



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Bayesiana para dados de Reserva Através de Modelos ANOVA e ANCOVA com Erros t-Student

Caroline Rocha Nery Amorim

2015



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Bayesiana para dados de Reserva Através de Modelos ANOVA e ANCOVA com Erros t-Student

Caroline Rocha Nery Amorim

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Projeto Final de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção dos títulos de Bacharel em Ciências Atuariais e em Estatística.

Rio de Janeiro, 28 de outubro de 2015.

Análise Bayesiana para dados de Reserva Através de Modelos ANOVA e ANCOVA com Erros t-Student

Caroline Rocha Nery Amorim

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Projeto Final de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção dos títulos de Bacharel em Ciências Atuariais e em Estatística.

Prof. Ralph dos Santos Silva

IM-UFRJ

Prof. Mariane Branco Alves

IM-UFRJ

Prof. Paulo Pereira Ferreira

IM-UFRJ

Rio de Janeiro, 28 de outubro de 2015.

Amorim, Caroline Rocha Nery

Análise Bayesiana para dados de Reserva Através de Modelos ANOVA e ANCOVA com Erros t-Student/ Caroline Rocha Nery Amorim – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2015.

iii, 28 f.: il.; 31 cm.

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Projeto Final – UFRJ/ IM/ Graduação em Ciências Atuariais e em Estatística, 2015.

Referências Bibliográficas: f. 22

1. Inferência Bayesiana. 2. Previsão. 3. Monte Carlo via Cadeias de Markov. 4. Modelos ANOVA e ANCOVA. I. Silva, Ralph dos Santos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática. III. Análise Bayesiana para dados de Reserva usando as Distribuições Normal e t-Student.

RESUMO

Análise Bayesiana para dados de Reserva Através de Modelos ANOVA e ANCOVA com Erros t-Student.

Caroline Rocha Nery Amorim

Orientador: Ralph dos Santos Silva

Projeto Final de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento de Métodos Estatísticos do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para obtenção dos títulos de Bacharel em Ciências Atuariais e em Estatística.

O objetivo desse trabalho é fazer a previsão das indenizações futuras para o cálculo da reserva utilizando os modelos ANOVA e ANCOVA para completar o triângulo de *Run-Off*. Para fazer essa previsão, aplicaremos Inferência Bayesiana através do programa OpenBUGS. Nele, os modelos serão executados para erros normais e t-Student com diversos graus de liberdade previamente fixados. Para fazer tal estudo, selecionamos os dados do artigo “Robust Bayesian Analysis of Loss Reserves Data Using the Generalized t-Distribution” de Chan, J. S. K., Choy, S. T. B, e Markov, U.E. (2008) que são os valores das indenizações pagas entre 1978 e 1995 de uma Seguradora. Compararemos os modelos entre si através do DIC e com o modelo *Chain Ladder*, que é popularmente utilizado.

Palavras-chave: Previsão; modelo ANOVA; modelo ANCOVA; triângulo Run-Off; Inferência Bayesiana; DIC; Chain-Ladder.

Para

Rita de Cassia Rocha Amorim

e

Eduardo Nery Amorim

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Ralph dos Santos Silva, pelo incentivo e pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

A esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que me permitiram uma educação de qualidade.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

SUMÁRIO

Lista de Tabelas.....	ii
Lista de Gráficos.....	iii
Capítulo 1: Introdução	1
1.1 Objetivos	2
Capítulo 2: Metodologia	3
2.1 Inferência Bayesiana	3
2.1.1 Elementos para a Inferência Bayesiana.....	3
2.1.2 Estimação pontual sob o paradigma bayesiano.....	4
2.1.3 Previsão.....	4
2.2 Monte Carlo via Cadeias de Markov.....	5
2.2.1 Amostragem de Gibbs.....	5
2.3 Critério DIC.....	6
2.4 Modelos.....	6
2.4.1 Modelo ANOVA.....	7
2.4.2 Modelo ANCOVA	7
Capítulo 3: Aplicação	9
3.1 Os dados	9
3.2 Método de <i>Chain-Ladder</i>	12
3.3 Resultados.....	17
Capítulo 4: Considerações Finais.....	21
Referências Bibliográficas.....	22
Apêndice A: Código OpenBUGS.....	23

Lista de Tabelas

Tabela 1. 1: Exemplo de Run-off	2
Tabela 3. 1: Os valores das indenizações pagas entre 1978 e 1995.....	10
Tabela 3. 2: Indenizações acumuladas por ano da apólice.....	13
Tabela 3. 3: Fator de desenvolvimento acumulado.....	14
Tabela 3. 4: Projeções acumuladas pelo Método de Chain Ladder.....	15
Tabela 3. 5: Projeções pelo Método de Chain Ladder.....	16
Tabela 3. 6: DIC para os modelos ANOVA e ANCOVAs ajustados.....	17
Tabela 3. 7: Parâmetros observados pelo Método ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade.....	18
Tabela 3. 8: Triângulo de Run-Off completo com a mediana a posteriori pelo Método ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade.....	19
Tabela 3. 9: Triângulo de Run-Off completo com a média a posteriori pelo Método ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade.....	20

Lista de Gráficos

Gráfico 3. 1: Os valores das indenizações pagas entre 1978 e 1984.....	11
--	----

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

A SUSEP – Superintendência de Seguros Privados – define apólice de seguros como “documento emitido pela empresa formalizando a aceitação da cobertura solicitada pelo proponente, nos planos individuais, ou pelo estipulante, nos planos coletivos”, ou seja, é uma promessa feita pela Seguradora de pagar para o contratante uma ou mais indenizações caso ocorra sinistro.

Contudo, em alguns casos, a Seguradora não consegue quantificar o valor devido no período de exercício por algum(ns) motivo(s) que não está(ão) no seu controle: a ocorrência de um sinistro que não foi avisado (IBNR), a ocorrência de um sinistro que não foi suficientemente avisado (IBNER), dentre outros. Por causa disso a empresa tem que ser capaz de construir uma reserva que suporte o pagamento de possíveis sinistros futuros.

A CIRCULAR SUSEP nº 448, de 4 de setembro de 2012 estabelece os critérios mínimos para que esta provisão seja razoavelmente adequada. Entretanto, o cálculo da mesma é extremamente complexo e se não feito de maneira correta deixa a Seguradora em risco financeiro, podendo levá-la a insolvência.

Denotando $Y_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, o valor total das indenizações já pagas pela Seguradora por sinistros que ocorreram no ano i da apólice e acordados após $j-1$ anos (ano de defasagem j). O valor total observado de indenizações $Y_{i,j}$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $j \leq n - i + 1$ durante um período de n anos de apólice pode ser representado pelo triângulo de *run-off* (tabela 1.1). O valor total de indenizações observadas, dado pelo triângulo superior, é $S_S = \frac{n(n+1)}{2}$, e o valor total de indenizações a serem preditas, dado pelo triângulo inferior, é $S_I = \frac{n(n-1)}{2}$. O objetivo é inferir os valores não observados do triângulo inferior.

