

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE ECONOMIA  
MONOGRAFIA DE BACHARELADO

# **ORDENAÇÃO LINEAR DE SETORES ECONÔMICOS**

PEDRO LEÃO LUCENA  
matrícula nº: 110112896

ORIENTADORES: Prof. Victor Prochnik (IE-UFRJ)  
Prof. Diogo B. M. Braga (FE-UFF)

ABRIL 2017

*As opiniões expressas neste trabalho são de exclusiva responsabilidade do autor*



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a meus pais por tudo que fizeram por mim ao longo da minha vida, as conquistas que alcancei, e espero alcançar nunca teriam sido possíveis sem o apoio e exemplo de ambos. Minha irmã também tem papel fundamental, apesar da distância sei que sempre poderei contar com ela para qualquer situação.

Por fim, agradeço a meus orientadores, por estarem presentes no encerramento de um ciclo longo e que ficará marcado na minha vida acadêmica e pessoal.

## **RESUMO**

Este trabalho investiga as ordenações de setores econômicos resultantes da triangulação de matrizes de insumo-produto brasileiras e chinesas. Em particular, utiliza uma técnica de triangulação recentemente introduzida na literatura e considera matrizes de insumo-produto disponibilizadas World Input-Output Database, em 2016. Os resultados aqui descritos podem auxiliar no estudo de possíveis mudanças na estrutura de produção industrial dessas duas economias.

# ÍNDICE

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO I - PERMUTAÇÕES E TRIANGULAÇÕES DE MATRIZES.....</b>	<b>11</b>
I.1 - PERMUTAÇÃO DE MATRIZES.....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
I.2 - TRIANGULAÇÃO DE MATRIZES .....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
<b>CAPÍTULO II - PROBLEMA DE ORDENAÇÃO LINEAR.....</b>	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
II.1 - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
II.2 - EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
II.3 - GENERALIZAÇÕES .....	ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.
<b>CAPÍTULO III - RESULTADOS E CONCLUSÕES .....</b>	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>ERRO! INDICADOR NÃO DEFINIDO.</b>

## INTRODUÇÃO

A busca por um entendimento da estrutura de produção de uma economia me fez procurar informações sobre o tema com meu orientador e outros professores que atuam na área. Recebi como sugestão estudar parte de uma tese de doutorado, Braga (2015), que trata deste tema. O trabalho de Braga, por sua vez, se baseia em um artigo recente de um economista, Kondo (2014) e, em conjunto, estes dois textos definiram o caminho que segui para elaborar esta monografia de final de curso.

Segundo Kondo (2014), entender a estrutura industrial de uma economia nacional ou regional é um problema central em Economia e está intimamente ligado ao modelo de análise de insumo-produto desenvolvido por Wassily Leontief, ganhador do Prêmio Nobel de Economia de 1973 por esta contribuição. No contexto da análise de insumo-produto, esta monografia investiga a ordenação de setores econômicos através da triangulação de suas matrizes de insumo-produto. Esta ordenação como veremos nos próximos capítulos, leva em consideração a contribuição individual de cada setor como ofertante de insumos para a produção dos demais setores. Isso é feito tendo como premissa a maximização do valor monetário dos insumos que fluem na direção imposta pela ordenação. Ou seja, o que se quer é maximizar o valor monetário dos insumos que fluem de cada setor para os setores alocados às posições que lhe seguem, na ordenação.

A ordenação definida acima, questionável ou não, pode ser entendida como uma observação da estrutura industrial da economia em questão. Tratada individualmente pode eventualmente trazer pouca informação, como já mencionado na literatura (vide Braga (2015)). No entanto, quando se considera não apenas uma única matriz de insumo-produto de uma dada economia, isoladamente, mas várias delas, simultaneamente, distribuídas de forma uniforme ao longo do horizonte de tempo considerado, mais informações relevantes se tornam disponíveis para análise (vide Braga (2015)). Os trabalhos de Kondo (2014) e Braga (2015) exploram exatamente este ponto e desenvolvem métodos para triangular não apenas uma única matriz, mas várias delas, simultaneamente, levando em conta o contexto econômico envolvido. Ao fazer isso conseguem corrigir os pontos anteriormente criticados em relação à triangulação de matrizes (vide Braga (2015), em uma citação feita a Kondo (2014)).

Aplicando-se a triangulação simultânea de Kondo (2014) e Braga (2015) a várias matrizes de insumo-produto de uma mesma economia, se as ordenações permanecem

constantes ao longo do tempo, a estrutura industrial da economia possivelmente permaneceu estável. Se ao contrário, divergem, mudanças estruturais podem estar em curso e uma análise mais detalhada se faz necessária. Em particular se uma tendência existe na forma como as ordenações se modificam, seria possível, em tese, definir para onde a economia estaria apontando.

Nesta monografia, utilizo o modelo de triangulação de matrizes proposto por Kondo (2014) e generalizado na tese de doutorado de Braga (2015). O modelo de Kondo é particularmente adequado para análises temporais e pode ser considerado um refinamento econômico do modelo puramente matemático introduzido por Grottschel, Junger e Reinelt (1984,1985) (vide Braga (2015)). Nesta última citação os autores investigam o Problema de Ordenação Linear (POL), que tem como uma de suas aplicações, a triangulação de matrizes.

A triangulação de matrizes de insumo-produto tem uma longa história que remonta pelo menos aos anos 1940, com o Projeto Scoop da Força Aérea americana. Tal afirmação é feita por Kondo (2014), que cita Leontief (1963) como fonte para a mesma. O projeto tinha por objetivo aumentar a eficiência na solução de sistemas de equações lineares. No entanto, os pesquisadores envolvidos observaram que matrizes de insumo-produto (MIPs), quando trianguladas, revelavam características estruturais das economias que representavam.

Seguindo o roteiro traçado por Braga (2015), apresentamos a seguir um histórico das aplicações de triangulação de matrizes de insumo-produto encontradas na literatura.

Chenery e Watanabe (1958) utilizaram a triangulação de matrizes de insumo-produto para analisar o nível de desenvolvimento e a estrutura de produção de uma economia. Em conjunto com trabalhos publicados por Leontief (1963), Simpson e Tsukui (1965) e diversos outros autores, Chenery e Watanabe apresentaram também evidências empíricas que indicavam existir uma forte semelhança entre as estruturas de produção de economias mais desenvolvidas. Observaram ainda que tais estruturas tendiam a permanecer estáveis ao longo do tempo.

Várias aplicações adicionais para a triangulação de matrizes de insumo-produto apareceram posteriormente. Sem entrar em maiores detalhes podemos destacar, dentre elas: (a) a comparação da estrutura de produção de diversas economias, (b) a análise de setores que influenciavam ciclos de negócios e crescimento econômico e, finalmente, (c) o refinamento da previsão e do planejamento econômico.



A seguir às aplicações indicadas no parágrafo anterior, Grotschel, Junger e Reinelt (1984) propuseram um modelo matemático e um algoritmo de solução para o Problema de Ordenação Linear (POL). Tal problema tem como casos particulares o Problema de Triangulação de Matrizes (PTM) e diversos outros problemas, que podem ser então resolvidos através da particularização do POL a cada um deles. De fato, por sua simplicidade e desempenho o modelo/algoritmo de Grotschel, Junger e Reinelt (1984) passou a ser, desde então, o caminho padrão para se resolver o PTM. Além disso, Grotschel, Junger e Reinelt apresentaram resultados empíricos, envolvendo matrizes de insumo-produto europeias, que pareciam contradizer a afirmação de que economias mais desenvolvidas teriam estruturas industriais similares. Como consequência, desde então, o uso da triangulação de matrizes como um instrumento de análise de estruturas econômicas de produção experimentou um declínio. Mesmo assim nunca foi inteiramente descartado e, com o refinamento proposto por Kondo (2014), poderá voltar a atrair interesse.

Triangular uma matriz significa reordenar suas linhas e colunas de tal forma que nenhuma ordenação alternativa leve a uma matriz tenha uma maior soma de coeficientes acima da diagonal principal. No entanto, mais de uma ordenação pode, em tese, atingir aquele valor máximo. Esse fato já havia sido observado anteriormente por Grotschel, Junger e Reinelt (1984). No entanto, indo além daquela observação, Kondo (2014) sugere que, dentre essas diferentes ordenações algumas podem fazer mais sentido econômico que outras. Propõe então um modelo matemático para triangular simultaneamente duas matrizes de insumo-produto, oriundas de: (a) uma mesma economia ou (b) duas economias distintas, mas igualmente desenvolvidas. Adicionalmente, impõe que as ordenações a serem selecionadas para cada matriz, caso existam alternativas, devem ser aquelas que implicam na menor variação entre si, como sugere a teoria econômica. No estudo que efetuou, Kondo (2014) apresenta evidências empíricas que demonstram a adequabilidade de seu modelo. Num primeiro caso considerou duas matrizes de insumo-produto japonesas correspondentes a períodos de tempo imediatamente subsequentes. No outro, utilizou duas matrizes de insumo-produto associadas a um mesmo ano, cada uma de um país diferente.

