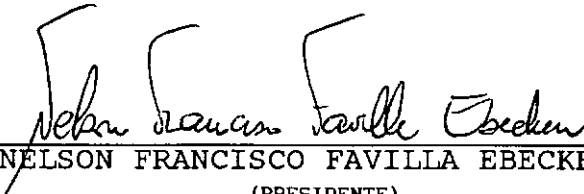


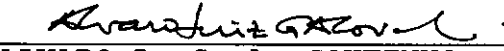
ALGORITMOS DE RELAXAÇÃO DINÂMICA ADAPTATIVA PARA A ANÁLISE
ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

JORGE HUMBERTO FLÓREZ PATARROYO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
(M.Sc) EM ENGENHARIA CIVIL.

APROVADA POR:


NELSON FRANCISCO FAVILLA EBECKEN, D.Sc.
(PRESIDENTE)


ALVARO L. G. A. COUTINHO, D.Sc


ALVARO MAIA DA COSTA, D.Sc

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1991

FLÓREZ PATARROYO, JORGE HUMBERTO

Algoritmos de Relaxação Dinâmica Adaptativa para
Análise Elastoplástica de Estruturas
Tridimensionais [Rio de Janeiro] 1991.

VIII, 90 p. 29,7 cm. (COPPE/UFRJ , M.Sc.,
Engenharia Civil, 1991).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE.

1. Análise Não-Linear de estruturas

2. Relaxação Dinâmica

3. Relaxação Viscosa

I. COPPE/UFRJ

II. TÍTULO (série)

AOS MEUS PAIS, IRMÃOS
E A ADRIANA.

AGRADECIMENTOS

Aos meu pais: LUIS ARMANDO FLOREZ ALVAREZ e AIDA STELLA PATARROYO DE FLOREZ, por todo o seu carinho e compreensão sem os quais não poderia ter chegado até aqui.

Ao professor NELSON EBECKEN, pela valiosa orientação e incentivos dados para que este trabalho pudesse ser realizado.

A Adriana, João Paulo e Marcílio, pela grande ajuda que me deram na confecção desta tese.

Aos pesquisadores Breno P. Jacob, José Alves e Luis A. de Souza pela colaboração prestada para o sucesso deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos, Rafa, Bogarin, Luis Paulo, Zacarias, Fernando, Maria Lúcia e Gray pela sua força e amizade.

Aos funcionários Célio Nóia do laboratório de computação, aos consultores do NCE Pergentino e Roberto Paixão pela sua valiosa colaboração.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc).

ALGORITMOS DE RELAXAÇÃO DINÂMICA ADAPTATIVA PARA ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

JORGE HUMBERTO FLÓREZ PATARROYO

Agosto 1991

Orientador: Prof. Nelson Francisco Favilla Ebecken

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho são apresentadas algumas estratégias de algoritmos de relaxação dinâmica adaptativos, aplicados a análise de estruturas discretizadas por elementos finitos isoparamétricos tridimensionais. Estes algoritmos permitem fazer análises lineares e não lineares, considerando plasticidade e efeitos não-lineares geométricos.

Vários exemplos são analisados para examinar a performance dos algoritmos implementados.

ABSTRACT OF THE THESIS PRESENTED TO COPPE/UF RJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M.Sc).

ADAPTIVE DYNAMIC RELAXATION ALGORITHMS FOR
ELASTOPLASTIC ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES

JORGE HUMBERTO FLÓREZ PATARROYO

August of 1991

Chairman: Nelson Francisco Favilla Ebecken

Department: Civil Engineering

This work presents some dynamic relaxation
adaptive algorithms applied to the analysis of structures
by the Finite Element Method (isoparametric
three-dimensional elements). These algorithms allow for
both linear or non-linear analysis, considering plasticity
and large displacement effects.

Finally some examples of application are given to
show the performance of the suggested algorithms.

ÍNDICE

CAPÍTULO I.- INTRODUÇÃO	1
I.1 - Motivação	1
I.2 - Origem do Método	2
I.3 - Revisão Bibliográfica	3
I.4 - Organização da Tese	5
 CAPÍTULO II - ALGORITMOS ADAPTATIVOS DE	
RELAXACÃO DINÂMICA	7
II.1 - Preliminares	7
II.2 - Algoritmos Estudados	11
II.2.1 - Relaxação Dinâmica	11
II.2.2 - Relaxação Viscosa	16
 CAPÍTULO III - IMPLEMENTACAO COMPUTACIONAL	21
III.1 - Sistema Implementado	21
III.2 - Elemento Finito 3D	24
III.3 - Análise Não Linear	30
III.3.1 - Formulação Lagrangeana	
Total	31
III.3.2 - Formulação Lagrangeana	
Atualizada	38

CAPÍTULO IV - ANÁLISE DE RESULTADOS	45
IV.1 - Viga Tracionada	45
IV.2 - Viga a Flexão	50
IV.3 - Chapa Perfurada	53
IV.4 - Cilindro Espesso	59
IV.5 - Junta T	64
IV.6 - Grupo de Estacas	67
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	74

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1- MOTIVACÃO:

Recentemente, o método da Relaxação Dinâmica, tem despertado acentuado interesse em diversas áreas da engenharia, principalmente com o advento de computadores com arquitetura vetorial/paralela.

O RD, como é comumente chamado, é especialmente atrativo para problemas com não linearidade física e geométrica acentuada, que incluem pontos limites ou regiões com características pouco rígidas.

Em muitos casos, o número de iterações para se obter a convergência pode ser elevado, porém o fato de não necessitar armazenar, nem decompor uma matriz de rigidez faz com que este método seja de fácil programação e requer pouca memória. Além disso, o código gerado é facilmente vetorizado e paralelizado.

Esta combinação pode resultar num método de solução eficiente, tanto para problemas lineares como não lineares.

I.2.- ORIGEM DO MÉTODO

O método RD originou-se do método de 2ª ordem de Richardson , desenvolvido por Frankel [22] em 1950. Frankel estudou a equivalência formal do algoritmo de Richardson [23] de equações de 1ª ordem dependentes do tempo e sugeriu a extensão a uma solução do algoritmo equivalente a uma equação de 2ª ordem dependente do tempo. Para isto, Frankel fez a primeira conexão com a dinâmica. Entretanto, a primeira utilização do método computacional estrutural dinâmico, com vistas a melhorar o RD apareceu como tendo sido feita por Cassell [25] ou Welsh [24], que introduziram a idéia de densidade fictícia (massa). Rushton [26] fez a primeira aplicação a problemas não lineares.

O nome "Relaxação Dinâmica" surgiu no início dos anos 60 e foi dado por A.S.Day [21], que através de uma aproximação não usual conseguiu desenvolver um novo método para resolver problemas elásticos a partir de problemas de propagação de onda. Foi por este caminho que o método chegou ao cálculo feito entre 1958 e 1960 da correnteza do rio Tâmis no mar do norte.

No problema da determinação dos efeitos das cheias nas cabeceiras dos rios, soluções analíticas são impossíveis devido à configuração não analítica do rio e aos termos não lineares das equações hidráulicas, embora métodos gráficos possam ser usados, como o método das

características. Em 1956 Hansen [27] desenvolveu o método de diferenças finitas para o cálculo do rio Ems, usando diferença central no tempo e espaço. O método parece aplicável a vários problemas que envolvam as equações de Laplace amortecida ou não amortecida, onde as equações têm forma certamente não linear.

Estas publicações representam o começo do interesse dos engenheiros no DR, e da idéia para a obtenção de uma solução estática a partir de uma solução de análise transiente.

1.3.- REVISÃO BIBLIOGRÁFICA:

Conforme visto, o RD foi comparado a outros métodos iterativos; com isto, a literatura da relaxação dinâmica se expandiu bastante e os pesquisadores começaram a se preocupar em aperfeiçoar o método.

Otter [10] em seus estudos, introduziu um método alternativo para computadores digitais que utilizava as equações de diferenças finitas do contínuo elástico, para cálculos com precisão aceitável das tensões e deslocamentos gerados pelas tensões primárias (pressão de gás e gradientes de temperatura) em reatores de concreto protendido utilizados como vasos de pressão. Há alguns anos, as tensões eram obtidas usando a teoria de cascas, porém, foi visto que, a configuração não analítica das

condições de contorno e o carregamento, muitas vezes faziam com que esse cálculo, não resultasse em aproximações satisfatórias.

Papadrakakis [12] desenvolveu um procedimento automático para avaliar os parâmetros de iteração usados na relaxação dinâmica, aplicados a problemas com não linearidade física e geométrica e fez comparações com o método dos gradientes conjugados e com o método direto.

Recentemente, Petr Rericha [14] estudou a história do carregamento ótimo no tempo para análise não linear por relaxação dinâmica, no qual as forças de inércia desempenham um papel significativo na fase inicial do movimento antes do decréscimo devido ao amortecimento. Em problemas envolvendo não linearidades, ou seja, que dependem da trajetória do material, o estado final consolidado será alcançado se for aplicado um carregamento estático proporcional. Ao mesmo tempo, aconselha-se o uso de incrementos de carregamento para se chegar a uma condição estacionária.

Na referência [15] é apresentada a implementação de elementos finitos isoparamétricos com integração no tempo por diferença central para problemas com não linearidades em que o carregamento é de natureza dinâmica. Este esquema de integração é explícito, e condicionalmente estável, mas pode ser muito atraente para análise de

transientes de curta duração.

Outro aspecto importante é que na aproximação usual dos elementos finitos, a matriz M geralmente não aparece na forma diagonal, por este motivo foi introduzida uma aproximação diagonal, obtida da matriz de massa consistente, para tornar o esquema viável.

Desta maneira, a relaxação dinâmica foi evoluindo e outros autores como [1, 6, 17, 19] trabalharam no sentido de tornar o RD mais eficiente e para isto aceleraram as soluções, de modo que o método pudesse ser comparável às soluções diretas.

I.4.- ORGANIZAÇÃO DA TESE:

Neste trabalho será feita uma abordagem computacional dos algoritmos de relaxação dinâmica adaptativos através do método dos elementos finitos.

No capítulo II, é apresentada a relaxação dinâmica, as suas diferentes formas e a sua evolução, assim como os algoritmos desenvolvidos no presente trabalho.

No capítulo III, são discutidos com detalhes a implementação computacional do programa, bem como a apresentação do elemento finito implementado, a formulação

não-linear e as equações constitutivas consideradas.

No capítulo IV, mostram-se vários exemplos nos quais será discutida mais detalhadamente a eficiência dos métodos utilizados.

Finalmente no capítulo V, apresentam-se as conclusões deste trabalho.

CAPÍTULO II

ALGORITMOS ADAPTATIVOS DE RELAXAÇÃO DINÂMICA

II.1- PRELIMINARES

Considerando-se a equação do equilíbrio dinâmico, proveniente da discretização pelo método dos elementos finitos

$$M \ddot{U} + C \dot{U} + KU = F \quad (\text{II.1})$$

onde M, C e K são respectivamente as matrizes de massa, amortecimento e rigidez; F o vetor de forças externas (carregamento), e U, \dot{U} e \ddot{U} são os vetores de deslocamentos nodais, velocidades e acelerações.

A solução numérica desta equação dinâmica (II.1), é obtida a cada incremento de tempo, fazendo-se que para um determinado tempo relativamente pequeno, a resposta transiente desapareça, obtendo-se a solução permanente, que é a própria solução estática.

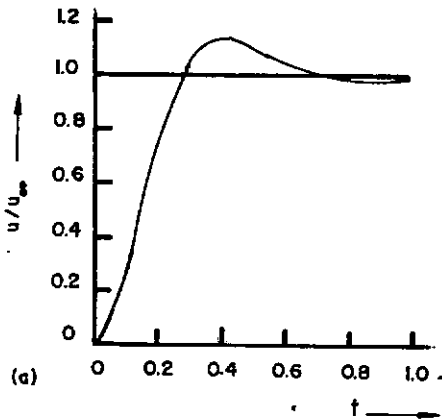
A relaxação dinâmica, portanto, está associada a solução do sistema

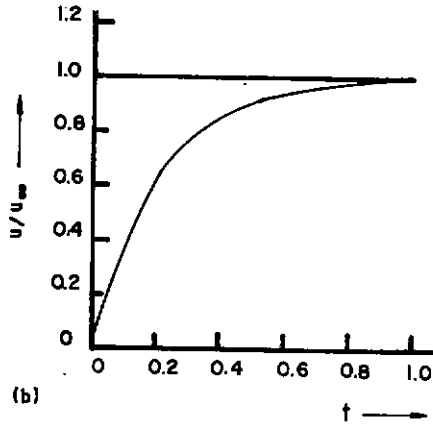
$$KU = F \quad (\text{II.2})$$

como resultado final do problema do transiente dinâmico (II.1), se M e C são diferentes de zero, dá-se origem a relaxação hiperbólica, onde a solução é obtida diretamente de (II.1), como mostrada na figura(II.1.a). No caso de M igual a zero e C diferente de zero, o problema é completamente viscoso

$$\dot{C}U + KU = F \quad (II.3)$$

e apresenta convergência assintótica como se pode ver na figura (II.1.b).





1.b- Relaxação Viscosa

figura(II.1) Convergência dos Métodos

Em ambos os casos as derivadas dos deslocamentos em relação ao tempo são aproximadas por diferenças finitas e as equações (II.1) e (II.3) são integradas ao longo do tempo até que a solução estacionária seja alcançada com $\dot{U} = 0$ e $\ddot{U} = 0$.

As matrizes M e C são escolhidas artificialmente na forma diagonal para que sua inversão seja imediata e conduza à solução com o menor número de iterações possíveis.

A solução exata da equação homogênea do problema dinâmico

$$M \ddot{U} + KU = 0 \quad (\text{II.4})$$

tem a seguinte forma

$$U = a \cos \lambda t + b \sin \lambda t \quad (\text{II.5})$$

enquanto que a solução homogênea do problema viscoso

$$C \dot{U} + KU = 0 \quad (\text{II.6})$$

tem uma forma exponencial

$$U = a e^{-\lambda t} \quad (\text{II.7})$$

Quando se deseja uma análise estática em regime elastoplástico, as matrizes M e C , do problema dinâmico, devem ser escolhidas o mais próximo possível do amortecimento crítico da estrutura para que não ocorram oscilações que reduzam os efeitos elastoplásticos artificiais. Já esta inconveniência não acontece quando se tem o caso viscoso visto que neste a convergência é assintótica.

