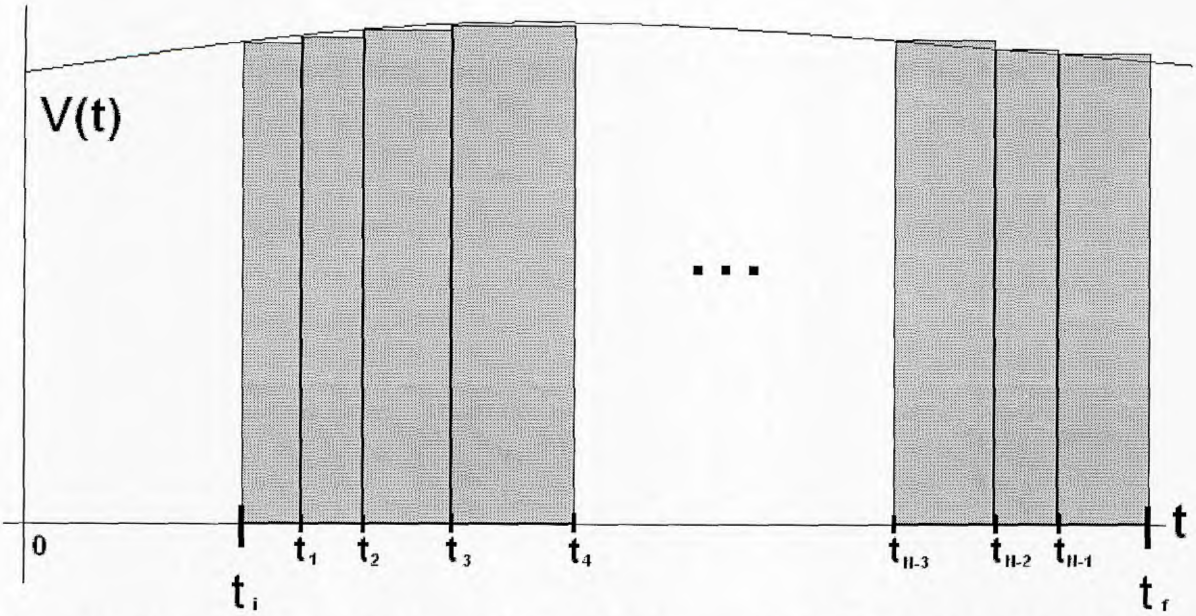


Figura 11. A área sob a porção da curva localizada no intervalo [t_i, t_f] é dada pela soma das áreas dos retângulos construídos sobre subintervalos extremamente pequenos .

Como os comprimentos dos subintervalos obedecem a condição de cálculo para a velocidade, podemos utilizá-los para calcular a velocidade em cada instante. Portanto:

$$V(t_i) = \frac{x(t_i + \Delta_p t_0) - x(t_i)}{\Delta_p t_0} \qquad V(t_{N-3}) = \frac{x(t_{N-3} + \Delta_p t_{N-3}) - x(t_{N-3})}{\Delta_p t_{N-3}}$$

$$V(t_1) = \frac{x(t_1 + \Delta_p t_1) - x(t_1)}{\Delta_p t_1} \qquad V(t_{N-2}) = \frac{x(t_{N-2} + \Delta_p t_{N-2}) - x(t_{N-2})}{\Delta_p t_{N-2}}$$

$$V(t_2) = \frac{x(t_2 + \Delta_p t_2) - x(t_2)}{\Delta_p t_2} \qquad V(t_{N-1}) = \frac{x(t_{N-1} + \Delta_p t_{N-1}) - x(t_{N-1})}{\Delta_p t_{N-1}}$$

$$V(t_3) = \frac{x(t_3 + \Delta_p t_3) - x(t_3)}{\Delta_p t_3}$$

E assim por diante até chegarmos às 3 últimas velocidades (à direita).

Como $t_i + \Delta_p t_0 = t_1$, $t_1 + \Delta_p t_1 = t_2$, $t_2 + \Delta_p t_2 = t_3$ ... $t_{N-3} + \Delta_p t_{N-3} = t_{N-2}$, $t_{N-2} + \Delta_p t_{N-2} = t_{N-1}$ e $t_{N-1} + \Delta_p t_{N-1} = t_f$, vem que:

$$V(t_i) = \frac{x(t_1) - x(t_i)}{\Delta_p t_0}$$

$$V(t_1) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta_p t_1}$$

$$V(t_2) = \frac{x(t_3) - x(t_2)}{\Delta_p t_2}$$

$$V(t_3) = \frac{x(t_4) - x(t_3)}{\Delta_p t_3}$$

$$V(t_{N-3}) = \frac{x(t_{N-2}) - x(t_{N-3})}{\Delta_p t_{N-3}}$$

$$V(t_{N-2}) = \frac{x(t_{N-1}) - x(t_{N-2})}{\Delta_p t_{N-2}}$$

$$V(t_{N-1}) = \frac{x(t_f) - x(t_{N-1})}{\Delta_p t_{N-1}}$$

E assim por diante até chegarmos às 3 últimas velocidades (à direita).

Logo:

$A[t_i, t_f] = \Delta_p t_0 . V(t_i) + \Delta_p t_1 . V(t_1) + \Delta_p t_2 . V(t_2) + \Delta_p t_3 . V(t_3) + \ldots + \Delta_p t_{N-3} . V(t_{N-3}) + \Delta_p t_{N-2} . V(t_{N-2}) + \Delta_p t_{N-1} . V(t_{N-1}) =$

$$\Delta_p t_0 . \frac{x(t_1) - x(t_i)}{\Delta_p t_0} + \Delta_p t_1 . \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\Delta_p t_1} + \Delta_p t_2 . \frac{x(t_3) - x(t_2)}{\Delta_p t_2} +$$

$$\Delta_p t_3 . \frac{x(t_4) - x(t_3)}{\Delta_p t_3} + \ldots + \Delta_p t_{N-3} . \frac{x(t_{N-2}) - x(t_{N-3})}{\Delta_p t_{N-3}} + \Delta_p t_{N-2} . \frac{x(t_{N-1}) - x(t_{N-2})}{\Delta_p t_{N-2}}$$

$$+ \Delta_p t_{N-1} . \frac{x(t_f) - x(t_{N-1})}{\Delta_p t_{N-1}} =$$

$x(t_1) - x(t_i) + x(t_2) - x(t_1) + x(t_3) - x(t_2) + x(t_4) - x(t_3) + \ldots + x(t_{N-2}) - x(t_{N-3}) + x(t_{N-1}) - x(t_{N-2}) + x(t_f) - x(t_{N-1})$

$= x(t_f) - x(t_i)$

$A[t_i, t_f] = x(t_f) - x(t_i)$, portanto, a área sob o gráfico da velocidade fornece a variação da posição, ou melhor: No gráfico velocidade × tempo, a área sob a porção compreendida entre 2 instantes t_i e t_f fornece o deslocamento correspondente ao intervalo $[t_i, t_f]$.

Demonstrado que a área sob o gráfico da velocidade fornece o deslocamento, podemos obter as funções horárias do movimento retilíneo uniforme (M.R.U.) e do movimento retilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.) .

Para o M.R.U., conforme podemos ver no retângulo da figura 12, tem-se:

$V \,.\, (t_f - t_i) = x(t_f) - x(t_i)$, logo:

$x(t_f) = x(t_i) + V \,.\, (t_f - t_i)$. O que pode ser escrito também sob a forma:

$$x = x_0 + V \,.\, (t - t_0) \quad (6)$$

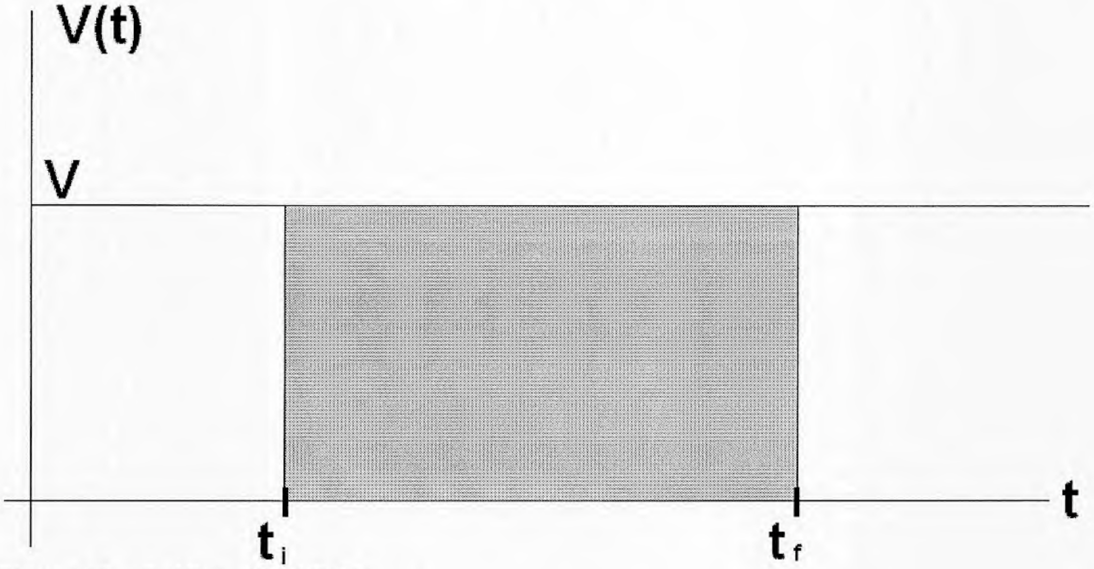


Figura 12. Gráfico do M.R.U. .

