

ANÁLISE CRÍTICA DE UM MODELO FENOMENOLÓGICO DE VIBRAÇÕES
INDUZIDAS POR VÓRTICES VIA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL E
QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

Bruno Henriques Soares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Fernando Alves Rochinha

Rio de Janeiro
Outubro de 2017

ANÁLISE CRÍTICA DE UM MODELO FENOMENOLÓGICO DE VIBRAÇÕES
INDUZIDAS POR VÓRTICES VIA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL E
QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

Bruno Henriques Soares

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Fernando Alves Rochinha, D.Sc.

Dr. Gabriel Mario Guerra Bernadá, D.Sc.

Prof. Luís Volnei Sudati Sagrilo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2017

Soares, Bruno Henriques

Análise crítica de um modelo fenomenológico de vibrações induzidas por vórtices via análise de sensibilidade global/Bruno Henriques Soares – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XIII, 118 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Fernando Alves Rochinha

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 101-110.

1. Vibrações induzidas por vórtices 2. Análise de sensibilidade 3. Discrepâncias de modelo. I. Rochinha, Fernando Alves. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*"Whether you think you can or
think you can't, you're right."
Henry Ford*

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Danielle, que foi minha inspiração e me apoiou durante a grande jornada de ganho de conhecimento e aperfeiçoamento que foi o mestrado para mim, por vezes até quando nem mesmo eu acreditava. Suportou ao meu lado as dificuldades e os sacrifícios que foram necessários para atingir o objetivo e esteve presente nos momentos mais felizes que tive neste período, disso tudo nunca esquecerei.

Aos meus pais, Fernando e Fátima, meus grandes exemplos. Sempre acreditaram no meu potencial como aluno e profissional, financiando e apoiando uma vida inteira de estudos, assim como o meu mestrado. Agradeço do fundo do meu coração e espero que estejam orgulhosos de mim neste dia.

À minha irmã, Gabriela, por ter sido muitas vezes a minha motivação nos momentos difíceis. Enfrentou uma vida de sacrifícios e glórias no esporte e hoje se dedica para vencer pelo estudo e trabalho. É com grande orgulho que recebo sua graduação como engenheira no próximo mês. Ao meu tio Nico, meus avós, Ely, Odete, Daniel e Antônio, à memória de minha madrinha, Floripes, meus sogros, Max e Valfra e a minha família pelo carinho de sempre.

Ao meu orientador, Fernando Rochinha, por embarcar em um projeto de grande "incerteza". Agradeço por fazer tudo acontecer e por ter guiado o trabalho para o caminho que tomou.

Ao amigo de projeto, Gabriel Guerra, pelas inúmeras tardes que dedicou a me ensinar e por sua contribuição essencial para o desenvolvimento desta dissertação.

Ao PEM da UFRJ e aos professores que tive, pela oportunidade, ensino inestimável e exemplo. Aos professores Luiz Marques e Manoel Leopoldino, pelo incentivo e apoio.

Aos amigos de uma vida, Lucas, Felipe, Daniel, Bruno, Gerardo e outros pela amizade mesmo em minha ausência e pelas memórias que guardo com carinho.

To my Welsh family, Calum, Kristian, Jac, Adam and others, for the moments and memories which I keep in my heart. I look forward to meeting you again.

Um Agradecimento especial ao meu companheiro de todas as horas, Snow, por ter permanecido ao meu lado e trazido alegria a todos os dias que dediquei à dissertação.

Por fim, agradeço a Deus por tudo.

"Em nossas vidas diárias devemos perceber que não é a felicidade que nos faz agradecidos, mas a gratidão é que nos faz felizes." – David Steindl-Rast.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE CRÍTICA DE UM MODELO FENOMENOLÓGICO DE VIBRAÇÕES
INDUZIDAS POR VÓRTICES VIA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL E
QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

Bruno Henriques Soares

Outubro/2017

Orientador: Fernando Alves Rochinha

Programa: Engenharia Mecânica

O fenômeno de Vibrações Induzidas por Vórtices (VIV) de cilindros é investigado na presente dissertação. Estas vibrações são resultantes da interação fluido-estrutura complexa entre um corpo e um escoamento ao seu redor, sendo indesejáveis na indústria *offshore*. Com isso, modelos fenomenológicos vêm sendo desenvolvidos para a previsão do fenômeno de VIV, permitindo que seu pequeno tempo de computação possa ser explorado, tornando viável uma série de estudos por Análise de Sensibilidade Global (ASG) e análise de incertezas que podem ser realizados para o seu aprimoramento, desbloqueando todo o seu potencial de fornecer informações valiosas sobre o fenômeno.

A ASG de um modelo fenomenológico com a estimativa dos índices de sensibilidade por Simulações de Monte Carlo identificou 4 parâmetros de entrada (C_{L0} , C_{D0} , A_y e ε_y) predominantes para a variabilidade das respostas do modelo. Foi verificado que A_y e ε_y apresentam papel combinado relacionado à capacidade do modelo de representar a sincronização de frequências. Ao passo que a ASG indicou padrões de C_{D0} no funcionamento do modelo que sugeriam o emprego de uma abordagem mais elaborada com o objetivo de satisfazer a dependência entre C_{D0} e a amplitude de vibração transversal do cilindro, fato encontrado na literatura. No presente estudo, uma função descontínua foi adotada para C_{D0} com o objetivo de satisfazer esta dependência.

Em síntese, o modelo analisado com a proposta de ajuste de C_{D0} , A_y e ε_y acompanha com maior precisão as tendências, frequências de vibração, domínio de sincronização de frequências e amplitudes de oscilações do sistema em VIV nas duas direções. Estudos com diferentes configurações dinâmicas indicam que o método pode ser desenvolvido similarmente para uma grande variedade de sistemas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CRITICAL ANALYSIS OF A VORTEX-INDUCED VIBRATIONS
PHENOMENOLOGICAL MODEL VIA GLOBAL SENSITIVITY ANALYSIS AND
UNCERTAINTY QUANTIFICATION

Bruno Henriques Soares

October/2017

Advisor: Fernando Alves Rochinha

Department: Mechanical Engineering

The phenomenon of vortex-induced vibrations (VIV) is investigated in the present Dissertation. These vibrations are the result of the intricate fluid-structure interaction between the body and its external flow, being undesirable in the offshore industry. Therefore, phenomenological models continue to be developed and popularised to the prediction of VIV, allowing its low computational time to be explored via global sensitivity analysis (GSA) and uncertainty analysis, which could result in the model enhancement, allowing it to provide valuable information about the phenomenon.

The GSA of a semi-empirical model with its sensitivity indices estimated by the Monte Carlo method was able to identify four input parameters (C_{L0} , C_{D0} , A_y and ε_y) distinguishingly important to the outputs variability. Thus, the investigation and calibration of these parameters could improve the model capability. From the four highlighted input factors, A_y and ε_y present a combined role which was verified to increase the model's ability to simulate the lock-in interval, perhaps the critical imprecision of the original model. Meanwhile, C_{D0} sensitivity patterns from the GSA results indicate that a more realistic approach for the parameter could be beneficial. In fact, according to the literature review, C_{D0} is related to the cross-flow oscillation amplitudes. In this study, the approach to this dependence was followed by proposing a discontinuous function for C_{D0} .

It is possible to conclude that the analysed model with the proposed C_{D0} , A_y and ε_y is able to represent more accurately the tendencies, vibration frequencies, the lock-in and both inline and cross-flow oscillation amplitudes. Moreover, the study of different configurations and dynamic properties demonstrated that the methodology could be conducted similarly to a variety of systems and conditions.

SUMÁRIO

Lista de figuras.....	x
Lista de tabelas.....	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	5
1.2 OBJETIVO.....	7
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	8
2.1 SISTEMAS ACOPLADOS	8
2.2 NOTAS SOBRE TURBULÊNCIA E TEORIA DE VÓRTICES	8
2.3 ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS	9
2.3.1 Número de Reynolds	10
2.3.2 Camada limite.....	10
2.3.3 Separação da camada limite e desprendimento de vórtices.....	11
2.4 FREQUÊNCIA DE DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES	14
2.5 VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES	16
2.6 CONDIÇÃO DE SINCRONIZAÇÃO DE FREQUÊNCIAS.....	16
2.6.1 Velocidade reduzida	18
2.6.2 Amplitude adimensional.....	19
3 REVISÃO DE LITERATURA.....	20
3.1 MODELOS PARA PREVISÃO DO VIV	20
3.1.1 Modelos de VIV de baixa fidelidade.....	20
3.1.2 Modelos de VIV de alta fidelidade.....	26
3.2 QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS	29
3.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	30
3.4 DISCREPÂNCIAS DE MODELO	36
4 MODELO DE VIV	43

4.1 APRESENTAÇÃO DO MODELO	43
4.2 DADOS EXPERIMENTAIS	49
4.3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO FENOMENOLÓGICO DE VIV	53
4.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE	65
4.4.1 Variabilidade dos parâmetros de entrada	67
4.4.2 Especificações e metodologia.....	70
4.4.3 Resultados e discussões.....	73
5 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS.....	94
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	101
APÊNDICE A – ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO DE VIV.....	111
APÊNDICE B – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL POR DECOMPOSIÇÃO DE VARIÂNCIAS E ESTIMATIVA DOS ÍNDICES DE SENSIBILIDADE PELO MÉTODO DE MONTE CARLO	115

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Origem das incertezas no processo de modelagem e simulação para a previsão de um sistema físico.....	3
Figura 2: Algumas das estruturas que sofrem ação do VIV. a) Plataforma TLP. Extraído de PEREIRA [9]. b) Poço termométrico em tubulação. Adaptado de WILLIAMS [10]. c) Riser em catenária (SCR) [11]. d) Dutos horizontais e vãos livres [12].	6
Figura 3: Ilustração dos teoremas de Helmholtz [17]......	9
Figura 4: Distribuição de velocidade na camada limite. Adaptado de SILVA FREIRE [19]......	11
Figura 5: Distribuição de velocidade no escoamento em uma superfície curva e ponto de separação. Adaptado de FIELDING [20].	11
Figura 6: Separação da camada limite. Extraído de FIELDING [20]......	12
Figura 7: Esteira de von Karman. Retirada de SANDRI [23].	14
Figura 8: Número de Strouhal para um cilindro fixo de baixa rugosidade. Adaptado de SUMER & FREDSE [22].	15
Figura 9: Histerese no fenômeno de vibrações induzidas por vórtices. Adaptada de KHALAK & WILLIAMSON [30]......	18
Figura 10: Região de sincronização. Amplitude adimensional x frequência de desprendimento de vórtices. Adaptado de WILLIAMSON & ROSHKO [32].	19
Figura 11: Esquema do sistema dinâmico fluido-estrutura. Adaptado de BAI & QIN [42]......	44
Figura 12: Forças atuando em um cilindro em vibração no plano XY com velocidade instantânea V . Retirado de POSTNIKOV <i>et al.</i> [44]......	45
Figura 13: Resposta do sistema ($m^*=6,9$ e $(m^*+C_a)\zeta=0,0145$) . Amplitudes máximas de vibração (y/D e x/D) plotadas versus a velocidade reduzida. Adaptada de JAUVTIS & WILLIAMSON [43]......	51
Figura 14: Frequências de oscilações transversais do sistema, ($m^*=6,9$ e $(m^*+C_a)\zeta=0,0115$, adimensionalizadas pela frequência natural do aparato experimental ($f_y^* = f_y/\omega_n$) plotadas a respeito da evolução de velocidades reduzidas. Adaptada de JAUVTIS & WILLIAMSON [43]......	52

Figura 15: (a) Resposta do modelo nas direções x e y para $U_{red} = 6,4$ com (x/D) máxima de 0,3765 e (y/D) máxima de 0,9265. (b) Trajetória do cilindro no plano XY para $U_{red}=6,4$.	57
Figura 16: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações ortogonais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$ ($m^*=6,9$).	58
Figura 17: Oscilações transversais para a varredura, $U_{red}=[0:12]$ ($m^*=6,9$ e $(m^*+C_a)\zeta=0,0115$), no domínio da frequência e adimensionalizadas pela frequência natural do sistema.	60
Figura 18: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações transversais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. Linha azul pontilhada: $m^*=5$; Linha vermelha cortada: $m^*=6,9$.	62
Figura 19: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações transversais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. Linha azul pontilhada: $m^*=14$; Linha vermelha cortada: $m^*=6,9$.	63
Figura 20: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações transversais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. Linha azul pontilhada: $m^*=27$; Linha vermelha cortada: $m^*=6,9$.	64
Figura 21: Estimativa dos índices de sensibilidade totais para as amplitudes de vibrações em x para três velocidades de escoamento: 1) $U_{red} = 4,5$, 2) $U_{red} = 6,4$ e 3) $U_{red} = 9,0$. Tempo total de computação aproximado: 301 horas e 38 minutos para $N=3000$.	75
Figura 22: Estimativa dos índices de sensibilidade totais para a componente ortogonal máxima da força hidrodinâmica para três velocidades de escoamento: 1) $U_{red} = 4,5$, 2) $U_{red} = 6,4$ e 3) $U_{red} = 9,0$. Tempo total de computação aproximado: 306 horas e 31 minutos para $N=3000$.	77
Figura 23: Estimativa dos índices de sensibilidade totais para as frequências de oscilações transversais para três velocidades de escoamento: 1) $U_{red} = 4,5$, 2) $U_{red} = 6,4$ e 3) $U_{red} = 9,0$. Tempo total de computação aproximado: 296 horas e 46 minutos para $N=3000$.	78
Figura 24: Estimativa dos índices de sensibilidade totais a respeito das amplitudes de oscilações transversais para uma varredura de 23 velocidades de escoamento. A região de sincronização de frequências do modelo é destacada no espaço entre as linhas	

vermelhas verticais. Tempo total de computação aproximado: 2208 horas e 54 minutos para $N=3000$	80
Figura 25: Intervalos de confiabilidade construídos para 3000 amostras das respostas no domínio do tempo para $U_{red} = 6,4$ com C_{L0} , A_y , ε_y , C_{D0} , C_{L0} , A_x , ε_x e P conforme definidos na Tabela 3. a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento. b) Amplitudes de vibrações na direção ortogonal ao escoamento. Tempo de computação total aproximado: 27 minutos.	83
Figura 26: Intervalos de confiabilidade construídos para 3000 amostras da varredura de velocidades reduzidas para as amplitudes de vibrações transversais. a) C_{L0} , A_y , ε_y , C_{D0} , C_{L0} , A_x , ε_x e P conforme definidos na Tabela 3. b) Apenas A_x , ε_x e P parâmetros aleatórios conforme Tabela 3. Tempo de computação total aproximado: 127 horas e 54 minutos.....	84
Figura 27: Avaliação da atuação de cada parâmetro de entrada no modelo. Gráficos gerados a partir da divisão igualitária do intervalo de variabilidade, de acordo com a Tabela 3, de cada parâmetro em 3000 pontos que foram plotados por linhas verdes. (a) C_{L0} , (b) A_y , (c) A_x , (d) ε_y , (e) ε_x , (f) P , (g) C_{D0} . Tempo de computação total aproximado: 142 horas e 48 minutos.	86
Figura 28: Ajuste da largura do limite de sincronização de frequências para a varredura de velocidades reduzidas com $A_y=26$ e $\varepsilon_y=0,05$. a) Amplitudes de oscilações na direção do escoamento. b) Amplitudes de oscilações transversais ao escoamento.	89
Figura 29: Proposta de função descontínua simples para C_{D0} com o objetivo de representar a dependência com as amplitudes de oscilações transversais e corrigir padrões observados pelos dados da Análise de Sensibilidade Global.	91
Figura 30: Refinamento do modelo fenomenológico com o ajuste dos 3 parâmetros-chave para o sistema através da Análise de Sensibilidade Global com $A_y= 42$, $\varepsilon_y = 0,09$ e $C_{D0} = [0,2 \ 1,6 \ 2,4]$	92
Figura 31: Resultado final obtido pelo estudo com o ajuste dos três parâmetros-chave através da Análise de Sensibilidade Global com $A_y= 42$, $\varepsilon_y = 0,09$ e $C_{D0} = [0,2 \ 1,6 \ 2,4]$ para as frequências de vibrações transversais.	93

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Regimes de escoamento ao redor de cilindros de superfície lisa em corrente uniforme. Adaptado de LIENHARD [21].	13
Tabela 2: Valores referenciais adotados para os parâmetros independentes usados na simulação computacional do modelo fenomenológico.....	53
Tabela 3: Distribuições de probabilidades atribuídas aos parâmetros incertos da análise de sensibilidade.....	69
Tabela 4: Índices de sensibilidade primários S_i e totais St_i para N simulações de Monte Carlo do modelo fenomenológico com variável de interesse a amplitude de vibrações alinhadas ao escoamento para $U_{red} = 6,4$	71

1 INTRODUÇÃO

O escoamento de um fluido ao redor de um corpo constitui um sistema de dinâmica rica. Esta interação entre o fluido e o sólido resulta em vibrações do corpo que, por sua vez, perturbam a maneira como o sistema é excitado, caracterizando um sistema dinâmico acoplado.

Segundo SARPKEYA [1], uma definição abrangente da geometria de um corpo necessária para que o fenômeno ocorra não existe. Pode ser entendido como um corpo elástico ou com suportes elásticos de massa e amortecimentos apropriados, cuja forma e seção transversal em contato com o escoamento externo a um número de Reynolds suficientemente alto causam a separação do escoamento em duas camadas cisalhantes que interagem entre si e formam a esteira de vórtices que dão origem ao fenômeno.

O fenômeno de vibrações induzidas por vórtices (VIV), como é conhecido, pode estar associado às vibrações destrutivas ou vibrações úteis como nos projetos de geração de energia por VIV [2, 3]. No entanto, foi pelo seu caráter destrutivo que o fenômeno começou a ser investigado profundamente por pesquisadores ao longo dos anos e é mais conhecido. Dentre as principais estruturas e equipamentos que sofrem a ação indesejada das vibrações induzidas por vórtices destacam-se os *risers*, plataformas *offshore*, cabos submarinos, dutos horizontais, sensores de tubulação, componentes de trocadores de calor, edifícios, pontes, torres, antenas, cabos de transmissão e muitos outros.

No que diz respeito às principais estruturas cilíndricas em contato com o escoamento de fluidos na indústria *offshore* do petróleo, o VIV¹, embora apresente amplitudes de oscilação autolimitadas e que dificilmente ultrapassam um valor de amplitude muito maior que o diâmetro da estrutura, pode levar à falha por fadiga, fato que pode ainda ser agravado pelas condições severas de operação das estruturas *offshore*, como alta temperatura e alta pressão e ambientes corrosivos.

A partir da importância do fenômeno de desprendimento de vórtices e VIV, muitos modelos foram construídos e usados desde a década de 60 com o objetivo de estimar e prever o comportamento de estruturas passíveis de VIV. Entre essa vasta gama

¹ A sigla VIV, embora, ao pé da letra se refira às vibrações induzidas por vórtices, o seu uso precedido do artigo masculino definido “o” foi adotado neste trabalho referindo-se ao termo implícito que a precede, “fenômeno”.

de modelos, eles se diferenciam pelos aspectos fundamentais de suas formulações e axiomas [4].

Na década de 70, modelos fenomenológicos para a interação do fluido foram desenvolvidos adotando a simplificação para um problema bidimensional e seguindo a ideia de um oscilador de esteira. Esta classe de modelos apresenta uma ou mais variáveis responsáveis puramente por representar a dinâmica da esteira de vórtices. Geralmente, as equações de esteira são modeladas para satisfazer uma equação de um oscilador não-linear, estável e quase harmônico como por exemplo uma equação de oscilador de van der Pol ou Rayleigh [5].

Ao longo dos anos, com os grandes avanços na simulação computacional, modelos mais complexos como os modelos de dinâmica dos fluidos computacional, que satisfazem as equações de Navier-Stokes, ganharam espaço na simulação, processos de tomada de decisão e projeto de equipamentos para representar a dinâmica do VIV com maior credibilidade. Embora este tipo de modelos teoricamente apresente maior confiabilidade, é também extremamente mais caro computacionalmente e, portanto, operações que requerem muitas simulações, como um estudo de fadiga ou um estudo de casos e cenários são dispendiosas e podem tornar-se inviáveis. Por exemplo, para o estudo de fadiga das estruturas *offshore* é necessário conhecer o estado de tensões destas quando em VIV ao longo de sua vida operacional. Para estimar o histórico de tensões que estes equipamentos estarão submetidos são necessárias muitas simulações do modelo computacional e com isso, é importante e extremamente vantajoso que este seja flexível e de baixo custo computacional.

Sendo assim, analisar e aperfeiçoar a acurácia de previsões de modelos para a interação fluido-estrutura computacionalmente mais baratos, como os modelos fenomenológicos, os quais aproximam a física do problema em sua concepção, através de sua análise de sensibilidade e de incertezas constitui um tópico de grande interesse e é um dos objetivos do presente trabalho.

O uso de equações de esteira na expectativa de representar a interação do fluido no sistema é uma aproximação que incorpora e propaga erros na resposta do problema e é talvez a principal fonte de incertezas neste processo. Por isso, a presente dissertação busca responder a perguntas do tipo: “Quão confiáveis são as previsões deste modelo?”,

“É possível mensurar e reduzir os erros associados à utilização deste modelo sem perda de praticidade do mesmo?”.

O emprego da análise de incertezas aliada à teoria do fenômeno de desprendimento de vórtices e vibrações induzidas vem se mostrando um ramo interdisciplinar promissor, pois, permite um estudo que permite explorar toda a complexidade e variabilidade intrínseca ao fenômeno.

O termo incerteza, à primeira vista, pode remeter à associação com ignorância e falta de conhecimento, na verdade deveria ser visto como o oposto. A certeza absoluta está reservada a pouquíssimas ou nenhuma ocasião na natureza. Segundo PEAT [6], por volta de 1900, existia uma crença por parte da comunidade científica de que era possível explicar qualquer fenômeno no universo pelas teorias estabelecidas até o momento. Foi com o advento e aprofundamento de novas teorias e tecnologias que passamos da certeza para incerteza. Portanto, a incerteza não deveria ser enxergada por seu lado negativo, e se muitas vezes está ligada à ignorância e falta de conhecimento de determinado fenômeno, muitas outras está ligada ao profundo conhecimento de outros e da noção de sua variabilidade e riqueza física.

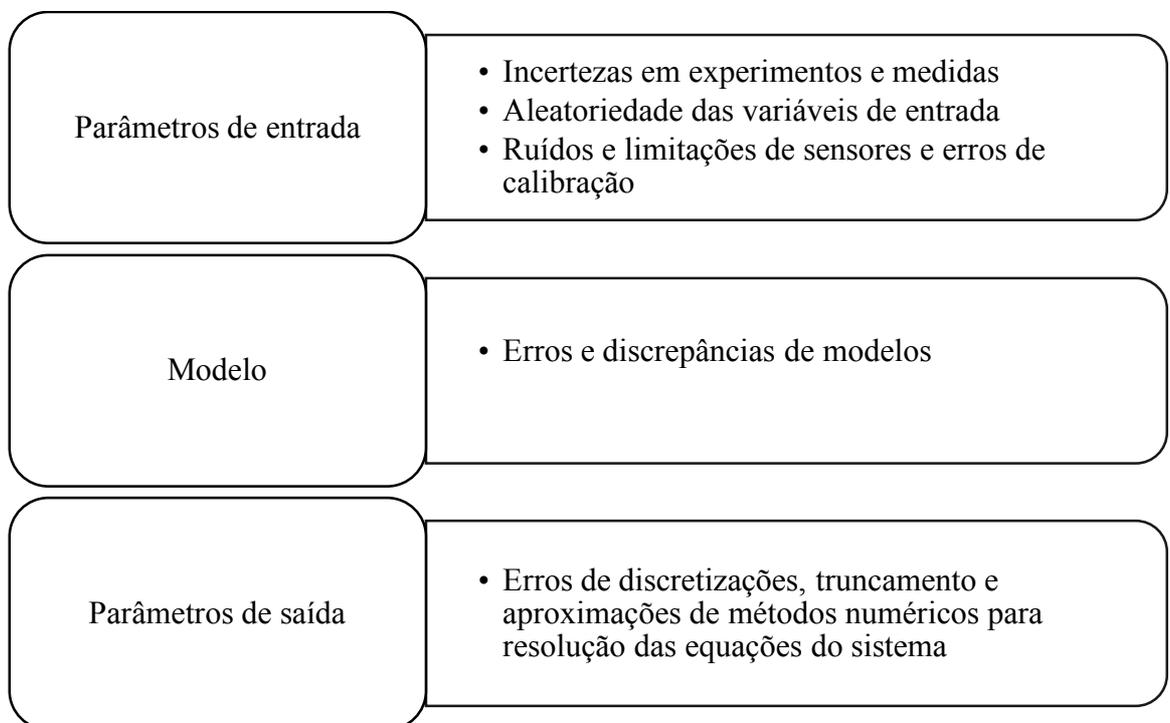


Figura 1: Origem das incertezas no processo de modelagem e simulação para a previsão de um sistema físico.

As incertezas estão presentes em todas as fases da modelagem e da ciência de previsão de fenômenos físicos, pois, podem ser oriundas da simples falta ou dificuldade de obter informação, do próprio modelo e das hipóteses adotadas na construção do mesmo, da aleatoriedade do fenômeno frente às diferentes condições, do método numérico utilizado para discretização e solução das equações ou do erro de medições para os dados de entrada do modelo, como visto na Figura 1.

A análise de incertezas está atingindo cada vez mais importância em diversos ramos da engenharia como o projeto de equipamentos, operações de tomada de decisões, cálculos de vida útil, estudos de fenômenos naturais complexos, esforços para minimização de erros, verificação e validação de modelos [7].

O interesse na quantificação de incertezas continuará crescendo à medida que avançamos no projeto de sistemas complexos e tomadas de decisões críticas, lidando com novas tecnologias, modelos e materiais. Como não podia ser o contrário, as expectativas da sociedade são as mais altas de todos os tempos e a tolerância a erros diminui cada vez mais.

Como ilustrado pela Figura 1, podem haver incertezas em todas as etapas da previsão de um sistema físico. Os erros do modelo fenomenológico, como dito anteriormente, são fruto de parâmetros que devem ser estimados através da relação matemática entre um dado experimental de referência e os dados do modelo. Logo, quando este modelo é usado posteriormente para a previsão de um sistema em VIV em condições diferentes daquelas usadas para a estimativa dos parâmetros fenomenológicos, ou para a extrapolação fora de seu domínio, ou até mesmo nas mesmas condições, porém sob efeito de toda a complexidade do VIV em condições reais de operação ocorrem problemas, como possivelmente a falha do equipamento ou estrutura e danos catastróficos ou o superdimensionamento exagerado comprometendo o custo, peso, transporte e outros aspectos do projeto.

O estudo das incertezas do modelo fenomenológico será conduzido através de uma análise de sensibilidade. Segundo SALTELLI *et al.* [8], uma possível definição de análise de sensibilidade é a seguinte: O estudo de como a variabilidade da saída do modelo pode ser fracionada em diferentes fontes de incertezas na entrada do modelo.

A análise de sensibilidade global do modelo fenomenológico é extremamente importante para um estudo de aperfeiçoamento de sua capacidade de previsão, pois,

fornece informações completas sobre como a aleatoriedade dos parâmetros de entrada influenciam na queda de precisão das respostas do modelo e identifica parâmetros predominantes, nos quais esforços para reduzir suas incertezas resultariam em avanços significativos para o refinamento do modelo.

1.1 MOTIVAÇÃO

O estudo das interações fluido-estrutura é uma área multidisciplinar da engenharia que vem adquirindo notoriedade e importância para o projeto de estruturas na indústria do petróleo. Normalmente, a perspectiva mais comum para o estudo de fluidos é a Euleriana, enquanto que para o estudo de sólidos, a mais usada é a descrição Lagrangeana. No caso das interações fluido-estrutura, essas diferenças de abordagens, complexidade dos fenômenos envolvidos e ainda a sua dinâmica acoplada, não-linear e por vezes de natureza aleatória torna o problema um grande desafio.

Dentre o estudo das interações-fluido estrutura, o fenômeno de vibrações induzidas por vórtices é particularmente nocivo na indústria petrolífera e seu estudo vem crescendo rapidamente no sentido de compreender, modelar, estimar e reduzir suas consequências. Existem medidas comprovadas e que vêm ganhando popularidade para a supressão de vibrações de estruturas em VIV..

No entanto, as estruturas usadas na indústria do petróleo, como por exemplo as que são observadas na Figura 2, não são projetadas primariamente para minimizar o arrasto ou reduzir a sua amplitude de vibração como no caso dos componentes aeronáuticos. Pelo contrário, elas são projetadas para suportar cargas e condições extremas, para escoar fluido em seu interior com confiabilidade, para prover área para a transmissão de calor por convecção e, por esses motivos, a redução das vibrações induzidas fica em caráter secundário ou não entram no projeto desses equipamentos. Sendo assim, o VIV pode vir a ser um grande problema nestas atividades, tendo como uma possível consequência, a redução da vida útil destes equipamentos por fadiga, comumente agravada por corrosão e condições de alta temperatura e pressão.

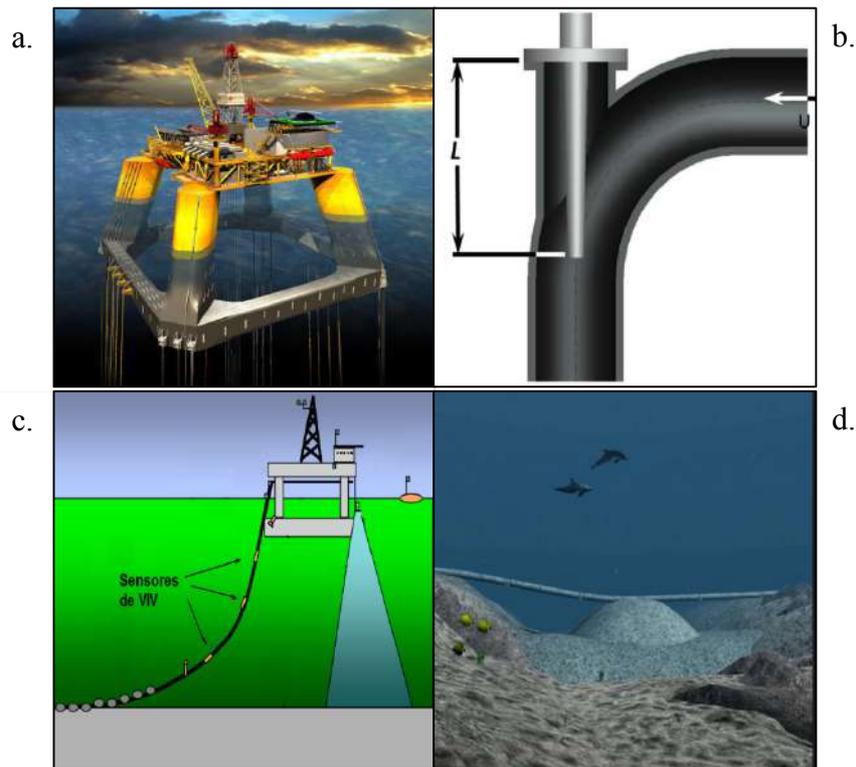


Figura 2: Algumas das estruturas que sofrem ação do VIV. a) Plataforma TLP. Extraído de PEREIRA [9]. b) Poço termométrico em tubulação. Adaptado de WILLIAMS [10]. c) Riser em catenária (SCR^2) [11]. d) Dutos horizontais e vãos livres [12].

Análises preditivas de fadiga buscam estimar o dano que será causado ao longo da vida operacional desses equipamentos através de milhares de simulações de seus carregamentos cíclicos e estados de tensões. Devido ao elevado número de simulações, um modelo de baixa utilização de recursos computacionais seria o ideal, como o modelo fenomenológico de esteira para a interação do fluido no VIV. Porém, tais modelos são modelos semi-empíricos que agregam erros e incertezas por negligenciarem em sua construção parte da física do problema.

A presente proposta de dissertação de mestrado toma inspiração no problema do VIV em estruturas da indústria do petróleo e nos grandes avanços das teorias de quantificação de incertezas e análise de sensibilidade para determinar se são satisfatórias as previsões de um modelo fenomenológico e para a contribuição para o seu aperfeiçoamento, mantendo a funcionalidade do modelo computacional e assim poupando recursos.

² Referente a *Steel Catenary Riser*

1.2 OBJETIVO

A presente dissertação de mestrado, desenvolvida junto ao Programa de Engenharia Mecânica do Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro³, tem como objetivo o estudo da teoria de vibrações induzidas pela geração e desprendimento de vórtices ao redor de um cilindro e a investigação profunda da estrutura de modelos fenomenológicos de VIV através da análise de sensibilidade global resultando em seu refinamento e maior acurácia.

O estudo da teoria de escoamento ao redor de corpos cilíndricos é conduzido para desenvolver o entendimento dos fenômenos físicos que culminam nas VIV e, com isso, analisar as suas situações críticas e possíveis consequências. Em sequência, um problema inspirado no fenômeno de VIV de *risers* será abordado e a completa descrição de um modelo fenomenológico para a representação da interação fluido-estrutura será feita e suas vantagens e desvantagens elucidadas.

O uso do modelo fenomenológico por apresentar baixo custo computacional permite o emprego de técnicas, como a análise de sensibilidade global que se utiliza de muitas simulações para investigar sistematicamente a maneira como agem os seus parâmetros de entrada no funcionamento do modelo.

Com a análise de sensibilidade do modelo fenomenológico, parâmetros que contribuem de forma acentuada para a variabilidade das previsões do modelo têm sua influência estudada. As informações obtidas sobre os parâmetros predominantes são úteis para realizar ajustes ou posterior calibração resultando em avanços na capacidade de previsão do modelo. Sendo assim, a presente dissertação tem o objetivo de identificar e fornecer informações valiosas sobre o modelo fenomenológico, corrigindo erros e aprimorando suas respostas, dado o seu grande potencial de previsão aliado a um pequeno esforço computacional.

³ PEM - COPPE/UFRJ

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 SISTEMAS ACOPLADOS

Matematicamente, os sistemas acoplados representam problemas de duas ou mais equações diferenciais, no qual uma ou todas equações governantes envolvem mais de uma ou todas as incógnitas. Sendo assim, o sistema de equações acopladas tem que ser resolvido simultaneamente [13]. Fisicamente, representam situações onde dois ou mais sistemas físicos interagem, ou seja, uma ação de um elemento do sistema provoca uma reação no sistema que, por sua vez, modifica a maneira como os elementos interagem.

Em alguns casos, os movimentos e deformações de um elemento do sistema são relativamente pequenos, de modo que, não influenciam consideravelmente nos restantes. Um exemplo ocorre quando uma estrutura rígida e suportada é aquecida por um fluxo de fluido, gerando tensões e deformações térmicas na estrutura. Porém, a deformação da estrutura é insignificante para afetar o fluxo de fluido [14].

Os problemas de interação fluido-estrutura são por definição sistemas acoplados. No caso do VIV, fluido e estrutura estão acoplados pela força que o fluido exerce na estrutura. Essa força causa a vibração da estrutura, que como consequência pela mudança de orientação e posição da estrutura em relação ao fluido, altera a força exercida pelo fluido.

2.2 NOTAS SOBRE TURBULÊNCIA E TEORIA DE VÓRTICES

A turbulência no escoamento de fluidos é um regime intrinsecamente complexo. Como os escoamentos turbulentos são supostamente regidos pelas equações de Navier-Stokes, equações não-lineares e complexas [15]. A turbulência se distingue por um caráter fortemente difusivo, de alto grau de mistura que confere ao escoamento riquezas de escalas temporais e espaciais [16]. Isto é, ao fixar um ponto do espaço ao longo do tempo pode observar-se uma grande variação de propriedades do escoamento em relação a um ponto nas vizinhanças e o mesmo acontece na escala temporal.

De acordo com RAMOS *et al.* [15], o escoamento de fluidos newtonianos incompressíveis homogêneos é regido pelas equações de Navier-Stokes e de continuidade que em sua forma Euleriana são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0$$

Na qual, $u = u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ é o vetor velocidade de uma partícula de fluido na posição $x = (x_1, x_2, x_3)$ no instante de tempo t . ν é a viscosidade cinemática do fluido, $p = p(x, t)$ é a pressão cinemática e $f = f(x, t) = (f_1, f_2, f_3)$ é a densidade de massa das forças de volume.

No que diz respeito aos vórtices, estes podem assumir qualquer forma arbitrária, porém devem obedecer aos teoremas de Helmholtz para fluidos ideais (Figura 3) [17].

- 1) A força de um filamento de vórtice não varia com o tempo em fluidos ideais. No caso de fluidos reais, a força de vórtice sempre sofre um declínio pelos efeitos dissipativos das forças viscosas.
- 2) Um vórtice não se desassocia no fluido, ele se estende até os limites sólidos do escoamento ou forma um ciclo fechado.
- 3) Partículas de fluido inicialmente livres de vorticidade permanecem livres de vorticidade na ausência de forças rotacionais externas.