Tabela 1.1: Exemplo de Run-off.

		Ano de Defasagem j								
		1	2	3	.	.	.	n-1	N	
Ano da Apólice i	1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	$Y_{1,3}$					$Y_{1,n-1}$	$Y_{1,n}$
	2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	$Y_{2,3}$					$Y_{2,n-1}$	
	3	$Y_{3,1}$	$Y_{3,2}$	$Y_{3,3}$						
	.									
	.									
	.									
	n-1	$Y_{n-1,1}$	$Y_{n-1,2}$							
	N	$Y_{n,1}$								

O método mais comum para completar o Triângulo de *Run-off* é o Método *Chain-Ladder* e isto se deve ao fato de que com ele não se precisa especificar uma distribuição de probabilidade para $Y_{i,j}$, ou seja, ele quase não possui suposições iniciais. Contudo, este método é extremamente sensível a variações nos dados observados.

Com o passar dos anos, a modelagem hierárquica para processos estocásticos foi sendo utilizada para superar essas deficiências. Pode-se citar como exemplo, a adoção dos modelos ANOVA e ANCOVA por Verrall (1991, 1996) e Renshaw e Verrall (1998), porém, também se sabe que como a distribuição normal tem cauda leve não permite irregularidades ou valores extremos (os considera como pontos extremos) e assim revela-se uma má preditora. A distribuição t-Student, por possuir uma cauda mais pesada, consegue se adequar melhor aos dados considerados extremos pela distribuição normal, sendo assim uma melhor preditora para o Triângulo de *Run-off*.

1.1 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo inferir o triângulo inferior da tabela de indenizações. Para isso, será utilizado um modelo ANOVA e três modelos ANCOVA para a distribuição normal e para a distribuição t-Student considerando graus de liberdade fixos e diferentes. Com a estimação pelo enfoque bayesiano, calculamos o Critério de Informação do Desvio (DIC), e selecionamos o melhor modelo ajustado aos dados. Este modelo será, então, utilizado para fazer as previsões dos valores faltantes, ou seja, da parte inferior da tabela 1.1.

O corpo do texto está dividido em mais três capítulos. No capítulo 2 será apresentada, de forma condensada, a metodologia por trás do estudo; no capítulo 3, a aplicação dos modelos com os resultados obtidos; e no capítulo 4, as considerações finais.

Capítulo 2

METODOLOGIA

Neste capítulo, serão descritos de forma concisa os principais conceitos relacionados aos modelos, critérios e testes estatísticos utilizados no presente estudo. A estimação das quantidades desconhecidas dos modelos será pelo enfoque bayesiano (DeGroot e Schervish, 2002; Migon, Gamerman e Louzada, 2014), na qual empregaremos métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (Gelfand e Smith, 1990; Tierney, 1994; Gamerman e Lopes, 2006) para obter uma amostra da distribuição a posteriori e permitir um resumo estatístico da posteriori das quantidades desconhecidas do modelo. Além disso, o melhor modelo ajustado aos dados será escolhido pelo Critério de Informação do Desvio (DIC) proposto por Spiegelhalter, Best, Carlin, e Van der Linde (2002). Os modelos incluem ANOVA e ANCOVA com erros (simétricos) normais e t-Student para alguns graus de liberdade fixos.

2.1 Inferência Bayesiana

Um dos objetivos da Estatística é reduzir o desconhecimento que se tem sobre uma determinada quantidade de interesse θ . Para isso, do ponto de vista da Inferência Bayesiana, representaremos θ através de modelos probabilísticos de acordo com a incerteza a seu respeito. Contudo, as quantidades observáveis e os parâmetros de um modelo são todos considerados quantidades aleatórias já que as incertezas sobre os parâmetros variam conforme o analista que os modela.

2.1.1 Elementos para a Inferência bayesiana

A função de verossimilhança, que é denotada por $f(\mathbf{y}|\theta)$ ou $L(\theta)$, é quando a função de probabilidade conjunta ou função densidade de probabilidade conjunta das observações de uma amostra aleatória é vista como função de θ .

A distribuição a priori, $f(\theta)$, é uma distribuição de probabilidade que pondera quais intervalos de θ são mais prováveis segundo as informações do analista antes de conhecer as observações, ou seja, ela é subjetiva a cada especialista.

A distribuição a posteriori é a distribuição de θ dado um conjunto de observações em $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Ela é obtida através do teorema de Bayes como mostrado a seguir:

$$f(\theta|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta)}{\int f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta)d\theta}.$$

Como o denominador da distribuição a posteriori de θ não depende de θ , é considerado constante em relação a θ , assim:

$$f(\theta|\mathbf{y}) \propto f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta).$$

2.1.2 Estimação pontual sob o paradigma bayesiano

Seja amostra aleatória Y_1, \dots, Y_n tomada de uma distribuição com função de probabilidade $f(\mathbf{y}|\theta)$ na qual o valor do parâmetro θ é desconhecido. O valor de θ deve ser estimado a partir dos valores observados na amostra. Se $\theta \in \Theta$ então é presumível que os possíveis valores de um estimador $\delta(\mathbf{Y})$ também devam pertencer ao espaço Θ . Além disso, um bom estimador é aquele que, com alta probabilidade, produzirá erro $\delta(\mathbf{Y}) - \theta$ próximo de zero. Para cada possível valor de θ e cada possível estimativa $a \in \Theta$ vamos associar uma perda $L(\theta, a)$ de modo que quanto maior a distância entre a e θ maior o valor da perda. Neste caso, a perda esperada a posteriori é dada por

$$E(L(\theta, a)|\mathbf{y}) = \int L(\theta, a)f(\theta|\mathbf{y})d\theta$$

e a regra de Bayes consiste em escolher a estimativa que minimiza esta perda esperada.

Ao usarmos a função de perda quadrática, o estimador de Bayes para cada valor observado de y será o valor mínimo para a esperança $E[(\theta - a)^2|\mathbf{y}]$, ou seja, é o estimador que minimiza a média a posteriori do quanto longe o estimador está do parâmetro. Esse estimador será mínimo quando igual a $E(\theta|\mathbf{y})$ – esperança da distribuição a posteriori. A função de perda quadrática é definida como $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$.

A perda quadrática é às vezes criticada por penalizar demais o erro de estimação. Já na função de perda absoluta, introduz punições que crescem linearmente com o erro de estimação e pode-se mostrar que o estimador de Bayes para cada valor observado de y será o valor mínimo para a esperança $E[|\theta - a||\mathbf{y}]$, que ocorre quando a é a mediana da distribuição de θ . A função de perda absoluta é representada por $L(\theta, a) = |\theta - a|$.