Já para o M.R.U.V., conforme podemos constatar no trapézio da figura 13, tem-se:

$$\frac{V(t_f) + V(t_i)}{2} \,.\, (t_f - t_i) = x(t_f) - x(t_i)$$

Provaremos depois que $V(t_f) = V(t_i) + a(t_f - t_i)$. Logo:

$$\frac{V(t_i) + V(t_i) + a(t_f - t_i)}{2} \,.\, (t_f - t_i) = x(t_f) - x(t_i)$$. Portanto:

$x(t_f) = x(t_i) + V(t_i) \,.\, (t_f - t_i) + \frac{1}{2} \,.\, a \,.\, (t_f - t_i)^2$. O que também pode ser escrito como:

$$x = x_0 + V_0 \,.\, (t - t_0) + \frac{1}{2} \,.\, a \,.\, (t - t_0)^2 \,. \quad (7)$$

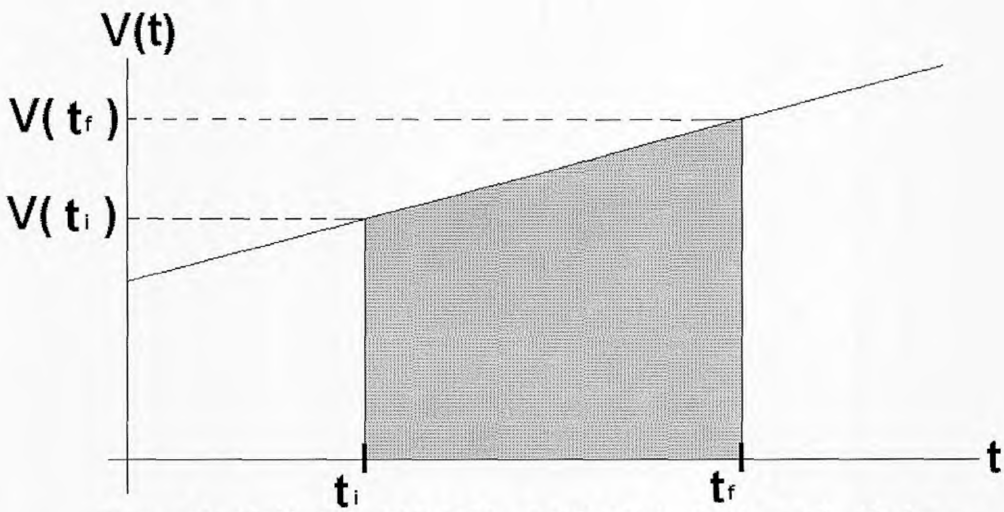


Figura 13. Gráfico do M.R.U.V. . Sendo $V(t_f)$ e $V(t_i)$ as velocidades nos instantes t_f e t_i respectivamente, o deslocamento correspondente ao intervalo $[t_f, t_i]$ é dado pela área sob a porção da curva compreendida entre t_f e t_i.

Finalmente, encerra-se toda a dissertação sobre a velocidade escalar instantânea. Passemos à aceleração.

3.1.8 A aceleração média

Sendo V = V(t) a função velocidade de uma partícula, a aceleração média dessa partícula para o intervalo de tempo $[t_1 , t_2]$ é dada por:

$$a_m = \frac{V(t_2) - V(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (8)$$

A aceleração instantânea é definida a partir do conceito de aceleração média.

3.1.9 A aceleração instantânea

Sendo V = V(t) a função velocidade de uma partícula, a aceleração instantânea dessa partícula no instante t é dada pela aceleração média no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$, onde $\Delta_p t$ é um intervalo de tempo muito, muito pequeno. Isto é :

$$a(t) = \frac{V(t + \Delta_p t) - V(t)}{(t + \Delta_p t) - t} = \frac{V(t + \Delta_p t) - V(t)}{\Delta_p t} \qquad (9)$$

De maneira semelhante ao ocorrido no estudo da velocidade instantânea, não podemos deixar de fazer 2 perguntas:

Por que a velocidade instantânea é definida desse modo?

Qual é o valor de $\Delta_p t$ e o quão pequeno $\Delta_p t$ deve ser?

De modo análogo ao que foi feito na exposição sobre a velocidade instantânea, as respostas para essas perguntas vêm pela análise gráfica.

Deseja-se encontrar uma grandeza que descreva qualitativa e quantitativamente o quão rápido a velocidade aumenta ou diminui. Observando-se gráficos $V(t) \times t$, percebe-se que quanto maior a inclinação m(t) (em módulo), maior a rapidez com que a velocidade varia. Portanto, a inclinação m(t) fornece uma medida para a rapidez com que a velocidade muda. Logo, nada mais natural do que definir a nova grandeza, que chamaremos de "aceleração instantânea" e representaremos por a(t), como $a(t) = m(t)$. Como:

$$m(t) = \frac{V(t + \Delta_p t) - V(t)}{\Delta_p t}$$

Onde $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva $V(t) \times t$ localizada entre t e $t + \Delta_p t$ seja aproximadamente reta (o que pode ser deduzido fazendo considerações análogas às feitas para o caso da velocidade), vem que :

$$a(t) = \frac{V(t + \Delta_p t) - V(t)}{\Delta_p t}$$

O que responde todas as perguntas sobre as origens da aceleração instantânea e sobre a natureza de $\Delta_p t$. Passemos ao cálculo da aceleração instantânea.

3.1.10 O cálculo da aceleração instantânea

Considere a função velocidade $V(t) = t^3$ (V(t) em m/s e t em s) . Vamos calcular a aceleração instantânea para t = 1s.

$$a(t) = \frac{V(t+\Delta_p t) - V(t)}{\Delta_p t} = \frac{(t+\Delta_p t)^3 - t^3}{\Delta_p t} = \frac{t^3 + 3t^2\Delta_p t + 3t\Delta_p t^2 + \Delta_p t^2 - t^3}{\Delta_p t}$$

$$= 3t^2 + 3t\Delta_p t + \Delta_p t$$

Usando $\Delta_p t = 10^{-4}$, obtém-se:

$$a(1) = 3.1^2 + 3.1.\ 10^{-4} + 10^{-4} = 3{,}0004 \approx 3\ m/s^2$$

Podemos ainda calcular a aceleração sem que haja a necessidade de se escolher um determinado $\Delta_p t$. A aceleração pode ser expressa unicamente em função de t :

$$V(t) = t^3$$

$$a(t) = \frac{V(t+\Delta_p t) - V(t)}{\Delta_p t} = 3t^2 + 3t\Delta_p t + \Delta_p t$$

Como $\Delta_p t$ muitíssimo pequeno, vem que podemos suprimir os termos $3t\Delta_p t$ e $\Delta_p t$, de modo que:

$$a(t) = 3t^2 .$$

3.1.11 A área sob o gráfico da aceleração e a variação da velocidade

Para a aceleração instantânea, vale a seguinte propriedade: A área sob o gráfico $a(t) \times t$ fornece a variação da velocidade .

A demonstração dessa propriedade é análoga ao que foi feito no estudo da área sob o gráfico velocidade × tempo.

Para o M.R.U.V., conforme podemos ver no retângulo da figura 14, tem-se :

$V(t_f) - V(t_i) = a\ .\ (t_f - t_i)$. Logo:

$V(t_f) = V(t_i) + a\ .\ (t_f - t_i)$. O que também pode ser escrito como:

$$V = V_0 + a\ .\ (t - t_0) \qquad (10)$$

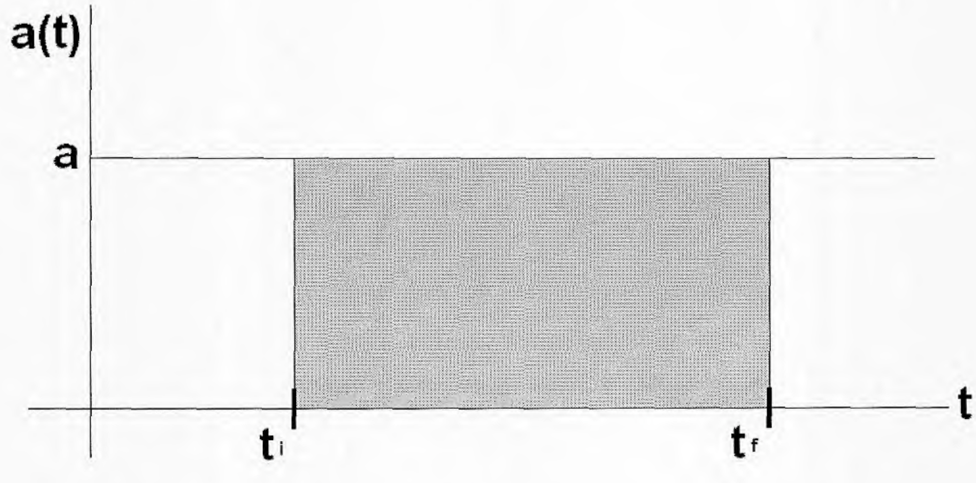


Figura 14. Gráfico $a(t) \times t$ do M.R.U.V.

3.1.12 Conclusão

No estudo da cinemática escalar, utilizando quantidades muitíssimo pequenas e fazendo as considerações adequadas, podemos aclarar aspectos conceituais, demonstrar propriedades que de outra forma ficariam sob o jugo de simples memorização e até mesmo abordar novos elementos.

Reitero que, nesse trabalho, prevalece a concepção que físicos e engenheiros possuem sobre os infinitésimos, isto é, os infinitésimos como quantidades extremamente pequenas (mas não infinitamente pequenas). Daí a prática de atribuir valores específicos para $\Delta_p t$ (muitíssimo menor que as outras quantidades envolvidas).

É relevante acrescentar que a própria definição de velocidade instantânea apresentada nesse trabalho decorre do que frequentemente se vê nos livros de física e engenharia, a velocidade sob a forma:

$$V(t) = \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt}$$

Onde dt é um infinitésimo. Essa definição, embora com outra linguagem, também é apresentada em muitos livros didáticos do ensino médio.

3.2 O uso de infinitésimos no ensino da cinemática vetorial

3.2.1 Introdução

De modo análogo ao que foi feito no estudo da cinemática escalar, analisarei parcialmente a abordagem feita por alguns livros didáticos. Novamente, tratarei dos pontos que considero críticos, são eles: velocidade vetorial instantânea e aceleração vetorial instantânea (o que inclui aceleração centrípeta) .

No livro "Os Fundamentos da Física" [15], os autores definem a velocidade vetorial instantânea da seguinte maneira:

"Considere uma pequena esfera descrevendo uma certa trajetória em relação a um dado referencial (fig. 1) [figura suprimida da transcrição] . *Num instante t o móvel ocupa a posição P.*

A velocidade vetorial **v** *do móvel, no instante t, tem as seguintes características:*

MÓDULO: igual ao módulo da velocidade escalar no instante t: $|\mathbf{v}| = |v|$

DIREÇÃO: da reta tangente à trajetória pelo ponto P.

SENTIDO: do movimento"(página 82) [15].

Os autores de "Os fundamentos da física" falham ao não explicar o porquê da sua definição de velocidade vetorial instantânea. A definição apresentada também pressupõe que, para calcularmos a velocidade vetorial instantânea, devemos achar o módulo da velocidade escalar; o que não raro dificulta (e muito) a determinação da velocidade vetorial, pois nem sempre a velocidade escalar é conhecida.

Já quando os autores tratam da aceleração vetorial instantânea, o fazem do seguinte modo:

"A velocidade vetorial **v** *pode variar em módulo e em direção. Por este motivo a aceleração vetorial* ***a*** *é decomposta em 2 acelerações componentes: a aceleração tangencial* $\mathbf{a}_t$ *, que indica a variação do módulo de* **v** *e a aceleração centrípeta* $\mathbf{a}_{cp}$ *, que indica a variação da direção de* **v** .

A aceleração tangencial $\mathbf{a}_t$ *possui as seguintes características:*

MÓDULO: igual ao módulo da aceleração escalar α *:* $|\mathbf{a}_t| = |\alpha|$.

DIREÇÃO: tangente à trajetória .

SENTIDO: o mesmo de **v** *se o movimento for acelerado e oposto ao de* **v** *se o* *movimento for retardado (Fig. 3)* [figura suprimida da transcrição] .

