

SUPERFÍCIES SINGULARES E ONDAS DE ACELERAÇÃO EM MISTURAS

Antonio Santos Silva



TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN-
ÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:

Rubens Sampaio Filho
Prof. Rubens Sampaio Filho
Presidente

I-Shih Liu
Prof. I-Shih Liu

Antonio Santos Vargas
Prof. Antonio Santos Vargas

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 1979

À minha mãe

María Antonina Santos Silva

SILVA, ANTONIO SANTOS

Superfícies singulares e ondas de aceleração
em misturas [Rio de Janeiro] 1979.

IX, 90p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenha-
ria Química, 1979)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Programa
de Engenharia Química

I. Propagação de ondas I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

i

R E S U M O

A finalidade desse trabalho é estudar superfícies singulares e ondas em misturas.

Estuda-se movimento de superfícies e apresenta-se uma definição bem motivada de derivada-deslocamento.

Inicialmente definem-se superfícies singulares num corpo único escrevendo-se as condições de compatibilidade obtidas de forma simples e intrínseca. Depois estende-se o estudo para misturas e fazem-se duas aplicações para o caso de ondas de aceleração em misturas binárias de constituintes inertes em temperatura comum: cálculo das velocidades local de propagação para uma mistura de um sólido rígido e um fluido não viscoso e uma mistura de um sólido elástico e um fluido não viscoso.

ABSTRACT

The aim of this work is to study singular surfaces and waves in mixtures.

Surface motion is studied and a well motivated definition of displacement derivative is presented.

First, singular surfaces for a single body are defined and the compatibility conditions are obtained in a way that is direct and intrinsic. After, the study is extended for mixtures and two applications are worked for acceleration waves in binary mixtures of inert constituents with common temperature: computation of the local velocities of propagation for a mixture of a rigid solid and a non viscous fluid and a mixture of an elastic solid and a non viscous fluid.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Rubens Sampaio Filho pela eficiente orientação.

Ao Professor I-Shih Liu pelas sugestões dadas.

Aos Professores, colegas e funcionários da COPPE/UFRJ pela amizade, que me fizeram sentir como se estivesse em casa.

Aos meus colegas da Universidade Federal de Sergipe pela oportunidade a mim concedida de vir fazer esse Mestrado.

Ao apoio financeiro dado pela Universidade Federal de Sergipe através do PICD/CAPES.

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização desse trabalho.

E, finalmente, a Maria de Lourdes de Almeida pela primorosa datilografia que decerto valorizou o meu trabalho.

I N D I C E

	PG.
CAPITULO I - Introdução	1
CAPITULO II - Noções de Mecânica do contínuo para corpo único	4
1. Corpo, movimento e deformação	4
2. Elementos básicos	7
3. Equações dos balanços	10
CAPITULO III - Superfícies singulares - ondas	13
4. Movimento de superfícies	13
4.1. Velocidade de deslocamento e movimento normal	13
4.2. Derivada deslocamento	17
5. Superfícies singulares	19
5.1. Condições de compatibilidade geométrica	20
5.2. Condições de compatibilidade cinemática	23
5.3. O teorema de Maxwell. Condi- ções de Hugoniot	24
6. Superfícies singulares associadas com um movimento	27
6.1. Representação referencial (ma- terial)	27
6.2. Velocidade local de propagação	31
6.3. Condições de compatibilidade dinâmica	33
6.4. Classificação de superfícies singulares: ondas	34
CAPITULO IV - Noções de mecânica do contínuo para misturas	37
7. Teoria básica	37

	pg.
8. Equações dos balanços	41
8.1. Constituinte α	41
8.2. Mistura	42
8.3. Mistura binária	45
CAPITULO V - Superfícies singulares em misturas ondas de aceleração	48
9. Superfícies singulares em misturas	48
10. Ondas de aceleração em misturas	51
10.1. Classificação de superfícies singulares em misturas. Ondas em misturas	51
10.2. Elementos básicos para uma on da de aceleração numa mistura	53
CAPITULO VI - Aplicações à misturas binárias	59
11. Mistura de um sólido rígido e um fluido não viscoso	60
11.1. Definição e análise constitui va para a mistura	60
11.2. Ondas de aceleração: veloci dades local de propagação	64
12. Mistura de um sólido elástico e um fluido não viscoso	67
12.1. Definição e análise constitui va para a mistura	67
12.2. Ondas de aceleração: veloci dades local de propagação	70
APÊNDICE	
1. Tensores de segunda ordem	75
2. Tensores de ordem maior do que dois	80
2.1. Tensores de terceira ordem	80
2.2. Tensores de ordem maior que três	82

	pg.
3. Diferenciação	83
4. Salto, descontinuidade: lema de Hadamard	86

BIBLIOGRAFIA

89

CAPÍTULO IINTRODUÇÃO

Na física do contínuo a palavra onda engloba uma grande classe de fenômenos. Qualquer perturbação que se propaga com velocidade finita através de um meio pode ser considerada como uma onda.

As leis de propagação de ondas estão relacionadas com a natureza da resposta de cada meio contínuo. Elas mostram como o material reage, localmente e instantaneamente, a uma pequena mudança ou impulso numa região delgada. Como a resposta de um contínuo geralmente é descrita por um conjunto de equações diferenciais parciais não lineares, a composição dos pequenos e feitos para um movimento do corpo como um todo é um problema árduo e difícil. Por isso, vários caminhos diferentes são estudados para aproximar um movimento de onda. No comum desses, é usada a teoria das pequenas perturbações, deformações ou oscilações: desprezamos os termos não lineares das equações diferenciais do movimento para produzir um sistema linear que pode ser visualizado como um conjunto de osciladores harmônicos cujos movimentos já estão bem caracterizados. Outro caminho usado é aquele baseado nas idéias de HUGONIOT (1885) que desenvolveu um conceito diferente de propagação: a perturbação é confinada, rigorosamente, numa região de volume nulo (superfície), mas a

mesma pode ser de qualquer intensidade. A teoria matemática resultante do método de Hugoniot, teoria de superfícies singulares, é exata. Fora o rigor, a diferença em conceito é grande. No método das pequenas deformações as superfícies de perturbação, frentes de onda, são supostas terem formas especiais, planas, cilíndricas, ou esféricas e a onda se propaga numa região de repouso ou velocidade constante. Enquanto que o método de superfícies singulares admite que a descontinuidade encerra-se numa superfície de forma qualquer e a condição do material pode também ser qualquer.

O método de Hugoniot foi desenvolvido por HADAMARD (1903) no seu grande tratado sobre movimento de ondas em materiais elásticos. Após Hadamard, durante um período de 50 anos, não houve progresso significativo no estudo de ondas em elasticidade não linear. Com um trabalho sobre ondas em materiais elásticos isotrópicos e incompressíveis, ERICKSEN (1953) reviveu novamente o interesse. Depois veio THOMAS (1957) com um trabalho sobre superfícies singulares e em particular derivada do deslocamento. E assim, com o uso da derivada do deslocamento e da física do contínuo a teoria sofreu um grande desenvolvimento até o ponto de COLEMAN, CURTIN e seus colaboradores publicarem um trabalho sobre ondas em materiais com memória.

Com a teoria de superfícies singulares já bastante desenvolvida para corpo único, alguns pesquisadores começaram a estudar propagação de ondas em misturas, como é o caso do BOWEN que usa uma teoria linear. Em misturas o problema é mais complicado: o fenômeno na mistura como um todo pode ser analisado

através do estudo entre os constituintes de acordo com a teoria de misturas.

Nesse trabalho, é desenvolvida uma teoria básica de superfícies singulares e ondas em misturas e o nosso maior objetivo é o estudo de ondas de aceleração em misturas.

Os elementos de mecânica do contínuo para corpo único necessários ao desenvolvimento desse trabalho, são apresentados no Capítulo II.

No Capítulo III, é feito um estudo de movimento de superfícies, derivada deslocamento, superfícies singulares, condições de compatibilidade e ondas.

A teoria básica de misturas é desenvolvida no Capítulo IV.

A aplicação da teoria do Capítulo III em misturas é feita no Capítulo V e em particular ondas de aceleração são estudadas.

Duas aplicações são feitas no Capítulo VI em relação ao cálculo de velocidades local de propagação: mistura de um sólido rígido e um fluido não viscoso e mistura de um sólido elástico e um fluido não viscoso.

Finalmente, os elementos de matemática necessários podem ser encontrados no Apêndice (Ap.).

CAPÍTULO IINOCÕES DE MECÂNICA DO CONTÍNUO PARACORPO ÚNICO1. CORPO, MOVIMENTO E DEFORMAÇÃO

Seja ξ o espaço Euclidiano pontual tri-dimensional.

Um corpo β [1,2,3,4,5] é uma variedade tri-dimensional. Cada região ocupada por β em ξ é chamada uma configuração de β . Designando por P uma partícula de β , cada configuração $\kappa(\beta)$ de β é caracterizada pelo homeomorfismo

$$\kappa : \beta \rightarrow \xi$$

definido por

$$X = \kappa(P), \tag{II.0}$$

onde X é a posição ocupada por P na região $\kappa(\beta)$ de ξ . A inversa de κ , denotada por $\underline{\kappa}^{-1}$, é definida pela relação

$$P = \underline{\kappa}^{-1}(X) \tag{II.1}$$

Representando por I_1 um intervalo da reta real, um movimento do corpo β é uma família uni-paramétrica de configurações $\Lambda(\cdot, t)$,

$$\Lambda : \beta \times I_1 \rightarrow \xi,$$

satisfazendo a relação

$$x = \Lambda(P, t), \quad (\text{II.2})$$

onde t é um parâmetro real interpretado como tempo e x é a posição ocupada pela partícula P em ξ no instante t . Como cada configuração é um homeomorfismo de β sobre uma região de ξ , então a função $\Lambda(\cdot, t)$ é inversível para cada instante t . Representando a inversa de $\Lambda(\cdot, t)$, para cada instante t , por $\underline{\Lambda}^{-1}(\cdot, t)$, escrevemos:

$$P = \underline{\Lambda}^{-1}(x, t) \quad (\text{II.3})$$

Por (II.2) e (II.3), para cada tempo fixado temos uma configuração do corpo β . Se todas configurações são comparadas com uma configuração pré-estabelecida, então a mesma é chamada configuração de referência. Qualquer configuração do corpo β pode ser de referência. Seja κ a configuração de referência do corpo β , escolhida como aquela no instante $t = t_0$. Então, de (II.0), (II.1), (II.2) e (II.3), vem que

$$\kappa(\cdot) = \Lambda(\cdot, t_0) \quad (\text{II.4})$$

$$\underline{\kappa}^{-1}(\cdot) = \underline{\Lambda}^{-1}(\cdot, t_0)$$

e X é a posição ocupada por P na configuração de referência κ . De (II.1) e (II.2), obtemos:

$$x = \Lambda(\underline{\kappa}^{-1}(X), t) \equiv \Lambda_0 \underline{\kappa}^{-1}(X, t) \quad (\text{II.5})$$

A deformação χ , relativa a configuração de referência κ , é a função

$$\chi \equiv \Lambda_0 \underline{\kappa}^{-1} : \kappa(\beta) \times I_1 \rightarrow \xi$$

Assim, por (II.5), o movimento do corpo β pode ser descrito por

$$x = \chi(X, t) \quad (\text{II.6})$$

que depende da configuração de referência κ . De imediato, usando (II.4) e (II.5), segue que

$$\chi(X, t_0) = \kappa_0 \underline{\kappa}^{-1}(X, t_0) = X \quad (\text{II.7})$$

É fácil ver que $\chi(\cdot, t)$ é inversível para cada instante t . Escrevendo $\chi^{-1}(\cdot, t)$ para a inversa de $\chi(\cdot, t)$ em cada tempo t , temos:

$$X = \chi^{-1}(x, t) \quad (\text{II.8})$$

Seja ϕ qualquer função definida num sub-conjunto do espaço produto $\xi \times (-\infty, \infty)$ com valores escalares, vetoriais, ou tensoriais e suponhamos que ϕ contenha em seu domínio, para cada tempo t , o espaço produto $\kappa(\beta) \times I_1$. Chamamos $\phi(X, t)$ uma descrição referencial e $\phi(x, t)$ uma descrição espacial. Como cada partícula P de β é identificada pela sua posição X na configuração de referência κ , usaremos sem despertar confusão a expressão "partícula X " e $\phi(X, t)$ também será chamada uma descrição material.

As funções χ , χ^{-1} e ϕ serão supostas suficientemente suaves.

2. ELEMENTOS BÁSICOS

A derivada espacial em relação ao tempo do campo ϕ será representada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{x=\text{constante}} \quad (\text{II.9})$$

Para as derivadas material em relação ao tempo, usaremos as notações:

$$\dot{\phi} \equiv \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{X=\text{constante}} \quad (\text{II.10})$$

$$\ddot{\phi} \equiv \left. \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial t} \right|_{X=\text{constante}},$$

e assim por diante. Os operadores divergente e gradiente tomados na configuração de referência serão convencionados por Div e Grad (em relação a X), respectivamente, e na configuração espacial (descrição) por div e grad (em relação a x). As derivadas do movimento

$$V \equiv \dot{x}$$

e

$$\dot{V} \equiv \ddot{x}$$

(II.11)

são, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula

χ no instante t . O tensor gradiente de deformação F é dado por

$$F \equiv \text{Grad } \chi \quad (\text{II.12})$$

Como $\chi(\cdot, t)$ foi suposta um difeomorfismo para cada instante t , então $F(\cdot, t)$, para cada tempo t , admite um inverso denotado por $F^{-1}(\cdot, t)$, e

$$F^{-1} \equiv \text{grad } \chi^{-1}, \quad (\text{II.13})$$

com a condição

$$FF^{-1} = F^{-1}F = \underline{1},$$

onde $\underline{1}$ é o tensor identidade de linv (Ap. 4). Em relação ao campo vetorial V , definimos o tensor gradiente de velocidade L ,

$$L \equiv \text{grad } V, \quad (\text{II.14})$$

que pode ser decomposto, de modo único, como segue (Ap. 7):

$$L = D + W, \quad (\text{II.15})$$

onde

$$D = \frac{L + L^t}{2} \quad (\text{II.16})$$

e

$$W = \frac{L - L^t}{2}$$

são, respectivamente, as partes simétricas e anti-simétricas de L . Usando (II.10)₁, (II.6), (II.11)₁, (II.12), (II.14) e a regra da cadeia, temos que:

$$\dot{F} = \text{Grad } V = LF$$

ou

(II.17)

$$L = \dot{F}F^{-1}$$

Quando $\phi = \gamma$ é um campo escalar, podemos escrever (Ap.

23):

$$\text{Grad } \gamma = F^t \text{ grad } \gamma$$

(II.18)

$$F^{-t} \text{ Grad } \gamma = \text{grad } \gamma$$

Se o campo escalar γ tem valores $\gamma(x,t)$, então o uso de (II.11)₁

e a regra da cadeia em (II.9) e (II.10) produzem, (Ap. 21) e

(Ap. 23)₁:

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{grad } \gamma \cdot V$$

(II.19)

Através de (II.18)₂ e (II.19), escrevemos, (Ap. 5) e (Ap. 6):

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{Grad } \gamma \cdot (F^{-1}V)$$

(II.20)

Agora, consideremos o caso em que $\phi = \psi$ é um campo vetorial, ou tensorial. Seja Π um vetor, ou tensor, arbitrário e constante.

Fazendo

$$\gamma = \psi \cdot \Pi$$

(II.21)

em (II.19) e (II.20), e usando o fato que Π é arbitrário, (Ap.