2.1.3 Previsão

Para fazermos a previsão bayesiana usando as funções de perda, primeiramente consideramos para a distribuição a posteriori:

$$f(\theta|\mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta)}{f(\mathbf{y})} \propto f(\mathbf{y}|\theta)f(\theta).$$

Estamos interessados na distribuição de $(y^*|\mathbf{y})$, onde y^* são os valores de y conforme a previsão, e podemos obtê-la da seguinte maneira:

$$f(y^*|\mathbf{y}) = \int f(y^*|\theta)f(\theta|\mathbf{y})d\theta \quad (1)$$

onde $f(y^*|\theta)$ vem do modelo escolhido e $f(\theta|y)$ é a posteriori.

Utilizando a perda quadrática ou absoluta podemos ter a previsão pontual como a média ou mediana, respectivamente, da distribuição de $(y^*|y)$. Por exemplo,

$$E(y^*|y) = \int y^* f(y^*|y) dy^*.$$

2.2 Monte Carlo via Cadeias de Markov

A ideia dos métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC) é tentar obter uma amostra da distribuição a posteriori e calcular estimativas amostrais de características desta distribuição usando técnicas de simulação iterativa, baseadas em cadeias de Markov. Neste trabalho, utilizamos o programa OpenBUGS que trabalha diretamente a Amostragem de Gibbs.

2.2.1 Amostragem de Gibbs

A amostragem de Gibbs é um dos métodos mais comuns de Monte Carlo via cadeias de Markov - proposto por Geman e Geman (1984) e popularizado por Gelfand e Smith (1990) - é um esquema de amostragem de uma Cadeia de Markov, cujas probabilidades de transição dos estados são realizadas a partir das distribuições condicionais completas.

Assuma que θ seja um vetor paramétrico p -dimensional. O amostrador de Gibbs consiste em considerar a distribuição a posteriori $f(\theta|y) = f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p|y)$ como sendo a de interesse. A distribuição $f_j(\theta_j|\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_p, y)$ é chamada de condicional completa de θ_j e a mesma é sempre proporcional ao produto da função de verossimilhança com a distribuição a priori, assim, $f_j(\theta_j|\theta_1, \dots, \theta_{j-1}, \theta_{j+1}, \dots, \theta_p, y) \propto f(y|\theta)f(\theta)$ para todo j . Dado o conjunto de valores iniciais $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_p^{(0)})$, obtém-se M amostras, com $M \ll P$, a partir dos seguintes passos:

Gere

$$1) \theta_1^{(k)} \propto f_1(\theta_1|\theta_2^{(k-1)}, \dots, \theta_p^{(k-1)}, y);$$

$$2) \theta_2^{(k)} \propto f_2(\theta_2|\theta_1^{(k)}, \theta_3^{(k-1)}, \dots, \theta_p^{(k-1)}, y);$$

...

$$p) \theta_p^{(k)} \propto f_p(\theta_p|\theta_1^{(k)}, \dots, \theta_{p-1}^{(k)}, y),$$

Repita os passos (1) a (p), $k = 1, 2, 3, \dots, N$.

A cadeia de Markov descrita acima, sob condições de regularidade específicas (Gelfand e Smith, 1990), converge para uma distribuição estacionária ($\pi(\theta)$) depois de N_0 iterações, sendo esta a distribuição a posteriori de $f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p | y)$. No final, toma-se as $M = N - N_0$ últimas iterações como a amostra da distribuição a posteriori $f(\theta | y)$.

Deste algoritmo, obtemos uma amostra ($\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(M)}$) de $f(\theta | y)$. Podemos utilizá-la para obter uma amostra de $(y^* | y)$ através da equação (1) da sessão 2.1.3. Então, geramos:

$$y^{*(i)} \sim f(y^* | \theta^{(i)}) \text{ para } i = 1, 2, \dots, M.$$

A amostra ($y^{*(1)}, y^{*(2)}, \dots, y^{*(M)}$) é proveniente da distribuição $(y^* | y)$. Utilizando esta amostra, temos um sumário completo da distribuição a posteriori, incluindo média, mediana, desvio padrão e percentis da posteriori (marginal e conjunta) das quantidades desconhecidas do modelo, apesar dela ser correlacionada, e assim obtendo a previsão pontual:

→ Se perda quadrática: $E(y^* | y) \approx \frac{\sum_{i=1}^M y^{*(i)}}{M}$

→ Se perda absoluta: $Md(y^* | y) \approx \text{mediana}(y^{*(1)}, y^{*(2)}, \dots, y^{*(M)})$

e também erros padrões e intervalos de credibilidade.

2.3 Critério DIC

Para escolher o modelo mais adequado para completar o Triângulo de *Run-off* foi utilizado o Critério de Informação do Desvio (DIC). Ele é definido como:

$$DIC = D(\bar{\theta}) + 2 p_D$$

$$DIC = \overline{D(\theta)} + p_D$$

onde $p_D = \overline{D(\theta)} - D(\bar{\theta})$, é o número efetivo de parâmetros do modelo, $D(\bar{\theta}) = -2 \ln(f(y|\bar{\theta}))$, é o desvio avaliado na média a posteriori e $f(y|\theta)$ é a função de verossimilhança. O modelo que produz o menor DIC é o modelo que melhor se ajusta aos dados. Utilizaremos este modelo com menor DIC para fins de previsão.

2.4 Modelos

Os modelos log-lineares mais usados foram investigados de forma atuarial por Renshaw (1989), Verrall (1991, 1996) e Renshaw e Verrall (1998). Serão considerados os modelos Log-ANOVA e Log-ANCOVA dependendo da formulação dos efeitos do ano da apólice e do ano da defasagem.

Todos os modelos foram implementados utilizando o OpenBUGS atribuindo uma priori não informativa para os parâmetros dos modelos.

2.4.1 Modelo ANOVA

Na estrutura do modelo hierárquico bayesiano, o valor da indenização ajustado pelo log Y_{ij} , imposto no ano i e pago com a defasagem de $j-1$ anos, adota o seguinte modelo ANOVA:

$$\log(Y_{ij}) = \mu_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2),$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j \leq n - i + 1$, além disso, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ e $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$. Assim, μ_{ij} é a média da função, α_i é o efeito do ano da apólice, β_j é o efeito do ano de defasagem e ε_{ij} é o erro aleatório normal ou t-Student. Para completar a estrutura bayesiana serão adotadas as seguintes prioris para os modelos dos parâmetros:

$$\mu \sim N(0, \sigma_\mu^2), \quad \alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2), \quad \beta_j \sim N(0, \sigma_\beta^2), \quad \sigma^2 \sim IG(a, b),$$

onde $IG(a, b)$ é uma Gama Inversa com densidade:

$$f(\sigma^2) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{a+1} e\left(-\frac{b}{\sigma^2}\right).$$

Nossa priori vaga é dada pela escolha dos hiperparâmetros $\sigma_\mu^2 = \sigma_\alpha^2 = \sigma_\beta^2 = 10.000$ e $a = b = 0,001$, isto é, a densidade a priori reflete ignorância.