Nos movimentos uniformes o módulo da velocidade vetorial não varia e portanto a aceleração tangencial é nula. A aceleração tangencial só comparece em movimentos variados e independe do tipo de trajetória (retilínea ou curvilínea) .

A aceleração centrípeta $\boldsymbol{a}_{cp}$ *possui as seguintes características:*

MÓDULO: é dado pela expressão $|a_{cp}| = v^2/R$, *onde v é a velocidade escalar do móvel e R é o raio de curvatura da trajetória.*

DIREÇÃO: perpendicular à velocidade vetorial em cada ponto.

SENTIDO: orientado para o centro de curvatura da trajetória.

Nos movimentos retilíneos a direção da velocidade vetorial não varia e a aceleração centrípeta é nula. A aceleração centrípeta só comparece em movimentos de trajetórias curvas e independe do tipo de movimento (uniforme ou variado) " (páginas 83 e 84)[15].

Os autores não explicam o porquê da sua definição de aceleração vetorial instantânea, nenhuma das propriedades supracitadas recebe explicação adequada. Ademais, a definição de aceleração vetorial instantânea apresentada pelos autores pressupõe que, para calcularmos a aceleração vetorial, devemos encontrar a aceleração escalar; isso não raro dificulta (e muito) a determinação da aceleração vetorial, pois nem sempre a aceleração escalar é conhecida.

Wilson Carron e Osvaldo Guimarães, em seu livro "As faces da física" [16], abordam os conceitos de velocidade vetorial instantânea e aceleração vetorial instantânea de modo semelhante ao que se vê em "Os fundamentos da física" (páginas 60 e 63) [16]. Mas os autores fornecem uma boa demonstração para a aceleração centrípeta (página 64) [16] que, por ser muito parecida com uma demonstração que será feita posteriormente, não será transcrita.

No livro "Física Fundamental" [11] , os autores dão a seguinte explicação para a velocidade vetorial instantânea:

"Considere o movimento de um móvel do ponto P_1 *para o ponto* P_2 *sobre a trajetória curva da figura.* [figura suprimida da transcrição]

Quanto mais próximo o ponto P_2 *estiver do ponto* P_1, *o vetor* $\Delta\mathbf{r}$ *tende a ficar tangente à trajetória pelo ponto* P_1.

Portanto, para Δt *tendendo a zero (o instante* t_2 *é praticamente igual* ao instante t_1 *), o vetor velocidade média é denominado vetor velocidade instantânea e indicamos por* $\mathbf{v}$.

$\mathbf{v} = lim_{\Delta t \to 0}\,\mathbf{v_m}$ "

(página 62) [11]

Os autores novamente falham ao não abordar o conceito de limite com maior profundidade, ao não dar alguns exemplos simples envolvendo limites, como fizeram José Luiz Sampaio e Caio Sérgio Calçada em seu livro "Universo da Física" [14]. Para o aluno de ensino médio,

$\mathbf{v} = lim_{\Delta t \to 0}\,\mathbf{v_m}$ não faz qualquer sentido.

Para demonstrar que a aceleração centrípeta em um movimento circular uniforme aponta para o centro da circunferência, os autores calculam a aceleração média entre 2 posições separadas por 90° (página 77)[11] , o que carece completamente de lógica! Já quando os autores tratam sobre a intensidade da força centrípeta, simplesmente assumem que $a_{cp} = v^2/R$, sem qualquer tipo de demonstração.

Assim como no caso da cinemática escalar, os problemas supracitados têm por causa a falta de cálculo diferencial e integral no ensino médio. A seguir, serão apresentadas alternativas para sanar esses problemas.

3.2.2 O vetor posição em função do tempo

Em conformidade com o que foi dito no primeiro parágrafo do sub-tópico 3.1.2, não abordarei a cinemática vetorial em sua plenitude, apenas mostrarei os elementos indispensáveis para a apresentação adequada do tema proposto.

Usarei a notação que expressa cada vetor por um par ordenado, isto é, $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ [17] .

Assim como a posição escalar, a posição vetorial é geralmente dada como uma função do tempo. Exemplos:

$\mathbf{r}(t) = (t^2, t)$ (M.U.A. no eixo x e M.U. no eixo y)
$\mathbf{r}(t) = (2t, 4t)$ (M.R.U., $\mathbf{V}$ = **cte.**)

Para que os alunos familiarizem-se com as funções que fornecem a posição vetorial em função do tempo, convém mandá-los achar a posição para diversos valores conhecidos de t, o que pode ser feito através da utilização de tabelas. Para as duas funções anteriores, tem-se:

t	$\mathbf{r}(t) = (t^2, t)$	$\mathbf{r}(t) = (2t, 4t)$
1	$\mathbf{r}(1) = (1, 1)$	$\mathbf{r}(1) = (2, 4)$
2	$\mathbf{r}(2) = (4, 2)$	$\mathbf{r}(2) = (4, 8)$
3	$\mathbf{r}(3) = (9, 3)$	$\mathbf{r}(3) = (6, 12)$
4	$\mathbf{r}(4) = (16, 4)$	$\mathbf{r}(4) = (8, 16)$
5	$\mathbf{r}(5) = (25, 5)$	$\mathbf{r}(5) = (10, 20)$
6	$\mathbf{r}(6) = (36, 6)$	$\mathbf{r}(6) = (12, 24)$
7	$\mathbf{r}(7) = (49, 7)$	$\mathbf{r}(7) = (14, 28)$
8	$\mathbf{r}(8) = (64, 8)$	$\mathbf{r}(8) = (16, 32)$
9	$\mathbf{r}(9) = (81, 9)$	$\mathbf{r}(9) = (18, 36)$

Tabela 5.

Quando os alunos tiverem assimilado o modo como a função vetorial posição × tempo fornece a posição para cada instante, então é hora de passar aos gráficos. Sendo $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ a função posição vetorial de uma partícula, as componentes x(t) e y(t) podem ser representadas graficamente.

Por exemplo, para a função posição $\mathbf{r}(t) = (t^2, t)$, os gráficos para as componentes x(t) e y(t) são dados respectivamente pelo que se vê nas figuras 15 e 16:

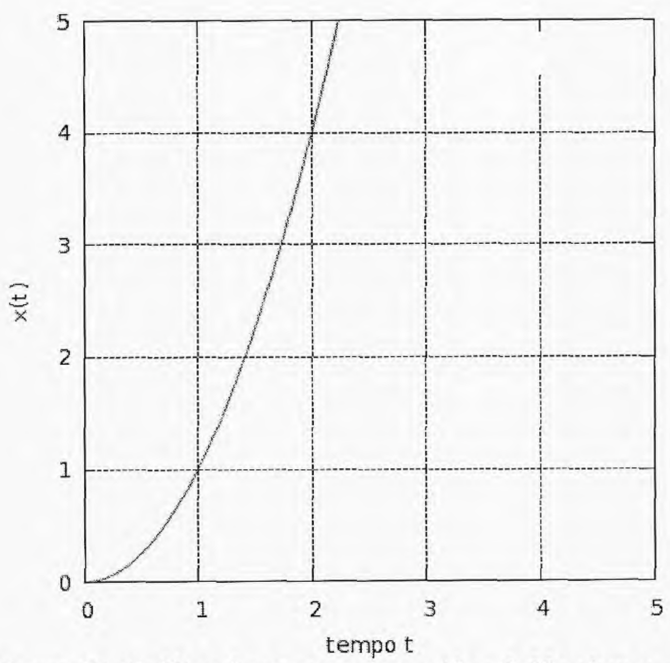


Figura 15. Gráfico da componente $x(t) = t^2$. No eixo x, a partícula executa um M.U.A. .

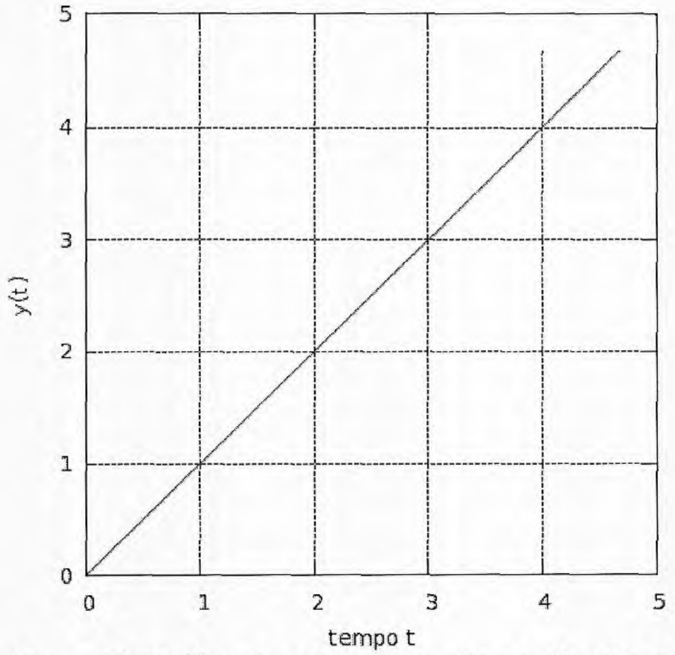


Figura 16. Gráfico da componente y(t) = t. No eixo y, a partícula executa um M.U. .

Com os alunos aptos para lidar com as funções que fornecem a posição vetorial em função do tempo, o que inclui os gráficos de suas componentes, podemos passar ao estudo da velocidade vetorial. Comecemos pela velocidade média.

3.2.3 A velocidade vetorial média

A velocidade média vetorial é definida como a razão do deslocamento vetorial pelo correspondente intervalo de tempo. Sendo $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ a função que fornece a posição vetorial em função do tempo para uma partícula, a velocidade média dessa partícula para o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dada por:

$$\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (11)$$

Por exemplo, sendo $\mathbf{r} = (5 + 6t + 7t^2,\ t)$ a função posição de uma partícula ($\mathbf{r}$ dado em metros e t em segundos) que executa um M.U.A. em x e um M.U. em y, a velocidade média da partícula no intervalo de tempo [1, 2] é dada por:

$$\mathbf{V}_m = \frac{\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 + 6t_2 + 7t_2^2,\ t_2) - (5 + 6t_1 + 7t_1^2,\ t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(45, 2) - (18, 1)}{2 - 1} =$$

$(27m/s, 1m/s)$

Definida a velocidade vetorial média, passemos à velocidade vetorial instantânea.

3.2.4 A definição de velocidade vetorial instantânea

Sendo $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$ a função posição vetorial de uma partícula, a velocidade vetorial instantânea dessa partícula no instante t é dada pela velocidade vetorial média no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$, onde $\Delta_p t$ é um intervalo de tempo muito, muito pequeno. Isto é:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)}{(t + \Delta_p t) - t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta_p t} \qquad (12)$$

3.2.5 Esclarecimentos sobre a velocidade instantânea

À semelhança do que ocorreu no estudo da cinemática escalar, não podemos deixar de fazer dois questionamentos:

Por que a velocidade vetorial instantânea recebe a definição anterior?