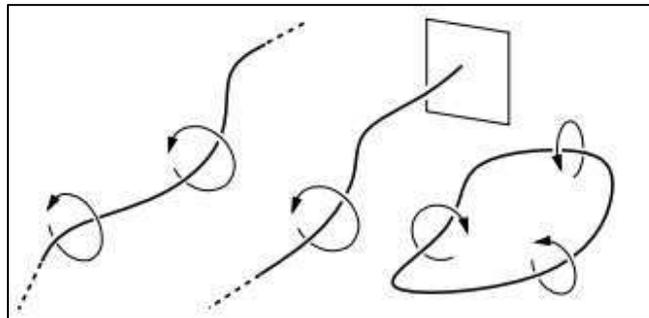


Figura 3: Ilustração dos teoremas de Helmholtz [17].

Os vórtices são caracterizados por aleatoriedade, variações abruptas de velocidade e pressão que resultam em forças flutuantes de sustentação e arrasto do escoamento em suas vizinhanças.

2.3 ESCOAMENTO AO REDOR DE CILINDROS

Ao observar o escoamento de um fluido real ao redor de corpos sólidos, como no caso de um cilindro, é possível analisar vários fenômenos que resultam nas vibrações induzidas por desprendimento de vórtices.

Dada a importância do número de Reynolds, este está sempre associado na caracterização do escoamento e a sua relação com a formação da esteira de vórtices e seus regimes.

A camada limite e principalmente o seu descolamento da superfície do cilindro e as suas consequências como a formação dos vórtices à jusante do cilindro serão abordados nas próximas seções

2.3.1 Número de Reynolds

O número de Reynolds é uma grandeza adimensional que caracteriza o escoamento de fluidos. O número de Reynolds representa a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas agindo no fluido. Das equações de Navier-Stokes, a força de inércia por unidade de volume é igual a $\rho u \partial u / \partial x$ e as forças viscosas por unidade de volume são iguais a $\mu \partial^2 u / \partial y^2$.

Considerando que o escoamento tem velocidade U sobre um corpo de dimensão D , o número de Reynolds pode ser aproximado como segue:

$$Re = \frac{\text{Efeitos inerciais}}{\text{Efeitos viscosos}} = \frac{\rho U^2 / D}{\mu U / D^2} = \frac{\rho U D}{\mu}$$

Temos que ρ denota a massa específica do fluido e μ simboliza a viscosidade dinâmica do fluido.

2.3.2 Camada limite

Os efeitos inerciais são as forças dominantes em escoamentos de alto número de Reynolds, porém desconsiderar forças viscosas reduziria as equações de Navier-Stokes para as equações de Euler para fluxo não-viscoso, que são equações diferenciais parciais de primeira ordem e portanto, não seria possível encontrar uma solução que satisfizesse as condições de contorno do problema. A solução para o problema mencionado veio com a descoberta do conceito de camada limite por Prandtl [18].

A camada limite é uma camada delgada na vizinhança imediata de um corpo sólido na qual, em seu domínio, as forças viscosas dominam. No interior da camada limite, o fluido tende a aderir à parede, ou seja, forças de fricção desaceleram o fluido e a velocidade do fluido é nula no ponto de contato com a parede e vai aumentando

conforme se afasta, até o ponto em que as forças de fricção já não tem efeito, fora da camada limite [18]. A Figura 4 ilustra esse perfil de velocidades na camada limite.

A espessura da camada limite cresce gradativamente a partir do ponto de contato e é proporcional à viscosidade do fluido.

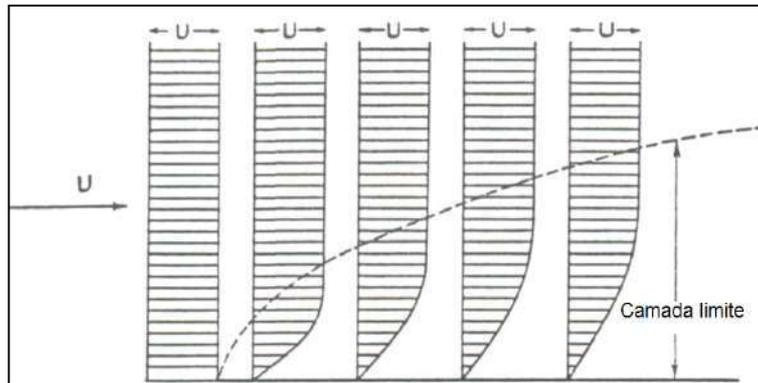


Figura 4: Distribuição de velocidade na camada limite. Adaptado de SILVA FREIRE [19].

2.3.3 Separação da camada limite e desprendimento de vórtices

O fenômeno de separação da camada limite ocorre quando há separação da camada delgada da superfície do sólido devido à presença de um gradiente de pressão adverso paralelo à parede do cilindro cujo efeito é de retardar o escoamento, como mostrado na Figura 5.

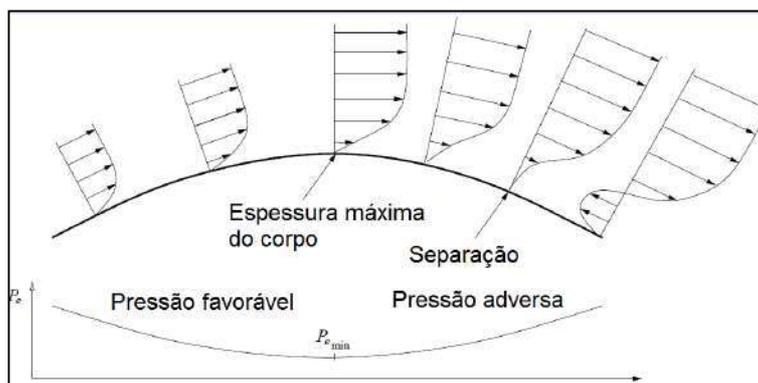


Figura 5: Distribuição de velocidade no escoamento em uma superfície curva e ponto de separação. Adaptado de FIELDING [20].

Considera-se um fluxo ao redor de um cilindro como observado na Figura 6. Devido às restrições espaciais do confronto com o objeto, as linhas de fluxo ficam mais próximas entre o ponto D e o E e retornam ao seu espaçamento original do ponto E ao F. Para que isso aconteça, a velocidade do escoamento deve aumentar do ponto D ao E e

diminuir do ponto E ao F, dando origem ao gradiente de pressão $\partial p/\partial x < 0$ para acelerar o fluido e $\partial p/\partial x > 0$ para desacelerá-lo [18].

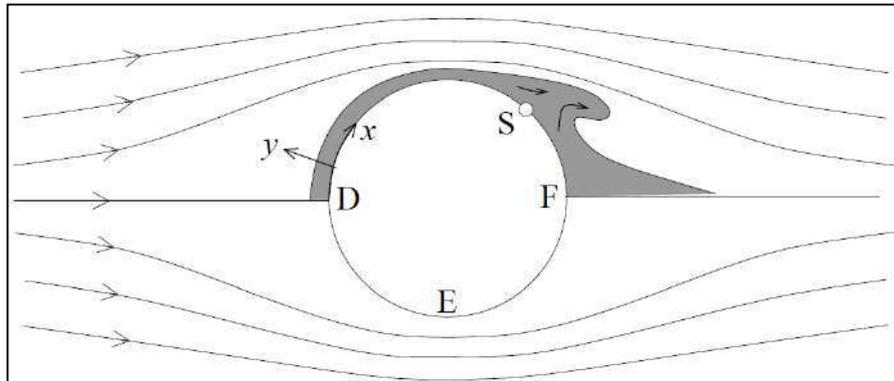


Figura 6: Separação da camada limite. Extraído de FIELDING [20].

Esse fenômeno é comumente observado em escoamento através de corpos pouco hidrodinâmicos, como no caso ilustrado de um corpo cilíndrico. O movimento do fluido na região próxima à parede do cilindro é regido por três fatores segundo SILVA FREIRE [19]:

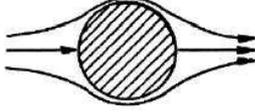
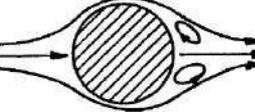
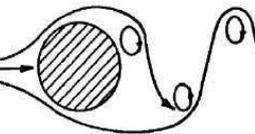
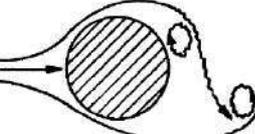
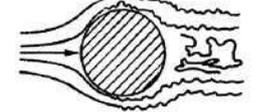
- a. Ele é desacelerado pelo atrito com a parede
- b. Ele é acelerado pelo escoamento externo pela ação da viscosidade
- c. É novamente desacelerado pelo gradiente adverso de pressão

Como observado na Figura 6, na região fora da camada limite o fluido tem energia suficiente para superar o gradiente adverso de pressão e chegar ao ponto F com a mesma energia cinética que tinha inicialmente. No entanto, dentro da camada limite, a energia do fluido é dissipada por fricção e acaba por não superar a barreira de pressão e ao atingir o ponto S ocorre a separação da camada limite [20].

Após o ponto de separação, as partículas de pouca energia defletem lateralmente, se deslocando em uma direção oposta ao escoamento e acabam por penetrar no escoamento externo causando um aumento de espessura repentino da camada limite e a formação de uma esteira de vórtices. O desprendimento de vórtices interage com o cilindro e é o causador das vibrações induzidas por vórtices. Os vórtices exercem uma força de arrasto e sustentação na estrutura que é normalmente maior do que qualquer efeito de arrasto viscoso da própria camada limite. O VIV é, portanto, consequência da interação entre a camada viscosa (camada limite) e a camada considerada não viscosa do fluido.

O regime de separação da camada limite e formação de vórtices é função do número de Reynolds. A Tabela 1 contém os principais padrões de escoamento através de cilindros fixos para diferentes números de Reynolds:

Tabela 1: Regimes de escoamento ao redor de cilindros de superfície lisa em corrente uniforme. Adaptado de LIENHARD [21].

a.		Escoamento sem separação de camada limite	$Re < 5$
b.		Separação da camada limite e formação de um par de vórtices simétricos	$5 \leq Re < 40$
c.		Esteira de vórtices laminar	$40 \leq Re < 150$
d.		Esteira de vórtices em regime transitório	$150 \leq Re < 300$
		Esteira de vórtices turbulenta	$300 \leq Re < 3 \times 10^6$
e.		Camada limite em regime transitório, a esteira torna-se mais fina e desorganizada	$3 \times 10^6 \leq Re < 3,5 \times 10^6$
f.		Camada limite turbulenta e esteira de vórtices turbulenta e delgada	$3,5 \times 10^6 \leq Re$

Além do número de Reynolds, outros fatores também influenciam em menor valor os regimes de escoamento ao redor de cilindros como a rugosidade da superfície do cilindro, turbulência do escoamento e o ângulo de ataque [22].

Conforme observado na Tabela 1.c para números de Reynolds acima de aproximadamente 40 dá-se início o fenômeno de desprendimento de vórtices e é formada uma esteira de vórtices alternados, chamada de esteira de Von Karman (Figura

7). É possível então sumarizar o escoamento através de um cilindro em 4 grandes domínios, segundo PAIDOUSSIS *et al.* [4]:

- i. Para números de Reynolds suficientemente pequenos, $Re < 40$, não ocorre desprendimento de vórtices e, portanto, não há força de sustentação ou vibração.
- ii. Acima do número de Reynolds crítico, $40 \leq Re < 300$, ocorre o desprendimento de vórtices e se desenvolve uma esteira bem definida de vórtices alternados, conhecida como esteira clássica de von Karman.
- iii. Na região na qual $300 \leq Re < 10^6$, ocorre o desprendimento de vórtices, porém é uma fase de transição da camada limite, modificando o ponto de separação que resulta em diversas alterações na dinâmica da esteira que se torna complexa e não tão bem definida.
- iv. Quando $Re > 10^6$, a camada limite está em regime turbulento e a esteira de vórtices turbulenta se reestabelece.

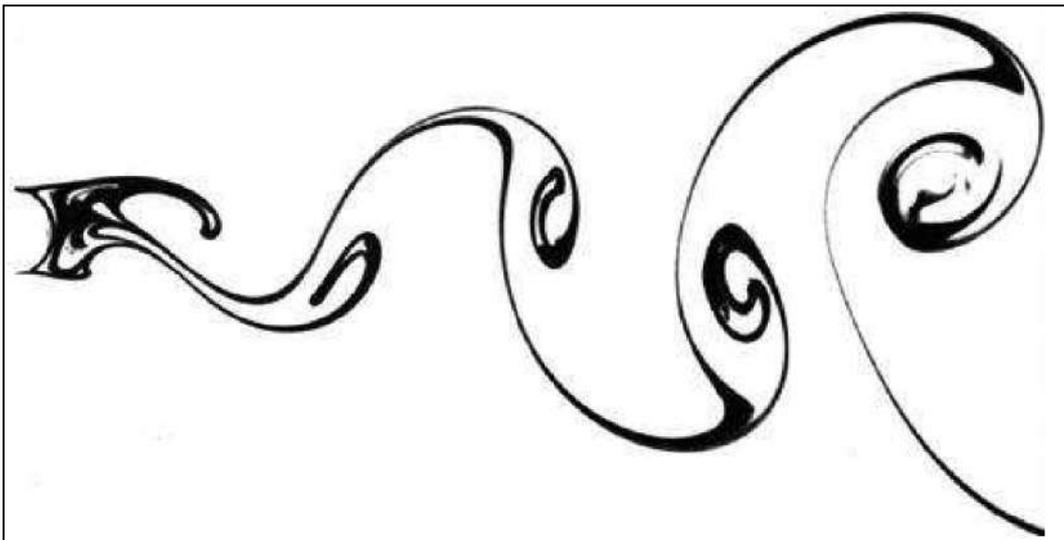


Figura 7: Esteira de von Karman. Retirada de SANDRI [23].

2.4 FREQUÊNCIA DE DESPRENDIMENTO DE VÓRTICES

O número de Strouhal é uma grandeza adimensional de grande importância para o estudo do VIV, pois, expressa a proporcionalidade entre a frequência de desprendimento de vórtices e a velocidade do escoamento. O número de Strouhal (St) tem unidade de ciclos por segundo (Hz) e é definido como:

$$St = \frac{\Omega_f D}{U}$$

onde:

Ω_f - Frequência de desprendimento de vórtices (H_z).

St - Número de Strouhal.

U - Velocidade do escoamento.

D - Diâmetro do cilindro.

Pela Tabela 1 fica evidente a dependência do número de Strouhal com o número de Reynolds e se normalizado com a velocidade do escoamento (U) e o diâmetro do cilindro, St pode ser visto como função do número de Reynolds (Figura 8).

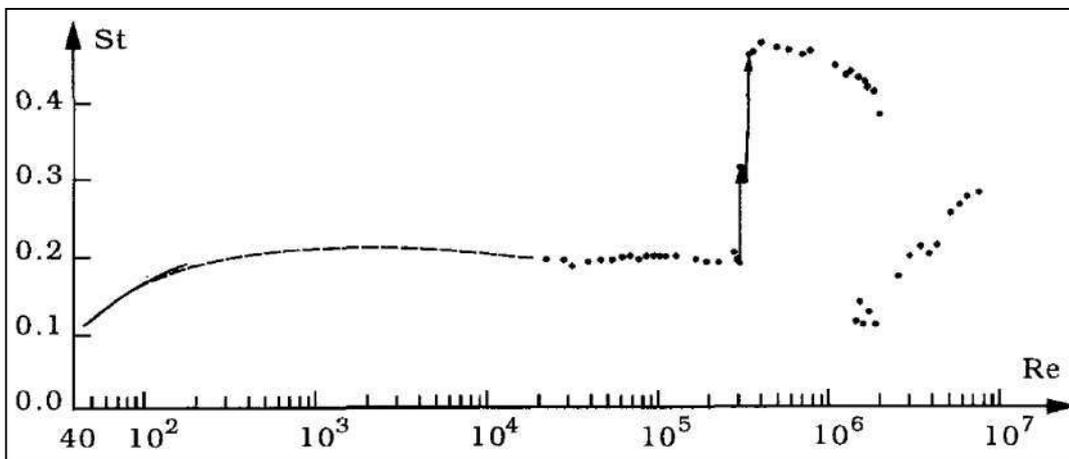


Figura 8: Número de Strouhal para um cilindro fixo de baixa rugosidade. Adaptado de SUMER & FREDSE [22].

Como visto anteriormente, a partir de $Re = 40$, inicia-se o desprendimento de vórtices e, pela Figura 8, observa-se que o número de Strouhal é aproximadamente 0,1 nesse intervalo. O número de Strouhal então cresce gradativamente com o aumento do número de Reynolds até estabilizar no valor de aproximadamente 0,2. Existe uma grande faixa de valores do número de Reynolds para os quais o valor do número de Strouhal pode ser considerado constante e igual a aproximadamente 0,2 sem ocasionar maiores erros. Para o regime crítico no qual, $3,0 \times 10^5 \leq Re < 3,5 \times 10^5$, a frequência de desprendimento de vórtices aumenta e o número de Strouhal dá um salto para aproximadamente 0,45. Esse alto valor do número de Strouhal é mantido no regime supercrítico seguido de uma queda nos valores de Strouhal com o aumento do número de Reynolds [22].

2.5 VIBRAÇÕES INDUZIDAS POR VÓRTICES

O VIV é um fenômeno observado em muitas estruturas em diversas áreas da engenharia. É um fenômeno que vem atingindo maior grau de importância nos projetos de estruturas devido aos seus carregamentos cíclicos e encurtamento da vida útil da estrutura pela sua interação com o escoamento.

A esteira de vórtices interage com a estrutura impondo uma perturbação no campo de pressões na vizinhança do sólido. Essa variação abrupta do campo de pressões nas redondezas da estrutura causa a sua vibração com frequência proporcional à velocidade do escoamento. A oscilação da estrutura interage com a dinâmica da esteira de vórtices, caracterizando um problema físico acoplado.

As vibrações transversais do cilindro com frequência suficientemente próxima da frequência de desprendimento de vórtices tem um grande efeito na esteira de vórtices. À medida que a velocidade do escoamento aumenta ou diminui de maneira que a frequência de desprendimento de vórtices se aproxima da frequência natural da estrutura, ocorre o fenômeno de sincronização de frequências. As vibrações resultantes acontecem na frequência natural do cilindro ou muito próximo dela e adicionam grande energia ao sistema gerando oscilações de grandes amplitudes e que podem levar a estrutura à falha por fadiga, por exemplo.

2.6 CONDIÇÃO DE SINCRONIZAÇÃO DE FREQUÊNCIAS

Se a frequência de desprendimento de vórtices se aproximar de uma das frequências naturais da estrutura imersa, o sistema entra em ressonância resultando em grandes amplitudes de vibração. Portanto, a sincronização é a zona em que uma das frequências de vibração do corpo controla a frequência de desprendimento de vórtices. A frequência da esteira de vórtices perde a sua relação com o número de Strouhal e passa a responder com a frequência da estrutura.

Como o corpo vibra com a mesma frequência do termo de forçamento, a cada período o corpo teoricamente atingiria uma amplitude maior do que o período anterior até o seu colapso caso não houvessem forças dissipativas no sistema. No estudo do VIV, esta condição é responsável pelas maiores amplitudes de vibração da estrutura. Como um sistema tem tantas frequências naturais quanto seus graus de liberdade [24], a

sincronização pode ocorrer em várias faixas de frequências e nem sempre é fácil de prevê-la e evitá-la.

A sincronização pode ainda acontecer em frequências de desprendimento de vórtices a submúltiplos e múltiplos de frequências naturais do sistema ou em faixas de frequências próximas às frequências críticas [25]. Essas faixas são fortemente dependentes da grandeza adimensional chamada de razão de massas (m^*) [14].

$$m^* = \frac{m}{m_f} = \frac{m}{\rho_f D^2}$$

Na qual, m é a massa da estrutura por unidade de comprimento, m_f corresponde à massa do fluido deslocado por unidade de comprimento, ρ_f é a massa específica do fluido e D é o diâmetro do cilindro. VANDIVER [26] ressalta que alguns autores incluem o termo de massa adicionada ao termo de massa da estrutura, o que deve ser evitado, uma vez que a massa adicionada não é constante.

VANDIVER [26] concluiu que cilindros de baixa razão de massas apresentam uma zona de sincronização mais vasta do que cilindros de alto valor de razão de massas.

Quando o sistema entra em regime de sincronização, as amplitudes de vibrações são excitadas diretamente na direção transversal e pode ainda ocorrer uma amplificação indireta das amplitudes de oscilação no eixo da direção do escoamento do fluido. Uma característica claramente observada na fase de sincronização é o aumento do coeficiente de arrasto médio, C_{D0} . Isto ocorre devido à dependência entre o coeficiente e as amplitudes de vibrações transversais que na condição de sincronização atingem os seus valores máximos. Alguns autores como VANDIVER [27], SKOP *et al.* [28] e SARPKAYA [29] estudaram e propuseram modelos para esta dependência e BLEVINS [14] fez uma análise entre os principais.

Outra característica marcante do sistema em sincronização de frequências é o fenômeno de histerese, o qual pode ser observado na Figura 9. Na Figura 9, 2 subzonas são identificadas, uma superior e outra inferior, com uma transição brusca entre elas. A histerese é observada e representada na área H por linhas pontilhadas com setas. Seu efeito é o seguinte: a medida que a velocidade aumenta, ou seja, percorrendo o gráfico da esquerda para a direita, a transição entre a zona superior e a inferior se dá pela linha pontilhada de seta apontando para baixo, enquanto que, a medida que a velocidade diminui, percorrendo o gráfico da direita para a esquerda, a transição entre as subzonas

ocorre pela linha pontilhada com seta apontando para cima. Tal fato, assim como a própria sincronização, a dependência entre o coeficiente de arrasto médio e as amplitudes de oscilações ortogonais e a sincronização a múltiplos e submúltiplos de frequência naturais foram descobertos por BISHOP & HASSAN [25].

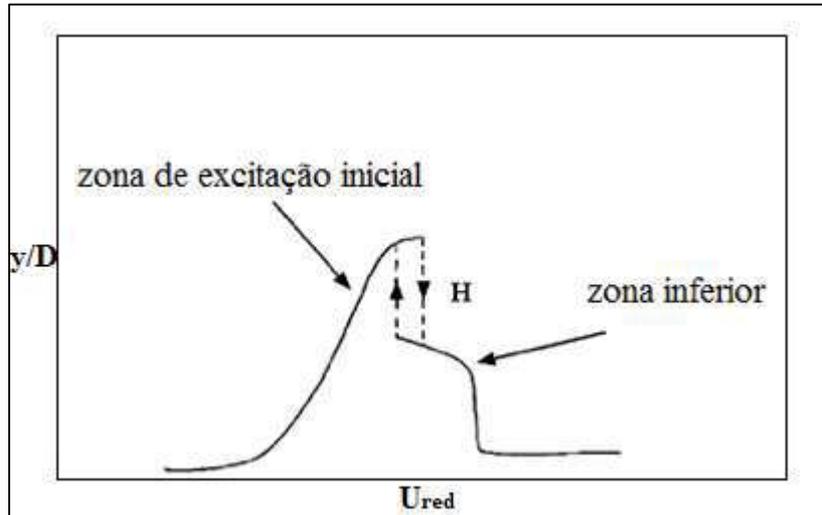


Figura 9: Histerese no fenômeno de vibrações induzidas por vórtices. Adaptada de KHALAK & WILLIAMSON [30].

Os parâmetros introduzidos nas seções a seguir são importantes para o estudo da zona de sincronização e permitem estimar uma faixa crítica onde a sincronização ocorre em determinado sistema.

2.6.1 Velocidade reduzida

A velocidade reduzida (U_{red}), também chamada por alguns autores de velocidade normalizada, expressa a razão entre a velocidade do escoamento e o produto do diâmetro do cilindro e suas frequências naturais. Para cada frequência natural de uma estrutura existe uma velocidade reduzida relacionada a ela que é definida por:

$$U_{red} = \frac{U}{D\omega_n}$$

onde, U é a velocidade livre de escoamento, D é o diâmetro e ω_n é uma das frequências naturais da estrutura.

2.6.2 Amplitude adimensional

A amplitude adimensional provém da razão entre a amplitude de oscilação ortogonal e o diâmetro do cilindro e é um importante indicador da região de sincronização de frequências [31]:

$$\text{Amplitude adimensional} = \frac{y}{D} = \frac{\text{Amplitude de vibração transversal}}{\text{Diâmetro do cilindro}}$$

Com o acréscimo da amplitude de vibrações transversal do cilindro aumenta a capacidade do cilindro de entrar em sincronização, como mostrado na Figura 10.

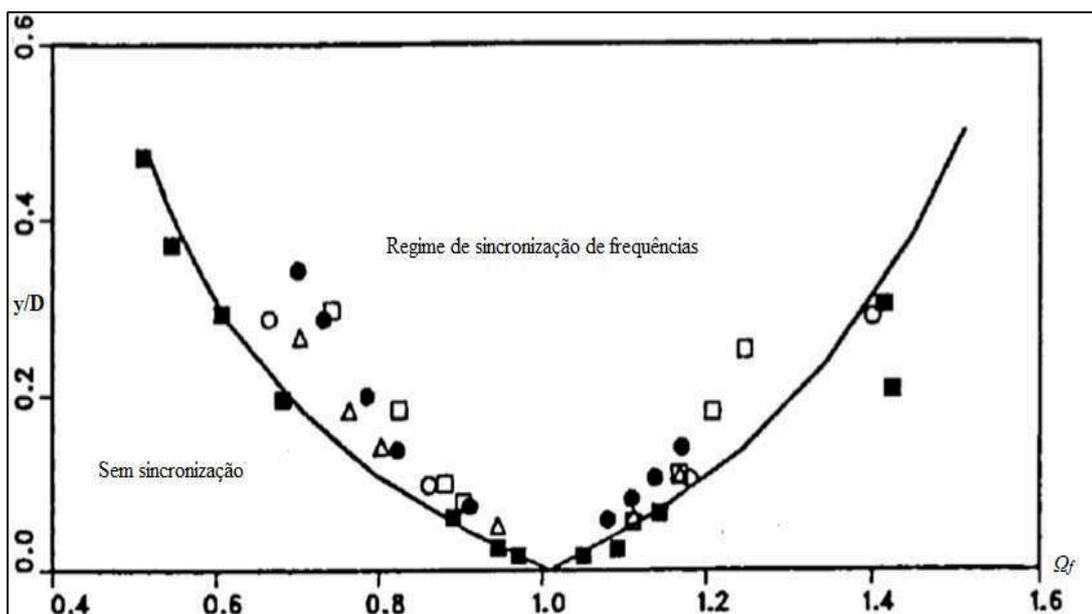


Figura 10: Região de sincronização. Amplitude adimensional x frequência de desprendimento de vórtices. Adaptado de WILLIAMSON & ROSHKO [32].

WIERCIGROCH *et al.* [33] observaram que a amplitude adimensional atinge o seu ápice na faixa de $5 < U_{red} < 7$ e, portanto, a capacidade do sistema de entrar em sincronização aumenta nessa faixa.

Segundo BLEVINS [14], a amplitude adimensional também influencia no número de vórtices por ciclo da esteira de vórtices. À medida que y/D ultrapassa o valor de 0,5, perde-se o padrão simétrico da esteira de vórtices. Para uma amplitude igual ao diâmetro ($y/D = 1$), três vórtices são formados por ciclo de vibração do cilindro em vez do padrão simétrico de dois vórtices alternados por ciclo. Isso implica que as forças atuando no cilindro são função da amplitude transversal do corpo e, por esse motivo, o fenômeno de VIV é autolimitado quando o deslocamento de vibração ultrapassa um diâmetro.

3 REVISÃO DE LITERATURA

O fenômeno de vibração de um cilindro imerso em escoamento de fluido teve como pioneiros os estudos de Strouhal e Lorde Rayleigh em 1878 e 1879, respectivamente. A vibração induzida pelo desprendimento de vórtices é um fenômeno complexo que até os dias de hoje não é entendido em sua totalidade. No entanto, muitos avanços foram feitos no sentido de compreender, modelar e prever o comportamento de corpos que vibram com escoamento ao seu redor, impulsionados pela necessidade de projetar estruturas desse tipo na engenharia mecânica, oceânica, de petróleo e civil, permanecendo assim uma área de pesquisa ativa.

3.1 MODELOS PARA PREVISÃO DO VIV

Atualmente, estudos de previsão do comportamento de estruturas em VIV são feitos por uma extensa gama de abordagens e modelos matemáticos. Entre os principais estão os modelos fenomenológicos ou semi-empíricos que são os mais usados por fornecerem resultados relativamente satisfatórios e consumirem pouco tempo de computação. Com os avanços na computação de alto desempenho, técnicas de fluidodinâmica computacional (CFD) nas quais as equações de Navier-Stokes são numericamente resolvidas para obter as forças hidrodinâmicas agindo no sistema [34] passaram a se tornar viáveis e a serem mais usadas para a previsão do fenômeno.

3.1.1 Modelos de VIV de baixa fidelidade

Na modelagem matemática de vibrações induzidas por vórtices, as propriedades hidro-elásticas do sistema são compreendidas à fundo e são estimadas sem maiores problemas, com uma exceção sobre o termo de amortecimento fluido-elástico. A dificuldade está ao modelar o termo de forçamento na equação, isso acontece porque para o VIV, a excitação se dá principalmente sobre a forma de variações de pressão na região à jusante da estrutura. Nestes casos, modelos analíticos completos para o campo de escoamento na região de esteira são inexistentes [35].

O modelo de campo de escoamento mais indicado para o fenômeno é a solução das equações de Navier-Stokes. Como citado, importantes avanços em capacidade computacional e em técnicas de CFD vêm tornando possível a solução computacional destas equações para números de Reynolds na faixa em que ocorre o fenômeno de

vibrações induzidas por vórtices. No entanto, a previsão de respostas, propriedades e características do sistema por modelos resolvidos por CFD ainda é caro computacionalmente e continuará a ser em um futuro imaginável e, sendo assim, inviável em problemas mais elaborados em práticas de engenharia, justificando a utilização dos modelos fenomenológicos.

Entre os principais modelos fenomenológicos do VIV estão os que foram desenvolvidos através de correlações empíricas seguindo a ideia de um oscilador de esteira como os propostos pelos trabalhos de SKOP & BALASUBRAMANIAN [36] e FARSHIDIANFAR & ZANGANEH [37]. Tais modelos baseiam-se em relações empíricas, geralmente obtidas através de experimentos, para o acoplamento do sistema ou amortecimento não-linear da equação de esteira ou ainda para outras características do sistema. Por esse motivo, os modelos fenomenológicos apresentam limitações para representar o fenômeno em estudos que requerem maior grau de precisão.

Os modelos fenomenológicos baseados na ideia de osciladores de esteira foram desenvolvidos inicialmente na década de 70 nos trabalhos pioneiros de BIRKOFF & ZARANTANELLO [38] e BISHOP & HASSAN [25]. Tais modelos estão longe de serem intuitivos ou casuais. Pelo contrário, são modelos que apresentam teoria bem desenvolvida e suas equações são deduzidas por análises do campo de escoamentos. PARKINSON [35] afirma que por mais que o fenômeno de vibrações induzidas por vórtices esteja bem documentado, não é a previsão do fenômeno, mas sim a contribuição para o entendimento do fenômeno observado que é o interesse nas soluções do modelo matemático. Logo, estes tipos de modelos são ferramentas poderosas nos estudos de VIV.

Como mencionado anteriormente, os modelos fenomenológicos normalmente possuem uma ou mais variáveis que representam a dinâmica da esteira de vórtices, buscam satisfazer equações autolimitadas e auto-excitadas com a presença de parâmetros obtidos experimentalmente, como por exemplo equações de osciladores de Van der Pol ou Rayleigh para representar o fluido e equações de osciladores lineares para a estrutura. Em geral, são modelos que possuem como sua maior vantagem a obtenção de informações importantes do VIV ao custo de recurso computacional reduzido.

Existem diferentes tipos de mecanismos de acoplamentos fluido-estrutura usados e FACCHINETTI *et al.* [5] em 2004 fez uma comparação entre eles: (1) por deslocamento ($f = Ay$); (2) por velocidade ($f = A\dot{y}$); (3) por aceleração ($f = A\ddot{y}$). Após sua análise, foi concluído que o acoplamento por aceleração (3) foi o mais consistente com o padrão dos dados experimentais em todas as situações. De acordo com FACCHINETTI *et al.* [5], o mecanismo de acoplamento por aceleração descreve no mínimo qualitativamente as principais características do VIV e seu modelo proposto com o acoplamento de aceleração é até hoje um dos principais modelos de VIV estudados.

Devido à complexidade e alto custo computacional dos modelos que satisfazem as equações de Navier-Stokes, novos modelos fenomenológicos continuam a ser desenvolvidos e aperfeiçoados até os dias de hoje. Entre as principais fontes de erros associados a estes modelos comprometendo seu desempenho estão as estimativas dos parâmetros fenomenológicos, uma vez que estes possivelmente não têm significado físico e variam consideravelmente de experimento para experimento. Os parâmetros fenomenológicos possivelmente podem ser analisados pela teoria de discrepâncias de modelo [39]. WAN-HAI *et al.* [40] em 2010, propuseram modificações ao modelo clássico de FACCHINETTI *et al.* [5] e uma nova abordagem com o objetivo de aprimorar o modelo. De acordo com os autores, determinar os valores do parâmetro da equação de Van der Pol (ε) relacionado ao amortecimento não-linear da equação de fluido e o fator de escala da força de acoplamento (A) constituem a maior dificuldade na estimativa dos dados de entrada do modelo. Utilizando a função de transferência do oscilador de esteira, comparação com dados experimentais e uma técnica de ajuste de curvas proposta por SARPKAYA [29], WAN-HAI *et al.* [40] chegaram à importante conclusão de que ε é dependente das propriedades materiais da estrutura.

As vibrações induzidas por vórtices são significativamente maiores na direção transversal ao escoamento do que na direção alinhada ao escoamento e muitos estudos focam apenas na oscilação transversal do sistema. No entanto, segundo o estudo de BAARHOLM *et al.* [41], ao analisar a contribuição ao dano de fadiga, os investigadores concluíram que o dano máximo de fadiga na circunferência da área de seção transversal de um *riser* é causado quase que igualmente pelas vibrações em ambas direções. Sendo assim, as vibrações na direção do escoamento do sistema não podem ser ignorados e merecem atenção em um estudo completo do fenômeno.

No estudo de BAI & QIN [42], os autores introduziram um modelo fenomenológico para VIV de um cilindro com suportes elásticos e dois graus de liberdade, o deslocamento alinhado e transversal ao escoamento. Seu modelo é baseado na aplicação da teoria bidimensional de escoamento potencial e as forças hidrodinâmicas flutuantes agindo no cilindro são simplificadas e quantificadas. A partir da conservação de energia entre a estrutura e o fluido, obtém-se o modelo dinâmico acoplado ao introduzir uma variável de deslocamento relacionada à força do vórtice. A teoria de escoamento potencial, porém, é incapaz de modelar tensões de cisalhamento para o escoamento ao redor de um cilindro, pois, estes têm distribuição de pressão simétrica em relação a planos ortogonais passando pelo centro do cilindro, o que pela teoria de escoamento potencial leva à conclusão equivocada de que as forças agindo no cilindro são nulas. Essa contradição famosa é conhecida como o paradoxo de d'Alembert, sendo uma limitação fundamental da teoria de fluxo potencial. Tal limitação pode ser superada pelo emprego de um método numérico para a modelagem das forças hidrodinâmicas sob o cilindro como o DVM⁴, ou como no caso de BAI & QIN [42], o PVM⁵, no qual, a esteira contínua de vórtices alternados é discretizada em pontos opostos de mesma magnitude. Finalmente, os pesquisadores chegaram a um sistema de equações acopladas, sendo duas equações para descrever os dois graus de liberdade da estrutura, enquanto que desprezam a menor participação do efeito de alta ordem e não-linear da componente na direção do escoamento da força hidrodinâmica nas equações de fluido. Consequentemente, resta apenas uma equação para descrever o fluido, a qual é relacionada à componente transversal da força hidrodinâmica. Os resultados da solução do modelo em questão são apresentados por BAI & QIN [42] e comparados com os dados experimentais de JAUVTIS & WILLIAMSON [43]. Segundo os autores, o modelo proposto pode representar quantitativamente e qualitativamente as principais características do VIV, obtendo resultados mais precisos do que alguns modelos anteriores mais populares. BAI & QIN [42] fazem ainda a extensão de seu modelo para a previsão da resposta de VIV de um problema tridimensional de *riser* tensionado (TTR⁶), sendo capaz de fornecer informações importantes para o estudo.

⁴ Referente à expressão em inglês: *Discrete Vortex Method*

⁵ Referente à expressão em inglês: *Point Vortex Method*

⁶ Referente à expressão em inglês: *Top Tensioned Riser*

POSTNIKOV *et al.* [44] apresentaram outro modelo fenomenológico para a descrição de um cilindro com suportes elásticos em VIV com dois graus de liberdade, novamente sendo capaz de se mover nas duas direções mencionadas. Inicialmente, os autores partem da equação do movimento do cilindro em VIV nos dois graus de liberdade. A partir deste momento, o forçamento hidrodinâmico total do sistema é definido em termos dos seus componentes em cada direção, que são resultantes das ações das forças de arrasto e de sustentação induzidas pelo desprendimento de vórtices. A força de arrasto é modelada considerando a parcela de arrasto médio constante e a parcela flutuante relacionada ao VIV, enquanto que, no caso da força de sustentação, existe apenas a parcela flutuante causada pelo fenômeno de VIV.