2.4.2 Modelo ANCOVA

Neste modelo, os efeitos do ano da apólice i e do ano da defasagem j são lineares. As três combinações diferentes possíveis refletem os modelos ANCOVA 1, ANCOVA 2 e ANCOVA 3, conforme dado abaixo:

1. Efeito linear no ano da apólice e efeito categórico no ano de defasagem;
2. Efeito categórico no ano da apólice e efeito linear no ano de defasagem;
3. Efeito linear no ano da apólice e no ano de defasagem.

Os modelos só diferem da média da função do modelo ANOVA, assim, para ANCOVA 1, 2 e 3, as médias seguem a seguir:

1. $\mu_{ij} = \mu + \alpha \times i + \beta_j$
2. $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta \times j$

$$3. \mu_{ij} = \mu + \alpha \times i + \beta \times j$$

com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j \leq n - i + 1$, além disso, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$ para o modelo ANCOVA 2 e $\sum_{j=1}^n \beta_j = 0$ para o modelo ANCOVA 1.

As distribuições a priori para estes modelos seguem o mesmo padrão do modelo ANOVA.

Capítulo 3

APLICAÇÃO

Nesta parte do trabalho trataremos de empregar os conceitos discutidos no capítulo 2 aos dados, para que possamos averiguar qual é o melhor modelo para completar o Triângulo de *Run-Off*. Completaremos o triângulo utilizando os conceitos de previsão vistos nas sessões 2.1.3 e 2.2.1.

3.1 Os Dados

Para analisar os modelos propostos na seção 2.1 utilizaremos os dados presentes na tabela 3.1. Esses dados foram coletados entre 1978 e 1995 ($n = 18$) e são as indenizações pagas pela Seguradora durante esse período. Esses dados foram extraídos de Chan, Choy e Makov (2007).

O triângulo superior, da tabela 3.1: Os valores das indenizações pagas entre 1978 e 1995, contém os valores das 171 indenizações observadas e o triângulo inferior ainda não foi observado, assim sendo a parte que queremos inferir, ou seja, fazer as previsões. Com propósitos matemáticos, as duas células, antes zeradas, foram substituídas por 0,01.

Tabela 3. 1: Os valores das indenizações pagas entre 1978 e 1995.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1978	3323	8332	9572	10172	7631	3855	3252	4433	2188	333	199	692	311	0.01	405	293	76	14
1979	3785	10342	8330	7849	2839	3577	1404	1721	1065	156	<u>35</u>	259	250	420	6	1	0.01	
1980	4677	9989	8746	10228	8572	5787	3855	1445	1612	626	1172	589	438	473	370	31		
1981	5288	8089	12839	11829	7560	6383	4118	3016	1575	1985	2645	266	38	45	115			
1982	2294	9869	10242	13808	8775	5419	2424	1597	4149	1296	917	295	428	359				
1983	3600	7514	8247	9327	8584	4245	4096	3216	2014	593	1188	691	368					
1984	3642	7394	9838	9733	6377	4884	11920	4188	4492	1760	944	921						
1985	2463	5033	6980	7722	6702	7834	5579	3622	1300	3069	1370							
1986	2267	5959	6175	7051	8102	6339	6978	4396	3107	903								
1987	2009	3700	5298	6885	6477	7570	5855	5751	3871									
1988	1860	5282	3640	7538	5157	5766	6862	2572										
1989	2331	3517	5310	6066	10149	9265	5262											
1990	2314	4487	4112	7000	11163	10057												
1991	2607	3952	8228	7895	9317													
1992	2595	5403	6579	15546														
1993	3155	4974	7961															
1994	2626	5704																
1995	2827																	

Indenizações pagas entre 1979 e 1984

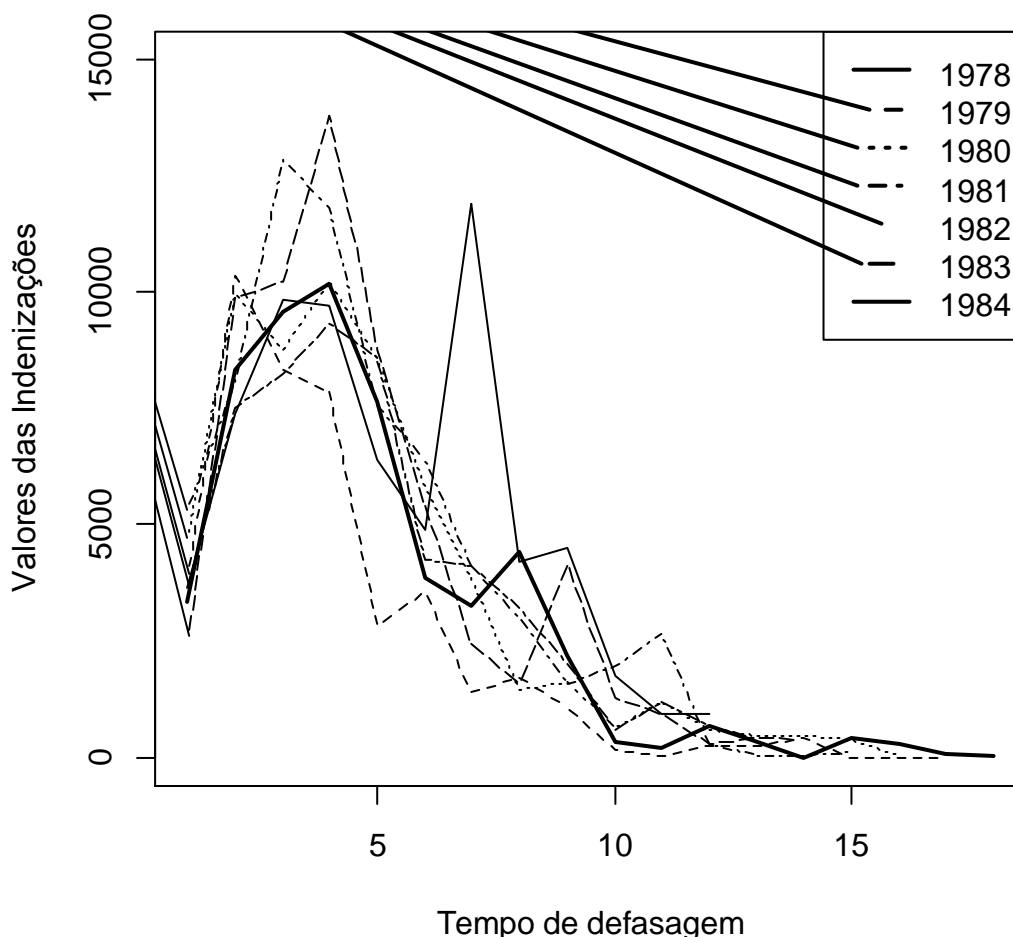


Gráfico 3.1: Os valores das indenizações pagas entre 1978 e 1984.

