Instrumentos Financeiros para *Hedge* de Longevidade

Isabela Dantas

Paulo Petra Bisneto

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Estatísticos

2017

Instrumentos Financeiros para *Hedge* de Longevidade

Isabela Dantas e Paulo Petra Bisneto

Projeto final submetido ao Corpo Docente do Instituto de Matemática - Departamento de Métodos Estatísticos da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Atuariais.

Aprovado por:

____

Prof. José Roberto Montello

Atuário – UFRJ – Orientador

____

Prof. Nei Rocha

Doutor – UFRJ

____

Prof.ª Flavia Landim

Doutora – UFRJ

Rio de Janeiro, RJ, Brasil

2017

Agradecimentos

Isabela Dantas

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família e, especialmente, aos meus pais e a minha irmã, que me proporcionaram o caminho para todas as vitórias que eu alcancei. Sempre me deram forças, acreditaram em mim e o suporte foi fundamental.

Gostaria de agradecer também a todo o corpo docente do Instituto de Matemática da UFRJ e, principalmente, aos professores do Departamento de Métodos Estatísticos. Tive excelentes mestres ao longo desses cinco anos, que contribuíram, cada um da sua maneira, tanto com a minha formação profissional quanto com a minha formação pessoal.

Aos meus amigos que estiveram comigo desde o início do curso e sempre me proporcionavam alegrias nos momentos de estresse. Em especial ao Paulo Petra, minha dupla nesse projeto e parte fundamental na composição dele, na minha jornada acadêmica e pessoal.

Enfim, muito obrigada a todos que de alguma forma fizeram parte dessa jornada e foram de extrema importância para a finalização dessa fase da minha vida.

Paulo Petra Bisneto

Agradeço primeiramente à minha família, principalmente ao meu pai e a minha mãe, que abdicaram de muito em prol da minha construção. Todos dois sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me dando forças para concluir mais esta etapa. Obrigado por tudo de bom que fizeram e ainda fazem por mim.

Aos meus amigos e aos meus colegas de trabalho, obrigado pela forma que cada um participou na minha sólida formação como atuário.

À Isabela, minha parceira de monografia, agradeço pelo companheirismo de sempre e por tudo que me ensina diariamente.

Obrigado ao corpo docente do Instituto de Matemática, com ênfase àqueles pertencentes ao Departamento de Métodos Estatísticos que, em sua maioria, foram excelentes formadores de conhecimento técnico e pensamento crítico.

Sumário

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar as possibilidades de proteção contra os riscos atrelados à longevidade praticados atualmente no mundo. O crescente aumento da expectativa de vida preocupa aqueles que são responsáveis por sua respectiva mensuração. Durante as últimas décadas, atuários e estatísticos subestimaram este crescimento, trazendo insuficiência de capital e provisionamento.

Abordaremos aqui instrumentos financeiros mais utilizados no mercado atualmente para realizar *hedge* contra o risco de longevidade: *Buy-In*, *Buy-out* e *Swap* de Longevidade (*Longevity Swap*), ~~e os~~ além dos métodos estatísticos e matemáticos mais utilizados na literatura para lidar com este complexo risco. Para o caso da mortalidade, abordaremos o modelo de Lee-Carter, enquanto que, para a taxa de juros, forneceremos uma introdução a Estrutura a Termo da Taxa de Juros e a utilização do modelo de Svensson para a estimação de seus parâmetros.

Não é intenção deste trabalho exibir qual a proteção ótima, ou a maneira mais apropriada de se estimar os fluxos de caixa futuros, mas fornecer subsídios para se compreender as diferentes formas de mitigar estes riscos.

Palavras-chave: *Buy-In*, *Buy-Out*, Estrutura a Termo da Taxa de Juros, *Hedge*, Lee-Carter, Longevidade, *Longevity Swap*, Svensson

1. Introdução

A partir da segunda metade do século XX, após o fim da Segunda Guerra Mundial, vemos um decréscimo nas taxas de mortalidade nos mais diversos países do globo. As epidemias e doenças infecciosas se tornaram eventos raros, contribuindo fortemente para o declínio no número de mortes. Segundo Torri (2012), a partir de 1970, se inicia o processo denominado “Revolução Cardiovascular”, em que as doenças relacionadas ao coração se tornaram os principais agentes para o aumento da longevidade.

A grande questão sempre foi quanto a um limite na expectativa de vida. Médicos e biólogos divergem se há um limite para a sobrevida humana. A maioria dos especialistas contemporâneos de suas épocas não acreditava que iríamos atingir idades tão elevadas quanto as atuais.

Baseados nessa dificuldade e nos grandes impactos financeiros que uma má predição pode gerar, analisaremos os possíveis *hedges* que entidades de aposentadoria, fundos de pensão, ou qualquer instituição que possua risco de vida, pode realizar. O foco do trabalho é com relação aos beneficiários entrando em benefício ou já em gozo do mesmo. Não trataremos sobre o diferimento das rendas futuras de aposentadoria.

Apesar da intensificação nos estudos, a nível mundial, para captar a real tendência das mortalidades, ainda temos bastante dificuldade e incerteza quanto aos resultados. Devido a essa entropia, grandes corporações detentoras de grande conhecimento de mortalidade aceitam receber o risco de longevidade, em troca de pagamentos fixos acordados com a entidade cedente.

2. Longevidade e Sociedade

A longevidade é vista com bons olhos pela população em geral. Claramente evidencia uma evolução social e econômica de um país, possibilitando a expansão de novos mercados. Em contrapartida, o incremento das expectativas de vida gera um déficit para a União e para as entidades que dependem principalmente dos riscos de sobrevivência. Por este motivo, os países desenvolvidos que tinham a aposentadoria de suas populações integralmente custeadas pelo governo, passaram a criar um teto de benefício e incentivar uma complementação na forma de anuidades, afim do indivíduo manter seu respectivo padrão de vida.