Finalmente, Braga (2015) generalizou o modelo de Kondo (2014) para um número de matrizes maior do que dois. Feito isso, aplicou o que chamaremos de “modelo generalizado de Kondo” (MGK) a matrizes de insumo-produto brasileiras associadas a cada um dos anos de 2001 e 2009. Tais matrizes foram geradas pelo Núcleo de Economia Regional e Urbana da

Universidade de São Paulo (NEREUS) e os resultados que obteve estão de acordo com os resultados e conclusões de Kondo (2014).

Nesta monografia, aplicaremos o MGK a matrizes de insumo-produto brasileiras compiladas pelo World Input-Output Database (WIOD), para cada um dos anos de 2000 a 2014. Ou seja, aplicaremos o MGK a matrizes brasileiras que cobrem um período de tempo mais extenso que aquele considerado por Braga (2015). Além disso, as matrizes que vamos considerar têm origem distinta daquelas utilizadas por Braga, oriundas do NEREUS. Finalmente, num experimento adicional, aplicaremos o MGK às matrizes de insumo-produto chinesas do período 2000-2014, elaboradas pelo WIOD, para tentar observar, por essa ótica, eventuais mudanças estruturais de uma economia que sem dúvida passou por diversas transformações.

Esta monografia está organizada em três capítulos adicionais, que complementam esta introdução. No Capítulo 1, descrevemos o PTM. No capítulo 2 descrevemos o POL e suas generalizações sugeridas por Kondo (2014) e por Braga (2015). Ainda no Capítulo 2 apresentamos formulações matemáticas para o POL e o MGK. No Capítulo 3 resolvemos o MGK para as duas sequências de matrizes de insumo-produto mencionadas no parágrafo anterior. Sem entrar em maiores detalhes, pode-se dizer que não existem algoritmos computacionalmente eficientes para resolver o POL ou o MGK. No entanto, o algoritmo de otimização genérico contido no software de otimização CPLEX foi capaz de resolver, em tempos computacionais aceitáveis, os dois casos que consideramos. A utilização desse software, através de sua linguagem de programação algébrica, OSL, foi feita por uma colaboradora deste trabalho. Ainda no Capítulo 3, apresentamos diagramas de migração de setores. Isto é feito tanto para a economia brasileira quanto para a economia chinesa, numa tentativa de ilustrar os processos de mudanças industriais que essas duas economias experimentaram, no período de tempo considerado. Vale ressaltar que tais mudanças são aqui observadas através da ótica imposta pela ordenação de setores que utilizamos, ou seja, a ordenação que resulta da triangulação de matrizes. Finalmente, algumas conclusões são também oferecidas no Capítulo 3, concluindo a monografia.

## CAPÍTULO I – TRIANGULAÇÃO DE MATRIZES

Como indicado por Braga (2015), um modelo de insumo-produto é uma técnica de economia quantitativa usada para representar interdependências existentes entre os diferentes setores de (a) uma economia nacional ou (b) de uma economia regional. O modelo retrata relações interindustriais, mostrando como a saída (produção) de um determinado setor industrial pode servir como entrada (insumo) para a produção de outro setor industrial. O modelo foi proposto por Leontief (1936).

Em linhas gerais, uma economia é dividida em um conjunto de  $n$  setores e uma matriz de insumo-produto  $\mathbf{M}$ ,  $n \times n$ , contendo  $n$  linhas e  $n$  colunas, é elaborada para eles. Observe que qualquer coeficiente da matriz  $\mathbf{M}$  terá sempre dois índices. O primeiro índice indica a linha da matriz onde o coeficiente está situado. Por sua vez, o segundo índice indica a coluna que o contém. Exemplificando, o coeficiente  $m_{32}$  de uma matriz  $\mathbf{M}$  é aquele que se situa na interseção da linha 3 com a coluna 2. Ilustramos a seguir os coeficientes de uma matriz  $\mathbf{M}$ ,  $3 \times 3$ , ou seja, uma matriz que contém 3 linhas e 3 colunas:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

De uma forma genérica, vamos chamar de  $m_{ij}$  um coeficiente qualquer da matriz  $\mathbf{M}$ , onde o primeiro índice (índice de linha),  $i$ , pode assumir qualquer valor de 1 a  $n$ . Da mesma forma, o segundo índice (índice de coluna) pode também assumir qualquer valor de 1 a  $n$ . Dessa maneira, um coeficiente  $m_{ij}$  de uma matriz de insumo-produto,  $\mathbf{M}$ , representa, em valores monetários, os insumos fornecidos pelo setor  $i$  para a produção do setor  $j$ . Matrizes de insumo-produto cobrem, em geral, um período de tempo de um ano.

Como exemplo, vamos considerar uma matriz de insumo-produto contendo apenas 3 setores: Automotivo, Siderúrgico e Minerador (vide matriz que se segue). Vamos considerar também a produção de um automóvel, que demanda, dentre vários outros insumos, o uso de chapas de aço. Neste caso específico, um índice  $i$  estaria associado ao setor siderúrgico e um índice  $j$  estaria associado ao setor automotivo. O coeficiente  $m_{ij}$  de  $\mathbf{M}$  expressaria então o valor monetário dos insumos fornecidos pelo setor siderúrgico (chapas de aço sendo um deles) para

a produção do setor automotivo (automóveis e caminhões, dentre outros). Observe que não seria incomum um setor fornecer insumos à sua própria produção. Da mesma forma, não seria incomum que setores distintos,  $i$  e  $j$ , fornecessem insumos nas duas direções, ou seja, do setor  $i$  para o setor  $j$  e do setor  $j$  para o setor  $i$ . Na matriz abaixo, ressaltamos em amarelo o valor monetário  $m_{21}$ , dos insumos do setor Siderúrgico para a produção do setor Automotivo.

		Automotivo	Siderúrgico	Minerador
$\mathbf{M} =$	Automotivo	$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{13}$
	Siderúrgico	$m_{21}$	$m_{22}$	$m_{23}$
	Minerador	$m_{31}$	$m_{32}$	$m_{33}$

Neste ponto, antes de discutir o que significa “triangular uma matriz”, vamos considerar primeiro o que significa “permutar uma matriz”. Isso porque triangular uma matriz é o mesmo que aplicar a ela um determinado tipo de “permutação”.

### ***1.1 – Permutação de Matrizes***

Permutar uma matriz  $\mathbf{M}$  é o mesmo que mudar a ordem em que suas linhas e colunas devem aparecer.

A ideia básica de uma permutação é trocar de posição as células de uma matriz. No nosso caso específico, isso é feito com o objetivo de obter a maior soma possível de coeficientes na parte triangular superior da matriz resultante.

Ao fazer isso obtemos uma matriz visualmente diferente de  $\mathbf{M}$ , mas que contém os mesmos coeficientes de  $\mathbf{M}$ . Para efeito de ilustração, vamos considerar uma matriz de insumo-produto  $\mathbf{M}$ ,  $4 \times 4$ , definida por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e aplicar a ela uma permutação  $\pi = (4, 1, 2, 3)$ . Temos então que  $\pi(1)=4$ ,  $\pi(2)=1$ ,  $\pi(3)=2$  e  $\pi(4)=3$ . Para chegar à matriz  $\mathbf{M}(\pi)$  que resulta da permutação  $\pi$  definida acima, podemos trabalhar com

trocas de colunas, primeiro, e depois com trocas de linhas, ou vice-versa. Vamos aqui ilustrar de acordo com a primeira opção.

Primeiro trocamos a ordem das colunas de  $M$ , de tal forma que: a quarta coluna passa a ser a primeira da nova matriz (já que  $\pi(1)=4$ ), a primeira passa a ser a segunda da nova matriz (já que  $\pi(2)=1$ ), a segunda passa a ser a terceira coluna da nova matriz (já que  $\pi(3)=2$ ) e a terceira passa a ser a quarta coluna da nova matriz (já que  $\pi(4)=3$ ). Ficamos então com:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

No segundo passo, vamos agora trocar a ordem das linhas da matriz acima, de acordo com a permutação  $\pi = (4,1,2,3)$ . Ou seja, a quarta linha da matriz acima passa a ser a primeira da nova matriz (já que  $\pi(1)=4$ ), a primeira passa a ser a segunda da nova matriz (já que  $\pi(2)=1$ ), a segunda passa a ser a terceira coluna da nova matriz (já que  $\pi(3)=2$ ) e a terceira passa a ser a quarta linha da nova matriz (já que  $\pi(3)=2$ ). Feito isso, chegamos então à “matriz permutada”:

$$\mathbf{M}(\pi) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para simplificar a escrita, vamos eventualmente chamar  $\mathbf{M}(\pi)$  de  $\mathbf{B}$ , daqui em diante.

Como ilustrado acima, aplicando a permutação  $\pi = (4,1,2,3)$  à matriz  $\mathbf{M}$ , obtemos a seguinte matriz permutada:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Essa matriz  $\mathbf{B}$  é apenas uma dentre as 24 matrizes que se pode construir a partir de uma permutação das linhas e colunas da matriz  $\mathbf{M}$ . Isso porque, para uma matriz quadrada de dimensão  $n$ , existem  $n!$  permutações possíveis e como temos  $n=4$ , existem então 24 possibilidades. Triangular uma matriz, como será visto mais tarde, significa aceitar apenas um determinado tipo de permutação para a mesma.

Note que na matriz  $\mathbf{B}$ , todos os coeficientes localizados abaixo da sua diagonal principal (ou seja, abaixo da “diagonal” formada pelos coeficientes  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{33}$  e  $b_{44}$ ) têm valor 0. Esse tipo de matriz é chamada “triangular superior”.