No gráfico 3.1, observamos algumas tendências nesta coleção de dados. Dado um ano de apólice qualquer, os valores das indenizações aumentam até o quarto ou sexto ano de defasagem e após isso começam a diminuir. Por outro lado, não é possível observar nenhuma tendência entre os anos das apólices através dos anos de defasagem.

Pelo gráfico 3.1, também percebemos os valores extremos até 1984, ou seja, os valores que fazem picos muito altos no gráfico ou se aproximam do zero. Esses valores e outros valores extremos estão destacados em negritos na tabela 3.1. Por exemplo, valores extremamente altos (em *itálico*), entre 11.920 e 15.546 dólares, foram encontrados no 7º ano de defasagem da apólice de 1984 e no 4º ano de defasagem da apólice de 1992. Esses valores distorcem a tendência geral dos dados e amplificam os desvios padrões dos parâmetros dos modelos. Os outros valores extremos são muito menores que seus vizinhos. Isso pode fazer com que se subestime a reserva e assim

diminua a solvência da Seguradora, podendo levá-la a falência. Desse modo, devemos considerar distribuições com caudas pesadas para que possamos acomodar essas irregularidades.

3.2 Método de *Chain-Ladder*

O método de *Chain-Ladder* é o método para completar o triângulo de *Run-off* mais popularmente usado para o cálculo de reservas pelas Seguradoras. Ele parte dos pressupostos que: a frequência de sinistros pode variar ao longo do tempo; há independência entre os diversos anos estudados; e, os fatores de desenvolvimento são constantes ao longo dos anos de ocorrência dos sinistros.

Para utilizarmos este método começamos acumulando, na tabela 3.2, tal que $S_{ij} = \sum_{k=1}^j y_{ik}$:

Tabela 3. 2: Indenizações acumuladas por ano da apólice.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1978	3323	11655	21227	31399	39030	42885	46137	50570	52758	53091	53290	53982	54293	54293,01	54698,01	54991,01	55067,01	55081,01
1979	3785	14127	22457	30306	33145	36722	38126	39847	40912	41068	41103	41362	41612	42032	42038	42039	42039,01	
1980	4677	14666	23412	33640	42212	47999	51854	53299	54911	55537	56709	57298	57736	58209	58579	58610		
1981	5288	13377	26216	38045	45605	51988	56106	59122	60697	62682	65327	65593	65631	65676	65791			
1982	2294	12163	22405	36213	44988	50407	52831	54428	58577	59873	60790	61085	61513	61872				
1983	3600	11114	19361	28688	37272	41517	45613	48829	50843	51436	52624	53315	53683					
1984	3642	11036	20874	30607	36984	41868	53788	57976	62468	64228	65172	66093						
1985	2463	7496	14476	22198	28900	36734	42313	45935	47235	50304	51674							
1986	2267	8226	14401	21452	29554	35893	42871	47267	50374	51277								
1987	2009	5709	11007	17892	24369	31939	37794	43545	47416									
1988	1860	7142	10782	18320	23477	29243	36105	38677										
1989	2331	5848	11158	17224	27373	36638	41900											
1990	2314	6801	10913	17913	29076	39133												
1991	2607	6559	14787	22682	31999													
1992	2595	7998	14577	30123														
1993	3155	8129	16090															
1994	2626	8330																
1995	2827																	

Agora, calcularemos os fatores de projeção da seguinte maneira:

$$f_j = \frac{\sum_{i-1}^{n+1-j} S_{ij}}{\sum_{i-1}^{ni-1+1-j} S_{i,j-1}}, j = 2, \dots, n$$

Com isso, teremos os seguintes fatores de projeção:

Tabela 3.3: Fator de desenvolvimento acumulado.

Fator de desenvolvimento Acumulado																	
k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
fk	3,15	1,8	1,54	1,293	1,18	1,13	1,07	1,05	1,02	1,02	1,01	1,01	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Assim, projetaremos S_{ij} no triângulo superior com a seguinte formulação: $\hat{S}_{ij} = S_{i, j-1} \cdot f_j$; e, no triângulo inferior: $\hat{S}_{ij} = S_{i, n-i+1} \cdot \prod_{k+n-i+2}^j f_k$. Fazendo estes cálculos teremos a seguinte tabela acumulada:

Tabela 3. 4: Projeções acumuladas pelo Método de Chain Ladder.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
3323	10483	21014	32632	40599	46181	48345	49432	53132	53939	54117	53791	54279	54544	54514	54812	55034	55081
3785	11941	25471	34523	39185	39218	41398	40849	41866	41828	41862	41489	41590	41804	42203	42126	42072	42050
4677	14755	26443	35991	43496	49946	54111	55557	55999	56141	56610	57242	57614	58003	58446	58702	58656	58671
5288	16682	24119	40302	49192	53961	58607	60112	62117	62056	63894	65941	65954	65934	65943	65929	65980	65997
2294	7237	21930	34443	46823	53231	56825	56604	57185	59889	61030	61361	61422	61797	62124	62254	62303	62318
3600	11357	20039	29763	37093	44101	46803	48870	51303	51982	52430	53119	53609	53931	54150	54264	54306	54320
3642	11490	19898	32089	39575	43760	47199	57629	60913	63867	65469	65785	66457	66764	67036	67176	67229	67246
2463	7770	13515	22254	28702	34195	41411	45335	48262	48293	51276	52160	52447	52689	52904	53014	53056	53070
2267	7152	14832	22138	27737	34969	40463	45932	49662	51502	52268	52759	53050	53295	53512	53624	53666	53680
2009	6338	10293	16921	23134	28834	36006	40493	45751	48478	49415	49879	50154	50386	50591	50697	50736	50749
1860	5868	12877	16575	23688	27778	32966	38683	40636	41546	42349	42748	42983	43182	43357	43448	43482	43493
2331	7354	10544	17153	22271	32388	41303	44892	47166	48223	49155	49617	49890	50121	50324	50430	50469	50482
2314	7300	12262	16776	23161	34403	44116	47266	49661	50773	51754	52240	52528	52771	52986	53097	53138	53152
2607	8224	11826	22732	29328	37862	42683	45731	48048	49123	50073	50544	50822	51057	51265	51372	51412	51425
2595	8187	14421	22409	38949	46085	51953	55663	58483	59792	60948	61521	61860	62146	62399	62529	62578	62594
3155	9953	14657	24735	31982	37842	42660	45707	48022	49098	50047	50517	50795	51030	51238	51345	51385	51398
2626	8284	15019	23089	29854	35324	39821	42665	44826	45830	46716	47155	47415	47634	47828	47928	47965	47978
2827	8919	16080	24720	31963	37819	42635	45679	47993	49068	50017	50487	50765	50999	51207	51314	51354	51367