Com a abordagem de empregar equações não-lineares de osciladores de Van der Pol, os autores usam duas equações para descrever o efeito da esteira de vórtices nas duas direções, relacionando duas variáveis de esteira aos coeficientes de arrasto e de sustentação. Finalmente, o acoplamento por aceleração, como proposto por FACCHINETTI *et al.* [5], é utilizado, fechando o sistema de quatro equações acopladas, sendo duas para descrição dos dois graus de liberdade da estrutura e duas para a descrição dos dois graus de liberdade da esteira de vórtices.

Analisando seu modelo, POSTNIKOV *et al.* [44] perceberam que o coeficiente de amortecimento da equação do movimento alinhada ao escoamento tem o dobro da magnitude do coeficiente de amortecimento da equação de movimento na direção cruzada, característica peculiar desse modelo que não é encontrada em modelos anteriores de dois graus de liberdade. Além disso, ao assumirem a simplificação de que a velocidade do cilindro é relativamente pequena, seu modelo se reduz a outros modelos existentes. Logo, o modelo de POSTNIKOV *et al.* [44] é um modelo teoricamente bastante consistente. Os autores ainda fazem um estudo de melhor ajuste a partir dos dados experimentais de JAUVTIS & WILLIAMSON [43] e de dados de CFD para obterem informações importantes sobre seu modelo. Eles concluíram que os resultados numéricos do modelo reproduzem com boa precisão as amplitudes de vibração na comparação com os dados experimentais disponíveis com ocasionais erros, porém pequenos, na zona de sincronização. Mais que isso, os parâmetros fenomenológicos têm efeito sobre a extensão da região de sincronização, a qual causa as maiores amplitudes de vibração em um sistema em VIV e que tais parâmetros dependem da razão de massas.

Devido ao grande realismo das previsões dos modelos semi-empíricos, por vezes acompanhando as respostas de modelos CFD e dados experimentais, modelos fenomenológicos continuam a serem desenvolvidos, otimizados e usados em aplicações práticas.

THORSEN *et al.* [45] propuseram um modelo com uma nova abordagem a respeito da formulação do amortecimento hidrodinâmico. Diferentemente dos modelos que empregam equações de Van der Pol com amortecimento não-linear, variáveis de esteira e acoplamento pelo forçamento, os autores apresentam modelagem baseada na representação da extração de energia da estrutura ocasionada pelo fluido diretamente no termo de forçamento do sistema. Portanto, seu modelo de amortecimento, como chamado pelos autores, não possuem equações adicionais para a representação do efeito do fluido no fenômeno. O modelo de amortecimento foi aplicado a problemas de VIV de *risers* livres para oscilar apenas na direção transversal com escoamento constante e variável. Segundo THORSEN *et al.* [45], o modelo de amortecimento, na comparação com experimentos, é capaz de representar com boa aproximação o domínio de frequências, modos de vibração e as amplitudes transversais das vibrações de *risers*.

Esforços em pesquisas para estudar a operação de *risers* submarinos têm sido conduzidos principalmente através de modelos fenomenológicos. Os *risers* são dutos destinados ao transporte de fluidos sendo produzidos ou à injeção de fluidos em poços de petróleo e gás. Com isso, uma das características operacionais que claramente afetam a dinâmica não-linear do VIV é o escoamento de fluido interno. MENG *et al.* [46] investigam o efeito do escoamento interno no problema de um *riser* com escoamento interno monofásico laminar vibrando na direção ortogonal ao escoamento externo. O modelo abordado pelos autores apresenta uma equação para o movimento do *riser* na direção cruzada e decomposição da força hidrodinâmica total em força inicial, força de arrasto e força de sustentação. Para a representação do efeito do fluido no VIV, é adicionada uma equação de oscilador não-linear de Van der Pol, conforme estudos anteriores. Os autores concluem que o escoamento interno influencia as amplitudes de vibração e frequência dominante de vibração da estrutura. Segundo MENG *et al.* [46], o escoamento interno pode dar origem a novos modos naturais de vibração e alterar o papel de modos de vibração predominantes.

HE *et al.* [47] investigaram o problema de um *riser* com escoamento interno e sujeito a carregamentos cíclicos no topo, justificados pelos movimentos indesejados de topo devido à ação das ondas, por exemplo, na plataforma que o suporta. O problema foi simplificado para permitir vibrações apenas na direção transversal, com modelagem do *riser* segundo a viga de Euler-Bernoulli com inclusão dos efeitos do escoamento interno e do carregamento de topo. Para a representação do efeito do desprendimento de vórtices, os autores empregaram uma equação de Van der Pol com variável de esteira. HE *et al.* [47] afirmam que a excitação vinda da plataforma pode aumentar as amplitudes de vibrações ortogonais quando o sistema está fora de sincronização. No entanto, em condição de sincronização, a dinâmica do sistema é bem mais complexa, pois, a excitação vinda do topo causa uma redução ou acréscimo da amplitude de vibração transversal dependendo da frequência e aceleração de excitação quando comparados ao caso sem carregamentos de topo. Por fim, os autores sugerem que pode ser possível equilibrar as excitações de topo do *riser* e a excitação do escoamento interno para mitigar as vibrações induzidas por vórtices da estrutura.

3.1.2 Modelos de VIV de alta fidelidade

As principais abordagens de CFD para turbulência empregadas na simulação do VIV são: Simulação numérica direta (DNS⁷), equações médias de Reynolds (RANS⁸) e simulação de grandes escalas (LES⁹) e uma revisão resumida sobre eles é apresentada abaixo, de acordo com VERSTEEG & MALALASEKERA [48]:

- **RANS:** É baseado no conceito de médias temporais de Reynolds, isto é, propriedades do escoamento, como por exemplo a velocidade, passam a ser consideradas por um termo médio em relação ao tempo e um termo que leva em consideração os efeitos da turbulência nestas médias de propriedades. Antes da aplicação de método numéricos, as equações de Navier-Stokes são deduzidas para as médias temporais, o que faz com que surjam termos de interação entre as flutuações turbulentas. Estes novos termos são então representados por algum modelo de turbulência clássico, entre os mais populares estão o modelo $k - \varepsilon$, $k - \omega$ e o modelo de tensões de Reynolds.

⁷ Do inglês: *Direct Numerical Simulation*

⁸ Do inglês: *Reynolds averaged Navier-Stokes*

⁹ Do inglês: *Large Eddy Simulation*

- **LES:** É uma forma intermediária de cálculos turbulentos que é capaz de investigar o comportamento dos vórtices maiores. O método envolve a filtragem no domínio espacial das equações instáveis de Navier-Stokes antes da aplicação de método numérico para solução. Resumidamente, os vórtices que são maiores e solucionáveis pela malha de computação empregada são resolvidos enquanto os vórtices menores são filtrados e têm seus efeitos previstos por algum tipo de modelo, geralmente envolvendo médias temporais.
- **DNS:** Esse método envolve a computação das propriedades médias de escoamento e todas as flutuações turbulentas em malhas espaciais tão pequenas quanto o necessário para computar as menores escalas na qual dissipação de energia acontece, conhecidas como escalas de Kolmogorov. A resolução é dada em passos de tempo suficientemente pequenos para descrever o período das mais rápidas flutuações turbulentas.

É importante destacar que a abordagem RANS é a mais modesta em custo computacional e tem a capacidade de fornecer resultados razoavelmente precisos e, por isso, é a mais usada em cálculos de escoamento na engenharia. GUILMINEAU & QUEUTEY [49] fizeram uma análise em volumes finitos de um cilindro com um grau de liberdade e suportes elásticos vibrando na direção transversal ao escoamento. O desprendimento de vórtices e as consequentes forças hidrodinâmicas oscilatórias atuando na superfície do cilindro foram computadas pelas equações bidimensionais incompressíveis de Navier-Stokes com médias de Reynolds.

Os autores utilizaram o modelo de turbulência $k - \omega$ para representar os termos de interação turbulentos e compararam seus resultados com dados experimentais da literatura. A respeito do resultado do estudo, os autores afirmam que suas simulações previram corretamente as máximas amplitudes do sistema. No entanto, os autores apontam uma série de imprecisões e falhas em seus resultados. Segundo SARPKAYA [1], fica difícil discernir entre os possíveis motivos para os erros obtidos de GUILMINEAU & QUEUTEY [49] na comparação com dados experimentais, pois, sua escolha do modelo de turbulência ($k - \omega$) é equivocada para uma análise bidimensional em volumes finitos na faixa de número de Reynolds situada.

A LES é uma abordagem computacionalmente mais intensa por envolver a computação das equações instáveis de Navier-Stokes, contudo é mais precisa do que a

RANS. Com os avanços computacionais, é uma técnica que vem ganhando popularidade para a solução de CFD com problemas de geometria complexa.

TUTAR & HOLDO [50] apresentaram resultados da simulação computacional por elementos finitos de um cilindro em VIV com a incidência de um escoamento uniforme. Simulações foram realizadas pela abordagem LES para estudos em 2-D e 3-D e subsequentemente comparados entre si e com dados experimentais. Embora computacionalmente seja vantajoso simular em 2-D, os autores explicam porquê o estudo 3-D do escoamento deve ser feito se possível. Segundo os autores, as simulações 3-D descrevem uma área maior de formação de vórtices a jusante do cilindro concordando melhor com experimentos. Com isso, o modelo 3-D produz vórtices mais alongados e claramente descreve melhor o escoamento ao redor do cilindro. De maneira geral, de acordo com seu estudo, as simulações LES fornecem resultados relativamente precisos quando comparados a dados experimentais, principalmente quando em um estudo tridimensional do escoamento ao redor de um cilindro. Porém, conforme observado por AL-JAMAL & DALTON [51] e apontado por SARPKEYA [1], a LES apresenta alguns pontos em aberto para a representação do VIV. Segundo investigado, um modelo LES, sendo ele 2-D ou 3-D, não é capaz de descrever completamente o escoamento ao redor de um cilindro fixo, muito menos de um cilindro oscilando [1].

A DNS é uma técnica que não necessita do uso de modelos de turbulência para representação das interações dos vórtices no escoamento, ou seja, é uma abordagem que simplesmente envolve a computação das equações de Navier-Stokes em malhas extremamente finas, o que claramente pode ser tornar uma tarefa difícil.

LUCOR & KARNIADAKIS [52] compararam resultados de seu estudo DNS bidimensional de um cilindro com suportes elásticos sujeito a vibrações induzidas por vórtices a baixos números de Reynolds com dados experimentais. A partir da comparação com dados experimentais, foi concluído que seu modelo DNS espectral é capaz de prever com precisão o escoamento ao redor do cilindro. No entanto, nenhuma informação sobre o tempo de computação necessário para atingir tais resultados é dada. Segundo SARPKEYA [1], a DNS é limitada para baixos números de Reynolds e continuará a ser nos próximos anos, isto é, para faixas de números de Reynolds mais realistas de estruturas em VIV, a DNS é praticamente inviável.

SARPKAYA [1] concluiu que os métodos DNS e LES são mais completos para representar o mecanismo de interação entre a separação da camada limite e a esteira de vórtices formada, mas a técnica de RANS é mais robusta e de menor esforço computacional.

O desenvolvimento da abordagem DNS ou a combinação de diferentes abordagens para melhor descrição de interações fluido-estrutura, como o fenômeno de VIV é uma área que vem recebendo atenção e de grande potencial.

Por fim, é importante destacar que todos os modelos, mesmo os que são construídos a partir da minuciosa observação do fenômeno físico, por mais completos que sejam, sempre estarão embutidos de aproximações, simplificações e erros em todas as suas fases de concepção e utilização na previsão de um fenômeno físico. Portanto, a denominada característica de alta fidelidade citada no presente trabalho refere-se em relação ao modelo apresentado anteriormente de menor fidelidade. Ressalta-se ainda que o estudo de estruturas vibrando em CFD pela abordagem DNS é promissor e podem apresentar maior acurácia para representar o escoamento, no entanto, como ressaltado anteriormente, é mais dispendioso em termos de tempo de computação do que outros métodos e ainda inviável para altos números de Reynolds. Sendo assim, todos os modelos mencionados acima são importantes na obtenção de informações do escoamento, mas se revezam entre grau de fidelidade ou precisão e custo computacional ou praticidade.

3.2 QUANTIFICAÇÃO DE INCERTEZAS

O emprego da teoria de quantificação de incertezas aliada à teoria do fenômeno de desprendimento de vórtices e vibrações induzidas vem se mostrando um ramo interdisciplinar promissor, pois, permite um estudo que explora toda a complexidade e variabilidade intrínseca ao fenômeno.

Os estudos de BERNADÁ [7], SANDRI [23] e RODRIGUES [53] aplicam a teoria de quantificação de incertezas para propagar incertezas em parâmetros de entrada de modelos fenomenológicos. LUCOR & KARNIADAKIS [52] apresentam um estudo igualmente interessante de análise de incertezas através da construção de gráficos de intervalos de confiabilidade pelo emprego da expansão de caos polinomial em parâmetros estruturais de entrada de um modelo DNS para previsão do VIV de um cilindro.

As incertezas dos parâmetros quando propagadas pelo sistema são refletidas nas forças hidrodinâmicas de VIV e conseqüentemente na amplitude de oscilação e podem ser analisadas para estimativas mais realistas para a probabilidade de falha da estrutura. Porém, estudos de quantificação de incertezas de modelos fenomenológicos, que podem ser maiores do que incertezas em variáveis de entrada e erros de medida apresentam-se em menor quantidade na literatura.

VIOLETTE *et al.* [54] em 2007 compararam os resultados do modelo fenomenológico de FACCHINETTI *et al.* [5] modificado para análise de vigas e estruturas como cabos submarinos, com resultados de seu estudo DNS e experimentos de VIV em cabos submarinos e vigas (*risers*, poços termométricos, entre outros). As comparações foram feitas para escoamento uniforme e para escoamento variável. Os autores concluíram que algumas das características importantes do VIV foram representadas fielmente pelo modelo fenomenológico enquanto outras não tão bem. Como vantagem do uso desse modelo ele citou o baixo tempo computacional. Segundo os autores, todas as simulações não levaram mais de uma hora para terminar. Além disso, eles salientam que os modelos fenomenológicos podem ser calibrados com experimentos ou modelos mais precisos para compensar falta de correspondência. Outro ponto de grande importância para a presente dissertação, reforçando o que foi mencionado no parágrafo anterior, é a conclusão de VIOLETTE *et al.* [54] sobre as incertezas do sistema, que de acordo com os pesquisadores, os erros de discretização são muito menores do que as incertezas associadas aos mecanismos físicos envolvidos e sua modelagem.

3.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade de um fenômeno complexo como o problema de um cilindro vibrando em VIV é um desafio. A análise de toda a dimensão de entrada do sistema físico é geralmente inviável ou de elevada dificuldade seja pela grande dimensão de parâmetros estocásticos na entrada do sistema ou pelo alto custo computacional de suas simulações.

A análise de sensibilidade é extremamente útil nos estudos de aprimoramento de modelo, pois, pode fornecer informações sobre o comportamento incerto das variáveis de interesse na entrada ao destacar parâmetros predominantes que podem ser calibrados, contribuir para aproximações eficientes de modelo e identificar e eliminar parâmetros

de menor importância para o estudo de quantificação de incertezas, consequentemente reduzindo a dimensão do problema e reduzindo o tempo de simulação computacional [55].

A Análise de Sensibilidade Local (ASL) é baseada no conceito de que, matematicamente, a derivada $\partial Y_i / \partial X_j$, onde Y_i é determinada variável de interesse de saída e X_j é um parâmetro de entrada, pode ser vista como a sensibilidade de Y_i em relação à X_j [8]. O termo local se refere ao fato de que as derivadas são tomadas em um ponto específico.

Segundo MORIO [56], um método eficiente para a ASL de sistemas complexos pode ser feita com a estimativa dos efeitos elementares com o método de Morris que se norteia pela filosofia da análise do efeito de um parâmetro de entrada por vez na função de saída mantendo o restante fixo (OAT¹⁰). O método proposto por Morris em 1991 também é chamado de Método dos Efeitos Elementares. Resumidamente, indefinidas trajetórias no espaço dos parâmetros de entrada são estabelecidas para o cálculo dos efeitos elementares, sua média (μ_i) e desvio padrão (σ_i), dados que fornecem uma medida direta da sensibilidade do modelo a determinado parâmetro de entrada.

O desvio padrão σ_i , ainda segundo MORIO [56], é uma medida do efeito não-linear do parâmetro de entrada X_i e também fornece informações sobre as interações entre os diversos parâmetros de entrada.

Os índices calculados podem ser analisados da seguinte forma:

- i. Os parâmetros de entrada que têm pouca importância para a resposta do modelo, ou seja, são fixados após a análise de sensibilidade, são aqueles com valores baixos de médias de efeitos elementares.
- ii. Parâmetros de entrada que não podem ser excluídos de uma posterior análise de quantificação de incertezas, pois têm efeito linear considerável na resposta do sistema e que não apresentam interações importantes são aqueles com alto valor de μ_i e pequenos valores de σ_i .
- iii. Parâmetros de entrada relevantes com efeito não-linear na resposta e que apresentem ou não outras interações são aqueles com alto valor de μ_i e alto valor de σ_i .

¹⁰ Do inglês: "One-At-a-Time".

ALAM & MCNAUGHT [57] em 2004 utilizaram em sua pesquisa o método de Morris para realizar uma análise dos parâmetros de entrada que mais influenciavam na resposta do modelo. Inicialmente, os autores trabalhavam com um modelo de combates armados para previsão da performance de equipamentos e táticas militares que tinha um número grande de parâmetros de entrada e, por isso, consumia muito tempo de simulação. Foi então usado o método de Morris para a avaliação dos parâmetros mais importantes e posterior construção de um meta-modelo. Os pesquisadores concluíram que os parâmetros influentes e os eliminados através do método em questão resultaram em aproximações de boa precisão e grande economia de tempo computacional.

KING & PERERA [58] também aplicaram a abordagem OAT e o método de Morris para a ASL de um modelo usado no estudo de caso de um sistema urbano de captação e fornecimento de água e assim determinar as variáveis de entrada mais relevantes em suas simulações.

PUJOL [59] propôs uma técnica de ASL adotando uma abordagem diferente da OAT, na qual o autor utiliza uma forma mais elaborada para as trajetórias no espaço dos parâmetros de entrada que pode ser encontrada em detalhes no seu artigo.

A abordagem baseada em derivadas da análise de sensibilidade local tem a vantagem de ser eficiente em termos de recursos computacionais e de ser uma técnica determinística. Porém, as derivadas obviamente apenas fornecem informações em determinado ponto e não para todo o campo de valores de entrada do modelo. Esta é uma característica que funciona bem para sistemas lineares onde as informações podem ser extrapoladas a partir do ponto calculado, mas é uma grande desvantagem para o caso de sistemas não-lineares [8]. Outra desvantagem da ASL é que o método não é capaz de medir efetivamente efeitos resultantes da interação entre os valores de entrada. Nesse sentido, a ASG é mais robusta e mais informativa para o caso de um sistema complexo, não-linear e com incertezas na definição de seus parâmetros de entrada. Resumindo, a ASG fornece informações mais detalhadas e precisas do que a ASL, mas para o caso de modelos muito pesados computacionalmente, o método de ASL é favorecido por necessitar de consideravelmente menos simulações para estimar os índices de sensibilidade [56].

Fundamentalmente, a ASG se baseia no estudo de como a aleatoriedade dos parâmetros de entrada do sistema afeta a variabilidade da resposta do sistema. Os

métodos de ASG, como o método de Sobol [8], podem utilizar técnicas de Monte Carlo para o cálculo dos índices de sensibilidade ao gerar uma grande quantidade de amostras de dados de entrada a partir da especificação de distribuições de probabilidade e correlações para cada parâmetro de entrada. O método se concentra na decomposição de variâncias (decomposição ANOVA¹¹) da saída do modelo nas contribuições das incertezas de cada parâmetro de entrada e suas interações globalmente.

Os índices de sensibilidade fornecem informação sobre a sensibilidade do modelo a determinado parâmetro. A partir dessa informação, os parâmetros irrelevantes podem ser considerados fixos, isto é, excluídos do estudo posterior. Consequentemente, a dimensão do problema é reduzida consideravelmente e foca-se apenas nos parâmetros críticos para o refinamento do modelo. O método de Morris e o método de Sobol adquiriram popularidade e são talvez alguns dos métodos emblemáticos dos tipos de análise de sensibilidade mencionados por serem técnicas que podem ser aplicadas independentemente do modelo usado [60].

SALTELLI *et al.* [61], SALTELLI *et al.* [8] fazem uma revisão detalhada dos métodos de análise de sensibilidade global e aplicação em estudos de casos são encontradas em DUONG *et al.* [62] e SALTELLI *et al.* [58].

ELDRED *et al.* [55] apresentam um modelo LES para o projeto de turbinas do tipo "*scramjet*" e propõem a quantificação de erros de modelo. Inicialmente, tem-se um modelo complexo com a presença de um grande número de parâmetros incertos resultantes da complexidade e aleatoriedade dos dados de entrada. A quantificação dessa grande dimensão de parâmetros incertos se torna inviável no modelo original já que uma única simulação do modelo complexo requer muito tempo de computação. Como possível solução, os autores propõem uma filosofia "multi-fidelidade", na qual utilizam um modelo de baixa fidelidade juntamente com o modelo inicial de alta fidelidade para obter informações sobre o sistema. ELDRED *et al.* [55] fazem a ASG do modelo de maior fidelidade para identificar parâmetros dominantes e eliminar (fixar com valores nominais) do estudo de quantificação de incertezas os parâmetros que pouco contribuem para a variabilidade da resposta do sistema.

¹¹ Decomposição ANOVA: *Analysis of Variance*.

Para o problema apresentado por ELDRED *et al.* [55], a ASG com a estimativa dos índices de sensibilidade pelo método de Monte Carlo é proposta. O número de simulações de Monte Carlo do modelo mais elaborado necessárias para a ASG torna o estudo novamente caro computacionalmente. Por isso, os autores propõem a utilização de um método Monte Carlo multi-nível e multi-fidelidade (MLMF MC¹²) para gerar amostras e computação dos índices de sensibilidade. Em seguida, foram identificados os parâmetros dominantes para a quantificação do erro de modelo por calibração Bayesiana.

Como dito anteriormente, a estimativa dos índices de Sobol pelo método de Monte Carlo pode ser ineficiente para modelos muito complexos. Isto porque o método de Monte Carlo faz uso de um número grande de simulações para obter uma boa precisão (taxa de convergência de \sqrt{N} onde N é o número de amostras geradas) [56]. Para estes casos, nos quais as vantagens em aliar o método de Monte Carlo à ASG não compensam a desvantagem de um tempo de simulação muito alto, outros métodos são podem ser empregados como alternativas para a estimativa dos índices. Algumas alternativas são: método Quase-Monte Carlo e o algoritmo FAST¹³ baseado na transformada multidimensional de Fourier. O método FAST clássico estima apenas os efeitos de primeira ordem, porém a extensão do método FAST é capaz de estimar os efeitos de primeira ordem e os efeitos totais SALTELLI *et al.* [63].

SALTELLI *et al.* [64] reforçam o fato de que para o caso do método de Sobol, ou seja, baseado na estimativa dos índices de sensibilidade, a preocupação com o custo computacional é crítica, especialmente quando a função toma a forma de modelos elaborados. De acordo com os autores, o número de termos na decomposição da variância da saída do sistema cresce na ordem de 2^p onde p é a dimensão dos parâmetros de entrada. Por esse motivo, geralmente uma análise de sensibilidade concentra-se na estimativa de 2 grupos de p índices de Sobol, p índices de primeira ordem e p índices totais. O custo computacional da análise é relativamente pequeno e pouco p -dependente na estimativa dos índices primários, enquanto que para a computação dos índices totais o custo computacional é alto e altamente dependente da dimensão de entrada p . Os autores exploram ainda outras alternativas para reduzir o

¹² Do inglês: *Multilevel Multifidelity Monte Carlo*.

¹³ Referente à *Fourier Analysis Sensitivity Test*.

esforço computacional na estimativa dos índices de sensibilidade e uma comparação de diversos estimadores existentes para os índices totais disponíveis na literatura com o objetivo de estudar os prós e contras em relação à eficácia e custo computacional.

Uma técnica que pode ser vantajosa no estudo de sensibilidade de um modelo complexo é a "Análise de Sensibilidade Bayesiana" introduzida por OAKLEY & O'HAGAN [65]. De acordo com os pesquisadores, tal método é eficiente em conduzir a análise de sensibilidade do modelo com um número muito menor de simulações o que é altamente desejável para problemas com modelos complicados. Para resumir, a filosofia do método é tratar o modelo $f(*)$ como uma função desconhecida. No sentido literal, tal hipótese é inválida, pois um modelo $f(*)$ implementado é formulado minuciosamente por um cientista ou um grupo de pesquisa a partir de leis ou dados que são conhecidos e estabelecidos na área. Porém, no sentido de que $f(*)$ é um modelo complexo em que a relação entre determinado parâmetro de entrada e seu efeito na resposta é difícil de observar, $f(*)$ pode ser considerada como uma função desconhecida. A partir dessa hipótese, uma distribuição a priori é elaborada para $f(*)$ e atualizada de acordo com a teoria Bayesiana usando as respostas $Y_i = f(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, p$ como dados para a obtenção da distribuição posterior. Subsequentemente, o método emprega inferência Bayesiana para estimar os índices de sensibilidade. Sua desvantagem é que a sua aplicação é longe de ser trivial e que a falta de informação ou equívocos na formulação da distribuição a priori afetam fortemente sua convergência e acurácia, uma vez que muitas vezes informações a priori são desconhecidas ou difíceis de se obter. De maneira geral, a chamada Análise de Sensibilidade Bayesiana só motiva sua aplicação para casos de modelos complexos em que outras técnicas como a ASG atuam mal.

Uma abordagem baseada na filtragem por Monte Carlo (MCF¹⁴) para a análise de sensibilidade é a chamada análise de sensibilidade regional (ASR) que foi introduzida no estudo de qualidade ambiental por HORNBERGER & SPEAR [66, 67]. A técnica de ASR emprega o método de Monte Carlo, coletando amostras a partir de distribuições de probabilidade estabelecidas. De acordo com RATTO *et al.* [68], duas tarefas são necessárias para o estudo de ASR:

¹⁴ Do inglês: *Monte Carlo Filtering*.

1. Uma definição qualitativa do comportamento do sistema comum a todos os métodos de Monte Carlo, como por exemplo: zonas de incertezas, distribuições de probabilidades, médias e outras informações baseadas no processo.
2. Uma classificação binária das amostras geradas do modelo de acordo com critério específico, possibilitando a filtragem. Um exemplo seria em um caso de problema financeiro classificar como lucro (L) as amostras positivas ou prejuízo (P) as amostras negativas.

O próximo passo é aplicar o teste de Smirnov e obter uma medida de sensibilidade, no caso chamada de nível de significância.

RATTO *et al.* [68] explicam que a técnica de ASR tem muitas propriedades globais como os métodos de ASG. Além disso, outra característica marcante do método é que todos os fatores de entrada são variados simultaneamente o que torna o método mais realista. Entre as principais desvantagens do método, ainda segundo o autor, uma talvez seja a mais limitante: Com a ASR não é possível realizar a análise completa dos parâmetros julgados como sem importância do ponto de vista da análise de sensibilidade, pois o método não informa sobre as interações entre os termos, logo, geralmente uma outra inspeção a fundo é necessária, normalmente aplicando a ASG.

3.4 DISCREPÂNCIAS DE MODELO

Como dito anteriormente, um modelo é uma ferramenta matemática para a previsão de um fenômeno físico e é construído a partir de hipóteses, teorias e observações da realidade, sendo assim nenhum modelo é perfeito. Todo modelo de previsão é uma aproximação da realidade, alguns mais precisos outros menos precisos.

Os erros de modelo (*model error*), ou discrepâncias de modelo (*model discrepancy*) têm origem nas observações do fenômeno que por si só são embutidas de erros, aproximações e simplificações adotadas na construção do modelo, ou no método numérico para solução das equações, no truncamento, no critério de convergência e outros. As discrepâncias de modelo são observadas na variabilidade da resposta do modelo e apresentam caráter incerto no sistema, no sentido que são dependentes de vários fatores que se manifestam aleatoriamente. As discrepâncias de modelo podem ser estimadas através da calibração do modelo com um referencial.

A calibração de modelo é o processo de ajustar sistematicamente os vários parâmetros de entrada do modelo para que este se ajuste ao processo real do estudo. Uma revisão do desenvolvimento da teoria de calibração de modelos ao longo do tempo e das principais técnicas utilizadas pode ser encontrada em OSBORNE [69] e MONARI [60]. Segundo MONARI [60], as técnicas de calibração de modelo podem ser classificadas da seguinte maneira:

- a. Manual iterativa.
- b. Analítica com o ajuste automatizado dos parâmetros.
- c. Analítica baseada em métodos probabilísticos ou estocásticos.

Historicamente, a abordagem para a calibração de modelos mais popular é a busca *ad hoc* pelo melhor ajuste por técnicas de otimização, ajuste de curvas ou empiricamente. Porém, esta abordagem sem metodologia mais generalizada pode ser perigosa, pois a má calibração pode distorcer o modelo. É possível que um estudo onde foi realizada calibração equivocada ganhe popularidade erroneamente e que acabe se tornando um sofisma, corrompendo o modelo. Atualmente existe uma preocupação da comunidade científica a respeito deste assunto [70].

EISENHART [71] foi pioneiro no cenário do estudo estatístico de problemas de calibração linear, sua análise e solução do problema inverso de estimativa de parâmetros é conhecido como o estimador clássico [69]. Maiores detalhes sobre o método são encontrados em seu artigo e uma revisão mais objetiva é encontrada em OSBORNE [69].

A calibração clássica apresenta teoria bem desenvolvida há muitos anos. Uma clara desvantagem do método é que assumir uma relação linear entre o parâmetro ideal e o parâmetro verdadeiro nem sempre é realístico quando usado em sistemas complexos. Como os parâmetros estimados são tratados como conhecidos, as previsões seguintes do modelo calibrado não levam em consideração a aleatoriedade da discrepância de modelo que é, em síntese, uma incerteza.

Uma alternativa é a abordagem Bayesiana para a calibração de modelos que permite explorar a fundo as incertezas de erros de modelo. O método GLUE (*Generalized Likelihood Uncertainty Estimation*) é um procedimento simplificado, mas essencialmente Bayesiano, introduzido originalmente por BEVEN & BINLEY [72], baseado no conceito de mesma finalidade e rejeitando o conceito de um modelo ou

conjunto de parâmetros ótimos, isto é, assume a existência de um conjunto de valores (limites de incertezas) para os parâmetros de calibração e não uma estimativa pontual que reproduz os dados observados. O GLUE vem sendo aplicado a uma grande variedade de problemas de previsão ambiental [72-76].

Estendendo a visão de NETO [77], o GLUE pode ser resumido nos seguintes passos:

- i. Decidir qual a estrutura ou estruturas de erros de modelo a serem usadas.
- ii. Tipicamente empregar o método de Monte Carlo para gerar amostras de parâmetros a partir de distribuições definidas a priori.
- iii. Avaliar cada conjunto de amostras e comparar com os resultados observados através de uma medida de verossimilhança, separando-as em adequadas ou não a partir de um limite pré-estabelecido da medida de verossimilhança. Essa ‘verossimilhança’, como foi definida por BEVEN & BINLEY [72], não corresponde ao conceito de função de verossimilhança da teoria de inferência Bayesiana, mas sim a uma medida qualitativa de um ajuste ou desajuste, também chamada de funções de peso ou ponderação.
- iv. Descartar os grupos de amostras classificados como inadequados e normalizar os valores das medidas de verossimilhança para as simulações de amostras adequadas, tais valores são os pesos.
- v. Os pesos são utilizados para a construção das funções de probabilidade acumulada das previsões do modelo sendo calibrado. Essas funções são usadas para definir os limites de confiança das previsões do modelo [78].
- vi. As medidas de verossimilhança são então atualizadas de acordo com o teorema de Bayes.

Revisões detalhadas acerca do GLUE podem ser encontradas em BEVEN & BINLEY [72], ROMANOWICZ *et al.* [78] e SALTELLI *et al.* [61]. SALTELLI [61] apresentam uma série de estudos de casos do GLUE e chamam a atenção para os dois principais aspectos problemáticos que têm que ser sempre levados em consideração para o uso do método:

- 1) A construção da função de peso é um aspecto fundamental para o sucesso do GLUE, a quantificação das incertezas do modelo pode depender fortemente dessa definição. No GLUE, a definição "qualitativa" da função de peso é

baseada essencialmente na relação inversa do erro médio quadrático, o que torna o procedimento mais flexível e simples. Em uma metodologia puramente Bayesiana, a função de verossimilhança está relacionada a como os erros entre as observações e a estrutura do modelo são representados pelo modelo estatístico.

- 2) A estratégia de amostragem do GLUE é pouco eficiente estatisticamente, problema similar ao do MCF detalhado anteriormente. O método de Monte Carlo por si só tem uma baixa eficiência no que diz respeito ao número de simulações necessárias e sua convergência. No caso do GLUE, as simulações de Monte Carlo são classificadas de acordo com um limite exposto na medida de verossimilhança como adequadas ou não, sendo descartadas as amostras inadequadas o que torna o método ainda menos eficiente e pode resultar em propriedades estatísticas pouco significantes.

Uma solução para a segunda desvantagem seria realizar uma análise de sensibilidade no modelo para identificar parâmetros que afetam pouco o modelo e descartá-los da etapa de calibração, ampliando significativamente a eficácia do GLUE. De fato, o uso de um método de análise de sensibilidade é recomendado e na prática é usado como aliado à calibração do modelo. RATTTO *et al.* [68] apresentam uma pesquisa importante sobre o emprego de análise de sensibilidade na calibração de modelos.

RATTTO *et al.* [68] analisam as possibilidades e as vantagens de fazer uma análise de sensibilidade aliada ao GLUE, especialmente técnicas de ASG que são baseadas em estudos de variância. Os autores propõem uma metodologia de combinar o método de GSA com o GLUE e comparam com outras técnicas como a ASR.

A abordagem ASG-GLUE tem combinação direta, sendo necessário que o mesmo método de amostragem para o GLUE seja utilizável para a computação dos índices de sensibilidade da ASG, indicando que a estimativa por Monte Carlo ou pelo método FAST são recomendados. Dessa maneira, ao gerar o mesmo número de amostras do modelo, a calibração do modelo e os índices de sensibilidade podem ser estimados. Talvez a maior contribuição dos pesquisadores tenha sido propor a aplicação da ASG diretamente na medida de verossimilhança do GLUE e não na resposta do modelo como normalmente as análises de sensibilidade são feitas.

RATTO *et al.* [68] aplicaram a metodologia ASG-GLUE para o estudo de caso de um experimento químico. O experimento era simples e consistia na observação da evolução temporal de uma reação química isotérmica e irreversível. Três parâmetros foram considerados no estudo, no qual a todos foi atribuída distribuição uniforme e limites superiores e inferiores com base no seu estudo individual. Um conjunto de 2048 amostras foi gerado para a estimativa dos índices de sensibilidade aplicada à resposta do sistema ou à medida de verossimilhança.

Na comparação com os resultados, ficou claro que a estrutura entrada-saída é muito mais complexa para o caso da análise de sensibilidade da medida de verossimilhança do que para o caso da análise da resposta do sistema. De acordo com os autores, ao aplicar a ASG na medida de verossimilhança, mais interações entre os fatores foram percebidas, concluindo que tal abordagem dá informações úteis sobre as interações entre os parâmetros que são valiosas para a calibração do modelo. De maneira geral, os autores concluem que o uso do GLUE, através da definição de medida de verossimilhança, permite a performance da "ASG condicionada a observações". A ASG permite uma decomposição quantitativa da variância da medida de verossimilhança com respeito aos parâmetros de entrada. Fatores com contribuição desprezável para a variância podem ser identificados claramente e excluídos da etapa de calibração. A grande vantagem da ASG é que é uma técnica independente do modelo, além de fornecer informações sobre efeitos de interação indireta e efeitos principais.

KENNEDY & O'HAGAN [79] em 2001 desenvolveram outra metodologia Bayesiana de calibração de modelos que ficou conhecida como calibração Bayesiana e permanece uma área de pesquisa fortemente ativa atualmente. Uma das principais ferramentas dessa metodologia foi o uso de uma função de discrepância para quantificar as incertezas relacionadas à inadequação de um modelo. A adição de uma função de discrepância vem sendo usada para capturar erros de modelos resultantes da falta de princípios físicos, aproximações numéricas e outras imprecisões do modelo computacional.