20), (Ap. 25) e (Ap. 26), vem que:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{grad } \psi)V, \quad (\text{II.22})$$

se ψ está na descrição espacial

$$e \quad \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{Grad } \psi)(F^{-1}V). \quad (\text{II.23})$$

O tensor F , definido por (II.12), apresenta uma propriedade bem interessante, que será usada mais adiante, baseada em (II.7):

$$F(X, t_0) = \underline{1}, \quad (\text{II.24})$$

ou seja, se o instante atual (configuração presente) é escolhido como o de referência, então

$$\text{Grad} = \text{grad} \quad (\text{II.25})$$

3. EQUAÇÕES DOS BALANÇOS

Sejam ρ a densidade (massa específica) do corpo β e ρ_K a densidade na configuração de referência (lembrar que $\dot{\rho}_K = 0$). Para o balanço de massa [1,2,3,4,5] escrevemos

$$\rho_K = \rho \det F \quad (\text{II.26})$$

Como, (Ap. 12), (Ap. 21), (Ap. 22) e (Ap. 24),

$$\frac{\dot{\rho}_K}{\det F} = (\det F) \text{tr}(\dot{F}F^{-1})$$

$$e \quad \operatorname{div} V = \operatorname{tr}(L) = \operatorname{tr}(FF^{-1}),$$

então (II.26) produz a equação da continuidade

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} V = 0 \quad (\text{II.27})$$

que, através de (II.19), (Ap. 27), ainda pode ser escrita

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0$$

Do balanço de momentum linear, obtemos a equação do movimento

$$\rho \dot{V} = \operatorname{div} T + \rho f, \quad (\text{II.28})$$

onde T é o tensor tensão, f é a força de campo por unidade de massa exercida sobre o corpo β pelo mundo exterior. O balanço de momentum angular fornece a condição de simetria

$$T = T^t \quad (\text{II.29})$$

A equação da energia, obtida pelo balanço de energia, pode ser escrita na forma

$$\dot{e} = \operatorname{div} h + \operatorname{tr}(TL) + \rho r, \quad (\text{II.30})$$

onde e é a energia interna por unidade de massa, h é o vetor fluxo de calor e r é o calor por unidade de massa absorvido por β . Observe que (Ap. 9):

$$\operatorname{tr}(TL) = T \cdot L^t = L \cdot T^t = T \cdot L = T \cdot D$$

O crescimento de entropia será dado pela desigualdade de Clau-

sius-Duhem

$$\rho \dot{\eta} \geq - \operatorname{div} \left(\frac{h}{\theta} \right) + \rho \frac{r}{\theta}, \quad (\text{II.31})$$

onde η é a entropia por unidade de massa (entropia específica) e θ é a temperatura absoluta ($\theta > 0$). A energia livre de Helmholtz A por unidade de massa é definida por:

$$A = e - \theta \eta \quad (\text{II.32})$$

Eliminando r entre (II.30) e (II.31), e usando (II.32), obtemos, (Ap. 26) e (Ap. 27):

$$\rho \dot{A} + \rho \eta \dot{\theta} - \text{T.L} + \frac{h \cdot \operatorname{grad} \theta}{\theta} \leq 0, \quad (\text{II.33})$$

que é uma forma mais apropriada de (II.31) para explorar equações constitutivas.

CAPÍTULO IIISUPERFÍCIES SINGULARES - ONDAS

Como já frisamos, na física do contínuo a palavra onda é usada com vários significados. Para alguns, uma onda é uma perturbação senoidal. Para outros, uma onda é qualquer membro de uma certa classe de soluções de uma equação diferencial hiperbólica. Nesse trabalho, definiremos uma onda como sendo uma superfície singular propagante (frente de onda como uma superfície singular), seguindo as idéias de CHRISTOFFEL, HUYGONIOT, HADAMARD e DUHEM. Tal definição requer o estudo de movimento de superfícies, derivada deslocamento e superfícies singulares, como veremos nesse capítulo.

4. MOVIMENTO DE SUPERFÍCIES4.1. Velocidade de deslocamento e movimento normal

Seja H uma função suave definida num sub-conjunto do espaço produto $\xi \times (-\infty, \infty)$ com valores reais, e consideremos o parâmetro real t_0 fixo. O lugar geométrico das posições x de ξ satisfazendo

$$H(x, t_0) = 0$$

é uma superfície S . Supondo que $\text{grad } H \neq 0$, o vetor unitário n normal a superfície S , em cada ponto de S , é dado por, (Ap. 0),:

$$n = \frac{\text{grad } H}{\|\text{grad } H\|} \quad (\text{III.0})$$

A condição $\text{grad } H \neq 0$ permite representar S na forma paramétrica [5,6,7]

$$x = \hat{x}(\omega^1, \omega^2, t_0),$$

onde os parâmetros ω^1 e ω^2 são coordenadas curvilíneas da superfície S (coordenadas superficiais). A interseção das curvas independentes $\omega^i = \text{constante}$ ($i=1,2$) sobre S determina um ponto de S . Daí, o par (ω^1, ω^2) representa um ponto de S , chamado ponto superfície.

Os vetores $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i}$ ($i=1,2$) são tangentes a S e linearmente independentes. Então, eles geram qualquer vetor tangente a S , e o conjunto

$$\left\{ \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1}(x), \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2}(x), n(x) \right\} \quad (\text{III.1})$$

forma uma base em ξ para todo x sobre S .

O movimento da superfície S pode ser definido como uma família uni-paramétrica de superfícies $S(t)$ determinada pela relação

$$H(x, t) = 0 \quad (\text{III.2})$$

ou pela forma paramétrica

$$x = \tilde{x}(\omega^1, \omega^2, t) \quad (\text{III.3})$$

A representação (III.3) descreve bem o movimento de S: ela dá a posição x ocupada pelo ponto superfície (ω^1, ω^2) em ξ no instante t . A velocidade u de um ponto superfície (velocidade da superfície S) é definida por

$$u = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} \quad (\text{III.4})$$

Usando a base (III.1), o vetor u pode ser escrito na forma

$$u = d_i \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i} + d_3 n, \quad (\text{soma em } i)$$

onde d_1, d_2 e d_3 são escalares e sempre trabalharemos com $i = 1, 2$. De imediato temos que $d_3 = u \cdot n$, e escrevemos para u

$$u = d_i \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i} + (u \cdot n)n \quad (\text{III.5})$$

A equação (III.5) mostra que em cada ponto de S, para cada parametrização, o vetor velocidade u pode ser decomposto, de modo único, num componente normal $(u \cdot n)n$ (componente de u na direção de n) e noutro tangencial $d_i \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i}$ (componente de u numa direção perpendicular a n). Assim, podemos analisar o movimento de S através de (III.5) e uma superfície de referência $S(t_0)$ fixada no instante $t = t_0$ como segue: se $u \cdot n = 0$ e $d_i \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i} \neq 0$, um ponto de $S(t_0)$ se move de uma posição sobre $S(t_0)$ para uma outra posição sobre $S(t_0)$, mas a superfície S não se desloca em relação a $S(t_0)$. Nesse sentido, o movimento que realmente provoca

o deslocamento da superfície S é aquele na direção do vetor unitário n normal a S . Por esse motivo, a quantidade u_n dada por

$$u_n = u \cdot n \quad (\text{III.6})$$

é chamada de velocidade de deslocamento da superfície S (que é a medida da velocidade com que a superfície S atravessa o espaço) e condições são estudadas para que o movimento de S seja normal (movimento na direção de n) [5]. Se o movimento de S é normal, temos que $u = (u \cdot n)n = u_n n$, e nesse caso u é chamada de velocidade normal de S . Como os vetores $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^i}$ são linearmente independentes, então, por (III.5), o movimento de S é normal se, e somente se, $d_i = 0$. Mais adiante daremos significado aos d_i e interpretação para $d_i = 0$.

Diferenciando (III.2) em relação ao tempo e usando a regra da cadeia em relação a (III.3), obtemos, (Ap. 21) e (Ap. 23), :

$$\text{grad } H \cdot \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0,$$

que, através de (III.0), (III.4) e (III.6), produz

$$u_n \Rightarrow - \frac{\frac{\partial H}{\partial t}}{\|\text{grad } H\|} \quad (\text{III.7})$$

O resultado (III.7) mostra que a velocidade de deslocamento u_n não depende da parametrização (III.3) (já que a parametrização não é única). Por outro lado, como já foi explicado antes,

realmente, de (III.7), a superfície S é estacionária se, e somente se, $u_n = 0$.

4.2. Derivada Deslocamento

Consideremos que o campo ϕ contenha em seu domínio, para qualquer tempo t , a superfície S . Um problema de grande importância no estudo de superfícies singulares e ondas é o cálculo da taxa de variação ϕ sobre S em relação ao tempo. Se $u_n = 0$ a taxa simplesmente pode ser escrita na forma $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Quando $u_n \neq 0$ a mesma é dada por $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ e mais uma parte devida ao deslocamento de S . Por isso, surge a necessidade do conceito de derivada deslocamento [5,6,7]. De início, estudaremos o caso em que ϕ é um campo espacial (ϕ tem valores $\phi(x, t)$). Observando que $(u_n dt)n$ representa um deslocamento infinitesimal da posição x sobre S na direção de n , definimos a derivada deslocamento $\frac{\delta}{\delta t}$ do campo espacial ϕ em relação a superfície S por:

$$\frac{\delta \phi}{\delta t}(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \tau u_n n, t + \tau) - \phi(x, t)}{\tau} \quad (\text{III.8})$$

para toda posição x sobre S em cada instante t . Da definição (III.8), (Ap. 21) e (Ap. 23), obtemos:

$$\frac{\delta \gamma}{\delta t} = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{grad } \gamma \cdot u_n n \quad (\text{III.9})$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{grad } \psi) u_n n$$

A derivada deslocamento do campo ϕ é interpretada como a taxa de variação de ϕ sobre S em relação ao tempo vista por um observador movendo-se ao longo de uma curva cuja tangente é n com velocidade $u_n n$ (tal curva é a trajetória normal).

Agora, consideremos o caso de um campo superficial $\hat{\phi}$ definido através de (usando (III.3))

$$\hat{\phi}(x, t) = \hat{\phi}(\hat{X}(\omega^1, \omega^2, t), t) \equiv \hat{\phi}(\omega^1, \omega^2, t) \quad (\text{III.10})$$

A regra da cadeia em (III.10) e o uso de (III.5), (III.6) e (III.9) fornecem, (Ap. 21),

$$\frac{\delta \hat{\phi}}{\delta t} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \omega^i} d_i \quad (\text{soma em } i) \quad (\text{III.11})$$

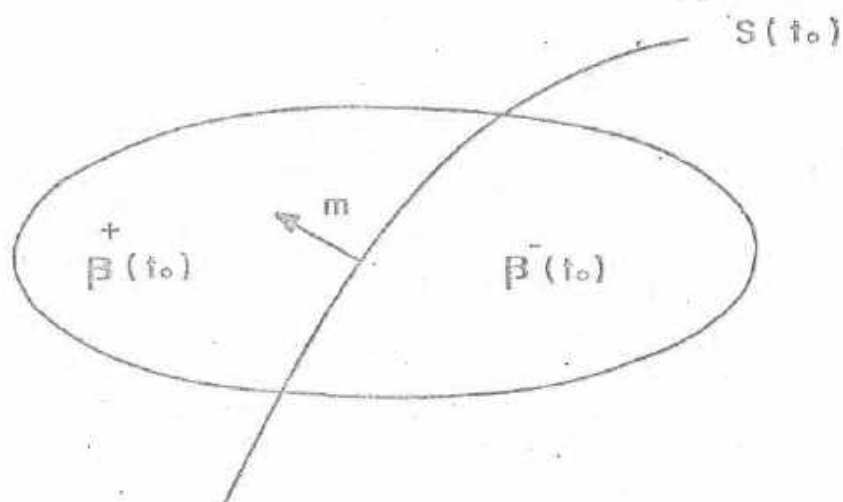
que é a derivada deslocamento do campo superficial $\hat{\phi}$ seguindo a superfície S . Fazendo $\hat{\phi} = \omega^i$ em (III.11), temos que

$$d_i = \frac{\delta \omega^i}{\delta t}, \quad (\text{III.12})$$

e o par (d_1, d_2) é interpretado como a taxa de variação em relação ao tempo do ponto superfície (ω^1, ω^2) (velocidade de um ponto superficial movendo-se sobre S). Finalmente, concluímos que o movimento de S é normal ($d_i = 0$) se, e somente se, os parâmetros ω^1 e ω^2 não dependem do tempo (velocidade tangencial da parametrização é nula).

5. SUPERFÍCIES SINGULARES

Consideremos o instante $t = t_0$ fixo. A superfície $S(t_0)$ da família S pode ser pensada com a fronteira comum entre duas regiões $\beta^+(t_0)$ e $\beta^-(t_0)$ de ξ , como mostra a figura abaixo [5, 9, 10].



Suporemos que a função $\phi(\cdot, t_0)$ é contínua nos interiores de $\beta^+(t_0)$ e $\beta^-(t_0)$ e também que, para toda posição x sobre $S(t_0)$, os limites $\phi^+(x, t_0)$ e $\phi^-(x, t_0)$ de $\phi(y, t_0)$ quando y tende para x ao longo de caminhos contidos em $\beta^+(t_0)$ e $\beta^-(t_0)$, respectivamente, são definidos. Em cada posição sobre $S(t_0)$ a função $\phi(\cdot, t_0)$ não precisa ser definida. O salto $[\phi](x, t_0)$ de $\phi(\cdot, t_0)$ em x através $S(t_0)$ é definido por

$$[\phi] \equiv \phi^+ - \phi^- \quad (\text{III.13})$$

Quando $[\phi]$ não se anula para todas posições x em $S(t_0)$, a superfície $S(t_0)$ é dita singular com respeito a $\phi(\cdot, t_0)$. Observe que ϕ^+ , ϕ^- e $[\phi]$ são funções de posição sobre $S(t_0)$, e em parti

cular, se ϕ^+ e ϕ^- são diferenciáveis sobre $S(t_0)$, o salto $[\phi]$ também é diferenciável sobre $S(t_0)$. A superfície em movimento S é singular em relação ao campo ϕ , se cada superfície $S(t)$ é singular com respeito a $\phi(\cdot, t)$ para cada instante t .

Se a superfície S é singular em relação a alguma quantidade e $[\phi] = 0$ através da mesma, então a função ϕ é dita contínua através de S .

Toda a teoria de superfícies singulares repousa no lema de Hadamard, (Ap. 29) e (Ap. 33). Em relação a parametrização (III.3), para cada instante t , segue do lema de Hadamard e (III.13) que:

$$\frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^i} = [\text{grad } \gamma] \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i} \quad (\text{III.14})$$

No caso do campo vetorial, ou tensorial ψ , (II.21) e (III.14) fornecem o resultado, (Ap. 20), (Ap. 25), (Ap. 26) e (Ap. 28),:

$$\frac{\partial [\psi]}{\partial \omega^i} = [\text{grad } \psi] \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i}$$

5.2. Condições de Compatibilidade geométrica

Seja M uma matriz 2×2 com elementos a_{ij} dados por:

$$a_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^i} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^j} \quad (\text{III.15})$$

Para mostrar que M é inversível, seja ϕ o ângulo entre $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1}$ e $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2}$. De (III.15), podemos escrever

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} (1 - \cos^2 \phi) \quad (\text{III.16})$$

Como $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1}$ e $\frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2}$ são linearmente independentes, temos que $\cos \phi \neq 1$ e segue de (III.16) que $\det M \neq 0$. Logo, M é inversível.

Do conjunto base (III.1), escrevemos para o salto do gradiente do campo escalar γ

$$[\text{grad } \gamma] = \lambda_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1} + \lambda_2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2} + \lambda_3 n,$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são escalares. Definindo a quantidade \underline{h} por

$$\underline{h} = \underline{E}(\gamma, n) = [\text{grad } \gamma] \cdot n, \quad (\text{III.17})^*$$

encontramos que $\lambda_3 = \underline{h}$ e

$$[\text{grad } \gamma] = \lambda_1 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^1} + \lambda_2 \frac{\partial \hat{x}}{\partial \omega^2} + \underline{h}n \quad (\text{III.17})$$

O uso da condição (III.14) em (III.17) e tendo em vista (III.15), vem que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^1} \\ \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.18})$$

Denotando por a^{ij} os elementos de M^{-1} (inversa de M), obtemos de (III.18) que

$$\lambda_j = a^{ij} \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^i}, \quad (\text{soma em } i)$$

e assim (III.17) pode ser escrita na forma

$$[\text{grad } \gamma] = \underline{bn} + a^{ij} \frac{\partial [\gamma]}{\partial \omega^i} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^j}, \quad (\text{soma em } i \text{ e } j) \quad (\text{III.19})$$

Para o caso do campo vetorial, ou tensorial ψ , a substituição de (II.21) em (III.19) fornece, (Ap. 20), (Ap. 25) e (Ap.26),

$$[\text{grad } \psi] = b \otimes n + a^{ij} \frac{\partial [\psi]}{\partial \omega^i} \otimes \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \omega^j}, \quad (\text{III.20})$$

onde

$$b = \tilde{b}(\psi, n) = [\text{grad } \psi]n \quad (\text{III.21})$$

O conjunto (III.19) e (III.20) é chamado de condição de compatibilidade geométrica e expressa o fato que a descontinuidade (salto) é estendida (difundida, propalada, aberta) suavemente sobre uma superfície e não isolada em um ponto ou uma linha. Se substituirmos ψ por $\text{grad } \psi$ em (III.20) e depois usarmos novamente (III.20), obtemos uma condição geométrica de

compatibilidade iterada que não escrevemos o resultado aqui, mas o mesmo pode ser encontrado em [5, 6].