Qual é o valor de $\Delta_p t$ e o quão pequeno $\Delta_p t$ deve ser?

Mais uma vez, a resposta para essas perguntas vem pela análise gráfica. Deseja-se encontrar uma grandeza que descreva qualitativa e quantitativamente a rapidez com que a posição vetorial

r = (x(t), y(t)) varia , o que equivale a encontrar uma grandeza que descreva qualitativa e quantitativamente a rapidez com que as componentes x(t) e y(t) mudam. Observando-se gráficos $x(t) \times t$, percebe-se que quanto maior a inclinação $m_x(t)$ (em módulo) (figura 17), maior a rapidez com que a componente x(t) varia. O mesmo vale para o gráfico $y(t) \times t$, quanto maior a inclinação $m_y(t)$ (figura 18), maior a rapidez com que a componente y(t) muda. Logo, a grandeza $(m_x(t), m_y(t))$ fornece uma medida para a celeridade com que a posição **r** = (x(t), y(t)) varia. Portanto, nada mais natural do que definir a nova grandeza, que chamaremos de velocidade vetorial instantânea e representaremos por **V**(t), como $\mathbf{V}(t) = (m_x(t), m_y(t))$.

Fazendo considerações análogas às feitas para a velocidade escalar instantânea, podemos mostrar que :

$$m_x(t) = \frac{x(t + \Delta_p t) - x(t)}{\Delta_p t}$$

Onde $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva $x(t) \times t$ localizada entre t e $t + \Delta_p t$ seja praticamente reta.

$$m_y(t) = \frac{y(t + \Delta_p t) - y(t)}{\Delta_p t}$$

Onde $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva $y(t) \times t$ localizada entre t e $t + \Delta_p t$ seja praticamente reta.

Logo:

$\mathbf{V}(t) = (m_x(t), m_y(t)) = ([x(t + \Delta_p t) - x(t)] \div \Delta_p t , [y(t + \Delta_p t) - y(t)] \div \Delta_p t)$. Portanto:

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta_p t}$$

Onde $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que as porções das curvas $x(t) \times t$ e $y(t) \times t$ localizadas entre t e $t + \Delta_p t$ sejam praticamente retas. Obtemos assim a equação (12).

As considerações acima respondem aos questionamentos feitos sobre a definição da velocidade vetorial instantânea.

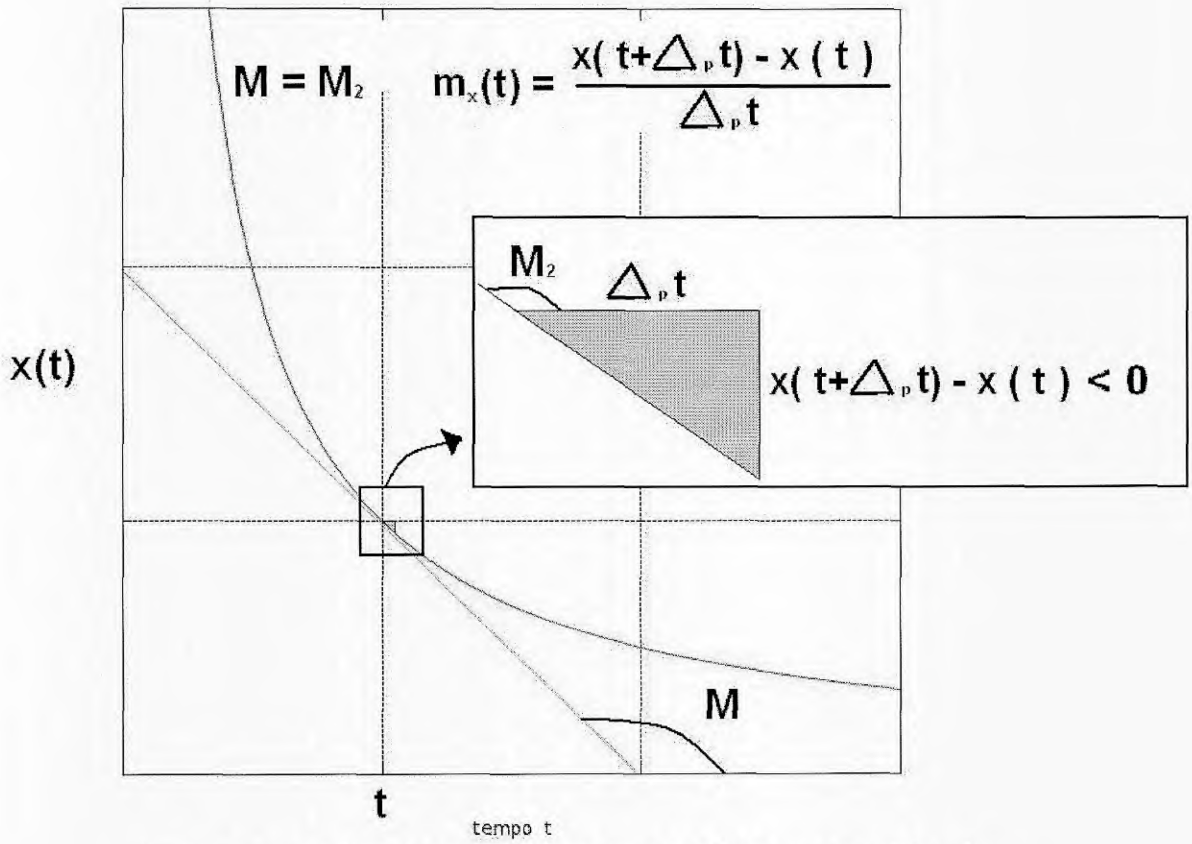


Figura 17. A inclinação $m_x(t)$ fornece uma medida para a rapidez do movimento no instante t. Se $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção correspondente ao intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ seja praticamente reta , então essa porção e a reta tangente à curva no ponto t são praticamente paralelas e $m_x(t) = [x(t + \Delta_p t) - x(t)] / \Delta_p t$.

A partir da definição de velocidade vetorial instantânea dada pela equação (9), podemos obter as características da velocidade vetorial (módulo, direção e sentido). Para isso, devemos estar inteirados da seguinte propriedade:

Se $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que as porções das curvas $x(t) \times t$ e $y(t) \times t$ localizadas entre t e $t + \Delta_p t$ sejam praticamente retas, então no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ a partícula executa um movimento aproximadamente uniforme (**V** aproximadamente constante, varia muito pouco) e, portanto, a trajetória executada nesse intervalo é aproximadamente reta e praticamente se sobrepõe ao deslocamento $\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)$ (figura 19) .

$\mathbf{V}(t) = [\ \mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)\ ] \div \Delta_p t$, onde $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que as porções das curvas $x(t) \times t$ e $y(t) \times t$ localizadas entre t e $t + \Delta_p t$ sejam praticamente retas. Portanto, o deslocamento $\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)$ se sobrepõe à trajetória correspondente ao intervalo $[t, t + \Delta_p t]$, o que implica:

V(t) tangente à trajetória.

Sentido de **V**(t) igual ao sentido do movimento.

$$\left| \mathbf{V}(t) \right| = \frac{\left| \mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t) \right|}{\Delta_p t} = \frac{\left| S(t + \Delta_p t) - S(t) \right|}{\Delta_p t} = \left| V(t) \right| \text{ (módulo da velocidade escalar)}$$

O que fica claro ao analisarmos a figura 19.

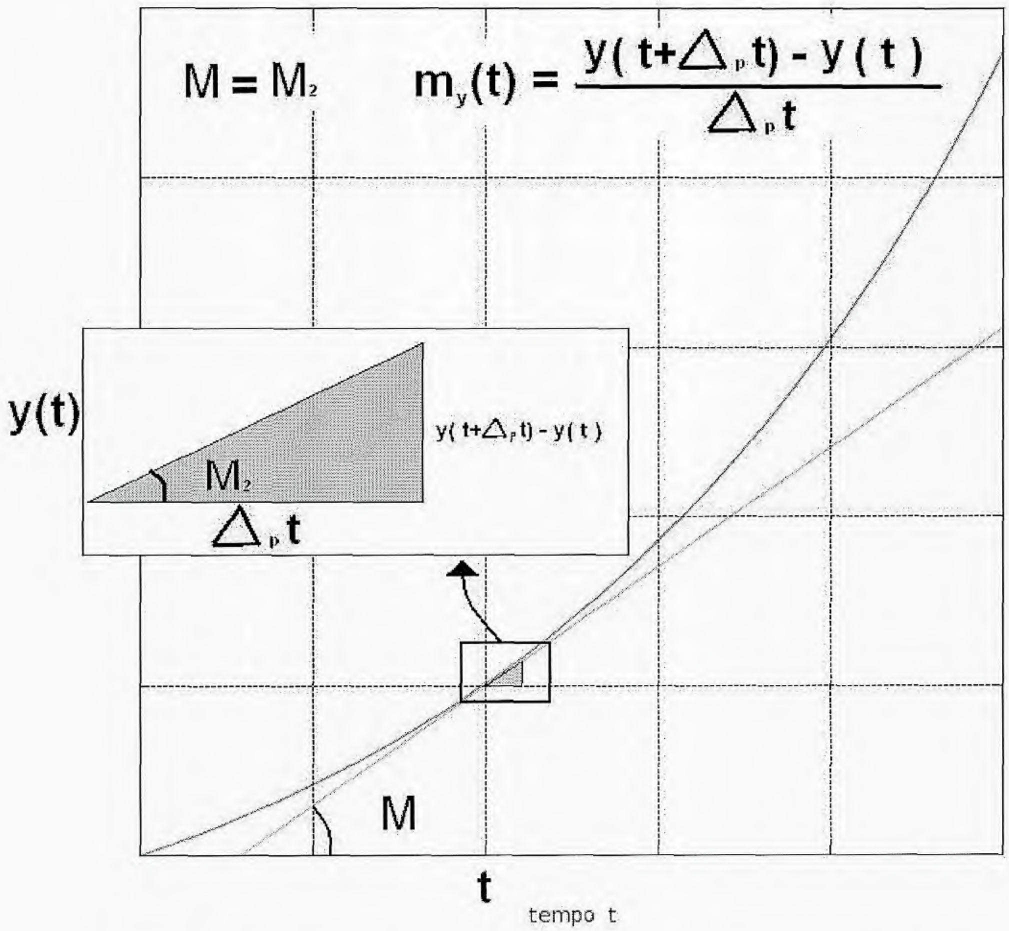


Figura 18. A inclinação $m_y(t)$ fornece uma medida para a rapidez do movimento no instante t. Se $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção correspondente ao intervalo [t, t + $\Delta_p t$] seja praticamente reta , então essa porção e a reta tangente à curva no ponto t são praticamente paralelas e $m_y(t) = [y(t + \Delta_p t) - y(t)] / \Delta_p t$.