KENNEDY & O'HAGAN [79] conduziram a integração a respeito dos parâmetros de calibração por quadratura simples, o que é viável para problemas com poucos parâmetros de calibração, enquanto que para outros casos tal método seria

impraticável. Uma alternativa apontada pelos pesquisadores e muito usada atualmente é o uso do método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC¹⁵).

LING *et al.* [80] em 2014 propuseram uma abordagem em três estágios (calibração, validação e combinação) para construir distribuições a priori de discrepância de modelos. Esse estudo investigou a calibração Bayesiana com diferentes tipos de distribuições a priori e concluiu que o modelo calibrado através deste método com correções de discrepância de modelo se aproximava dos dados de calibração e não sofria mudanças drásticas de comportamento fora do domínio da calibração.

Como dito anteriormente, a calibração Bayesiana como introduzida no respeitado artigo de KENNEDY & O'HAGAN [79], vem sendo muito usada em diversas áreas como, por exemplo, na transferência de calor [81] e estudos de fadiga [82] por ser uma ferramenta poderosa que permite estimar incertezas sejam elas de discrepância de modelos, incertezas nos parâmetros de entrada, ou de qualquer outra forma no processo de previsão de um fenômeno físico.

ELDRED *et al.* [55] em seu estudo do projeto de uma turbina do tipo *scramjet*, abordado anteriormente, se baseiam na calibração Bayesiana clássica para quantificação de incertezas do erro de modelo quando é usado um modelo de baixa fidelidade em oposição a um modelo de alta fidelidade, sendo o último muito elaborado e caro computacionalmente. Os pesquisadores, porém, em vez de adotarem uma formulação linear para a função de discrepância de modelo como o proposto por KENNEDY & O'HAGAN [79] adotam uma representação embutida da discrepância de modelo diretamente no modelo de baixa fidelidade. Segundo os autores, tal representação é mais realista ao preservar leis físicas que antes eram limitadas pela estrutura aditiva anterior. Adicionalmente, é possível distinguir com maior clareza os erros de modelo dos erros de medições e, além disso, a função de discrepância de modelo agora funciona como um termo de correção para os parâmetros de calibração e sempre permanece nas mesmas unidades físicas e magnitudes similares. Outra modificação na abordagem proposta pelos autores é que a função é tratada como uma variável aleatória e não um processo aleatório. Por fim, a distribuição a posteriori foi caracterizada pelo método de Monte Carlo via Cadeia de Markov usando o algoritmo de Metropolis com 10⁵ simulações [55].

¹⁵ Referência à língua inglesa: *Markov Chain Monte Carlo*.

ELDRED *et al.* [56] concluem que sua representação embutida de erros de modelo quantifica com relativa precisão as incertezas associadas. Os pontos em que a formulação apresenta desvantagens são: (1) sua precisão cai para extrapolação fora do domínio de calibração, fato que também ocorre com a representação clássica; (2) os limites das zonas de incertezas do erro de modelo têm que estar contidos dentro do limite de incertezas da variável de interesse, o que constitui uma grande limitação para o caso das respostas do modelo de alta fidelidade serem muito diferentes das respostas do modelo de baixa fidelidade.

4 MODELO DE VIV

O escoamento de um fluido ao redor de uma estrutura, no caso com seção transversal cilíndrica, induz a vibração do corpo, como decorrência de um fenômeno físico complexo que é o VIV. Estas oscilações têm origem nas forças de interação hidrodinâmicas, consequência da instabilidade do campo de pressões e velocidades do escoamento gerada pela formação e desprendimento de vórtices à jusante ao cilindro, conforme explicado na seção 2.5. Os vórtices são formados por consequência da presença da estrutura no domínio do escoamento, e por isso, à medida que a estrutura oscila, esta afeta a própria esteira de vórtices responsável pelo forçamento oscilatório do sistema, formando assim um acoplamento entre ambos.

4.1 APRESENTAÇÃO DO MODELO

Inicialmente, é importante destacar que o fenômeno de vibrações induzidas por vórtices é naturalmente um problema tridimensional de interação entre o fluido e a estrutura, mas que, dependendo da situação, pode ser assumido como homogêneo na direção que corresponde à profundidade. Por isso, apesar de existirem modelos tridimensionais para a previsão do VIV, a grande maioria dos estudos adota simplificações para a forma unidimensional ou bidimensional.

Após uma série de estudos de modelos de VIV, o modelo apresentado por POSTNIKOV *et al.* [44] foi escolhido por ser um modelo matemático bidimensional para previsão do VIV que utiliza equações de Van der Pol para interação da esteira de vórtices no sistema assim como proposto e validado por pioneiros da modelagem do fenômeno e muitos estudos ao longo dos anos. É um modelo apresentado de forma clara e concatenada pelos autores, testado com uma grande variedade de propriedades do sistema e comparado com uma boa quantidade de fontes de dados experimentais. Ademais, o modelo pode ser reduzido para modelos clássicos do VIV, o que mostra que é um modelo mais completo, do ponto de vista de sua teoria.

Primeiramente, é considerado um cilindro rígido de diâmetro D , com suportes elásticos, livre para oscilar na direção ortogonal e na direção alinhada ao escoamento (Figura 11). O sistema de coordenadas cartesianas é utilizado no plano XY , a velocidade do escoamento livre na direção x , U , tem natureza uniforme e constante e o

sistema apresenta exatamente as mesmas propriedades de massa, rigidez e amortecimento nas duas direções.

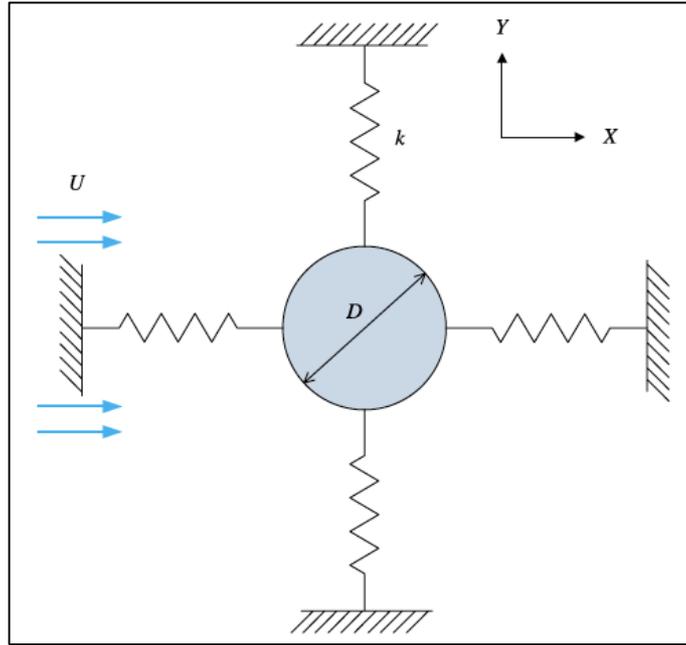


Figura 11: Esquema do sistema dinâmico fluido-estrutura. Adaptado de BAI & QIN [42].

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos do cilindro, podemos representar as forças elásticas do sistema por molas lineares. As equações dimensionais do movimento em termos de deslocamento do cilindro no plano XY são portanto:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_x(x, \dot{x}, \ddot{x}, U) \quad (4.1)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_y(y, \dot{y}, \ddot{y}, U) \quad (4.2)$$

onde o sobrescrito (\cdot) significa que as derivadas são tomadas em relação ao tempo t ; $m = m_s + m_a$ é a massa total por unidade de comprimento composta da massa do cilindro por unidade de comprimento ($m_s = \frac{1}{4}\rho_s\pi D^2$) e de um termo de massa adicionada por unidade de comprimento ($m_a = \frac{1}{4}\pi C_a\rho_f D^2$) que representa os efeitos inerciais não viscosos, na qual, C_a é o coeficiente de massa adicionada; c é o amortecimento estrutural por unidade de comprimento; k é a rigidez elástica dos suportes por unidade de comprimento e as componentes vetoriais da força hidrodinâmica por unidade de comprimento (F_x e F_y), assim como sua resultante (\vec{F}), são dependentes da velocidade do escoamento, do deslocamento, velocidade e aceleração do corpo. Logo:

$$\left(\frac{1}{4}\pi D^2 \rho_s + \frac{1}{4}\pi C_a \rho_f D^2\right) \ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_x(x, \dot{x}, \ddot{x}, U)$$

$$\left(\frac{1}{4}\pi D^2 \rho_s + \frac{1}{4}\pi C_a \rho_f D^2\right) \ddot{y} + c\dot{y} + ky = F_y(y, \dot{y}, \ddot{y}, U)$$

A partir de agora, a dependência entre a força hidrodinâmica total e suas componentes com x, \dot{x}, \ddot{x} e U ficará implícita para maior clareza e limpeza na exposição do sistema de equações.

$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$ é a força hidrodinâmica resultante das ações impostas pelas forças de arrasto, F_D , e de sustentação, F_L , induzidas pela interação com o escoamento, como esquematizado na Figura 12.

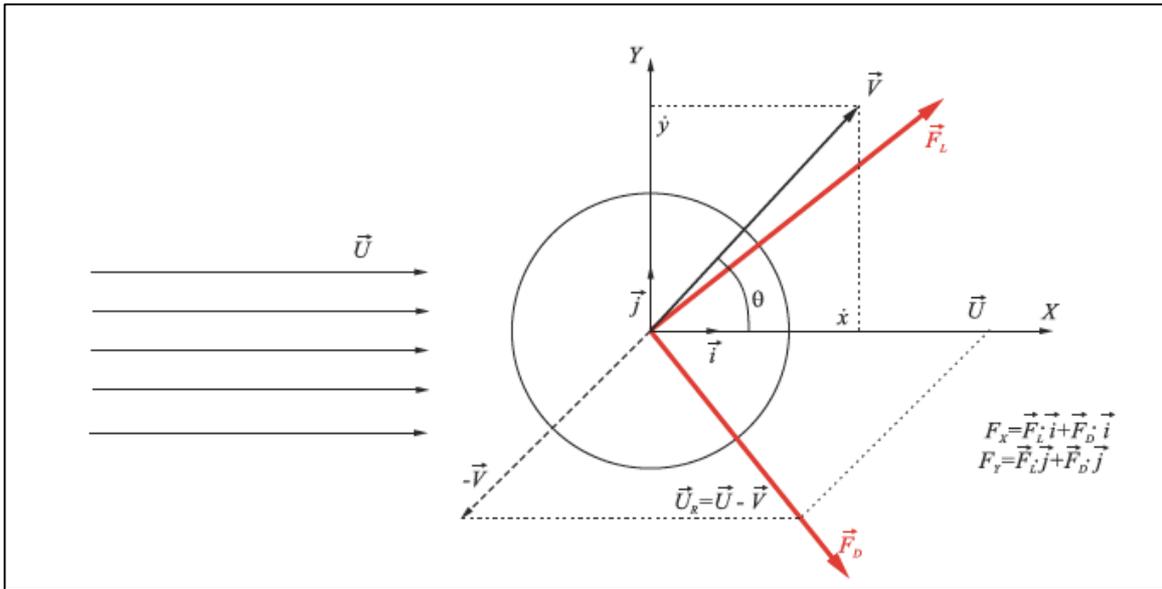


Figura 12: Forças atuando em um cilindro em vibração no plano XY com velocidade instantânea \vec{V} . Retirado de POSTNIKOV *et al.* [44].

As forças de arrasto e de sustentação flutuantes são definidas a partir da equação de Morison e têm suas magnitudes proporcionais ao quadrado da velocidade relativa, \vec{U}_R . A equação de Morison foi desenvolvida para representar as forças na direção do escoamento atuando em um corpo e posteriormente foi adaptada com algumas modificações quanto à velocidade relativa [83].

A velocidade relativa pode ser definida como: $\vec{U}_R = (U - \dot{x})\vec{i} - \dot{y}\vec{j}$.

Baseada na equação de Morison, o termo correspondente à força de arrasto é modelado da seguinte forma:

$$\vec{F}_D = \frac{1}{2} \rho_f C_D D |\vec{U}_R|^2 \vec{l} \quad (4.3)$$

Na qual $\vec{l} = \vec{U}_R / |\vec{U}_R|$ e C_D é o coeficiente de arrasto total que pode ser decomposto na soma do coeficiente de arrasto médio e o coeficiente de arrasto flutuante associado ao efeito do desprendimento de vórtices:

$$C_D(t) = C_{D0} + C_{Dfl}(t) \quad (4.4)$$

A força de sustentação pode ser obtida analogamente com base na equação de Morison de forma a representar as forças de reação do fluido se opondo ao movimento transversal do cilindro:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho_f C_L D |\vec{U}_R|^2 \vec{l} \cdot \vec{l} \wedge \vec{k} \quad (4.5)$$

onde C_L é o coeficiente de sustentação.

Substituindo a definição de \vec{U}_R na equação (4.5) temos que:

$$\vec{F}_L = \frac{1}{2} \rho_f C_L D |\vec{U}_R|^2 \frac{\dot{y}\vec{l} + (U - \dot{x})\vec{j}}{|\vec{U}_R|} \vec{l} \wedge \vec{k} \quad (4.6)$$

Com a soma das projeções das forças de arrasto e sustentação sobre os respectivos eixos (Figura 12) obtemos as componentes da força hidrodinâmica total agindo nas duas direções abaixo:

$$F_x = (\vec{F}_L + \vec{F}_D) \cdot \vec{l} \quad (4.7)$$

$$F_y = (\vec{F}_L + \vec{F}_D) \cdot \vec{j} \quad (4.8)$$

Substituindo as definições das forças de arrasto (Eq. 4.3) e de sustentação (Eq. 4.6) nas Eqs. 4.7 e 4.8 temos as projeções da força hidrodinâmica abaixo:

$$\begin{aligned} \vec{F}_x &= \left(\frac{1}{2} \rho_f C_L D |\vec{U}_R| (\dot{y}\vec{l} + (U - \dot{x})\vec{j}) + \frac{1}{2} \rho_f C_D D |\vec{U}_R| ((U - \dot{x})\vec{l} - \dot{y}\vec{j}) \right) \cdot \vec{l} = \\ &= \frac{1}{2} \rho_f C_L D |\vec{U}_R| \dot{y} + \frac{1}{2} \rho_f C_D D |\vec{U}_R| (U - \dot{x}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_y &= \left(\frac{1}{2} \rho_f C_L D |\vec{U}_R| (\dot{y}\vec{i} + (U - \dot{x})\vec{j}) + \frac{1}{2} \rho_f C_D D |\vec{U}_R| ((U - \dot{x})\vec{i} - \dot{y}\vec{j}) \right) \cdot \vec{j} = \\ &= \frac{1}{2} \rho_f C_L D |\vec{U}_R| (U - \dot{x}) - \frac{1}{2} \rho_f C_D D |\vec{U}_R| \dot{y}\end{aligned}\quad (4.10)$$

A seguir, duas equações de osciladores de esteira para descrever o comportamento dinâmico da esteira de vórtices são introduzidas para completar o sistema. Elas são propostas buscando satisfazer equações de Van der Pol, conforme introduzido por BISHOP & HASSAN [25] e adotadas em vários estudos de VIV ao longo dos anos [5, 84-87]. Segundo CURRIE & TURNBULL [85], o modelo de oscilador de Van der Pol tem sido empregado tradicionalmente nesta área da mecânica dos fluidos como uma representação relativamente simples do escoamento ao redor de um corpo oscilando. É um tipo de equação que vem sendo muito usado em equações de fluido, pois, é conhecido por compartilhar características com o VIV, como por exemplo a solução oscilatória e auto-limitante [88]. Esta equação não-linear modela vibrações auto-excitadas e auto-limitantes com uma frequência que pode ser relacionada com a frequência de Strouhal para previsão da forma como o desprendimento de vórtices excita as oscilações do cilindro.

Dessa forma, as equações de Van der Pol para a representação da interação do fluido são introduzidas em seguida:

$$\ddot{w} + 2\varepsilon_x \Omega_f (w^2 - 1)\dot{w} + 4\Omega_f^2 w = S_x \quad (4.11)$$

$$\ddot{q} + \varepsilon_y \Omega_f (q^2 - 1)\dot{q} + \Omega_f^2 q = S_y \quad (4.12)$$

Temos que w e q são variáveis de esteira usadas para modelar os componentes oscilatórios de sustentação e arrasto nas equações de fechamento do modelo, $q = 2C_L/C_{L0}$ e $w = 2C_D^{fl}/C_{D0}^{fl}$. ε_x e ε_y são os parâmetros fenomenológicos relacionados ao amortecimento não-linear das equações de esteira; Ω_f é a frequência de desprendimento de vórtices, relacionada ao número de Strouhal (S_t), $\Omega_f = 2\pi S_t(U/D)$. A modelagem do termo relacionado à frequência de vibrações alinhadas ao escoamento foi tomada como o dobro da frequência de vibração transversal, artifício usado com a expectativa de refletir essas características do próprio fenômeno de VIV. Finalmente, S_x e S_y são os termos de acoplamento entre as equações da estrutura e as equações de esteira, conforme definidos a seguir:

$$S_x = \left(\frac{A_x}{D}\right) \ddot{x} \quad (4.13)$$

$$S_y = \left(\frac{A_y}{D}\right) \ddot{y} \quad (4.14)$$

As Eqs. (4.13) e (4.14) são apresentadas seguindo FACCHINETTI *et al.* [5]. Segundo os autores, esse tipo de acoplamento por aceleração se comporta melhor, em especial, na previsão do fenômeno no domínio de sincronização de frequências, do que o acoplamento por velocidade ou por deslocamento. Sendo que A_x e A_y são os parâmetros fenomenológicos do modelo que têm seus efeitos relacionados com a magnitude do termo de acoplamento [5].

Substituindo as equações de acoplamento (4.13) e (4.14) nas equações de fluido (4.11) e (4.12) e as equações de forçamento hidrodinâmico (4.9) e (4.10) nas equações de movimento do cilindro (4.1) e (4.2) chegamos ao modelo dimensional [44] como empregado ao longo da presente dissertação:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y} \\ &+ \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot (U - \dot{x}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y} + c\dot{y} + ky &= \frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot (U - \dot{x}) \\ &- \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\ddot{w} + 2\varepsilon_x \Omega_f (w^2 - 1)\dot{w} + 4\Omega_f^2 w = \left(\frac{A_x}{D}\right) \ddot{x} \quad (4.17)$$

$$\ddot{q} + \varepsilon_y \Omega_f (q^2 - 1)\dot{q} + \Omega_f^2 q = \left(\frac{A_y}{D}\right) \ddot{y} \quad (4.18)$$

É importante salientar que as forças de interação tornam os movimentos em x e y acoplados, como observado no sistema de equações acima.

Nos estudos de VIV e de maneira mais geral nos estudos de dinâmica e vibrações de estruturas, a adimensionalização do sistema de equações do modelo é muito útil, pois, permite que a resposta do mesmo seja analisada mais claramente. O VIV não é um fenômeno caracterizado por amplitudes de vibração extraordinárias, na verdade, fora da

zona de sincronização as amplitudes de vibração, principalmente as transversais que são por vezes a identidade do fenômeno, são pequenas. Por exemplo, é possível que um leitor ao observar uma amplitude de vibração de 1 *cm* perca o foco de que tal valor corresponde a mais de 25% do diâmetro do cilindro usado. Para o caso apresentado, à primeira vista, não parece uma amplitude de vibração perigosa, porém quando se extrapola este resultado para o caso de um *riser*, por exemplo, com um diâmetro considerável e podendo este valor passar de um diâmetro quando o sistema se encontra em condição de sincronização, é possível enxergar a verdadeira dimensão do problema. Ademais, a adimensionalização de um modelo complexo com muitos parâmetros de entrada permite que o estudo de modelo, especialmente para a análise de sensibilidade a qual a atual dissertação se dispõe, seja mais direto e simples.

Sendo assim, o sistema de equações (4.15-4.18) é exposto em uma versão adimensional a seguir. A adimensionalização do modelo é exposta em detalhes no Apêndice A.

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + 2\zeta\tilde{x}' + \tilde{x} = 8\pi^2 St^2 \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}\right)^2 + \tilde{y}'^2} \left(\frac{1}{2} M_L q \tilde{y}'\right) \\ + \left(M_D + \frac{1}{2} M_D^{fl} w\right) \left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}'\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' + 2\zeta\tilde{y}' + \tilde{y} = 8\pi^2 St^2 \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}\right)^2 + \tilde{y}'^2} \left(\frac{1}{2} M_L q \left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}'\right) - \right. \\ \left. \left(M_D + \frac{1}{2} M_D^{fl} w\right) \cdot \tilde{y}'\right) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$w'' + 2\varepsilon_x \Omega (w^2 - 1) w' + 4\Omega^2 w = A_x \tilde{x}'' \quad (4.21)$$

$$q'' + \varepsilon_y \Omega (q^2 - 1) q' + \Omega^2 q = A_y \tilde{y}'' \quad (4.22)$$

onde: $M_L = \frac{C_{L0}}{16\pi^2 St^2 \mu}$, $M_D = \frac{C_{D0}}{16\pi^2 St^2 \mu}$, $M_D^{fl} = \frac{C_{D0}^{fl}}{16\pi^2 St^2 \mu}$, $\mu = m/\rho_f D^2$, $\zeta = c/(2\omega_n m)$, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, $\tilde{x} = x/D$, $\tilde{y} = y/D$ e as derivadas (') são tomadas em relação ao tempo adimensional $\tau = \omega_n t$.

4.2 DADOS EXPERIMENTAIS

Antes de apresentar os métodos utilizados para a simulação computacional do modelo de VIV e os resultados obtidos, é importante entender melhor o estudo

experimental de JAUVTIS & WILLIAMSON [43], bem como o aparato experimental empregado, as observações mais relevantes e as discussões levantadas pelos pesquisadores em seu estudo.

Em seus experimentos, os pesquisadores utilizaram um arranjo de uma placa que funcionava como pêndulo e um cilindro rígido foi montado a uma placa, onde era livre para se movimentar na direção X e Y. O arranjo em pêndulo garantia ao sistema a mesma massa oscilatória e a mesma frequência natural (tipicamente 0,4 Hz) nas duas direções. Essa característica é importante, porque em situações reais, estruturas cilíndricas como *risers* e componentes de trocadores de calor possuem as mesmas massas e frequências em X e Y [43].

O cilindro foi montado elasticamente na placa em pêndulo por molas lineares. No estudo inicial, dois cilindros de diâmetros diferentes e variadas configurações de razão de massa e amortecimento foram usados, mas o caso de interesse para o presente trabalho é o do cilindro de 3,81 cm, com razão de aspecto, $L/D=10$, razão de massas definida como moderada ($m^* = \frac{m}{m_f} = 6,9$), segundo a classificação dos pesquisadores, e de baixo parâmetro de massa-amortecimento, $(m^* + C_a)\zeta=0,0145$.

Os dados experimentais obtidos são descritos a seguir, especialmente as curvas de amplitudes máximas ao longo de uma varredura de velocidades normalizadas, como visto na Figura 13.

Na Figura 13, é possível observar diferentes regimes de amplitudes que estão relacionados a modos de vibração peculiares. As regiões assinaladas por SS¹⁶ e AS¹⁷ correspondem às regiões de modos de vibração na direção alinhada ao escoamento e estão situadas em aproximadamente $U_{red} \sim 2,5$, uma vez que o desprendimento de vórtices induz uma frequência de forçamento alinhada ao escoamento que é o dobro da frequência de forçamento ortogonal. A área SS é onde predomina o movimento alinhado ao escoamento e pares simétricos de vórtices se desprendem do cilindro a cada ciclo de oscilação em x . O segundo modo de vibração é o assimétrico AS, no qual exhibe-se uma trajetória XY em forma de "oito", com movimento considerável nas duas direções devido ao desprendimento assimétrico de vórtices alternados.

¹⁶ Do inglês: *streamwise symmetric*

¹⁷ Do inglês: *streamwise antisymmetric*

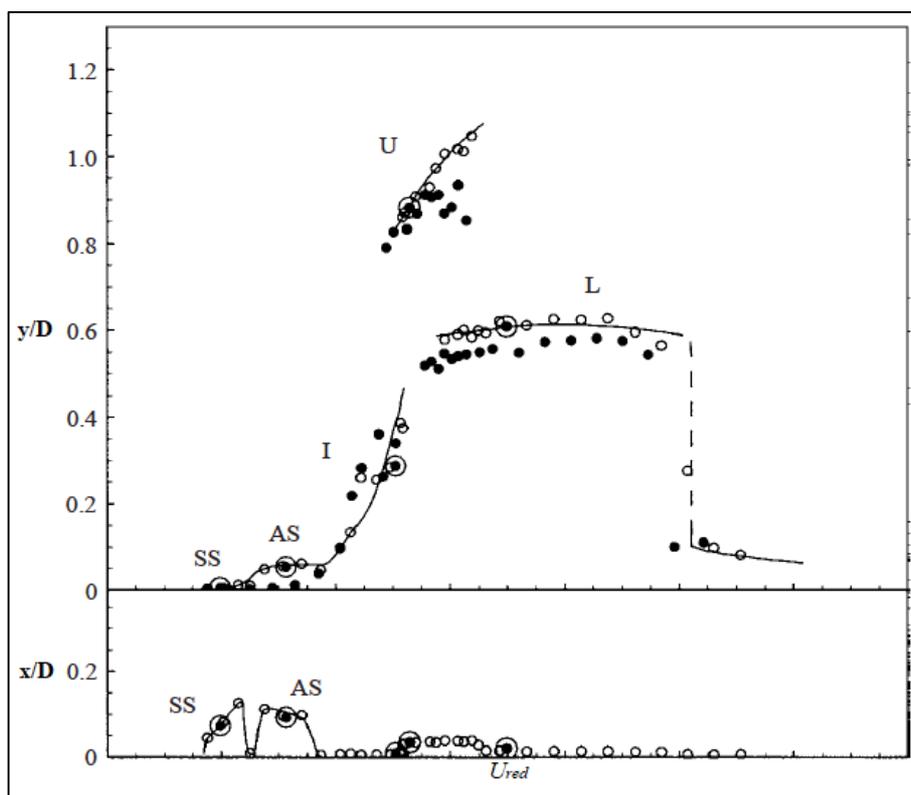


Figura 13: Resposta do sistema ($m^*=6,9$ e $(m^*+C_a)\zeta=0,0145$). Amplitudes máximas de vibração (y/D e x/D) plotadas versus a velocidade reduzida. Adaptada de JAUVTIS & WILLIAMSON [43].

Os outros regimes de vibração estão relacionados à direção transversal, são eles: o inicial (I^{18}), o superior (U^{19}) e o inferior (L^{20}). A zona de amplitudes chamada de inicial é aquela em que as oscilações em x são desprezáveis e apresenta modo de vibração "2S", isto é, sua esteira de vórtices clássica apresenta dois vórtices alternados formados por ciclo. A região L apresenta modo de vibração "2P", ou seja, dois pares alternados de vórtices com aproximadamente a mesma intensidade são formados por ciclo de vibração. A região superior U é onde ocorrem amplitudes de vibração transversal distintamente altas e está situada entre o regime inicial e o regime inferior e, assim como a L, apresenta dinâmica de esteira de vórtices 2P, com dois pares alternados de vórtices liberados por ciclo, porém o segundo vórtice de cada par é consideravelmente mais fraco do que o primeiro [43].

¹⁸ Referente ao termo em inglês: *Initial*

¹⁹ Referente ao termo em inglês: *Upper*

²⁰ Referente ao termo em inglês: *Lower*

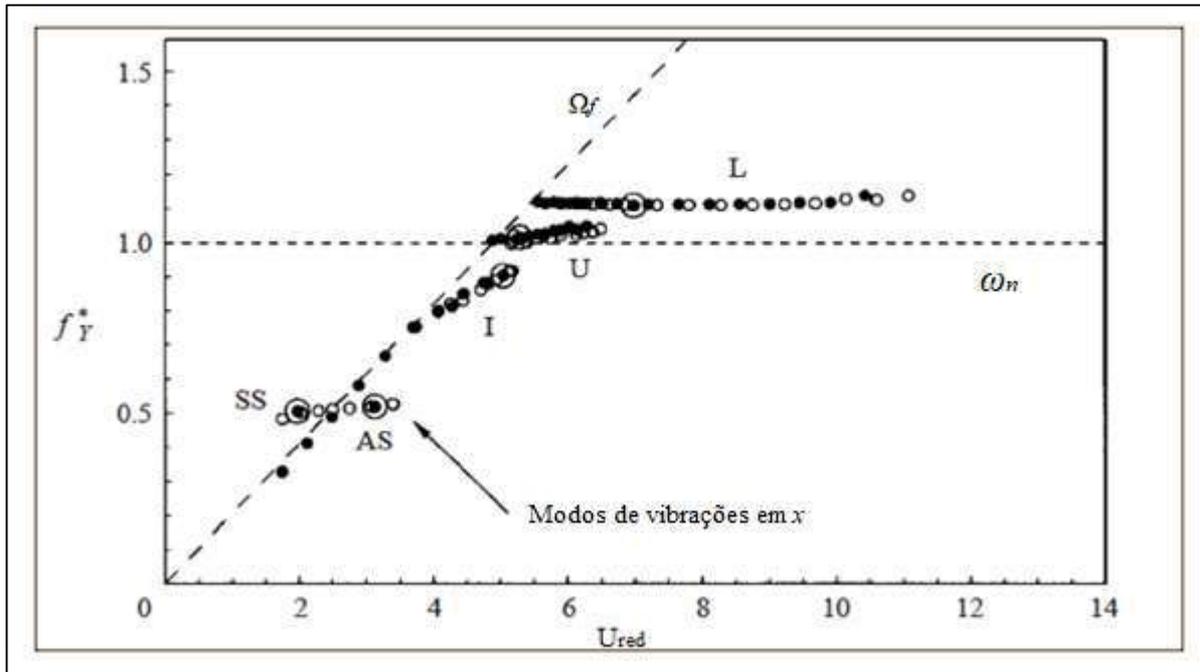


Figura 14: Frequências de oscilações transversais do sistema, ($m^*=6,9$ e $(m^*+C_a)\zeta=0,0115$, adimensionalizadas pela frequência natural do aparato experimental ($f_y^* = f_y/\omega_n$) plotadas a respeito da evolução de velocidades reduzidas. Adaptada de JAUVTIS & WILLIAMSON [43].

No que tange a frequência de vibrações transversais, seu desenvolvimento conforme o crescimento da velocidade reduzida é mostrado na Figura 14. É possível perceber que a frequência de oscilação transversal responde aproximadamente pela lei de Strouhal, representada na Figura 14 pela linha pontilhada de frequência de descolamento de vórtices Ω_f . No entanto, nas regiões de ressonância e sincronização de frequências, a frequência de oscilação transversal perde a sua correspondência com a lei de Strouhal, como descrito pela teoria de VIV. Nas áreas de modo de vibrações simétrica (SS) e assimétrica (AS), nas quais ocorre a ressonância na direção alinhada ao escoamento, a frequência de vibração predominante é aproximadamente igual à metade da frequência natural do aparato experimental, isto porque a frequência de oscilações alinhadas tem o dobro da magnitude da frequência de vibrações ortogonais. No início da sincronização de frequências do sistema (I), as amplitudes transversais crescem e f_y^* perde novamente a sua relação com a frequência de desprendimento de vórtices. Na região de máximas amplitudes transversais, U, claramente a frequência de oscilação do sistema sincroniza com a frequência natural do cilindro ($f_y^* = f_y/\omega_n$), caracterizando o alinhamento de forças que ocorre nessa situação e dando origem às maiores amplitudes de vibração. A região L no regime de sincronização tem sua frequência predominante em aproximadamente $f_y^* = 1,15$.

4.3 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL DO MODELO FENOMENOLÓGICO DE VIV

O manuseio com o elevado número de parâmetros de entrada, sejam eles dimensionais ou adimensionais, pode ocasionar erros e confusão. Para evitá-los, a organização dos valores nominais ou referenciais atribuídos aos parâmetros de entrada do modelo a serem usados inicialmente na simulação do modelo de VIV é apresentada na Tabela 2.

Cabe ressaltar que em todo o trabalho o modelo foi resolvido em sua forma dimensional com posterior adimensionalização dos resultados apenas. Uma vantagem dessa abordagem é o emprego de valores dimensionais e, portanto, mais intuitivos para o domínio de parâmetros de entrada os quais, por exemplo, podem tornar a comparação com um estudo por CFD mais fácil, enquanto mantém-se o alto valor de trabalhar com respostas adimensionais, assim como os dados experimentais geralmente são apresentados.

Tabela 2: Valores referenciais adotados para os parâmetros independentes usados na simulação computacional do modelo fenomenológico.

Parâmetro	Valor de referência	Comentário
D	0,0381 m	Diâmetro do cilindro [43].
ρ_f	1000 kg/m ³	Massa específica da água.
m	7,87 kg/m	Foi estimada a partir do valor de razão de massas ($m^* = \frac{m_s + m_a}{m_f} = 6,9$) usada por JAUVTIS & WILLIAMSON [43] em seus experimentos.
k	1,0762 N/m ²	É o coeficiente de rigidez, calculado a partir da frequência natural ($\omega_n = \sqrt{k/m} = 0,4$) do aparato experimental [43].
c	0,0913 N.s/m ²	Coeficiente de amortecimento [43]. Obtido pela relação $\zeta = c/(2\omega_n m)$.

ζ	0,0015	O fator de amortecimento exprime a relação entre o amortecimento do sistema em determinado instante e o amortecimento crítico. Foi medido nos experimentos pela relação [43]: $(m^* + C_a)\zeta=0,0115$.
C_{D0}^{fl}	0,2	Coeficiente médio do termo oscilatório de arrasto [89].
C_{D0}	0,2 se $U_{red} \leq 3,0$ ou 1,6 se $U_{red} > 3,0$	O coeficiente de arrasto médio é um dos parâmetros mais importantes do modelo fenomenológico e tem influência significativa sob as amplitudes de vibração do cilindro. $C_{D0} = 1,60$ (se $U_{red} > 3,0$) foi adotado com base na análise de POSTNIKOV <i>et al.</i> [44] para a previsão da resposta transversal no modelo usado, ignorando a resposta na direção paralela ao escoamento, apesar de ser um modelo bidimensional. $C_{D0} = 0,2$ para valores de $U_{red} > 3,0$ foi obtido através do conhecimento do modelo e por ajuste não sistemático para uma representação satisfatória das respostas em ambas direções. A atribuição de uma função descontínua simples para C_{D0} é proposta no presente estudo com base em fatos conhecidos na literatura sobre o fenômeno de VIV e que serão expostos em maiores detalhes a seguir. Uma análise crítica do comportamento do modelo com o emprego de uma função desse tipo para a atuação de C_{D0} será realizada nas próximas seções do presente trabalho através do ferramental e recursos disponíveis da ASG.
C_{L0}	0,3	O coeficiente de sustentação padrão é considerado como $C_{L0} = 0,3$ para uma larga faixa de números de Reynolds [90, 91].

C_a	1,0	Coeficiente de massa adicionada [14].
St	0,19	$St = 0,1932$ [92]. O número de Strouhal geralmente pode ser considerado constante em $St = 0,19$ para números de Reynolds na faixa subcrítica ($300 < Re < 1,5 \times 10^5$).
ε_x	0,3	Parâmetros fenomenológicos de ajuste que devem ser idealmente calibrados com dados experimentais. ε_x e ε_y estão relacionados ao termo de amortecimento nas equações correspondentes à ação do fluido. A_x e A_y são parâmetros relacionados à magnitude do termo de acoplamento do sistema. Estes valores referenciais para ε_x , ε_y , A_x e A_y foram definidos com base na literatura e estudos não sistemáticos com o modelo.
ε_y	0,03	
A_x	8	
A_y	18	

O coeficiente de arrasto médio pode sofrer amplificação com a sincronização de frequências do sistema, sendo altamente dependente das amplitudes de vibrações transversais, como analisado em BISHOP & HASSAN [25]. Modelos para previsão de C_{D0} e sua relação com a amplitude transversal são conhecidos e BLEVINS [14] apresenta um resumo dos principais. A inclusão de um modelo que contabilize a dependência de C_{D0} com as amplitudes na direção y introduziria uma não-linearidade adicional no sistema de equações acopladas, o que é comumente evitado nos estudos de VIV. A prática mais comum tem sido a simplificação adotando um valor constante, porém maior do que a média, para C_{D0} com o objetivo de antecipar a sua amplificação decorrente na zona de sincronização. Exemplos são: $C_{D0} = 2,0$ [5], $1,5 \leq C_{D0} \leq 2,0$ [44], $C_{D0} = 1,2$ [92]. Esta prática de adotar um coeficiente de arrasto médio com um valor alto para contabilizar a amplificação do mesmo é uma simplificação coerente que permite prever as respostas da direção transversal com uma precisão razoável, embora resulte na falha da estimativa das amplitudes de vibrações na direção x . Uma alternativa que é abordada no atual estudo e que no caso resulta em uma previsão consideravelmente melhor é a utilização de determinado valor para C_{D0} em uma região de velocidade reduzida em que as amplitudes de vibrações ortogonais são sabidamente

pequenas (antes da região de sincronização de frequências) e um valor diferente e maior para a região de velocidades reduzidas em que ocorre o fenômeno de sincronização, caracterizado por grandes amplitudes de vibrações transversais. Com isso, na varredura de velocidades reduzidas temos limites ou regimes de C_{D0} caracterizados por valores constantes. Essa é uma alternativa muito similar à abordagem também simplificada de alguns dos programas largamente usados para a previsão do VIV na indústria (*Orcaflex*, *SHEAR7*, *VIVA*, etc.), isto é, a de utilizar uma função descontínua para C_{D0} com relação a y/D [93]. Vale reiterar que C_{D0} não é constante na varreduras de velocidades de escoamento e idealmente deveria ser adotado um modelo contínuo para o cálculo do fator, como o sugerido por POSTNIKOV *et al.* [44] para estudos futuros ($C_{D0} = 1 + 2y/D)C_{D0}^{st}$), o que contribuiria para o aperfeiçoamento do modelo de VIV.