II.2- ALGORITMOS ESTUDADOS

II.2.1- RELAXAÇÃO DINÂMICA HIPERBÓLICA

Na relaxação dinâmica as equações do movimento (II.1) são resolvidas usando as fórmulas de diferença central:

$$\ddot{U}^n = (\dot{U}^{n+1/2} - \dot{U}^{n-1/2}) / \Delta t$$

$$\dot{U}^n = \frac{1}{2} (\dot{U}^{n-1/2} + \dot{U}^{n+1/2})$$

As equações que serão resolvidas para análise estática são as equações estáticas do equilíbrio dadas por:

$$F_{iI}^{int} = F_{iI}^{ext} \quad (II.8)$$

Onde F_{iI}^{int} e F_{iI}^{ext} , são respectivamente as forças nodais internas e externas do nó I, na i-ésima direção. Sendo que, a solução de (II.8) é obtida como sendo uma solução amortecida das equações do movimento (II.1).

O algoritmo explícito de diferença central requer uma escolha apropriada do intervalo de tempo, sob a penalidade de se obter uma solução instável. Assim, para achar-se uma maneira adequada para estabelecer o valor de Δt utilizam-se estimativas do tempo de propagação de ondas no meio em que é feita a análise.

O tempo de percurso de uma onda na menor dimensão discretizada do meio fornece, aproximadamente, uma estimativa do menor período de vibração natural.

Considerando-se meios elásticos isotrópicos podem-se desenvolver fórmulas semi-empíricas para estimar o valor de Δt . Uma vez que as ondas dilatacionais se propagam mais rapidamente do que as cisalhantes, segundo referência [17], pode-se chegar a seguinte expressão prática:

$$\Delta t = \gamma' L^n \sqrt{\frac{\rho (1 + \nu) (1 - 2\nu)}{E (1 - \nu)}} \quad (\text{II.9})$$

Onde ρ é a massa específica, E o módulo de elasticidade longitudinal, ν o coeficiente de Poisson, L^n a menor distância entre nós adjacentes e γ' um coeficiente de ajuste menor do que um. Um valor adequado para γ' , quando elementos parabólicos são usados, é de 0,45. Contudo se os elementos forem lineares, γ' pode ter o seu valor adotado entre 0,9 e 1 de acordo com [17].

Neste trabalho o valor do Δt foi escolhido igual a unidade. Com o auxílio da equação (II.9), obtem-se o valor de ρ (densidade de massa do elemento), de modo que esta relação garante a estabilidade do operador de integração.

Outro fator importante é a matriz de massa, que funciona como um pré-condicionador e deve ser escolhida de

maneira a minimizar o número de passos para a convergência. Esta matriz pode ser escolhida de diferentes formas, porém neste trabalho optou-se pela massa proporcional aos termos da diagonal da matriz de massa consistente. Uma descrição mais detalhada sobre a matriz de massa será apresentada no capítulo III.

Várias maneiras foram discutidas [11, 15 e outros] para escolha do amortecimento C , porém no presente trabalho foi escolhido como segue:

$$C = 2W_1 \quad (\text{II.10})$$

onde W_1 é a menor frequência participante do sistema. Frequência esta que é determinada a cada passo usando a aproximação do quociente de Rayleigh dado a seguir:

$$W_1^2 = \frac{U_{II} U_{II} K_{II}}{U_{II} U_{II} M_{II}} \quad (\text{II.11})$$

Onde K é a diagonal aproximada da matriz de rigidez cujos termos são estimados a cada passo por:

$$K_{II}^n = \left[F_{II}^{int,n} - F_{II}^{int,n-1} \right] / \left[\Delta t U^{\cdot n-1/2} \right] \quad (\text{II.12})$$

Observa-se, que para o caso da matriz K_{II} for menor do que zero faz-se esta igual a zero.

Finalmente, o algoritmo de relaxação dinâmica proposto neste trabalho é apresentado no diagrama 1.

INICIALIZAÇÃO

$$\Delta t = 1.0$$

$$\Delta F = F/NINCR$$

$$\dot{U}_{II}^{\dot{0}} = M_{II}^{-1} \cdot \Delta F$$

$$\dot{U}_{II}^0 = \frac{\Delta t}{2} \dot{U}_{II}^{\dot{0}}$$

$$U_{II}^0 = 0.0$$

para $L = 1$, NINCR

$$F^N = \Delta F \cdot L$$

para $N = 1$, NINTER

$$\Psi^n = F^N - \sum_{e=1}^{NE} \int B_e^T \sigma_e dv$$

$$\dot{U}_{II}^{\dot{n}} = M_{II}^{-1} \cdot \Psi^n$$

se Caso for dinâmico

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

se não

$$K_{II}^n = [F_{II}^{int,n} - F_{II}^{int,n-1}] / [\Delta t \dot{U}_{II}^{n-1/2}]$$

$$W_1^2 = \frac{U_{II} U_{II} K_{II}}{U_{II} U_{II} M_{II}}$$

$$C = 2 W_1$$

$$\alpha_1 = \frac{2 - C \Delta t}{2 + C \Delta t} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{2}{2 + C \Delta t}$$

$$\dot{U}_{II}^{n+1/2} = \alpha_1 \dot{U}_{II}^{n-1/2} + \alpha_2 \Delta t \dot{U}_{II}^{\dot{n}}$$

$$U_{II}^{n+1} = U_{II}^n + \Delta t \dot{U}_{II}^{n+1/2}$$

CONTINUE

II.2.2- RELAXAÇÃO VISCOSA

Este tipo de relaxação que na literatura é conhecida como iteração de Jacobi, tem na equação (II.3) a velocidade aproximada por diferenças finitas por:

$$\dot{U} = (U^{t+\Delta t} - U^t) / \Delta t$$

e chega-se a seguinte expressão:

$$U^{t+\Delta t} = U^t - \Delta t \cdot C^{-1} \cdot (F - KU^t) \quad (\text{II.13})$$

ou equivalente

$$U^{t+\Delta t} = U^t + \Delta U \quad (\text{II.14})$$

sendo

$$\Delta U^t = - \Delta t C^{-1} \psi^t \quad (\text{II.15})$$

Onde ψ^t é avaliado por:

$$\psi^t = F - \sum_{e=1}^{NE} \int B_e^T \cdot \sigma_e \, dV_e \quad (\text{II.16})$$

Da mesma maneira que na relaxação dinâmica, a escolha dos parâmetros é fundamental para o bom desempenho do método.

Depois de observar que a cada iteração ocorrem variações ΔU similares, e que as variações do resíduo eram pequenas, diversos autores chegaram [6,17] a conclusão de que era possível acelerar o processo periodicamente fazendo um ajustamento da magnitude na direção do vetor ΔU ; assim:

$$U^t = U^{t-\Delta t} + \alpha \Delta U \quad (\text{II.17})$$

Onde α pode ser associado a um vetor W de forma que minimize a equação (II.7)

$$W^T \cdot \psi(U^t) = 0 \quad (\text{II.18})$$

Assim sendo, W é escolhido como:

$$W = \Delta U \quad (\text{II.19})$$

que resulta na seguinte equação:

$$\Delta U^T \psi(U^{t-\Delta t} + \alpha \Delta U) = -\Delta U^T (K U^{t-\Delta t} + \alpha K \Delta U - F) = 0 \quad (\text{II.20})$$

ou:

$$\alpha = \frac{\Delta U^T \cdot \psi(U^{t-\Delta t})}{\Delta U^T K \Delta U} \quad (\text{II.21})$$

Derivando-se a equação (II.6) em relação ao tempo obtém-se:

$$C \Delta(\Delta U) + K \Delta U^t = 0 \quad (\text{II.22})$$

e sabendo-se que:

$$C \Delta U^t = \psi(U^t) \quad (\text{II.23})$$

tem-se a equação:

$$\alpha = \frac{- (\Delta U^t)^T \cdot \Delta U^t}{(\Delta U^t) \cdot \Delta(\Delta U^t)} \quad (\text{II.24})$$

Este valor de α é comparado a cada iteração, de maneira a introduzir uma correção, quando dois valores subseqüentes não diferem mais do que 20 a 30%, ou seja:

$$\left| \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right| < 0.2 \text{ ou } 0.3$$

O intervalo de tempo (Δt) foi inicialmente tomado igual a unidade, e caso ocorra alguma divergência no processo, que é constatado pelo crescimento das normas de ψ e de ΔU , propõe-se corrigir o seu valor. Assim, o intervalo de tempo Δt é atualizado fazendo uma ponderação entre a norma ψ^t e $\psi^{t-\Delta t}$, como segue:

$$\overline{\Delta t} = \frac{|\psi^{t-\Delta t}|}{|\psi^t|} \cdot \Delta t \quad (\text{II.25})$$

Com isto, tem-se certeza de que $\overline{\Delta t}$ será menor do que Δt , entretanto tal fato não garante a convergência. Assim, a cada vez que ocorrer $\psi^t > \psi^{t-\Delta t}$, nova correção deverá ser feita, até que a solução seja obtida. Em [5 e outros] constatou-se que a adoção de um coeficiente dividindo a equação (II.25) diminui o número de correções

necessárias para se obter a convergência da solução. Notou-se que um coeficiente igual a 2 conduzia a valores adequados para Δt , assim a equação (II,25) ficará:

$$\Delta t = \frac{|\psi^{t-\Delta t}|}{2 |\psi^t|} \cdot \Delta t \quad (\text{II.26})$$

O amortecimento C , é escolhido como sendo a diagonal da matriz de rigidez.

Desta forma, o algoritmo de relaxação viscosa apresentado neste trabalho será mostrado no diagrama 2.

INICIALIZACAO

$$\Delta t = 1.0$$

$$\Delta F = F / NINCR$$

para N = 1, NINCR

$$\alpha^{t-\Delta t} = 0.0$$

$$\Delta U_0 = U / (N - 1) \quad e \quad U^t = U^{t-\Delta t} + \Delta U_0 \quad p/ N > 1$$

$$F^N = \Delta F \cdot N$$

$$| \psi^{t-\Delta t} | = | F^N |$$

para J = 1, NINTER

$$\psi^t = F^N - \sum_{e=1}^{NE} \int B_e^T \sigma_e \, dv$$

$$\Delta U^t = -\Delta t \, C^{-1} \, \psi^t$$

aceleração da solução

$$\alpha^t = -\Delta U^T \, \Delta U / (\Delta U^T \, \Delta(\Delta U))$$

$$\Delta \alpha = \alpha^t - \alpha^{t-\Delta t}$$

$$se \left| \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \right| \leq TOLS$$

$$então \, U^t = U^{t-\Delta t} + \alpha \Delta U^t$$

$$senão \, U^t = U^{t-\Delta t} + \Delta U^t$$

Verificação da convergência

$$se \frac{| \psi^t |}{| F^N |} \leq TOLF \quad ou \quad \frac{| \Delta U^t |}{| U^t |} \leq TOLD \quad então \, pare$$

Atualização do intervalo de tempo

$$se \, | \psi^t | > | \psi^{t-\Delta t} |$$

então

$$\Delta t = \frac{| \psi^{t-\Delta t} |}{2 | \psi^t |} \cdot \Delta t$$

CONTINUE

CAPÍTULO III

III.1.- SISTEMA IMPLEMENTADO

A implementação de um sistema computacional está inteiramente relacionada com o método numérico utilizado. Neste trabalho o método da relaxação dinâmica é aplicado a análise de estruturas discretizadas por elementos finitos isoparamétricos 3-D com variado número de pontos nodais.

O sistema foi implementado em um computador IBM 4381 no Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ, utilizando-se da linguagem Fortran 77 disponível neste equipamento.

A seguir serão descritos os vários módulos em que se divide o programa sem, no entanto, descer ao nível de rotinas.

MÓDULO I

Neste módulo é feito o dimensionamento do vetor de trabalho, que é utilizado para o armazenamento das

variáveis. O programa implementado faz uso de uma alocação dinâmica das variáveis de modo a se obter a otimização do espaço na memória. Neste procedimento há uma realocação de determinada área na memória ocupada por variáveis do vetor de trabalho que já não são de interesse para a fase seguinte de processamento. Para que possam ser armazenadas diferentes variáveis no vetor de trabalho faz-se o uso de apontadores que indicam as posições destas variáveis.

MODULO II

Nesta etapa são realizadas a leitura e a impressão dos dados, tais como:

- a) Tipo de análise (Estática ou Dinâmica);
- b) Características topológicas (coordenadas e incidências);
- c) Condições de contorno;
- d) Tipo de relaxação (viscosa ou hiperbólica);
- e) Tipo de formulação (linear, física, lagrangeana total, lagrangeana atualizada);
- f) Modelo do material (isotrópico linear ou elasto-plástico);
- g) Características dos materiais (módulo de elasticidade, coeficiente de poisson ,etc);
- h) Forças aplicadas.

Durante todo este processo da leitura dos dados é

feita uma crítica de modo a evitar o processamento com dados inconsistentes. Erros, tais como a duplicidade de nós ou de elementos, são identificados e impressas mensagens num arquivo apropriado, indicando o tipo de erro e o local do mesmo.

Ainda neste módulo é calculado o número de equações.

MÓDULO III

Nesta etapa calculam-se os vetores de rigidez, de massa, as forças internas e externas a nível de elemento e, são introduzidas as condições de contorno, de maneira que, ao final, estes vetores possam ser espalhados nos seus respectivos vetores globais de rigidez, de massa, de cargas externas e de forças internas.

MÓDULO IV

Finalmente a integração das equações não lineares do movimento é feita utilizando-se os algoritmos de relaxação dinâmica, dos quais obtem-se os deslocamentos.

Assim, neste último módulo do programa são

impressos os valores dos deslocamentos e das tensões encontradas na solução do problema, bem como os valores de outros parâmetros importantes que variam de acordo com o tipo de análise.

III.2.- ELEMENTO DE SÓLIDO

O procedimento básico na formulação dos elementos finitos isoparamétricos [2], expressa as coordenadas do elemento e os deslocamentos com as mesmas funções de interpolação, usando o sistema de coordenadas naturais do elemento.