A tabela final, desacomulada, com os valores preditos e projetados é a seguinte:

Tabela 3. 5: Projeções pelo Método de Chain Ladder.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1978	3323	7160	10531	11618	7967	5582	2164	1086	3700	807	178	-326	489	264	-30	299	222	47
1979	3785	8156	13531	9052	4663	32	2180	-549	1017	-38	34	-372	101	214	399	-77	-54	-22
1980	4677	10078	11688	9548	7505	6450	4164	1446	442	141	470	632	372	389	443	256	-46	15
1981	5288	11394	7437	16182	8890	4769	4647	1505	2005	-61	1837	2048	13	-20	9	-15	52	17
1982	2294	4943	14693	12513	12380	6408	3594	-222	582	2703	1142	331	60	376	327	130	49	16
1983	3600	7757	8682	9725	7330	7008	2702	2067	2433	679	449	688	490	322	219	113	43	14
1984	3642	7848	8409	12191	7485	4186	3439	10430	3284	2954	1603	315	673	307	272	140	53	17
1985	2463	5307	5745	8738	6448	5493	7216	3923	2928	31	2984	883	287	242	214	111	42	13
1986	2267	4885	7680	7307	5599	7232	5494	5469	3729	1840	766	491	291	245	217	112	42	14
1987	2009	4329	3956	6627	6213	5700	7172	4487	5258	2727	937	464	275	232	205	106	40	13
1988	1860	4008	7009	3698	7113	4091	5188	5717	1953	910	803	398	236	199	176	91	34	11
1989	2331	5023	3190	6609	5117	10118	8915	3589	2274	1056	932	462	273	230	204	105	40	13
1990	2314	4986	4962	4514	6385	11242	9712	3150	2395	1112	981	486	288	243	215	111	42	14
1991	2607	5617	3602	10906	6596	8534	4821	3048	2317	1076	949	471	279	235	208	107	40	13
1992	2595	5592	6234	7988	16540	7136	5868	3710	2820	1310	1156	573	339	286	253	131	49	16
1993	3155	6798	4703	10078	7247	5860	4818	3046	2316	1075	949	470	278	235	208	107	40	13
1994	2626	5658	6735	8070	6765	5470	4498	2844	2162	1004	886	439	260	219	194	100	38	12
1995	2827	6092	7162	8640	7243	5856	4815	3044	2314	1075	948	470	278	234	208	107	40	13

Note que há alguns valores negativos, eles se referem aos valores que são bem próximos de zero.

3.3 Resultados

Para tentarmos melhorar as previsões feitas pelo Método de Chain Ladder, utilizamos os modelos descritos nas sessões 2.4.1 e 2.4.2, ou seja, os modelos ANOVA e ANCOVA, sendo três versões do modelo ANCOVA, os que têm efeito linear no ano da apólice e efeito categórico no ano de defasagem, os que têm efeito categórico no ano da apólice e efeito linear no ano de defasagem e os que têm efeito linear no ano da apólice e no ano de defasagem.

Cada um dos quatro modelos, ANOVA, ANCOVA 1, ANCOVA 2 e ANCOVA 3, serão ajustados com erros normais e t-Student com 3, 5, 10 e 20 graus de liberdade. As variáveis serão transformadas no logaritmo natural para tornar as variâncias menores chegando mais próximo de modelos homocedásticos e para evitar problemas numéricos (encontrados no programa OpenBUGS em aplicações preliminares dos dados utilizando a escala original). O ajuste será feito pelo enfoque bayesiano.

Para obtermos uma amostra da distribuição a posteriori (sessão 2.1.3) foi utilizado o programa OpenBUGS. O OpenBUGS (BUGS: *Bayesian Inference Using Gibbs Sampling*, ou seja, Inferência Bayesiana usando Amostragem de Gibbs (sessão 2.1.1)) é um programa de computador em que o usuário especifica modelos estatísticos através da relação das variáveis relacionadas e assim o programa determina um esquema MCMC (sessão 2.2) apropriado para analisar o modelo estabelecido.

Dados algumas análises preliminares, ao rodarmos os modelos no OpenBUGS faremos 110 mil iterações e descartaremos as 10.001 primeiras observações. Reteremos uma a cada 100 observações, o que nos deixará com 3000 observações já que estamos rodando os modelos para três cadeias de algoritmo. As três cadeias nos facilitarão a análise de convergência de forma gráfica.

Os DIC's (sessão 2.3) para cada um dos quatro modelos combinados com os erros normal e t-Student com diferentes graus de liberdade serão relatados pelo próprio software e são apresentados na tabela 3.6 a seguir:

Tabela 3. 2: DIC para os modelos ANOVA e ANCOVAs ajustados.

Modelo	Log Normal	Log t-Student			
		Υ			
		3	5	10	20
ANOVA	242,981	57,220	75,246	108,821	143,631
ANCOVA 1	225,088	39,952	59,227	95,343	133,264
ANCOVA 2	297,920	205,546	212,233	226,919	244,255
ANCOVA 3	285,814	195,309	200,541	215,283	233,479

Sabemos que, de acordo com o critério de seleção de modelos adotado, o melhor modelo é aquele que apresenta o menor DIC, com isso, podemos perceber o modelo ANCOVA 1, aquele com efeito linear no ano da apólice e efeito categórico no ano de

defasagem, é o melhor modelo; também podemos ver que quando o erro é t-Student com 3 graus de liberdade o DIC se torna menor ainda.

Desta forma, o modelo ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade será utilizado para fins de previsão para completar Triângulo de Run-Off.

Para este modelo, vemos na tabela 3.7, os outros parâmetros observados: α , β_i , σ e ξ e analisaremos suas médias, desvios-padrões, medianas e percentis de 2,5% e 97,5%:

Tabela 3. 3: Parâmetros observados pelo Método ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade.