As instituições que prestam o serviço de garantir rendas, sempre fizeram projeções atuariais baseadas em tábuas de mortalidade fixas no tempo, que suportam o cálculo final do valor das rendas futuras, baseadas em um montante acumulado até a idade de aposentadoria. O desafio desse fluxo é o fato dele ser de muito longo prazo, dificultando as estimações não só de mortalidade futura, mas de taxa de juros, que pode ser muito volátil em países como o Brasil.

Feita as projeções realistas do fluxo de caixa futuro e o valor a ser provisionado pela entidade fornecedora da renda vitalícia, é responsabilidade dela fazer a gestão dos recursos com a finalidade de custear e manter a solvência da cobertura contratada. Nesta etapa que pode acontecer o erro de *Asset Liability Management* (*ALM*), em que ocorre um descasamento entre o ativo e o passivo, uma vez que o passivo vem sendo bastante subestimado devido a erros nas definições das premissas econômicas e atuariais. Um mau casamento dos dois pode levar a entidade à ruína, caso a insuficiência de provisão seja incompatível com a realidade. Daí se conclui a importância da sensibilidade e parcimônia quanto aos parâmetros utilizados, pois isso pode implicar em uma dívida irreversível e catastrófica, ainda mais se pensarmos na entidade como o governo.

3. Tipos de *Hedge* para o Risco de Longevidade

3.1. Buy-in e Buy-out

Para lidar com o risco financeiro da longevidade, umas das soluções adotadas por empresas patrocinadoras de planos de benefícios são os *buy-ins* e *buy-outs*. Estes instrumentos consistem em transferir este risco para seguradoras e resseguradoras, que estão mais preparadas para lidar com suas consequências.

Tais transações são feitas a partir da compra de anuidades em massa[1], quando os administradores de um plano de benefícios pagam um prêmio para a seguradora e, em contrapartida, todos os participantes passam a ser segurados por tal empresa. Desta forma, os riscos de longevidade e investimento também são transferidos.

No *buy-out*, também conhecido como retirada de patrocínio, a seguradora passa a ser inteiramente responsável pelo pagamento dos pensionistas. Neste caso, o plano deixa de existir, todos os ativos e passivos do fundo são transferidos à seguradora e cada participante ganha sua própria apólice, individual e intransferível, uma vez que o pagamento inicie.

Um dos maiores *buy-outs* no Reino Unido foi o da companhia elétrica Thorn, em 2008. Os administradores do Fundo de Pensão Thorn compraram a anuidade em massa da Pension Insurance Corporation (PIC), que por sua vez emitiu apólices individuais para cada membro do fundo. O plano foi então vendido para a PIC por £1.1 bilhões. O acordo melhorou em cinco por cento os benefícios dos membros e garantiu maior estabilidade financeira aos administradores, uma vez que não haveria mais de se preocupar com pagamentos extras a participantes que vivessem além do esperado.

De fato notamos um movimento crescente de retirada de patrocínio no Brasil e no mundo, uma vez que o plano de benefícios consome grande parte da capacidade de risco de uma companhia. Ao fazer o *buy-out*, a empresa pode focar nos riscos atrelados ao seu negócio, onde possui mais competência e possibilita remunerar ainda mais ainda o capital.

No entanto, apesar de ser a única solução que transfere completamente o risco dentre as soluções aqui discutidas, também é a mais cara para o fundo de pensão. Um dos maiores motivos para o lento crescimento do movimento de retirada em países como os Estados Unidos é a necessidade do prêmio das anuidades ser pago antecipadamente. Empresas que ainda estão se recuperando das recentes crises financeiras, começam a olhar agora para esta solução.

No Brasil, a retirada de patrocínio é regulamentada pela PREVIC, sob a Resolução CNSP nº 11, de 13 de maio de 2013. Dentre as características da norma está o fato de que as insuficiências e sobras são tratadas de forma proporcional entre a patrocinadora e os participantes, sendo feito, portanto, o equacionamento do déficit ou distribuição do superávit, fundos previdenciais e administrativos, diferentemente do que era previsto na norma anterior. Devem ser ainda apresentadas as opções ao participante de aderir ao plano instituído por opção, fazer a portabilidade, resgate ou ambos.