Na realidade, qualquer matriz  $\mathbf{M}$  que tenha  $m_{ij}$  e  $m_{ji}$  simultaneamente diferentes de 0, para algum par de linhas/colunas distintas  $i$  e  $j$ , não pode gerar uma matriz  $\mathbf{M}(\pi)$  triangular superior. Isso porque não temos como colocar simultaneamente esses dois coeficientes não nulos acima da diagonal principal (um sempre terá que ficar acima e o outro abaixo).

Baseado nas referências contidas em Braga (2015), chamamos de “perfeitamente linear” uma economia com uma matriz de insumo-produto  $\mathbf{M}$  para a qual existe uma permutação  $\pi$  onde a matriz  $\mathbf{M}(\pi)$  é triangular superior. Na prática, esse tipo de economia não existe. Numa economia real normalmente existem pares de setores que fornecem insumos simultaneamente, um para o outro. Nessas situações, tanto  $m_{ij}$  quanto  $m_{ji}$  são diferentes de 0, para cada um desses pares. Assim sendo, a matriz  $\mathbf{M}$  associada a uma economia real não poderia ser descrita numa forma triangular superior.

Outra maneira de visualizar os efeitos da aplicação da permutação  $\pi = (4,1,2,3)$  à matriz  $\mathbf{M}$ , é mostrada nas Figuras 1 e 2, abaixo. Nessas figuras os setores (ou seja, as linhas e colunas da matriz  $\mathbf{M}$ ) são identificados pelos círculos azuis com numeração. Por sua vez, os coeficientes da matriz são representados por linhas vermelhas com setas. Por exemplo, o coeficiente  $m_{12}$  da matriz  $\mathbf{M}$  é representado em ambas as figuras pela linha vermelha que aponta do setor 1 para o setor 2. Já o coeficiente  $m_{22}$ , é representado pelo círculo vermelho que aponta de 2 para ele mesmo. A diferença entre as duas figuras é simplesmente a ordem em que apresentamos os setores. Na Figura 1, colocamos os setores na ordem em que são descritos na matriz  $\mathbf{M}$ , ou seja, na sequência  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ . Na Figura 2 isso é feito na sequência  $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ , ou seja, na ordem em que aparecem na matriz  $\mathbf{B}$ , como imposto pela permutação  $\pi = (4,1,2,3)$ .

Observe que na Figura 2 o fluxo de insumos segue todo da esquerda para a direita. Isso não ocorre na Figura 1. Ou seja, pela matriz  $\mathbf{B}$  (que equivale à Figura 2), fica mais fácil enxergar a estrutura industrial da economia. Na realidade não seria nem necessário permutar a matriz  $\mathbf{M}$  para ter essa visão se suas linhas/colunas (setores) já viessem ordenadas de acordo com  $\pi = (4,1,2,3)$ .

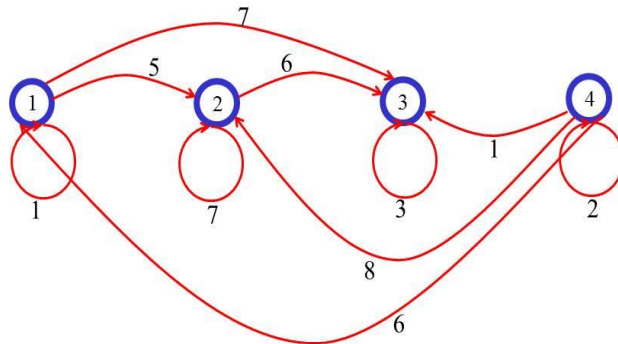


Figura 1: Fluxos de insumos associados à matriz  $M$ .

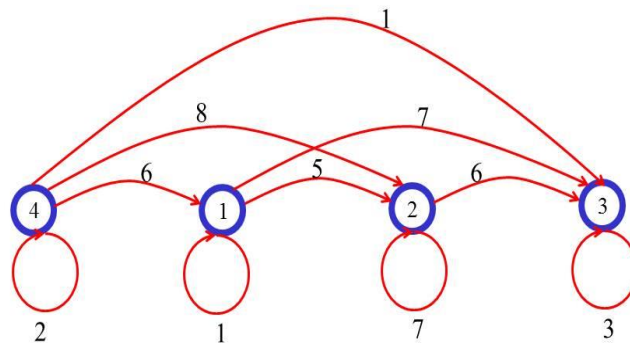


Figura 2: Fluxos de insumos após triangulação da matriz  $M$

## 1.2 – Triangulação de Matrizes

Dada uma matriz de insumo-produto  $M$ , vamos encontrar uma permutação  $\pi$  de suas linhas e colunas de tal forma que  $M(\pi)$  tenha a maior soma possível de coeficientes acima da diagonal principal. Em relação ao nosso exemplo anterior, observe que não é exigido aqui que a matriz permutada  $M(\pi)$  seja triangular superior (até porque, dependendo da matriz  $M$ , isso pode ser impossível de conseguir). Exige-se apenas que a permutação escolhida seja aquela em que a soma dos valores monetários dos insumos que fluem na direção  $\pi(1) \rightarrow \pi(2) \rightarrow \dots \rightarrow \pi(n)$  seja o maior possível. Dito de outra forma, isso equivale a encontrar uma permutação  $\pi$  para a matriz

$\mathbf{M}$  onde a soma dos coeficientes acima da diagonal principal de  $\mathbf{M}(\pi)$  seja a maior possível. Temos então a seguinte definição para o PTM (vide, Braga (2015)):

- **Definição:** Dada uma matriz de insumo-produto  $\mathbf{M}$ , encontrar uma permutação  $\pi$  de suas linhas e colunas de tal forma que  $\mathbf{M}(\pi)$  tenha a maior soma possível para os coeficientes acima da diagonal principal.

Para elaborar um pouco mais sobre o tema, vamos utilizar uma matriz de insumo-produto  $\mathbf{M}$ ,  $4 \times 4$ , considerada por Braga (2015):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sem entrar em maiores detalhes, por enquanto, a permutação  $\pi = (4,1,2,3)$  é aquela que resolve o PTM para essa matriz. Temos então:

$$\mathbf{M}(\pi) = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como é possível observar, a soma dos coeficientes de  $\mathbf{M}(\pi)$  localizados acima da sua diagonal tem valor 33. Para efeito de comparação, a matriz  $\mathbf{M}$  que lhe deu origem tem o valor 24 para essa soma. Para descobrir a permutação “ideal”  $\pi = (4,1,2,3)$ , que chamaremos de “solução ótima” ou “permutação ótima” para  $\mathbf{M}$  (vide Braga (2015)), um problema de Matemática deve ser resolvido. Esse problema se denomina “Problema de Ordenação Linear” ou POL, de forma abreviada.

Resolvido o PTM, obtém-se: (a) uma permutação  $\pi$  que atende aos requisitos impostos pelo problema e (b) uma matriz permutada  $\mathbf{M}(\pi)$  para a matriz  $\mathbf{M}$ . Obtém-se ainda uma ordenação  $\pi(1), \dots, \pi(n)$ , para os setores da economia. Essa ordenação define a direção  $\pi(1) \rightarrow \pi(2) \rightarrow \dots \rightarrow \pi(n)$ , onde o fluxo de insumos para produção na economia é o maior possível. No nosso exemplo específico, que envolve uma matriz  $\mathbf{M}$ ,  $4 \times 4$ , essa direção é dada por:  $4 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ .

Além das informações acima, a solução de um PTN nos permite calcular também (vide, Braga (2015)) a “linearidade” da economia que se está analisando. Para isso, definimos



“SOMA1” como sendo a soma de todos os coeficientes da matriz  $\mathbf{M}(\pi)$  localizados acima da sua diagonal superior. Definimos também, “SOMA2”, como a soma de todos os coeficientes da matriz  $\mathbf{M}(\pi)$ , a menos daqueles localizados na sua diagonal principal. Temos então que o grau de linearidade dessa economia é:  $\lambda = \text{SOMA1}/\text{SOMA2}$ .

No nosso exemplo atual temos  $\text{SOMA1} = 33$ ,  $\text{SOMA2} = 42$  e  $\lambda=0,785$ . É possível observar que o menor valor possível para  $\lambda$  é então  $\frac{1}{2}$ , que corresponderia a um caso onde  $\text{SOMA2}=2\times\text{SOMA1}$ . Ou seja, quando a soma dos coeficientes acima da diagonal principal é exatamente igual à soma dos coeficientes abaixo dela.

Uma economia “perfeitamente linear” (veja, Braga (2015)) é uma economia em que, resolvido o PTM, obtemos  $\lambda=1$ . Esse é o caso da matriz  $\mathbf{M}$  que utilizamos na Seção I.1. Naquele exemplo,  $\text{SOMA1}=33$  e  $\text{SOMA2}=33$  (já que todos os coeficientes abaixo da diagonal principal têm valor 0) e  $\lambda=1$  então resulta para ela.

Intuitivamente (veja, Braga (2015)), economias menos desenvolvidas seriam aquelas onde  $\lambda$  é mais próximo de 1. Ou seja, quando a economia é mais próxima de uma economia perfeitamente linear. Economias mais desenvolvidas teriam  $\lambda$  mais próximo de  $1/2$ , ou seja, teriam maior circularidade, com trocas de insumos nos dois sentidos e envolvendo valores mais próximos, um do outro.