Parâmetro	Média	Desvio Padrão	2.5%	Mediana	97.5%
α	-0,0027	0,0039	-0,0101	-0,0027	0,0048
β_1	0,4537	0,0569	0,3446	0,4539	0,5678
β_2	0,7876	0,0583	0,6725	0,7869	0,9024
β_3	0,8742	0,0572	0,7632	0,8730	0,9885
β_4	0,9417	0,0567	0,8330	0,9407	1,0510
β_5	0,8846	0,0563	0,7745	0,8841	0,9974
β_6	0,7703	0,0628	0,6474	0,7691	0,8967
β_7	0,6726	0,0687	0,5378	0,6739	0,8051
β_8	0,4972	0,0718	0,3572	0,4983	0,6353
β_9	0,3365	0,0821	0,1826	0,3341	0,5034
β_{10}	-0,0154	0,1107	-0,2248	-0,0152	0,2050
β_{11}	0,0339	0,0802	-0,1187	0,0342	0,1906
β_{12}	-0,3177	0,0987	-0,5207	-0,3126	-0,1327
β_{13}	-0,4829	0,0829	-0,6530	-0,4792	-0,3258
β_{14}	-0,4394	0,1078	-0,6614	-0,4372	-0,2356
β_{15}	-0,5956	0,1658	-0,9614	-0,5729	-0,3286
β_{16}	-1,3890	0,4164	-2,5650	-1,4310	-0,5820
β_{17}	-1,1380	0,2625	-1,6340	-1,1420	-0,6288
β_{18}	-1,8740	0,2839	-2,3880	-1,8750	-1,3760
σ	0,1614	0,0137	0,1363	0,1611	0,1899
ξ	3,0200	0,0436	2,9340	3,0210	3,1050

Agora que identificamos o melhor modelo faremos a transformação inversa da logarítmica nos dados obtidos para que assim consigamos completar o triângulo de Run-Off com os valores de indenizações preditos e projetados pelo modelo ANCOVA 1. Para efeito de comparação, consideraremos dois estimadores pontuais para completar o triângulo: a mediana a posteriori e a média a posteriori.

Tabela 3. 4: Triângulo de Run-Off completo com a mediana a posteriori pelo Método ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1978	3323	6450	7768	9222	8099	6141	4916	3356	2227	1001	1143	502	336	377	272	40	75	14
1979	3785	6335	7675	8949	7943	6070	4820	3276	2269	1000	1114	508	341	377	268	40	76	14
1980	4677	6310	7690	8990	7895	6107	4886	3227	2196	1001	1117	500	344	380	271	41	75	14
1981	5288	6239	7653	9084	7884	6060	4836	3192	2214	994	1115	497	344	375	267	40	74	14
1982	2294	6228	7645	8918	7804	5974	4720	3216	2233	967	1101	497	332	377	263	39	73	14
1983	3600	6221	7672	8695	7761	5934	4732	3163	2176	954	1105	487	332	375	263	39	72	13
1984	3642	6121	7560	8820	7770	5844	4717	3175	2170	966	1072	493	327	368	260	39	73	14
1985	2463	6198	7411	8877	7662	5898	4654	3141	2143	956	1085	483	328	367	266	39	72	13
1986	2267	6064	7389	8746	7628	5849	4673	3068	2185	967	1086	471	330	363	262	39	70	13
1987	2009	6091	7400	8566	7592	5835	4640	3088	2145	951	1066	477	320	353	260	38	70	13
1988	1860	6043	7278	8710	7545	5755	4581	3098	2139	946	1068	463	320	362	256	37	71	13
1989	2331	5878	7281	8523	7514	5701	4562	3057	2088	949	1071	470	321	360	246	37	69	13
1990	2314	5973	7169	8551	7463	5606	4545	3086	2060	952	1054	474	318	353	249	37	69	13
1991	2607	5943	7145	8414	7466	5738	4567	3029	2083	925	1045	464	312	347	250	37	70	13
1992	2595	5880	7151	8269	7487	5635	4421	3060	2059	929	1026	468	311	346	249	38	69	13
1993	3155	5719	7071	8343	7274	5617	4402	3019	2056	908	1034	464	308	345	245	37	68	13
1994	2626	5858	7070	8190	7193	5582	4337	2986	2094	912	1011	455	316	346	245	36	69	13
1995	2827	5665	7019	8095	7308	5498	4382	2996	2075	917	1018	458	310	343	246	37	68	13

Tabela 3. 5: Triângulo de Run-Off completo com a média a posteriori pelo Método ANCOVA 1 com erros t-Student com 3 graus de liberdade.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1978	3323	424600	13840	22940	9802	7745	6985	10250	3129	677600	1444	676	439	476	457	88	374	33
1979	3785	7765	10940	10880	9695	13160	6369	12230	262400	1324	1426	888	504	508	1213	343	606	32
1980	4677	8053	27050	17210	9651	7588	10830	4319	3995	1394	2948	673	431	549	371	113	476	27
1981	5288	8674	10270	12110	9566	8137	6813	9643	2862	1576	1921	647	443	857	333	116	626	31
1982	2294	8906	10010	16810	10440	11190	6202	4284	4423	5427	1496	685	1641	1505	367	80650	532	32
1983	3600	7873	10050	13970	10810	8754	6582	9,91E+10	3128	1333	1495	968	2923	497	836	85	473	355400
1984	3642	318300	13130	13220	11160	672400	8654	3890	78650	9212	8354	7087	432	517	466	4691	519	627
1985	2463	37390	10750	12840	12050	7961	314400	237700	2606	1283	2008	1038	477	485	10540	72480	6296	28
1986	2267	12630	10590	11860	6,61E+10	51620	10250	1,95E+09	5621	1674	1949	607	2195	467	438	80	674	41
1987	2009	33560	10200	10690	4,70E+09	7104	5868	4366	17170	1182	1477	610	2927	454	350	84	699	35
1988	1860	7532	9773	11410	9695	7500	5768	4255	2972	20890	1439	800	1828	638	1,75E+09	82	419	82
1989	2331	7467	8897	11670	9280	9453	9927	4787	4489	1245	1,29E+20	591	421	8528	366	1,19E+11	475	35
1990	2314	7570	10010	11640	9572	6798	5639	3622	2988	1342	1330	7,61E+11	425	457	328	327	1163	168
1991	2607	7558	75770	12780	9155	8486	6,79E+12	4076	15390	1194	1369	89280	430	2616	393	112	41780	29
1992	2595	11940	9194	9855	31900	7,94E+10	6393	4327	7,84E+09	1154	2199	608	414	441	355	92	6041	22940
1993	3155	6964	9589	12050	9466	6910	5632	7717	6743	1453	1262	720	1915	437	337	22280	526	28
1994	2626	8160	40010	10290	11050	7778	5437	4314	3461	1265	1282	2305	497	980	328	74	428	33
1995	2827	7201	8857	12410	11010	10150	305600	3903	5481	2310	2,54E+10	598	405	2562	313	2135	349	29

Podemos perceber que o estimador da média a posteriori relata valores extremos pois, como dito na sessão 2.1.4, a perda quadrática penaliza demais o erro de estimação. Assim, o estimador da mediana a posteriori é mais adequado para completar o triângulo de Run-Off porque traz valores mais robustos. Este efeito é percebido porque a distribuição para o erro é a t-Student com 3 graus de liberdade o que pode induzir a geração de valores distantes da média.