5.3. Condições de compatibilidade cinemática

Como já foi visto, a superfície em movimento S é singular se cada superfície $S(t)$ é singular. Lembrando que a derivada deslocamento é definida sobre a superfície S , podemos aplicar o lema de HADAMARD para o espaço produto $\xi \times (-\infty, \infty)$ e escrever, (Ap. 29) e (Ap. 34), para os campos γ e ψ respectivamente no lado + da superfície singular

$$\frac{\delta \gamma^+}{\delta t} = \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right)^+ + (\text{grad } \gamma)^+ \cdot u_n n \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\delta \psi^+}{\delta t} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^+ + (\text{grad } \psi)^+ \cdot u_n n$$

Escrevendo resultado semelhante para o lado da superfície e subtraindo de (III.22) com o uso de (III.13), obtemos:

$$\frac{\delta [\gamma]}{\delta t} = \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] + [\text{grad } \gamma] \cdot u_n n \quad (\text{III.23})$$

$$\frac{\delta [\psi]}{\delta t} = \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] + [\text{grad } \psi] \cdot u_n n$$

O conjunto (III.23) é chamado de condição de compatibilidade cinemática e expressa a persistência da descontinuidade (salto) num intervalo de tempo. Quando colocamos $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ no lugar de ϕ e $\text{grad } \phi$ no de ψ em (III.23) e os resultados são agrupados com (III.19) ou (III.20) e (III.23) obtemos condições de compati-

lidade cinemática iteradas que não são dadas nesse trabalho, mas podem ser encontradas em [5,6,9].

5.4. O teorema de MAXWELL. Condições de HUGONIOT

Teorema de Maxwell: Se $[\gamma] = \text{constante}$ através da superfície singular $S(t)$ para cada instante t , então [5,8]

$$[\text{grad } \gamma] = \underline{b}n, \quad (\text{III.24})$$

onde \underline{b} é a amplitude da singularidade.

Para provar o teorema, basta substituir $[\gamma] = \text{constante}$ em (III.14), usar o fato que $\left\{ \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \omega} \right\}$ gera qualquer vetor tangente a superfície singular e observar (III.17)*. Por meio de (II.21), a condição $[\gamma] = \text{constante}$ implica que $[\psi] = 0$, pois Π é arbitrário. Assim sendo, o teorema de Maxwell para o campo ψ é enunciado da seguinte maneira: se $[\psi] = 0$ através da superfície singular $S(t)$ para cada instante t , então

$$[\text{grad } \psi] = b \otimes n, \quad (\text{III.25})$$

onde b é a amplitude da singularidade. Observe que o teorema de Maxwell expressa o fato de que o salto do gradiente de um campo contínuo é normal a superfície singular. A prova de (III.25) é feita substituindo (II.21) em (III.24) com a mente em (III.21), (Ap. 20), (Ap. 25) e (Ap. 26). Fazendo $[\gamma] = \text{constante}$ e $[\psi] = 0$ em (III.23) para a superfície singular em movimento S e usando (III.24) e (III.25), o teorema de Maxwell produz, (Ap.20), as condições de Hugoniot

$$u_n [\text{grad } \gamma] = - \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] n \quad (\text{III.26})$$

$$u_n [\text{grad } \psi] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \otimes n,$$

onde

$$u_n \underline{b} = - \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \quad (\text{III.27})$$

$$u_n b = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right]$$

Dois casos particulares de (III.26)₂ são:

$$u_n [\text{div } \psi] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] \cdot n, \text{ se } \psi \text{ é um vetor} \quad (\text{III.28})$$

$$u_n [\text{div } \psi] = - \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} \right] n, \text{ se } \psi \text{ é um tensor}$$

A prova de (III.28)₁ é imediata, basta usar o traço em (III.26)₂, (Ap. 3) e (Ap. 24). Para provar (III.28)₂, consideremos a grandeza Π arbitrária tal que $\psi^t \Pi$ é um vetor quando ψ é um tensor. Substituindo ψ por $\psi^t \Pi$ em (III.28)₁, (Ap. 20) e (Ap. 24), segue o resultado (III.28)₂.

Agora, podemos obter facilmente uma condição de compatibilidade cinemática iterada com as restrições do teorema de Maxwell, ou seja: substituindo γ por $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ e ψ por $\text{grad } \gamma$ em (III.23), temos

$$\frac{\delta \left[\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right]}{\delta t} = \left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right] + \left[\text{grad} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] \cdot u_n n \quad (\text{III.29})$$

$$\frac{\delta [\text{grad} \gamma]}{\delta t} = \left[\text{grad} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right] + [\text{gradgrad} \gamma] u_n n$$

Eliminando $\left[\text{grad} \frac{\partial \gamma}{\partial t} \right]$ entre as equações do conjunto (III.29) e com o uso de (III.24), (III.27) e $n \cdot \frac{\delta n}{\delta t} = 0$, vem que:

$$\left[\frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \right] = u_n^2 c - 2u_n \frac{\delta b}{\delta t} - b \frac{\delta u_n}{\delta t}, \quad (\text{III.30})$$

onde

$$c = \hat{c}(\gamma, n) = [\text{gradgrad} \gamma] n \cdot n$$

Lembrando que a condição de compatibilidade cinemática (III.30) é obtida quando $[\gamma] = \text{constante}$, um resultado semelhante pode ser mostrado para o campo ψ no caso de $[\psi] = 0$ usando o mesmo raciocínio. Então,

$$\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right] = u_n^2 c - 2u_n \frac{\delta b}{\delta t} - b \frac{\delta u_n}{\delta t}, \quad (\text{III.31})$$

onde

$$c = \hat{c}(\psi, n) = ([\text{gradgrad} \psi] n) n$$

e (III.21) foi usada.

As equações (III.26) são de grande importância no estudo de ondas, como também (III.28). Em determinados problemas de crescimento e decaimento de ondas, as condições (III.30) e

(III.31) são bastante usadas.

Um caso bem interessante de condição de compatibilidade cinemática é aquele quando a superfície singular S é estacionária ($u_n = 0$). Tal condição, através de (III.9) e (III.23), simplesmente é escrita na forma

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = \frac{\partial [\phi]}{\partial t} \quad (\text{III.32})$$

ou seja: quando $u_n = 0$, por meio de (III.32), continuidade em ϕ implica também na continuidade de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, e assim por diante.

6. SUPERFÍCIES SINGULARES ASSOCIADAS COM UM MOVIMENTO

6.1. Representação referencial (material)

Até agora o estudo desse capítulo tem sido independente do movimento de qualquer meio material. Quando o meio está em movimento através do espaço de posições x de acordo com (II.6) e (II.8), podemos olhar para (III.2) e definirmos uma função G pelas relações

$$\begin{aligned} H(x, t) &= H(\chi(X, t), t) \equiv G(X, t) \\ G(X, t) &= G(\chi^{-1}(x, t), t) \equiv H(x, t) \end{aligned} \quad (\text{III.33})$$

Dessa maneira, temos duas formas de representar uma superfície em movimento: uma representação referencial (material) dada

por

$$G(X, t) = 0 \quad (\text{III.34})$$

e outra espacial (III.2). Denotaremos por S_{κ} a superfície em movimento (que depende da configuração de referência κ) determinada por (III.34). Para cada instante t as superfícies $S(t)$ e $S_{\kappa}(t)$ são duais uma da outra. Fixemos o instante $t = t_0$. Apesar das superfícies $S(t_0)$ e $S_{\kappa}(t_0)$, em geral, estarem relacionadas com o mesmo fenômeno (movimento de superfícies), elas diferem geometricamente: $S(t_0)$ é uma superfície no espaço de posições x , enquanto que $S_{\kappa}(t_0)$ é o locus, no espaço de partículas, das posições iniciais das partículas X que estão situadas sobre a superfície $S(t_0)$.

Todo o estudo feito para a superfície em movimento S (representação espacial) é completamente válido para a superfície em movimento S_{κ} (representação referencial ou material), basta que as devidas notações e convenções sejam respeitadas. Assim, podemos aplicar o princípio de dualidade e escrever alguns resultados importantes para a representação referencial ou material, como segue:

Vetor unitário N (dual de n) normal a $S_{\kappa}(t)$, para cada instante t , em cada posição sobre $S_{\kappa}(t)$

$$N = \frac{\text{Grad } G}{\|\text{Grad } G\|} \quad (\text{III.35})$$

Velocidade de propagação U_N da superfície S_{κ} (dual de u_n)

$$U_N = - \frac{\dot{G}}{\|\text{Grad } G\|} \quad (\text{III.36})$$

Observe que U_N é a velocidade de deslocamento da superfície na representação referencial ou material, ela depende da configuração de referência κ e é a medida da velocidade com que a superfície S_κ atravessa o material.

Derivada deslocamento (dual de III.9). Agora, ϕ tem valores $\phi(X, t)$

$$\frac{\delta \gamma}{\delta t} = \dot{\gamma} + \text{Grad } \gamma \cdot U_N N$$

$$\frac{\delta \psi}{\delta t} = \dot{\psi} + (\text{Grad } \psi) U_N N$$

Condição de compatibilidade cinemática (dual de III.23). Quando S_κ é uma superfície singular com respeito ao campo ϕ

$$\frac{\delta [\gamma]}{\delta t} = [\dot{\gamma}] + [\text{Grad } \gamma] \cdot U_N N$$

$$\frac{\delta [\psi]}{\delta t} = [\dot{\psi}] + [\text{Grad } \psi] U_N N$$

Condições de Hugoniot (dual de (III.26) e (III.28)). Quando $[\gamma] = \text{constante}$ e $[\psi] = 0$ através S_κ

$$U_N [\text{Grad } \gamma] = - [\dot{\gamma}] N$$

$$U_N [\text{Grad } \psi] = - [\dot{\psi}] \otimes N \quad (\text{III.37})$$

$$U_N [\text{Div } \psi] = - [\dot{\psi}] \cdot N, \text{ se } \psi \text{ é um vetor}$$

$$U_N [\text{Div } \psi] = - [\dot{\psi}] N, \text{ se } \psi \text{ é um tensor}$$

Dual de (III.30) (condição de compatibilidade cinemática iterada). Quando $[\gamma] = \text{constante}$ através S_K

$$[\ddot{\gamma}] = U_N^2 \underline{C} - 2U_N \frac{\delta B}{\delta t} - B \frac{\delta U_N}{\delta t},$$

onde

$$\underline{B} = \underline{\hat{B}}(\gamma, N) = [\text{Grad } \gamma] \cdot N$$

e

$$\underline{C} = \underline{\hat{C}}(\gamma, N) = [\text{GradGrad } \gamma] N \cdot N$$

Dual de (III.31) (condição de compatibilidade cinemática iterada). Quando $[\psi] = 0$ através S_K

$$[\ddot{\psi}] = U_N^2 C - 2U_N \frac{\delta B}{\delta t} - B \frac{\delta U_N}{\delta t},$$

onde

$$B = \hat{B}(\psi, N) = [\text{Grad } \psi] N$$

$$C = \hat{C}(\psi, N) = ([\text{GradGrad } \psi] N) N$$

A superfície S_K é dita material se, e somente se, $U_N = 0$. Quando S_K é material, a condição de compatibilidade cinemática é expressa na forma (dual de (III.32))

$$[\dot{\phi}] = \frac{\dot{\phi}}{[\phi]} \quad (\text{III.38})$$

Por (III.38), se ϕ é contínua através da superfície singular S_K , então $\dot{\phi}$ também é contínua, e assim por diante.

6.2. Velocidade local de propagação

Com os resultados que temos para S e S_K , já podemos fazer um relacionamento entre as duas representações. De (II.9), (II.10), (II.11), (II.12), (Ap. 21), (Ap. 23) e (III.33), podemos escrever:

$$\text{Grad } G = F^t \text{ grad } H \quad (\text{III.39})$$

$$\dot{G} = \frac{\partial H}{\partial t} + \text{grad } H \cdot V$$

Usando (III.0), (III.35) e (III.39)₁, segue que:

$$N = \frac{F^t n}{\|F^t n\|} \quad (\text{III.40})$$

$$n = \frac{F^{-t} N}{\|F^{-t} N\|} ,$$

onde F^{-t} é o transposto de F^{-1} . Por meio de (III.0), (III.7), (III.35), (III.36), (III.39) e (III.40)₁, ainda temos o seguinte resultado:

$$U_N \|F^t n\| = u_n - n \cdot V \quad (\text{III.41})$$

No capítulo II já foi visto que existem infinitas configurações de referência. Logo, temos um número infinito de velocidades U_N , uma para cada configuração de referência. Por esse motivo, é importante a escolha de uma determinada referência para que possamos trabalhar com uma única velocidade U_N . Escolhendo o instante presente como o instante de referência t_0 , U_N tem um único valor que denotaremos por U . Desse modo, através de (II.24) e (II.25), U é o valor de U_N quando fazemos $F = \underline{1}$ em (III.41) e $\text{Grad } G = \text{grad } H$ em (III.36). Então, de (III.41), (III.7) e (III.36), obtemos:

$$U = u_n - n \cdot v \quad (\text{III.42})$$

$$U \frac{\partial H}{\partial t} = u_n \dot{G}$$

Como o instante de referência é arbitrário, então (III.42) vale para todo instante t , e podemos escrever através de (III.41) que:

$$U = U_N \| F^t n \| = u_n - n \cdot v \quad (\text{III.43})$$

A quantidade U é chamada velocidade local de propagação: ela é o valor de U_N quando a configuração presente é escolhida como de referência. O nome velocidade na configuração presente (atual) para U também pode ser encontrado. Podemos interpretar U como segue: u_n é a velocidade de S na direção de n , $(n \cdot v)n$ é o componente da velocidade de cada partícula material também na direção de n . Assim, U é a velocidade de deslocamento da superfície S relativa as partículas materiais que

estão instantaneamente situadas sobre S .

Quando o corpo é identificado com sua configuração de referência, podemos trabalhar com a velocidade U_N que é única, pois, a descrição material é única. Por esse motivo, em materiais elásticos trabalhamos com U ou U_N , dependendo do problema.

Se S é estacionária ($u_n = 0$), segue de (III.43) que:

$$U = -n \cdot V$$

Por outro lado, quando S_K é material ($U = U_N = 0$) (III.43) fornece

$$u_n = n \cdot V$$

Nesse trabalho usaremos a velocidade U : em misturas a velocidade local de propagação para cada constituinte é bem definida.

6.3. Condições de compatibilidade dinâmica

A termomecânica admite a possibilidade de superfícies que são singulares com respeito ao próprio movimento definido por (II.6) e (II.8) e seus elementos, a densidade, a temperatura, a pressão, fluxo de calor, tensor tensão, a energia, a entropia e a outras grandezas. Nesse capítulo só consideraremos superfícies singulares em que o movimento $\{\chi, \chi^{-1}\}$ seja contínuo ($[\chi] = [X] = [\chi] = [\chi^{-1}] = 0$) através das mesmas.