Considerando um elemento tridimensional, tem-se:

$$x = \sum_{i=1}^q h_i \cdot x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^q h_i \cdot y_i \quad (\text{III.1})$$

$$z = \sum_{i=1}^q h_i \cdot z_i$$

Onde x , y e z são as coordenadas de qualquer ponto do elemento, e x_i , y_i e z_i , $i = 1, \dots, q$ são as

coordenadas dos q nós do elemento. As funções de interpolação h_i são definidas no sistema de coordenadas naturais do elemento, que tem variáveis r, s e t que variam de -1 a $+1$.

Seja o elemento tridimensional com o número de nós variando entre 8 a 20, como mostra a figura (III.1); as funções de interpolação são:

$$h_1 = g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17}) / 2$$

$$h_2 = g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18}) / 2$$

$$h_3 = g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19}) / 2$$

$$h_4 = g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20}) / 2$$

$$h_5 = g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17}) / 2$$

$$h_6 = g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18}) / 2$$

$$h_7 = g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19}) / 2$$

$$h_8 = g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20}) / 2$$

$$h_i = g_j \quad \text{para } j = 9, \dots, 20$$

$g_i = 0$, para os nós que não foram incluídos

$$g_i = G(r, r_i) G(s, s_i) G(t, t_i)$$

$$G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2} (1 + \beta\beta_i) \quad \text{para } \beta_i = \pm 1$$

$$G(\beta, \beta_i) = (1 - \beta^2) \quad \text{para } \beta_i = 0$$

onde $\beta = r, s, t$

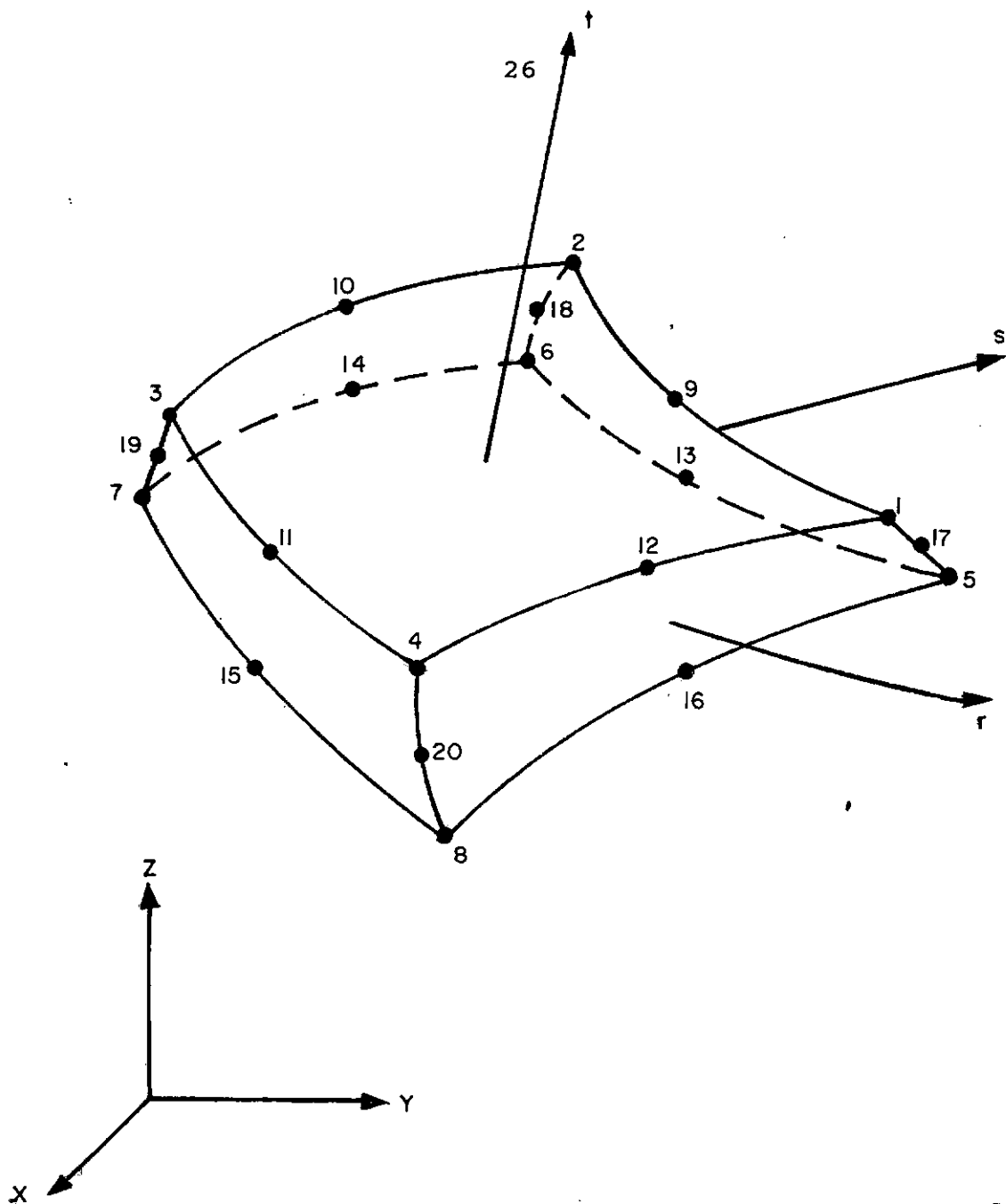


figura (III.1)

Considerando a geometria do elemento tridimensional de acordo com as funções de interpolação (III.1) que, os elementos podem ter contornos curvos sendo esta uma vantagem importante sobre as coordenadas generalizadas da formulação clássica do método dos elementos finitos. Outras vantagens importantes são a possibilidade do elemento ter qualquer número de nós entre 8 e 20, e de transformar-se elementos prismáticos ou

tetraédricos, como mostrado na figura (III.2).

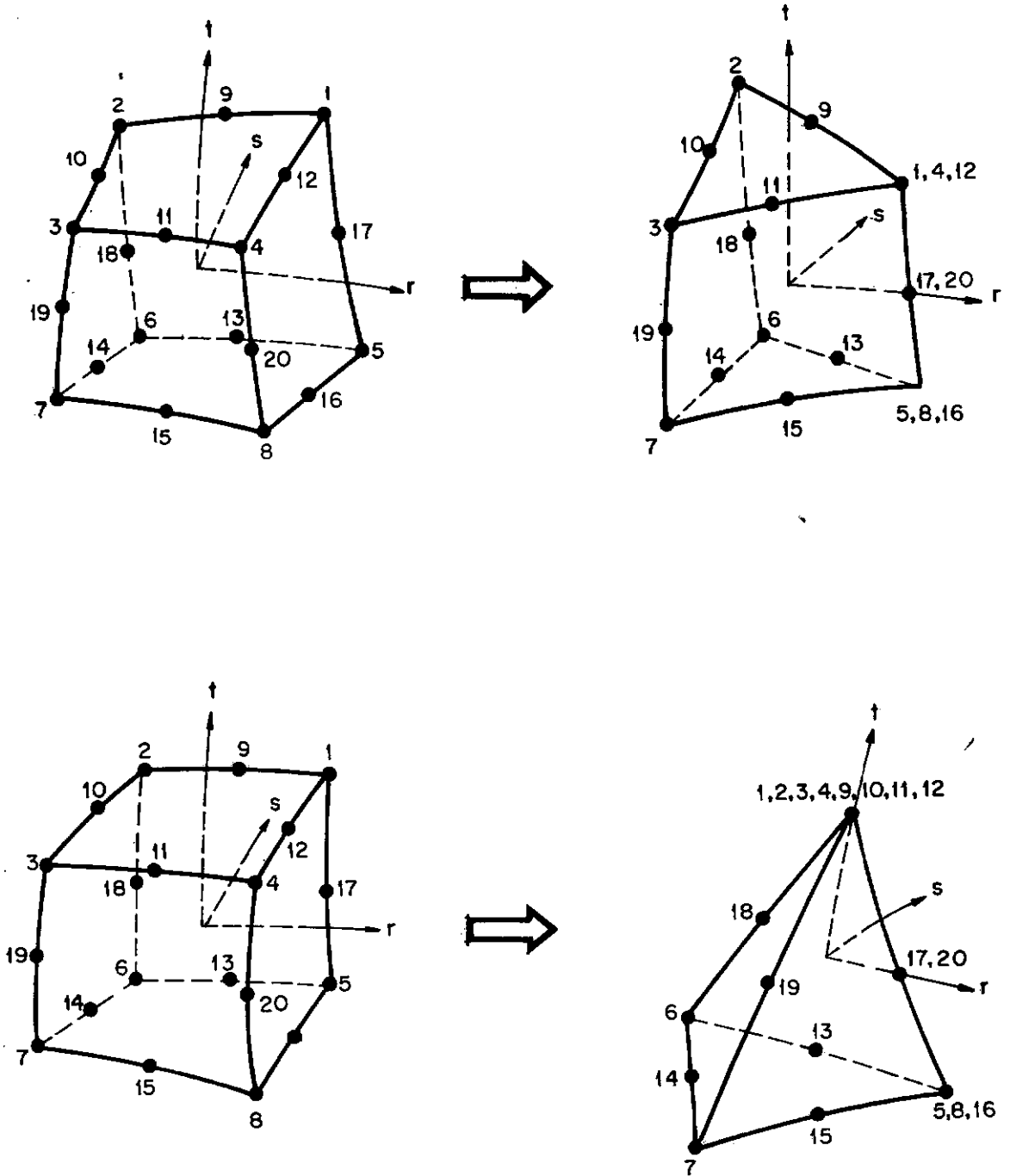


figura (III.2)

Os deslocamentos são interpolados da mesma maneira que a geometria, isto é:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i \cdot u_i, \quad v = \sum_{i=1}^q h_i \cdot v_i, \quad w = \sum_{i=1}^q h_i \cdot w_i \quad (\text{III.2})$$

Onde u , v e w são os deslocamentos do elemento em qualquer ponto do elemento e u_i , v_i e w_i , $i = 1, \dots, q$, são os deslocamentos correspondentes do elemento nos seus nós.

Para avaliar a matriz de rigidez e as forças internas de um elemento, é necessário calcular a matriz de transformação deformação-deslocamento, isto é:

$$\epsilon = B u \quad (\text{III.3})$$

$$K = \int_v B^T D B dv \quad (\text{III.4})$$

Onde D é a matriz tensão-deformação para o material isotrópico dada por:

$$D = \frac{E a}{b c} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{a} & \frac{\nu}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{a} & 1 & \frac{\nu}{a} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{a} & \frac{\nu}{a} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c}{2a} \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

onde $a = (1 - \nu)$, $b = (1 + \nu)$ e $c = (1 - 2\nu)$

Sabendo que a equação que governa (II.1) é obtida usando o princípio dos trabalhos virtuais os termos apropriados agora são:

$$M = \int_v N^T \rho N dv \quad (\text{III.6})$$

$$F^{\text{int}} = \int_v B^T \sigma^n dv \quad (\text{III.7})$$

$$F^n = \int_v N^T b dv + \int_s N^T t ds \quad (\text{III.8})$$

Onde ρ é a densidade de massa, b força por unidade de volume e t força por unidade de superfície.

O vetor de forças de inércia é obtido pelas funções de forma da matriz M dada na equação (III.6). Esta matriz não é diagonal e o esquema explícito exige que a mesma seja diagonalizada.

Assim, a matriz de massa diagonal é dada por:

$$M_i^e = M_{i1}^e \frac{MM}{\sum M_i^e} \quad (\text{III.9})$$

Onde M_{i1}^e é a matriz de massa consistente dada pela equação (III.4), e M é a matriz dada pela equação que

segue:

$$M = \int_V \rho \, dv \quad (\text{III.10})$$

Finalmente quando todos os termos da diagonal tenham sido determinados, a matriz de massa total diagonalizada será obtida pelo somatório, i.e.,

$$M_i = \sum_{e=1}^m M_i^e \quad (\text{III.11})$$

As expressões (III.4), (III.6), (III.7), (III.8) e (III.10) podem ser calculadas por integração numérica, utilizando-se o método da quadratura de Gauss. Sendo que, neste trabalho existe a possibilidade da utilização de até quatro(4) pontos de integração.

III.3- ANÁLISE NÃO-LINEAR

Quando se deseja analisar um problema não-linear, com grandes deslocamentos, necessita-se de uma formulação incremental efetiva. No presente trabalho foram implementadas duas formulações incrementais:

A Lagrangeana Total e a Lagrangeana Atualizada.

Estas formulações encontram-se descritas em

detalhes em [2]. No presente texto faz-se apenas uma menção as etapas necessárias à sua implementação e as características do modelo não-linear físico empregado.