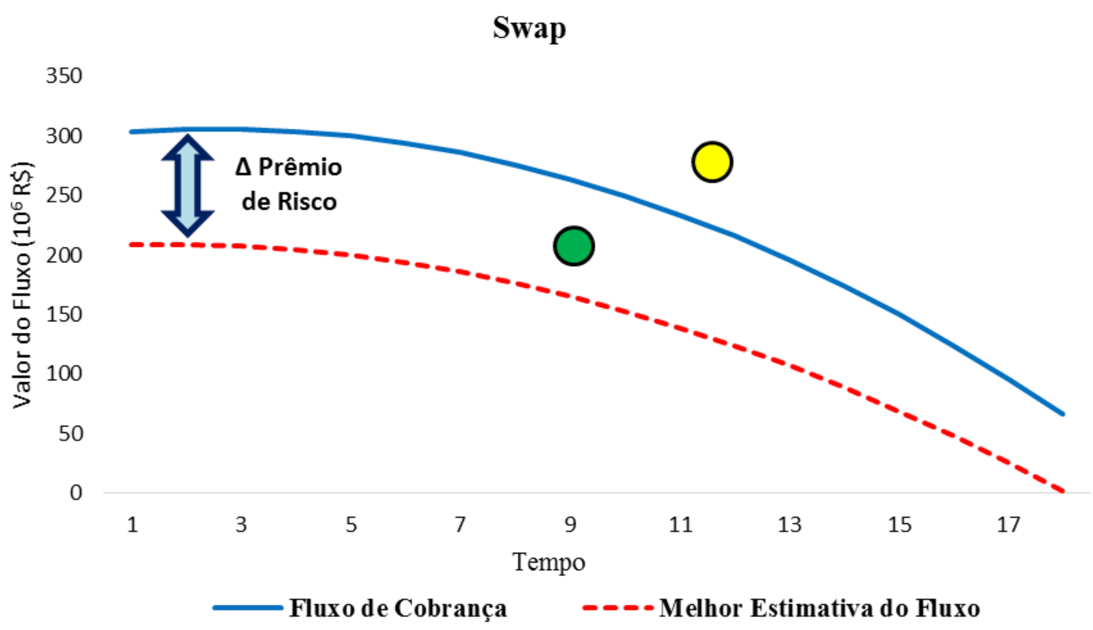
Já o *buy-in* é um método de a patrocinadora reduzir os riscos enquanto ainda detém a responsabilidade pelo pagamento dos benefícios. Desta forma, é comprada uma única apólice, em que a seguradora efetua pagamentos periódicos à patrocinadora, de acordo com os benefícios pagos aos participantes do plano, atuando apenas como uma intermediária entre a seguradora e os pensionistas, estando ainda sujeita ao risco de investimento.

À primeira vista o *buy-in* pode parecer menos atrativo, uma vez que o plano tem a necessidade de anualmente adquirir os fundos para arcar com o prêmio da apólice, ou seja, não funcionaria em um plano com um número grande de assistidos. Além disso, com a primeira opção (*buy-out*) é possível mitigar quase todos os riscos. No entanto, entre as vantagens deste método estão o menor impacto no balanço da companhia e a possibilidade de ser utilizado por um fundo de pensão subfinanciado, o que não é possível com o *buy-out*. Ele também é uma escolha para as empresas que querem garantir que o plano esteja em boas mãos e, consequentemente, aumentar seu valor antes de procurar possíveis compradores.

No mercado brasileiro uma operação como esta não é permitida, as obrigações e os ativos obrigatoriamente precisam ficar com o fundo de pensão.

3.2. Swap de Longevidade

Uma operação que vem ganhando espaço no mercado financeiro é o *Swap* de Longevidade. *Swap* é um contrato de derivativo em que duas partes acordam em trocar fluxos de caixa, em que, geralmente, um fluxo é fixo e o outro é variável. Esta operação é uma forma de proteção (ou *hedge*, como conhecido no mercado financeiro) contra algum derivativo que apresenta volatilidade não suportada pela empresa que deseja se precaver. A contraparte, receptora do novo risco, faz uma melhor estimativa do fluxo futuro e cobra um percentual acima desta curva para aceitar o risco. A seguir uma imagem para exemplificar um *swap* e sua precificação:



Caso o evento ocorra abaixo da curva do Fluxo de Cobrança (círculo verde), a **cedente** é responsável por pagar a diferença entre o este ponto e o Fluxo de Cobrança.

Caso o evento ocorra acima da curva do Fluxo de Cobrança (círculo amarelo), o **receptor** é responsável por pagar a diferença entre o este ponto e o Fluxo de Cobrança.

Para entender melhor o fluxo de um swap, em termos matemáticos, tome o Fluxo Cobrado como $f(t)$, a Melhor Estimativa do Fluxo como $g(t)$ e o Prêmio de Risco como $p(t)$. Temos que:

$$p(t) = f(t) - g(t)$$

Pela parte do receptor do risco, é de sua responsabilidade, todos os valores que excederem $f(t)$. Seja $w(t)$ o fluxo real da receptora no tempo t, e $s(t)$ os pagamentos que a mesma faz a cedente. Temos que:

$$s(t) = \begin{cases} w(t) - g(t), & w(t) > g(t) \\ 0, & w(t) \leq g(t) \end{cases}$$

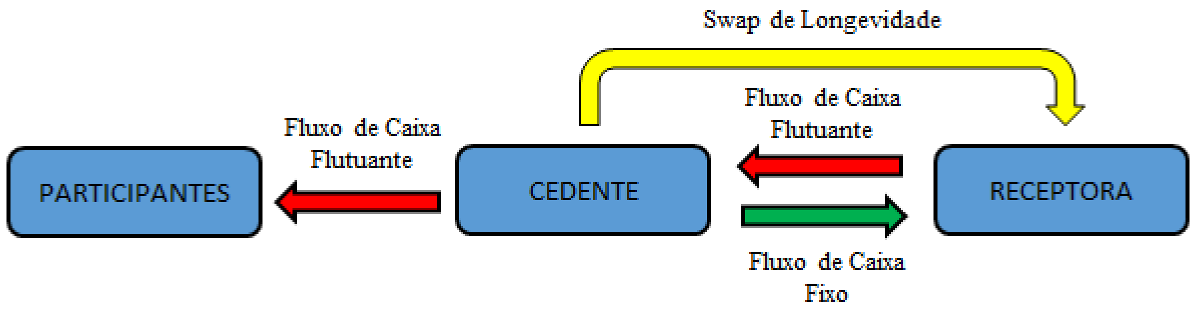
No caso do círculo amarelo, por exemplo, o valor excede o acordado em um tempo t_A. A cedente então contribui com um prêmio de risco $p(t_A)$, em que $p(t_A) = f(t_A) - g(t_A)$. Em contrapartida, esta receberá um pagamento $s(t_A)$ relativo ao valor que excedeu o valor acordado, em que $s(t_A) = w(t_A) - g(t_A)$. O encontro de contas em t_A, do ponto de vista da cedente é dado por:

$$s(t_A) - p(t_A) = [w(t_A) - g(t_A)] - [f(t_A) - g(t_A)] = w(t_A) - f(t_A)$$

Como $w(t_A) > f(t_A)$, temos que o resultado é positivo no tempo t_A e, portanto, a cedente lucra em virtude da volatilidade do fluxo ter superado o acordado, enquanto a receptora tem um prejuízo.