Ao invés de análises econômicas baseadas simplesmente em graus de linearidade, análises baseadas nas ordenações definidas pelas soluções (triangulações) obtidas resolvendo o PTM, têm atraído maior atenção (vide Kondo (2014) e Braga (2015)). Esse tipo de análise se torna ainda mais interessante quando envolve uma dimensão temporal. Por exemplo, Braga (2015) compara matrizes de insumo-produto brasileiras, elaboradas sob uma mesma metodologia, para cada um dos anos de 2001 a 2009. Isso é feito utilizando o modelo MKG (veja o próximo capítulo) para resolver simultaneamente, de uma forma encadeada, todos os PTMs envolvidos (note que teríamos um PTM para cada matriz). Como veremos no Capítulo 2, o MKG impõe uma premissa econômica ao resolver esses PTMs. Essa premissa faz com que a resolução desses problemas deixe de ser simplesmente matemática e passe a ser também, econômica.

A condição econômica mencionada acima (vide Braga (2015), que se baseia em Kondo (2014)), é a seguinte: havendo mais de uma alternativa para a solução de cada PTM, o MKG escolhe, em cada caso, as triangulações que, em conjunto, menos variam entre si. Como existe

uma inércia para que, num curto espaço de tempo, os efeitos de grandes mudanças estruturais se materializem numa economia, essa imposição faz sentido do ponto de vista econômico. Ao mesmo tempo, o problema continua sendo matemático, pois continuamos a exigir que a solução de cada PTM seja a melhor possível (apenas, tendo alternativa, escolhemos a solução que faça mais sentido econômico).

Resolvido o MGK, como indicado acima, obtemos então, simultaneamente, uma “permutação ótima” para cada matriz considerada. Os setores econômicos são então ordenados, para cada uma dessas matrizes, na forma definida por sua permutação correspondente. Feito isso, construímos, a seguir, “diagramas de migração de setores” (veja Braga (2015), para as citações necessárias). Isso é feito colocando as ordenações, lado-a-lado, em ordem crescente de tempo, e utilizando segmentos de reta para traçar o caminho percorrido por cada setor, ao longo do diagrama. Claramente, se todos os setores envolvidos mantêm suas posições ao longo do diagrama, ou se suas mudanças de posição são muito pequenas, nenhuma mudança estrutural significativa ocorreu naquela economia (no intervalo de tempo considerado). No entanto, quando mudanças de posição acentuadas ocorrem, informações valiosas podem ser eventualmente extraídas dos diagramas. Por exemplo, consideradas em conjunto, estas mudanças de posição podem eventualmente significar uma mudança no patamar de desenvolvimento da economia.

Para encontrar soluções ótimas para cada PTM, individualmente, é comum fazê-lo através da resolução de um POL (veja Braga (2015), para mais informações). Da mesma forma, as generalizações do PTM propostas por Kondo (2014) e por Braga (2015) são também resolvidas através de generalizações do POL. No capítulo seguinte, vamos então descrever o POL e suas generalizações propostas por Kondo (2014) e Braga (2015).

## CAPÍTULO 2 – PROBLEMA DE ORDENAÇÃO LINEAR

Suponha que temos um conjunto  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  de  $n$  itens e que queremos ordenar esses itens de acordo com um certo critério. Se um item  $i$  é ordenado antes de um item  $j$ , obtém-se um “ganho”  $m_{ij}$ . Em caso contrário, se  $j$  é ordenado antes de  $i$  obtém-se um ganho  $m_{ji}$ . Claramente temos apenas essas duas opções de ordenação entre os dois itens: ou  $i$  é posicionado antes de  $j$  ou o contrário,  $j$  é posicionado antes de  $i$ . No POL, considerando os ganhos par-a-par que acabamos de descrever, desejamos ordenar simultaneamente todos os  $n$  itens do conjunto  $N$  de forma a obter a maior soma possível de ganhos par-a-par. Ou seja, desejamos encontrar uma permutação  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  para os  $n$  itens de  $N$ , que nos leve ao maior ganho par-a-par possível.

Vamos imaginar agora que o conjunto  $N$  corresponde às linhas/colunas de uma dada matriz de insumo-produto  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{n \times n}$  e que um coeficiente  $m_{ij}$  corresponde ao ganho obtido ao se posicionar a linha/coluna  $i$  antes da linha/coluna  $j$ , em qualquer permutação daquela matriz. Vamos assumir também que  $\pi = (\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  é uma solução (permutação) ótima para este POL particular. Ou seja,  $\pi$  é a permutação que leva ao maior ganho total possível para o problema. Para relacionar “triangulação de matrizes” e “ordenações lineares”, vamos identificar explicitamente os ganhos obtidos por essa solução ótima,  $\pi$ . Para a linha/coluna ocupando a primeira posição de  $\pi$ , ou seja, a linha/coluna  $\pi(1)$ , obtemos ganhos  $m_{\pi(1)\pi(2)}, m_{\pi(1)\pi(3)}, \dots, m_{\pi(1)\pi(n)}$ . Individualmente, esses valores correspondem ao ganho  $m_{\pi(1)\pi(2)}$  obtido ao se posicionar a linha/coluna  $\pi(1)$  à frente da linha/coluna  $\pi(2)$ , ao ganho  $m_{\pi(1)\pi(3)}$  obtido ao se posicionar a linha/coluna  $\pi(1)$  à frente da linha/coluna  $\pi(3)$ , etc. Para a linha/coluna ocupando a segunda posição de  $\pi$ , ou seja,  $\pi(2)$ , obtemos ganhos  $m_{\pi(2)\pi(3)}, m_{\pi(2)\pi(4)}, \dots, m_{\pi(2)\pi(n)}$ , com a mesma interpretação anterior. Para a linha/coluna ocupando a terceira posição de  $\pi$ , ou seja,  $\pi(3)$ , obtemos ganhos  $m_{\pi(3)\pi(4)}, m_{\pi(3)\pi(5)}, \dots, m_{\pi(3)\pi(n)}$ , e assim por diante. Por essa ilustração, percebe-se que os ganhos obtidos ao se resolver este POL correspondem exatamente aos coeficientes localizados acima da diagonal principal da matriz  $\mathbf{M}(\pi)$  (ou seja, a matriz  $\mathbf{M}$  permutada por  $\pi$ ). Fica então claro (vide Braga(2015) e as referências ali contidas) que o PTM pode ser resolvido através do resolução do seu POL correspondente.

### II.1 – Formulação Matemática

Uma formulação matemática para o POL foi proposta por Grotschel, Junger e Reinelt (1984) (vide Braga (2015)) e utiliza variáveis  $x_{ij}$  e  $x_{ji}$ , para todo par de itens distintos  $i$  e  $j$  do conjunto  $N$ . Essas variáveis só podem assumir os valores 0 ou 1. Quando  $x_{ij}=1$  é obtido na solução do POL, isso implica em que o item  $i$  deve ser ordenado antes do item  $j$  (não necessariamente imediatamente antes, mas simplesmente antes). Caso contrário, quando  $x_{ij}=0$  resulta na solução do POL, isso indica que  $i$  deve ser ordenado depois de  $j$ . Como indicaremos mais adiante na formulação do POL, sempre que o valor  $x_{ij}=1$  é obtido na solução do problema,  $x_{ji}=0$  será forçado naturalmente a ocorrer. Na direção oposta, o mesmo se aplica em relação a  $x_{ji}=1$  e  $x_{ij}=0$ . Claramente, para o nosso par de itens  $i$  e  $j$  existem apenas essas duas possibilidades:  $i$  deve ser ordenado antes de  $j$  ou depois de  $j$ . Na formulação do POL a restrição que impõe essa condição é:

$$(1) \quad x_{ij} + x_{ji} = 1, \text{ para todo par } i \text{ e } j \text{ de itens distintos de } N.$$

Outro tipo de restrição encontrada na formulação diz respeito a todas as triplas  $i,j,k$  de itens distintos de  $N$ . Para uma tripla  $i,j,k$  específica, vamos ter uma restrição que impõe o seguinte: se  $i$  é ordenado antes de  $j$  (ou seja, se  $x_{ij} = 1$  deve ocorrer na solução) e  $j$  é ordenado antes de  $k$  (ou seja, se  $x_{jk} = 1$  deve ocorrer na solução), não é possível ordenar  $k$  antes de  $i$  (ou seja, não seria possível ter  $x_{ki} = 1$  na solução). Caso essas 3 ordenações para-a-par fossem simultaneamente permitidas (ou seja,  $i$  ser colocado antes de  $j$ ,  $j$  ser colocado antes de  $k$  e  $k$  ser colocado antes de  $i$ ), teríamos uma ordenação parcial  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$  desses 3 itens. Ou seja, estaríamos ordenando  $i$  simultaneamente antes e depois de  $j$ , o que seria inaceitável, pois quebraria nossa ideia de ordenação. Na formulação do POL, as restrições que evitam que  $x_{ij}$ ,  $x_{jk}$  e  $x_{ki}$  possam assumir simultaneamente o valor 1 são as seguintes:

$$(2) \quad x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 2 \text{ e } x_{ik} + x_{kj} + x_{ji} \leq 2, \text{ para todo conjunto de três itens distintos, } i, j \text{ e } k, \text{ de } N, \text{ tomados nessa ordem.}$$