III.3.1- FORMULAÇÃO LAGRANGEANA TOTAL

Nesta formulação as variáveis cinemáticas são referenciadas à configuração inicial, no tempo 0. Assim a equação do movimento fica:

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{III.12})$$

onde:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^{t+\Delta t} X_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^{t+\Delta t} X_{j,n}$$

$$e \quad (\text{III.13})$$

$$\delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} ({}^{t+\Delta t} u_{i,j} + {}^{t+\Delta t} u_{j,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,i} + {}^{t+\Delta t} u_{k,j})$$

Decompondo-se incrementalmente as tensões e as deformações, respectivamente tem-se:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + {}^0 S_{ij} \quad (\text{III.14})$$

$${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} = {}^t \epsilon_{ij} + {}^0 \epsilon_{ij} \quad (\text{III.15})$$

sendo que:

$${}_0\epsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij}$$

onde:

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_0u_{i,j} + {}_0u_{j,i} + {}_0^t u_{k,i} {}_0u_{k,j} + {}_0^t u_{k,i} {}_0^t u_{k,j})$$

e

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}_0u_{k,i} {}_0u_{k,j}$$

Assim, usando a relação de deformação:

$${}_0e = {}_0^t B_L \hat{u} \quad (\text{III.16})$$

onde

$${}_0e^T = [{}_0e_{11} \quad {}_0e_{22} \quad {}_0e_{33} \quad 2{}_0e_{12} \quad 2{}_0e_{23} \quad 2{}_0e_{13}]$$

e

$$\hat{u}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N]$$

obtem-se a matriz de transformação deformação-deslocamento para o elemento tridimensional dada por:

$${}_0^t B_L = {}_0^t B_{L0} + {}_0^t B_{L1} \quad (\text{III.17})$$

onde:

$${}^t_{0}BL_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{0_{1,1}} & 0 & 0 & \mathbf{h}_{0_{2,1}} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{0_{1,2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_{0_{1,3}} & 0 & \dots & \mathbf{h}_{0_{N,3}} \\ \mathbf{h}_{0_{1,2}} & \mathbf{h}_{0_{1,1}} & 0 & \mathbf{h}_{0_{2,2}} & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{h}_{0_{1,3}} & \mathbf{h}_{0_{1,2}} & 0 & \dots & \mathbf{h}_{0_{N,2}} \\ \mathbf{h}_{0_{1,3}} & 0 & \mathbf{h}_{0_{1,1}} & \mathbf{h}_{0_{2,3}} & \dots & \mathbf{h}_{0_{N,3}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.17a})$$

onde $\mathbf{h}_{0_{k,j}} = \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial \mathbf{x}_j}$ e $\mathbf{u}_j^k = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_j^k - {}^t \mathbf{u}_j^k$

$${}^t_{0}BL_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{11} \mathbf{h}_{0_{1,1}} & \mathbf{l}_{21} \mathbf{h}_{0_{1,1}} & \mathbf{l}_{31} \mathbf{h}_{0_{1,1}} & \mathbf{l}_{11} \mathbf{h}_{0_{2,1}} & \dots & \mathbf{l}_{31} \mathbf{h}_{0_{N,1}} \\ \mathbf{l}_{12} \mathbf{h}_{0_{1,2}} & \mathbf{l}_{22} \mathbf{h}_{0_{1,2}} & \mathbf{l}_{32} \mathbf{h}_{0_{1,2}} & \mathbf{l}_{12} \mathbf{h}_{0_{2,2}} & \dots & \mathbf{l}_{32} \mathbf{h}_{0_{N,2}} \\ \mathbf{l}_{13} \mathbf{h}_{0_{1,3}} & \mathbf{l}_{23} \mathbf{h}_{0_{1,3}} & \mathbf{l}_{33} \mathbf{h}_{0_{1,3}} & \mathbf{l}_{13} \mathbf{h}_{0_{2,3}} & \dots & \mathbf{l}_{33} \mathbf{h}_{0_{N,3}} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} & \dots & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} & \mathbf{H} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{J} \\ \mathbf{P} & \mathbf{L} & \mathbf{M} & \mathbf{N} & \dots & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

(III.17b)

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= (\mathbf{l}_{11} \mathbf{h}_{0_{1,2}} + \mathbf{l}_{12} \mathbf{h}_{0_{1,1}}) \\ \mathbf{B} &= (\mathbf{l}_{21} \mathbf{h}_{0_{1,2}} + \mathbf{l}_{22} \mathbf{h}_{0_{1,1}}) \\ \mathbf{C} &= (\mathbf{l}_{31} \mathbf{h}_{0_{1,2}} + \mathbf{l}_{31} \mathbf{h}_{0_{1,1}}) \\ \mathbf{D} &= (\mathbf{l}_{11} \mathbf{h}_{0_{2,2}} + \mathbf{l}_{12} \mathbf{h}_{0_{2,1}}) \\ \mathbf{E} &= (\mathbf{l}_{31} \mathbf{h}_{0_{N,2}} + \mathbf{l}_{32} \mathbf{h}_{0_{N,1}}) \\ \mathbf{F} &= (\mathbf{l}_{12} \mathbf{h}_{0_{1,3}} + \mathbf{l}_{13} \mathbf{h}_{0_{1,2}}) \\ \mathbf{G} &= (\mathbf{l}_{22} \mathbf{h}_{0_{1,3}} + \mathbf{l}_{23} \mathbf{h}_{0_{1,2}}) \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{l}_{32} \mathbf{h}_{0_{1,3}} + \mathbf{l}_{33} \mathbf{h}_{0_{1,2}}) \\ \mathbf{I} &= (\mathbf{l}_{12} \mathbf{h}_{0_{2,3}} + \mathbf{l}_{13} \mathbf{h}_{0_{2,2}}) \\ \mathbf{J} &= (\mathbf{l}_{32} \mathbf{h}_{0_{N,3}} + \mathbf{l}_{33} \mathbf{h}_{0_{N,2}}) \\ \mathbf{P} &= (\mathbf{l}_{11} \mathbf{h}_{0_{1,3}} + \mathbf{l}_{13} \mathbf{h}_{0_{1,1}}) \\ \mathbf{L} &= (\mathbf{l}_{21} \mathbf{h}_{0_{1,3}} + \mathbf{l}_{23} \mathbf{h}_{0_{1,1}}) \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{l}_{31} \mathbf{h}_{0_{1,3}} + \mathbf{l}_{33} \mathbf{h}_{0_{1,1}}) \end{aligned}$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{l}_{11} \mathbf{0}^{\mathbf{h}_{2,3}} + \mathbf{l}_{13} \mathbf{0}^{\mathbf{h}_{2,1}})$$

$$\mathbf{O} = (\mathbf{l}_{31} \mathbf{0}^{\mathbf{h}_{N,3}} + \mathbf{l}_{33} \mathbf{0}^{\mathbf{h}_{N,1}})$$

e

$$\mathbf{l}_{1j} = \sum_{k=1}^N \mathbf{0}^{\mathbf{h}_{k,j}} \mathbf{t}_{U_i^k}$$

Da mesma forma, no caso do problema ser não-linear a matriz transformação deformação-deslocamento fica:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{0}^{\tilde{\mathbf{B}}_{NL}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\mathbf{0}^{\tilde{\mathbf{B}}_{NL}}} & \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \mathbf{t}_{\mathbf{0}^{\tilde{\mathbf{B}}_{NL}}} & \tilde{\mathbf{O}} \\ \tilde{\mathbf{O}} & \tilde{\mathbf{O}} & \mathbf{t}_{\mathbf{0}^{\tilde{\mathbf{B}}_{NL}}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18})$$

onde:

$$\mathbf{t}_{\mathbf{0}^{\tilde{\mathbf{B}}_{NL}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{1},1}} & 0 & 0 & \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{2},1}} & \cdots & \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{N},1}} \\ \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{1},2}} & 0 & 0 & \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{2},2}} & \cdots & \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{N},2}} \\ \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{1},3}} & 0 & 0 & \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{2},3}} & \cdots & \mathbf{h}_{\mathbf{0}^{\mathbf{N},3}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.18a})$$

$$\tilde{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.18b})$$

A matriz de tensões do 2^o Tensor de Piola-Kirchhoff será dada por

$${}^t_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19})$$

onde:

$${}^t_0\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t_0\mathbf{S}_{11} & {}^t_0\mathbf{S}_{12} & \cdots & {}^t_0\mathbf{S}_{13} \\ {}^t_0\mathbf{S}_{21} & {}^t_0\mathbf{S}_{22} & \cdots & {}^t_0\mathbf{S}_{23} \\ {}^t_0\mathbf{S}_{31} & {}^t_0\mathbf{S}_{32} & \cdots & {}^t_0\mathbf{S}_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.19a})$$

e

$$\tilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.19b})$$

e o vetor de tensões do 2^o Tensor de Piola-Kirchhoff será:

$${}^t_0\hat{\mathbf{S}}^T = [{}^t_0\mathbf{S}_{11} \quad {}^t_0\mathbf{S}_{22} \quad {}^t_0\mathbf{S}_{33} \quad {}^t_0\mathbf{S}_{12} \quad {}^t_0\mathbf{S}_{23} \quad {}^t_0\mathbf{S}_{13}] \quad (\text{III.20})$$

Assim, a equação do movimento após as decomposições incrementais fica:

$$\begin{aligned} & \int_{{}_0V} {}_0\mathbf{C}_{i|rs} \epsilon_{rs} \delta_0 \epsilon_{ij}^0 dV + \int_{{}_0V} {}^t_0\mathbf{S}_{ij} \delta_0 \eta_{ij}^0 dV \\ & = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - \int_{{}_0V} {}^t_0\mathbf{S}_{ij} \delta_0 \mathbf{e}_{ij}^0 dV \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Note-se que $\delta^{t+\delta t} \epsilon_{ij} = \delta \epsilon_{ij}$, e que ${}^0 S_{ij} = {}^0 C_{ijrs} \epsilon_{rs}$.

A linearização da equação do movimento é feita usando as seguintes aproximações:

$${}^0 S_{ij} = {}^0 C_{ijrs} e_{rs} \quad e \quad \delta \epsilon_{ij} = \delta e_{ij}$$

Desta maneira, obtem-se uma aproximação da equação do movimento:

$$\begin{aligned} & \int_{0_V} {}^0 C_{ijrs} e_{rs} \delta e_{ij}^0 dV + \int_{0_V} {}^t S_{ij} \delta \eta_{ij}^0 dV \\ & = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0_V} {}^t S_{ij} \delta e_{ij}^0 dV \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

Caso o comportamento do material seja elasto-plástico, e desde que as deformações sejam pequenas tais que:

$${}^t \epsilon^p = \sum \sqrt{\frac{2}{3} d_0 \epsilon_{ij}^p d_0 \epsilon_{ij}^p} < 2 \% \quad (\text{III.23})$$

a equação do movimento então será dada por:

$$\int_{0_V} {}^0 C_{ijrs}^{EP} e_{rs} \delta e_{ij}^0 dV + \int_{0_V} {}^t S_{ij} \delta \eta_{ij}^0 dV$$

$$= {}^t\Delta^t R - \int_{0V} {}^tS_{ij} \delta_0 e_{ij}^0 dV \quad (\text{III.24})$$

Onde C^{EP} é a matriz tensão-deformação elasto-plástica para o material isotrópico com endurecimento, obtida usando o critério de escoamento de Von Mises a qual tem a seguinte forma:

$$C^{EP=P} \begin{bmatrix} \frac{a}{b} - \beta^t S_{11} & \frac{\nu}{b} - \beta S_{11}^t S_{22}^t & \frac{\nu}{b} - \beta S_{11}^t S_{33}^t & -\beta S_{11}^t S_{12}^t & -\beta S_{11}^t S_{23}^t & -\beta S_{11}^t S_{13}^t \\ \dots & \frac{a}{b} - \beta^t S_{22} & \frac{\nu}{b} - \beta S_{22}^t S_{33}^t & -\beta S_{22}^t S_{12}^t & -\beta S_{22}^t S_{23}^t & -\beta S_{22}^t S_{13}^t \\ \dots & \dots & \frac{a}{b} - \beta^t S_{33}^2 & -\beta S_{33}^t S_{12}^t & -\beta S_{33}^t S_{23}^t & -\beta S_{33}^t S_{13}^t \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} - \beta^t S_{12}^2 & -\beta S_{12}^t S_{23}^t & -\beta S_{12}^t S_{13}^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} - \beta^t S_{23}^2 & -\beta S_{23}^t S_{13}^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{2} - \beta^t S_{13}^2 \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

$$(\text{III.25})$$

onde:

$$P = \frac{E}{1 + \nu}, \quad a = 1 - \nu, \quad b = 1 - 2\nu$$

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{1}{t\sigma_y^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{E}{E - E_T} \frac{1 + \nu}{E}} \right)$$

Considerando o endurecimento, isotrópico, a condição de escoamento pode ser escrita no tempo 0 como:

$${}^tF({}_0^tS_{ij}, {}^t_k) = 0 \quad (\text{III.26})$$

Onde a função acima, é usada para calcular os incrementos

de deformações plásticas

$$d_0 \epsilon_{ij}^P = {}^t \lambda \frac{\partial {}^t F}{\partial {}_0^t S_{ij}} \quad (\text{III.27})$$

O incremento de tensões será dado por:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = {}^t S_{ij} + d_0 S_{ij} \quad (\text{III.28})$$

onde:

$$d_0 S_{ij} = C_{ijrs}^E (d_0 \epsilon_{rs} - d_0 \epsilon_{rs}^P) \quad (\text{III.29})$$

III.3.2- FORMULAÇÃO LAGRANGEANA ATUALIZADA

Nesta formulação, derivada da formulação Lagrangeana total, as variáveis cinemáticas são referenciadas à configuração imediatamente anterior, no tempo t . Portanto, a equação do movimento fica:

$$\int_{{}^t V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^t dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (\text{III.30})$$

onde:

$${}^{t+\Delta t} S_{ij} = \frac{{}^t \rho}{{}^{t+\Delta t} \rho} {}^{t+\Delta t} X_{i,m} {}^{t+\Delta t} \tau_{mn} {}^{t+\Delta t} X_{j,n}$$

e

$$(\text{III.31})$$

$$\delta \begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} \epsilon_{ij} = \delta \frac{1}{2} (\begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} u_{1,j} + \begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} u_{j,i} + \begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} u_{k,i} \cdot \begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} u_{k,j})$$

Decompondo-se incrementalmente tensões e deformações, respectivamente tem-se:

$$\begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} S_{ij} = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \tau_{ij} + \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} S_{ij} \quad (\text{III.32})$$

sabendo que $\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} S_{ij} = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \tau_{ij}$

$$\begin{matrix} t+\Delta t \\ t \end{matrix} \epsilon_{ij} = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \epsilon_{ij} \quad (\text{III.33})$$

sendo que:

$$\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \epsilon_{ij} = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} e_{ij} + \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \eta_{ij}$$

onde:

$$\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} e_{ij} = \frac{1}{2} (\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{1,j} + \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{j,i})$$

e

$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \eta_{ij} = \frac{1}{2} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} u_{k,i} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} u_{k,j}$$