No caso do círculo verde, observa-se exatamente o oposto. Note que agora $w(t_V) \leq f(t_B)$ e, portanto, o resultado para a cedente fica negativo, enquanto a receptora recebe o prêmio de risco $p(t_B)$ e gasta $w(t_B) < p(t_B)$.

O interessante deste instrumento é que não há repasse de ativos. A entidade cedente ainda possui as obrigações com os participantes e somente está diminuindo seu risco, possibilitando um melhor planejamento e estratégia de longo prazo. O contrato segue a seguinte estrutura:



4. Premissas Atuariais

Os cálculos atuariais são fluxos futuros a partir de premissas de taxas de mortalidade, juros e inflação. Algumas definições da literatura atuarial:

Considere q_x a probabilidade de morte em um ano para uma pessoa de idade x.

$$p_x = 1 - q_x$$

$$_t p_x = \prod_{i=0}^{t} p_{x+i} \ , \ \ t \geq 0$$

Onde p_x representa a probabilidade de idade x estar vivo ao completar x+1 anos e $_t p_x$ representa a probabilidade de uma pessoa de idade x sobreviver até a idade de x+t. Vale ressaltar que por definição $_0 p_x = 1$.

Mais resultados sobre os resultados atuariais podem ser vistos em Actuarial Mathematics (Newton L. Bowers, Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt).

4.1. Função de Sobrevivência

A seguir alguns conceitos de Análise de Sobrevivência, aplicados à literatura Atuarial, necessários para a compreensão do estudo. As definições a seguir foram retiradas do livro Analysis of Survival Data (Cox, Oakes - 1984).

No contexto de análise de sobrevivência, consideramos uma população homogênea de indivíduos, cada um possuindo um “tempo de falha”, denotado por uma variável aleatória não negativa X, a qual denota o tempo até a ocorrência de certo desfecho de interesse. No caso do presente estudo, essa variável aleatória indica o tempo até a morte de cada indivíduo. Ao especificarmos uma função densidade de probabilidade para X estamos automaticamente especificando outras funções importantes de X. Temos que:

$$F(x) = P(X \leq x), \qquad x \geq 0$$

Onde $F(x)$ é a função de distribuição acumulada de X. Portanto:

$$f(x) = F'(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

O complementar da função de distribuição acumulada é chamada de função de sobrevivência, denotada por $S(x)$. A função de sobrevivência é a probabilidade de uma pessoa sobreviver à idade x desde o seu nascimento (entrada em risco).

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$$

Note que:

1) $S(0) = 1$
2) $\lim_{\omega \to \infty} S(\omega) = 0$

As funções F(x) e f(x) possibilitam obtenção de outra função em análise de sobrevivência que é a função de risco (*hazard function*). Esta função mede a variação instantânea da intensidade de morte. Usualmente, a função de risco é denotada por $\mu(x)$ ou abreviada para μ_x. Tem-se, por definição:

$$\mu_x = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{P(X \leq x + \Delta | X > x)}{\Delta} = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{P(x < X < x + \Delta)}{P(X > x)\Delta} = \frac{F'(x)}{P(X > x)} = \frac{f(x)}{S(x)}$$

Portanto:

$$\mu_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{\partial}{\partial x} \log\big(S(x)\big)$$

Como $S(0) = 1$:

$$S(x) = \exp\left\{-\int_{0}^{x} \mu_t\, dt\right\}$$

Com isso, temos as seguintes relações:

$${}_t p_0 = \frac{S(t)}{S(0)} = 1 - P(X < t)$$

$${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}\ , \qquad t > 0$$

Portanto,

$$q_x = 1 - {}_1p_x = 1 - p_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)}$$

Podemos ainda estabelecer relação entre a função de risco e a probabilidade de morte:

$$ {}_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = P(X > x + t | X > x) \Rightarrow {}_tq_x = 1 - {}_tp_x$$

$$ {}_tq_x = P(X \leq x + t | X > x) = \frac{1 - S(x+t) - 1 + S(x)}{S(x)} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}$$

$$ {}_tq_x = \frac{\exp\left\{-\int_0^x \mu_t\, dt\right\} - \exp\left\{-\int_0^{x+t} \mu_t\, dt\right\}}{\exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu_t\, dt\right\}} = 1 - \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu_t\, dt\right\}$$

4.2.Modelos Atuariais de Renda

No presente estudo, para efeito de simplificação, estamos interessados somente nas rendas mais simples, para que o leitor entenda as implicações das premissas em cada tipo de anuidade. Não faremos ajustes atuariais para a temporariedade de recebimento de benefício também por uma questão de simplificação. Para os modelos que seguem, considere:

$$i = \text{Taxa de Juros}$$
$$v = (1+i)^{-1} = \text{Taxa de Desconto}$$

Para calcular o montante (“M”) necessário para receber uma renda (“R”), basta multiplicar R pelo fator atuarial da renda, ou seja, $M = R * fator$.