Finalmente, temos um último conjunto de restrições que impõe os valores que as variáveis podem assumir:

$$(3) \quad x_{ij} \text{ pode assumir valores } 0 \text{ ou } 1, \text{ para qualquer par de elementos distintos } i,j \text{ de } N.$$

Vamos utilizar o vetor  $X=(x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{(n-1)1}, \dots, x_{(n-1)n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{n(n-1)})$  para representar todas variáveis que definimos acima. Observe que as  $(n-1)$  primeiras variáveis estão associadas a todas as ordenações par-a-par possíveis para o item 1. As  $(n-1)$  variáveis que se

seguem estão associadas a todas as ordenações par-a-par possíveis para o item 2, e assim por diante. Feita essa observação, vamos considerar então a seguinte função de valor para um POL:

$$(4) f(X) = m_{12}x_{12} + m_{13}x_{13} + \dots + m_{1n}x_{1n} + m_{21}x_{21} + \dots + m_{n(n-1)}x_{n(n-1)}.$$

Como mostrado em Braga (2015), qualquer vetor  $X$  que satisfaça simultaneamente a todos as restrições definidas por (1), (2) e (3), corresponde a uma permutação  $\pi=(\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n))$  dos itens de  $N$  (vamos mostrar isso através de um exemplo, mais tarde). Dessa maneira, como queremos encontrar uma permutação que maximiza o valor da soma dos ganhos par-a-par, uma formulação matemática para o POL é dada por:

$$(5) \text{ maximizar } f(X) \text{ sujeito às restrições (1), (2) e (3).}$$

O tipo de problema definido por (5) é conhecido como Problema de Programação Inteira (PPI) (vide Braga (2015)). Nessa monografia, resolvemos nossos POLs através do software de otimização matemática, CPLEX, que contém algoritmos específicos para resolver PPIs.

## **II.2 – Exemplos Numéricos**

Vamos mostrar agora, através de um exemplo concreto, como a formulação do POL proposta por Grotchel, Junger e Reinelt (1984) pode ser utilizada para resolver o PTM associado à matriz de insumo-produto  $\mathbf{M}$ ,  $4 \times 4$ , utilizada na Seção I.2.

Em primeiro lugar, como a matriz  $\mathbf{M}$  em questão tem dimensão 4, nosso conjunto de itens  $N$  deve conter 4 elementos, um para cada linha/coluna distinta daquela matriz. Dessa forma, o ganho obtido ao se posicionar a linha/coluna  $i$  à frente da linha/coluna  $j$  será então igual a  $m_{ij}$ , para todo par de linhas/colunas distintas  $i, j$  contidos em  $N$ . Vamos então utilizar as seguintes variáveis na formulação do POL:  $X=(x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43})$ , que nos fornecem todas as possibilidades de posicionamentos par-a-par de 4 itens. As restrições da formulação serão então:

- $x_{12} + x_{21} = 1$ ;  $x_{13} + x_{31} = 1$ ;  $x_{34} + x_{41} = 1$ ;  $x_{23} + x_{32} = 1$ ;  $x_{24} + x_{42} = 1$ ;  $x_{34} + x_{41} = 1$ .
- $x_{12} + x_{23} + x_{31} \leq 2$ ;  $x_{12} + x_{24} + x_{41} \leq 2$ ;  $x_{13} + x_{32} + x_{21} \leq 2$ ;  $x_{13} + x_{34} + x_{41} \leq 2$ ;  $x_{14} + x_{42} + x_{21} \leq 2$ ;  $x_{14} + x_{43} + x_{31} \leq 2$ ;

$$x_{21} + x_{13} + x_{32} \leq 2; x_{21} + x_{14} + x_{42} \leq 2; x_{23} + x_{31} + x_{12} \leq 2; x_{23} + x_{34} + x_{42} \leq 2; x_{24} + x_{41} + x_{12} \leq 2; x_{24} + x_{43} + x_{32} \leq 2;$$

$$x_{31} + x_{12} + x_{23} \leq 2; x_{31} + x_{14} + x_{43} \leq 2; x_{32} + x_{21} + x_{13} \leq 2; x_{32} + x_{24} + x_{41} \leq 2; x_{34} + x_{41} + x_{13} \leq 2; x_{34} + x_{42} + x_{23} \leq 2;$$

$$x_{41} + x_{12} + x_{24} \leq 2; x_{41} + x_{13} + x_{34} \leq 2; x_{42} + x_{21} + x_{14} \leq 2; x_{42} + x_{23} + x_{34} \leq 2; x_{43} + x_{31} + x_{14} \leq 2; x_{43} + x_{32} + x_{21} \leq 2.$$

- $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{34}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$  podem assumir valores em  $\{0,1\}$ .
- $f(X) = 5x_{12} + 7x_{13} + 2x_{14} + 0x_{21} + 6x_{23} + 1x_{24} + 1x_{31} + 2x_{32} + 3x_{34} + 6x_{41} + 8x_{42} + 1x_{43}$ .

Uma vez introduzida no CPLEX a formulação do POL descrito acima, o software aciona seu algoritmo de Programação Inteira e obtém a seguinte solução ótima:  $x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{12} = x_{13} = x_{23} = 1$  e  $x_{14} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{34} = 0$ . Como  $x_{41} = x_{42} = x_{43} = 1$  foi obtido na solução, isto indica que o item 4 foi ordenado à frente de todos os demais itens e concluímos que  $\pi(1)=4$ . Da mesma forma, como  $x_{12} = x_{13}=1$ , o item 1 foi ordenado à frente de todos os demais itens, à menos do item 4. Dessa forma, concluímos que  $\pi(2)=1$ . Finalmente, seguindo a mesma lógica, o item 2 foi ordenado na posição 3 e o item 3, na posição 4 e podemos assim escrever  $\pi(3)=2$  e  $\pi(4)=3$ . Uma solução (permutação) ótima para a matriz  $\mathbf{M}$  da Seção I.2 é então  $\pi = (4,1,2,3)$ , e o ganho total obtido com ela é:  $m_{41} + m_{42} + m_{43} + m_{12} + m_{13} + m_{23} = 6 + 8 + 1 + 5 + 7 + 6 = 33$ , que corresponde ao valor de  $f(X)$  para a solução obtida.

Vamos descrever agora um exemplo prático adicional, ainda mais simples que o anterior, para facilitar ainda mais o entendimento do POL e fugir assim o máximo possível de abstrações. Este exemplo utilizará uma matriz de insumo-produto 3x3, correspondendo aos seguintes setores de uma economia:

	Automotivo	Siderúrgico	Minerador
Automotivo	120	116	85
Siderúrgico	84	112	81
Minerador	115	119	50

Ou seja, a coluna 1 da matriz de insumo-produto acima corresponde ao setor Automotivo (pois todas as suas células têm a ver com o setor Automotivo). Pelo mesmo motivo, a coluna 2 corresponde ao setor Siderúrgico e a coluna 3 corresponde ao setor Minerador. Da

mesma forma, a linha 1 da matriz corresponde ao setor Automotivo (pois todas as suas células têm a ver com aquele setor), a linha 2 corresponde ao setor Siderúrgico e a linha 3 corresponde ao setor Minerador.

No problema de ordenação linear associado à triangulação da matriz definida acima, queremos definir a ordem em que os “itens” (setores de nossa matriz) devem ser sequenciados. Vamos agora definir as variáveis associadas a esse problema de ordenação linear específico.

O vetor  $X$  para o nosso exemplo deve ser formado pelas componentes  $x_{12}$ ,  $x_{13}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{23}$ ,  $x_{31}$  e  $x_{32}$ , e estas são então as variáveis a considerar na formulação do POL. Note que  $x_{12}$  e  $x_{13}$  são as variáveis associadas à primeira linha da matriz  $M$ . Da mesma forma as variáveis associadas à segunda linha da matriz são:  $x_{21}$  e  $x_{23}$ . Finalmente, as variáveis associadas à terceira linha da matriz são:  $x_{31}$  e  $x_{32}$ . Cada uma dessas variáveis pode assumir apenas os valores 0 ou 1 ao resolvermos o problema. Se o valor de, por exemplo,  $x_{23}$ , for igual a 1, isso significaria que o item 2 deve ser ordenado antes do item 3. Caso contrário, se  $x_{23}$  resultar com um valor 0 (na solução do problema) isso significaria que o item 2 não deve ser ordenado antes do item 3.

Note também, como exemplo, que a restrição (2) da formulação do POL correspondente aos itens 2 e 3 e é descrita por:  $x_{23} + x_{32} = 1$ . Ou seja, forçamos uma variável a ser igual a 0 e a outra a ser igual a 1. O que vai acontecer vai depender dos "ganhos" associados não apenas a essa escolha entre os itens 2 e 3, mas também às demais escolhas que temos que fazer. Para os itens 2 e 3 os ganhos possíveis são  $m_{23}$  e  $m_{32}$ .

Para esse exemplo específico, que é pequeno, podemos enumerar todas as soluções (ordenações) possíveis. Estas são definidas pelas seis permutações a seguir: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2) e (3,2,1). Os ganhos totais obtidos com cada uma dessas permutações são respectivamente: 282, 316, 250, 280, 350 e 318. Dessa maneira a permutação ótima é  $\pi = (3,1,2)$ , que tem valor 350.