É importante destacar os seguintes pontos a respeito dos parâmetros adotados no estudo:

- A velocidade reduzida é o parâmetro de controle do sistema, não ultrapassando o valor máximo de 12, com isso os números de Reynolds estão na faixa de 1000-6000, caracterizando a esteira de vórtices como em regime transitório ou turbulento, conforme Tabela 1.
- A massa específica do fluido escoando ao redor do cilindro foi estimada com pouco rigor, pois afeta o sistema de maneira não significativa.
- A massa específica do cilindro foi calculada a partir das propriedades do aparato hidro-elástico utilizado por JAUVTIS & WILLIAMSON [43] especialmente projetado para ter baixos valores de razão mássica e amortecimento.

Com a definição inicial dos valores dos parâmetros de entrada na Tabela 2, aos quais serão referidos como parâmetros referenciais ou nominais na presente dissertação, dá-se início à solução do sistema de equações.

O sistema de equações ordinárias de segunda ordem foi resolvido simultaneamente por rotina em MATLAB, empregando algoritmo baseado no par de Dormand-Prince [94], composto pelo método de Runge-Kutta explícito de quinta e quarta ordens [95]. O intervalo de integração ($t = [0:600]$ s) foi definido para que o sistema atingisse o regime permanente (normalmente por volta de $t = 400$ s) e para a análise completa da resposta permanente do sistema o cálculo das amplitudes máximas foi feito no intervalo $400 s < t < 600 s$. O passo de integração foi escolhido por uma análise adaptativa, na qual foi determinado que o passo de 0,1 s era compatível com as

resoluções do problema capturando a dinâmica do sistema satisfatoriamente com tempo de computação adequado.

Uma pequena perturbação inicial foi introduzida nas velocidades iniciais das variáveis de esteira para garantir que o sistema desenvolvesse completamente sua dinâmica dentro do intervalo de integração. Com isso, as condições iniciais foram estipuladas como:

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \quad \dot{x}(0) = 0 \\y(0) &= 0 \quad \dot{y}(0) = 0 \\w(0) &= 0 \quad \dot{w}(0) = 0,1 \text{ m/s} \\q(0) &= 0 \quad \dot{q}(0) = 0,1 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Os resultados da simulação computacional do modelo referencial são apresentados na Figura 15.

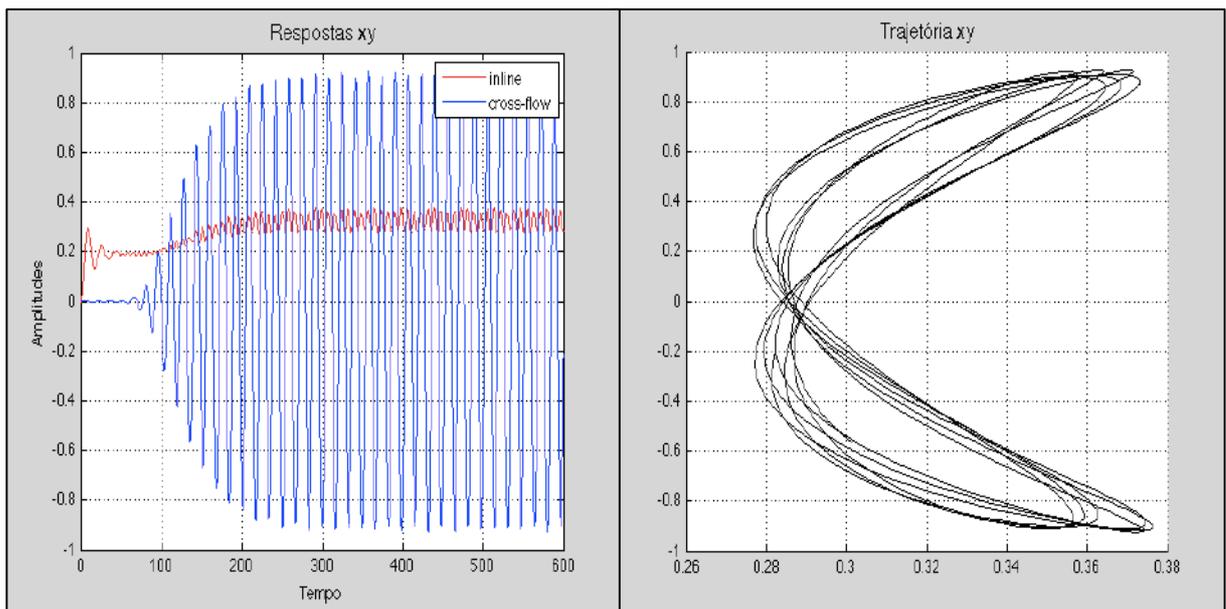


Figura 15: (a) Resposta do modelo nas direções x e y para $U_{red} = 6,4$ com (x/D) máxima de 0,3765 e (y/D) máxima de 0,9265. (b) Trajetória do cilindro no plano XY para $U_{red}=6,4$.

Na Figura 15.a é possível observar a resposta do modelo quando $U_{red} = 6,4$. Destaca-se principalmente, a frequência de vibrações alinhadas ao escoamento ter aproximadamente o dobro da magnitude da frequência de vibrações cruzadas, a grande magnitude das oscilações transversais a respeito da origem e a menor amplitude de vibrações em x oscilando a respeito de um nível diferente de zero explicado pelos efeitos de arrasto médio como esperado. A Figura 15.b mostra a trajetória que o centro do cilindro percorre ao vibrar nas direções x e y apresentando a forma de um "oito

alongado" devido a maior magnitude das oscilações ortogonais e devido à relação de 2:1 entre as frequências de oscilação em x e y , em outras palavras, a cada ciclo de vibração transversal ocorrem dois ciclos de vibrações na direção do escoamento.

Os resultados da simulação do modelo fenomenológico em contraste com as observações experimentais são apresentados nas Figuras 16 e 17 a seguir:

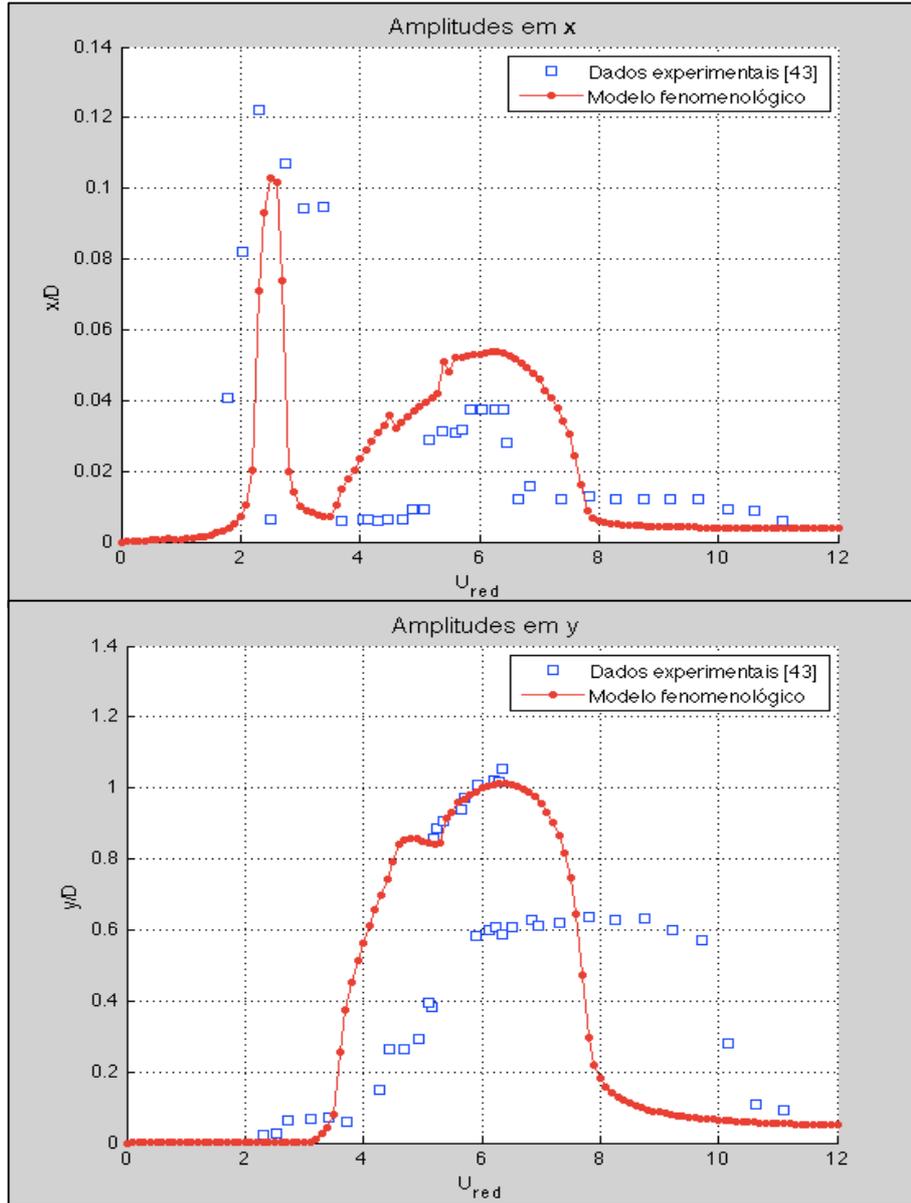


Figura 16: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações ortogonais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$ ($m^* = 6,9$).

A Figura 16 apresenta as amplitudes de vibrações nas duas direções para a varredura de velocidades reduzidas. Tal resposta foi construída através do cálculo das amplitudes máximas a partir do sinal dinâmico completo no regime permanente de cada ponto de velocidade reduzida para $U_{red} = [0:12]$ em 120 pontos espaçados de 0,1 entre

si. Sendo assim, os resultados da simulação computacional do modelo de VIV nestes 120 pontos são apresentados nas Figuras 16 e 17. Cabe ressaltar que as amplitudes de oscilações na direção alinhada ao escoamento e na direção ortogonal ao escoamento estão ilustradas nas Figuras 16.a e 16.b por escalas diferentes no eixo das ordenadas e é possível observar a diferença de magnitudes entre as amplitudes de vibrações para cada direção.

É possível concluir que o modelo captura as principais características relacionadas à amplitude máxima na direção x em $U_{red} \approx 2,5 \sim 3,0$, embora apresente alguns erros consideráveis. É possível observar que, assim como refletido nos dados experimentais e na resposta do modelo fenomenológico, a amplitude máxima na direção alinhada ao escoamento ocorre em aproximadamente a metade da velocidade reduzida em que ocorre o maior pico de amplitude de vibração transversal em $U_{red} \approx 5,0 \sim 6,5$. A respeito do segundo pico de x/D ou \tilde{x} , $4 < U_{red} < 8$, os resultados numéricos são relativamente mais precisos, porém são conservadores no quesito da extensão da faixa de ressonância. O segundo salto de amplitudes na direção do escoamento ocorre na região crítica para a resposta transversal, correspondente à sincronização de frequências e é uma consequência da mesma. Resumindo, o modelo estima com boa precisão o padrão de amplitudes observado experimentalmente com algumas imprecisões na região próxima às amplitudes máximas na direção x ($U_{red} \approx 2,5$), que pode ser considerada como a área crítica para o modelo nesta direção, ou seja, região onde existe a maior chance de cometer erros ao usar o modelo para previsão do fenômeno. Na região de sincronização, $4 \leq U_{red} \leq 8$, as previsões do modelo fenomenológico superestimam o comportamento do sistema o que é aceitável para fins de uso do modelo de VIV para o projeto de estruturas.

A Figura 16.b compara os resultados na direção y da solução do modelo de VIV com os dados experimentais disponíveis. Os resultados obtidos para a direção transversal acompanham as principais características dos dados experimentais, inclusive na região conhecida como superior ou "U" [43] (ver Figura 13) com acurácia. De maneira geral, o modelo fenomenológico descreve relativamente bem, até mesmo na região de sincronização de frequências, onde acompanha de perto as maiores amplitudes e de maneira conservadora, mas não exagerada, em outra grande parte da mesma região. É importante destacar que a área entre $8 < U_{red} < 10$ é talvez onde se é preciso ser mais cauteloso com o emprego desse modelo para previsão das amplitudes de vibrações

transversais, haja vista, a significativa diferença entre os dados experimentais e os dados gerados pelo modelo.

Na Figura 17 temos a exposição das frequências adimensionais de oscilações transversais ($f_y^* = f_y/\omega_n$) do modelo fenomenológico com a variação da velocidade reduzida. Este resultado foi obtido pela utilização do algoritmo FFT²¹ baseado na computação da Transformada Discreta de Fourier (DFT) para conversão do sinal de comprimento finito no domínio do tempo para o domínio de frequência.

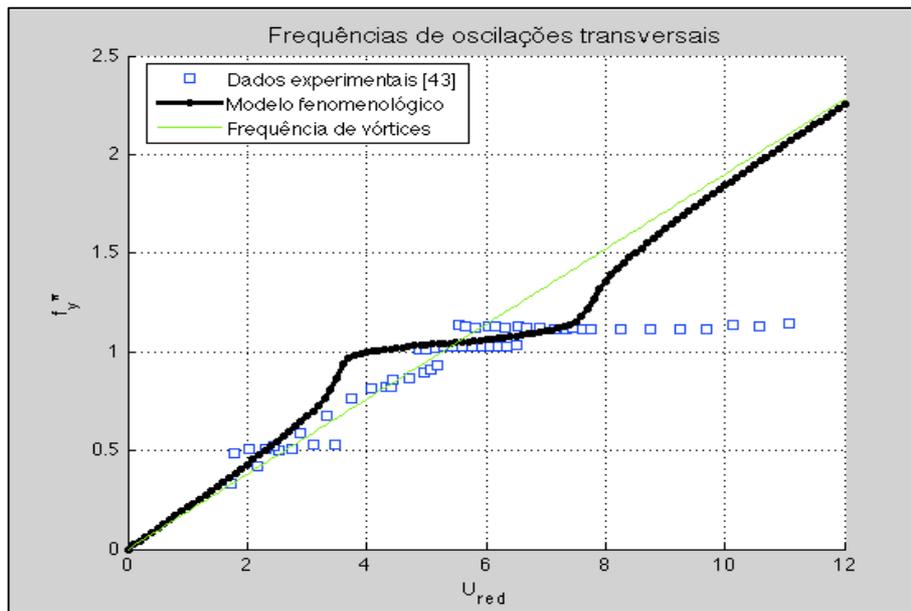


Figura 17: Oscilações transversais para a varredura, $U_{red}=[0:12]$ ($m^*=6,9$ e $(m^*+C_a)\zeta=0,0115$), no domínio da frequência e adimensionalizadas pela frequência natural do sistema.

A Figura 17 mostra que inicialmente os resultados do modelo de VIV, assim como os dados experimentais, respondem aproximadamente pela lei de Strouhal, pela qual a frequência de desprendimento de vórtices é definida e após a sua adimensionalização ($\Omega_f = 2\pi StU/D\omega_n$) é representada pela linha verde. As frequências de oscilações transversais obtidas pelo modelo fenomenológico não expressam totalmente a concentração de frequências exibidas pelos dados experimentais na zona relacionada à ressonância na direção de x do sistema, em aproximadamente $2 < U_{red} < 3$. Imediatamente após essa região, o sistema previsto pelo modelo de VIV e os dados experimentais voltam a serem descritos pela lei de Strouhal. Na região compreendida por $4 < U_{red} < 8$, é possível observar a sincronização de frequências do modelo fenomenológico em aproximadamente $f_y^* = 1$, ou seja, o alinhamento de

²¹ Referente à sigla em inglês: *Fast Fourier Transform*.

frequências $f_y = \omega_n$ característico desse regime, resultado que concorda com as observações experimentais. Todavia, a região de sincronização apresenta uma menor largura para f_y^* do modelo na comparação com os dados experimentais. Para $U_{red} > 8$, as frequências de vibrações transversais voltam a ser previstas pela equação de Strouhal para a frequência de desprendimento de vórtices, fato que possivelmente ocorreria para os dados experimentais, porém mais dados são necessários para tal investigação.

A conclusão é de que o modelo fenomenológico inicialmente, na maneira que foi proposta, representa as principais tendências de um cilindro vibrando em VIV mesmo que haja a presença de ocasionais imprecisões quando comparado às observações experimentais do fenômeno, as quais serão investigadas nas próximas seções.

O tempo total de simulação da varredura de 120 pontos de U_{red} foi de aproximadamente 1 minuto, isto é, para 120 simulações do modelo estudado com os recursos computacionais detalhados na seção 4.4.2 adiante. Por isso, sua principal vantagem é seu reduzido custo computacional para a obtenção de informações importantes para a previsão do VIV, sendo assim uma ferramenta poderosa para análises de Engenharia.

Com o intuito de aprofundar o estudo sendo desenvolvido do modelo fenomenológico com parâmetros referenciais, é interessante saber como é o comportamento deste modelo com características de sistema diferentes, isto é, ao variar a razão de massas do sistema. Ao variar m^* e manter os outros valores nominais, basicamente estamos variando as principais propriedades dinâmicas do sistema (m , k e c) através das relações mostradas na Tabela 2.

Podemos definir, com base na classificação de JAUVTIS & WILLIAMSON [43], as razões de massas como a seguir:

- Pequenas razões de massas para $m^* < 6$.
- Moderadas razões mássicas quando $6 \leq m^* \leq 25$.
- Grandes razões de massa no caso de $m^* > 25$.

São propostos, assim, três valores para as razões de massas dentro das classes acima: $m^* = 5$, $m^* = 14$ e $m^* = 27$. A resposta do modelo para cada razão de massas é apresentada nas Figuras 18, 19 e 20 respectivamente.

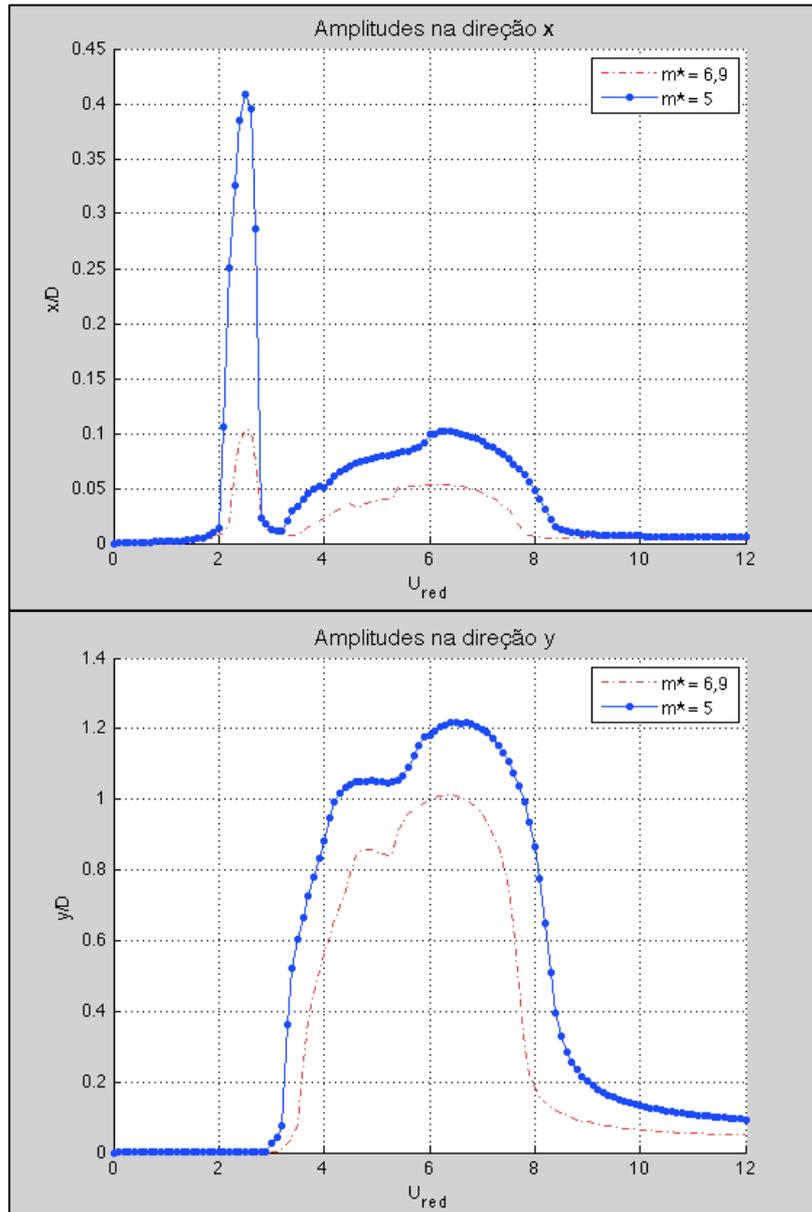


Figura 18: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações transversais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. Linha azul pontilhada: $m^* = 5$; Linha vermelha cortada: $m^* = 6,9$.

Inicialmente, destaca-se que os dados experimentais foram removidos dos gráficos, pois, foram auferidos de um aparato experimental que possuía $m^*=6,9$, por conseguinte, não há sentido em produzir comparação entre os dados experimentais e os dados da simulação de sistemas de diferentes m^* .

Para $m^*=5$, na Figura 18, a conclusão é de que a redução da razão de massas nessas condições provoca principalmente a amplificação da resposta do sistema modelado. Sendo que, para o caso das amplitudes de vibrações alinhadas ao escoamento, ocorre um aumento exagerado na região de amplitudes máximas, o que

pode se tornar um problema caso o corpo esteja imerso em escoamento nessa faixa de velocidades.

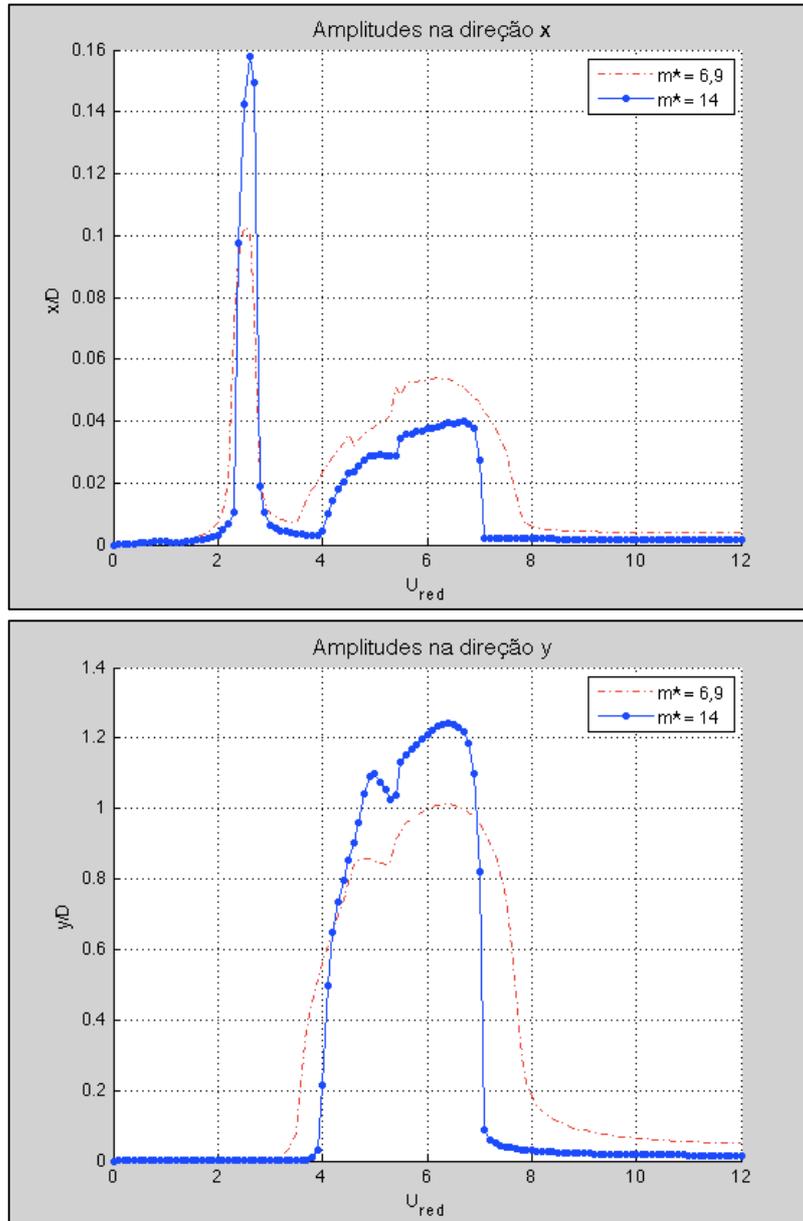


Figura 19: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações transversais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. Linha azul pontilhada: $m^* = 14$; Linha vermelha cortada: $m^* = 6,9$.

No caso de $m^*=14$, ilustrado na Figura 19, podemos perceber uma relativamente maior compatibilidade a respeito da curva de amplitudes de $m^*=6,9$, o que possivelmente pode ser explicado por ambos os sistemas serem classificados como de razão de massas moderada. É importante notar as maiores amplitudes na condição de sincronização de frequências e a consideravelmente menor largura de sincronização. Para as amplitudes de oscilações alinhadas ao escoamento, novamente na região de sua

ressonância é possível observar amplitudes ligeiramente maiores, enquanto na região de sincronização de frequências curiosamente ocorre uma redução das amplitudes de vibrações com respeito das amplitudes de $m^* = 6,9$.

Para o cenário de $m^* = 27$ (Figura 20), novamente as duas curvas apresentam padrões similares, porém pelos dados obtidos, pode-se afirmar que nestas condições, sistemas de maiores razões mássicas geralmente apresentam amplitudes máximas de vibrações menores. Vale citar que mais uma vez o sistema apresenta menor largura de zona de sincronização.

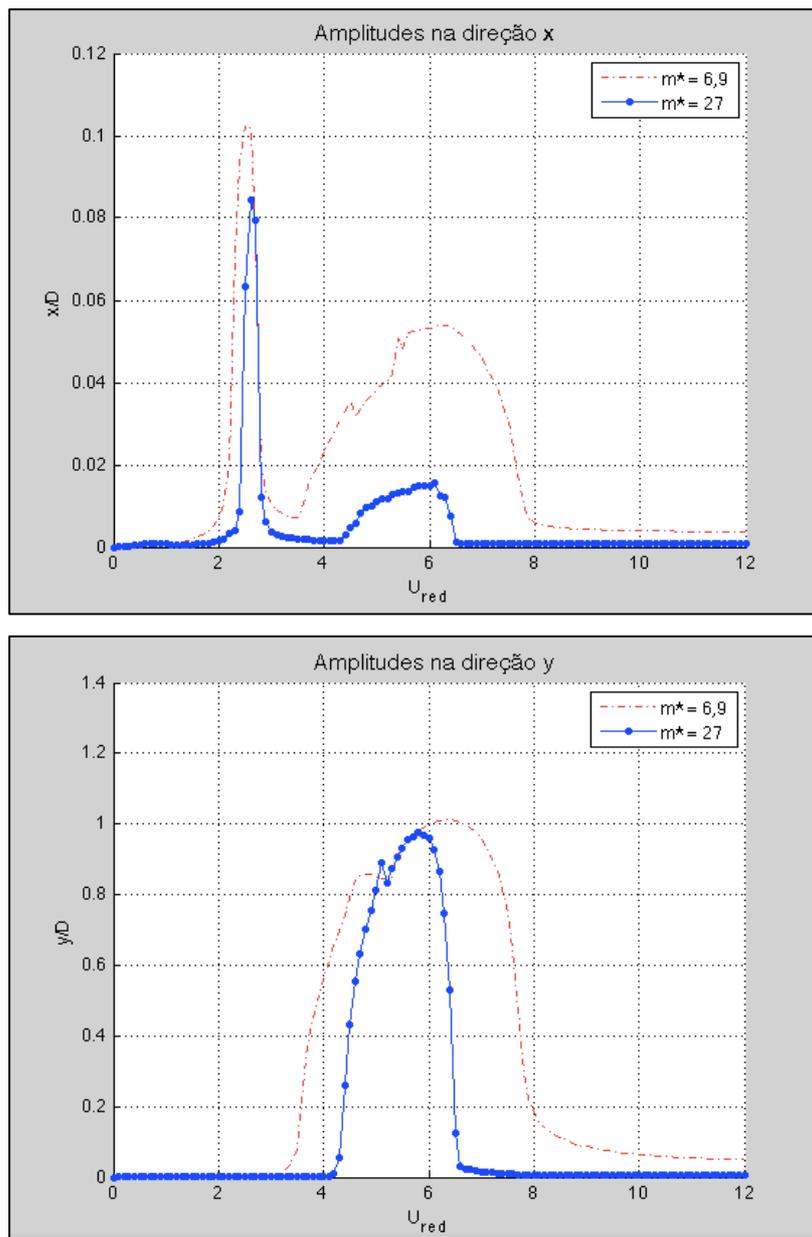


Figura 20: (a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. (b) Amplitudes de vibrações transversais ao escoamento para varredura $U_{red}=[0:12]$. Linha azul pontilhada: $m^* = 27$; Linha vermelha cortada: $m^* = 6,9$.

De maneira geral, ao modificar as propriedades dinâmicas do sistema representado no modelo fenomenológico através da alteração de m^* , os mesmos padrões de respostas continuam a serem observados, indicando que o uso de tal modelo para diversos tipos de sistemas e configurações pode ser valioso.

As maiores diferenças foram encontradas nas amplitudes máximas de vibrações na direção do escoamento e na extensão da região de sincronização de frequências. Portanto, nada impede, que procedimento similar ao que será usado para o refinamento do modelo fenomenológico para a configuração de $m^* = 6,9$ através da análise de sensibilidade global, como será visto mais adiante, possa ser usado para qualquer outra configuração de sistema.

4.4 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

A análise de sensibilidade é o estudo da variabilidade da resposta do modelo e sua decomposição na contribuição das incertezas de cada parâmetro de entrada [8], indicando parâmetros predominantes para o funcionamento do modelo. Sendo assim, a análise de sensibilidade é de grande importância para um estudo mais geral de discrepâncias de modelo, fornecendo informações sobre parâmetros dominantes, onde esforços para reduzir as incertezas nestes parâmetros resultariam diretamente e significativamente em redução da variabilidade do modelo e maior precisão e, de maneira igualmente importante, indicando parâmetros de pouca importância e que podem ser excluídos de um estudo posterior de calibração, por exemplo, reduzindo a dimensão de entrada do problema.

Mais do que ajudar na calibração do modelo, a ASG é capaz de prover informações valiosas sobre a mecânica de um modelo complexo, estimando as mais complexas interações entre parâmetros. Ademais, a ASG visa contribuir para o aprimoramento do modelo, como será mostrado no final do capítulo.

Considerando que o modelo sendo analisado é complexo, com a presença de não-linearidades, o emprego de um método de análise de sensibilidade global baseado em decomposição de variâncias se torna mais eficiente e robusto quando comparado às técnicas de análise de sensibilidade local ou regional, por exemplo. Além disso, a ASG por decomposição de variâncias tem outras vantagens interessantes para o estudo desenvolvido, pois, são uma classe de métodos que não está associada e não introduz perturbação a qualquer tipo de modelo. É ainda capaz de obter informações sobre a

influência global de determinado parâmetro no modelo, inclusive estimando efeitos de interações indiretas entre parâmetros de entrada, efeitos estes que podem ter papel importante na saída do sistema e que por outros métodos não são tão facilmente estimados. Os métodos de decomposição de variâncias são ainda relativamente simples de serem implementados em linguagem computacional.

Os detalhes técnicos da análise de sensibilidade global do modelo fenomenológico de VIV são apresentados em detalhes no Apêndice B.

Vale destacar que a ASG é baseada na estimativa dos índices de sensibilidade, também conhecidos como índices de Sobol. Estes são: índices de primeira ordem ou primários (S_i) que representam a contribuição puramente do parâmetro de entrada em questão, índices conjuntos ou de mais alta ordem (S_{ij}) que transmitem informação apenas da interação entre dois ou mais parâmetros e os índices totais de sensibilidade que refletem todas as participações do respectivo parâmetro, somando efeitos diretos e indiretos, isto é:

$$S_{ti} = S_i + \sum_{\substack{j=1 \\ k=0}}^n S_{ij\dots k}; i = (1,2, \dots, n), j = (1,2, \dots, n), k = (0,1,2, \dots, n)$$

na qual, n é o número de parâmetros de entrada, S_i são os índices primários, S_{ij} são os índices de mais alta ordem e S_{ti} são os índices totais.

Os índices primários de sensibilidade variam de 0 a 1 (0 a 100%) e sua soma é igual a 1. Ou seja, sua interpretação é feita da seguinte maneira: Se S_i tem valor próximo a 1, sua contribuição é predominante no sistema e é dito que o modelo é sensível ao parâmetro i . Partindo de outro ponto de vista, S_i pode ser interpretado como a redução percentual da variabilidade da resposta que é obtida quando o parâmetro i é completamente conhecido, isto é, sem incertezas [96].

As interações entre fatores são bem representadas em métodos baseados na decomposição de variâncias. SALTELLI *et al.* [61] define a interação entre parâmetros de entrada da seguinte forma: Dois fatores interagem quando seu efeito na resposta do sistema não pode ser expresso como a soma de seus efeitos de primeira ordem. Melhor dizendo, interações podem implicar, por exemplo, que valores extremos da saída são obtidos unicamente através de combinações particulares dos fatores de entrada, de forma não descrita pelos efeitos de primeira ordem S_i .

A medida que a dimensão do parâmetro de entrada aumenta, o número de índices de sensibilidade cresce exponencialmente e a estimativa de todos eles fica impraticável. Por isso, torna-se importante o emprego dos índices de sensibilidade totais [97].

O índice total S_t é o mais importante para o estudo em questão e todos os recursos serão alocados para a estimativa deste tipo de índice, pois, é capaz de analisar quais parâmetros têm maior impacto geral na variável de interesse e quais são menos importantes, já que o índice é composto da soma de todos os efeitos causados pelo parâmetro em questão. S_{ti} também pode ser interpretado como a variabilidade que permanece na resposta do modelo se todos os parâmetros forem fixados exceto i .

4.4.1 Variabilidade dos parâmetros de entrada

A análise de sensibilidade de um modelo que se compromete a descrever um fenômeno físico complexo como o de VIV é um problema de grande dificuldade e elevada dimensão de parâmetros de entrada. A análise completa de todos os 16 parâmetros de entrada do modelo (incluindo " P " que será introduzido adiante) providenciaria informações sobre a importância de cada um deles para a previsão do modelo. No entanto, esta informação só seria obtida ao custo de um esforço computacional excessivo, isso ocorre porque, independentemente do método usado para a estimativa dos índices de sensibilidade, normalmente o aumento da dimensão de entrada do problema resulta em um aumento exponencial do número de simulações do modelo.

Dentre o domínio dos parâmetros de entrada independentes do modelo, quatro (A_x , A_y , ε_x e ε_y) são parâmetros que não possuem significado físico aparente e que idealmente são destinados a serem calibrados com observações reais ou experimentais. É o estudo destes parâmetros uma das motivações da presente dissertação, no sentido de entender a sua contribuição para a resposta do modelo e possivelmente contribuir para o aprimoramento do modelo, dada a sua imensa vantagem em custo computacional sob outros tipos de modelos. Como dito anteriormente, estes parâmetros são fenomenológicos e constituem uma grande fonte de incertezas, pois expressam puramente relações matemáticas e, portanto, ao serem utilizados para a previsão do fenômeno em quaisquer condições diferentes daquelas em que foram estabelecidos podem adicionar erros às previsões desse modelo.

A partir do estudo de diversos modelos fenomenológicos de VIV anteriores e principalmente do modelo fenomenológico escolhido, 2 parâmetros de entrada, relacionados à geometria do problema e à magnitude das forças hidrodinâmicas de sustentação e arrasto, ganharam destaque para a análise de sensibilidade do modelo, são eles: o coeficiente de sustentação de referência e o coeficiente de arrasto médio.