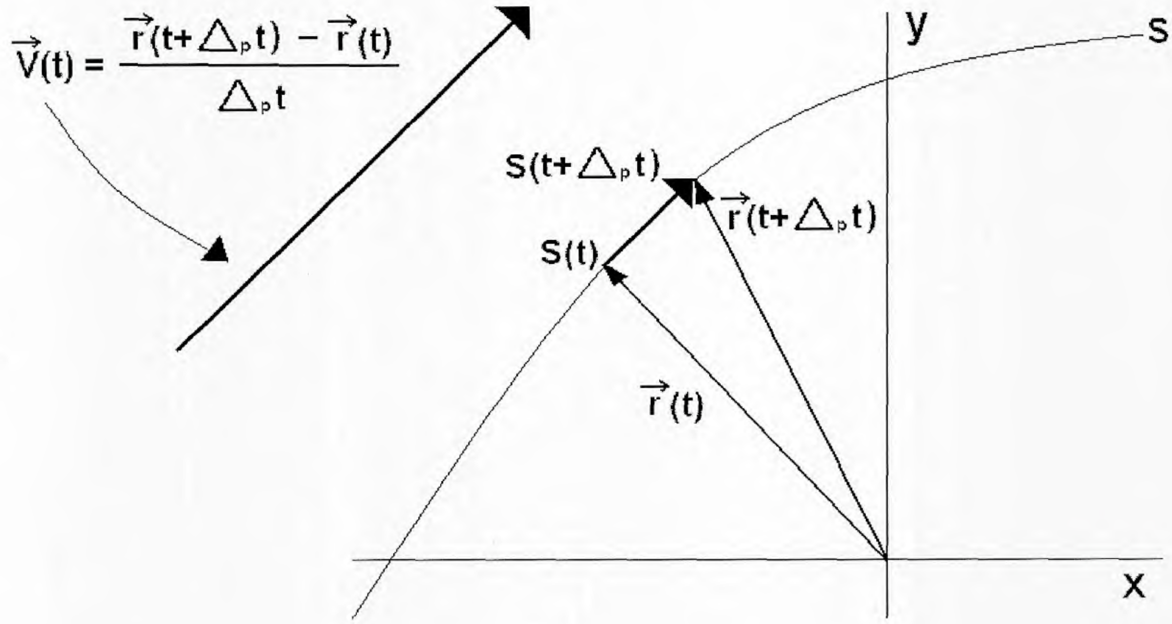


Figura 19. Na figura, S é a posição escalar. O deslocamento **r**(t + Δ_pt) – **r**(t) é dado pelo vetor que parte do ponto final de **r**(t) e vai até o ponto final de **r**(t + Δ_pt). $|$ **r**(t + Δ_pt) – **r**(t) $|$ = $|$ S(t + Δ_pt) – S(t) $|$.

Feito os esclarecimentos necessários sobre as características da velocidade vetorial instantânea e sua definição, podemos passar ao cálculo da mesma.

3.2.6 O cálculo da velocidade vetorial instantânea

O cálculo da velocidade vetorial instantânea é idêntico ao cálculo da velocidade escalar instantânea, exceto pelo fato que lidamos com duas funções (componentes) ao invés de uma.

Como exemplo, determinemos a função velocidade **V**(t) associada a função posição **r**(t) = (2 + 3t, sen(t)) de uma partícula que executa um M.U. em x e um M.H.S. em y.

r(t) = (2 + 3t, sen(t))

$$\mathbf{V}(t) = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta_p t} = \frac{(2 + 3t + 3\Delta_p t, \text{sen}(t + \Delta_p t)) - (2 + 3t, \text{sen}(t))}{\Delta_p t} =$$

$$\frac{(2 + 3t + 3\Delta_p t - 2 - 3t, \text{sen}(t)\cos(\Delta_p t) + \text{sen}(\Delta_p t)\cos(t) - \text{sen}(t))}{\Delta_p t} =$$

$$\frac{(3\Delta_p t, \text{sen}(t)\cos(\Delta_p t) + \text{sen}(\Delta_p t)\cos(t) - \text{sen}(t))}{\Delta_p t} =$$

$$(3, \text{sen}(t)\cos(\Delta_p t) \div \Delta_p t + \text{sen}(\Delta_p t)\cos(t) \div \Delta_p t - \text{sen}(t) \div \Delta_p t)$$

Vale algo análogo ao que foi visto no cálculo da velocidade escalar instantânea, $\Delta_p t$ muitíssimo menor que todos os coeficientes de ambas as equações e muitíssimo menor que 1, além de ser muitíssimo menor que t, x(t) e y(t). Logo $\cos(\Delta_p t) = 1$ e $\text{sen}(\Delta_p t) = \Delta_p t$. Portanto:

$$(3, \text{sen}(t)\cos(\Delta_p t) \div \Delta_p t + \text{sen}(\Delta_p t)\cos(t) \div \Delta_p t - \text{sen}(t) \div \Delta_p t) =$$

$$(3, \text{sen}(t) \div \Delta_p t + \Delta_p t \cos(t) \div \Delta_p t - \text{sen}(t) \div \Delta_p t) = (3, \cos(t))$$

$$\mathbf{V}(t) = (3, \cos(t))$$

3.2.7 Gráficos das componentes da velocidade e sua relação com o deslocamento

Sendo V_x e V_y respectivamente as componentes x e y da velocidade **V**, pode-se demonstrar, de maneira muito semelhante ao que foi feito no sub-tópico 3.1.7, que a área sob o gráfico $V_x \times t$ ($V_y \times t$) fornece o deslocamento Δx (Δy).

Sabendo dessa propriedade, podemos facilmente obter as funções posição do movimento uniforme e do movimento uniformemente variado, a nível vetorial. São elas:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}(t - t_0) \tag{13}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{V}_0(t - t_0) + ½ .\mathbf{a}(t - t_0)^2 \tag{14}$$

Não irei demonstrá-las porque esse trabalho já está tomando proporções consideráveis, ademais, nada de novo seria acrescentado.

3.2.8 A aceleração vetorial média

Sendo $\mathbf{V}(t) = (\ V_x(t),\ V_y(t)\ )$ a função velocidade de uma partícula, a aceleração vetorial média para o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dada por:

$$\mathbf{a}_m(t) = \frac{\mathbf{V}(t_2) - \mathbf{V}(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad (15)$$

Por exemplo, sendo $\mathbf{V}(t) = (20, 40 - 10t)$ a função velocidade de uma partícula ($\mathbf{V}$ dado em m/s e t dado em s) que executa um M.U. em x e um M.U.A. em y (lançamento oblíquo, por exemplo) , a aceleração média correspondente ao intervalo [1, 2] é dada por:

$$\mathbf{a}_m(t) = \frac{\mathbf{V}(t_2) - \mathbf{V}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(20, 20) - (20, 30)}{2 - 1} = (0, -10m/s^2)$$

3.2.9 A aceleração vetorial instantânea

Sendo $\mathbf{V}(t) = (V_x(t),\ V_y(t)\ )$ a função velocidade de uma partícula, a aceleração vetorial instantânea dessa partícula no instante t é dada pela aceleração média calculada no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$, onde $\Delta_p t$ muitíssimo pequeno. Isto é:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathbf{V}(t + \Delta_p t) - \mathbf{V}(t)}{\Delta_p t} \qquad (16)$$

Conforme podemos ver na figura 20, em movimentos curvilíneos, a aceleração vetorial instantânea aponta sempre para a concavidade da curva.

Não irei traçar considerações sobre a gênese da aceleração vetorial instantânea, qualquer coisa nesse sentido seria muito semelhante ao que foi feito no sub-tópico 3.2.5 . Já no que diz respeito ao cálculo da aceleração vetorial instantânea, apenas tratarei da aceleração no movimento circular.

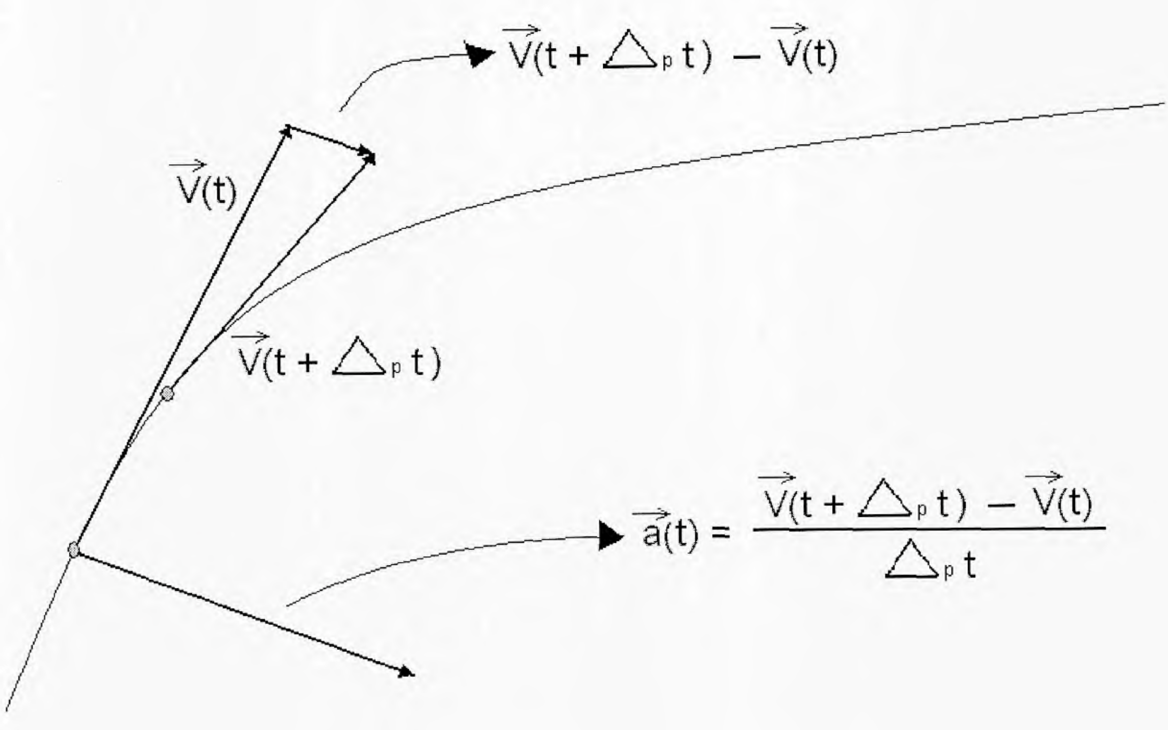


Figura 20. Em movimentos curvilíneos, a aceleração vetorial instantânea aponta sempre “para dentro” da curva.