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, utilizamos 4 modelos com duas distribuições para os erros, Normal e t-Student, com graus de liberdade diferentes e fixos, para modelar as reservas de uma Seguradora. Para os dados analisados, o modelo ANCOVA 1 com erro t-Student e 3 graus de liberdade foi o mais adequado – utilizando o DIC – para fazer tal modelagem.

A distribuição t-Student permite uma melhor modelagem dos valores extremos presentes nos dados, mas induzem a uma previsão com grandes erros quando empregamos a perda quadrática como estimador pontual. O estimador da mediana a posteriori diminui consideravelmente estes valores extremos na previsão. Quando lembramos que uma distribuição t-Student com graus de liberdade tendendo ao infinito se assemelha a uma Normal, percebemos o porquê do modelo com menor grau de liberdade ter sido o mais adequado.

Também é possível entender a razão do melhor modelo ser o ANCOVA 1 ao analisarmos sua definição: efeito linear no ano da apólice e efeito categórico no ano de defasagem. Sabemos que as apólices são possivelmente não correlacionadas, porém a defasagem anual não é, já que esta é uma variável que sempre depende de saber o que aconteceu no ano anterior. Por outro lado, o modelo ANCOVA 2 é o menos adequado. Sua definição é exatamente oposta à do ANCOVA 1: efeito categórico no ano da apólice e efeito linear no ano de defasagem.

Vemos que o modelo ANOVA, que também parece ser bastante utilizado pelas Seguradoras, é um modelo razoável. Este modelo trata as duas variáveis como variações em torno de uma média comum para cada uma, o que em alguns casos é melhor que assumir a linearidade delas. Porém, essas empresas geralmente o empregam com erro normal, o que o torna menos eficaz, principalmente na presença de valores extremos.

Assim, dados os resultados deste trabalho, escolhemos o modelo ANCOVA 1 como o mais confiável para a previsão de reservas. Previsões precisas de reservas são de extrema importância para as companhias Seguradoras uma vez que as reservas têm um enorme impacto no lucro e na solvência dessas empresas.

Referências Bibliográficas

http://www.qfrc.uts.edu.au/research/research_papers/rp196.pdf

Chan, J. S. K., Choy, S. T. B, e Markov, U.E. (2008). Robust Bayesian Analysis of Loss Reserves Data Using the Generalized t-Distribution

DeGroot, M. H., e Schervish, M. J. (2002). Probability and statistics (4th ed.). Boston: Pearson.

Geman, S. e Geman, D. (1984) Stochastic relaxation, Gibbs Distribution and the Bayesian restoration of images, IEEE Transactions on Pattern Analysis and the Machine Intelligence, 6 721-741.

Gamerman, D., e Lopes, H. F. (2006). Markov chain Monte Carlo: Stochastic simulation for Bayesian inference (2nd ed.). London: Chapman & Hall.

Gelfand, A., e Smith, A. (1990). Sampling based approaches to calculating marginal densities, Journal of American Statistical Association, 85, 398-409.

Gilks, W. R., Richardson, S., e Spiegelhalter, D. J. (1996). Markov chain Monte Carlo in practice (1st ed.). London: Chapman & Hall.

Migon, H. S., Gamerman, D. e Louzada, F. (2014). Statistical inference: An integrated approach (2nd ed.). London: Chapman & Hall.

Renshaw, A.E. (1989) Chain ladder and interactive modeling, The Journal of Institute of Actuaries, 116, 559-587.

Renshaw, A.E. and Verrall, R.J. (1998) A stochastic model underlying the chain-ladder technique, British Actuarial Journal, 4, 903-926.

Verrall, R.J. (1991) Chain ladder and maximum likelihood, The Journal of Institute of Actuaries, 118, 489-499.

Verrall, R.J. (1996) Claims reserving and generalized additive models, The Journal of Institute of Actuaries, 19, 31-43.

Apêndice A

Código OpenBUGS

ANOVA Normal

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dnorm(mu[i,j],tau)
      mu[i,j] <- xi + alpha[i] + beta[j]
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  for(k in 1:17){
    alpha[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
    beta[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  }
  alpha[18] <- -sum(alpha[1:17])
  beta[18] <- -sum(beta[1:17])
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANOVA t-Student

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dt(mu[i,j],tau,3)
      mu[i,j] <- xi + alpha[i] + beta[j]
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  for(k in 1:17){
    alpha[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
    beta[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  }
  alpha[18] <- -sum(alpha[1:17])
  beta[18] <- -sum(beta[1:17])
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANCOVA 1 Normal

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dnorm(mu[i,j],tau)
      mu[i,j] <- xi + alpha*i + beta[j]
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  for(k in 1:17){
    beta[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  }
  beta[18] <- -sum(beta[1:17])
  alpha ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANCOVA 1 t-Student

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      w[i,j] ~ dt(mu[i,j],tau,3)
      y[i,j] ~ dt(mu[i,j],tau,3)
      mu[i,j] <- xi + alpha*i + beta[j]
      z[i,j] <- exp(w[i,j])
    }
  }
  # priori
  for(k in 1:17){
    beta[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  }
  beta[18] <- -sum(beta[1:17])
  alpha ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANCOVA 2 Normal

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dnorm(mu[i,j],tau)
      mu[i,j] <- xi + alpha[i] + beta*j
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  for(k in 1:17){
    alpha[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  }
  alpha[18] <- -sum(alpha[1:17])
  beta ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANCOVA 2 t-Student

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dt(mu[i,j],tau,3)
      mu[i,j] <- xi + alpha[i] + beta*j
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  for(k in 1:17){
    alpha[k] ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  }
  alpha[18] <- -sum(alpha[1:17])
  beta ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANCOVA 3 Normal

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dnorm(mu[i,j],tau)
      mu[i,j] <- xi + alpha*i + beta*j
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  alpha ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  beta ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```

ANCOVA 3 t-Student

```
model{
  # verossimilhanca
  for(i in 1:18){
    for(j in 1:18){
      y[i,j] ~ dt(mu[i,j],tau,3)
      mu[i,j] <- xi + alpha*i + beta*j
      z[i,j] <- exp(y[i,j])
    }
  }
  # priori
  alpha ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  beta ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  xi ~ dnorm(0.0, 0.0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
  sigma <- sqrt(1/tau)
}
```