Objetivamente, as origens das incertezas nestes parâmetros são:

- Conforme a investigação de BISHOP & HASSAN [25], o coeficiente de arrasto médio é altamente dependente do número de Reynolds e da amplitude transversal do sistema. Para o caso atual, na faixa de números de Reynolds trabalhada, a dependência entre C_{D0} e Re é desprezada. Porém, sua dependência com a amplitude transversal de vibração é muito mais forte nessas condições, com maiores amplitudes transversais causando o aumento do coeficiente, o que influencia drasticamente nas previsões do modelo. Como explicitado em seções anteriores, preferencialmente, uma função que descrevesse a relação entre as amplitudes de vibrações transversais e o valor de C_{D0} teria que ser adotada, mas tal prática, embora forneça resultados mais precisos, acrescentaria uma nova não-linearidade ao sistema de equações e assim aumentando sua complexidade, o que tem sido evitado pela maioria dos estudos de VIV da literatura. A prática mais usual tem sido a definição de C_{D0} constantes com valores acima da média [5, 40, 42, 44, 98] em uma tentativa de contabilizar a amplificação do valor com as grandes amplitudes transversais do regime de sincronização de frequências. Esta conduta é uma simplificação razoável que gera resultados relativamente bons para a direção transversal ao escoamento, mas falha drasticamente em representar as amplitudes de vibrações na direção do escoamento. A alternativa usada no atual estudo de dividir a varredura de velocidades reduzidas em dois intervalos e empregar C_{D0} distintos nestes dois intervalos resultou em uma melhoria significativa das previsões do modelo fenomenológico usado, mas que como explicado, ainda não é o ideal e pode acrescentar erros de modelo às respostas. Para resumir, C_{D0} foi adotado como um parâmetro incerto devido à falta da modelagem completa de sua dependência com a amplitude transversal do cilindro e à expectativa de que C_{D0} seja um dos principais parâmetros do modelo de VIV como indicam testes anteriores.

- O coeficiente de sustentação de referência C_{L0} , ou seja, medido em um cilindro fixo sujeito ao desprendimento de vórtices controlado [5]. É um parâmetro que, assim como C_{D0} , apresenta elevado grau de dificuldade em sua modelagem e na obtenção de dados experimentais para o VIV. BLEVINS [14] fez uma análise das curvas e valores experimentais do coeficiente disponíveis em estudos anteriores. O autor observou uma grande disparidade de resultados entre autores e faixas de número de Reynolds. Pelos motivos supracitados, C_{L0} será incluído na análise de sensibilidade.

Adicionalmente aos 6 parâmetros incertos considerados e justificados acima, um novo parâmetro “ P ” é proposto e incluído ao espaço das variáveis de entrada da ASG. Este sétimo parâmetro a ser considerado para a análise de sensibilidade, P , é um parâmetro adimensional criado com o intuito de investigar a localização na varredura de velocidades reduzidas em que ocorre a amplificação de C_{D0} . Para a simulação do modelo com valores referenciais, P teve valor igual a 3,0 (ver Tabela 2) e sua interpretação é a seguinte: se $U_{red} < P$ então $C_{D0} = 0,2$, mas se $U_{red} > P$, então $C_{D0} = 1,6$ sofre amplificação. A justificativa para considerar P como parâmetro de entrada na análise de sensibilidade é porque P surge como um fator que governa uma mudança repentina da dinâmica do sistema. Sua definição é fruto da simplificação adotada no presente estudo da dependência entre C_{D0} e a amplitude de vibração transversal do cilindro detalhada anteriormente e seu valor foi estabelecido baseado em observações.

Para a análise de sensibilidade com o intuito de representar a variabilidade do modelo a respeito dos parâmetros de entrada, é usada uma abordagem probabilística. Logo, os 7 parâmetros incertos a serem analisados quanto a sua contribuição para a sensibilidade do modelo são reunidos na Tabela 3. Para todos eles, foi atribuído limite de variabilidade superior e inferior de 10% do seu valor nominal adotado na seção 4.3 e distribuição uniforme.

Tabela 3: Distribuições de probabilidades atribuídas aos parâmetros incertos da análise de sensibilidade.

Parâmetro de entrada	Distribuição de probabilidade e intervalo
A_x	$U(7,2 \sim 8,8)$
A_y	$U(16,2 \sim 19,8)$

ε_x	$U(0,27 \sim 0,33)$
ε_y	$U(0,027 \sim 0,033)$
C_{D0}	$U(0,18 \sim 0,22)$ ou $U(1,44 \sim 1,76)$
C_{L0}	$U(0,27 \sim 0,33)$
P	$U(2,7 \sim 3,3)$

O motivo de empregar para cada fator de entrada limites de incertezas superiores e inferiores dentro de 10% de seu valor nominal é para uniformizar a participação de cada um deles e assim identificar relativamente parâmetros imperantes no modelo.

4.4.2 Especificações e metodologia

A análise de sensibilidade global por decomposição da variância da saída do modelo fenomenológico de VIV foi realizada em ambiente MATLAB, com a adaptação para o problema em questão de um pacote de funções e sub-rotinas disponíveis por livre acesso e que geram amostras baseadas em determinadas distribuições de probabilidades pré-estabelecidas com posterior cálculo dos índices de sensibilidade. O conjunto de rotinas (*toolbox*), intitulado como "GSAT"²², atua conforme a teoria da estimativa dos índices de sensibilidade pelo método de Monte Carlo (detalhada no Apêndice B).

As simulações foram conduzidas em computador com especificações: Windows Server 2012 R2 Standard com processador Intel (R) Xeon (R) CPU E5-2630 0 a 2,30 Ghz (2 processadores) e com memória RAM de 64 GB. Os estudos desenvolvidos, resultados obtidos, bem como as conclusões da análise de sensibilidade propriamente dita dos 7 parâmetros com incertezas do modelo fenomenológico são apresentados adiante.

Inicialmente, foi preciso estabelecer o número de amostras a serem utilizadas no método de Monte Carlo para a estimativa dos índices de sensibilidade. Como explicado no Apêndice B, as aproximações das integrais multidimensionais do cálculo dos índices

²² Referência ao nome em inglês: "Global Sensitivity Analysis Toolbox".

de sensibilidade tendem a convergir para o seu valor verdadeiro quando o número de amostras de Monte Carlo, N , tende a infinito. No entanto, uma das grandes preocupações de uma análise de sensibilidade global é o tempo computacional requerido para a estimativa de todos os índices de Sobol, logo deve-se limitar o número de simulações de Monte Carlo a um certo N^* em que todas as informações de interesse para o estudo sejam estimadas com acurácia. N^* é o menor número de simulações de Monte Carlo em que a convergência do problema é assegurada, ou seja, para qualquer $N < N^*$ os resultados da GSA são problemáticos e podem resultar em conclusões equivocadas, ao passo que para qualquer $N > N^*$ pouca ou nenhuma informação adicional é adquirida a um custo computacional elevado. Portanto, fica claro que o nível N^* de simulações de Monte Carlo depende do tempo disponível para análise, recursos computacionais disponíveis, critério de convergência empregado e da complexidade em simular o problema.

A metodologia seguida para a obtenção de N^* foi a de executar o código com $N = 1000, 1500, 2000, 2500, 3000, 4000$ e 5000 simulações de Monte Carlo. Os resultados obtidos são então observados quanto ao esforço de computação e a convergência dos índices de sensibilidade na Tabela 4.

Tabela 4: Índices de sensibilidade primários S_i e totais S_{ti} para N simulações de Monte Carlo do modelo fenomenológico com variável de interesse a amplitude de vibrações alinhadas ao escoamento para $U_{red} = 6,4$.

N		C_{L0}	A_y	A_x	ε_y	ε_x	P	C_{D0}	Tempo
1000	S_i	0,6587	0,1841	0,0584	0,1208	0,0576	0,0579	0,1861	27h 43'
	S_{ti}	0,6177	0,1300	0,0016	0,0671	0,0005	0	0,1504	
1500	S_i	0,6528	0,0940	0,0303	0,0167	0,0304	0,0307	0,1055	40h 13'
	S_{ti}	0,7149	0,1274	0,0011	0,0653	0,0008	0	0,1615	
2000	S_i	0,6515	0,1356	0,0202	0,0278	0,0204	0,0207	0,1089	47h 50'
	S_{ti}	0,6825	0,1639	0,0004	0,0563	0,0002	0	0,1317	
2500	S_i	0,6700	0,1425	0,0113	0,0548	0,0118	0,0117	0,1423	63h 53'
	S_{ti}	0,6811	0,1365	0,0006	0,0483	0,0001	0	0,1495	

3000	S_i	0,6692	0,1211	0,0027	0,0428	0,0026	0,0026	0,1475	72h 46'
	S_{ti}	0,6897	0,1245	0,0002	0,0473	0,0003	0	0,1625	
4000	S_i	0,6776	0,1084	0,0128	0,0395	0,0129	0,0129	0,1350	102h 12'
	S_{ti}	0,7074	0,1201	0,0005	0,0560	0,0001	0	0,1464	
5000	S_i	0,6789	0,1055	0,0238	0,0677	0,0233	0,0234	0,1184	123h 32'
	S_{ti}	0,6833	0,1310	0,0005	0,0503	0	0	0,1450	

Pelos resultados da Tabela 4, observa-se que a estimativa da convergência do problema parece ser garantida para $N=3000$ com um tempo de computação total de um pouco mais de 3 dias. É importante reforçar que o tempo de computação mostrado é para apenas um ponto de velocidade reduzida e para uma saída do modelo, no caso as amplitudes de oscilações máximas na direção do escoamento, logo, devido à precisão suficiente na estimativa dos índices de sensibilidade e tempo de computação razoável optou-se pela escolha de $N^*=3000$ para o restante da análise de sensibilidade do modelo de VIV.

A análise de sensibilidade do modelo de VIV foi desenvolvida para os 7 parâmetros de entrada passíveis de incertezas como examinado e identificado anteriormente. Em um estudo de análise de sensibilidade, o objetivo é mensurar o efeito que parâmetros de entrada identificados e tratados com teor estocástico têm na variabilidade da resposta ou saída do modelo.

Dependendo para o que se destina o uso do modelo empregado, podemos reescrever ou simplesmente reorganizar o sistema de equações de forma que alguma quantidade de interesse específica fique em evidência. De fato, mais parâmetros de saída do modelo, além da amplitude de vibração, são importantes para, por exemplo, cálculos de fadiga de equipamentos em VIV. Dentre as principais quantidades de interesse, o estudo da sensibilidade do sistema será priorizado em torno das amplitudes de vibrações nas direções x e y , frequências de oscilações transversais e o componente transversal da força hidrodinâmica. Entretanto, a análise de sensibilidade completa de todo o domínio de velocidades reduzidas, mesmo em computador relativamente potente como o utilizado, levaria meses para a computação dos índices de sensibilidade para todas as respostas de interesse citadas. Sendo assim, de maneira a compensar o custo

computacional, o estudo de sensibilidade dos parâmetros incertos para as amplitudes de vibrações alinhadas, frequências de vibrações transversais e para a componente transversal da força hidrodinâmica será conduzido para apenas três velocidades reduzidas dentro da zona crítica de sincronização do sistema, onde dois pontos ($U_{red} = 4,5$ e $U_{red} = 6,4$) estão situados na parte da região de sincronização em que ocorrem as maiores amplitudes ortogonais, na qual o modelo é razoavelmente preciso e um ponto ($U_{red} = 9,0$) localizado na porção da área de sincronização em que o modelo fenomenológico não fornece boas previsões. Além disso, sempre que possível a computação dos índices foi paralelizada e o foco foi dado integralmente para a estimativa dos índices de sensibilidade totais, pois, são mais valiosos para a ASG por serem capazes de expressar toda e qualquer interação de determinado parâmetro de entrada em um modelo, seja a interação direta ou indireta.

Tratando as amplitudes de oscilações transversais como a quantidade de interesse do modelo, uma varredura pormenorizada com 23 velocidades reduzidas será desenvolvida com maior detalhamento na região de sincronização e nas proximidades do ponto P , devido à magnificação de C_{D0} , com o objetivo de investigar a relevância dos parâmetros em questão a respeito das maiores amplitudes de vibrações registradas para o fenômeno e principalmente a respeito da física complexa da sincronização de frequências que modifica a configuração do sistema e afeta todos os parâmetros de saída referidos anteriormente. Vale lembrar que o fenômeno de sincronização entre a frequência de vibrações transversais e a frequência de desprendimento de vórtices é mais claramente observado no gráfico de amplitudes máximas na direção ortogonal pela velocidade reduzida, como mostrado por exemplo pela Figura 16.b.

De forma alternativa à ASG, ao percorrer os limites de incertezas dos parâmetros de entrada para as amplitudes transversais será feita uma análise crítica da importância desses parâmetros para a largura da zona de sincronização de frequências no final do capítulo.

4.4.3 Resultados e discussões

Na Figura 21 temos que os resultados da análise de sensibilidade para as velocidades reduzidas que se encontram na região de sincronização mostram que a contribuição dos parâmetros em A_x e ε_x a respeito das amplitudes de vibrações na própria direção x é pequena. Esse fato interessante comprova que para o modelo

fenomenológico, assim como o observado nos dados experimentais, a sincronização de frequências, sendo esta uma condição relacionada diretamente às vibrações transversais do cilindro, influencia indiretamente nas amplitudes de oscilações alinhadas ao escoamento. Em outras palavras, as relativamente grandes amplitudes de vibrações na direção do escoamento na condição de sincronização podem ser um efeito indireto da dinâmica transversal do sistema, fato que estaria de acordo com a contribuição apreciável dos parâmetros A_y e ε_y como terceiro e quarto parâmetros com maior participação na sensibilidade do modelo respectivamente.

A variabilidade de P que governa a transição de C_{D0} não pôde ser analisada neste caso, pois, as velocidades reduzidas em questão estão fora dos limites de variação estipulados para P , por isso sua influência é pequena. Entretanto, existem dois tópicos relacionados à transição do valor de C_{D0} em sua função descontínua como adotada no estudo. O primeiro tópico está atrelado ao limite de velocidade reduzida (localização) em que acontece esta magnificação e que pode ser associada diretamente pelo parâmetro de entrada P . Como citado, P , dentro dos limites adotados não tem participação para a variabilidade da quantidade de interesse analisada. A segunda questão está relacionada à magnitude do salto ou amplificação propriamente dita que C_{D0} sofre, esta não pode ser estudada pela ASG de P , mas está correlacionada no estudo de sensibilidade a respeito de C_{D0} .

Os fatores mais importantes para o modelo nestas condições são os coeficientes relacionados às forças hidrodinâmicas de arrasto e sustentação, sendo o último (C_{L0}), o parâmetro dominante no modelo dentre o domínio dos parâmetros de entrada.

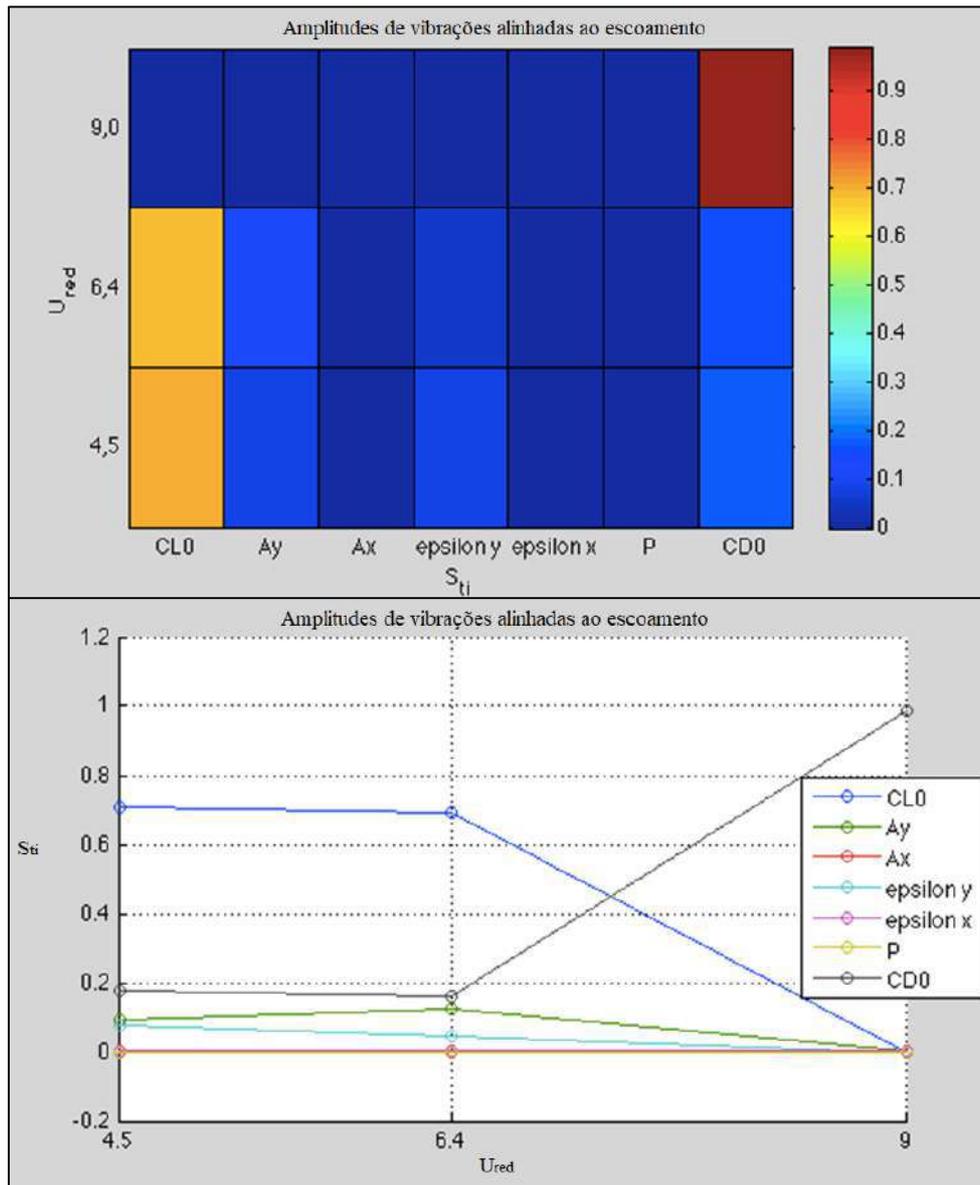


Figura 21: Estimativa dos índices de sensibilidade totais para as amplitudes de vibrações em x para três velocidades de escoamento: 1) $U_{red} = 4,5$, 2) $U_{red} = 6,4$ e 3) $U_{red} = 9,0$. Tempo total de computação aproximado: 301 horas e 38 minutos para $N=3000$.

Todavia, na parte da região de sincronização em que o modelo de VIV é impreciso (observar por exemplo a Figura 16), na qual se encontra $U_{red} = 9,0$, temos que para o modelo, a influência do parâmetro de entrada outrora dominante, C_{L0} , assim como A_y e ϵ_y é muito menor, enquanto que o coeficiente de arrasto médio se torna a única origem da variabilidade da resposta de amplitudes na direção x . Esta característica pode não ser muito significativa nesta análise, como sugerem os dados experimentais que se distanciam dos dados do modelo fenomenológico nessa faixa de velocidades reduzidas, mas tem sua origem mais provável nos erros do modelo devido à sua física limitada.

É possível concluir que esforços para reduzir incertezas nos três parâmetros, C_{L0} , C_{D0} e A_y , resultariam em uma redução substantiva da variabilidade da quantidade de interesse e aprimoraria a capacidade de previsão do modelo para estes fins.

Os resultados da análise de sensibilidade do modelo de VIV para a componente transversal máxima no regime permanente da força hidrodinâmica atuando no cilindro são observados na Figura 22. É possível perceber que o coeficiente de sustentação de referência surge como o parâmetro dominante para os três pontos estudados e nenhum outro parâmetro se aproxima de sua contribuição dentro da zona de sincronização do sistema. O valor de índice de sensibilidade de C_{D0} possui aproximadamente metade do valor de índice de sensibilidade de C_{L0} , mas os resultados indicam que a participação de C_{D0} na variabilidade da resposta do modelo decresce ao longo da faixa de sincronização, ainda se mantendo como o segundo parâmetro mais importante na condição de sincronização de frequências.

Os parâmetros A_y e ε_y novamente estão situados respectivamente como terceiro e quarto parâmetros mais influentes para as previsões do modelo fenomenológico, enquanto A_x e ε_x apresentam pouca participação dentro de seus limites de incertezas para a acurácia do modelo na situação de sincronização. A localização “P” do ponto de amplificação de C_{D0} novamente não pode ser auferida a respeito de sua sensibilidade no sistema por apresentar limites de incertezas fora dos estudados.

Cabe notar que não há dados experimentais disponíveis para a comparação com a saída do modelo para a força hidrodinâmica, porém, embora C_{L0} continue crescendo isoladamente como o parâmetro de entrada dominante na parte da região de sincronização crítica para o modelo, no sentido de apresentar baixa precisão nesta região ($U_{red} = 9,0$), a ação de C_{D0} cai para quase zero, fato curioso que não é observado para a ASG das outras quantidades de interesse. Mais uma vez, é possível que esta característica esteja relacionada à omissão de parte da física do fenômeno na construção do modelo.

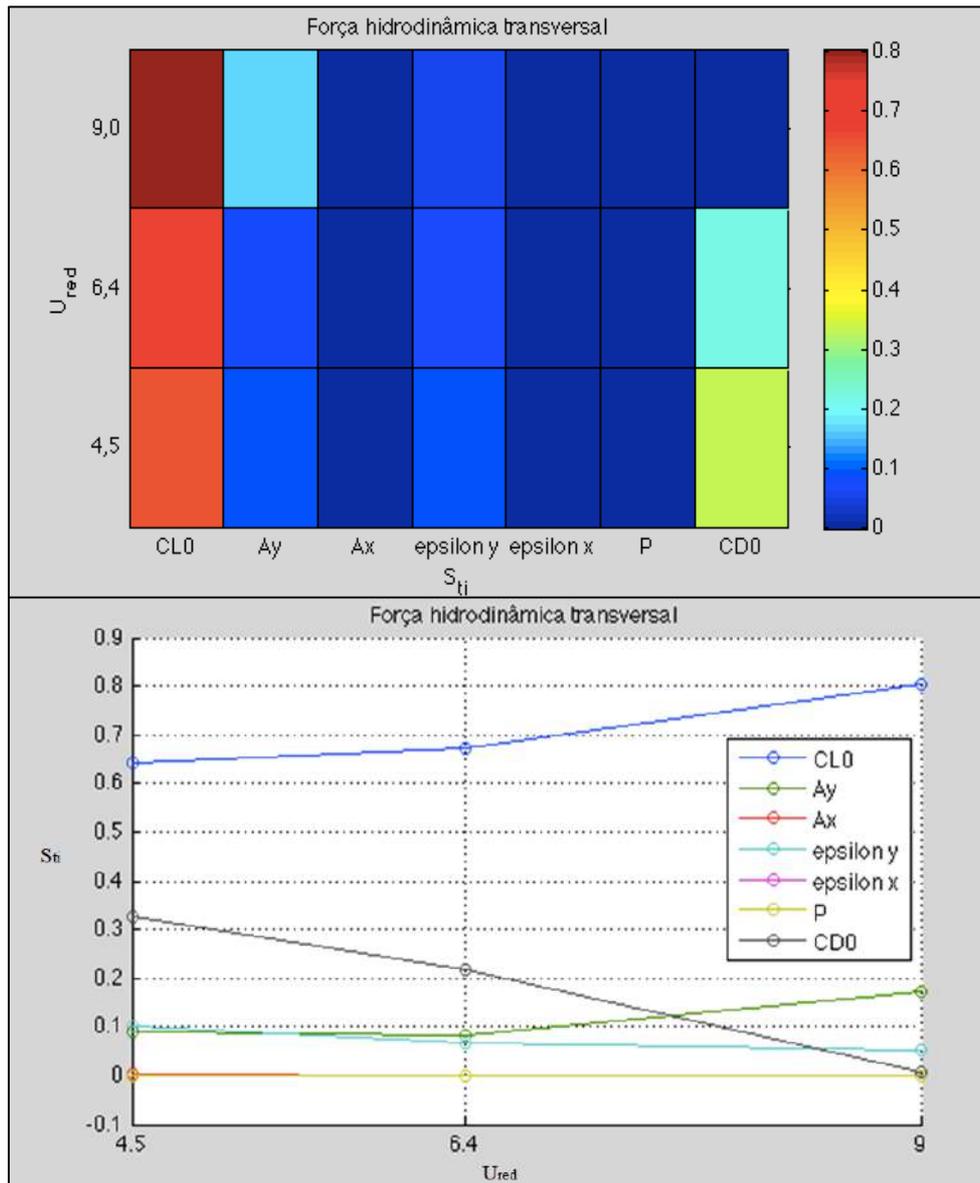


Figura 22: Estimativa dos índices de sensibilidade totais para a componente ortogonal máxima da força hidrodinâmica para três velocidades de escoamento: 1) $U_{red} = 4,5$, 2) $U_{red} = 6,4$ e 3) $U_{red} = 9,0$. Tempo total de computação aproximado: 306 horas e 31 minutos para $N=3000$.

Na Figura 23 são apresentados os resultados obtidos pela ASG do modelo de VIV considerando as frequências de vibrações ortogonais ao escoamento como a quantidade de interesse para as mesmas três velocidades reduzidas dentro da região de sincronização. Para as frequências de oscilações transversais, claramente temos ao menos dois regimes, fora do domínio de sincronização, na qual a frequência transversal deveria responder aproximadamente pela lei de Strouhal e dentro da condição de sincronização, na qual a frequência transversal deveria sincronizar com a frequência natural do cilindro ou com múltiplos dela. Tendo dito isto, para a zona de sincronização de frequências, é possível perceber que, diferentemente dos resultados anteriores, não

existe um único parâmetro com contribuição muito superior do que os outros. A dominância é distribuída entre 3 parâmetros de entrada incertos, são eles: C_{L0} , C_{D0} e A_y .

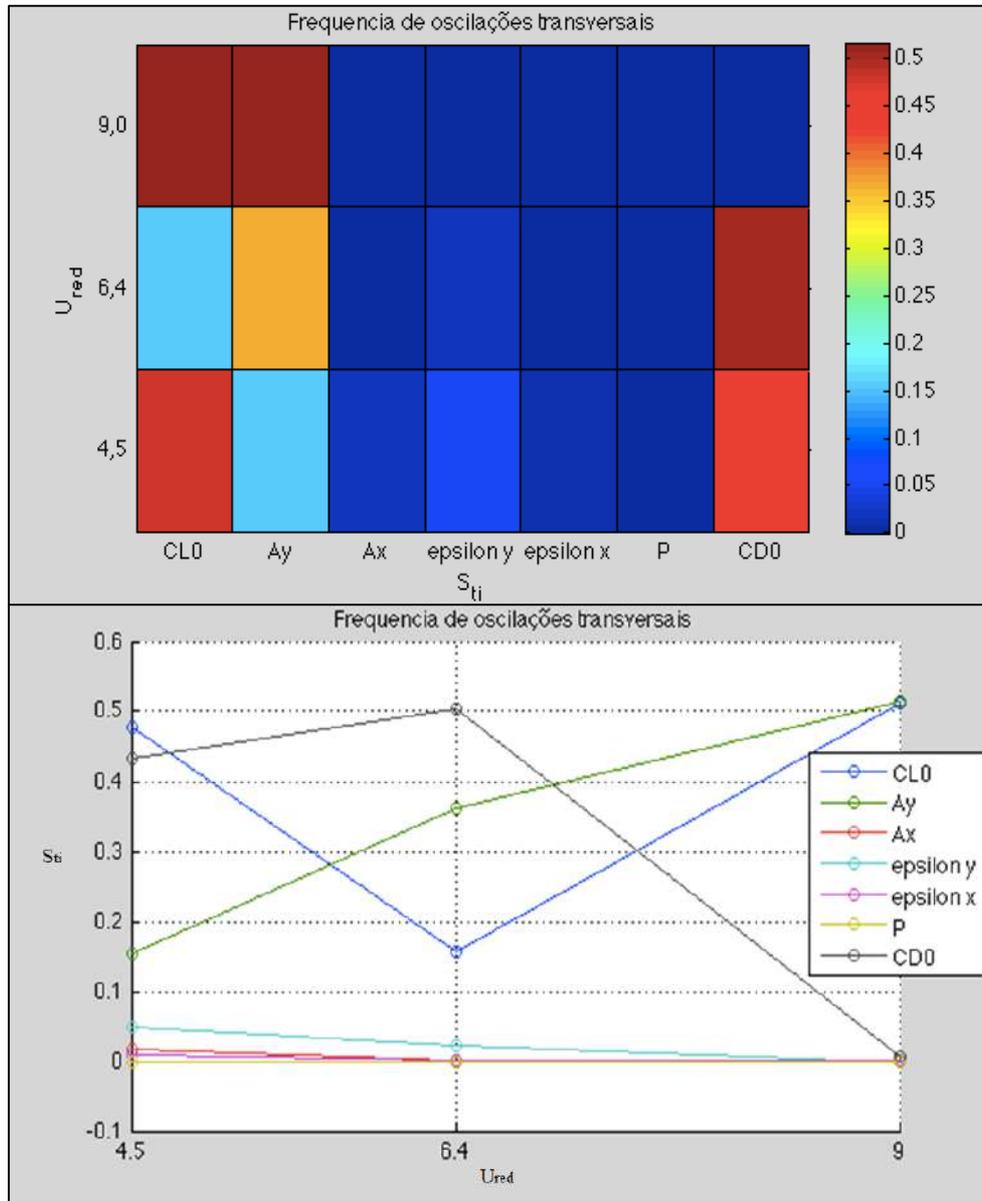


Figura 23: Estimativa dos índices de sensibilidade totais para as frequências de oscilações transversais para três velocidades de escoamento: 1) $U_{red} = 4,5$, 2) $U_{red} = 6,4$ e 3) $U_{red} = 9,0$. Tempo total de computação aproximado: 296 horas e 46 minutos para $N=3000$.

Em $U_{red} = 4,5$, no início do domínio de sincronização, região onde o modelo original é relativamente preciso (observar Figura 16), C_{L0} e C_{D0} são os parâmetros predominantes para a variabilidade da frequência de vibrações na direção y . Para $U_{red} = 6,4$, região de máxima amplitude e frequências claramente sincronizadas, $f_y^* = 1$, os parâmetros mais influentes são C_{D0} e A_y , enquanto a participação de C_{L0} é reduzida significativamente. Para a velocidade reduzida, $U_{red} = 9$, a Figura 17 mostra que as frequências de vibrações transversais do modelo erroneamente voltam a responder pela

lei de Strouhal, ao passo que os dados experimentais mostram padrão remanescente de sincronização. Pela análise de sensibilidade neste ponto podemos observar novamente a queda da contribuição do coeficiente de arrasto médio, à medida que A_y e C_{L0} prevalecem para as incertezas da resposta do modelo.

Vale ressaltar mais uma vez que a queda na importância de C_{D0} observado na parte da zona de sincronização em que o modelo é pouco preciso ($U_{red} = 9,0$), contrariamente ao padrão observado na parcela da área de sincronização na qual o modelo fenomenológico é mais preciso ($U_{red} = 4,5$ e $6,4$), é mais provável que seja causada por limitações de modelo e C_{D0} passa a ser observado com possível relação para a calibração do modelo nesta região.

Os resultados da análise de sensibilidade global para as amplitudes máximas de vibrações na direção transversal ao escoamento podem ser visualizados na Figura 24. É possível classificar o resultado obtido para os índices de sensibilidade em subáreas com respeito da velocidade reduzida do escoamento. Fica claro que C_{L0} é o parâmetro de entrada dominante para baixos valores de velocidades reduzidas ao passo que ε_y tem uma pequena, porém visível, influência. Com o crescimento de U_{red} , os papéis se invertem para $U_{red} = 1,6$, onde ε_y passa a ser o parâmetro que impera para a variabilidade do modelo de VIV, enquanto a participação de C_{L0} cai, padrão que se intensifica em $U_{red} = 2,4$.

Na Figura 24, o refinamento da análise em $2,5 < U_{red} < 3,5$ permitiu investigar a sensibilidade do sistema atribuída a influência de P . Como pôde ser observado, P tem uma maior importância para $U_{red} = 3$. Outros parâmetros predominantes neste intervalo são C_{L0} e A_y .

Pela Figura 24, uma característica que pode indicar que o parâmetro empírico de acoplamento A_y é importante para a extensão da condição de sincronização do modelo fenomenológico é o pico na sensibilidade relacionada a este parâmetro que ocorre em velocidades reduzidas menores ($U_{red} < 4$) e maiores ($U_{red} > 8$) nas proximidades da região de sincronização do modelo (referência à Figura 16).

Possivelmente, os dados de sensibilidade para velocidades reduzidas menores e maiores nas vizinhanças da zona de sincronização do modelo de VIV, demarcada pelas

linhas verticais vermelhas na Figura 24, indicam parâmetros interessantes para a calibração da extensão do domínio de sincronização.

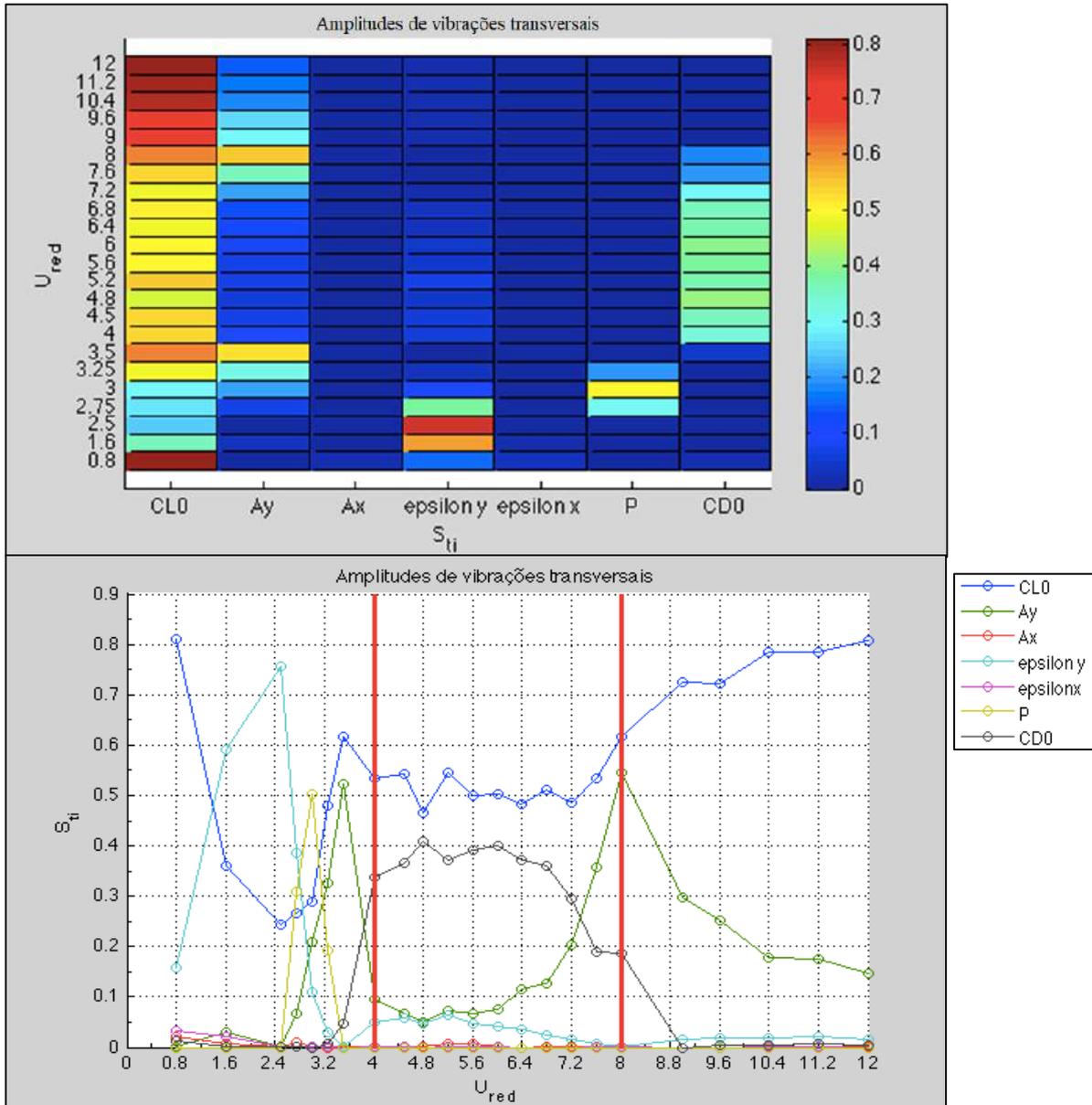


Figura 24: Estimativa dos índices de sensibilidade totais a respeito das amplitudes de oscilações transversais para uma varredura de 23 velocidades de escoamento. A região de sincronização de frequências do modelo é destacada no espaço entre as linhas vermelhas verticais. Tempo total de computação aproximado: 2208 horas e 54 minutos para $N=3000$.