As condições de compatibilidade dinâmica são as restrições impostas pelos balanços, através da superfície singular, de massa, momentum linear, energia, e entropia. Supondo o movimento da superfície normal, escrevemos [3, 5, 10]:

Balanço de massa

$$[\rho U] = 0 \quad (\text{III.44})$$

Balanço de momentum linear

$$[\rho UV] + [T]n = 0 \quad (\text{III.45})$$

Balanço de energia

$$[\rho U(e + \frac{1}{2} v \cdot v)] + [TV - h] \cdot n = 0 \quad (\text{III.46})$$

Crescimento de entropia

$$[\rho U\eta] - \left[\frac{h}{\theta} \right] \cdot n \leq 0 \quad (\text{III.47})$$

O balanço de momentum angular é obtido usando o linear, logo, produz o mesmo requerimento que (III.45).

6.4. Classificação de superfícies singulares. Ondas

Uma discussão sobre classificações de superfícies singulares quanto a ordem da singularidade, pode ser encontrada em [5]. Em relação as derivadas materiais do movimento definido por (II.6), uma superfície singular é dita de primeira ordem se

$$[x] = 0$$

$$[\dot{x}] \neq 0 \text{ ou } [\text{Grad } x] \neq 0,$$

de segunda ordem se

$$[x] = [\dot{x}] = 0 \quad (\text{III.48})$$

$$[\text{Grad } x] = 0$$

$$[\ddot{x}] \neq 0 \text{ ou } [\text{GradGrad } x] \neq 0$$

de terceira ordem se

$$[x] = [\dot{x}] = [\ddot{x}] = 0$$

$$[\text{Grad } x] = 0$$

$$[\text{GradGrad } x] = 0$$

$$[\ddot{x}] \neq 0 \text{ ou } [\text{GradGradGrad } x] \neq 0,$$

e assim por diante

Uma superfície que é singular em relação a alguma quantidade e tem velocidade de propagação diferente de zero (U_N e $U \neq 0$) num intervalo de tempo é chamada uma superfície singular propagante ou onda, no intervalo de tempo considerado. Onda de choque é uma superfície singular propagante de primeira ordem em que

$$[\dot{x} \wedge n] = 0, \quad \wedge = \text{produto vetorial}$$

$$[\dot{x} \cdot n] \neq 0$$

$$[0] \neq 0$$

através da superfície singular. Quando $[\ddot{x}] \neq 0$ através de uma

superfície singular propagante de terceira ordem, temos uma onda de terceira ordem, e assim prosseguem as denominações. Ondas de segunda ordem em diante são chamadas fracas.

A grandeza V que aparece em (III.41) é o campo de velocidade originado pela perturbação e, como uma observação, lembremos, mais uma vez, que na teoria de superfícies singulares a frente de onda é pensada como uma superfície singular.

De (II.6), (II.12) e (III.48) segue que $[F] = 0$. Então, usando (II.18)₁, (Ap. 23), (Ap. 28), (III.37)₁, (III.40)₁ e (III.43), temos que

$$U[\text{grad} \gamma] = - [\dot{\gamma}]n \quad (\text{III.50})$$

quando $[\gamma] = \text{constante}$ através de uma superfície singular de ordem dois. Para o campo ψ , se $[\dot{\psi}] = 0$ através uma superfície singular de ordem dois, substituindo (III.21) em (III.50), obtemos:

$$U[\text{grad} \psi] = - [\dot{\psi}] \otimes n \quad (\text{III.51})$$

As condições (III.50) e (III.51) são importantes: elas incluem a velocidade U que é única e podemos trabalhar na descrição espacial muito útil em misturas. Por um raciocínio idêntico ao da prova de (III.28), em particular (III.51) fornece

$$\begin{aligned} U[\text{div} \psi] &= - [\dot{\psi}] \cdot n, \text{ se } \psi \text{ é um vetor} \\ U[\text{div} \bar{\psi}] &= - [\dot{\bar{\psi}}]n, \text{ se } \psi \text{ é um tensor} \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

CAPÍTULO IVNOCÕES DE MECÂNICA DO CONTÍNUO PARA
MISTURAS7. TEORIA BÁSICA

Consideremos π um inteiro positivo tal que $\pi \geq 2$. Sejam β_α , α um elemento de $\{1, 2, \dots, \pi\}$, um corpo definido como no Capítulo II e X_α a posição ocupada por uma partícula de β_α na sua configuração de referência. Como já sabemos, o movimento de β_α pode ser definido por

$$x = \chi_\alpha(X_\alpha, t) \quad (\text{IV.0})$$

$$X_\alpha = \chi_\alpha^{-1}(x, t),$$

onde x é a posição ocupada por X_α em $\kappa(\beta_\alpha)$ e $\chi_\alpha^{-1}(\cdot, t)$ denota a inversa de $\chi_\alpha(\cdot, t)$ para cada instante t .

Uma mistura consiste de π corpos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\pi$ chamados constituintes, cada um considerado como um contínuo. Tal mistura pode ser vista como uma superposição de π contínuos simples cada um seguindo seu próprio movimento e que em qualquer tempo t cada posição x de ξ na mistura é ocupada simultaneamente

te por várias partículas diferentes X_J , $J = 1, 2, \dots, \pi$, uma de cada constituinte. Então, o movimento da mistura pode ser descrito pelas π relações [4,5,11,12]

$$x = \chi_J(X_J, t)$$

$$X_J = \chi_J^{-1}(x, t)$$

A função χ_α é chamada de função de deformação ou deformação para o constituinte α .

A notação para a descrição espacial é a mesma usada no Capítulo II. Supondo que ϕ contenha em seu domínio o espaço produto $\kappa(\beta_\alpha) \times (-\infty, \infty)$, as derivadas material terão as seguintes notações:

$$\dot{\phi}^\alpha \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{X_\alpha = \text{constante}}$$

$$\nabla \phi^\alpha \equiv \frac{\partial \phi}{\partial} \Big|_{X_\alpha = \text{constante}}, \text{ e assim segue}$$

(α)
Grad \equiv gradiente na configuração de referência $\kappa(\beta_\alpha)$

(α)
Div \equiv divergente tomado em $\kappa(\beta_\alpha)$

Se ϕ_α é um campo semelhante a ϕ para o constituinte α , ainda usaremos as notações:

$$\dot{\phi}_\alpha^\alpha \equiv \dot{\phi}_\alpha, \quad \nabla \phi_\alpha^\alpha \equiv \nabla \phi_\alpha, \quad \text{e segue.}$$

$$\sum_{\alpha} \phi_{\alpha} \equiv \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$$

A cada constituinte α é associado uma densidade mássica ρ_{α} (diferente daquela do mesmo isolado), que representa uma densidade média do constituinte α tomada sobre um pequeno volume de mistura. Assim, a densidade mássica ρ da mistura é dada por

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \quad (\text{IV.1})$$

Para cada constituinte α , definimos:

$$V_{\alpha} \equiv \dot{x}^{\alpha}, \text{ velocidade da partícula } X_{\alpha}$$

$$\ddot{V}_{\alpha} \equiv \ddot{x}^{\alpha}, \text{ aceleração da partícula } X_{\alpha} \quad (\text{IV.2})$$

$$F_{\alpha} \equiv \text{Grad}^{(\alpha)} X_{\alpha}, \text{ gradiente de deformação}$$

$$L_{\alpha} \equiv \text{grad } V_{\alpha}, \text{ gradiente de velocidade}$$

Suporemos que χ_{α} e χ_{α}^{-1} são suficientemente suaves. Assim, $F_{\alpha}(\cdot, t)$ é inversível para cada instante t . Denotando o inverso de $F_{\alpha}(\cdot, t)$ por $F_{\alpha}^{-1}(\cdot, t)$, temos que:

$$F_{\alpha}^{-1} \equiv \text{grad } \chi_{\alpha}^{-1} \quad (\text{IV.3})$$

$$F_{\alpha} F_{\alpha}^{-1} = F_{\alpha}^{-1} F_{\alpha} = \underline{1}$$

e por um raciocínio idêntico ao do resultado (II.17), obtemos:

$$\dot{F}_\alpha^{(\alpha)} = \text{Grad } V_\alpha = L_\alpha F_\alpha$$

ou

(IV.4)

$$L_\alpha = \dot{F}_\alpha F_\alpha^{-1}$$

Em relação ao tensor L_α , escrevemos:

$$L_\alpha = D_\alpha + W_\alpha$$

$$D_\alpha = \frac{L_\alpha + L_\alpha^t}{2}$$

(IV.5)

$$W_\alpha = \frac{L_\alpha - L_\alpha^t}{2}$$

As derivadas material em relação ao tempo seguindo o movimento do constituinte α , usando as notações desse capítulo e os procedimentos do capítulo II, são escritas por:

$$\dot{\gamma}^\alpha = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{grad } \gamma \cdot V_\alpha \quad (\text{IV.6})$$

$$\dot{\psi}^\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{grad } \psi) \cdot V_\alpha$$

quando γ e ψ estão na descrição espacial e

$$\dot{\gamma}^\alpha = \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \text{Grad } \gamma \cdot F_\alpha^{-1} V_\alpha \quad (\text{IV.7})$$

$$\dot{\psi}^\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{Grad } \psi) (F_\alpha^{-1} V_\alpha)$$

segundo o mesmo raciocínio de (II.20) e (II.23)

8. EQUACÕES DOS BALANÇOS

8.1. Constituinte α

Postularemos os balanços para o constituinte α de uma mistura de π constituintes inertes [4,5,11,12] como segue:

Balanço de massa

$$\dot{\rho}_\alpha + \rho_\alpha \operatorname{div} V_\alpha = 0$$

ou

(IV.8)

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho_\alpha V_\alpha) = 0$$

Balanço de momentum linear

$$\rho_\alpha \dot{V}_\alpha = \operatorname{div} T_\alpha + m_\alpha + \rho_\alpha f_\alpha, \quad (\text{IV.9})$$

onde m_α é a força difusiva exercida sobre o constituinte α pelos outros constituintes (transferência de momentum devido, por exemplo, diferença de velocidade), T_α é o tensor tensão para o constituinte α , e f_α é a força de campo externa por unidade de massa exercida sobre o constituinte α .

Balanço de momentum angular

$$T_{\alpha}^a = \mathbb{T}_{\alpha} \quad (IV.10)$$

onde T_{α}^a é a parte anti-simétrica de T_{α} e \mathbb{T}_{α} é um tensor anti-simétrico que representa um binário interno agindo sobre o constituinte α .

Balanço de energia

$$\rho_{\alpha} \dot{e}_{\alpha} = \rho_{\alpha} r_{\alpha} - \text{div } h_{\alpha} + \Psi_{\alpha} + T_{\alpha}^S \cdot D_{\alpha} \quad (IV.11)$$

onde T_{α}^S é a parte simétrica de T_{α} , Ψ_{α} é a energia suprida ao constituinte α aparecendo de interações com outros constituintes e é suposto incluir um termo originado do fluxo de energia através da superfície, h_{α} é o vetor fluxo de calor para o constituinte α , e_{α} é a energia interna por unidade de massa para o constituinte α e r_{α} é o calor por unidade de massa absorvido por β_{α} e fornecido pelo exterior.

8.2. Mistura

Admitindo que os efeitos interno não afetam a mistura como um todo, escrevemos:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} &= 0 \\ \sum_{\alpha} \mathbb{T}_{\alpha} &= 0 \\ \sum_{\alpha} (m_{\alpha} \cdot V_{\alpha} - \mathbb{T}_{\alpha} \cdot W_{\alpha} + \Psi_{\alpha}) &= 0 \end{aligned} \quad (IV.12)$$

A desigualdade entrópica para a mistura pode ser escrita na forma

$$\sum_{\alpha} \left(\rho_{\alpha} \dot{\eta}_{\alpha} + \operatorname{div} \left(\frac{h_{\alpha}}{\theta_{\alpha}} \right) - \frac{\rho_{\alpha} r_{\alpha}}{\theta_{\alpha}} \right) \geq 0, \quad (\text{IV.13})$$

onde η_{α} é a entropia específica do constituinte α e θ_{α} é a temperatura absoluta do constituinte α . Definindo a energia livre de Helmholtz específica A_{α} do constituinte α pela relação

$$A_{\alpha} = e_{\alpha} - \theta_{\alpha} \eta_{\alpha} \quad (\text{IV.14})$$

e eliminando r_{α} entre (IV.11) e (IV.13), a desigualdade (IV.13) é escrita por

$$\sum_{\alpha} \left(\rho_{\alpha} \dot{A}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \eta_{\alpha} \dot{\theta}_{\alpha} - T_{\alpha} \cdot L_{\alpha} + m_{\alpha} \cdot V_{\alpha} + \frac{h_{\alpha} \cdot \operatorname{grad} \theta_{\alpha}}{\theta_{\alpha}} \right) \leq 0, \quad (\text{IV.15})$$

onde (IV.5), (IV.12)₃, (IV.14), (Ap. 21) e (Ap. 27) foram usadas.

Para a mistura vista como um corpo único escrevemos todo o Capítulo II. Quando pensamos na mistura como um corpo único, surge a curiosidade de, por exemplo, tentar relacionar h_{α} com certas grandezas do constituinte α para produzir o vetor fluxo de calor total h . Um tal relacionamento [4, 11] que acreditamos não ser único, é feito interpretando a grandeza V definida por (II.11)₁ como sendo a velocidade média (baricêntrica) da mistura,

$$\rho V = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} V_{\alpha} , \quad (\text{IV.16})$$

e definindo a velocidade de difusão do constituinte α u_{α} pela relação

$$u_{\alpha} = V_{\alpha} - V \quad (\text{IV.17})$$

Através de (IV.16) e (IV.17), podemos escrever:

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} u_{\alpha} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\rho u_{\alpha} = \rho V_{\alpha} - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} V_{\alpha}$$

O resultado (IV.18) mostra que as velocidades de difusão não são independentes.

As partes internas das ações resultantes sobre a mistura são definidas por:

$$\begin{aligned} \rho f_I &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} f_{\alpha} \\ T_I &\equiv \sum_{\alpha} T_{\alpha} \\ h_I &\equiv \sum_{\alpha} h_{\alpha} \\ \rho e_I &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} e_{\alpha} \\ \rho r_I &\equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} r_{\alpha} \end{aligned} \quad (\text{IV.19})$$

Usando a definição

$$\rho\eta \equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \eta_{\alpha}, \quad (\text{IV.20})$$

a parte interna da energia livre específica de Helmholtz A_I , quando os constituintes têm a mesma temperatura, $\theta_j = \theta$, é definida pela relação

$$\rho A_I \equiv \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} A_{\alpha} \quad (\text{IV.21})$$

Então, se os constituintes têm a mesma temperatura, por (IV.14, (IV.19)₄, (IV.20) e (IV.21), podemos escrever:

$$A_I = e_I - \theta\eta \quad (\text{IV.22})$$

Observe que de (IV.10), (IV.12)₂ e (IV.19) o tensor T_I é simétrico.

8.3. Mistura binária

Agora, em particular, consideremos uma mistura de dois constituintes inertes em mesma temperatura, $\theta = \theta_1 = \theta_2$. Para facilitar o raciocínio, vamos escrever alguns resultados que poderão ser usados mais adiante:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 + \rho_2 \\ \rho V &= \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 \\ \rho\eta &= \rho_1 \eta_1 + \rho_2 \eta_2 \\ \rho A_I &= \rho_1 A_1 + \rho_2 A_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

De (IV.10) e (IV.12), escrevemos:

$$\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = 0$$

$$(\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2)^t = \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 \quad (\text{IV.24})$$

$$m_1 + m_2 = 0$$

$$m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 - \mathbb{V}_1 \cdot W_1 - \mathbb{V}_2 \cdot W_2 + \Psi_1 + \Psi_2 = 0$$

Fazendo $m = m_1$ e $\mathbb{V} = \mathbb{V}_1$, segue de (IV.24) que:

$$m = m_1 = -m_2$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 = -\mathbb{V}_2 \quad (\text{IV.25})$$

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \mathbb{V} \cdot (W_1 - W_2) - m \cdot (V_1 - V_2)$$

A velocidade relativa a é definida pela relação

$$a = V_1 - V_2 \quad (\text{IV.26})$$

Como $\Theta = \Theta_1 = \Theta_2$, de (IV.15), (IV.25)₁, (IV.19)₃ e (IV.26), podemos escrever:

$$\sum_{\alpha=1}^2 \left(\rho_{\alpha} \hat{A}_{\alpha} + \rho_{\alpha} \eta_{\alpha} \hat{\Theta}^{\alpha} - F_{\alpha} \cdot L_{\alpha} \right) + m \cdot a + \frac{1}{\Theta} h_I \cdot \text{grad } \Theta \leq 0 \quad (\text{IV.27})$$

Quando γ e ψ estão na descrição espacial, o uso de (IV.6) e (IV.26) produz:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}^1 - \hat{\gamma}^2 &= \text{grad } \gamma \cdot a \\ \hat{\psi}^1 - \hat{\psi}^2 &= (\text{grad } \psi) a \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Se γ e ψ estão na descrição material, através de (IV.0), (IV.7) e (IV.26), temos que:

$$\overset{\sim}{\gamma}^2 - \overset{\sim}{\gamma}^1 = \overset{(2)}{\text{Grad } \gamma} \cdot (F_2^{-1} a)$$

(IV.29)

$$\overset{\sim}{\psi}^2 - \overset{\sim}{\psi}^1 = \overset{(2)}{\text{Grad } \psi} (F_2^{-1} a)$$

CAPÍTULO VSUPERFÍCIES SINGULARES EM MISTURASONDAS DE ACELERAÇÃO

Em geral, problemas de ondas em misturas são resolvidos usando uma teoria linear [12]: pequenas deformações ou oscilações. Nesse caso, o estudo é feito na descrição espacial onde temos uma só velocidade de propagação que é aproximadamente u_n .