Assim, para o elemento sólido tridimensional, as deformações ficam:

$$\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \epsilon_{11} = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{1,1} + \frac{1}{2} ((\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{1,1})^2 + (\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{2,1})^2 + (\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{3,1})^2)$$

$$\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} \epsilon_{22} = \begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{2,2} + \frac{1}{2} ((\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{1,2})^2 + (\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{2,2})^2 + (\begin{matrix} t \\ t \end{matrix} u_{3,2})^2)$$

$${}^t\epsilon_{33} = {}^t u_{3,3} + \frac{1}{2} \left(({}^t u_{1,3})^2 + ({}^t u_{2,3})^2 + ({}^t u_{3,3})^2 \right)$$

$${}^t\epsilon_{12} = \frac{1}{2} ({}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{1,1} {}^t u_{1,2} + {}^t u_{2,1} {}^t u_{2,2} + {}^t u_{3,1} {}^t u_{32})$$

$${}^t\epsilon_{23} = \frac{1}{2} ({}^t u_{2,3} + {}^t u_{3,2}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{1,2} {}^t u_{1,3} + {}^t u_{2,2} {}^t u_{2,3} + {}^t u_{3,2} {}^t u_{33})$$

$${}^t\epsilon_{13} = \frac{1}{2} ({}^t u_{1,3} + {}^t u_{3,1}) + \frac{1}{2} ({}^t u_{1,1} {}^t u_{1,3} + {}^t u_{2,1} {}^t u_{2,3} + {}^t u_{3,1} {}^t u_{33})$$

Assim, usando a relação de deformação:

$${}^t e = {}^t_{BL} \hat{u} \quad (\text{III.34})$$

onde

$${}^t e^T = [{}^t e_{11} \quad {}^t e_{22} \quad {}^t e_{33} \quad 2 {}^t e_{12} \quad 2 {}^t e_{23} \quad 2 {}^t e_{13}]$$

e

$$\hat{u}^T = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N]$$

tem-se então, a matriz de transformação deformação-deslocamento para o elemento tridimensional dada por:

$${}^t_{BL} = \begin{bmatrix} {}^t h_{1,1} & 0 & 0 & {}^t h_{2,1} & \dots & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & {}^t h_{1,3} & 0 & \dots & {}^t h_{N,3} \\ {}^t h_{1,2} & {}^t h_{1,1} & 0 & {}^t h_{2,2} & \dots & 0 \\ 0 & {}^t h_{1,3} & {}^t h_{1,2} & 0 & \dots & {}^t h_{N,2} \\ {}^t h_{1,3} & 0 & {}^t h_{1,1} & {}^t h_{2,3} & \dots & {}^t h_{N,3} \end{bmatrix} \quad (\text{III.35})$$

onde ${}^t \mathbf{h}_{k,j} = \frac{\partial \mathbf{h}_k}{\partial {}^t \mathbf{x}_j}$ e $\mathbf{u}_j^k = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}_j^k - {}^t \mathbf{u}_j^k$

A matriz transformação deformação-deslocamento não-linear tem estrutura semelhante a dada pelas matrizes (III.18), (III.18a) e (III.18b), contudo a mesma será referenciada no tempo t .

A matriz de tensões de Cauchy será dada por:

$${}^t \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} {}^t \tilde{\tau} & \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & {}^t \tilde{\tau} & \tilde{\mathbf{0}} \\ \tilde{\mathbf{0}} & \tilde{\mathbf{0}} & {}^t \tilde{\tau} \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

onde:

$${}^t \tilde{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \dots & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.36a})$$

e

$$\tilde{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.36b})$$

e o vetor de tensões de Cauchy:

$${}^t \boldsymbol{\tau}^T = [{}^t \tau_{11} \quad {}^t \tau_{22} \quad {}^t \tau_{33} \quad {}^t \tau_{12} \quad {}^t \tau_{23} \quad {}^t \tau_{13}] \quad (\text{III.37})$$

Assim, a equação do movimento após as decomposições incrementais fica:

$$\int_{t_V} {}^t C_{ijrs} {}^t \epsilon_{rs} \delta {}^t \epsilon_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV$$

$$= {}^{t+\Delta t} R - \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} dV \quad (\text{III.38})$$

Note-se que ${}^t S_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^t \epsilon_{rs}$

A linearização da equação do movimento é feita usando a seguinte aproximação:

$${}^t S_{ij} = {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \quad e \quad \delta {}^t \epsilon_{ij} = \delta {}^t e_{ij}$$

Desta maneira, obtém-se uma aproximação da equação do movimento:

$$\int_{t_V} {}^t C_{ijrs} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} dV + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} dV$$

$$= {}^{t+\Delta t} R - \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} dV \quad (\text{III.39})$$

Caso o comportamento do material seja elasto-plástico, e esteja sujeito a grandes deformações, emprega-se a formulação Lagrangeana Atualizada com a taxa de tensões de Jaumann.

$$\int_{t_V} {}^t C_{Ijrs}^{EP} {}^t e_{rs} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV + \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t \eta_{ij} {}^t dV =$$

$${}^{t+\Delta t} R - \int_{t_V} {}^t \tau_{ij} \delta {}^t e_{ij} {}^t dV \quad (\text{III.40})$$

onde C^{EP} é a matriz tensão-deformação elasto-plástica, que tem a forma mostrada na matriz (III.24).

Considerando o endurecimento, isotrópico, a condição de escoamento pode ser escrita no tempo t como:

$${}^t F({}^t \tau_{ij}, {}^t k) = 0 \quad (\text{III.41})$$

onde a função acima, é usada para calcular os incrementos de deformações plásticas

$$d {}^t \epsilon_{ij}^P = {}^t \lambda \frac{\partial {}^t F}{\partial {}^t \tau_{ij}} \quad (\text{III.42})$$

O incremento de tensões será dado por:

$${}^{t+dt} \tau_{ij} = {}^t \tau_{ij} + {}^t \tau_{ij}^{\nabla} dt + {}^t \tau_{ip} {}^t \Omega_{pj} dt + {}^t \tau_{jp} {}^t \Omega_{pi} dt \quad (\text{III.43})$$

onde:

$${}^t \tau_{ij}^{\nabla} = C_{ijrs}^E (d {}^t \epsilon_{rs} - d {}^t \epsilon_{rs}^P) \quad (\text{III.44})$$

No presente trabalho, conforme comentado anteriormente, adotou-se um modelo elasto-plástico utilizando o critério de Von Mises, apresentado por [11]. Considerou-se os efeitos do endurecimento (modelo bilinear) tanto na formulação Lagrangeana Total quanto na Lagrangeana Atualizada.

CAPÍTULO IV

ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, são considerados vários exemplos, os quais têm por objetivo o estudo da precisão das relaxações, visando desta forma, a sua correta aplicação em situações práticas.

Os resultados utilizados para comparação serviram de base para uma avaliação do desempenho e da confiabilidade das diversas estratégias.

IV.1- VIGA TRACIONADA

Este estudo tem como finalidade comparar o desempenho dos dois tipos de relaxações utilizadas, numa análise elasto-plástica.

A estrutura analisada é uma viga simples submetida a tração, com duas polegadas de altura, seis polegadas de comprimento e uma polegada de espessura; como mostra a figura (IV.1). Foi discretizada por uma malha de 3 elementos, com apenas 8 nós por elemento, tendo-se assim, um total de 14 nós.

As propriedades físicas do material são:

Módulo de elasticidade $E = 30.000 \text{ lb/pol}^2$

Coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$ (tração pura)

Tensão de escoamento $\sigma_y = 400 \text{ lb/pol}^2$

Endurecimento $H_1 = 3.000 \text{ lb/pol}^2$

$H_2 = 20.000 \text{ lb/pol}^2$

Densidade de massa $\rho = 30.000 \text{ lb s}^2/\text{pol}^4$

Os valores adotados para a densidade de massa ρ , neste e nos outros exemplos que seguirão, foram escolhidos de forma a satisfazer a condição (II.9).

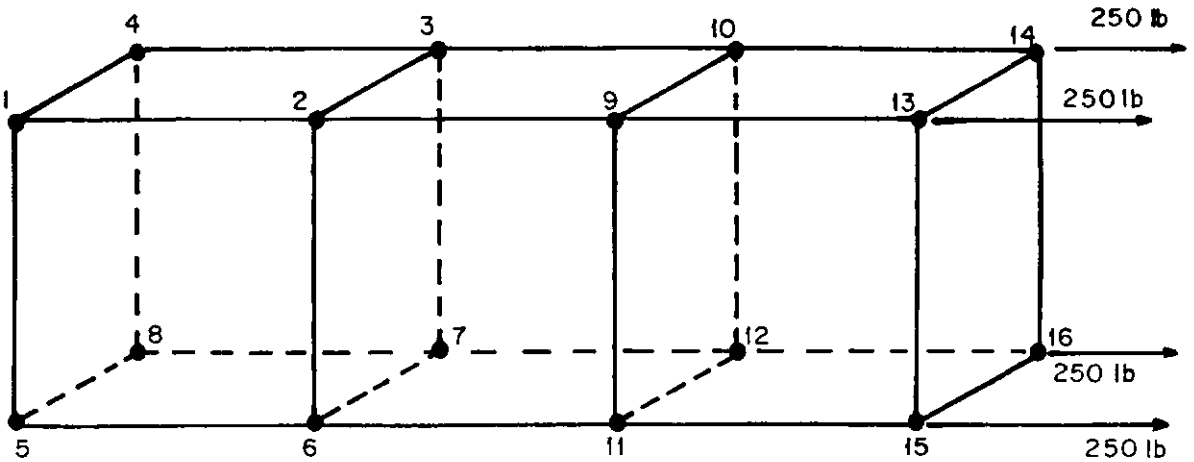


Figura (IV.1) - Malha Viga Engastada

Como foi mostrado na descrição dos algoritmos, o intervalo de tempo Δt para ambos os casos começa com o valor igual a 1.0, e na relaxação viscosa ele vai sendo atualizado de modo a permitir um melhor condicionamento do

algoritmo.

As tolerâncias adotadas foram: 10^{-3} , para resíduos; 10^{-4} , para deslocamentos; e 0,30 para aceleração, segundo sugestão de [6]. A carga foi dividida em incrementos, de maneira que pelo menos um destes incrementos esteja no regime elástico e um no elasto-plástico.

O problema foi analisado utilizando-se os dois algoritmos aqui apresentados, porém na relaxação viscosa foi criado um artifício de maneira a que a análise também pudesse ser feita sem a atualização do intervalo de tempo Δt .

Desta forma surgem três tipos diferentes de análises:

- a) Relaxação dinâmica hiperbólica (RD);
- b) Relaxação viscosa sem atualização do Δt . Adotando um valor inferior a um (1,0), no caso o valor escolhido foi 0,4 (RV);
- c) Relaxação viscosa com atualização do Δt (RVA).

Primeiramente, foi analisada esta viga com 5 incrementos e utilizando o valor de H_2 para o endurecimento. A tabela (IV.1) mostra o número necessário de iterações para a convergência em cada incremento.

NINC	RD	RV	RVA
1	32	56	45
2	27	1	1
3	25	1	1
4	24	1	1
5	29	113	171
Total	137	172	219
Tempo CPU (s)	13	18	21

* fase
Plástica

Tabela (IV.1)

Como pode ser verificado na tabela (IV.1) com a relaxação dinâmica RD, foram obtidos melhores resultados apesar de que nos primeiros incrementos esta tenha se mostrado menos eficiente que os outros dois casos. Porém, quando a estrutura começa a plastificar a RD mantém o seu número de iterações praticamente constante o que não acontece com as outras duas relaxações.

A seguir foi mudado o endurecimento H_1 , e alterado o número de incrementos, pois verificou-se que para se chegar a convergência na relaxação viscosa seria necessário um número maior de incrementos de carga, o que não acontece com a relaxação dinâmica que apresenta uma excelente performance, convergindo com apenas um incremento. A tabela (IV.2) mostra os resultados desta análise:

NINCR	RD	RV	RVA
1	32	56	46
2	27	1	1
3	25	1	1
4	24	1	1
5	23	1	1
6	22	1	1
7	21	1	1
8	21	1	1
9	26	71	123
10	25	70	146
Total	246	204	322
Tempo CPU (s)	24	21	33

* inicio
da fase
plástica

Tabela (IV.2)

Como pode ser visto acima, as duas relaxações tiveram um bom desempenho e verificou-se que ao contrário do que aconteceu na análise anterior a RV precisou de um número menor de iterações do que que a RD. Acredita-se que o fato de se ter aumentado o número de incrementos na fase plástica tenha trazido benefícios a análise.

Posteriormente analisou-se esta viga, porém com elementos quadráticos, semelhante à que será apresentada no seguinte exemplo, e fez-se uma análise não-linear geométrica testando os dois tipos de endurecimentos implementados para investigar se haveria modificações no

desempenho das diversas relaxações. Pode-se verificar que o endurecimento isotrópico implicou em convergência mais rápida para os três tipos de análise. A tabela (IV.3) apresenta estes resultados:

ENDUREC.	RD		RV		RVA	
	T.L	L.A	T.L	L.A	T.L	L.A
cinemat.	1.130	166+	*	*	1.232+	*
istrop.	1.066	505+	*	*	2.499	*

Tabela (IV.6)

* não foi conseguida a convergência.

+ convergiu, para um valor não satisfatório.

IV.2- VIGA SUBMETIDA À FLEXÃO

Este exemplo consiste numa viga semelhante ao do exemplo anterior, só que submetida a uma carga de flexão e discretizada para o elemento sólido quadrático, i.e., com 20 nós por elemento, como mostra a figura (IV.2).