4.2.1. Renda Vitalícia Antecipada ($\ddot{a}_x$)

Também conhecida como Renda Imediata Vitalícia, trata-se de uma anuidade paga ao segurado, no início de cada ano, começando instantaneamente, em que o recebimento da renda ocorre até a morte do participante. A fórmula do fator atuarial é dada por:

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x \, v^t$$

4.2.2. Renda Vitalícia Diferida Antecipada (${}_{m|}\ddot{a}_x$)

Trata-se de uma anuidade paga ao segurado, no início de cada ano, começando após um período m de diferimento, caso o segurado sobreviva até a idade de entrada em benefício. O recebimento da renda ocorre até a morte do participante. A fórmula do fator atuarial é dada por:

$$_{m}\ddot{a}_x = \sum_{t=m}^{\infty} {}_t p_x \, v^t$$

4.3.Práticas do Mercado

Nos mercados de ponta, as probabilidades de morte são indexadas pelo tempo, pois existe a melhoria estimada na mortalidade, conhecido como *improvement*. As fórmulas se mantêm, porém agora a tábua não é estática e sim geracional. A grande complexidade está em estimar estes fatores, uma vez que os bancos de dados são muitas vezes precários e não possuem um histórico adequado. Além disso, existem muitas varáveis exógenas como a cura do câncer, por exemplo, que poderia mudar totalmente os números de mortalidade. Neste formato, temos:

$$q_{x,t+1} = q_{x,t} * \left(1 - \kappa_{x,t}\right), \quad t \geq 0$$

Onde $q_{x,t}$ é a probabilidade de morte de uma pessoa de idade x no ano t, e $\kappa_{x,t}$ é o fator de *improvement* para a idade x no ano t.

Atualmente, muito se discute a respeito das estimativas dos fatores de melhoria da mortalidade. O modelo mais utilizado no mercado, por sua facilidade de implementação computacional, é o modelo de Lee e Carter, que será brevemente apresentado ainda neste trabalho. Uma das grandes críticas deste modelo, é que os fatores de *improvement* no tempo t

são invariantes quanto à idade, ou seja, o ganho de longevidade é igual para todas as idades da tábua de um ano para outro. Pedroza (2006) diz que o aumento da longevidade não é uniforme com a idade. Temos um ganho de sobrevida significativamente maior para os mais novos do que para os mais velhos. Isso faz com o que o modelo supracitado muitas vezes superestime a melhoria na mortalidade, gerando um grande impacto sobre as reservas técnicas uma vez que estas teriam que aumentar muito devido às novas premissas de mortalidade futura.

É bastante intuitivo pensar que a expectativa de vida irá aumentar ao longo dos próximos anos. A dúvida é a velocidade e se existe algum comportamento assintótico, o que seria bastante razoável. A tendência da mortalidade mundial necessita ser continuamente revisada buscando a manutenção do equilíbrio financeiro das entidades que possuem este risco. No Brasil, a utilização de fatores de *improvement* ainda é escassa devido à falta de estudos profundos no assunto. Pelas normas atuais da SUSEP, as premissas biométricas só podem sofrer alteração durante o período de diferimento do plano, o que impossibilita um cálculo realista do fator de renda. Já a Superintendência Nacional de Previdência Complementar (PREVIC), julga que é dever do atuário responsável escolher suas premissas para equilibrar seus respectivos planos, bastando que este consiga demonstrar o motivo de utilização daquela hipótese.

Para contornar um possível déficit, uma alternativa seriam os resultados financeiros dos ativos garantidores. Infelizmente essa opção também é negada pelo órgão fiscalizador, que restringe investimentos que visam preservar o interesse dos assistidos. Aplicações em renda variável ou portfólios de alto risco também são bem limitados devido à proteção ao cliente.

5. Modelos

Não é o objetivo deste trabalho detalhar os cálculos estatísticos e suas implicações no momento de previsão das variáveis de interesse. Mostraremos o que a literatura usa atualmente e mencionaremos as aplicabilidades no contexto brasileiro.

5.1. Mortalidade

Existem muitas maneiras de se calcular uma tábua de mortalidade para uma determinada população em algum intervalo de tempo. Aquele que se tornou base para os estudos e elaborações de modelos mais robustos foi o de Gompertz-Makeham. Neste, supõe-se que a força de mortalidade segue a seguinte lei, em que x representa a idade:

$$\mu_x = A + Be^{CX}$$

Onde B e C são componentes atreladas à idade, e A é um fator invariante com a idade, que busca captar as mortes acidentais e de menor incidência.

O modelo foi utilizado por muitos anos, porém Gavrilov e Gavrilova (1991) dizem que as taxas não são críveis para idades menores que trinta ou maiores que oitenta, que o torna obsoleto frente às altas expectativas de vida dos dias de hoje, concomitante com o interesse demográfico em quantificar a mortalidade infantil.

Como o comportamento das pontas das tábuas (mortalidade infantil e de idosos) possui um comportamento bem diferente, os modelos sucessores passaram a destrinchar a mortalidade dentro das faixas através de equações polinomiais.

Atualmente, um dos modelos mais difundidos e utilizados pelo mercado é o proposto por Heligman e Pollard. Este é o modelo aplicado para o cálculo das tábuas brasileiras BR-EMS, amplamente utilizadas pelo mercado segurador. Sua fórmula consiste em:

$$\frac{q_x}{1 - q_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$$

Onde todos os parâmetros possuem interpretações demográficas capazes de aderir a diferentes tipos de populações.

A fórmula possui três termos (componentes) com diferentes significados:

$A^{(x+B)^c} \rightarrow$ Potência com declínio muito rápido. Reflete a mortalidade nos primeiros anos de vida, enquanto a criança está se acostumando ao habitat e ganhando imunidade do mesmo.