Além disso, percebe-se um padrão inverso entre C_{D0} e ϵ_y e A_y . Isto é, C_{D0} e ϵ_y têm contribuição pequena para a variabilidade da resposta do modelo no período de crescimento e decrescimento da amplitude de sincronização do modelo, enquanto apresentam uma grande participação para a saída do sistema dentro da zona de sincronização, que é caracterizada pelas maiores amplitudes transversais. Assim, podemos concluir que C_{D0} e ϵ_y são pouco influentes para a "variabilidade horizontal" da

resposta, ou seja, para a extensão ou largura de sincronização, mas são muito importantes para sua "variabilidade vertical", em outras palavras, para as amplitudes máximas de vibrações transversais (ver Figura 16). No entanto, A_y tem efeito oposto, sendo mais importante nos momentos de crescimento e decrescimento das amplitudes máximas de oscilações na direção y e por consequência para a extensão da região de sincronização. Um quarto parâmetro, C_{L0} , também tem grande influência nessa região, de fato a maior entre os 4 parâmetros evidenciados, para velocidades reduzidas imediatamente antes, após e dentro da situação de sincronização.

Nas velocidades reduzidas em que a resposta do modelo se encontra na iminência de dessincronizar equivocadamente, isto é, para $U_{red} = 7,6$ e $U_{red} = 8$, uma vez que os dados experimentais exibem sincronização e grandes amplitudes até aproximadamente $U_{red} = 10$, como visto na Figura 16, é importante destacar que a soma dos índices totais de sensibilidade dos parâmetros excede consideravelmente a 1, apontando claramente que existem interações de mais alta ordem (indiretas) entre C_{L0} , A_y e C_{D0} nesta região.

Na área após a sincronização do modelo, isto é, para $U_{red} > 8$, C_{D0} perde totalmente sua participação na variabilidade das amplitudes de vibrações ortogonais do modelo, à medida que C_{L0} se torna novamente o parâmetro dominante e A_y também apresenta uma contribuição apreciável.

É importante destacar que o tempo de computação para uma análise muito mais detalhada e completa como esta foi de mais de 2208 horas. Na verdade, boa parte desta computação foi paralelizada, portanto o tempo real de computação é muito menor do que isso, mas ainda assim é um tempo de computação altíssimo e seria inviável empregar uma análise com esse nível de detalhes para todas as quantidades de interesse anteriores.

Resumindo, os resultados da análise de sensibilidade permitiram a identificação de 4 parâmetros predominantes para o modelo fenomenológico: C_{L0} , A_y , ε_y e C_{D0} . Estes parâmetros apresentam contribuições predominantes para a variabilidade das saídas do modelo. Os três parâmetros de entrada restantes possuem uma pequena participação para a sensibilidade do modelo de VIV na maioria das velocidades reduzidas estudadas. É importante salientar que a extrapolação dos resultados de ASG em um modelo complexo pode ser perigosa. Tendo dito isto, para a classificação definitiva de A_x , ε_x e P como parâmetros sem importância para a variabilidade de todas as quantidades de

interesse do modelo seria necessário realizar uma análise mais detalhada, nos moldes da que foi realizada para as amplitudes de vibrações transversais apresentada na Figura 24, principalmente para as amplitudes máximas de vibrações na direção x .

Porém, o que pode ser afirmado com certeza é que na situação de sincronização de frequências do sistema, uma vez que os problemas de estruturas em VIV normalmente surgem apenas quando o sistema entra em sincronização, já que fora desse regime as amplitudes de oscilações são pequenas (exceto no pico de amplitudes da ressonância de vibrações na direção x), para todas as quantidades de interesse investigadas, bem como para todo o domínio de amplitudes de oscilações transversais, tais parâmetros de entrada não têm peso considerável sobre as imprecisões das respostas do modelo fenomenológico. Esta afirmativa pode conduzir à redução da dimensão do domínio de parâmetros de entrada com incertezas em estudos posteriores de calibração do modelo, a menos que as velocidades de escoamento de interesse do projeto sejam compatíveis com zonas não analisadas e para isso mais informações precisam ser fornecidas.

As Figuras 25 e 26 fornecem uma medida da variabilidade das amplitudes de oscilações na direção transversal ao escoamento. Para a Figura 25, os gráficos contendo intervalos de confiabilidade (em azul) foram construídos através da computação dos desvios padrões para as 3000 amostras usadas no método de Monte Carlo para cada um dos 6000 pontos da resposta do modelo no domínio do tempo em $U_{red} = 6,4$.

Cada intervalo foi estipulado como tendo comprimento superior e inferior iguais a um desvio padrão, totalizando dois desvios padrão. Podemos observar que tanto para as amplitudes de oscilações alinhadas com o escoamento, Figura 25.a, quanto para as amplitudes de vibrações transversais ao escoamento, Figura 25.b, as incertezas associadas aos 7 parâmetros de entrada destacados em relação à estas duas respostas de interesse são grandes.

Outra informação a ser enfatizada é que se torna possível analisar o sinal completo das respostas, incluindo o regime transiente que havia sido excluído da ASG. É perceptível que no regime transiente as previsões do modelo apresentam relativamente menor variabilidade quando comparadas com o regime permanente.

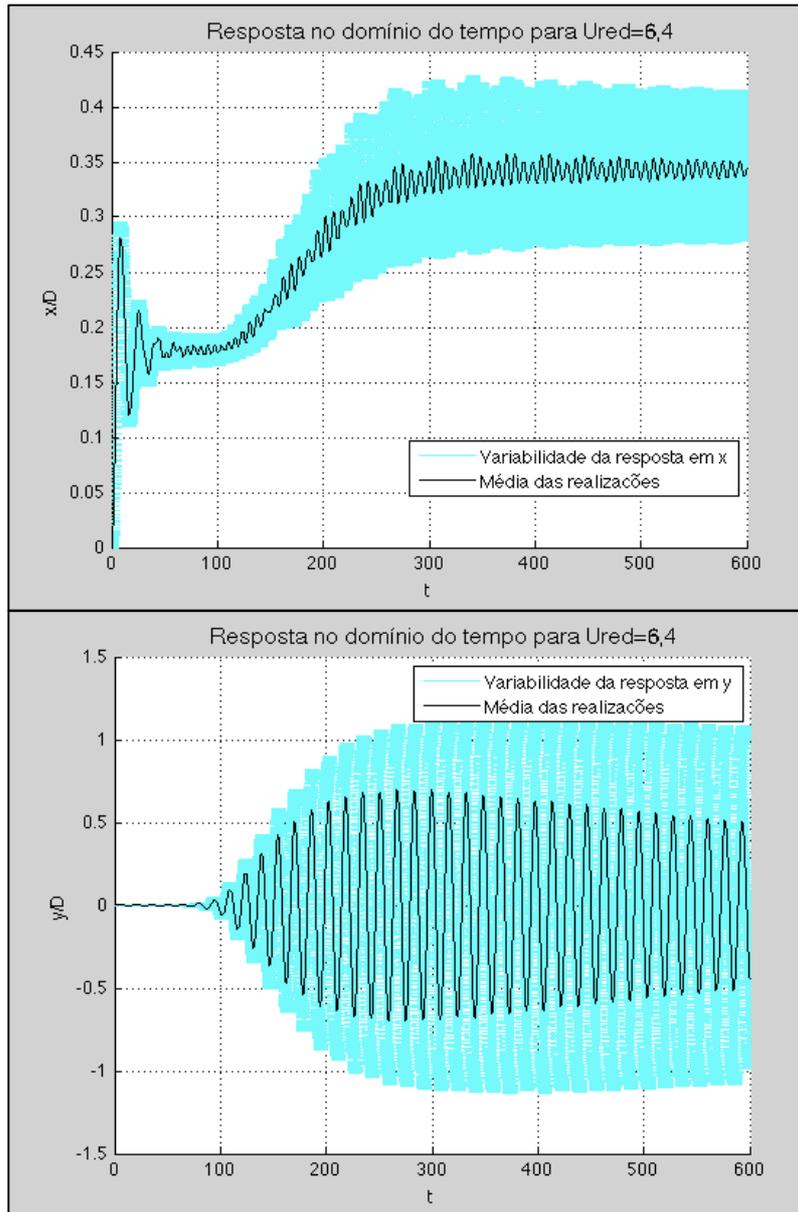


Figura 25: Intervalos de confiabilidade construídos para 3000 amostras das respostas no domínio do tempo para $U_{red} = 6,4$ com C_{L0} , A_y , ε_y , C_{D0} , C_{L0} , A_x , ε_x e P conforme definidos na Tabela 3. a) Amplitudes de vibrações na direção do escoamento. b) Amplitudes de vibrações na direção ortogonal ao escoamento. Tempo de computação total aproximado: 27 minutos.

A Figura 26 apresenta uma comparação que permite visualizar o efeito que os 4 parâmetros imperantes têm no modelo. Os gráficos de barras de erros (em vermelho) foram construídos seguindo o mesmo critério de comprimento total de dois desvios padrão para cada velocidade reduzida da varredura (120 pontos). Fica claro que, pela Figura 26.a, as incertezas nas previsões do modelo são grandes com a contribuição dos 4 parâmetros predominantes (C_{L0} , A_y , ε_y e C_{D0}), enquanto que na Figura 27.b o modelo é muito mais preciso com a hipótese do tratamento das incertezas nesses 4 parâmetros. Contudo, é importante destacar que esses resultados são apresentados de maneira

complementar e foram obtidos paralelamente à análise de sensibilidade global mais precisa e confiável, não fazendo parte da mesma.

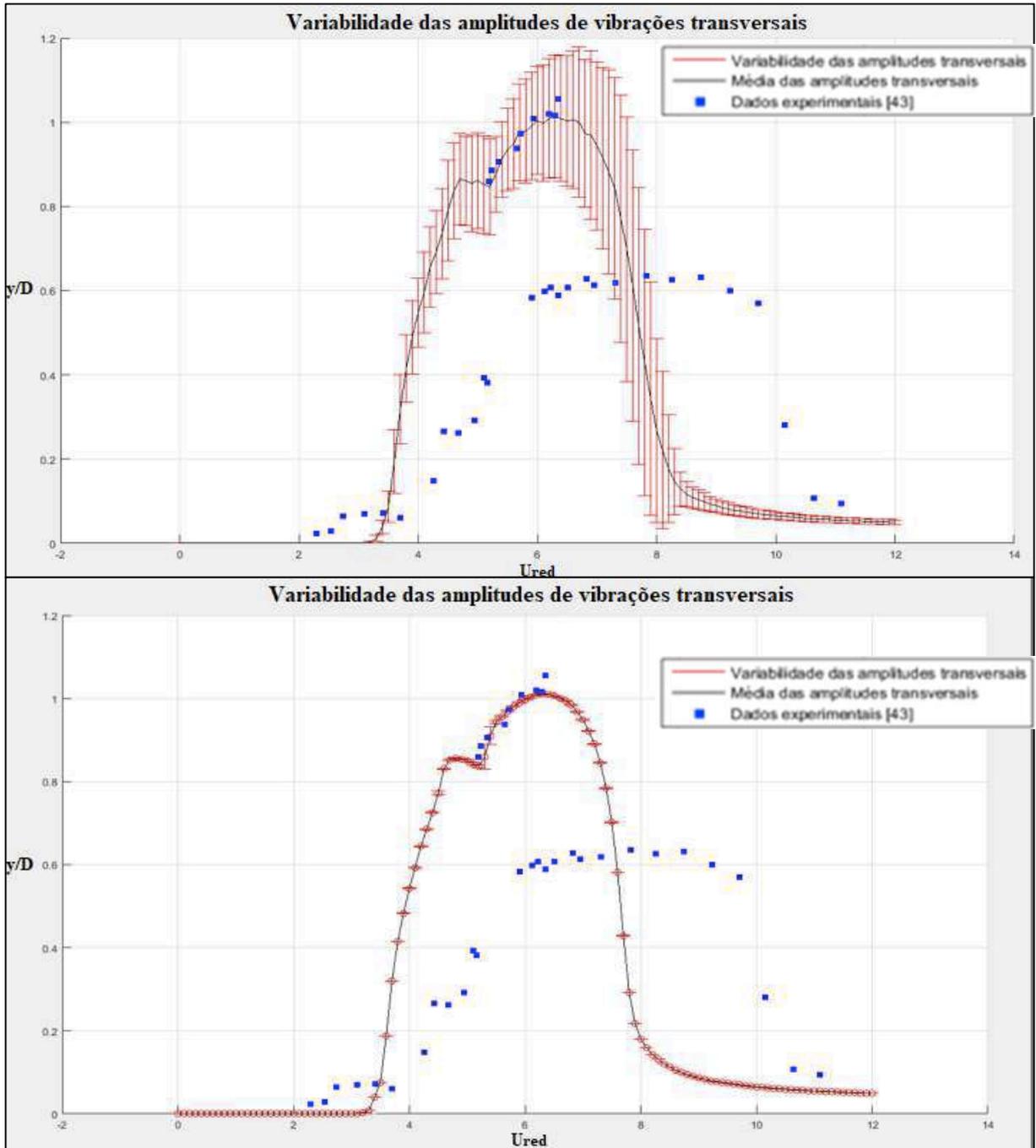


Figura 26: Intervalos de confiabilidade construídos para 3000 amostras da varredura de velocidades reduzidas para as amplitudes de vibrações transversais. a) C_{L0} , A_y , ε_y , C_{D0} , C_{L0} , A_x , ε_x e P conforme definidos na Tabela 3. b) Apenas A_x , ε_x e P parâmetros aleatórios conforme Tabela 3. Tempo de computação total aproximado: 127 horas e 54 minutos.

Pela análise da resposta do modelo fenomenológico com valores referenciais mostrada na Figura 16, foi possível observar, especialmente para a curva de amplitudes de oscilações transversais, que uma das principais imprecisões do modelo é em relação

à extensão do domínio de sincronização, no caso, a região de sincronização do modelo aparenta estar deslocada para a esquerda na comparação com os dados experimentais e, além disso, tem largura consideravelmente menor.

A partir dos resultados da ASG, foi possível identificar parâmetros que podem estar relacionados a uma curta região de sincronização de frequências ocasionando maiores erros de previsão do modelo fenomenológico. Os resultados apresentados anteriormente sugerem que C_{D0} é o parâmetro dominante nesta zona para a amplitude máxima de oscilações alinhadas ao escoamento, ao passo que C_{L0} e A_y são os parâmetros que mais afetam as quantidades de interesse na direção transversal ao escoamento na região crítica de sincronização, na qual o modelo fenomenológico tem menor acurácia ($U_{red} > 8$). Porém, mais informações são necessárias para as conclusões definitivas.

A Figura 27 apresenta uma análise alternativa adicional que auxilia na identificação dos parâmetros mais importantes para a largura da zona de sincronização e fornece informações que não são obtidas na ASG sobre a atuação de determinado parâmetro no funcionamento do modelo. Por exemplo, se o acréscimo deste parâmetro de entrada causa o incremento das amplitudes máximas de vibrações ou a ampliação da região de sincronização.

Esta análise foi realizada através de uma varredura sobre os intervalos de variabilidade de cada parâmetro de entrada isoladamente, isto é, houve uma divisão igualitária dos limites de aleatoriedade de cada um dos parâmetros estudados em 3000 pontos.

Vale salientar que, embora a Figura 27 não as apresente claramente, em sua construção foi constatado que para os parâmetros de entrada analisados, com a exceção de P , do qual pouca informação pôde ser analisada nesta situação, não ocorrem interações complexas entre a variação isolada de cada parâmetro, ou seja, a curva verde superior e a inferior estão obrigatoriamente relacionadas ao primeiro ou último valor do intervalo de variabilidade do parâmetro. Além disso, foi observado que C_{L0} , A_y e A_x atuam de maneira direta no modelo, isto é um aumento nestes parâmetros resulta no acréscimo da curva verde de resposta do modelo. De maneira oposta, C_{D0} , ε_x e ε_y agem de forma inversa, pois, um acréscimo nestes parâmetros causa a redução das amplitudes ortogonais.

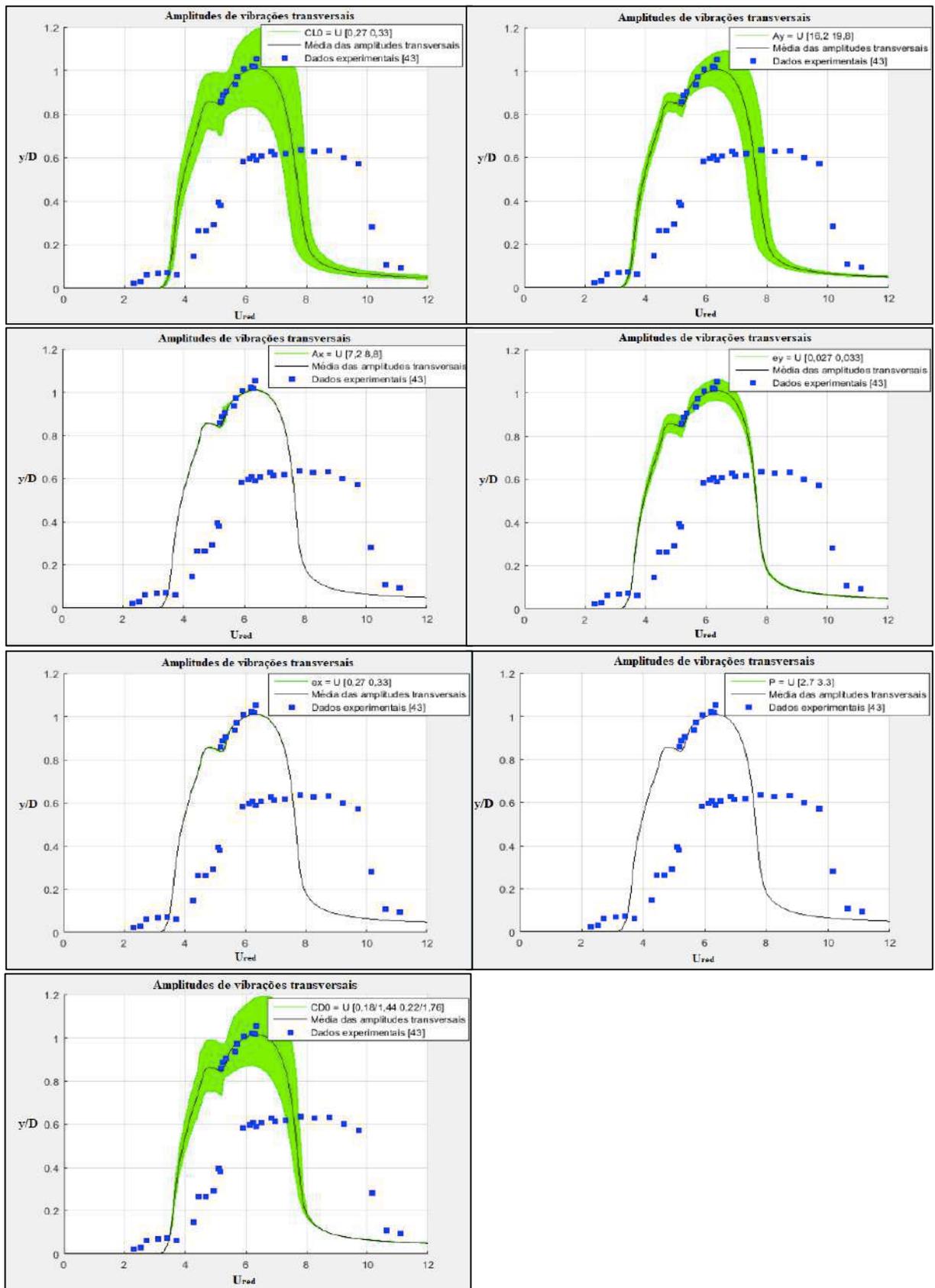


Figura 27: Avaliação da atuação de cada parâmetro de entrada no modelo. Gráficos gerados a partir da divisão igualitária do intervalo de variabilidade, de acordo com a Tabela 3, de cada parâmetro em 3000 pontos que foram plotados por linhas verdes. (a) C_{L0} . (b) A_y , (c) A_x , (d) ϵ_y , (e) ϵ_x , (f) P , (g) C_{D0} . Tempo de computação total aproximado: 142 horas e 48 minutos.

Refletindo os resultados anteriores, os parâmetros fenomenológicos na direção x , A_x e ε_x , têm pouca influência nas amplitudes máximas de oscilações transversais e na extensão da zona de sincronização. Ademais, podemos afirmar que a definição do ponto de amplificação "P" dentro de seu limite de variabilidade não afeta de nenhuma forma a curva de amplitudes de vibrações ortogonais.

Novamente é possível identificar os 4 parâmetros prevalentes como sendo: C_{L0} , C_{D0} , A_y e ε_y . Dos 4 parâmetros predominantes, C_{L0} se mostra como um parâmetro igualmente importante em relação à sua contribuição para a variabilidade da amplitude transversal do sistema e para a variabilidade da largura de sincronização.

No entanto, como mencionado previamente, para a varredura de velocidades reduzidas realizada (referente à Figura 16), foi possível perceber que o modelo fenomenológico é capaz de acompanhar os dados experimentais com relativa precisão no quesito das amplitudes máximas de vibração, ao passo que sua falta de acurácia está associada em grande parte a uma curta zona de sincronização com um intervalo crítico em $8 < U_{red} < 10$. Portanto, dos 4 parâmetros predominantes, é preciso destacar aqueles que estão relacionados com a extensão do domínio de sincronização sem que afetem igualmente as amplitudes máximas de vibrações.

Dos resultados da ASG mostrados na Figura 24, ao analisar a região de sincronização demarcada entre as linhas vermelhas verticais e suas vizinhanças, o parâmetro de acoplamento, A_y , foi destacado por apresentar um padrão similar a uma concavidade voltada para cima (Figura 24.b), isto é, A_y mostra dois picos de maior importância na análise exatamente nas vizinhanças da região de sincronização. Isto parece indicar que A_y tem contribuição substancial para o início do limite de sincronização, onde há o salto das amplitudes máximas e para o seu fim, onde ocorre o decréscimo das amplitudes máximas do modelo.

Sendo assim, o parâmetro de entrada a se destacar desse estudo para a extensão do domínio de sincronização do modelo fenomenológico é o parâmetro de acoplamento A_y . A Figura 27 corrobora a importância de A_y , pois, como esperado, este apresenta-se como o único parâmetro que proporcionalmente é mais responsável pela variabilidade da extensão da zona de sincronização do modelo do que pela variabilidade das amplitudes transversais propriamente ditas.

Em relação a C_{D0} e ε_y , ambos apresentam efeito parecido na resposta de interesse, que é uma grande participação para a variabilidade das amplitudes máximas na direção y do sistema e uma pequena influência para a variabilidade em relação à largura de sincronização. Na Figura 24, os resultados da ASG indicam que estes parâmetros possuem padrão similar a uma concavidade voltada para baixo, ao contrário de A_y . Com isto, C_{D0} e ε_y apresentam-se como dois parâmetros de entrada de grande valor para a calibração do modelo como será visto adiante. ε_y por apresentar uma proporcionalmente maior contribuição para a variabilidade das amplitudes máximas (como observado na Figura 27), levando em consideração os limites absolutos de variação entre os dois, $\varepsilon_y \sim U[0,027-0,033]$, ao passo que $C_{D0} \sim U[0,18/1,44-0,22/1,76]$. Assim, ε_y surge como um parâmetro de ajuste fino promissor na combinação com A_y para a calibração do domínio de sincronização do modelo de VIV, como será visto na sequência.

Resumindo, vimos que o modelo fenomenológico tem menor acurácia para a largura da região de sincronização do que para as amplitudes máximas do sistema. Com isto, a calibração com um parâmetro igualmente importante para estas duas quantidades de interesse mesmo que seja o parâmetro dominante da ASG é dificultada e C_{L0} é armazenado para possível ajuste futuro. Posteriormente, o estudo de ASG destacou que A_y parece ser o parâmetro mais indicado para o ajuste da largura de sincronização. Entretanto, a calibração do modelo somente com A_y pode não atingir o propósito destinado, no sentido de regular apenas a extensão de sincronização. A Figura 27 mostra que ao propor um acréscimo de A_y estaríamos aperfeiçoando a precisão do modelo para a largura de sincronização, mas ao mesmo tempo teríamos um acréscimo indesejado das amplitudes máximas, prejudicando a acurácia do modelo neste sentido. Sendo assim, ε_y (e possivelmente C_{D0}) por apresentar perfil contrário ao observado para A_y na ASG pode ser usado para corrigir os efeitos indesejados do ajuste de A_y para a extensão do domínio de sincronização de frequências do modelo fenomenológico. A calibração combinada de A_y com ε_y pode anular o efeito incerto nas amplitudes de oscilações transversais do cilindro enquanto aumenta a largura de sincronização do modelo, como apresentado na Figura 28.

A Figura 28 exemplifica o potencial dos parâmetros de entrada A_y e ε_y para a calibração do modelo fenomenológico, na qual, com a proposta de $A_y = 26$ e $\varepsilon_y = 0,05$ e ao comparar com a resposta do modelo referencial em vermelho, podemos observar que

com um ajuste entre apenas esses dois parâmetros temos uma melhoria considerável na extensão de sincronização do modelo.

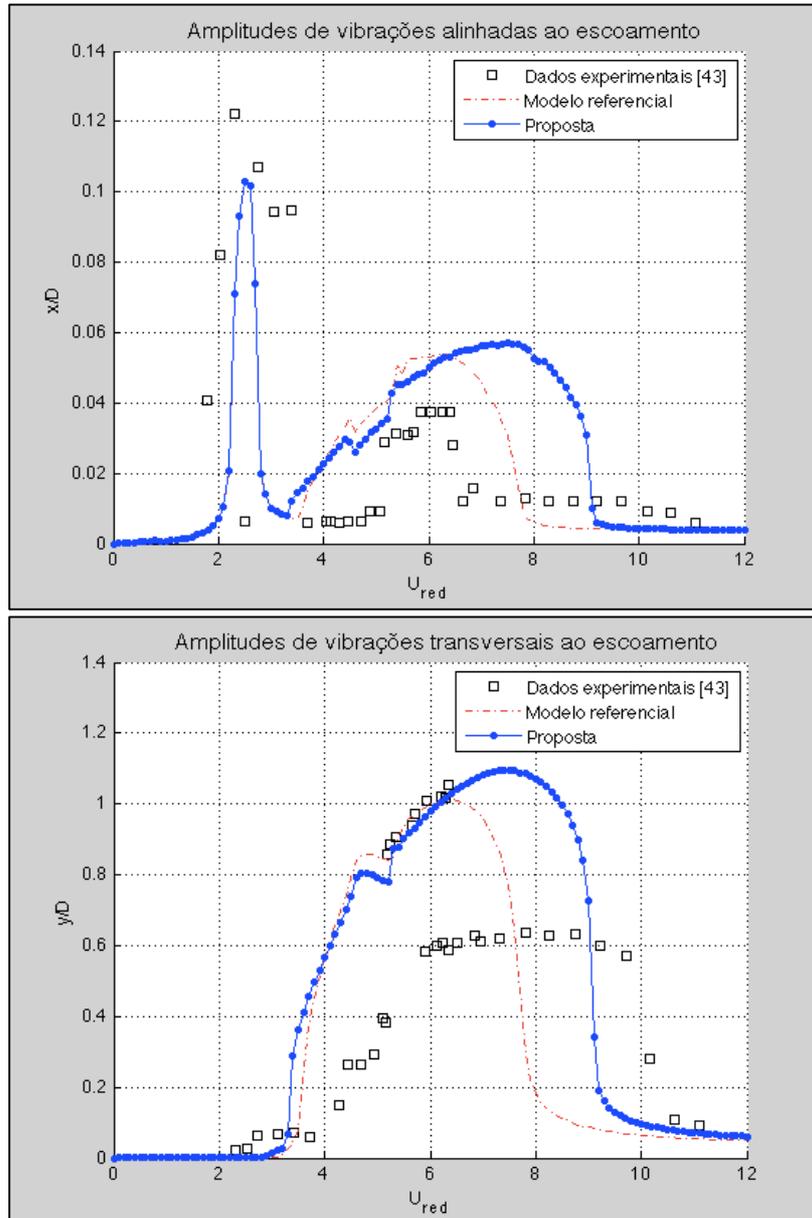


Figura 28: Ajuste da largura do limite de sincronização de frequências para a varredura de velocidades reduzidas com $A_y=26$ e $\varepsilon_y=0,05$. a) Amplitudes de oscilações na direção do escoamento. b) Amplitudes de oscilações transversais ao escoamento.

No entanto, existe um deslocamento indesejado das maiores amplitudes transversais para aproximadamente $7,5 < U_{red} < 9,0$, o que não é possível corrigir só com o ajuste combinado destes dois parâmetros de entrada. A solução para este problema é buscada nos resultados da ASG. Na Figura 24, ao observar a interação de C_{D0} para a variabilidade da quantidade de interesse, temos que C_{D0} , diferentemente de todos os outros parâmetros estudados, demonstra um caráter predominante apenas na

região de sincronização de frequências do modelo. Para todas as outras velocidades reduzidas C_{D0} tem contribuição pouco significativa. Por conseguinte, há de se levantar uma questão importante: Qual seria o motivo para que C_{D0} perdesse importância dentro do funcionamento do modelo e qual a possível solução? Em outras palavras, C_{D0} apenas é um parâmetro importante para a sensibilidade do sistema no regime de sincronização que, segundo os dados experimentais, deveria se prolongar até aproximadamente $U_{red} = 10$. Contudo, os dados da ASG refletem que C_{D0} apresenta uma queda de participação no sistema em aproximadamente $U_{red} = 8$.

Ao investigar os dados da ASG na Figura 24 novamente, é possível notar que justamente nessas velocidades reduzidas ($U_{red} = 7,6$ e principalmente $U_{red} = 8$) há a presença de uma característica que não se manifestou anteriormente em nenhuma condição e quantidades de interesse que é a interação indireta entre C_{L0} , C_{D0} e A_y (ou dois desses) refletida pelos seus índices de sensibilidade totais nesses pontos apresentando somatório maior que 1 (ver Seção 4.4). Logo, de alguma forma dentro da mecânica do modelo, ocorrem interações mais complexas entre estes parâmetros de entrada que pode ser uma possível causa para a questão levantada no parágrafo anterior.

Resumindo, com o ajuste da largura do domínio de sincronização, a imprecisão do modelo fenomenológico atrelada a esta região foi reduzida. O ajuste da extensão da sincronização do modelo por meio da calibração de A_y e ε_y resultou em uma nova incoerência em relação às amplitudes máximas transversais, o que pode ser corrigida com a investigação da interação de C_{D0} através da ASG no modelo de VIV. Tendo em mente que, nesta região em que o modelo fenomenológico mostra uma menor acurácia, os índices de sensibilidade para C_{D0} indicam uma contradição com o que vinha sendo apresentado anteriormente, logo C_{D0} surge como o parâmetro-chave para a calibração do modelo nesta área.

No estudo desenvolvido, a metodologia empregada é baseada no uso de uma função descontínua para C_{D0} variando com as velocidades reduzidas e consequentemente com as amplitudes de vibrações transversais. Até o momento, apenas dois valores para C_{D0} foram propostos com o parâmetro P regulando o uso de um ou outro. A investigação da sensibilidade do sistema para C_{D0} e sua classificação como parâmetro importante para o modelo de VIV principalmente na região de sincronização de frequências e a existência de interações indiretas entre C_{D0} e outros parâmetros

identificados, possivelmente causando a redução de sua participação no funcionamento do modelo no limite final da sincronização do sistema sugere que o refinamento do modelo pelo método sendo desenvolvido poderá ser alcançado com a inserção de novos valores para C_{D0} de maneira a equilibrar a sua perda de relevância em situações críticas, conforme foi realizado e mostrado na Figura 29.

Para concluir, a análise do papel dos 3 parâmetros de entrada identificados ($C_{D0}, A_y, \varepsilon_y$) para o modelo de VIV, sendo que A_y e ε_y são especialmente importantes para a extensão horizontal da sincronização e C_{D0} é relevante, de maneira geral, para as amplitudes máximas de vibrações ortogonais em situação de sincronização de frequências. O ajuste realizado para os 3 parâmetros-chave destacados, $A_y = 42$, $\varepsilon_y = 0,09$ e $C_{D0} = [0,2 \ 1,6 \ 2,4]$, foi proposto através de método não sistemático e experiências de modelo. O resultado final do modelo fenomenológico com a calibração de A_y, ε_y e C_{D0} como proposto no atual estudo é apresentado nas Figuras 30 e 31 e comparado com a versão anterior e outros modelos de VIV.

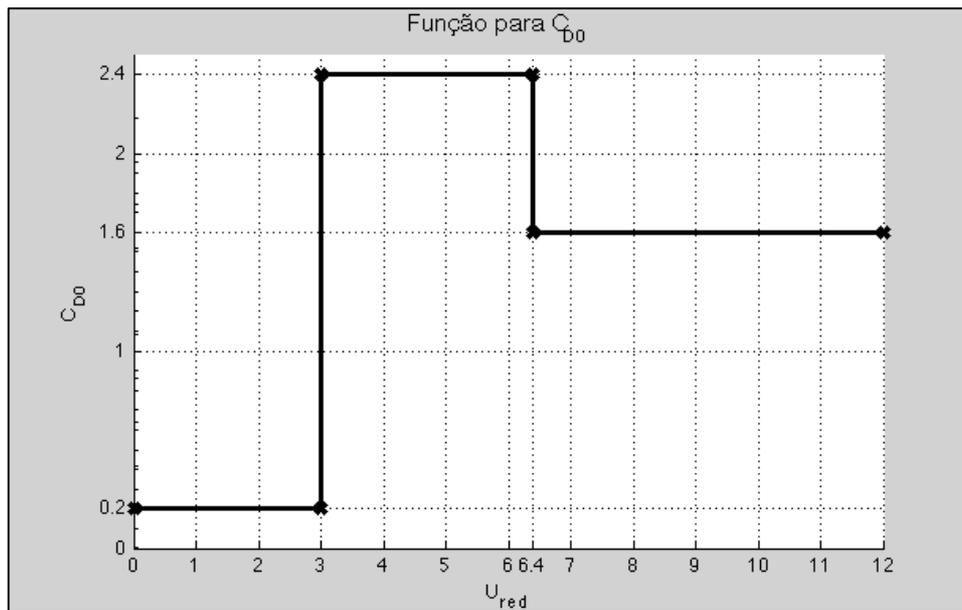


Figura 29: Proposta de função descontínua simples para C_{D0} com o objetivo de representar a dependência com as amplitudes de oscilações transversais e corrigir padrões observados pelos dados da Análise de Sensibilidade Global.

BAI & QIN [42], como citado no Capítulo 3, utilizaram um modelo fenomenológico bidimensional com duas equações para representar o deslocamento do cilindro nas direções x e y e apenas uma equação com uma variável de esteira para a modelagem da ação do fluido no sistema. A resposta de seu modelo foi adicionada à Figura 30 para elaborar a análise entre os modelos e por apresentar a compatibilidade de

valores nominais entre os parâmetros de entrada (exceto C_{D0} , A_y , A_x , ε_y e ε_x) e ter abordado os dados experimentais de JAUVTIS & WILLIAMSON [43] assim como conduzido na presente dissertação.

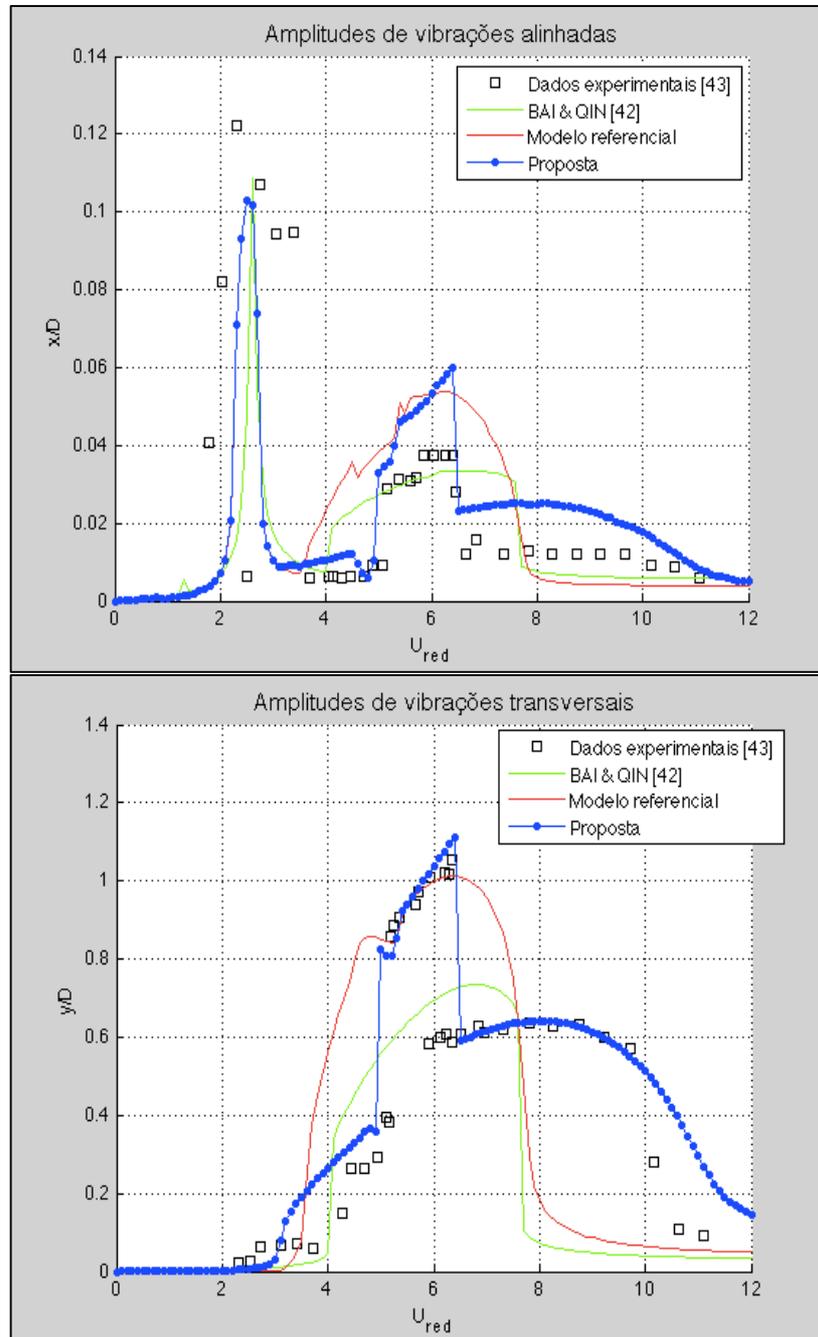


Figura 30: Refinamento do modelo fenomenológico com o ajuste dos 3 parâmetros-chave para o sistema através da Análise de Sensibilidade Global com $A_y = 42$, $\varepsilon_y = 0,09$ e $C_{D0} = [0,2 \ 1,6 \ 2,4]$.