Concluída a explicação da formulação proposta por Grotschel, Junger e Reinelt (1984,1985) para o POL, vamos agora descrever como a mesma foi generalizada, tanto por Kondo (2014) quanto por Braga (2015). Como veremos, Braga (2015) generalizou a formulação de Kondo (2014) que, por sua vez, generalizou a formulação de Grotschel, Junger e Reinelt (1984,1985).

### **II.3 – Generalização de Kondo**

Suponha que ao invés de uma única matriz de insumo-produto para uma dada economia, temos duas delas ao nosso dispor. Suponha ainda que essas duas matrizes foram elaboradas sob uma mesma metodologia e envolvem os mesmos setores. Finalmente, assuma que elas correspondem a 2 anos consecutivos, indexados por  $T=\{1,2\}$ . Chamaremos essas matrizes respectivamente de  $\mathbf{M}^1$  e  $\mathbf{M}^2$ .

O modelo de triangulação simultânea de duas matrizes de insumo-produto proposto por Kondo (2014) envolve duas etapas. Na primeira delas, o POL correspondente a cada uma dessas duas matrizes é resolvido individualmente. Para fazer isso, indexamos o vetor de variáveis  $X$  definido acima, criando então dois vetores de variáveis,  $X^1$  e  $X^2$ . O primeiro deles será utilizado para formular o POL correspondente à matriz  $\mathbf{M}^1$ . O outro terá a mesma função para o POL relativo a  $\mathbf{M}^2$ . Em cada caso, nos bastaria escrever as restrições (1), (2) e (3) e a função (4) da formulação do POL, respectivamente para os pares  $\{\mathbf{M}^1, X^1\}$  ou  $\{\mathbf{M}^2, X^2\}$ . No caso da função (4) vamos descrevê-la como  $f^1(X^1)$  e  $f^2(X^2)$ , respectivamente para  $\{\mathbf{M}^1, X^1\}$  e  $\{\mathbf{M}^2, X^2\}$ . Feito isso, cada um desses dois POLs é resolvido pelo CPLEX.

Vamos chamar de VALOR1 e VALOR2 aos valores das soluções ótimas obtidas respectivamente para o primeiro e o segundo POL. Ou seja, aqueles são os valores de  $f^1(X^1)$  e  $f^2(X^2)$  para cada um dos casos. Vamos também chamar de  $\pi^1$  e  $\pi^2$  as permutações correspondentes a essas duas soluções. Ou seja, como indicado acima,  $\pi^1$  e  $\pi^2$  são as permutações que levam a matrizes trianguladas ótimas  $\mathbf{M}^1(\pi^1)$  e  $\mathbf{M}^2(\pi^2)$ , respectivamente para  $\mathbf{M}^1$  e  $\mathbf{M}^2$ . Da mesma forma, VALOR1 expressa o valor da soma dos coeficientes localizados acima da diagonal principal da matriz triangulada  $\mathbf{M}^1(\pi^1)$  e VALOR2 expressa o valor da soma dos coeficientes localizados acima da diagonal principal da matriz triangulada  $\mathbf{M}^2(\pi^2)$ .

Kondo inicia sua proposta (vide Braga(2015)), considerando um fato já observado previamente por Grotschel, Junger e Reinelt (1984): a possibilidade de existência de múltiplas triangulações ótimas tanto para a matriz  $\mathbf{M}^1$  quanto para a matriz  $\mathbf{M}^2$ . Menciona também o fato de que o CPLEX escolhe, em cada caso, apenas uma única triangulação ótima para cada uma dessas matrizes, mesmo que existam mais. Finalmente, fecha seu raciocínio concluindo que as triangulações ótimas obtidas pelo CPLEX podem eventualmente não ser as mais adequadas, do ponto de vista econômico. Vale aqui ressaltar que, para o CPLEX, o POL é simplesmente um problema de Matemática. Ou seja, existindo a opção de duas ou mais soluções ótimas a escolher para uma mesma matriz de insumo-produto, algumas considerações econômicas específicas



deveriam ser incluídas na formulação do POL, para que o CPLEX possa optar entre uma ou outra. Se isso não é feito, a decisão do CPLEX seria aleatória (vide Braga (2015)).

Para evitar a limitação descrita limitação acima, Kondo (2014) propõe a resolução de um POL generalizado que utiliza informações dos POLs resolvidos no passo anterior. Este POL generalizado envolve dois POLs encadeados, um para cada matriz, e envolve ainda algumas restrições adicionais. A função a ser otimizada, nesse caso, será diferente daquela expressa pela função (4), definida na formulação de um POL individual.

O POL generalizado é definido pela aplicação das restrições (1), (2) e (3), da seção II.1, respectivamente aos conjuntos “matriz-variáveis”  $\{\mathbf{M}^1, \mathbf{X}^1\}$  e  $\{\mathbf{M}^2, \mathbf{X}^2\}$ , de uma forma encadeada. Ou seja, os dois POLs são formulados em conjunto, um imediatamente após o outro. Feito isso, duas restrições adicionais são inseridas nessa formulação conjunta. A primeira impondo que o valor a ser obtido na triangulação da matriz  $\mathbf{M}^1$  deve ser igual a VALOR1. A segunda impondo que o valor da triangulação a ser obtida para a matriz  $\mathbf{M}^2$  deve ter VALOR2. Essas duas restrições são então:

$$(6) f^1(\mathbf{X}^1) = \text{VALOR1}$$

e

$$(7) f^2(\mathbf{X}^2) = \text{VALOR2}.$$

Finalmente nos resta agora definir qual deve ser a função a ser considerada para resolver essa formulação encadeada. Tal função é precisamente a forma de impor as informações econômicas que faltavam e será descrita a seguir.

Kondo (2014) impõe (vide Braga (2015)) que as triangulações a serem escolhidas para os dois POLs contidos na formulação acima, devem variar o mínimo possível entre si. Isso é feito impondo àquela formulação estendida a minimização da soma das diferenças das soluções correspondentes às variáveis  $\mathbf{X}^1$  e  $\mathbf{X}^2$ . Note que tanto em um caso quanto no outro, as restrições (6) e (7) forcem a que essas soluções sejam respectivamente uma das múltiplas soluções ótimas eventualmente existentes para cada POL, quando resolvidos individualmente. Ou seja, Kondo impõe que devemos minimizar a soma dos módulos  $|x^1_{ij} - x^2_{ij}|$ , para todo par  $i$  e  $j$  de  $N$ . Chamando de  $g(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2)$  a essa função, vamos querer então minimizar  $g(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2)$  sujeito ao atendimento de todas as restrições que acabamos de descrever.

O MKG, proposto por Braga (2015), generaliza o modelo de triangulação proposto por Kondo (2014) ao estendê-lo para um número de matrizes maior que 2. Tem-se então que  $T = \{1, 2, \dots, q\}$  e queremos triangular simultaneamente  $q$  matrizes de insumo-produto  $M^t$ , definidas para todo  $t$  pertencente a  $T$ . Como sugerido por Kondo, num primeiro passo triangula-se separadamente cada matriz  $M^t$ , para obter uma triangulação ótima correspondente de valor  $VALOR_t$ . Feito isso, numa segunda etapa, um POL generalizado é formulado contendo  $q$  POLs encadeados, um para cada  $t$  pertencente a  $T$ , de maneira similar ao que foi feito por Kondo (2014) para apenas duas matrizes. No MKG o que se procura minimizar é a soma das diferenças entre todos os pares de ordenações obtidas.

## CAPÍTULO 3 – RESULTADOS E CONCLUSÕES

Descrevemos neste capítulo os resultados obtidos com a triangulação de matrizes de insumo-produto brasileiras e chinesas disponibilizadas pelo WIOD (2017) e relativas aos anos de 2000 até 2014. Estas matrizes foram elaboradas seguindo uma mesma metodologia, contêm os mesmos 56 setores e têm coeficientes expressos em bilhões de dólares americanos.

Os setores contidos em cada matriz são descritos na Tabela 1. Para todas as matrizes consideradas, tanto brasileiras quanto chinesas, os setores 55 e 56, respectivamente “Activities of households as employers; undifferentiated goods-and services-producing activities of households for own use” e “Activities of extraterritorial organizations and bodies”, têm linhas e colunas contendo apenas coeficientes de valor 0. Foram então eliminados da análise, sem maiores consequências. Assim procedendo, as matrizes consideradas ficaram então reduzidas a 54 setores.

Apresentamos nas Figuras 1 e 2 os gráficos associados aos graus de linearidade obtidos respectivamente para as matrizes brasileiras e chinesas. Estes foram obtidos, nos dois casos, resolvendo o POL correspondente a cada matriz considerada. Apresentamos também, na Figura 3, os dois gráficos anteriores em conjunto.

Para as matrizes brasileiras, os graus de linearidade obtidos aumentam ao longo dos anos de 2002 a 2004, que correspondem aos dois últimos anos do governo de Fernando Henrique Cardoso e ao primeiro ano do primeiro governo Lula. Um aumento do grau de linearidade indicaria uma piora na estrutura de produção industrial da economia brasileira. Dos anos de 2005 a 2011, observa-se uma queda do mesmo, o que indicaria uma melhora na estrutura de produção industrial da economia brasileira ao longo dos três últimos anos do primeiro governo Lula, de todo o segundo governo Lula, e do início do primeiro governo Dilma. De 2012 a 2014, observa-se um aumento no grau de linearidade, o que indicaria uma piora na estrutura de produção industrial brasileira ao longo dos três últimos anos do primeiro governo Dilma. Ou seja, a informação expressa por esse índice parece ser coerente.