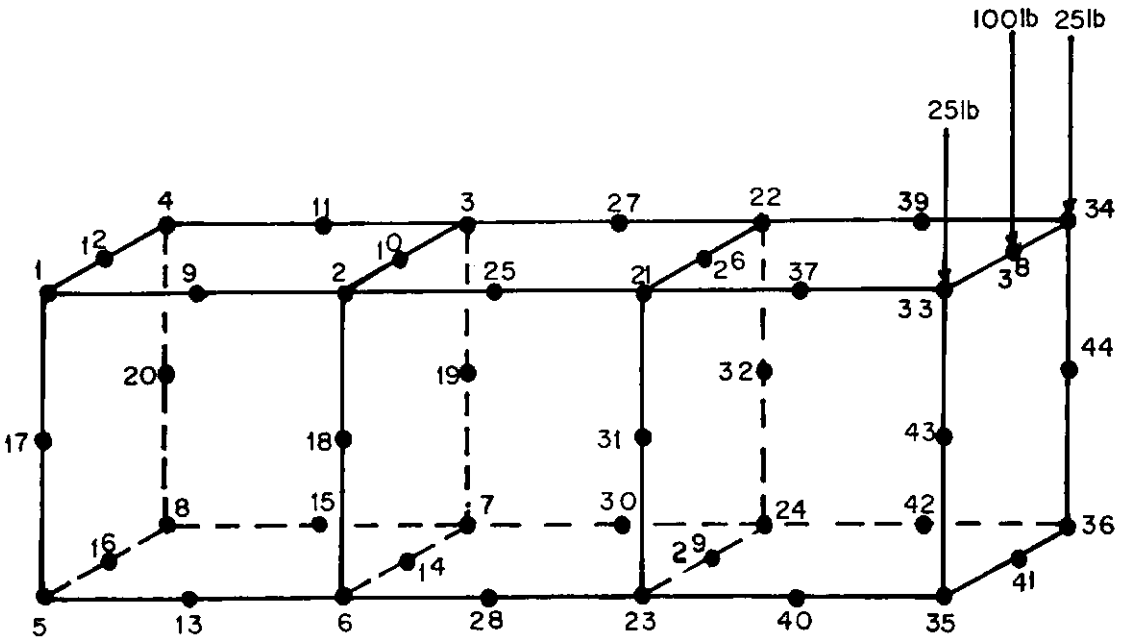


Figura (IV.2) Malha Viga Engastada

As propriedades físicas do material são:

Módulo de elasticidade $E = 30.000 \text{ lb/pol}^2$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Densidade de massa $\rho = 646.620 \text{ lb s}^2/\text{pol}^4$.

Este problema foi analisado pelos três tipos de relaxação anteriormente descritos, para as quais foi feita uma análise linear e a outra não-linear. Na análise não-linear foram empregadas as duas formulações Lagrangeanas.

A tabela (IV.3) mostra o número de iterações necessárias para a convergência nesta viga, na qual o carregamento foi aplicado em apenas um incremento.

ANALISE	RD	RV
LINEAR	554	2117
L.T	563	2888
L.A	560	2874

Tabela (IV.3)

Deve-se ressaltar que na solução utilizando o algoritmo de relaxação viscosa, com atualização do intervalo de tempo Δt , não se chegou a convergência, visto que, pelo tipo da estrutura este problema se tornou mal condicionado, fazendo com que o Δt tendesse a zero e conseqüentemente o resíduo crescer muito. Por outro lado pode-se ver que com a relaxação viscosa (para a qual foi arbitrado um valor para o Δt) obteve-se convergência, porém, com um número muito elevado de iterações para os três tipos de análise efetuados.

Espera-se que talvez com uma melhor escolha do Δt os resultados possam a ser mais satisfatórios.

A relaxação dinâmica se comportou como era esperado apresentando um número de iterações relativamente pequeno, se comparado com a outra relaxação. Outro detalhe importante é que o número de iterações foi praticamente da mesma ordem para as três análises.

Na figura (IV.3) mostra-se o comportamento do amortecimento C durante a análise linear. Este parâmetro

funciona como condicionador na solução como visto no diagrama 1.

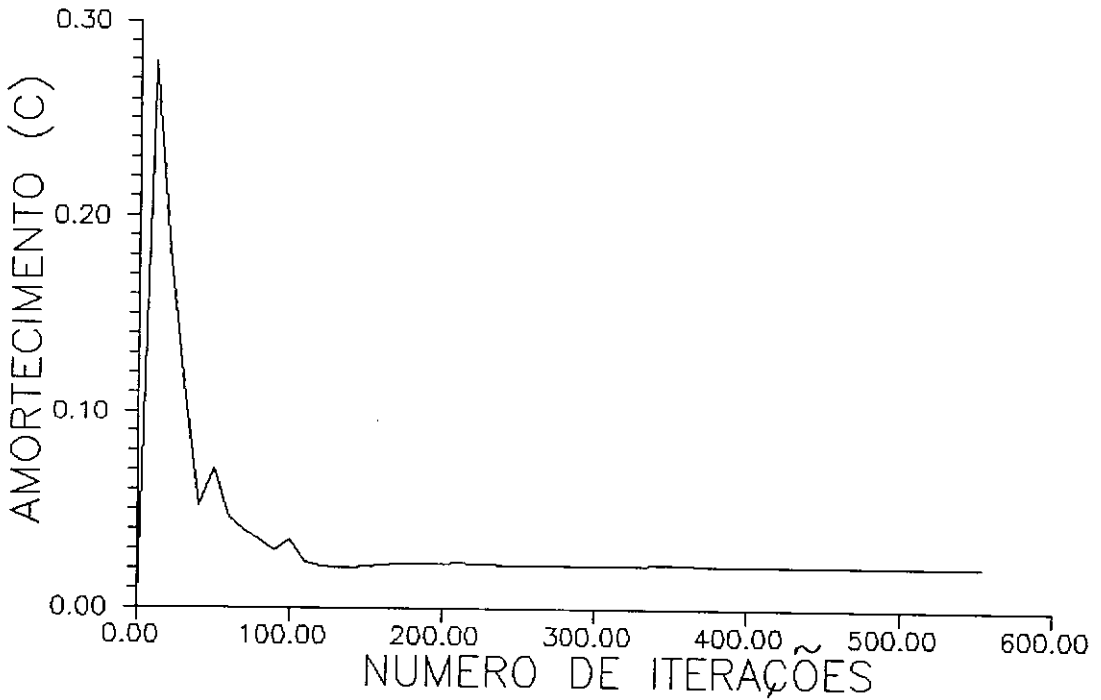


Figura (IV.3) Comportamento do amortecimento C.

IV.3- CHAPA PERFURADA

Avaliou-se a seguir o problema clássico de chapa perfurada, submetida à tração uniforme nos bordos, a qual foi discretizada numa malha de 35 elementos com 8 nós por elemento totalizando na estrutura 96 nós , conforme

mostrado nas figuras (IV.4) e (IV.5).

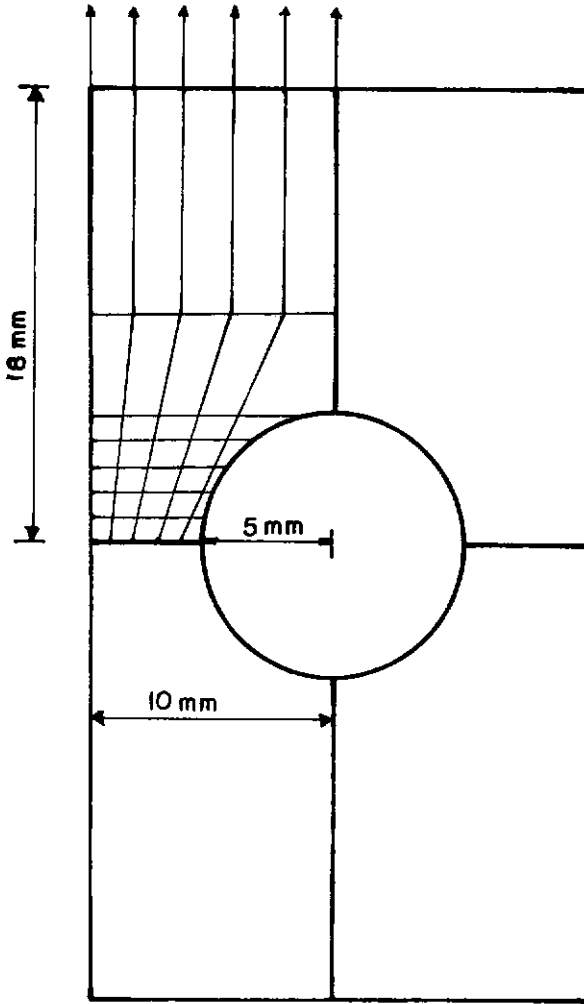


Figura (IV.4) - Chapa Perfurada

As propriedades físicas do material são:

Módulo de elasticidade $E = 7.000 \text{ Kgf/mm}^2$

Coefficiente de Poisson $\nu = 0,3$

Tensão de escoamento $\sigma_y = 24,3 \text{ Kgf/mm}^2$

Endurecimento $H_1 = 0$

$H_2 = 225 \text{ Kgf/mm}^2$

Densidade de massa $\rho = 30.000 \text{ Kgf s}^2/\text{mm}^4$.

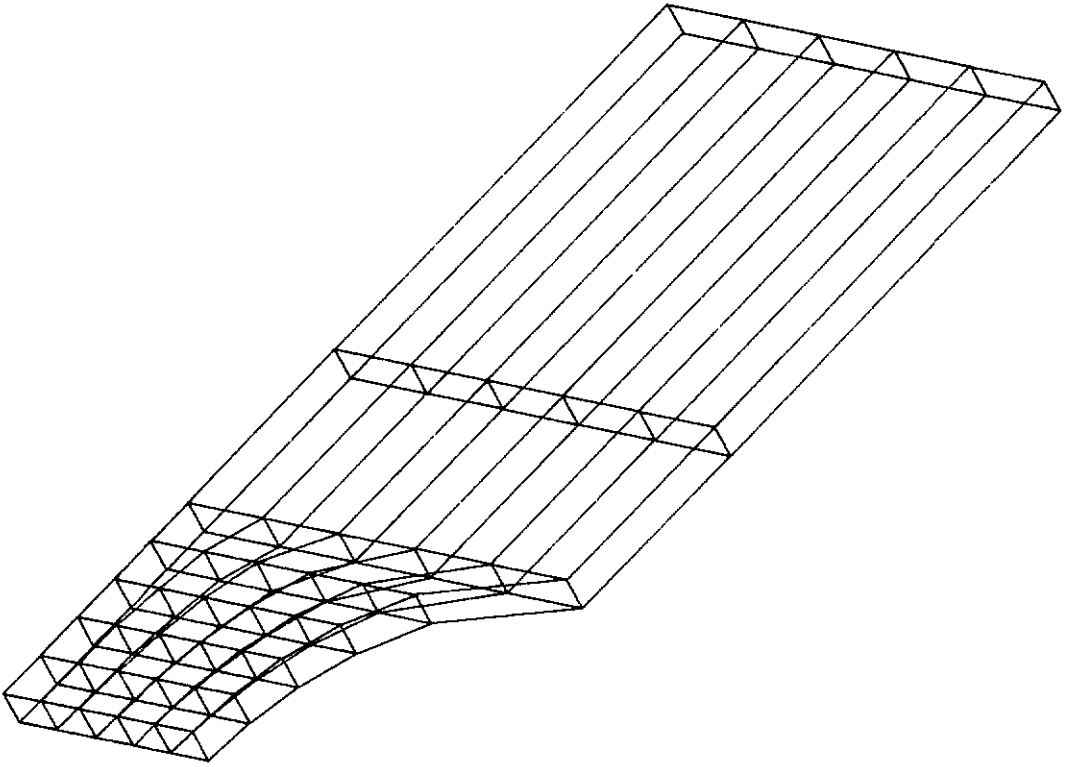


Figura (IV.5) - Malha Chapa Perfurada

Este problema foi analisado pelos três tipos de relaxação, em regime elasto-plástico, e a carga foi dividida em 10 incrementos. Os resultados considerando-se o material plástico perfeito e com endurecimento são apresentados nas tabelas (IV.4) e (IV.5) respectivamente.

NINCR	RD	RV	RVA
1	161	263	560
2	137	1	1
3	124	1	1
4	116	1	1
5	110	1	1
6	105	1	1
7	100	7	37
8	103	124	140
9	103	152	321
10	125	527	608
Total	1.184	1.078	1.671

* inicio
da fase
plástica

Tabela (IV.4)

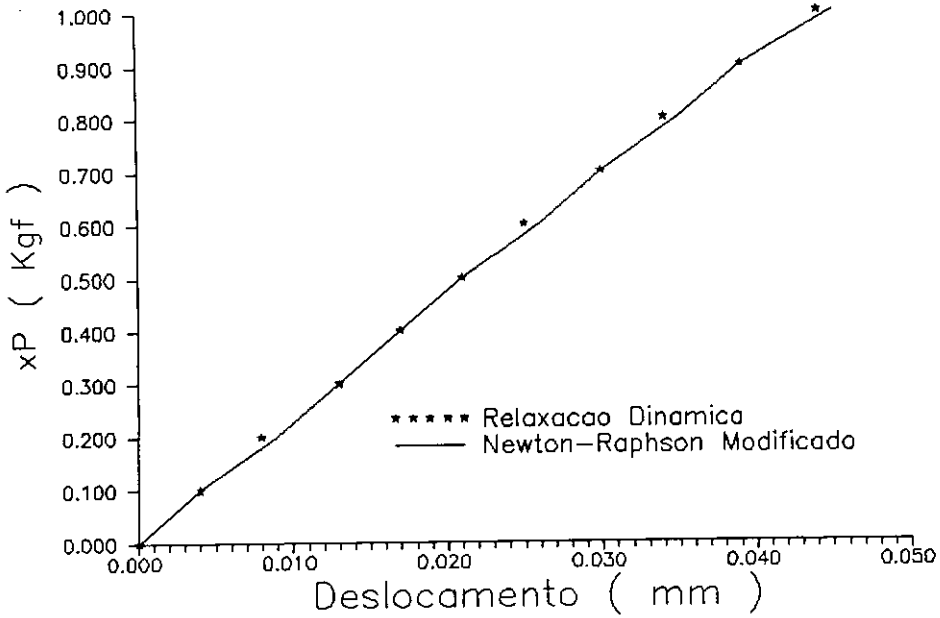
Nestas tabelas foi observado que as diversas relaxações apresentaram um número de iterações mais ou menos da mesma ordem, sendo que foi percebida uma melhora considerável na análise feita através da relaxação viscosa. Acredita-se que esta melhora deve-se ao fato do Δt estar bem próximo do intervalo de tempo ótimo da estrutura, que segundo [6], é de aproximadamente 0.52.