No caso de ondas uni-dimensional o problema pode ser estudado de acordo com [14].

Aqui, nesse capítulo, desenvolveremos uma teoria não linear: cada constituinte será estudado separadamente e a mistura analisada através do estudo entre os constituintes.

9. SUPERFÍCIES SINGULARES EM MISTURAS

O estudo de superfícies singulares numa mistura pode ser feito a partir de cada constituinte. Desenvolveremos equações e condições para cada constituinte e depois analisamos o fenômeno na mistura como um todo.

Por (IV.0), a teoria e resultados para a descrição espacial são os mesmos do Capítulo III e para a configuração de

referência de cada corpo β_α podemos usar as seções 6.1 e 6.2 do Capítulo III desde que tenhamos em mente as notações básicas para cada constituinte α . Assim, se $[\gamma] = \text{constante}$ e $[\psi] = 0$ através de uma superfície singular na mistura, podemos escrever as condições de Hugoniot para cada constituinte α como segue:

$$U_{N_\alpha} \begin{bmatrix} (\alpha) \\ \text{Grad } \gamma \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \gamma^\alpha \end{bmatrix} N_\alpha \quad (\text{V.0})$$

$$U_{N_\alpha} \begin{bmatrix} (\alpha) \\ \text{Grad } \psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi^\alpha \end{bmatrix} \otimes N_\alpha$$

$$U_{N_\alpha} \begin{bmatrix} (\alpha) \\ \text{Div } \psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi^\alpha \end{bmatrix} \cdot N_\alpha, \text{ se } \psi \text{ é um vetor}$$

$$U_{N_\alpha} \begin{bmatrix} (\alpha) \\ \text{Div } \psi \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \psi^\alpha \end{bmatrix} N_\alpha, \text{ se } \psi \text{ é um tensor}$$

A velocidade local de propagação U_α para o constituinte α é determinada pela relação

$$U_\alpha = \|F_\alpha^t n\| U_{N_\alpha} = u_n - n \cdot V_\alpha \quad (\text{V.1})$$

Pela própria definição de movimento, u_n é a velocidade de propagação da superfície em movimento através do espaço que contém a mistura como um todo. Considerando a velocidade V da mistura na descrição espacial, seja U a grandeza definida para a mistura como um todo por:

$$U \equiv u_n - n \cdot V \quad (\text{V.2})$$

Se V é interpretada por (IV.16), temos de (IV.17), (V.1) e (V.2) que:

$$\rho U = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} U_{\alpha} \quad (V.3)$$

$$U - U_{\alpha} = n \cdot u_{\alpha} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} U_{\alpha} - U_{\alpha}$$

Assim, por (V.3)₁, U representa a média baricêntrica das velocidades local de propagação dos constituintes. Por isso, poderíamos pensar em U como a velocidade local de propagação para a mistura vista como um corpo único, mas, uma configuração de referência para mistura não faz sentido e, além disso, U pensada como tal não tem significado físico.

Supondo o movimento da superfície singular normal e desprezando o momentum linear e a energia supridos a superfície singular, escrevemos os balanços através da superfície singular para uma mistura de constituintes inertes como segue [5, 13]:

Balanço de massa

$$[\rho_{\alpha} U_{\alpha}] = 0 \quad (V.4)$$

Balanço de momentum linear

$$[\rho_{\alpha} U_{\alpha} v_{\alpha}] + [T_{\alpha}]n = 0 \quad (V.5)$$

Balanço de energia

$$[\rho_{\alpha} U_{\alpha} (e_{\alpha} + \frac{1}{2} v_{\alpha} \cdot v_{\alpha})] + [T_{\alpha}^t v_{\alpha} - h_{\alpha}] \cdot n = 0 \quad (V.6)$$

Crescimento de entropia

$$[\rho_\alpha U_\alpha n_\alpha] - \left[\frac{h_\alpha}{\theta_\alpha} \right] \cdot n \leq 0 \quad (V.7)$$

10. ONDAS DE ACELERAÇÃO EM MISTURAS

10.1. Classificação de superfícies singulares em misturas. Ondas em misturas

A classificação de singularidades em misturas é mais complexa. Por exemplo, se numa mistura binária temos uma singularidade de ordem dois para um constituinte e outra de ordem três para o outro, podemos ter uma singularidade de segunda ordem para a mistura.

Uma superfície singular numa mistura é dita de ordem n se

$$[x] = [\chi_J(x_J, t)] = 0$$

$$\sum_\alpha [v_\alpha] \cdot [v_\alpha] > 0 \text{ ou } \sum_\alpha \left[\text{Grad } \chi_\alpha^{(\alpha)} \right] \cdot \left[\text{Grad } \chi_\alpha^{(\alpha)} \right] > 0,$$

de ordem dois, se

$$[x] = [\chi_J(x_J, t)] = [v_J] = 0$$

$$\left[\text{Grad } \chi_J^{(J)} \right] = 0$$

$$\sum_{\alpha} [\hat{v}_{\alpha}] \cdot [\hat{v}_{\alpha}] > 0 \text{ ou } \sum_{\alpha} \left[\begin{matrix} (\alpha) & (\alpha) \\ \text{GradGrad} & \chi_{\alpha} \end{matrix} \right] \cdot \left[\begin{matrix} (\alpha) & (\alpha) \\ \text{GradGrad} & \chi_{\alpha} \end{matrix} \right] > 0,$$

e assim segue a classificação.

Quando uma superfície singular com respeito a alguma quantidade se propaga numa mistura com $\sum_{\alpha} U_{\alpha}^2 > 0$ num intervalo de tempo, temos uma superfície singular propagante ou onda na mistura, no intervalo de tempo considerado. Uma onda de choque na mistura é uma superfície singular propagante de primeira ordem em que

$$[v_J \wedge n] = 0$$

$$\sum_{\alpha} ([v_{\alpha} \cdot n])^2 > 0$$

$$\sum_{\alpha} ([\theta_{\alpha}])^2 > 0$$

Onda de aceleração numa mistura é uma superfície singular propagante de segunda ordem em que

$$\sum_{\alpha} [\hat{v}_{\alpha}] \cdot [\hat{v}_{\alpha}] > 0$$

$$[\theta_J] = 0$$

No caso de $\sum_{\alpha} [\hat{v}_{\alpha}] \cdot [\hat{v}_{\alpha}] > 0$ através de uma superfície singular propagante de terceira ordem, temos uma onda de terceira ordem, e assim por diante.

Se $[\gamma] = \text{constante}$ e $[\psi] = 0$ através de uma superfície singular de segunda ordem numa mistura, temos que:

$$U_{\alpha} [\text{grad } \gamma] = -[\dot{\gamma}^{\alpha}] n$$

$$U_{\alpha} [\text{grad } \psi] = -[\dot{\psi}^{\alpha}] \otimes n \quad (\text{V.8})$$

$$U_{\alpha} [\text{div } \psi] = -[\dot{\psi}^{\alpha}] \cdot n, \text{ se } \psi \text{ é um vetor}$$

$$U_{\alpha} [\text{div } \psi] = -[\dot{\psi}^{\alpha}] n, \text{ se } \psi \text{ é um tensor}$$

A prova de (V.8) é idêntica àquela dos resultados (III.50), (III.51) e (III.52).

10.2. Elementos básicos para uma onda de aceleração numa mistura

Seja a_{α} o salto da aceleração do constituinte α através uma onda de segunda ordem. Pela secção 10.1 através de uma onda de aceleração numa mistura, temos que:

$$[x] = [\chi_{\alpha}(X_{\alpha}, t)] = 0$$

$$[v_{\alpha}] = [\dot{x}^{\alpha}] = 0 \quad (\text{V.9})$$

$$[F_{\alpha}] = 0$$

$$a_{\alpha} \equiv [\ddot{x}^{\alpha}] = [\dot{v}_{\alpha}] \neq 0$$

$$[\theta_{\alpha}] = 0$$

Em acordo com (V.9), fazendo $\psi = v_{\alpha}$ em (V.0)₂ e (V.0)₃ com o uso de (IV.4)₁, obtemos:

$$U_{N_\alpha} [\hat{F}_\alpha] = - a_\alpha \otimes N_\alpha \quad (V.10)$$

$$U_{N_\alpha}^{(\alpha)} [\text{Div } V_\alpha] = - a_\alpha \cdot N_\alpha$$

Substituindo ψ por F_α em (V.0)₂ e (V.0)₄, segue que:

$$U_{N_\alpha}^{(\alpha)} [\text{Grad } F_\alpha] = - [\hat{F}_\alpha] \otimes N_\alpha \quad (V.11)$$

$$U_{N_\alpha}^{(\alpha)} [\text{Div } F_\alpha] = - [\hat{F}_\alpha] N_\alpha$$

O relacionamento entre (V.10)₁ e (V.12) produz, (Ap. 20)₁:

$$U_{N_\alpha}^2 [\text{Grad } F_\alpha]^{(\alpha)} = a_\alpha \otimes N_\alpha \otimes N_\alpha$$

$$U_{N_\alpha}^2 [\text{Div } F_\alpha]^{(\alpha)} = a_\alpha$$

O uso de (V.0)₁ com $\gamma = \theta_\alpha$, fornece:

$$U_N^{(\alpha)} [\text{Grad } \theta_\alpha] = - [\hat{\theta}_\alpha] N_\alpha$$

Nessa sub-seção sempre trabalharemos de acordo com os balanços para constituintes inertes. Assim, de (V.1), (Ap. 28), e (V.9) temos que $[U_\alpha] = 0$ através uma onda de aceleração e, por (V.4), a densidade ρ_α é contínua:

$$[\rho_\alpha] = 0 \quad (V.12)$$

Logo, colocando ρ_α no lugar de γ em (V.0)₁, vem que:

$$U_{N_\alpha}^{(\alpha)} [\text{Grad } \rho_\alpha] = - [\hat{\rho}_\alpha] N_\alpha$$

Como uma onda de aceleração é uma superfície singular propagante de segunda ordem, podemos usar o mesmo raciocínio anterior para as condições (V.8) escrevendo diretamente os resultados:

$$U_\alpha [L_\alpha] = - a_\alpha \otimes n$$

$$U_\alpha [\text{div } v_\alpha] = - a_\alpha \cdot n$$

$$U_\alpha [\text{grad } F_\alpha] = - [\hat{F}_\alpha] \otimes n \quad (\text{V.13})$$

$$U_\alpha [\text{div } F_\alpha] = - [\hat{F}_\alpha] n$$

$$U_\alpha [\text{grad } \theta_\alpha] = - [\hat{\theta}_\alpha] n$$

$$U_\alpha [\text{grad } \rho_\alpha] = - [\hat{\rho}_\alpha] n_t$$

onde (IV.2)₄ foi usada. Lembrando que

$$N_\alpha = \frac{F_\alpha^t n}{\|F_\alpha^t n\|}$$

e

$$U_\alpha = \|F_\alpha^t n\| U_{N_\alpha}$$

de (V.10)₁, (V.13)₃ e (V.13)₄, obtemos:

$$U_{\alpha} [\hat{F}_{\alpha}] = - a_{\alpha} \otimes F_{\alpha}^t n$$

$$U_{\alpha}^2 [\text{grad } F_{\alpha}] = a_{\alpha} \otimes F_{\alpha}^t n \otimes n \quad (\text{V.14})$$

$$U_{\alpha}^2 [\text{div } F_{\alpha}] = (n \cdot F_{\alpha}^t n) a_{\alpha}$$

Levando (V.13)₁ em (IV.5)₂ e (IV.5)₃, temos:

$$U_{\alpha} [D_{\alpha}] = - \frac{1}{2} (a_{\alpha} \otimes n + n \otimes a_{\alpha})$$

$$U_{\alpha} [W_{\alpha}] = - \frac{1}{2} (a_{\alpha} \otimes n - n \otimes a_{\alpha}).$$

Da equação (IV.8) com o uso de (V.12) e (Ap. 28) podemos escrever a condição

$$[\hat{p}_{\alpha}] + \rho_{\alpha} [\text{div } V_{\alpha}] = 0$$

que, através de (V.13)₂, fornece

$$U_{\alpha} [\hat{p}_{\alpha}] = (a_{\alpha} \cdot n) \rho_{\alpha} \quad (\text{V.15})$$

Com as condições (V.13)₆ e (V.15), escrevemos:

$$U_{\alpha}^2 [\text{grad } \rho_{\alpha}] = - \rho_{\alpha} (a_{\alpha} \cdot n) n \quad (\text{V.16})$$

A continuidade de ρ_{α} , U_{α} e V_{α} permite escrever (V.5) na forma

$$[T_{\alpha}] n = 0 \quad (\text{V.17})$$

Então, (V.6) pode ser escrita, (Ap. 28):

$$\rho_{\alpha} U_{\alpha} [e_{\alpha}] - [h_{\alpha}] \cdot n = 0 \quad (V.18)$$

Desse modo, o uso de (V.18) em (V.7) fornece a desigualdade

$$\rho_{\alpha} U_{\alpha} \left[\eta_{\alpha} - \frac{e_{\alpha}}{\theta_{\alpha}} \right] \leq 0 \quad (V.19)$$

Supondo que f_{α} e r_{α} são contínuos através da onda de aceleração, as equações (IV.9) e (IV.11) produzem

$$\rho_{\alpha} a_{\alpha} = [\text{div } T_{\alpha}] + [m_{\alpha}] \quad (V.20)$$

$$\rho_{\alpha} [\hat{e}_{\alpha}] = - [\text{div } h_{\alpha}] + [\psi_{\alpha}] + [T_{\alpha}^S \cdot D_{\alpha}]$$

Quando $[T_{\alpha}] = 0$ e $[h_{\alpha}] = 0$ através da onda de aceleração, o uso de $\psi = T_{\alpha}$ em (V.8)₄ e $\psi = h_{\alpha}$ em (V.8)₃ relacionado com (V.20) produz

$$\rho_{\alpha} U_{\alpha} a_{\alpha} = - [\hat{T}_{\alpha}] n + U_{\alpha} [m_{\alpha}] \quad (V.21)$$

$$\rho_{\alpha} U_{\alpha} [\hat{e}_{\alpha}] = [\hat{h}_{\alpha}] \cdot n + U_{\alpha} [\psi_{\alpha}] + U_{\alpha} T_{\alpha}^S \cdot [D_{\alpha}]$$

Os resultados vistos até aqui nessa secção constituem uma grande parte dos elementos básicos para uma onda de aceleração numa mistura em relação a muitas grandezas definidas nesse trabalho.