Setor	Referência
Crop and animal production, hunting and related service activities	Setor 1
Forestry and logging	Setor 2
Fishing and aquaculture	Setor 3
Mining and quarrying	Setor 4
Manufacture of food products, beverages and tobacco products	Setor 5
Manufacture of textiles, wearing apparel and leather products	Setor 6
Manufacture of wood and of products of wood and cork, except furniture; manufacture of articles of straw and plaiting materials	Setor 7
Manufacture of paper and paper products	Setor 8
Printing and reproduction of recorded media	Setor 9
Manufacture of coke and refined petroleum products	Setor 10
Manufacture of chemicals and chemical products	Setor 11
Manufacture of basic pharmaceutical products and pharmaceutical preparations	Setor 12
Manufacture of rubber and plastic products	Setor 13
Manufacture of other non-metallic mineral products	Setor 14
Manufacture of basic metals	Setor 15
Manufacture of fabricated metal products, except machinery and equipment	Setor 16
Manufacture of computer, electronic and optical products	Setor 17
Manufacture of electrical equipment	Setor 18
Manufacture of machinery and equipment n.e.c.	Setor 19
Manufacture of motor vehicles, trailers and semi-trailers	Setor 20
Manufacture of other transport equipment	Setor 21
Manufacture of furniture; other manufacturing	Setor 22
Repair and installation of machinery and equipment	Setor 23
Electricity, gas, steam and air conditioning supply	Setor 24
Water collection, treatment and supply	Setor 25
Sewerage; waste collection, treatment and disposal activities; materials recovery; remediation activities and other waste management services	Setor 26
Construction	Setor 27
Wholesale and retail trade and repair of motor vehicles and motorcycles	Setor 28
Wholesale trade, except of motor vehicles and motorcycles	Setor 29
Retail trade, except of motor vehicles and motorcycles	Setor 30
Land transport and transport via pipelines	Setor 31
Water transport	Setor 32
Air transport	Setor 33
Warehousing and support activities for transportation	Setor 34
Postal and courier activities	Setor 35
Accommodation and food service activities	Setor 36
Publishing activities	Setor 37
Motion picture, video and television programme production, sound recording and music publishing activities; programming and broadcasting activities	Setor 38
Telecommunications	Setor 39
Computer programming, consultancy and related activities; information service activities	Setor 40
Financial service activities, except insurance and pension funding	Setor 41
Insurance, reinsurance and pension funding, except compulsory social security	Setor 42
Activities auxiliary to financial services and insurance activities	Setor 43
Real estate activities	Setor 44
Legal and accounting activities; activities of head offices; management consultancy activities	Setor 45
Architectural and engineering activities; technical testing and analysis	Setor 46
Scientific research and development	Setor 47
Advertising and market research	Setor 48
Other professional, scientific and technical activities; veterinary activities	Setor 49
Administrative and support service activities	Setor 50
Public administration and defence; compulsory social security	Setor 51
Education	Setor 52
Human health and social work activities	Setor 53
Other service activities	Setor 54

Tabela 1: Setores econômicos considerados.

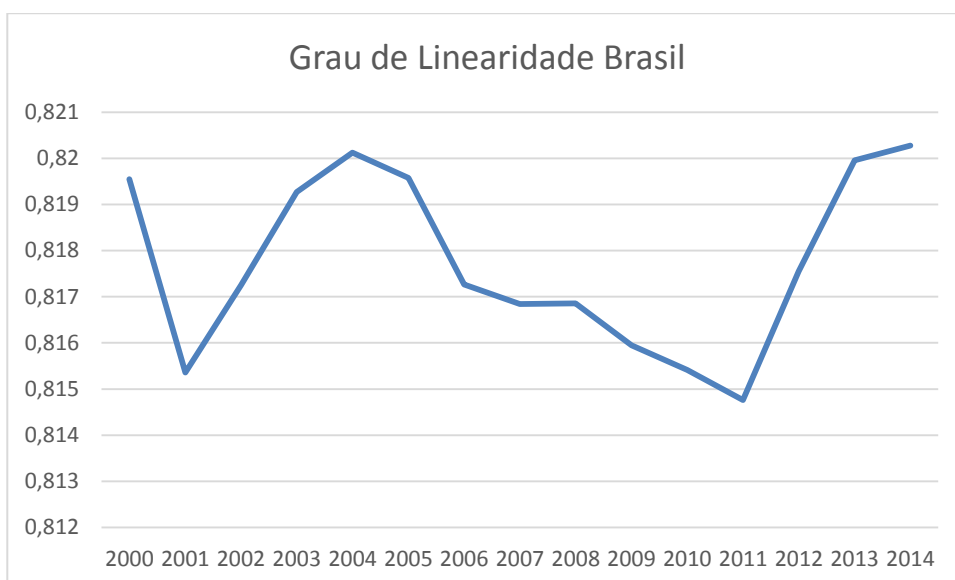


Figura 1: Graus de linearidade para a economia brasileira entre 2000 e 2014.

Para as matrizes chinesas, no entanto, os graus de linearidade são incoerentes, com uma indicação de piora na estrutura de produção industrial da economia chinesa, o que não faz sentido. De fato, era de se esperar o contrário, para uma economia que tanto cresceu e se sofisticou ao longo do período de tempo analisado.

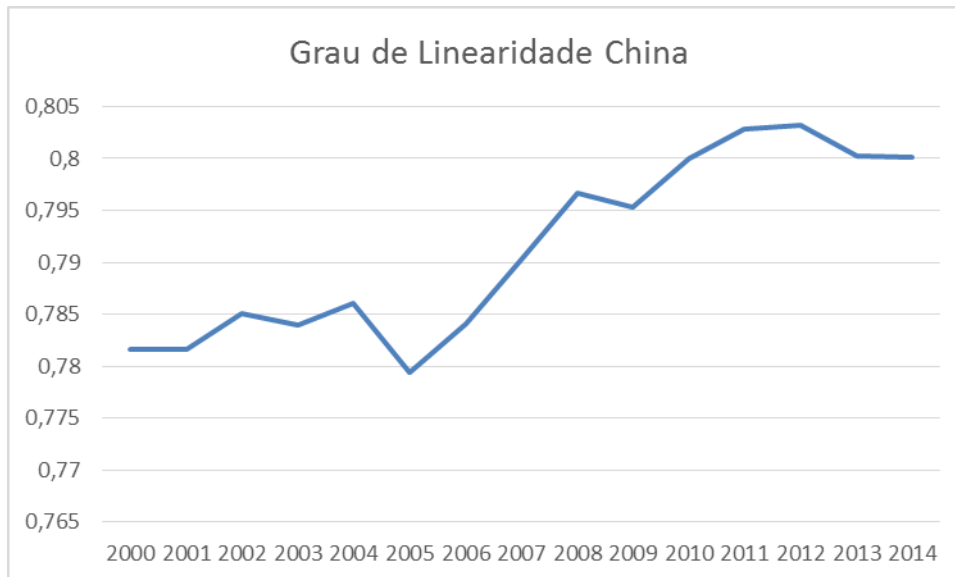


Figura 1: Graus de linearidade para a economia chinesa entre 2000 e 2014.

Numa tentativa de melhor entender a aparente inadequação do grau de linearidade como um instrumento para avaliar tendências estruturais da economia chinesa, vamos nos concentrar numa diferença básica entre as economias brasileira e chinesa. Em termos da utilização de insumos provenientes de setores econômicos estrangeiros, em sua produção industrial, a

economia brasileira é muito mais fechada que a economia chinesa. No caso da economia chinesa, porções significativas de certos setores econômicos de outros países funcionariam quase como “setores cativos da economia nacional chinesa”. Isso certamente não ocorre com a economia brasileira, que possui uma estrutura de produção industrial mais próxima daquela que prevalecia entre as economias nacionais, até a década de 1970. Especulamos que, para esse tipo de economia, o grau de linearidade continuaria sendo um bom índice para identificar tendências estruturais. Para uma economia industrialmente mais aberta, como a chinesa, o conceito de economia nacional teria que ser de alguma forma estendido, como sugerido acima, para que o índice passasse a fazer sentido. Isso possivelmente envolveria, para efeito do cálculo do grau de linearidade, da “incorporação parcial” de certos setores industriais estrangeiros, altamente dependentes da economia chinesa, à mesma.

Os resultados obtidos com a triangulação das matrizes brasileiras e chinesas, através do MGK, são apresentados nos Diagramas de Migração de Setores (Figuras 4 e 5, abaixo). As ordenações descritas em cada tabela são identificadas pelos anos aos quais se referem. Para cada um dos 54 setores considerados, são indicadas suas posições, ano-a-ano, nas ordenações. Percorrendo-se uma linha qualquer dos diagramas, é possível observar a forma como seu setor correspondente variou de posição ao longo dos 15 anos considerados.