NINCR	RD	RV	RVA
1	161	263	560
2	137	1	1
3	124	1	1
4	116	1	1
5	110	1	1
6	105	1	1
7	100	7	37
8	102	133	123
9	103	109	260
10	119	402	648
Total	1.177	919	1.633

* inicio
da fase
plástica

Tabela (IV.5)

Para introduzir parâmetros de comparação, estas análises foram efetuadas por procedimentos incrementais iterativos, utilizando-se o método de Newton-Raphson Modificado e com o método Quasi-Newton conhecido como BFGS. A figura (IV.6) mostra esta comparação, na qual pode-se observar que, em termos de deslocamentos, o método Newton-Raphson Modificado e as relaxações foram quase iguais, embora, em termos de número de iterações e de tempo de CPU gasto no processamento, não seja possível qualquer comparação, visto que, por este método foram necessárias apenas 18 iterações e 40 segundos para convergência, tempo este, bem inferior ao tempo gasto pela melhor relaxação que foi da ordem de 1.730 segundos.



Figura(IV.6) Comportamento da relaxação e outros métodos

Como este problema foi analisado anteriormente usando não linearidade física, fez-se uma nova rodada usando não linearidade geométrica, e foi descoberto que usando a formulação Lagrangeana atualizada a convergência não foi atingida com nenhuma das relaxações, embora com a relaxação dinâmica, após ter feito os 10 incrementos verificou-se que a mesma tinha convergido, porém para resultados completamente diferentes dos que tinham sido apresentados durante as análises feitas com as outras formulações. A tabela (IV.7) mostra o número de iterações necessárias para a convergência nas diversas relaxações com as duas formulações apresentadas nesta análise.

NINCR	RD		RV		RVA	
	T.L	L.A	T.L	L.A	T.L	L.A
1	161	161	208	4.891	341	*
2	138	7	2	3.972	4	*
3	125	9	2	*	4	*
4	118	7	2	*	15	*
5	113	4	11	*	25	*
6	106	6	22	*	41	*
7	104	4	58	*	65	*
8	103	82	61	*	193	*
9	106	12	126	*	279	*
10	115	171	316	*	603	*
Total	1.189	463+	908	*	1.570	*

Tabela (IV.7)

* Não foi conseguida a convergência.

+ Convergiu para valores não satisfatórios.

IV.4- CILINDRO ESPESSO

Este exemplo trata de um tubo de parede espessa com raio externo de 200 mm e raio interno de 100 mm, sujeito a uma pressão interna, o qual foi discretizado numa malha de 64 elementos lineares, resultando 162 nós na estrutura como mostra a figura (IV.7).

As propriedades físicas do material são:

Módulo de elasticidade	$E = 21.000 \text{ dN/mm}^2$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0,3$
Tensão de escoamento	$\sigma_y = 24 \text{ dN/mm}^2$
Endurecimento	$H = 0$
Densidade de massa	$\rho = 30.000 \text{ dN s}^2/\text{mm}^4$.

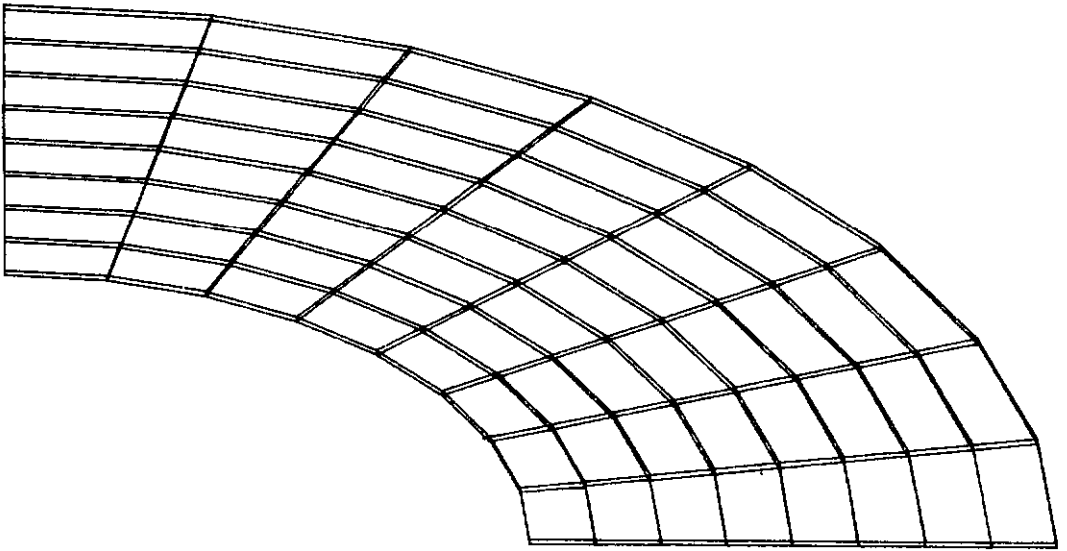


Figura (IV.7) -Malha Cilindro Espesso

A tabela (IV.8) apresenta, tanto a relaxação dinâmica como a viscosa com um número de iterações mais ou menos da mesma ordem, o que não aconteceu com relaxação viscosa com atualização do Δt . Entretanto, quando comparados os resultados com processos iterativos que utilizam o método de Newton-Raphson Modificado, a relaxação viscosa mostrou resultados mais exatos do que a relaxação dinâmica, como descrito na figura (IV.8).

NINCR	RD	RV	RVA	
1	1.039	1.476	2.694	
2	940	15	1	
3	847	1	1	
4	792	1	1	
5	750	1	1	
6	716	1	1	
7	688	1	1	
8	664	1	1	
9	642	1	1	
10	623	1	1	
11	604	1	1	
12	615	393	353	* inicio da fase plástica
13	654	1.030	1.032	
14	672	592	902	
15	720	1.134	1.736	
16	828	1.654	3.718	
17	960	1.701	6.418	
18	1.218	3.813	45.156	
Total	13.972	11.817	63.019	

Tabela (IV.8)

Vale a pena lembrar, que, como no exemplo anterior, quando foi feita esta comparação, verificou-se que em termos de número de iterações e de tempo de CPU, há uma diferença muito grande entre os métodos. Assim, temos que, com o método NRM, foram necessárias 27 iterações e 91

segundos para a convergência, e para a relaxação que apresentou melhor performance, um tempo de CPU de 5.700 segundos.

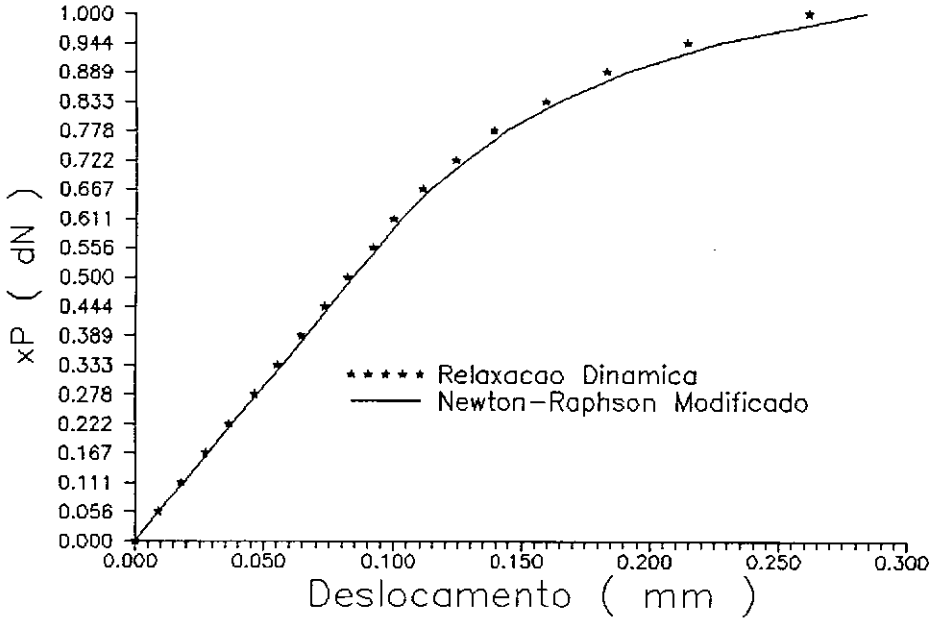


Figura (IV.8) Comportamento dos métodos RD e NRM

Nas análises feitas com relaxação viscosa verificou-se que estas apresentam um número muito elevado de iterações para convergência, principalmente para atingir o primeiro incremento, onde há a necessidade de um número muito grande de iterações, e após este incremento até se chegar à plastificação da estrutura, se fez necessária apenas uma iteração por incremento. Isto se deve ao esquema apresentado por [6] e descrito no diagrama 2, onde são manipulados os deslocamentos depois do primeiro

incremento de carga. Pode ser observado também, que a RV apresentou um número menor de iterações do que a RVA, isto se deve a escolha do Δt para este caso, pois apesar de termos aplicado um Δt próximo do Δt dito como ótimo em [6], foi verificado que, adotando valores inferiores a este, a convergência se tornava mais rápida. Após a plastificação, o número de iterações por incremento tornou-se muito elevado, e no caso da RVA atingiu limites altíssimos, fazendo com que esta análise fosse demasiadamente ineficiente.

IV.5- JUNTA TUBULAR

Apresenta-se uma junta tubular T, conforme figura (IV.7), onde foi feita uma discretização com elementos de sólido quadráticos, o que resultou numa malha de 204 elementos, com um total de 1281 nós, como mostra a figura (IV.8). Convém salientar que esta malha representa apenas um quarto da junta, devido à dupla simetria.

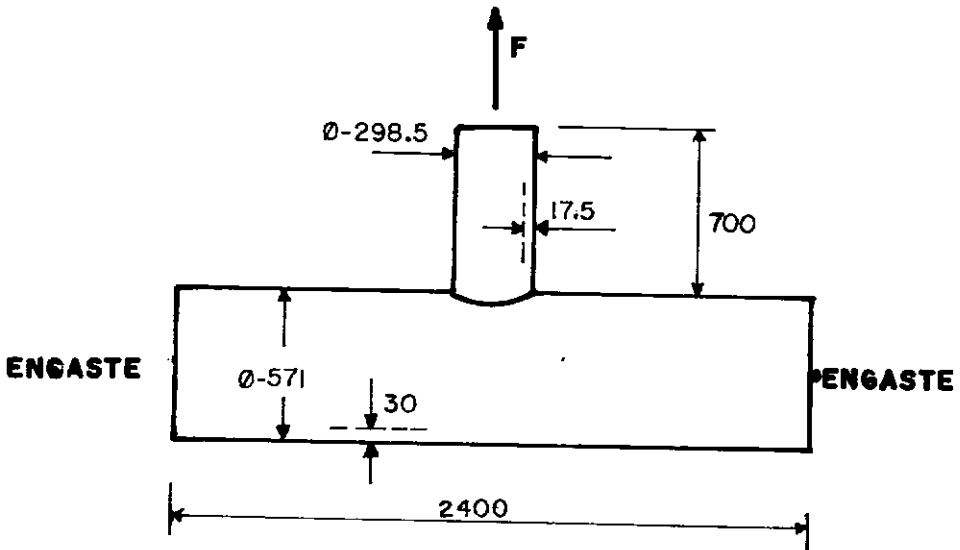


Figura (IV.7) - Junta tubular T

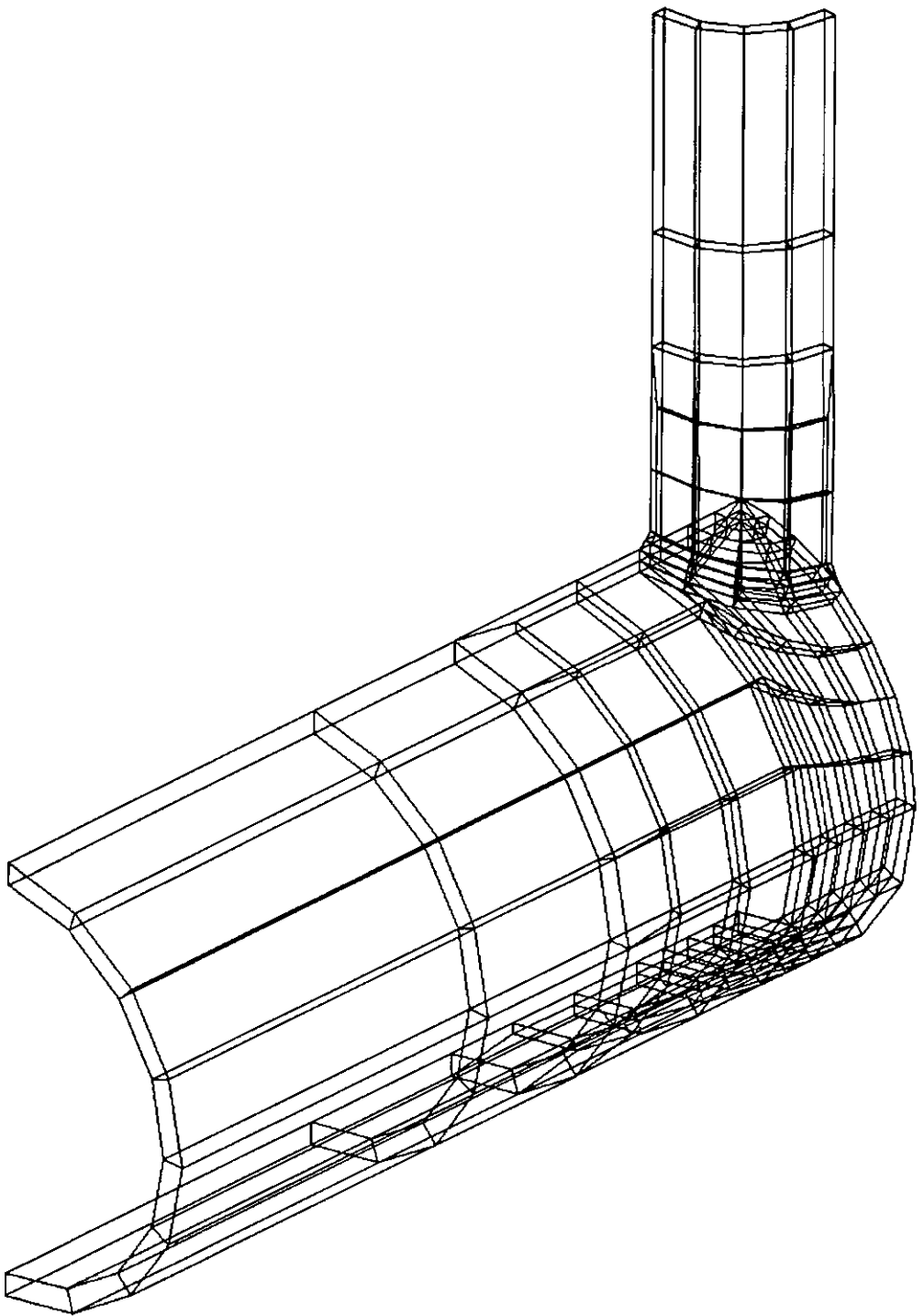


Figura (IV.8) - Malha da Junta Tubular

As propriedades dos materiais são:

Módulo de elasticidade $E = 21,0 \text{ tf/mm}^2$

Coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Densidade de massa $\rho = 12.56 \text{ tf s}^2/\text{mm}^4$.