Se a é o salto da aceleração, $a \equiv [\hat{V}]$, para a mistura como um todo, pelo Capítulo III e um raciocínio idêntico ao des

sa secção, temos que:

$$U[\dot{\rho}] = (a \cdot n) \rho \quad (V.22)$$

Uma onda de aceleração na mistura é dita transversal se $a \cdot n = 0$ (a é perpendicular a n), longitudinal se $a \wedge n = 0$ (a é paralelo a n). Quando a mesma é longitudinal temos que $a = (a \cdot n)n$ e

$$\|a\| = \pm (a \cdot n) \quad (V.23)$$

conforme o sentido de " a " em relação a n . As equações (V.22) e (V.23) sugerem as seguintes definições: uma onda de aceleração longitudinal é compressiva e $a \cdot n > 0$, expansiva se $a \cdot n < 0$.

CAPÍTULO VIAPLICACÃO À MISTURAS BINÁRIAS

Um corpo único admite ou não ondas de aceleração, basta verificar se $[\dot{\vec{V}}] \neq 0$ ou $[\dot{\vec{V}}] = 0$. A quantidade U que aparece em (III.43) é a velocidade local de propagação definida através da velocidade de propagação U_N na configuração material. Desse modo, U depende do meio material e a mesma pode ser calculada por meio de uma equação que relaciona certas grandezas físicas do meio material. Como u_n é a velocidade de propagação da superfície singular na descrição espacial, a mesma pode ser medida na prática e os resultados comparados com os valores de u_n calculados por (III.43).

O estudo de ondas de aceleração em misturas é mais complexo. Numa mistura binária, pela própria definição, temos três casos possíveis de ondas de aceleração: $[\dot{\vec{V}}_1] = 0$ e $[\dot{\vec{V}}_2] \neq 0$, $[\dot{\vec{V}}_1] \neq 0$ e $[\dot{\vec{V}}_2] = 0$ ou $[\dot{\vec{V}}_1] \neq 0$ e $[\dot{\vec{V}}_2] \neq 0$. As velocidades local de propagação U_j devem ser calculadas de tal modo que correspondam à mesma velocidade u_n . A quantidade u_n é a velocidade de propagação da superfície singular através do espaço que contém a mistura. Assim, u_n pode ser medida na prática e os resultados comparados com os valores de u_n calculados por (V.1)

Observe que no caso de ondas estacionárias temos $u_n = 0$.

Nesse capítulo determinaremos a velocidade local de propagação de cada constituinte para uma onda de aceleração em misturas binárias que serão definidas nas secções que seguem.

11. MISTURA DE UM SÓLIDO RÍGIDO E UM FLUIDO NÃO VISCOSO

11.1. Definição e análise constitutiva para a mistura

Consideremos uma mistura de um sólido rígido e um fluido não viscoso, inertes, temperatura comum, $\theta = \theta_1 = \theta_2$, e as seguintes notações:

$\alpha = 1 \equiv$ constituinte fluido

$\alpha = 2 \equiv$ constituinte sólido

$g \equiv \text{grad } \theta$

Escolhendo um referencial conveniente, podemos trabalhar com $v_2 \equiv 0$. Então, por (VI.0)₃ e (IV.2)₄, a desigualdade (IV.27) pode ser escrita:

$$\sum_{\alpha=1}^2 (\rho_{\alpha} \dot{\lambda}_{\alpha} + \rho_{\alpha} n_{\alpha} \dot{\theta}^{\alpha}) - T_1 \cdot L_1 + m \cdot v_1 + \frac{h_I \cdot g}{\theta} \leq 0 \quad (\text{VI.1})$$

A definição constitutiva da mistura é dada por: $\lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2, T_1, m$ e h_I são funções de $\{\rho_1, \theta, v_1, g\}$. Assim, podemos escrever, (Ap. 21), (Ap.22), (Ap. 23),:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} \dot{\rho}_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial A_1}{\partial V_1} \cdot \dot{V}_1 + \frac{\partial A_1}{\partial g} \cdot \dot{g} \\ \tilde{A}_2 &= \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} \dot{\rho}_1 + \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial A_2}{\partial V_1} \cdot \dot{V}_1 + \frac{\partial A_2}{\partial g} \cdot \dot{g}\end{aligned}\quad (\text{VI.2})$$

Tendo em mente (IV.6), (IV.8), (Ap. 11), (IV.23) e (IV.28), a substituição de (VI.2) em (VI.1) produz:

$$\begin{aligned}& \rho \left(\eta + \frac{\partial A_I}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} + \rho_1 \left(\eta_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) g \cdot V_1 + \rho \frac{\partial A_I}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} - \\ & - \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} V_1 \cdot \text{grad} \rho_1 + \rho \frac{\partial A_I}{\partial V_1} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} + m \cdot V_1 - \\ & - \left[\left(\rho_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} + \rho_1 \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} \right) \frac{1}{\rho} - \rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial V_1} \otimes V_1 + T_1 \right] \cdot L_1 + \\ & + \rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial g} \otimes V_1 \cdot \text{grad} g + \frac{h_I \cdot g}{\theta} \leq 0\end{aligned}\quad (\text{VI.3})$$

Usando as idéias de COLEMAN e NOLL [11, 15, 16] para (VI.3), temos que:

$$\eta = - \frac{\partial A_I}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial A_I}{\partial g} = 0\quad (\text{VI.4})$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial A_I}{\partial V_1} = 0$$

$$\text{sim} \left[\frac{\partial A_1}{\partial g} \otimes V_1 \right] = 0$$

A forma de (VI.4)₂ é devida ao fato que grad g é um tensor simétrico (Ap. 11)₆. Como L₁ não aparece no conjunto {ρ₁, θ, V₁, g}, então a variável L₁ é arbitrária e, de (VI.3), (VI.4)₂, segue que:

$$T_1 = -p_1 \frac{1}{\rho_1} + p_1 \frac{\partial A_1}{\partial V_1} \otimes V_1, \quad (\text{VI.5})$$

onde

$$p_1 = \rho_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} \quad (\text{VI.6})$$

De (VI.4)₃, obtemos (Ap.11)₉:

$$\frac{\partial A_1}{\partial g} = 0 \quad (\text{VI.7})$$

O relacionamento entre (IV.23)₄, (VI.4)₁ e (VI.7), fornece o resultado

$$\frac{\partial A_2}{\partial g} = 0$$

Logo, depois das restrições impostas por (VI.3), podemos escrever:

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{A}_1(\rho_1, \theta, V_1) \\ A_2 &= \hat{A}_2(\theta, V_1) \\ \eta_J &= \hat{\eta}_J(\rho_1, \theta, V_1, g) \\ m &= \hat{m}(\rho_1, \theta, V_1, g) \\ h_I &= \hat{h}_I(\rho_1, \theta, V_1, g) \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

Visando uma teoria mais simples que será usada no estudo de ondas de aceleração na mistura, omitiremos V_1 em A_2 e g em η_J . Assim sendo, de (IV.14), (IV.23)₄, (VI.4)₂ e (VI.8), escrevemos:

$$A_2 = \hat{A}_2(\theta)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial V_1} = 0, \quad A_1 = \hat{A}_1(\rho_1, \theta)$$

$$\eta_J = \hat{\eta}_J(\rho_1, \theta, V_1) \quad (\text{VI.9})$$

$$e_J = \hat{e}_J(\rho_1, \theta, V_1)$$

$$T_1 = - p_1 \underline{1}$$

Por (VI.6) e (VI.9)₂, temos que:

$$p_1 = \hat{p}_1(\rho_1, \theta) \quad (\text{VI.10})$$

Como desigualdade residual (VI.3) fornece:

$$\left\{ p_1 \left(\eta_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) V_1 + \frac{h_I}{\theta} \right\} \cdot g + m \cdot V_1 \leq 0$$

Com o pensamento no estudo de ondas de aceleração na mistura, suporemos h_I da forma

$$h_I = - Kg + \underline{h}, \quad (\text{VI.11})$$

onde o vetor \underline{h} e o tensor K são supostos satisfazerem:

$$\begin{aligned} \underline{h} &= \hat{\underline{h}}(\rho_1, \theta, V_1) \\ K &= \hat{K}(\rho_1, \theta, V_1) \\ K n \cdot n &\neq 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

Quando temos uma restrição para o constituinte fluido do tipo $\text{tr}(L_1) = \underline{1} \cdot L_1 = \text{div } V_1 = 0$,

segundo os mesmos passos anteriores, também encontramos,

(Ap. 11)₈, que:

$$T_1 = -p_1 \underline{l},$$

onde p_1 é indeterminada. Usaremos para p_1 a seguinte relação:

$$p_1 = \hat{p}_1(p_1, \theta), \text{ se } p_1 \neq \text{constante} \quad (\text{VI.13})$$

$$p_1 = \hat{p}_1(\theta), \text{ se } p_1 \equiv \text{constante}$$

11.2 - Ondas de Aceleração: velocidades local de propagação

Agora, determinaremos as velocidades local de propagação para a mistura satisfazendo (VI.9), (VI.10) e (VI.12). Assim, como p_1 , θ e V_1 são contínuas através da onda de aceleração, p_1 , e_J , η_J , T_1 , K e \underline{h} também são e as condições (V.17) e (V.19) estão automaticamente satisfeitas. De (IV.19)₃, (V.18) e a continuidade de e_J , temos que:

$$[\underline{h}_J] \cdot n = 0 \quad (\text{VI.14})$$

Tendo em vista (V.13)₅, (VI.0)₃, (VI.11), (VI.14) e a continuidade de K e \underline{h} , temos o produto

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \theta \end{bmatrix} (Kn \cdot n) = 0$$

que, através de (VI.12)₃, fornece o resultado:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{VI.15})$$

Então, para uma onda de aceleração (V.13)₅, (VI.11) e (VI.15) produzem:

$$[\text{grad } \theta] \equiv [g] = [h_1] = 0 \quad (\text{VI.16})$$

A condição (VI.16) mostra que a força difusiva m que é função de $\{\rho_1, \theta, V_1, g\}$ é contínua através da onda de aceleração. Logo, como $m = m_1 = -m_2$ e T_1 são contínuas, (V.21)₁ com $\alpha = 1$ fornece:

$$\rho_1 U_1 a_1 = - [\hat{T}_1] n \quad (\text{VI.17})$$

De (VI.9)₅ e (VI.10), temos que:

$$\hat{T}_1 = - \left(\frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \hat{\rho}_1 + \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \hat{\theta}^1 \right) \underline{1} \quad (\text{VI.18})$$

Como $\frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}$, $\frac{\partial p_1}{\partial \theta}$ e $\hat{\theta}^1$ são contínuas, a substituição de (VI.18) em (VI.17) com o uso de (V.15), $\alpha = 1$, produz:

$$\rho_1 U_1^2 a_1 = \rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} (a_1 \cdot n) n \quad (\text{VI.19})$$

O resultado (VI.19) mostra que a_1 é paralelo a n . Assim, temos que $a_1 = (a_1 \cdot n)n$. Lembrando que $V_2 \equiv 0$, podemos escrever o seguinte sistema linear, por (VI.19):

$$\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right) a_1 = 0 \quad (\text{VI.20})$$

$$a_2 \equiv 0$$

Nesse caso, temos uma onda de aceleração na mistura se $a_1 \neq 0$. Logo, segue de (VI.20) que:

$$U_1^2 = \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \quad (\text{VI.21})$$

Usando a equação (V.1), encontramos:

$$\begin{aligned} u_n &= U_1 + n.V_1 \\ U_2 &= u_n \end{aligned} \quad (\text{VI.22})$$

E assim, por (VI.21) e (VI.22) u_n e U_2 estão calculadas.

Se para o constituinte rígido a superfície singular é material, temos que $U_2 = u_n = 0$.

Observe que mesmo trabalhando com $V_2 \neq 0$ para o constituinte rígido temos $D_2 \equiv 0$. Desse modo, não é difícil mostrar que, num caso de propagação com velocidade finita, também temos $a_2 \equiv 0$. Assim, se T_1 é dado por (VI.9)₅, U_1 é calculada por (VI.21). Logo, u_n é determinada por (VI.22)₁ e, nesse caso, $U_2 = u_n - n.V_2$.

A finalidade da forma especial (VI.11) para h_I foi mostrar que $[\tilde{\theta}^\alpha] = 0$ através da onda de aceleração e, dessa maneira, facilitou o cálculo das velocidades local de propagação mesmo com a temperatura variando. Se for de interesse, o salto $[\tilde{\theta}^\alpha]$ pode ser analisado usando (V.21)₂, (VI.16) e a sugestão

$$\tilde{g}^\alpha = \text{grad } \tilde{\theta}^\alpha - L_\alpha^t g$$

Quando temos uma restrição do tipo $\text{div } V_1 \equiv 0$ para o constituinte fluido, por (IV.8)₁ com $\alpha = 1$, (VI.13), (VI.15), (VI.17) e (VI.18), não temos ondas de aceleração na mistura.

No caso de um meio poroso rígido saturado com um fluido não viscoso, temos que:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \epsilon \rho_f \\ \rho_2 &= (1-\epsilon) \rho_s \\ q &= \epsilon \bar{V}_1, \end{aligned} \tag{VI.23}$$

onde ρ_f e ρ_s são, respectivamente, as densidades do fluido e do sólido quando separados, ϵ é a porosidade e q é a velocidade de percolação. De (VI.22)₁ e (VI.23)₃, temos:

$$\epsilon u_n = \epsilon U_1 + n \cdot q \tag{VI.24}$$

$$(\epsilon u_n - n \cdot q)^2 = \epsilon^2 \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}$$

onde (VI.21) foi usada.

12. MISTURA DE UM SÓLIDO ELÁSTICO E UM FLUIDO NÃO VISCOSO

12.1 - Definição e análise constitutiva para a mistura

Consideremos uma mistura de um sólido elástico e um fluido não viscoso, inertes, temperatura comum, $\theta = \theta_1 = \theta_2$, com a mesma notação da secção 11.1.

Definimos constitutivamente a mistura por: $A_J, \eta_J, T_J,$

m e h_I são funções de $\{\rho_1, \theta, a, g, F_2\}$. Então, segue que:

$$\begin{aligned}\bar{A}_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} \bar{\rho}_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \bar{\theta}^1 + \frac{\partial A_1}{\partial a} \bar{a}^1 + \frac{\partial A_1}{\partial g} \bar{g}^1 + \frac{\partial A_1}{\partial F_2} \bar{F}_2^1 \\ \bar{A}_2 &= \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} \bar{\rho}_1^2 + \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \bar{\theta}^2 + \frac{\partial A_2}{\partial a} \bar{a}^2 + \frac{\partial A_2}{\partial g} \bar{g}^2 + \frac{\partial A_2}{\partial F_2} \bar{F}_2^2\end{aligned}$$

(VI.25)

Com a mente voltada para (IV.4), (IV.6), (IV.7), (IV.8), (IV.23), (IV.26), (IV.28), (IV.29), (VI.0), (Ap. 11) e (Ap. 20), a substituição de (VI.25) em (IV.27) produz a desigualdade:

$$\begin{aligned}& \rho \left(\eta + \frac{\partial A_I}{\partial \theta} \right) \bar{\theta}^1 - \rho_2 \left(\eta_2 + \frac{\partial A_2}{\partial \theta} \right) + \rho \frac{\partial A_I}{\partial g} \bar{g}^2 + \rho \frac{\partial A_I}{\partial a} \bar{a}^1 - \\ & - \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} a \cdot \text{grad} \rho_1 + \rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial g} \otimes a \cdot \text{grad} g + m \cdot a - \\ & - \left(\left[\rho_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1} + \rho_1 \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} \right] \underline{1} + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial a} \otimes a + T_1 \right) \cdot L_1 + \frac{h_I \cdot g}{\theta} + \\ & + \left(\left[\rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial F_2} + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial F_2} \right] F_2^t + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial a} \otimes a - T_2 \right) \cdot L_2 + \\ & + \rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial F_2} \otimes (F_2^{-1} a) \cdot \text{Grad} F_2 \stackrel{(2)}{\leq} 0.\end{aligned}$$

(VI.26)

As idéias de COLEMAN e NOLL em (VI.26) produzem:

$$\begin{aligned}\eta &= - \frac{\partial A_I}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial A_I}{\partial g} = 0, \quad \frac{\partial A_I}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial A_2}{\partial \rho_1} &= 0, \quad \text{sim} \left(\frac{\partial A_1}{\partial g} \otimes a \right) = 0 \\ \frac{\partial A_1}{\partial F_2} \otimes (F_2^{-1} a) &+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial F_2} \otimes (F_2^{-1} a) \right)^* = 0\end{aligned}$$