$De^{-E(\ln x - \ln F)^2} \rightarrow$ Reflete as mortes acidentais nos homens e mortes na maternidade para as mulheres. Assemelha-se a função de distribuição de probabilidade da Log-Normal, fornecendo maior peso para as idades que estão ativas (trabalhando).

$GH^x \rightarrow$ É o conhecido fator de Gompertz citado no início do capítulo, refletindo um aumento exponencial da mortalidade com o incremento da idade.

A grande dificuldade do modelo matemático é a estimação de seus parâmetros visto que algoritmos de otimização podem atingir mínimos (ou máximos) locais ao invés de globais, trazendo resultados não fidedignos a realidade.

Lee Carter

Os modelos utilizados mundo afora atualmente para a extrapolação da mortalidade são baseados no modelo de Lee-Carter (1992). O método faz previsão dos logaritmos das taxas de mortalidade para todas as idades, em algum tempo t. Seja y_{it} o logaritmo da taxa central de mortalidade para o grupo de idade i, onde $i = 1, \dots, p$ e tempo $t = 1, \dots, n$ e seja $y_t = \left(y_{1t}, \dots, y_{pt}\right)'$. Lee e Carter ajustam a seguinte equação:

$$y_t = \alpha + \beta\kappa_t + \epsilon_t$$

Nesta equação, $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são vetores de parâmetros desconhecidos, $\boldsymbol{\epsilon_t}$ é um vetor de erros no tempo t, e $\boldsymbol{\kappa_t}$ é um processo temporal não observado. Os parâmetros $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\kappa}$ devem ser estimados. O vetor $\boldsymbol{\alpha}$ mede o padrão de mortalidade para cada grupo de idade, enquanto $\boldsymbol{\beta}$ mede a taxa de mudança na mortalidade a cada idade. O vetor $\boldsymbol{\kappa}$ determina o nível da mortalidade. Para obter solução única, o método impõe duas condições:

$$\sum_i \beta_i = 1$$

$$\sum_t \kappa_t = 0$$

É proposto o uso de decomposição em valores singulares para estimar os parâmetros em questão. Seja $\mathbf{Y}$ uma matriz pxn dos logaritmos das taxas de mortalidade. O vetor $\boldsymbol{\alpha}$ é estimado pela média dos logaritmos das taxas brutas de mortalidade para cada grupo de idade. A decomposição em valores singulares é então utilizada em $\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{\alpha}}$:

$$\boldsymbol{Y} - \widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{UDV}'$$

Onde $\boldsymbol{D}$ é a matriz diagonal contendo os valores singulares, e $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ortogonais. $\boldsymbol{\beta}$ é igualado a primeira coluna de $\boldsymbol{U}$, e os valores de $\boldsymbol{\kappa_t}$ são igualados ao produto da primeira coluna de $\boldsymbol{V}$ e o primeiro valor singular d_1 com as respectivas normalizações que garantem as condições (citar condições). A escolha do primeiro valor singular como componente principal pode ser aprofundada em Bozik e Bell (1987) e em Bell and Monsell (1991).

Após as estimações de $\boldsymbol{\kappa_t}$, é proposto o uso de uma modelagem temporal ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*) para prever a série de $\boldsymbol{\kappa}$. Lee e Carter propõe um passeio aleatório com nível (*drift*). O modelo pode ser escrito como:

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \theta + \omega_t$$

Onde θ é o nível (*drift*) que modela uma tendência linear e ω_t é um termo de erro. A média prevista de κ, h passos a frente é dada por:

$$\kappa_{n+h} = \kappa_h + h\hat{\theta}$$

Finalmente, para obter previsões da média dos logaritmos das taxas de mortalidade, são utilizados os κ's estimados concomitantemente com os valores estimados de $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$:

$$\hat{y}_{n+h} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}\kappa_{n+h}$$

Quanto aos intervalos de confiança, o método expressa o erro padrão de κ_{n+h} para a previsão h passos a frente da seguinte forma:

$$\hat{\sigma}^2_{\kappa_{n+h}} = h^2\hat{\sigma}^2_{\theta} + h\hat{\sigma}^2_{\omega}$$

Onde $\hat{\sigma}^2_{\theta}$ é a variância estimada de θ e $\hat{\sigma}^2_{\omega}$ a variância estimada de ω. O intervalo $(1-\alpha)\%$ de confiança da previsão h passos a frente do logaritmo da taxa de mortalidade é dado por:

$$\hat{y}_{n+h} \pm z_{\alpha/2}\hat{\beta}\hat{\sigma}_{\kappa_{n+h}}$$

Onde $z_{\alpha/2}$ é o percentil $1-\frac{\alpha}{2}$ da distribuição Normal Padrão.

Como apontado por Lee e Carter, esta predição ignora os erros nas estimativas de $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$, e o termo de erro ϵ. O intervalo só compreende o erro associado à previsão dos κ's, em que é assumido que este erro é soberano sobre os outros. Porém é dito pelos autores que há subestimação do verdadeiro erro de previsão quando se estima mortalidades a curto prazo.

O modelo de Lee-Carter é muito difundido por suas inúmeras vantagens. É um modelo parcimonioso, que faz uso de séries temporais para gerar previsões estocásticas, com as respectivas probabilidades intervalares. A grande crítica ao modelo deve-se a premissa de invariabilidade da componente de idade ao longo do tempo. A taxa de declínio dos Estados Unidos durante os anos noventa é diferente daquele observado nos anos setenta, bem como a mortalidade infantil obteve seu maior declínio no início deste século, enquanto os mais idosos sofreram seu maior declínio de mortalidade na segunda metade do século passado (Pedroza - 2006). Dados de outros países também mostram padrões diferentes para diferentes grupos de idade (Booth - 2002).