3.2.10 A aceleração vetorial instantânea no movimento circular uniforme

A figura 21 mostra o hodógrafo do movimento circular uniforme. É fácil demonstrar que o ângulo entre $\mathbf{r}(t + \Delta_p t)$ e $\mathbf{r}(t)$ é o mesmo que entre $\mathbf{V}(t + \Delta_p t)$ e $\mathbf{V}(t)$. Como $|\mathbf{r}(t + \Delta_p t)| = |\mathbf{r}(t)| = R$ e $|\mathbf{V}(t + \Delta_p t)| = |\mathbf{V}(t)| = V$, vem que os 2 triângulos mostrados na figura são semelhantes. Logo:

$$\frac{|\mathbf{r}(t)|}{|\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)|} = \frac{|\mathbf{V}(t)|}{|\mathbf{V}(t + \Delta_p t) - \mathbf{V}(t)|}$$

Portanto:

$$\frac{R}{|\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)|} = \frac{V}{|\mathbf{V}(t + \Delta_p t) - \mathbf{V}(t)|}$$

Multiplicando-se ambos os lados da equação por $\Delta_p t$, obtém-se:

$$R \,.\, \frac{\Delta_p t}{|\mathbf{r}(t + \Delta_p t) - \mathbf{r}(t)|} = V \,.\, \frac{\Delta_p t}{|\mathbf{V}(t + \Delta_p t) - \mathbf{V}(t)|}$$

(onde $\Delta_p t$ obedece à condição para o cálculo da velocidade vetorial)

Logo:

$$\frac{R}{V} = \frac{V}{a(t)}$$

Portanto:

$$a(t) = V^2 / R \qquad (17)$$

Obtemos então o módulo da aceleração para o movimento circular uniforme.

Como $\Delta_p t$ obedece à condição para o cálculo da velocidade, a trajetória executada no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ é praticamente reta e, portanto, o ângulo $\Delta_p \theta$ é muito pequeno. Logo, o ângulo entre $\mathbf{V}(t + \Delta_p t) - \mathbf{V}(t)$ e $\mathbf{V}(t)$ é muito próximo de 90° e assim $\mathbf{a}(t)$ praticamente aponta para o centro da circunferência.

Tem-se então:

$| \mathbf{a}(t) | = V^2 / R$

a(t) aponta para o centro da circunferência.

No M.C.U. só há aceleração centrípeta.

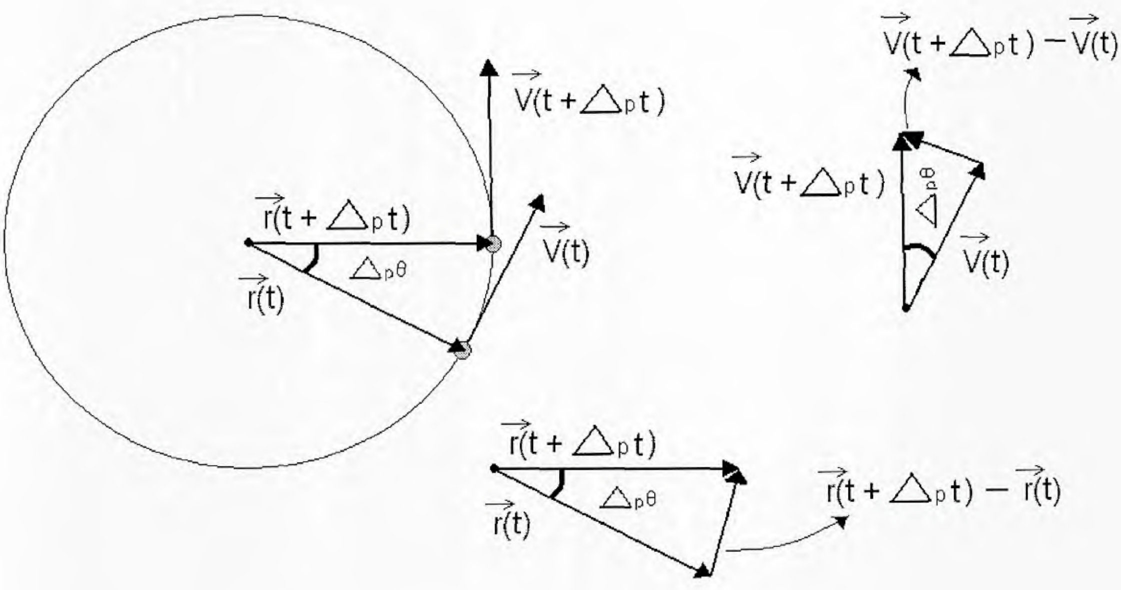


Figura 21. Hodógrafo do M.C.U. .

3.2.11 Conclusão

No estudo da cinemática vetorial, utilizando quantidades muitíssimo pequenas e fazendo as considerações adequadas, podemos aclarar aspectos conceituais, demonstrar propriedades que de outra forma ficariam sob o jugo de simples memorização e até mesmo abordar novos elementos.

3.3 O uso de infinitésimos no ensino de trabalho e energia

3.3.1 Introdução

Mais uma vez, inicio a discussão fazendo uma análise parcial sobre como os livros didáticos abordam o assunto em questão. Tratarei apenas do seguinte ponto: trabalho e energia cinética.

Geralmente, quando os livros tratam da relação existente entre o trabalho da força resultante e a energia cinética, isto é, $W = \Delta E_{cin}$, fazem-no analisando o caso particular em que a partícula executa um movimento retilíneo uniformemente variado (**F** constante e sempre paralela à trajetória) ; posteriormente generalizando o resultado para qualquer tipo de movimento. Nesse trabalho, darei uma demonstração abordando o caso geral.

3.3.2 O trabalho de uma força constante num movimento retilíneo

O trabalho de uma força constante **F** que atua sobre uma partícula que executa um movimento retilíneo (figura 22) é dado pelo produto escalar da força **F** pelo deslocamento, isto é :

$$W = \mathbf{F} \bullet \Delta\mathbf{r} = F.\Delta r.\cos\theta \qquad (18)$$

Onde θ é o ângulo entre a força **F** e o deslocamento $\Delta\mathbf{r}$.

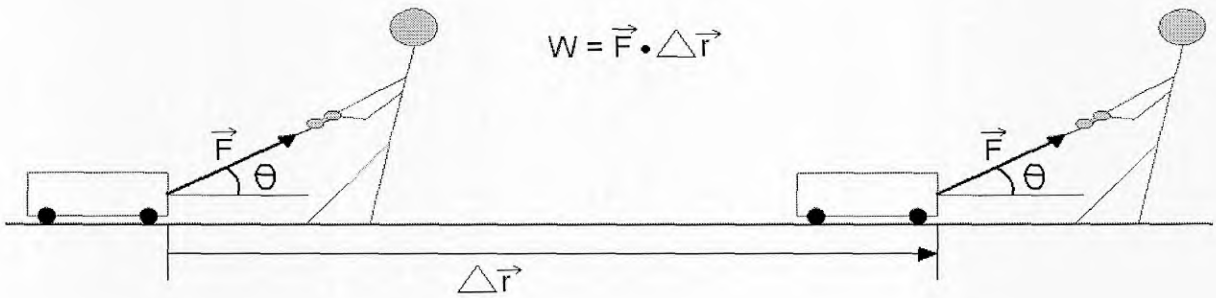


Figura 22.

Frente à definição de trabalho apresentada acima, podemos nos perguntar como calcular o trabalho realizado por uma força qualquer numa trajetória não necessariamente reta. A resposta para esse questionamento é dividir a trajetória em diversos segmentos extremamente pequenos e praticamente retos, de modo que em cada um deles o valor da força varie muito pouco. Desta maneira, o problema se reduz a calcular vários trabalhos onde cada um é realizado com força constante e sobre uma trajetória reta.

3.3.3 O trabalho da força resultante e a variação da energia cinética

Considere uma partícula que está sob ação de uma força resultante variável **F** e que descreve uma trajetória qualquer S (figura 23). Para calcular o trabalho da força **F**, divide-se a trajetória S em um número n muito grande de segmentos IP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 ... , $P_{n-2}P_{n-1}$ e $P_{n-1}F$ muitíssimo pequenos. Sendo:

t_1 = instante de tempo em que a partícula passa por P_1.
t_2 = instante de tempo em que a partícula passa por P_2.
t_3 = instante de tempo em que a partícula passa por P_3.
E assim por diante.

$\mathbf{F}_1$ = força que atua sobre a partícula quando essa está sobre P_1.

$\mathbf{F}_2$ = força que atua sobre a partícula quando essa está sobre P_2.

$\mathbf{F}_3$ = força que atua sobre a partícula quando essa está sobre P_3.

E assim por diante.

$\Delta_p\mathbf{r}_1$ = deslocamento correspondente ao seguimento P_1P_2

$\Delta_p\mathbf{r}_2$ = deslocamento correspondente ao seguimento P_2P_3

$\Delta_p\mathbf{r}_3$ = deslocamento correspondente ao seguimento P_3P_4

E assim por diante.

$\Delta_p t_1$ = tempo que a partícula leva para percorrer o segmento P_1P_2.

$\Delta_p t_2$ = tempo que a partícula leva para percorrer o segmento P_2P_3.

$\Delta_p t_3$ = tempo que a partícula leva para percorrer o segmento P_3P_4.

E assim por diante.

t_i = instante de tempo em que a partícula passa por I.

t_f = instante de tempo em que a partícula passa por F.

$\mathbf{F}_i$ = força que atua sobre a partícula quando essa está sobre I.

$\Delta_p\mathbf{r}_0$ = deslocamento correspondente ao seguimento IP_1

$\Delta_p t_0$ = tempo que a partícula leva para percorrer o segmento IP_1.

$\Delta_p\mathbf{r}_{n-1}$ = *deslocamento correspondente ao seguimento* $P_{n-1}F$

$\Delta_p t_{n-1}$ = tempo que a partícula leva para percorrer o segmento $P_{n-1}F$.