(VI.27)

A forma da condição (VI.27)₃ é devida ao fato que Grad F_2 apresenta a propriedade (Ap. 16). Assim, por (Ap. 18)₄, (VI.27)₃ fornece

$$\frac{\partial A_1}{\partial F_2} = 0$$

Como L_1 e L_2 não estão no conjunto $\{\rho_1, \theta, a, g, F_2\}$ e tendo em vista (IV.23) e (VI.27) temos, por um raciocínio idêntico ao da secção 11.1, que:

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{A}_1(\rho_1, \theta, a) \\ A_2 &= \hat{A}_2(\theta, a, F_2) \\ T_1 &= -p_1 \underline{1} + \rho_1 \frac{\partial A_1}{\partial a} \otimes a \\ T_2 &= \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial F_2} F_2^t + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial a} \otimes a, \end{aligned} \tag{VI.28}$$

onde

$$p_1 = \rho_1^2 \frac{\partial A_1}{\partial \rho_1}$$

Como na secção 11.1, omitiremos a em A_2 e g em η_J . Assim, com a mente em (IV.14), (IV.23), (VI.27) e (VI.28), podemos escrever:

$$\begin{aligned} A_1 &= \hat{A}_1(\rho_1, \theta), \quad A_2 = \hat{A}_2(\theta, F_2) \\ \eta_J &= \hat{\eta}_J(\rho_1, \theta, a, F_2) \\ e_J &= \hat{e}_J(\rho_1, \theta, a, F_2) \\ T_1 &= -p_1 \underline{1}, \quad p_1 = \hat{p}_1(\rho_1, \theta) \\ T_2 &= \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial F_2} F_2^t \end{aligned} \tag{VI.29}$$

Tendo em mente (IV.23) e (VI.27)₁, temos de (VI.26) a desigualdade residual

$$\left\{ \rho_1 \left(\eta_1 + \frac{\partial A_1}{\partial \theta} \right) \alpha + \frac{h_I}{\theta} \right\} \cdot g + m \cdot \alpha \leq 0$$

Para o vetor fluxo de calor h_I , usaremos a mesma forma de (VI.11) com as condições:

$$\underline{h} = \hat{h}(\rho_1, \theta, \alpha, F_2) \quad (\text{VI.30})$$

$$K = \hat{K}(\rho_1, \theta, \alpha, F_2), \quad K n \cdot n \neq 0$$

Se temos uma restrição do tipo $\text{div } V_1 \equiv 0$ para o constituinte fluido, o caso é estudado da mesma maneira que o da secção 11.1. Quando também temos uma restrição do tipo $\text{div } V_2 \equiv 0$ para o constituinte sólido, seguindo os mesmos passos anteriores, escrevemos:

$$T_2 = - p_2 \underline{1} + \rho_2 \frac{\partial A_2}{\partial F_2} F_2^t,$$

onde p_2 é indeterminada. Em ambos os casos, com restrição ou não, escrevemos para T_2 , (VI.29)₁:

$$T_2 = \hat{T}_2(\theta, F_2) \quad (\text{VI.31})$$

12.2 - Ondas de aceleração: velocidades local de propagação

Determinaremos as velocidades local de propagação para uma onda de aceleração na mistura definida por (VI.11),

(VI.29) e (VI.30). Dessa maneira, como ρ_1 , θ , α e F_2 são contínuas através de uma onda de aceleração, ρ_1 , e_J , η_J , T_J , K e h também são. Aplicando o mesmo raciocínio da secção 11.2, escrevemos:

$$\begin{aligned} [\hat{\theta}^\alpha] &= 0 \\ [\text{grad } \theta] &\equiv [g] = [h_I] = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

O resultado (VI.32) mostra que $m = \hat{m}(\rho_1, \theta, \alpha, g, F)$ é contínua através da onda de aceleração. Então, a continuidade de $m = m_1 = -m_2$ e T_2 em $(V.21)_1$ com $\alpha = 2$ produz o resultado:

$$\rho_2 U_2 a_2 = - [\hat{T}_2]_n \quad (\text{VI.33})$$

Usando (VI.31), (VI.32)₁, (VI.33), (Ap. 21), (Ap. 22) e (Ap.28), obtemos:

$$\rho_2 U_2 a_2 = - \left(\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial F_2} [\hat{F}_2] \right)_n, \quad (\text{VI.34})$$

onde o tensor de quarta ordem $\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial F_2}$ é definido por (Ap. 19). O uso de (V.14)₁ com $\alpha = 2$ em (VI.34) fornece:

$$\rho_2 U_2^2 a_2 = \left(\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial F_2} (a_2 \otimes F_2^t n) \right)_n \quad (\text{VI.35})$$

Seja $Q_2 = \hat{Q}_2(\theta, n, F_2)$ um tensor de segunda ordem definido pela relação

$$Q_2 a_2 = \left(\frac{\partial \hat{T}_2}{\partial F_2} (a_2 \otimes F_2^t n) \right)_n \quad (\text{VI.36})$$

para todos os vetores a_2 . Como para o constituinte fluido o raciocínio é o mesmo da secção 11.2, usando (VI.35) e (VI.36), escrevemos:

$$\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right) a_1 = 0 \quad (\text{VI.37})$$

$$(Q_2 - \rho_2 U_2^2 \underline{1}) a_2 = 0$$

O vetor a_1 tem três componentes, como também a_2 . Assim, (VI.37) forma um sistema linear de seis equações com seis incógnitas (as componentes). Para que a solução do sistema não seja trivial (Ap. 12), $a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 > 0$, devemos ter:

$$\det \left[\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right) \left(Q_2 - \rho_2 U_2^2 \underline{1} \right) \right] = 0 \quad (\text{VI.38})$$

A condição (VI.38) pode ser escrita na forma:

$$\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right)^3 \det(Q_2 - \rho_2 U_2^2 \underline{1}) = 0 \quad (\text{VI.39})$$

Desse modo, por (VI.39), podemos analisar o problema como segue:

1º caso:

$$\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right)^3 = 0$$

e

$$\det(Q_2 - \rho_2 U_2^2 \underline{1}) \neq 0$$

Nesse caso, de (VI.37)₂ e (Ap. 12) temos que $a_2 = 0$ e a condição de ondas de aceleração na mistura é escrita apenas por

$a_1 \neq 0$. Para a velocidade U_1 , escrevemos:

$$U_1^2 = \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1}$$

De (V.1), temos que

$$u_n = U_1 + n.V_1$$

$$U_2 = u_n - n.V_2$$

e o problema está determinado.

2º caso:

$$\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right)^3 \neq 0 \quad (\text{VI.40})$$

e

$$\det(Q_2 - \rho_2 U_2^2 \underline{1}) = 0$$

Agora, de (VI.37)₁ temos que $a_1 = 0$ e a condição de ondas de aceleração na mistura é escrita por $a_2 \neq 0$. A velocidade U_2 é determinada por (VI.40)₂, (Ap. 12), e de (V.1) obtemos u_n e U_1 como segue:

$$u_n = U_2 + n.V_2$$

$$U_1 = u_n - n.V_1$$

3º caso:

$$\left(U_1^2 - \frac{\partial p_1}{\partial \rho_1} \right)^2 = 0 \quad (\text{VI.41})$$

e

$$\det(Q_2 - \rho_2 U_2^2 \underline{1}) = 0$$

Observe que, nesse caso, U_1 e U_2 são determinadas diretamente por (VI.41). Se usarmos U_1 calculada por (VI.41)₁ em (V.1) de terminamos outra velocidade U_2 que não corresponde ao U_2 calcu lada por (VI.41)₂, ou seja: U_1 e U_2 obtidas de (VI.41) não cor respondem ao mesmo u_n . Assim, acreditamos que o caso $a_1 \neq 0$ e $a_2 \neq 0$ não é possível.

Se temos uma restrição do tipo $\text{div } V_1 \equiv 0$ para o cons tituinte fluido, pela secção 11.2, o 1º caso não admite ondas de aceleração.

Para um meio poroso elástico saturado com um fluido não viscoso, escrevemos (VI.24).

Nas duas aplicações, por (VI.24), acreditamos na pos sibilidade do cálculo de porosidade usando ondas de aceleração.

APÊNDICE1. TENSORES DE SEGUNDA ORDEM

Sejam v e v' espaços vetoriais de dimensões finitas cada um munido de uma estrutura de produto interno. Representemos por $\text{lin}(v, v')$ o conjunto de todas as transformações lineares de v em v' . Quando $v = v'$, usamos a notação $\text{lin}v \equiv \text{lin}(v, v)$ e os elementos de $\text{lin}v$ são chamados tensores de segunda ordem.

As letras a, u e V denotarão vetores de v e E, F e L tensores de $\text{lin}v$. Para a norma $\| \cdot \|$ em v temos

$$\| u \| = (u \cdot u)^{1/2} \quad (\text{Ap. 0})$$

e, pela própria definição de cada tensor E escrevemos:

$$\begin{aligned} E: v &\rightarrow v \\ u &\rightarrow Eu \end{aligned}$$

O tensor identidade $\underline{1}$ de $\text{lin}v$ é caracterizado por:

$$\underline{1}u = u \quad (\text{Ap. 1})$$

para todo vetor u .

O produto tensorial $u \otimes V$ é um elemento de $\text{lin}v$ definido através da relação

$$(u \otimes V)a = (V \cdot a)u \quad (\text{Ap. 2})$$

qualquer que seja o vetor a .

Agora, sejam s a dimensão de v , $f = \{f_i\}$ ($i=1, \dots, s$) u na base ordenada de v e $f_d = \{f^i\}$ a base dual de v em relação a f . Pode ser mostrado que $\text{lin}v$ também é um espaço vetorial e $f \otimes f_d, f_d \otimes f$ formam bases de $\text{lin}v$. As componentes de um tensor E em relação as bases $f_d \otimes f$ e $f \otimes f_d$ são, respectivamente, os números reais

$$E^{i,j} = f^i \cdot E f_d^j \quad (i, j=1, \dots, s)$$

$$E_i^j = f_i \cdot E f^j$$

O traço de um tensor de $\text{lin}v$ é a função linear

$$\text{tr} : \text{lin}v + \mathbb{R} \equiv \text{conjunto dos reais}$$

definida por

$$\text{tr}(u \otimes v) = u \cdot v \quad (\text{Ap. 3})$$

para todos os vetores u e v . Por meio de (Ap. 3), pode ser verificado que:

$$\text{tr}E = \sum_{i=1}^s E^i \cdot_i = \sum_{i=1}^s E_i^i$$

O produto (composição) de dois tensores E e L é o tensor EL de $\text{lin}v$ definido por

$$(EL)u = E(Lu)$$

Dizemos que F é inversível se existe E tal que

$$FE = EF = \underline{1}$$

Quando E existe, o mesmo é único e será representado por F^{-1} .
Então, se F é inversível, temos:

$$FF^{-1} = F^{-1}F = \underline{1} \quad (\text{Ap. 4})$$

O transporte E^t de E é o único elemento de $\text{lin}v$ que satisfaz a relação

$$Eu \cdot V = u \cdot E^t V \quad (\text{Ap. 5})$$

para todos os vetores u e V . Em relação a operação transposição, podemos escrever:

$$(u \otimes V)^t = V \otimes u$$

$$(E^t)^t = E$$

(Ap. 6)

$$(EF)^t = F^t E^t$$

$$\text{tr} E^t = \text{tr} E$$

$$(F^t)^{-1} = (F^{-1})^t, \text{ se } F \text{ é inversível}$$

Um tensor Q de $\text{lin}v$ é dito ortogonal se

$$QQ^t = Q^t Q = \underline{1}$$

Assim, quando Q é ortogonal, temos:

$$Q \text{ é inversível e } Q^{-1} = Q^t$$

$$Qu \cdot QV = u \cdot V$$

Quando $E = E^t$ o tensor E é dito simétrico, anti-simétrico se $E = -E^t$. Cada tensor L pode ser decomposto, de modo único, numa parte simétrica L^s e noutra anti-simétrica L^a , como segue:

$$L = L^s + L^a$$

(Ap. 7)

$$\text{sim } L \equiv L^s = \frac{1}{2} (L + L^t)$$

$$\text{antisim } L \equiv L^a = \frac{1}{2} (L - L^t)$$

Não é difícil mostrar que:

$$(u \otimes v)E^t = u \otimes EV$$

(Ap. 8)

$$E(V \otimes u) = EV \otimes u$$

A definição (Ap. 3) em (Ap. 8)₁ sugere uma estrutura de produto interno em $\text{lin}V$. Tal produto é definido por

$$E.L = \text{tr}(EL^t)$$

(Ap. 9)

e, por (Ap. 6), temos que:

$$E.L = L.E$$

Assim, por (Ap. 9), já podemos definir uma norma $\| \quad \|$ em $\text{lin}V$:

$$\| E \| = (E.E)^{1/2}$$

(Ap. 10)

Com o estudo em $\text{lin}V$ feito até aqui, pode ser demonstrado que:

$$\text{tr} E = \underline{1} \cdot E$$

$$\text{tr}(EF) = \text{tr}(FE)$$

$$E \cdot LF = EF^t \cdot L$$

$$u \cdot EV = E \cdot u \otimes V$$

(Ap. 11)

$$E \cdot L = 0, \text{ se } E \text{ é simétrico e } L \text{ é anti-simétrico}$$

$$E \cdot L = (\text{sim } E) \cdot L, \text{ se } L \text{ é simétrico}$$

$$E \cdot L = (\text{antisim } E) \cdot L, \text{ se } L \text{ é anti-simétrico}$$

$$E \cdot L = (E + \lambda \underline{1}) \cdot L, \text{ se } \underline{1} \cdot L = 0, \lambda = \text{escalar}$$

$$V \neq 0 \text{ e } \text{sim}(u \otimes V) = 0, \text{ então } u = 0$$

Quando a dimensão de v é 3, o determinante de E ,

$$\det : \text{lin } v \rightarrow \mathbb{R}$$

em relação a base f é definido por

$$(\det E)^f = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} E_{.i}^i E_{.j}^j E_{.k}^k,$$

onde

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (ijk) \text{ é uma permutação par de } (123) \\ -1, & \text{se } (ijk) \text{ é uma permutação ímpar de } (123) \\ 0, & \text{se } i=j, i=k \text{ ou } j=k \end{cases}$$

Pode ser mostrado que $\det E$ independe da base usada na sua definição e:

$$\det (EL) = (\det E) (\det L)$$

(Ap. 12)

$$\det (E - \lambda \underline{1}) = -\lambda^3 + \lambda^2 \text{tr} E - \frac{1}{2} \left((\text{tr} E)^2 - \text{tr} E^2 \right) + \det E,$$

onde λ é um escalar.