A aplicabilidade deste modelo para o caso do Brasil é questionável pela ausência de horizonte de dados. Hoje a tábua de mortalidade brasileira utilizada pelas entidades é a BR-EMS, criada pelo Laboratório de Matemática Aplicada da UFRJ (LabMa), que por sua vez não possui mais de dez anos de dados em sua base. Países desenvolvidos possuem horizonte longo e, portanto, possuem facilidade de aplicação da metodologia.

Temos interesse de fazer estimativas de longo prazo visto que os produtos com risco de sobrevivência possuem esta característica. Por isso, torna-se inviável uma abordagem que utilize somente dez anos de dados brasileiros para fazer estimativas em um horizonte de mais de 40 anos.

Neste contexto, entendemos que seria interessante uma abordagem diferente para tratar a mortalidade, englobando métodos que permitam a utilização de dados externos para corroborar com as estimativas finais.

5.2.Taxa de Juros

No âmbito atuarial, estamos sempre interessados em fluxos futuros trazidos a valor presente pela expectativa da taxa de juros. Uma das maiores incertezas atreladas ao cálculo destes fluxos é o que esperar desta componente econômica por sua volatilidade em países de economia instável como o Brasil, onde intervenções políticas atreladas a novas medidas do Banco Central do Brasil (BACEN) impactam fortemente nas estruturas de curto e longo prazo das taxas.

A discussão sobre a estrutura a termo no Brasil teve mais destaque pós Plano Real. Previamente a dívida pública era composta por títulos indexados aos preços, vide um cenário de hiperinflação, que tornava inviável uma análise de taxas de juros. Segundo Holland, Nunes e Silva (2011), através do programa de estabilização econômica, foi permitido que a estrutura da curva a termo começasse a tomar forma, trazendo uma menor influência da variação da taxa de juros de curto prazo na determinação das taxas de longo prazo.

A Superintendência de Seguros Privados (SUSEP) sugere que o mercado segurador mensure suas obrigações, descontando seus fluxos de caixa de maneira consistente e coerente através da Estrutura a Termo da Taxa de Juros (ETTJ) através do modelo criado pela própria autarquia.

Baseado no modelo proposto por Svensson para a interpolação e extrapolação das curvas de juros, o modelo faz uso de um algoritmo genético, que assim como o modelo citado anteriormente, não será tratado de maneira profunda por sua complexidade matemática, além de não ser o foco deste trabalho. A ETTJ é um conceito central da teoria financeira e econômica usado para precificar qualquer conjunto de fluxos de caixa (Fabozzi, 1993; Ray, 1993; Allen e Kleinstein, 1991). A taxa de juros é representada por uma função $r(\tau)$, onde τ é um prazo (ou maturidade) associado àquela taxa de juros. A taxa por usa vez é obtida com base em algum título negociado no mercado, normalmente um título de renda fixa ou derivativo de taxas de juros.

A ETTJ livre de riscos (também conhecida como Curva Base) deve ser construída a partir de dados de mercado de títulos considerados isentos de riscos de crédito e liquidez. Por isso usam-se títulos do governo, pois estes são considerados isentos de fator de risco sobre as taxas e, portanto, não se faz necessário um prêmio de risco. Ao longo do tempo, a curva base pode oscilar de diferentes formas, em decorrência de choques diferenciados sobre as taxas de juros associadas a cada vencimento. É a variabilidade temporal da ETTJ que submete os instrumentos de renda fixa ao risco de mercado.

No modelo de Svensson, a taxa de juros no momento t para uma maturidade τ, é dada por:

$$r_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}\left(\frac{1 - e^{-\lambda_1\tau}}{-\lambda_1\tau}\right) + \beta_{3t}\left(\frac{1 - e^{-\lambda_1\tau}}{-\lambda_1\tau} - e^{-\lambda_1\tau}\right) + \beta_{4t}\left(\frac{1 - e^{-\lambda_2\tau}}{-\lambda_2\tau} - e^{-\lambda_2\tau}\right)$$

Os fatores possuem a seguinte interpretação:

β_{1t} → Nível (Longo Prazo)

β_{2t} → Inclinação (Curto Prazo)

β_{3t} e β_{4t} → Curvaturas (Médio Prazo)

λ_1 e λ_2 → caracterizam as velocidades de decaimento dos componentes, determinando onde as cargas β_{3t} e β_{4t} atingem seu máximo.

Tomando os limites da equação de Svensson temos:

$$\lim_{\tau\to 0} r_t(\tau) = \beta_{1t} + \beta_{2t}$$

$$\lim_{\tau\to \infty} r_t(\tau) = \beta_{1t}$$

Por este motivo β_{1t} e β_{2t} são, respectivamente, os componentes de longo e curto prazo enquanto β_{3t} e β_{4t} são os de médio prazo, visto que a carga multiplicativa $\frac{1-e^{-\lambda_j\tau}}{-\lambda_j\tau} - e^{-\lambda_j\tau}$ começa em zero, é crescente no início da maturidade e depois tende para zero quando $\tau \to \infty$.

Atualmente, muitos dos grandes bancos centrais mundiais utilizam esta modelagem, por sua facilidade funcional, com relativamente poucos parâmetros, que descrevem toda a estrutura temporal das taxas de juros.

O processo de estimação dos parâmetros busca a minimização dos erros quadráticos entre o preço indicativo e o preço resultante da estimativa. Bolder e Strélinski (1999) mostram que devido a não linearidade do modelo, temos um complexo risco computacional de não atingir um mínimo global, e sim um mínimo local.