O trabalho da força **F** é dado por:

$W = \mathbf{F}_i \bullet \Delta_p\mathbf{r}_0 + \mathbf{F}_1 \bullet \Delta_p\mathbf{r}_1 + \mathbf{F}_2 \bullet \Delta_p\mathbf{r}_2 + \mathbf{F}_3 \bullet \Delta_p\mathbf{r}_3 + \ldots + \mathbf{F}_{n-2} \bullet \Delta_p\mathbf{r}_{n-2} + \mathbf{F}_{n-1} \bullet \Delta_p\mathbf{r}_{n-1} =$

(supondo que cada intervalo $\Delta_p t_k$ seja suficientemente pequeno para ser usado no cálculo da aceleração e da velocidade)

Como $\mathbf{V}(t_k) = \dfrac{\Delta_p\mathbf{r}_k}{\Delta_p t_k}$, vem que:

$W = m\mathbf{a}(t_i) \bullet \mathbf{V}(t_i)\, \Delta_p t_0 + m\mathbf{a}(t_1) \bullet \mathbf{V}(t_1)\, \Delta_p t_1 + m\mathbf{a}(t_2) \bullet \mathbf{V}(t_2)\, \Delta_p t_2 + m\mathbf{a}(t_3) \bullet \mathbf{V}(t_3)\, \Delta_p t_3 + \ldots +$
$m\mathbf{a}(t_{n-2}) \bullet \mathbf{V}(t_{n-2})\, \Delta_p t_{n-2} + m\mathbf{a}(t_{n-1}) \bullet \mathbf{V}(t_{n-1})\, \Delta_p t_{n-1} =$

$$m.\frac{V(t_i + \Delta_p t_0) - V(t_i)}{\Delta_p t_0} \bullet V(t_i)\,\Delta_p t_0 + m.\frac{V(t_1 + \Delta_p t_1) - V(t_1)}{\Delta_p t_1} \bullet V(t_1) + \ldots +$$

$$m.\frac{V(t_{n-2} + \Delta_p t_{n-2}) - V(t_{n-2})}{\Delta_p t_{n-2}} \bullet V(t_{n-2})\,\Delta_p t_{n-2} + m.\frac{V(t_f) - V(t_{n-1})}{\Delta_p t_{n-1}} \bullet V(t_{n-1})\,\Delta_p t_{n-1} =$$

$$m\,.\,\{\,[V(t_i + \Delta_p t_0) - V(t_i)] \bullet V(t_i) + [V(t_1 + \Delta_p t_1) - V(t_1)] \bullet V(t_1) + [\,V(t_2 + \Delta_p t_2) - V(t_2)] \bullet V(t_2) + \ldots + [V(t_{n-2} + \Delta_p t_{n-2}) - V(t_{n-2})] \bullet V(t_{n-2}) + [\,V(t_f) - V(t_{n-1})] \bullet V(t_{n-1})\,\} =$$

$$W = m\,.\,\{\,[V(t_1) - V(t_i)] \bullet V(t_i) + [V(t_2) - V(t_1)] \bullet V(t_1) + [V(t_3) - V(t_2)] \bullet V(t_2) + \ldots + [V(t_{n-1}) - V(t_{n-2})] \bullet V(t_{n-2}) + [\,V(t_f) - V(t_{n-1})] \bullet V(t_{n-1})\,\}$$

Como cada $\Delta_p t_k$ é muitíssimo pequeno, vem que $V(t_k) \approx V(t_{k+1})$. De modo que podemos impor:

$$V(t_k) = \tfrac{1}{2}\,[V(t_k) + V(t_{k+1})]$$

Logo:

$$W = m\,.\,\{\,[V(t_1) - V(t_i)] \bullet V(t_i) + [V(t_2) - V(t_1)] \bullet V(t_1) + [V(t_3) - V(t_2)] \bullet V(t_2) + \ldots + [V(t_{n-1}) - V(t_{n-2})] \bullet V(t_{n-2}) + [\,V(t_f) - V(t_{n-1})] \bullet V(t_{n-1})\,\} =$$

$$m\,.\,\{\,[V(t_1) - V(t_i)] \bullet \tfrac{1}{2}[V(t_i) + V(t_1)] + [V(t_2) - V(t_1)] \bullet \tfrac{1}{2}[V(t_1) + V(t_2)] + [V(t_3) - V(t_2)] \bullet \tfrac{1}{2}[V(t_2) + V(t_3)] + \ldots + [V(t_{n-1}) - V(t_{n-2})] \bullet \tfrac{1}{2}[V(t_{n-2}) + V(t_{n-1})] + [\,V(t_f) - V(t_{n-1})] \bullet \tfrac{1}{2}[V(t_{n-1}) + V(t_f)]\,\}$$

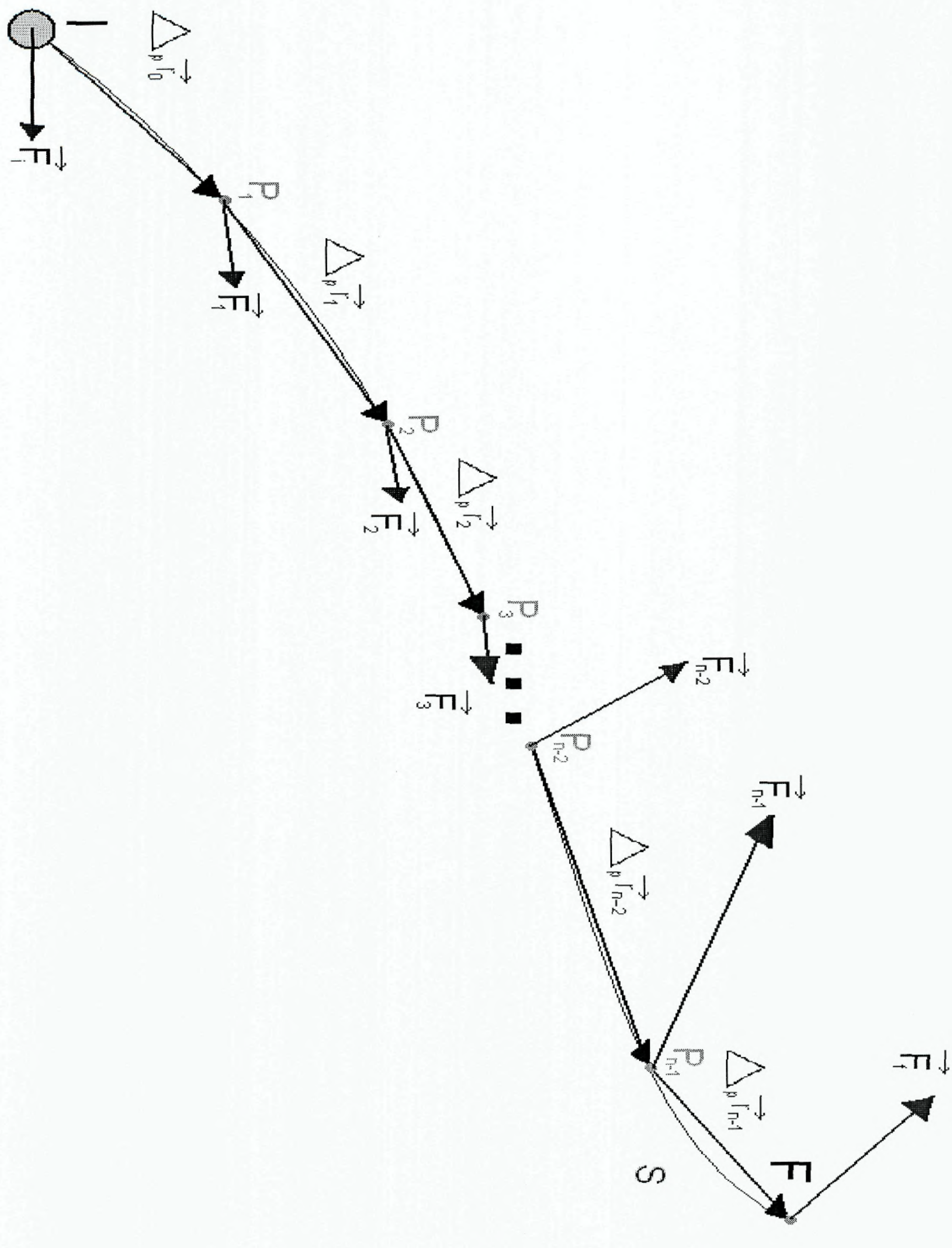


Figura 23. Na figura, cada força $\mathbf{F}_k$ é a força resultante que atua sobre a partícula durante o deslocamento $\Delta_p \mathbf{r}_k$.

Portanto:

$W = ½ . m . \{ [V(t_1)]^2 – [V(t_i)]^2 + [V(t_2)]^2 - [V(t_1)]^2 + [V(t_3)]^2 - [V(t_2)]^2 + ... + [V(t_{n-1})]^2 - [V(t_{n-2})]^2 + [V(t_f)]^2 - [V(t_{n-1})]^2 \} = ½ . m . \{ [V(t_f)]^2 – [V(t_i)]^2 \}$

$$W = ½ . m . V_f^2 - ½ . m . V_i^2 \qquad (19)$$

O trabalho da força resultante é igual à variação da energia cinética.

3.3.4 Conclusão

No estudo da grandeza trabalho, utilizando quantidades muitíssimo pequenas e fazendo as considerações adequadas, podemos provar que o trabalho da força resultante é sempre igual à variação da energia cinética. Obtemos, portanto, um resultado que de outro modo só poderia ser obtido através do uso de integrais de linha.

É interessante acrescentar que, por intermédio do uso de quantidades ínfimas, podemos ainda obter as funções que fornecem a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica.

3.4 Conclusão

No ensino da mecânica, o uso de infinitésimos possibilita o aclaramento de aspectos conceituais, a demonstração de propriedades que de outra forma ficariam sob o jugo de simples memorização e até mesmo a abordagem de novos elementos.

As aplicações mostradas até aqui são apenas uma pequena parte do que pode ser feito com infinitésimos no estudo da mecânica. De fato, poucos são os conceitos, propriedades e fórmulas da mecânica que não podem ser explicados ou demonstrados através da utilização de infinitésimos.

4 APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS DA FÍSICA

4.1 O uso de infinitésimos no ensino da eletricidade

4.1.1 Introdução

As aplicações dos infinitésimos ao estudo da física no ensino médio não se restringem apenas à mecânica, os infinitésimos podem ser aplicados ao ensino de todos os ramos da física.

A seguir, abordarei algumas aplicações em eletricidade.

4.1.2 Corrente elétrica

A corrente elétrica que atravessa um fio condutor no instante t é dada pela razão da carga $\Delta_p q$ que atravessa uma seção reta do fio no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$ pelo correspondente intervalo de tempo, isto é:

$$i = \Delta_p q / \Delta_p t \qquad (20)$$

A grandeza corrente elétrica tem origem na necessidade de descrever qualitativa e quantitativamente a rapidez com que a carga atravessa a seção reta do fio. Tal descrição é satisfatoriamente fornecida pela inclinação m(t) do gráfico $q \times t$ (figura 24) (quanto mais "inclinada" for a curva, maior a rapidez com que a carga atravessa a seção reta do fio condutor), de modo que impõe-se $i = m(t)$. Como $m(t) = \Delta_p q / \Delta_p t$, vem que:

$i = \Delta_p q / \Delta_p t$

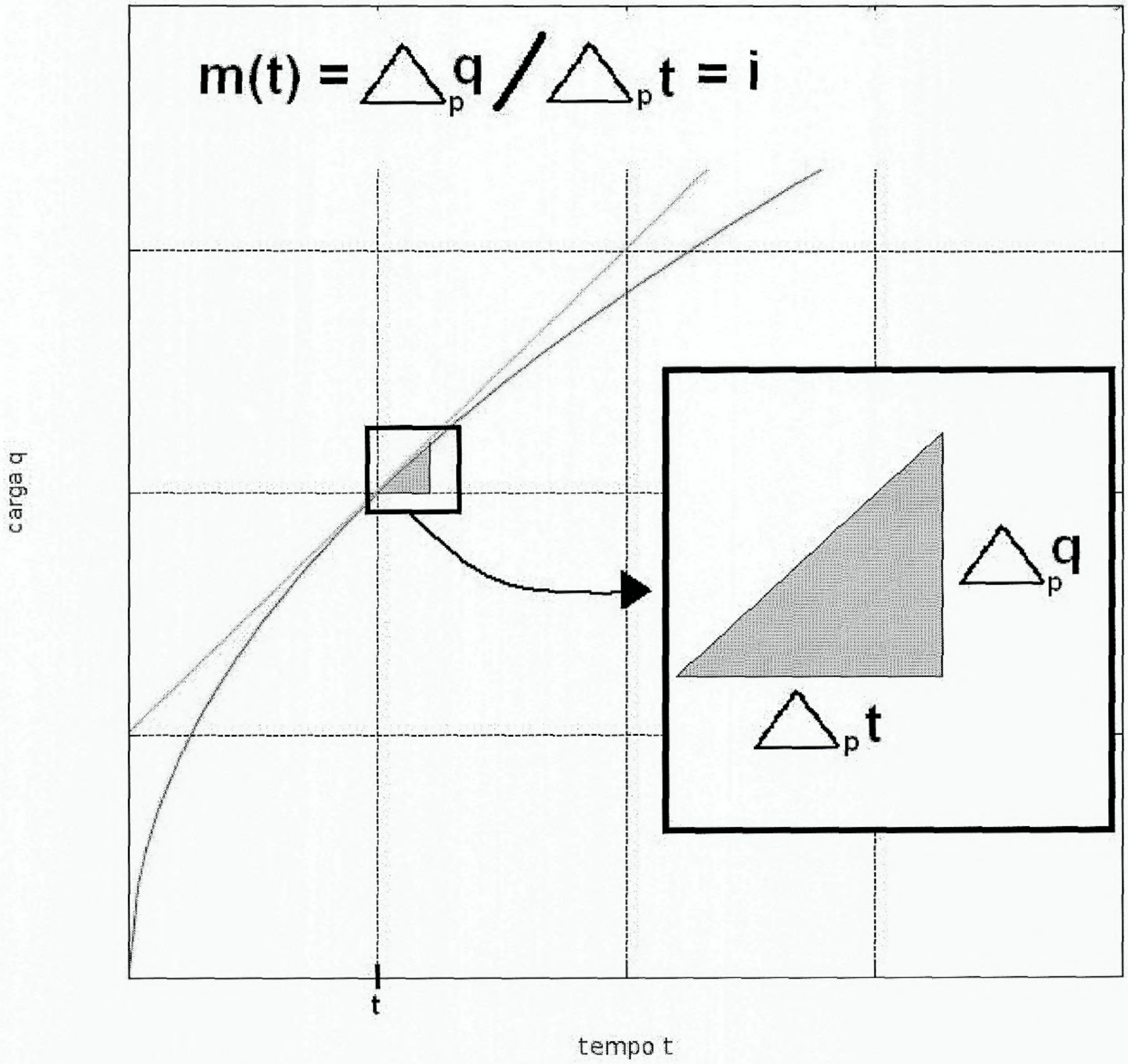


Figura 24. A corrente no instante t é dada pelo coeficiente angular $m(t) = \Delta_p q / \Delta_p t$. $\Delta_p q$ é a carga que atravessa a seção reta do fio no intervalo $[t, t + \Delta_p t]$, onde $\Delta_p t$ suficientemente pequeno para que a porção da curva localizada entre t e $t + \Delta_p t$ seja praticamente reta.

4.1.3 A potência total utilizada por um receptor elétrico

Considere um receptor elétrico entre 2 terminais A e B com voltagens respectivamente iguais a V(A) e V(B), com V(A) > V(B) . No intervalo de tempo $[t, t + \Delta_p t]$, uma carga $\Delta_p q$ entra no receptor pelo terminal A e outra carga $\Delta_p q$ sai do receptor pelo terminal B (utilizando a corrente convencional) (figura 25). Portanto, no intervalo de tempo $[t, t + \Delta_p t]$, a energia fornecida ao receptor é dada por:

$$\Delta_p E = \Delta_p q\,[V(A) - V(B)] \qquad (21)$$

Logo, a potência total utilizada pelo receptor (potência efetiva + potência dissipada) no instante t é dada por:

$$P = \Delta_p E \,/\, \Delta_p t = \Delta_p q \,/ \Delta_p t \,.\, [V(A) - V(B)]$$

Logo:

$$P = i.\Delta V \qquad (22)$$

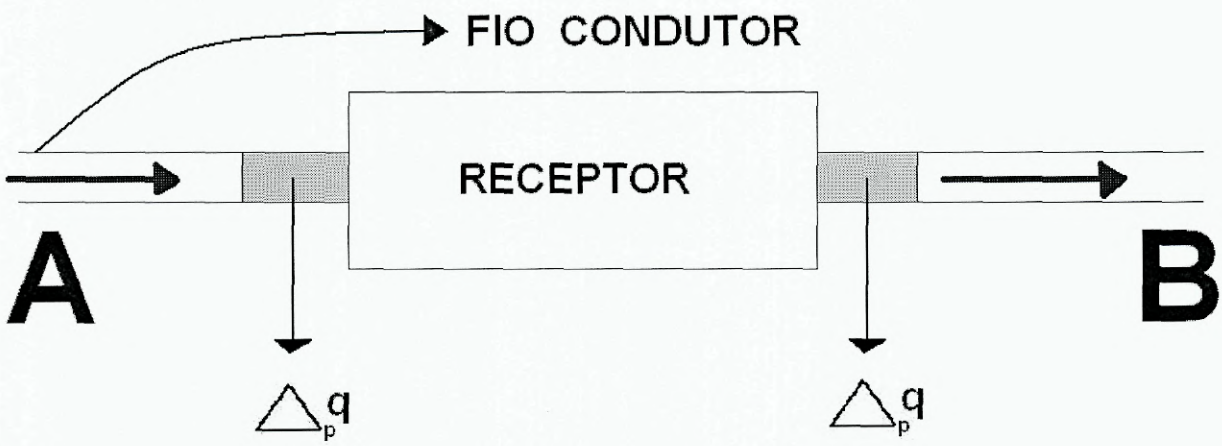


Figura 25.

4.1.4 Conclusão

esclarecimento

Os infinitésimos também podem ser aplicados em demonstrações e aclaramentos conceituais no estudo da eletricidade. Embora só se tenha abordado 2 aplicações, podemos empregar largamente os infinitésimos no ensino da eletricidade. Poderíamos, por exemplo, demonstrar que o trabalho do vetor campo elétrico é igual à variação de potencial, deduzir o valor do campo magnético no interior de uma bobina condutora e até mesmo demonstrar a Lei de Gauss.

5 CONCLUSÃO

Utilizando infinitésimos, podemos sobrepujar muitas das dificuldades geradas pela ausência do cálculo diferencial e integral no Ensino Médio; aclarando aspectos conceituais e demonstrando propriedades que de outra forma ficariam sob o jugo de simples memorização. Podemos até mesmo abordar novos conceitos.

O uso de infinitésimos no ensino de física é particularmente fecundo na mecânica e eletricidade, onde a esmagadora maioria dos conceitos e fórmulas podem ser explicados ou demonstrados e muitos novos assuntos podem ser abordados.

É interessante acrescentar que o tratamento proposto neste trabalho prepara os alunos que desejam seguir carreira na área de ciências exatas para o que os mesmos verão na faculdade. Percebe-se que muitos estudantes de engenharia e física sabem calcular integrais, mas possuem uma compreensão deficiente sobre o assunto. Não percebem que, ao menos nas aplicações práticas, integrais nada mais são do que o somatório de partes muito pequenas, algo presente neste trabalho.

Com esse trabalho, também ofereço oposição à infeliz tendência que se tem acentuado nos últimos anos, a de que é necessário tornar o ensino das ciências exatas menos matematizado. Incluindo o ensino da própria matemática! Isso tem colaborado para uma diminuição de qualidade do ensino das ciências exatas, o que fica patente ao observarmos a evolução dos livros didáticos, que estão cada vez piores.

Finalmente, com o objetivo de reafirmar toda a potencialidade dos infinitésimos e de oferecer um contraponto às críticas sobre a formalidade matemática do método infinitesimal, termino esse trabalho com um trecho de "Infinitésimos: Quem ri por último?"[9], artigo escrito por Roberto Ribeiro Baldino. Embora o trecho seja retirado de um artigo voltado para o ensino superior, o mesmo não deixa de ser pertinente:

"Minha experiência mostra que os alunos tendem a preferir esse método infinitesimal para justificar os cálculos sobre "aplicações da integral definida" que faz parte dos livros textos e que vão, além do cálculo de áreas planas, ao cálculo de áreas de superfícies de revolução, de trabalho mecânico, de pressão hidrostática, etc. Diante do método infinitesimal as somas de Riemann parecem desajeitados e desnecessariamente complicadas.

É engraçado que alguma vez se tenha rido desse método. "

REFERÊNCIAS

[1] David Halliday; Robert Resnick – Física 1 – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1983.

[2] Marcelo Alonso; Edward J. Finn – Física, um Curso Universitário 1 - Editora Edgard Blücher , 1972

[3] Mustafa A. Munem; David J. Foulis – Cálculo – Editora Guanabara S.A., 1982.

[4]http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/topics/calculus.htm (Acessado em 02/05/2010)

[5] Howard Eves – Introdução à História da Matemática – Editora da UNICAMP, 1995.

[6] http://ecalculo.if.usp.br/historia/historia_integrais.htm (Acessado em 02/05/2010)

[7] Dirk J. Struik – História Concisa das Matemáticas – Gradiva, 1989.

[8] http://euler.mat.ufrgs.br/~portosil/oque.html (Acessado em 02/05/2010)

[9] Roberto Ribeiro Baldino – Infinitésimos: Quem ri por último? - UNESP, Câmpus de Rio Claro IGCE, Departamento de Matemática , Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, 1998.

[10] http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/Origem.htm (Acessado em 02/05/2010)

[11] Regina Azenha Bonjorno; José Roberto Bonjorno; Valter Bonjorno; Clinton Marcico Ramos -Física Fundamental, 2º grau, Volume Único – FTD, 1993.

[12] Alberto Gaspar – Física, volume único – Editora Ática, 2003.

[13] Antônio Máximo; Beatriz Alvarenga – Física, volume único – Editora Scipione, 1997.

[14] José Luiz Sampaio; Caio Sérgio Calçada – Universo da Física, vol. 1 - Atual Editora, 2005.

[15] Francisco Ramalho Junior; José Ivan Cardoso dos Santos; Nicolau Gilberto Ferraro; Paulo Antônio de Toledo Soares - Os Fundamentos da Física, Mecânica – Editora Moderna, 1983.

[16] Wilson Carron; Osvaldo Guimarães – As faces da física, volume único – Editora Moderna, 2006 .

[17] Antonio dos Santos Machado – Algebra Linear e Geometria Analítica – Editora Atual, 1980.