E é inversível se, e somente se, $\det E \neq 0$
 $u \neq 0$ e $Eu = 0$, então $\det E = 0$

2. TENSORES DE ORDEM MAIOR DO QUE DOIS

2.1 - Tensores de terceira ordem

Os elementos de $\text{lin}(v, \text{lin}v)$ ou $\text{lin}(\text{lin}v, v)$ são chamados tensores de terceira ordem. Cada tensor T de $\text{lin}(v, \text{lin}v)$ é uma transformação linear de v em $\text{lin}v$, ou seja:

$$T: v \rightarrow \text{lin}v$$

$$u \rightarrow Tu = E$$

O transposto T^t de T é um elemento do conjunto $\text{lin}(\text{lin}v, v)$ e escrevemos:

$$T^t: \text{lin}v \rightarrow v$$

$$E \rightarrow T^t E, \quad Tu \cdot E = u \cdot T^t E \quad (\text{Ap. 13})$$

Para o produto tensorial, escrevemos:

$$E \otimes u, \text{ elemento de } \text{lin}(v, \text{lin}v)$$

$$u \otimes E, \text{ elemento de } \text{lin}(\text{lin}v, v)$$

$$(E \otimes u)a = (u \cdot a)E, \text{ para todo vetor } a \quad (\text{Ap. 14})$$

$$(u \otimes E)L = (E \cdot L)u, \text{ para todo tensor } L$$

$$(E \otimes u)^t = u \otimes E$$

Em relação ao produto interno em $\text{lin}(v, \text{lin}v)$ e $\text{lin}(\text{lin}v, v)$, temos que:

$$T \cdot E \otimes u = T^t \cdot u \otimes E = Tu \cdot E = T^t E \cdot u \quad (\text{AP. 15})$$

Seja $*$ uma função que permuta dois índices das componentes do tensor T de $\text{lin}(v, \text{lin}v)$ com a propriedade:

$$(T^*)^* = T$$

Como os domínios de T e T^t são diferentes em relação aos espaços vetoriais, não tem sentido definir simetria ou anti-simetria semelhante aos tensores de $\text{lin}v$. Mas, o tensor T pode apresentar alguma propriedade de simetria ou anti-simetria. Por exemplo, em relação a função $*$: T é simétrico se

$$T = T^*, \quad (\text{Ap. 16})$$

anti-simétrico se

$$T = -T^* \quad (\text{Ap. 17})$$

Qualquer tensor T de $\text{lin}(v, \text{lin}v)$ pode ser decomposto como segue:

$$T = T^s + T^a$$

$$T^s = \frac{1}{2}(T + T^*)$$

$$T^a = \frac{1}{2}(T - T^*),$$

onde T^s satisfaz (Ap. 16) e T^a (Ap. 17). Um tensor com compo

entes $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}$ apresenta a propriedade (Ap. 16), pois se as funções u_i são suaves, $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}$. Assim, a função $*$, nesse caso, permuta os índices j e k .

Temos os resultados:

$$T \cdot (E \otimes u) = T \cdot (E \otimes u)^*, \text{ se } T = T^*$$

$$T \cdot (E \otimes u) = T \cdot (E \otimes u)^a, \text{ se } T = -T^* \quad (\text{Ap. 18})$$

$$u \neq 0 \text{ e } (E \otimes u)^S = 0, \text{ então } E = 0$$

2.2. Tensores de ordem maior que três

Seja Ω_3 o espaço dos tensores de terceira ordem. Os elementos de $\text{lin}(v, \Omega_3)$, $\text{lin}(\Omega_3, v)$ e $\text{lin}(\text{lin}v, \text{lin}v)$ são chamados tensores de quarta ordem. Se Γ é um tensor de $\text{lin}(v, \Omega_3)$, o transposto Γ^t é um elemento de $\text{lin}(\Omega_3, v)$ e escrevemos as definições:

$$\begin{aligned} \Gamma: v + \Omega_3 & \quad \Gamma^t: \Omega_3 + v \\ u + \Gamma u & \quad \sigma + \Gamma^t \sigma \\ \Gamma u \cdot \sigma & = \Gamma^t \sigma \cdot u \end{aligned}$$

onde σ é um tensor de terceira ordem. Quando Γ é um elemento de $\text{lin}(\text{lin}v, \text{lin}v)$ o transposto Γ^t também é um elemento do mesmo conjunto e temos:

$$\begin{aligned} \Gamma: \text{lin}v + \text{lin}v \\ E + \Gamma E & \quad (\text{Ap. 19}) \\ \Gamma E \cdot L & = E \cdot \Gamma^t L \end{aligned}$$

Os tensores de quarta ordem definidos por $\text{lin}(\text{lin}v, \text{lin}v)$ apre

sentam uma estrutura idêntica aos de $linv$. Seguindo os passos usados para estudar tensores de ordem dois, três e quatro, podemos definir tensores de ordem maior do que quatro. Assim, por exemplo, se Γ é um tensor de ordem maior que quatro e σ é um tensor de ordem menor uma unidade daquela de Γ , podemos escrever:

$$\Gamma u = \sigma, \quad \Gamma^t \sigma = V$$

$$\Gamma u \cdot \sigma = u \cdot \Gamma^t \sigma, \quad (\sigma \otimes u)V = (u \cdot V)\sigma \quad (\text{Ap. 20})$$

$$(\sigma \otimes u)^t = u \otimes \sigma, \quad (u \otimes \sigma)\underline{\sigma} = (\sigma \cdot \underline{\sigma})u$$

$$\Gamma \cdot \sigma \otimes u = \Gamma^t \cdot u \otimes \sigma = \Gamma u \cdot \sigma,$$

onde $\underline{\sigma}$ é da mesma ordem que σ .

3. DIFERENCIAÇÃO

Seja ϕ uma função com valores escalares, vetoriais, ou tensoriais. A função ϕ com valores escalares será representada por γ . Quando ϕ tem valores vetoriais, ou tensoriais será denotada por ψ .

Se o domínio de ϕ é um intervalo da reta real, a derivada $\phi' \equiv \frac{d\phi}{dt}$ no ponto $t = t_0$ do domínio é definida pela relação

$$\phi(t_0 + \tau) - \phi(t_0) = \left(\frac{d\phi}{dt}(t_0)\right)\tau + \theta(t_0, \tau)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\theta(t_0, \tau)}{\tau} = 0$$

(Ap. 21)

Quando o domínio de ϕ é um sub-conjunto do espaço vetorial v ou um conjunto de tensores, a derivada $\frac{d\phi}{d\zeta}$ em $\zeta = \zeta_0$ do domínio é definida através de:

$$\gamma(\zeta_0 + \xi) - \gamma(\zeta_0) = \frac{d\gamma}{d\zeta}(\zeta_0) \cdot \xi + \underline{\theta}(\zeta_0, \xi)$$

(Ap. 22)

$$\psi(\zeta_0 + \xi) - \psi(\zeta_0) = \left(\frac{d\psi}{d\zeta}(\zeta_0) \right) \xi + \underline{\theta}(\zeta_0, \xi)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\underline{\theta}(\zeta_0, \xi)}{\|\xi\|} = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\underline{\theta}(\zeta_0, \xi)}{\|\xi\|} = 0$$

observe que se ψ e ζ são elementos de $\mathcal{L}_m v$, $\frac{d\psi}{d\zeta}$ é um tensor de quarta ordem no sentido de (Ap. 19).

Agora, consideremos o caso em que o domínio de Φ é um sub-conjunto do espaço Euclidiano pontual de dimensão s . O gradiente de Φ , $\text{grad } \Phi$, no ponto $x = x_0$ é definido por:

$$\gamma(x_0 + h) - \gamma(x_0) = ((\text{grad } \gamma)(x_0)) \cdot h + \underline{\theta}(x_0, h)$$

(Ap. 23)

$$\psi(x_0 + h) - \psi(x_0) = ((\text{grad } \psi)(x_0)) h + \underline{\theta}(x_0, h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{\theta}(x_0, h)}{\|h\|} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\underline{\theta}(x_0, h)}{\|h\|} = 0$$

Para o operador divergente, div , definimos:

$$\text{div } u = t(\text{grad } u)$$

$$a \cdot \text{div } E = \text{div}(E^t a), \text{ para todo vetor constante } a$$

$$\sigma \cdot \text{div } \Gamma = \text{div}(\Gamma^t \sigma), \text{ para todo tensor constante } \sigma$$

(Ap. 24)

onde Γ é de ordem maior do que dois e σ é um tensor de ordem menor uma unidade daquela do tensor Γ .

Se Π é um vetor, ou tensor arbitrário e constante, por (Ap. 19) e (Ap. 23), podemos escrever:

$$\text{grad}(\psi \cdot \Pi) = (\text{grad} \psi)^t \Pi \quad (\text{Ap. 25})$$

Escrevemos os seguintes resultados:

$$(\psi^t)' = (\psi')^t$$

$$(\gamma \phi)' = \gamma' \phi + \gamma \phi'$$

$$(\phi \psi)' = \phi' \psi + \phi \psi' \quad (\text{Ap. 26})$$

$$(\psi_1 \cdot \psi_2)' = \psi_1' \cdot \psi_2 + \psi_1 \cdot \psi_2'$$

$$(\psi_1 \otimes \psi_2)' = \psi_1' \otimes \psi_2 + \psi_1 \otimes \psi_2',$$

onde ψ_1 e ψ_2 são campos semelhantes a ψ

Para os operadores gradiente e divergente, temos:

$$\text{grad}(\gamma u) = \gamma \text{grad} u + u \otimes \text{grad} \gamma$$

$$\text{div}(\gamma u) = \gamma \text{div} u + u \cdot \text{grad} \gamma$$

$$\text{grad}(u \cdot V) = (\text{grad} u)^t V + (\text{grad} V)^t u \quad (\text{Ap. 27})$$

$$\text{div}(u \otimes V) = u \text{div} V + (\text{grad} u) V$$

$$\text{div}(E^t V) = E \cdot \text{grad} V + V \cdot \text{div} E$$

$$\text{div}(\gamma E) = \gamma \text{div} E + E \text{grad} \gamma$$

4. SALTO, DESCONTINUIDADE: LEMA DE HADAMARD

Quando ϕ definida num sub-conjunto do espaço Euclidiano pontual é descontínua através de uma superfície singular, es-
crevemos para o salto $[\phi]$ de ϕ

$$[\phi] = \phi^+ - \phi^-$$

Assim, temos os seguintes resultados:

$$[\psi^t] = [\psi]^t$$

$$[\gamma\phi] = \gamma[\phi], \text{ se } [\gamma] = 0$$

$$[\gamma\phi] = [\gamma]\phi, \text{ se } [\phi] = 0$$

(Ap. 28)

$$[\phi_1 + \phi_2] = [\phi_1] + [\phi_2]$$

$$[\phi\psi] = \phi[\psi], \text{ se } [\phi] = 0$$

$$[\phi\psi] = [\phi]\psi, \text{ se } [\psi] = 0$$

$$[\psi_1 \cdot \psi_2] = [\psi_1] \cdot \psi_2, \text{ se } [\psi_2] = 0$$

$$[\psi_1 \otimes \psi_2] = [\psi_1] \otimes \psi_2, \text{ se } [\psi_2] = 0$$

Lema de Hadamard: suponhamos que a função γ com valo-
res escalares é definida e continuamente diferenciável no inte-
rior de uma região β^+ do espaço Euclidiano pontual com fron-
teira suave S e que, para cada posição x em S , os limites $\gamma^+(x)$
 $(\text{grad}\gamma)^+(x)$ de $\gamma(y)$ e $(\text{grad}\gamma)(y)$, respectivamente, quando y
tende para x ao longo de caminhos contidos em β^+ são definidos
e finitos. Se $x = \hat{x}(l)$ é uma curva suave sobre S e γ^+ e

$(\text{grad } \gamma)^+$ são diferenciáveis nessa curva, então

$$\frac{dy^+}{dl} = (\text{grad } \gamma)^+ \cdot \frac{d\hat{x}}{dl} \quad (\text{Ap. 29})$$

Prova:

Sejam M e N dois pontos separados de S de tal maneira que $x = \hat{x}(\ell)$ é um caminho em S de M até N . Consideremos também dois pontos separados \underline{M} e \underline{N} no interior de β^+ de tal modo que $y = \hat{y}(\ell)$ é um caminho no interior de β^+ de \underline{M} até \underline{N} de acordo com a figura abaixo:



Das hipóteses sobre γ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \gamma^+(M) - \gamma^+(N) &= \int_{MN} \frac{dy^+}{dl} dl, \text{ sobre } S \\ \gamma(\underline{M}) - \gamma(\underline{N}) &= \int_{\underline{MN}} \frac{dy}{dl} dl, \text{ no interior de } \beta^+ \end{aligned} \quad (\text{Ap. 30})$$

Como $\gamma(y) = \gamma(\hat{y}(\ell))$, temos que (regra da cadeia):

$$\gamma(\underline{M}) - \gamma(\underline{N}) = \int_{\underline{MN}} (\text{grad } \gamma \cdot \frac{d\hat{y}}{dl}) dl$$

Quando o par $(\underline{M}, \underline{N})$ tende para (M, N) , o caminho $y = \hat{y}(\ell)$ tende para o caminho $x = \hat{x}(\ell)$ implicando que γ e $\text{grad } \gamma$ tendem para

γ^+ e $(\text{grad } \gamma)^+$, respectivamente. Logo,

$$\gamma^+(M) - \gamma^+(N) = \int_{MN} \left((\text{grad } \gamma)^+ \cdot \frac{d\hat{x}}{d\ell} \right) d\ell \quad (\text{Ap. 31})$$

Igualando os resultados (Ap. 30)₁ e (Ap. 31) com o argumento que o caminho $x = \hat{x}(\ell)$ é arbitrário, segue a condição (Ap. 29). Em relação a uma superfície singular, podemos aplicar o lema de Hadamard para o outro lado da superfície (lado -), escrevendo:

$$\frac{d\gamma^-}{d\ell} = (\text{grad } \gamma)^- \cdot \frac{d\hat{x}}{d\ell} \quad (\text{Ap. 32})$$

De (Ap. 29), (Ap. 32) e a notação para o salto, obtemos:

$$\frac{d[\gamma]}{d\ell} = [\text{grad } \gamma] \cdot \frac{d\hat{x}}{d\ell}, \quad (\text{Ap. 33})$$

onde

$$[\gamma] \equiv \gamma^+ - \gamma^-$$

$$[\text{grad } \gamma] \equiv (\text{grad } \gamma)^+ - (\text{grad } \gamma)^-$$

Para o campo vetorial, ou tensorial ψ , a substituição de $\gamma = \psi \cdot \mathbb{I}$ com o uso de (Ap. 25) e (Ap. 26) produz para o lema de Hadamard

$$\frac{d\psi^+}{d\ell} = (\text{grad } \psi)^+ \frac{d\hat{x}}{d\ell} \quad (\text{Ap. 34})$$

BIBLIOGRAFIA

1. D.C. LEIGH, Nonlinear Continuum Mechanics (Mc-Graw-Hill Book Company, New York, 1968).
2. C. TRUESDELL and W. NOLL, The non-linear Theories of Mechanics, Handbuch der Physik (Ed. S. Flügge) vol.III/3 (Springer-Verlag, Berlin, 1965).
3. C.C. WANG and C. TRUESDELL, Introduction to Rational Elasticity (Noordhoff International Publishing Leyden, 1973).
4. C. TRUESDELL, Rational Thermodynamics (Mc-Graw-Hill, New York, 1969).
5. C. TRUESDELL and R. TOUPIN, The Classical Field Theories, Handbuch der Physik (Ed. S. Flügge) (Springer-Verlag, Berlin, 1960).
6. T. Y. THOMAS, Extended Compatibility Conditions for the Study of Surfaces of Discontinuity in Continuum Mechanics (Journal of Mathematics and Mechanics, vol. 6, n° 3, 1957).
7. R.M. BOWEN and C. C. WANG, On Displacement Derivatives (Quarterly of Applied Mathematics, April, 1971).
8. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity. Handbuch der Physik (Chief Ed. S. Flügge) vol. VIa/2 (Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972).
9. P.J. CHEN, Growth and decay of waves in solids. Handbuch der Physik (Ed. C. TRUESDELL) vol. VIa/3 (Springer-Verlag, 1973).

10. MATTHEW F. McCARTHY, Surface Singular and Wave Continuum Physics (Ed. A.C. ERINGEN) vol. II (Academic Press, New York, 1975).
11. R. J. ATKIN and R. E. CRAINE, Continuum Theories of Mixtures: Basic Theory and Historical Development (Q. Jl Mech. appl. Math., vol. XXIX, Pt. 2, 1976).
12. R. M. BOWEN, Theory of Mixtures. Continuum Physics (Ed. A. C. ERINGEN) vol. III (Academic Press, New York, 1976).
13. A.C. ERINGEN and J. D. INGRAM, A continuum Theory of Chemically Reacting Media. (Int. J. Engng Sci. vol. 3, 197-212, 1965).
14. J. R. LEININGER and R. RAY NACHLINGER, Speed of Propagation of Acceleration Waves in a Binary Nonreacting Mixture (The Journal of the Acoustical Society of America, vol. 49, Número 3 (Part 2), 1971).
15. R. J. ATKIN and R.E. CRAINE, Continuum Theories of Mixtures: Applications. (J. Inst. Maths. Applics (1976) 17, 153-207).
16. B.D. COLEMAN and M.E. GURTIN, Thermodynamics with Internal State Variables (Journal of Chemical Physics, vol. 47, nº 2, 1967).