O diagrama de migrações correspondente à economia brasileira é muito mais comportado que o da economia chinesa. Isso, por si só, serviria como uma indicação de que a estrutura de produção industrial chinesa passou por transformações muito mais intensas que a brasileira. Pode-se, no entanto, observar de 2010 em diante uma tendência à estabilidade, nos dois casos. Acreditamos que uma análise mais detalhada das informações contidas nos dois diagramas pode trazer a toma informações valiosas.

Diagrama de migração de setores brasileiro

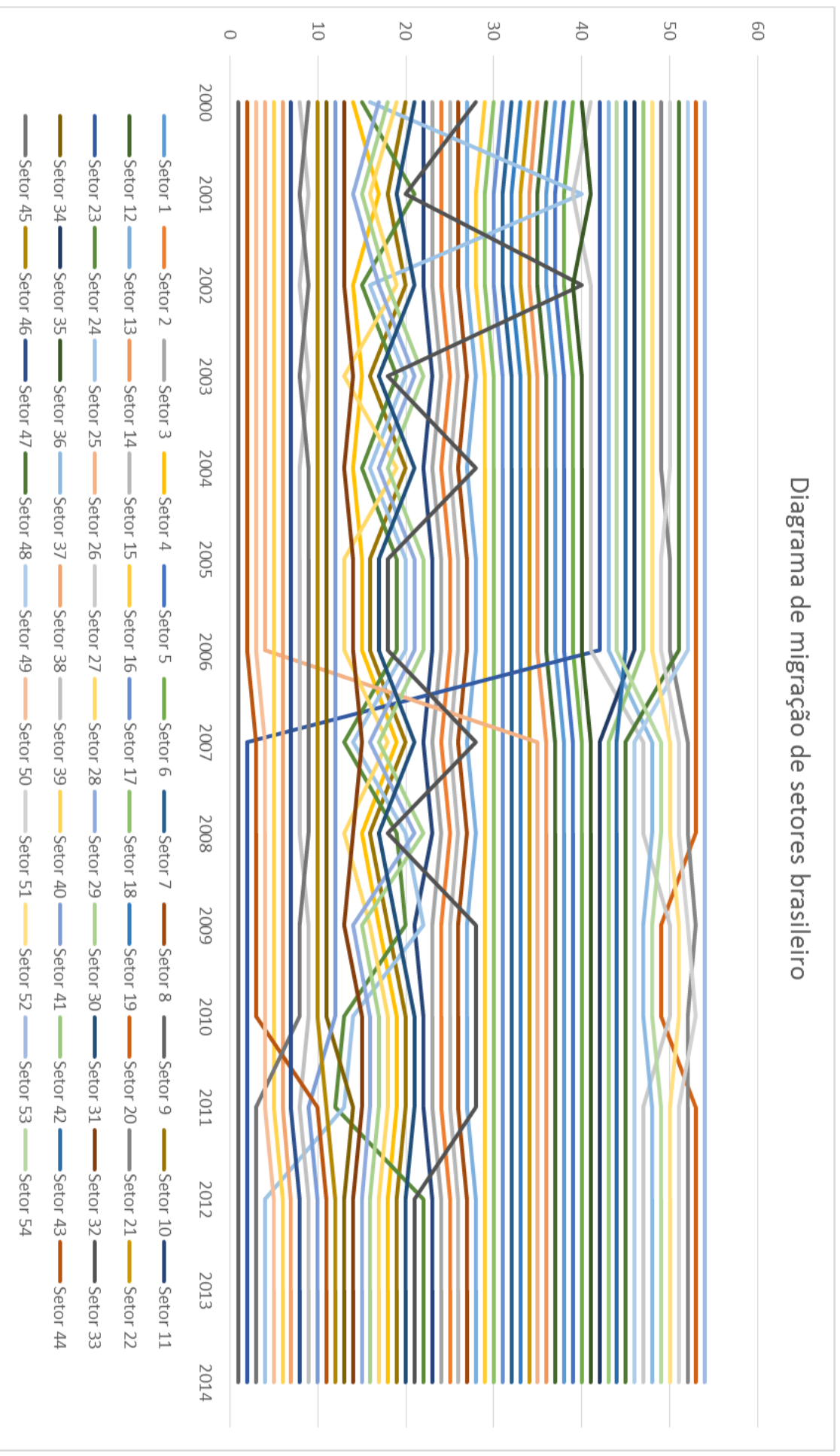
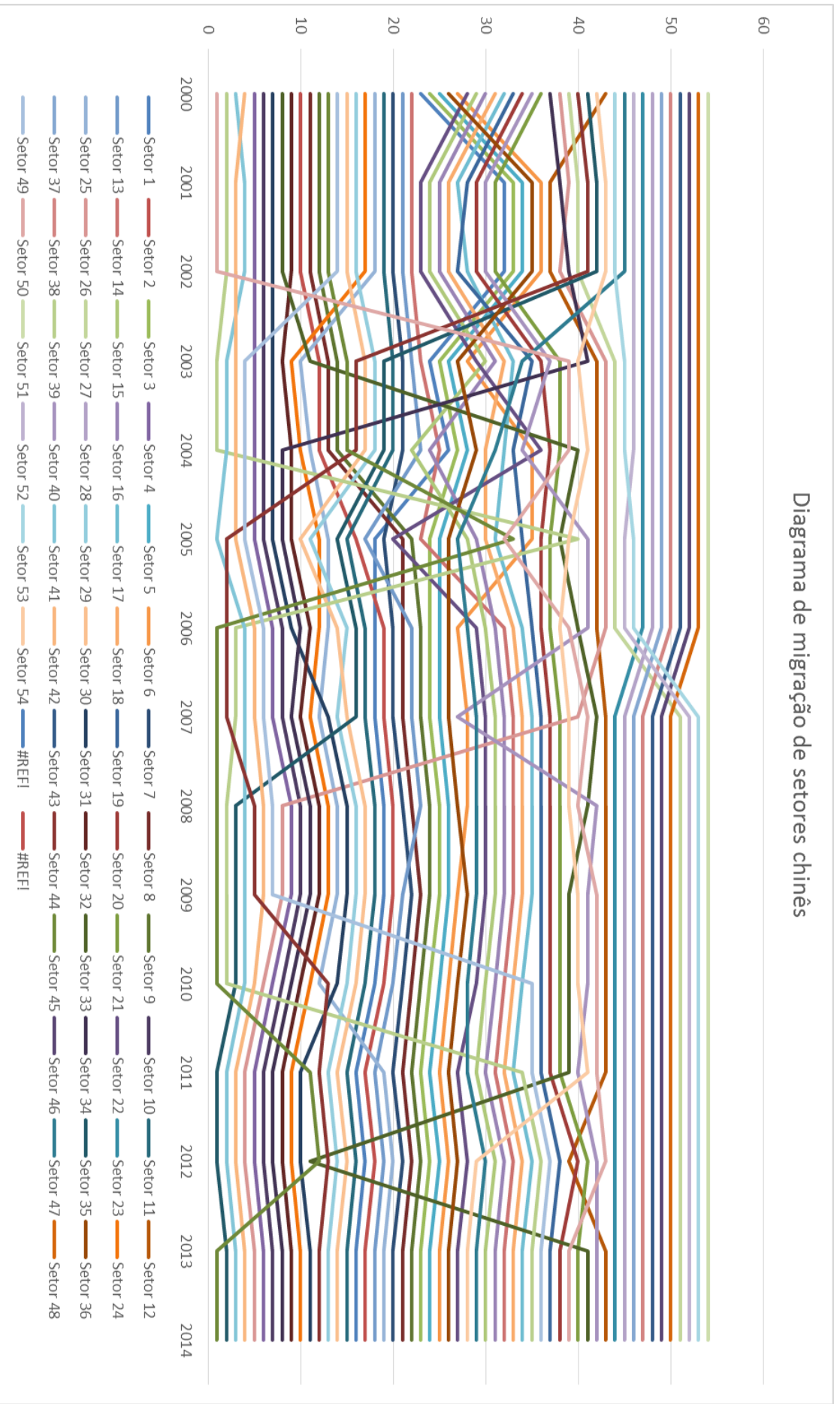


Diagrama de migração de setores chinês





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRAGA, Diogo Bravo Marinho. Aplicações de Otimização Inteira e Combinatória à Análise de Insumo-Produto. 2015. 87 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) – Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE-UFRJ. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CHENERY, R., WATANABE, T. International Comparisons of the Structure of Production. *Econometrica*, v. 26, p. 487-521, 1958.

GROTSCHHEL, M., JUNGER, M., REINELT, G. A Cutting Plane Algorithm for the Linear Ordering Problem. *Operations Research*, v. 32, p. 1195-1220, 1984.

KONDO, Y. Triangulation of Input-Output Tables Based on Mixed Integer Programs for Inter-temporal and Inter-regional Comparison of Production Structures. *Journal of Economic Structures*, v. 3. n.2, p. 1-19, 2014.

LEONTIEF, W. Quantitative Input-Output Relations in the Economic Systems of the United States. *Rev. Econ. Statist.*, v. 18, p. 105-125, 1936.

LEONTIEF, W. The structure of development. *Scientific American*, v. 209, n. 3, p. 148-166, 1963.

SIMPSON, D., TSUKUI, J. The fundamental structure of Input-Output Tables. An International Comparison. *The Review of Economics and Statistics*, v. 47, n. 4, p. 434-446, 1965.

WIOD. World Input-Output Database, <http://www.wiod.org/home>, acesso em: 26 de maio de 2017.