Por este motivo, foi desenvolvido tanto pela SUSEP quanto pela ANBIMA, um algoritmo genético capaz de contornar estes problemas computacionais, trazendo resultados mais satisfatórios. Segundo a ANBIMA, o algoritmo genético, introduzido por Holland (1975), é um algoritmo de busca, inspirado na biologia evolutiva e aplicável a diferentes situações, cuja ideia básica é criar uma população de cromossomos que representam candidatos à solução do problema. Essa população evolui ao longo do tempo através de novas gerações. A cada evolução, os melhores indivíduos são selecionados e submetidos a processos de crossover e mutação. Essas gerações são criadas até a população convergir para a solução ótima do problema. Mais informações sobre os algoritmos genéticos podem ser vistas em An Introduction to Genetic Algorithms (Mitchell, M. - 1998).

6. Conclusão

Neste trabalho foram descritos métodos para mitigar o risco da longevidade. Tais instrumentos são de extrema importância para a manutenção da solvência dos mercados mundiais e deveriam começar a ser utilizados no mercado brasileiro buscando não só equilíbrio econômico, mas o desenvolvimento e amadurecimento do mercado como um todo.

No entanto é importante ressaltar que um *hedge* perfeito para este risco é impossível, pois sempre estaremos fadados aos grandes avanços da medicina que podem comprometer qualquer previsão estatística. Os instrumentos financeiros aqui apresentados pulverizam o risco e tornam as probabilidades de não cumprimento das obrigações das entidades definitivamente menores.

Enquanto temos o empecilho dos preços e legislação nos métodos de transferência, temos também a grande necessidade de uma base de dados extensa e consistente para a elaboração de modelos estatísticos críveis, que podem minunciosamente representar a realidade de mortalidade da população em questão. Concomitantemente e igualmente importante, temos a problemática da taxa de juros, que está em constante volatização, devido principalmente a variáveis exógenas de caráter político (intervenções políticas no Banco Central do Brasil). Tais fatores são as principais razões do mercado brasileiro ser tão incipiente quando se trata de proteção contra a longevidade.

Para que seja possível fazer estudos com precisão mais satisfatória é necessário também que a ciência chegue a um consenso quanto à expectativa de vida, já que existem vertentes que não aceitam a hipótese de um comportamento assintótico para o alcance máximo da vida humana, enquanto outras defendem que já estamos atingindo o limite biológico. Enquanto isso é papel dos atuários terem consciência da dificuldade dos riscos em questão, e provisionar da maneira mais realista possível a fim de manter a saúde financeira das entidades atuariais.

7. Referências

ALVES FILHO, G. Resolução CNPC nº 11. Brasil: [s.n.], 2013.

ANBIMA. **Estrutura a Termo das Taxas de Juros Estimada e Inflação Implícita**. [S.l.]. 2010.

BELL, W.; MONSELL, B. **Using principal components in time series modeling and forecasting of agespecific mortality rates**. American Statistical Association. Alexandria, United States of America, p. 154-159. 1991.

BOOTH, H.; MAINDONALD, J.; SMITH, L. **Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline**. Australian National University. Australia, p. 325–336. 2002.

BOZIK, J.; BELL, W. **Forecasting age specific fertility using principal components**. American Statistical Association. Alexandria, United States of America, p. 396–401. 1987.

CARTER, L. R.; LEE, R. D. Modeling and forecasting US sex differentials in mortality. **International Journal of Forecasting**, United States of America, 1992.

COX, D. R.; OAKES, D. **Analysis of Survival Data**. London: [s.n.], 1984.

FABOZZI, J. F. **Bond Markets, Analysis and Strategies**. Upper Saddle River, United States: Pearson Prentice Hall, 2006.

GAVRILOV, L. A.; GAVRILOVA, N. S. **The Biology of Life Span: A Quantitative Approach**. Harwood Academic. New York, United States of America. 1991.

HELIGMAN, L.; POLLARD, J. H. The age pattern of mortality. **Journal of the Institute of Actuaries**, United Kingdom, 1980.

HOLLAND, J. **An Adaptation in Natural and Artificial Systems**. University of Michigan Press. Michigan, United States of America. 1975.

KAUFHOLD, K. How to Price Longevity Swaps. **Reinsurance Section News - Society of Actuaries**, United States, 2013.

L. BOWERS, N. et al. **Actuarial Mathematics**. United States of America: Society of Actuaries, 1986.

M, P. http://projectm-online.com/. **Project M Online**, 2013. Disponivel em: <http://projectm-online.com/risk/buy-in-or-buy-out-how-to-hedge-longevity-risk/#anchor02>. Acesso em: 2017.

MAKEHAM, W. M. On the further development of Gompertz's law. **Journal of the Institute of Actuaries**, United Kingdom, 1980.

MITCHELL, M. **An Introduction to Genetic Algorithms**. Massachusetts Institute of Technology. Cambridge, United States of America. 1998.

PEDROZA, C. **A Bayesian Forecasting Model: Predicting U.S. Male Mortality**. University of Texas School of Public Health at Houston - Division of Biostatistics. Houston, United States of America. 2006.

RICHARDS, S. Longevitas. **www.longevitas.co.uk**. Disponivel em: <https://www.longevitas.co.uk/site/informationmatrix/theinsandoutsofbulkannuities.html>. Acesso em: 2017.

SVENSSON, L. E. O. **Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994**. International Monetary Fund. Washington D.C., United States of America. 1994.

TORRI, T. **Centre on Longevity and Mortality Insurance**. SCOR Global Life. Zurich. 2012.