Primeiramente fez-se uma análise linear, com os três tipos de relaxação, e mais uma vez foi visto que a relaxação viscosa com atualização do intervalo de tempo não apresentou resultados como já tinha sido observado no exemplo da viga a flexão. Por este motivo a tabela (IV.8) mostra apenas a análise feita só com duas relaxações.

Esta tabela revela a necessidade que existe na análise de um problema mais complexo, de um número bastante elevado de iterações, assim como, gasto excessivo de tempo CPU.

MÉTODO	RD	RV
Numero de iteracoes	40.026	85.283
Tempo CPU (s)	133.951	267.456

Tabela (IV.8)

Para este caso, verificou-se também, o melhor desempenho da relaxação dinâmica, embora, com alto consumo computacional, mas com considerável economia de memória central visto que neste sentido as relaxações tem grandes vantagens.

Para introduzir um parâmetro de comparação esta

análise foi efetuada com o método dos gradientes conjugados com condicionador bloco-diagonal nodal e os resultados são apresentados na referência [4].

A seguir fez-se uma análise não-linear geométrica desta junta, utilizando-se a formulação Langrangeana Total como apresentado na tabela (IV.9).

MÉTODO	RD	RV
Numero de iteracoes	37.928	95.433
Tempo CPU(s)	199.475	351.893

Tabela (IV.9)

Estes resultados comparados com os da análise linear indicam que houve uma redução no número de iterações para chegar a convergência, porém, houve um aumento do tempo de CPU. Foi visto também que a relaxação dinâmica apresentou resultados melhores do que a viscosa conforme verificado anteriormente.

IV.6- GRUPO DE ESTACAS

Este exemplo trata de um grupo de estacas tubulares metálicas cravadas em uma argila puramente coesiva com 45m de comprimento cada uma e tendo um espaço de 6m entre elas, nas quais é aplicado um carregamento lateral. Foi feita uma discretização com elemento de sólido linear, o que resultou numa malha de 1376 elementos e 1938 nós conforme figura (IV.9).

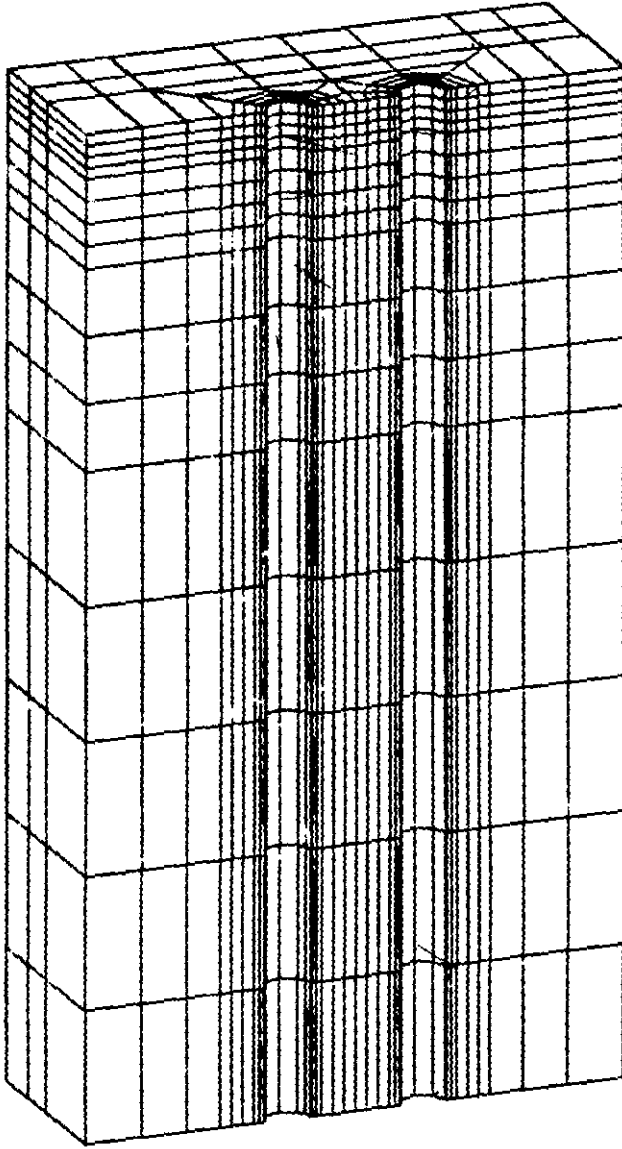


Figura (IV.9) - Malha de um Grupo de Estacas

As propriedades dos materiais são:

Para o aço:

Módulo de elasticidade $E = 210,00 \text{ GPa}$

Coeficiente de Poisson $\nu = 0,30$

Densidade de massa $\rho = 14.000.000.000 \text{ .}$

Para a argila

Módulo de elasticidade $E = ,05 \text{ MPa}$

Coeficiente de Poisson $\nu = 0,40$

Densidade de massa $\rho = 529.100,0 \text{ .}$

Neste exemplo, como no anterior, foi feita uma análise linear pelos três métodos de relaxação, porém, como já acontecera, a relaxação viscosa com atualização do intervalo de tempo não convergiu, mostrando que para casos em que é exigido um número muito elevado de iterações este esquema não pode ser aplicado.

MÉTODO	RD	RV
Numero de iteracoes	14.236	37.270
Tempo CPU(s)	120.864	305.635

Tabela(IV.10)

A tabela (IV.10) apresenta o número de iterações necessárias para a convergência, que na relaxação dinâmica não foi tão elevado se comparado com o desempenho obtido por [4], usando o método dos gradientes conjugados com condicionador bloco-diagonal. Cabe destacar que a maior diferença neste caso foi o tempo excessivo de CPU gasto

pela relaxação para chegar ao resultado final. Já a relaxação viscosa teve um número muito elevado de iterações e de tempo de CPU.

Devido a dificuldades computacionais este estudo não foi estendido à análise não linear.

CAPÍTULO V

CONCLUSÕES

Este trabalho tem por objetivo examinar o desempenho das relaxações aqui estudadas em aplicações estruturais pelo método dos elementos finitos.

Pode-se concluir que as técnicas de relaxação dinâmica apresentam-se como alternativas simples para análise de estruturas, tanto no regime linear como elasto-plástico. Além disto, tem a vantagem de requisitar reduzida memória central, e sua programação pode ser totalmente vetorial.

Foram aqui estudadas três alternativas de relaxação: a relaxação dinâmica (hiperbólica), a relaxação viscosa com e sem atualização do intervalo de tempo Δt .

A primeira, mostrou um comportamento robusto para a solução de todos os tipos de análises efetuadas neste trabalho, apresentando resultados exatos quando comparados com outras soluções. Lamenta-se apenas, que o método tenha convergência um pouco lenta, porém, esse obstáculo deve ser superado quando este algoritmo for implementado num computador com arquitetura vetorial/paralela. Deve-se resaltar que a utilização deste algoritmo na análise não-linear pode-se tornar extremamente atraente.

Na segunda relaxação, verificou-se que se esta não tivesse o esquema de aceleração proposto por [6,17], a sua performance não poderia se comparar com a relaxação dinâmica. Foi constatado também, que o uso da atualização automática do intervalo de tempo Δt não trouxe benefícios para a solução nos diversos exemplos, porém quando o Δt adotado tinha um valor qualquer menor do que um, o algoritmo se comportava de uma maneira satisfatória, embora, o valor do Δt escolhido para as análises não fosse, talvez, o valor mais apropriado. Outro fator importante neste algoritmo de relaxação viscosa é o esquema apresentado por [6], que faz com que a solução tenha uma convergência mais acelerada. Vale a pena lembrar que este dispositivo é de grande ajuda enquanto a estrutura se encontrar na fase elástica, porém na fase plástica não apresenta a mesma valia, pois a convergência se mostra bastante lenta, acarretando num grande número de iterações. Não se produziu um algoritmo de relaxação viscosa robusto como no caso anterior, mas pode-se obter soluções de casos específicos mais eficientes (membranas).

Devido a arquitetura do computador utilizado não se obteve soluções com melhor desempenho que no procedimento incremental convencional de análise não-linear do método dos elementos finitos (método Newton e Quasi-Newton).

O algoritmo de relaxação viscosa ainda requer o estabelecimento de um esquema de aceleração satisfatório.

Resultados promissores neste sentido tem sido objeto de diversas pesquisas, utilizando-se esquemas multigrid como apesenados em [20].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALVES , J. L. D., COUTINHO , A. L. G. A. , LANDAU , L. e EBECKEN , N. F. F. , O Algoritmo de Relaxação Dinâmica Acelerada para Análise Limite de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos , Colloquia , 139 - 159 , 1987.
- [2] BATHE , K. J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis , Prentice - Hall , Inc. , Englewood Cliffs , New Jersey , 1982.
- [3] BREW, J. S. e BROTTOM, D. M., Nonlinear Structural Analysis by Dynamic Relaxation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, 463 - 483, 1971.
- [4] COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D. e EBECKEN N. F. F., Two-Level Preconditioners for Hierarchical Finite Element Equations and their Applications in Solid Mechanics, IMACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra, April 2-4, Brussels, Belgium (1991).
- [5] CRISFIELD , M. A., Finite Elements and Solutions for Structural Analysis , Pineridge Press Swansea , U. K. , Vol I , 1986.
- [6] De SOUZA , L. A. e EBECKEN , N. F. F. , Relaxação Viscosa Acelerada - Uma Proposta de Análise Estrutural Não Linear Pelo Metodo dos Elementos Finitos em Computadores de

Arquitetura Vetorial/Paralela , RBE , Vol. 7, Set. 1990.

[7] FARHAT , C. and CRIVELLI , L., A general Approach to Nonlinear FE Computations on Shared Memory Multiprocessors, Center for Space Structures and Controls , 12 - 15 , Nov. 1987.

[8] FELIPPA , C. A., Dynamic Relaxation Under General Increment Control, Palo Alto, California, USA.

[9] KULAK, R. F. e FILAL, C. , Neptune: A System of Finite Element Programs for Tree-Dimensional Nonlinear Analysis, Nuclear Engineering and Design 106, 47 - 68, 1988.

[10] OTTER, J.R. H. , Computations for Prestressed Concrete Reactor Pressure Vessels Using Dynamic Relaxation, Nuclear Structural Engineering 1 , 61 - 75, 1965.

[11] OWEN, D. R. J. e HILTON, E., Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press Swansea, 1980.

[12] PAPADRAKAKIS, M., A Method for the Automatic Evaluation of the Dynamic Relaxation Parameters , Computer Methods in Applied Mecanics and Engineering 25 , 35 - 48, 1981.

[13] QIANG , S. , An Adaptive Dynamic Relaxation Method for Nonlinear Problems , Computer & Structures , Vol 30 , No. 4 , 855 - 859 , 1988.

[14] RERICHA , P., Optimum Load Time History for Nonlinear Analysis Using Dynamic Relaxation , International Journal for Numerical Methods in Engineering , Vol 23 ,2313 - 2324 , 1986.

[15] SHANTARAM , D., OWEN , D. R. and ZIENKIEWICZ , O. C. , Dynamic Transient Behavior of Two - and Three - Dimensional Structures Including Plasticity , Large Deformation Effects and Fluid Interaction , Earthquake Engineering and Structural Dynamics , Vol 4 , 561 - 578 , 1976.

[16] UNDERWOOD, P. G, "Dynamic Relaxation", Cap 5 , Computational Methods for Transient Analysis. Edit. T. Belytschko, T. J. R. Hughes, North Holland, 1983.

[17] ZIENKIEWICZ , O. C. and LOHNER , R., Accelerated Relaxation or Direct Solution? Future Prospects for FEM , International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 21 ,1 - 11 , 1985.

[18] ZIENKIEWICZ, O. C., The Finite Elements Methods, Mac Graw - Hill Book Company, England, 1979.

[19] Trabalho Final do Curso de Plasticidade , COPPE , 1987.

[20] COTINHO, A. L. G. A., ALVES, J. L. D., EBECKEN, N. F. F. e DEVLOO, P. R., Two-Level Hierarchical Preconditioners for Finite Element Equations, ASME Annual Winter Meeting, December 1-6, Atlanta, Georgia, USA, 1991.

[21] DAY, A. S., An Introduction to Dynamic Relaxation, The Engineer 219, 218-221, 1965.

[22] FRANKEL, S. P., Convergence Rates of Iterative Treatments of Partial Differential Equations, Mathl. Tabl. Natn. Res. Coun., Washington, 4, 65-75, 1950.

[23] RICHARDSON, L. F., The Approximate Arithmetical Solution by Finite Difference of Physical Problems Involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonary Dam, R. Soc. London Phil. Trans A 210, 307-357, 1911.

[24] WELSH, A. K., Discussion on Dynamic Relaxation, Proc. Inst. Civ. Engrs. 37, 723-750, Aug. 1967.

[25] CASSEL, A. C. et al., Cylindrical Shell Analysis by Dynamic Relaxation, Proc. Inst. Civ. Engrs. 39, 75-84, Jan. 1968.

[26] RUSHTON, K. R., Large Deflexion of Variable Thickness Plates, Int. J. Mech. Sci. 10, 723-735, 1968.

[27] HANSEN, W., Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Stromungen in Randinceren nesbst Anwendungen, Tellus, August 1956.