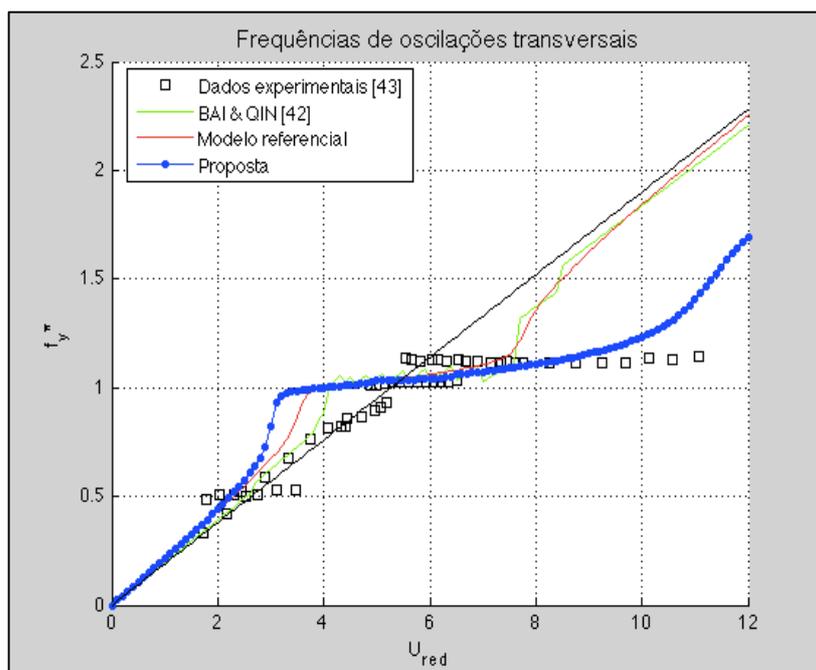


Figura 31: Resultado final obtido pelo estudo com o ajuste dos três parâmetros-chave através da Análise de Sensibilidade Global com $A_y = 42$, $\varepsilon_y = 0,09$ e $C_{D0} = [0,2 \ 1,6 \ 2,4]$ para as frequências de vibrações transversais.

É válido esclarecer que, embora referenciado nas Figuras 28, 30 e 31 como uma proposta do estudo, o modelo fenomenológico foi aprimorado com base na ASG e na revisão de literatura. Tanto o ajuste combinado de A_y e ε_y , quanto a dependência de C_{D0} com as amplitudes de vibrações transversais e até mesmo a utilização de valores discretos para C_{D0} são encontrados na literatura e não há tentativa de reivindicar nenhuma destas características como descoberta. Há, porém, um mérito do estudo ao ratificá-las através da análise de sensibilidade e ao quantificar estas relações, atribuindo valores como uma proposta e atingindo melhores resultados.

Em síntese, as Figuras 30 e 31 mostram que o modelo com os valores finais se destaca por uma representação mais fiel em praticamente todos os quesitos e situações. O modelo com a proposta de C_{D0} , A_y e ε_y é capaz de acompanhar os dados experimentais satisfatoriamente ao custo de esforço computacional igualmente pequeno.

5 CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS FINAIS

As conclusões acerca dos resultados obtidos pela simulação computacional do modelo fenomenológico utilizado com seus parâmetros de entrada com valores referenciais, bem como as conclusões estabelecidas a partir do estudo minucioso do funcionamento desse modelo matemático através da análise de sensibilidade global serão desenvolvidas a seguir com o objetivo de incrementar a acurácia e capacidade de previsão deste, haja vista o seu potencial e vantagem do ponto de vista de tempo computacional em relação a outros modelos.

O modelo de VIV bidimensional foi apresentado em sua forma dimensional e adimensional, modificado inicialmente a respeito da abordagem adotada para o coeficiente de arrasto médio para comparação com dados experimentais de razão de massas moderada [43] e elaborado para fornecer respostas no domínio da frequência e séries temporais para as forças hidrodinâmicas e amplitudes de vibrações máximas nas duas direções para uma determinada velocidade de escoamento ou para uma varredura completa de velocidades de escoamento. Os resultados indicam que o modelo fenomenológico referencial se comportava com relativa precisão em sua capacidade de prever a dinâmica do sistema para algumas velocidades reduzidas, ao passo que falhava para outras. Como sua principal vantagem podíamos citar a sua habilidade de retratar satisfatoriamente as principais tendências observadas nos dados experimentais, como as amplitudes transversais máximas, o fenômeno de sincronização de frequências, a observância da lei de Strouhal e ainda a sincronização de frequências do sistema em $f_y^* = f_y/\omega_n = 1$ em situação de sincronização. Toda essa quantidade valiosa de informações a um custo computacional pequeno.

Tendo dito isto, o custo computacional vantajoso do modelo fenomenológico torna uma série de estudos e análises viáveis e que podem ser realizados para o seu refinamento, desbloqueando todo o seu potencial para a previsão do fenômeno.

A partir daí, a análise de sensibilidade global foi empregada para 7 parâmetros de entrada, são eles: o coeficiente de sustentação padrão, C_{L0} , os parâmetros adimensionais relacionados ao acoplamento do sistema, A_y e A_x , os parâmetros da equação de Van der Pol relacionados ao amortecimento não-linear do sistema, ε_y e ε_x , o coeficiente de arrasto médio, C_{D0} , e o ponto, P , da varredura de velocidades reduzidas onde ocorre o

salto de C_{D0} devido à sua dependência com as amplitudes de vibrações transversais do cilindro.

Os dados obtidos pela ASG exibem uma predominância de C_{L0} , C_{D0} , A_y e ε_y para a variabilidade das previsões do modelo fenomenológico respectiva a todas as quantidades de interesse, enquanto A_x , ε_x e P têm comportamento no geral pouco relevante nas velocidades reduzidas estudadas. Dentre os 4 parâmetros de entrada dominantes da análise de sensibilidade, C_{L0} teve comportamento dominante em grande parte dos pontos estudados. Normalmente, isso indicaria que o coeficiente de sustentação de referência é o parâmetro de entrada mais importante para a calibração e aprimoramento do modelo. No entanto, a maneira como C_{L0} interage no modelo, sendo muito importante para as amplitudes máximas de vibrações transversais e igualmente relevante para a largura da zona de sincronização (ver por exemplo a Figura 27) dificultava a calibração de um modelo que apresentava uma acurácia muito menor no tocante à extensão da região de sincronização do que para as amplitudes máximas de vibrações. Isto pode ser observado na Figura 16, na qual os resultados do modelo são capazes de acompanhar as maiores amplitudes de vibrações, porém são incapazes de representar a extensão horizontal do domínio de sincronização de frequências. Ademais, C_{L0} é, por definição, medido em um cilindro de referência com vibrações controladas, o que concentra a origem das incertezas deste parâmetro para erros de medição experimental. A abordagem da uniformização dos limites de variabilidade (em 10% do seu valor nominal, vide Tabela 3) dos parâmetros de entrada da análise de sensibilidade no caso é valiosa, pois permite a análise relativa entre os parâmetros e evita erros na construção das distribuições de probabilidade onde não existe informação a priori. Contudo, é possível que esta prática tenha alavancado a influência de C_{L0} para caráter primário, o que não é um erro, mas talvez uma outra interpretação poderia apontar C_{D0} , A_y e ε_y como tão importantes quanto ou até mais importantes do que C_{L0} para o modelo fenomenológico, devido ao seu potencial combinado que foi detalhado no Capítulo 4 e será resumido adiante.

As informações auferidas da análise de sensibilidade global mostram que os parâmetros fenomenológicos, A_y e ε_y , têm uma ação combinada excepcionalmente interessante no modelo de VIV. De fato, FACCHINETTI *et al.* [5] investigaram a capacidade associada entre esses dois parâmetros através do uso de um "parâmetro

combinado", A_y/ε_y . Entretanto, o estudo da capacidade de A_y e ε_y para o aprimoramento do modelo não havia sido feita pela ótica da análise de sensibilidade.

O papel dos dois parâmetros destacados (A_y e ε_y) para a calibração do modelo pode ser explicado pelos resultados da ASG tendo as amplitudes de vibrações transversais como quantidade de interesse (Figura 24). Sendo assim, foi verificado que A_y possui maior influência para a variabilidade da saída do modelo para a região de acréscimo e decréscimo acentuados de amplitudes que ocorrem na condição de entrada e saída de sincronização e pouca participação para as amplitudes de vibração dentro da zona de sincronização propriamente dita, o que indica que A_y é importante para o ajuste da extensão de sincronização. Em contrapartida, ε_y possui efeito, em menores proporções, oposto ao de A_y . Com isto, é possível realizar um ajuste na largura de sincronização do modelo fenomenológico ao regular A_y , o que causaria uma elevação indesejada das amplitudes de vibrações, devido à pouca, mas existente influência de A_y neste quesito, como citado. Com a calibração de A_y e a sua combinação com ε_y , é possível anular esse crescimento indesejado das amplitudes máximas de vibrações do modelo, as quais já apresentavam boa compatibilidade com os dados experimentais.

A capacidade da combinação de A_y e ε_y para o aperfeiçoamento das previsões do modelo fenomenológico foi evidenciada. Entretanto, como visto na Figura 28, somente o ajuste destes dois parâmetros é insuficiente para melhorar a acurácia do modelo. Isto se dá porque, embora a extensão do domínio de sincronização seja ampliada, vimos que o modelo experiencia um crescimento anormal das amplitudes de vibrações nas duas direções na parte final da zona de sincronização (observar a Figura 28).

Ao investigar minuciosamente os dados da ASG na Figura 24, foi possível observar que C_{D0} é distintamente importante apenas durante a condição de sincronização do sistema, sendo que assim como as respostas do modelo deveriam exibir sincronização até aproximadamente $U_{red} = 10$, ao passo que só sincronizavam até $U_{red} = 8$, o sinal de sensibilidade do sistema para C_{D0} indicava característica parecida. Isto é, foi estimado que C_{D0} era um parâmetro prevalente para o modelo neste caso, desde o início da sincronização de frequências até perto de $U_{red} = 8$, enquanto deveria manter sua influência no funcionamento do modelo até $U_{red} = 10$. Com isso, foi

concluído que, dentro da mecânica complexa do modelo, existia um motivo para que C_{D0} de alguma forma perdesse precocemente participação no modelo.

A resposta foi buscada novamente nos resultados da ASG, onde foi observado que C_{L0} , C_{D0} e A_y , ou uma combinação entre dois destes, pela primeira vez em todo o estudo, apresentavam interações indiretas que podiam estar relacionados à queda de sensibilidade em relação a C_{D0} .

A origem das incertezas em C_{D0} se dá principalmente por sua dependência com a amplitude de vibração transversal do cilindro, descoberta por BISHOP & HASSAN [25]. Como ressaltado previamente, preferencialmente o emprego de uma função como, por exemplo, a sugerida por POSTNIKOV *et al.* [44] ($C_{D0} = 1 + 2 \cdot y/D$) C_{D0}^{st} ou por VANDIVER [26] ($C_{D0} = 1 + 1,043(2 \cdot y_{rms}/D)^{0,65} C_{D0}^{st}$) teria que ser adotada, o que contribuiria para a melhoria do modelo. Todavia, esta prática tem sido evitada pela maioria dos estudos de VIV por acrescentar uma não-linearidade tornando a solução do sistema das equações acopladas mais complexa. As alternativas mais usadas têm sido as discretas, como a utilização de uma função descontínua simples relacionando C_{D0} com a amplitude transversal da estrutura em programas comerciais de previsão de VIV em estruturas [88] ou a atribuição de um valor acima da média para C_{D0} com o intuito de antecipar a sua amplificação que poderá ocorrer no sistema em operação.

Na presente dissertação, a abordagem adotada foi inspirada no uso de uma função descontínua relacionando C_{D0} e a amplitude de vibração ortogonal do cilindro, no caso de forma indireta através da velocidade reduzida, o que através da elaboração da maneira como C_{D0} era representado resultou na melhoria considerável da capacidade de previsão do modelo fenomenológico.

É importante salientar que posteriormente, a proposição de um novo valor para a função descontínua de C_{D0} (em $U_{red} = 6,4$) foi guiada pelos dados obtidos na análise de sensibilidade. Destaca-se que em $U_{red} = 6,4$ foi necessária uma redução de $C_{D0} = 2,4$ para $C_{D0} = 1,6$, acompanhando neste caso a dependência de C_{D0} e a amplitude de vibração transversal, uma vez que é observado um declínio das amplitudes máximas nos dados experimentais a partir desta velocidade reduzida, C_{D0} tem que ter seu valor reduzido.

Com a calibração dos três parâmetros-chave identificados, é possível perceber o aprimoramento do modelo fenomenológico em todos os sentidos na comparação com os mesmos dados experimentais. O estudo desenvolvido para diferentes razões de massas e consequentemente diferentes propriedades dinâmicas de sistemas indicou que a metodologia utilizada pode ser repetida e possivelmente o mesmo nível de acurácia atingido no estudo pode ser alcançado similarmente para diversas configurações de sistemas com o ajuste de C_{D0} , A_y e ε_y .

Fica claro pelo melhor ajuste obtido nas Figuras 30 e 31 que foi preciso adotar tais valores para C_{D0} . Não se sabe, porém, se estes valores para C_{D0} condizem com resultados experimentais. Em outras palavras, o crescimento de C_{D0} com a ampliação das amplitudes transversais e vice-versa foram reforçados pelos resultados de ASG, mas os exatos valores que C_{D0} toma nestas situações não foi investigado, pois, não compôs o escopo da atual dissertação. Portanto, surge uma questão relacionada à teoria de discrepância de modelo.

Mesmo que o modelo com os valores propostos da Figura 30 apresente boa precisão, em aproximadamente $U_{red} = 3$ ou $U_{red} = 11$, por exemplo, são zonas que apresentam uma imprecisão considerável. Ademais, com o tópico levantado no último parágrafo, caso os valores experimentais para C_{D0} sejam diferentes dos propostos, as previsões do modelo se afastarão do obtido. Com isso, seria observado uma discrepância de modelo relacionada ao C_{D0} e ao modelo fenomenológico que pode ser abordada por uma função de discrepância, como definida por exemplo em [39], e pela calibração Bayesiana [79].

Uma nota será dedicada à importância da velocidade do escoamento em estudos de análise de incertezas de um modelo de VIV. No estudo desenvolvido, a velocidade do escoamento em sua forma adimensional (velocidade normalizada ou reduzida) foi incorporada como um parâmetro de controle e os resultados foram obtidos para a varredura completa dos limites de velocidades reduzidas. Em outros casos, porém, uma varredura dessa magnitude pode não estar prevista no projeto. Tendo dito isto, a velocidade do escoamento deve ser considerada no estudo como um parâmetro embutido de incertezas, por ter sua aleatoriedade originada de fenômenos da natureza, os quais não podemos prever totalmente e principalmente por seu protagonismo para o fenômeno de VIV. Os resultados obtidos refletem claramente a enorme dependência das

respostas do sistema para variações nos valores de velocidades reduzidas, bem como sua responsabilidade no regime dinâmico fluido-estrutura.

Outro parâmetro de entrada que merece uma atenção especial é o fator de amortecimento (ζ), o qual não foi abordado no presente trabalho por ser definido como uma característica do sistema nos dados experimentais usados. Mas, pela dificuldade que pode ser encontrada para se medir o ζ (ou c) levando em consideração o amortecimento estrutural e o fluidodinâmico, um estudo de ζ pode ser indicado, caso este varie entre dois sistemas ou haja incertezas relacionadas a este parâmetro de entrada.

Como sugestões de trabalhos futuros, a investigação da dependência de C_{D0} e as amplitudes de vibrações transversais de forma experimental seria capaz de fornecer informações valiosas para o modelo fenomenológico. Ainda, a atribuição de uma função de discrepância de modelo a C_{D0} e o estudo do comportamento do modelo sob este ponto de vista também poderia contribuir para o maior refinamento do modelo.

O estudo do modelo fenomenológico preciso a aplicações práticas constitui uma importante área de pesquisa futura. De fato, o pequeno esforço computacional relacionado a este tipo de modelo possibilita o uso de métodos como a ASG que podem culminar no aperfeiçoamento do modelo, de forma que, até mesmo para modelos teoricamente de maior fidelidade como os de CFD, se torna difícil que atinjam um nível de acurácia melhor do que os modelos fenomenológicos dentro das condições em que foram calibrados ou ajustados. Talvez uma das aplicações mais interessantes para o modelo fenomenológico esteja relacionada à teoria de controle dinâmico de estruturas em VIV.

HASHEMINEJAD *et al.* [99] apresentaram um estudo sobre um sistema de controle ativo para vibrações induzidas por vórtices. Os autores abordaram o problema de um cilindro montado elasticamente, livre para vibrar nas duas direções. O sistema de controle empregava um modelo, no caso um modelo de CFD, para a partir da velocidade de escoamento, estimar as forças hidrodinâmicas e conseqüentemente o deslocamento do cilindro. Com isso, o algoritmo de controle computava a força, neste estudo apenas transversal, a ser aplicada através de atuadores necessária para a supressão das vibrações do cilindro e, por fim, o modelo era novamente resolvido para a nova força resultante no sistema. O algoritmo agia sucessivamente até que o movimento

transversal do cilindro fosse anulado.

Na prática, considerando que cada simulação do modelo CFD consome um tempo considerável e que em cada passagem do algoritmo são necessárias duas soluções do modelo, temos que em condições adversas de operação da estrutura, por exemplo com velocidade de escoamento variável, o algoritmo provavelmente não seria capaz de responder em tempo à determinada excitação o que comprometeria o seu desempenho.

Nesta situação, o emprego de um modelo fenomenológico preciso seria o ideal, ao permitir através de seu pequeno tempo de computação que o algoritmo reaja quase que instantaneamente à excitação, garantindo a efetiva supressão de vibrações indesejadas e a economia de energia e recursos neste processo.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] SARPKEYA, T., “A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, pp. 389-447, 2004.
- [2] CORREA, R., CREMER, E., SWEENEY, W. et al. Wind Harvesting via Vortex Induced Vibration. 2014. 82 f. Project (B.Sc.) – Worcester Polytechnic Institute, Massachusetts. 2014.
- [3] KHING, Y., T., ZAHARI, M. A., DOL, S.S., “Application of Vortex Induced Vibration Energy Generation Technologies to the Offshore Oil and Gas Platform: The Feasibility Study”. *International Journal of Mechanical, Aerospace, Industrial, Mechatronic and Manufacturing Engineering*, v. 9, n. 4, pp. 656-661, 2015.
- [4] PAIDOUSSIS, M. P., PRICE, S. J., DE LANGRE, E., 2011, *Fluid structure Interactions*. 1 ed. New York, USA, Cambridge University Press.
- [5] FACCHINETTI, M., DE LANGRE, E., BIOLLEY, F. “Coupling of Structure and Wake Oscillators in Vortex-Induced Vibrations”, *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, pp. 123–140, 2004.
- [6] PEAT, F. D., 2002, *From certainty to uncertainty: the story of science and ideas in the twentieth century*. 1 ed. Washington, Joseph Henry Press.
- [7] BERNADÁ, G. M. G., *Quantificação de incertezas em problemas de interação fluido estrutura via método de colocação estocástica*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2011.
- [8] SALTELLI, A., RATTO, M., CAMPOLONGO, F., et al., 2008, *Global Sensitivity Analysis: The Primer*, 1 ed., Chichester, United Kingdom, John Wiley & Sons.
- [9] PEREIRA, R., M., *Monitoração de inclinação dinâmica de risers rígidos em catenária utilizando sensores inerciais*, Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2008.
- [10] WILLIAMS, N. “A deepwater dry-tree GoM solution: The fourstar TLP”. In: Proceedings of the eighteenth (2008) *International Offshore and Polar Engineering Conference – ISOPE 2008*. [S.I.: s.n.], 2008.

- [11] Disponível em: <[http://www2.emersonprocess.com/siteadmincenter/pm%20rose mount% 20documents/00840-0200-2654.pdf](http://www2.emersonprocess.com/siteadmincenter/pm%20rose%20documents/00840-0200-2654.pdf)>. Acesso em 14 de julho de 2016.
- [12] Disponível em: <http://bjerkas.info/work_inter_pipe_free.htm>. Acesso em 14 de julho de 2016.
- [13] BOYCE, W. E., DIPRIMA, R. C., 2009, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 9 ed. USA, John Wiley & Sons.
- [14] BLEVINS, R. D., 2001, *Flow-Induced Vibration*. 2 ed., Florida, USA, Krieger Publishing Company.
- [15] RAMOS, F., ROSA, R., TEMAM, R., “Estimativas Rigorosas para escoamentos turbulentos baseados nas equações de Navier-Stokes”. In: SILVA FREIRE, A. P., ILHA, A. COLAÇO, M. J. (eds), *Turbulência*, v. 5, tomo 1, capítulo 2, Rio de Janeiro, ABCM, 2006.
- [16] LOUREIRO, J. B. R., NETO, J. L. S., “Princípios de anemometria térmica”. In: SILVA FREIRE, A. P., ILHA, A. COLAÇO, M. J. (eds), *Turbulência*, v. 5, tomo 1, capítulo 2, Rio de Janeiro, ABCM, 2006.
- [17] Disponível em:<<http://web.mit.edu/16.unified/www/SPRING/fluids/Spring2008/Lecture Notes/f06.pdf>>. Acesso em 20 de julho de 2016.
- [18] SCHLICHTING, H., GERSTEN, K., 2000, *Boundary Layer Theory*, 8 ed., New York, USA, Springer-Verlag.
- [19] SILVA FREIRE, A. P. Teoria de camada limite. 1990. 123 f. Notas de aula. Online.
- [20] FIELDING, S. M. Laminar boundary layer theory. 2005. Lecture Notes. Online.
- [21] LIENHARD, J. H., *Synopsis of lift, drag and vortex frequency data for rigid circular cylinders*. In: Research Division Bulletin 300, Washington State University, College of Engineering, 1966.
- [22] SUMER, B. M., FREDSOE, J., 2006, *Hydrodynamics Around Cylindrical Structures*. 1 ed., Singapore, World Scientific Publishing.
- [23] SANDRI, A. D., *Quantificação de incertezas em vibrações induzidas por vórtices*. *Dissertação de Mestrado*, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2010.

- [24] MEIROVITCH, L., 2001, *Fundamentals of vibrations*. 1 ed. USA, McGraw-Hill.
- [25] BISHOP, R. E. D., HASSAN, A. Y., "The lift and drag forces on a circular cylinder oscillating in a flowing fluid". *Proceedings of the Royal Society of London*, series A, 277:51-75, 1964.
- [26] VANDIVER, J. K., "Dimensionless parameters important to the prediction of vortex-induced vibration of long, flexible cylinders in ocean currents", *Journal of Fluids and Structures*, v. 7, pp. 423-455, 1993.
- [27] VANDIVER, J. K., "Drag coefficients of long-flexible cylinders", *Paper OTC 4490, Offshore Technology Conference*, Houston, Texas, May 1983.
- [28] SKOP, R. A., GRIFFIN, O. M., RAMBERG, S. E., "Strumming predictions for the SEACON II experimental mooring", *Paper OTC 2491, Offshore Technology Conference*, Houston, Texas, May 1977.
- [29] SARPKEYA, T., "Fluid forces on oscillating cylinders", *Journal of the Waterway Port, Coastal and Ocean Division*, v. 104, pp. 275-290.
- [30] KHALAK, A., WILLIAMSON, C. H. K., "Motions, forces, and mode transitions in vortex-induced vibrations at low mass-damping", *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, pp. 813-851, 1999.
- [31] GUSTAFSSON, A., *Analysis of Vortex-Induced Vibrations of Risers*, M.Sc. Dissertation, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 2012.
- [32] WILLIAMSON, C. H. K., ROSHKO, A., "Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder", *Journal of Fluids and Structures*, v. 2, pp. 355-381, 1988.
- [33] WIERCIGROCH, M., SRINIL, N, O'BRIEN, P., "Reduced-order modelling of vortex-induced vibration of catenary riser", *Ocean Engineering*, v. 36, p. 1404-1414, 2009.
- [34] PAN, Z. Y., CUI, W. C., MIAO, Q. M., "Numerical simulation of vortex-induced vibration of circular cylinder at low mass-damping using RANS code", *Journal of Fluids and Structures*, v. 23, pp. 23-37, 2007.
- [35] PARKINSON, G., "Phenomena and modelling of flow-induced vibrations of bluff bodies", *Progress in Aerospace Sciences*, v. 26, pp. 169-224, 1989.

- [36] SKOP, R., BALASUBRAMANIAN, S., "A new twist on and old model for vortex-induced vibrations", *Journal of Fluids and Structures*, v. 11, pp. 395-412, 1997.
- [37] FARSHIDIANFAR, A., ZANGANEH, H., "A modified Wake oscillator model for vortex-induced vibration of circular cylinders for a wide range of mass-damping ratio", *Journal of Fluids and Structures*, v. 26, pp. 430-441, 2010.
- [38] BIRKOFF, G., ZARANTANELLO, E. H., "Jets, Wakes and Cavities". Academic Press, New York, 1957.
- [39] SMITH, R. C., 2014, *Uncertainty Quantification: Theory, implementation, and applications*. 1 ed. USA, SIAM.
- [40] WAN-HAI, X., YING-XIANG, W., JIAN-XING, Y., "A new wake oscillator model for predicting vortex induced vibration of a circular cylinder", *Journal of Hydrodynamics*, v. 22, pp. 381-386, 2010.
- [41] BAARHOLM, G. S., LARSEN, C. M., LIE, H., "On fatigue damage accumulation from in-line and cross-flow vortex-induced vibrations on risers", *Journal of Fluids and Structures*, v. 22, pp. 109-127, 2006.
- [42] BAI, X. QIN, W., "Using vortex strength wake oscillator in modelling of vortex induced vibrations in two degrees of freedom", *European Journal of Mechanics B/Fluids*, v. 48, pp. 165-173, 2014.
- [43] JAUVTIS, N., WILLIAMSON, C. H. K., "The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping", *Journal of Fluid Mechanics*, v. 509, pp. 23-62, 2004.
- [44] POSTNIKOV, A., PAVLOVSKAIA, E., WIERCIGROCH, M., "2DOF CFD calibrated wake oscillator model to investigate vortex-induced vibrations", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.05.019>.
- [45] THORSEN, M. J., SAEVIK, S., LARSEN, C. M., "Time domain simulation of vortex-induced vibrations in stationary and oscillating flows", *Journal of Fluids and Structures*, v. 61, pp. 1-19, 2016.

- [46] MENG, S., ZHANG, X., CHE, C., *et al.*, "Cross-flow vortex-induced vibration of a flexible riser transporting an internal flow from subcritical to supercritical", *Ocean Engineering*, v. 139, pp. 74-84, 2017.
- [47] HE, F., DAI, H., HUANG, Z., *et al.*, "Nonlinear dynamics of a fluid-conveying pipe under the combined action of cross-flow and top-end excitations", *Applied Ocean Research*, v. 62, pp. 199-209, 2017.
- [48] VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W., 2007, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, 2 ed., England, Pearson Education Limited.
- [49] GUILMINEAU, E., QUEUTEY, P., "Numerical simulation of vortex-induced vibration of a circular cylinder with low mass-damping in a turbulent flow", *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, pp. 449-466, 2004.
- [50] TUTAR, M., HOLDO, A. E., "Large eddy simulation of a smooth cylinder oscillating normal to a uniform flow", *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 122, pp. 694-702, 2000.
- [51] AL-JAMAL, H., DALTON, C., "Vortex-induced vibrations using large eddy simulation at a moderate Reynolds number", *Journal of Fluids and Structures*, v. 19, pp. 73-92, 2004.
- [52] LUCOR, D., KARNIADAKIS, G. E., "Predictability and uncertainty in flow-structure interactions", *European Journal of Mechanics B/Fluids*, v. 23, pp. 41-49, 2004.
- [53] RODRIGUES, A. B., 2016, Modelagem computacional de mecanismos de falha de poços termométricos. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [54] VIOLETTE, R., DE LANGRE, E., SZYDLOWSKI, J., "Computation of vortex-induced vibrations of long structures using a wake oscillator model: comparison with DNS and experiments", *Computers and Structures*, v. 85, pp. 1134-1141, 2007.
- [55] ELDRED, M. S., LACAZE, G. M. L., NAJM, H. N., *et al.*, "Global Sensitivity Analysis and Quantification of Model Error for Large Eddy Simulation in Scramjet Design", *19th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference*, 1089, Grapevine, Texas, USA, January 2017.

- [56] MORIO, J., “Global and local sensitivity analysis methods for a physical system”, *European Journal of Physics*, v. 32, n. 6, pp. 1577-1583, 2011.
- [57] ALAM, F. M., MCNAUGHT, K. R., “Using Morris' randomized OAT design as a factor screening method for developing simulation metamodels”, *Proceedings of the 2004 Winter Simulation Conference*, Washington, D.C., USA, December 2004.
- [58] KING, D. M., PERERA, B. J. C., “Morris method of sensitivity analysis applied to assess the importance of input variables on urban water supply yield - A case study”, *Journal of Hydrology*, v. 47, pp. 17-32, 2013.
- [59] PUJOL, G., “Simplex-based screening designs for estimating metamodels”, *Reliability Engineering and Systems Safety*, v. 94, pp. 1156-1160, 2009.
- [60] MONARI, F., *Sensitivity Analysis and Bayesian Calibration of Building Energy Models*. Ph.D. thesis, University of Strathclyde, Glasgow, United Kingdom, 2016.
- [61] SALTELLI, A., TARANTOLA, S., CAMPOLONGO, F., *et al.*, 2004, *Sensitivity Analysis in Practice*, 1 ed., Chichester, England, John Wiley & Sons Ltd.
- [62] DUONG, P. L. T., MINH, L. Q., PHAM, T. N., *et al.*, "Uncertainty quantification and global sensitivity analysis of complex chemical processes with a large number of input parameters using compressive polynomial chaos", *Chemical Engineering Research and Design*, v. 115, pp. 204-213, 2016.
- [63] SALTELLI, A., TARANTOLA, S., CHAN, P., “A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output”, *Technometrics*, v. 41, pp. 39-56, 1999.
- [64] SALTELLI, A., ANNONI, P., AZZINI, I., *et al.*, “Variance based sensitivity analysis of model output. Design and estimator for the total sensitivity index”, *Computer Physics Communications*, v. 181, pp. 259-270, 2010.
- [65] OAKLEY, J. E., O'HAGAN, A., “Probabilistic sensitivity analysis of complex models: a Bayesian approach”, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, v. 66, Part 3, pp. 751-769, 2004.
- [66] HORNBERGER, G. M., SPEAR, R. C., “Eutrophication in peel inlet-I. The problem-defining behavior and a mathematical model for the phosphorus scenario”, *Water Research*, v. 14, pp. 29-42, 1980.

- [67] SPEAR, R. C., HORNBERGER, G. M., "Eutrophication in peel inlet-II. Identification of critical uncertainties via generalized sensitivity analysis", *Water Research*, v. 14, pp. 43-49, 1980.
- [68] RATTO, M., TARANTOLA, S., SALTELLI, A., "Sensitivity analysis in model calibration: GSA-GLUE approach", *Computers Physics Communications*, v. 136, pp. 212-224, 2001.
- [69] OSBORNE, C., "Statistical Calibration: A Review", *International Statistical Review*, v. 59, n. 3, pp. 309-336, 1991.
- [70] JANSEN, M., HAGENAARS, T., "Calibration in a Bayesian Modelling Framework". In: BOEKEL, M., STEIN, A. BRUGGEN, A. (eds), *Bayesian Statistics and Quality Modelling in the Agro-Food Production Chain*, v. 3, capítulo 4, Wageningen, Wageningen UR Frontis Series, 2004.
- [71] EISENHART, C., "The interpretation of certain regression methods and their use in biological and industrial research", In: *Annals of Mathematical Statistics*, v. 10, pp. 162-186, 1939.
- [72] BEVEN, K. J., BINLEY, A. M., "The future of distributed models: Model calibration and uncertainty prediction", *Hydrological Processes*, v. 6, pp. 279-298, 1992.
- [73] BEVEN, K. J., 2001, *Rainfall-Runoff Modelling: The Primer*, 1 ed., Chichester, England, John Wiley & Sons Ltd.
- [74] ROMANOWICZ, R., BEVEN, K. J., "Dynamic real-time prediction of flood inundation probabilities", *Hydrological Sciences Journal*, v. 43, pp. 181-196, 1998.
- [75] BEVEN, K. J., FREER, J., HANKIN, B., *et al.*, "The use of generalised likelihood measures for uncertainty estimation in high order models of environmental systems", In: FITZGERALD, W. J., SMITH, R. L., WALDEN, A. T., *et al.* (eds.), 2000, *Nonlinear and Nonstationary Signal Processing*, Cambridge University Press.
- [76] ROMANOWICZ, R., HIGSON, H., TEASDALE, I. "Bayesian uncertainty estimation methodology applied to air pollution modelling", *Environmetrics*, v.11, pp. 351-371, 2000.

- [77] NETO, A. A. M., *Ponderação bayesiana de modelos utilizando diferentes séries de precipitação aplicada à simulação chuva-vazão na Bacia do Ribeirão da Onça*. Dissertação de M.Sc., EESC USP, São Carlos, Brasil, 2013.
- [78] ROMANOWICZ, R., BEVEN, K. J., TAWN, J., "Evaluation of Predictive Uncertainty in Nonlinear Hydrological Models Using a Bayesian Approach", In: BARNETT, V., TURKMAN, K. F. (eds.), *Statistics for the Environment 2, Water Related Issues*, pp. 297-315, New York, USA, Wiley, 1994.
- [79] KENNEDY, M. C., O'HAGAN, A., "Bayesian calibration of computer models", *Journal of the Royal Statistical Society, Series (B)*, v. 63, n. 3, pp. 425-464, 2001.
- [80] LING, Y., MULLINS, J., MAHADEVAN, S., "Selection of model discrepancy priors in Bayesian calibration", *Journal of Computational Physics*, v. 276, pp. 665-680, 2014.
- [81] MCFARLAND, J., MAHADEVAN, S., "Multivariate significance testing and model calibration under uncertainty", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, pp. 2467-2479, 2008.
- [82] SANKARARAMAN, S., LING, Y., SHANTZ, C. et al., "Inference of equivalent initial flaw size under multiple sources of uncertainty", *International Journal of Fatigue*, v. 33(2), pp. 75-89, 2011.
- [83] CHAKRABARTI, S. K., 1987, *Hydrodynamics of Offshore Structures*. 1 ed., Boston, USA, Wit Press (Computational Mechanics Publication).
- [84] SKOP, R. A., GRIFFIN, O. M., "A model for the vortex-excited resonant response of bluff cylinders", *Journal of Sound and Vibration*, v. 27, n. 2, pp. 225-233, 1973.
- [85] CURRIE, I. G., TURNBULL, D. H., "Streamwise oscillations of cylinders near the critical Reynolds number", *Journal of Fluids and Structures*, n. 1, pp. 185-196, 1987.
- [86] GE, F., LONG, X., LEI, W., et al., "Flow-induced vibrations of long circular cylinders modeled by coupled nonlinear oscillators", *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, v. 52, n. 7, pp. 1086-1093, 2009.
- [87] LI, X., HAIYAN, G., MENG, F., "Fatigue life assessment of top tensioned risers under vortex-induced vibrations", *Journal of Ocean University of China*, v. 9, pp. 43-47, 2010.

- [88] Disponível em: <<https://www.orcina.com/SoftwareProducts/OrcaFlex/Documentation/Help/Content/html/WakeOscillatorModels.htm>>. Acesso em 17 de maio de 2017.
- [89] KING, R., "A review of vortex shedding research and its application", *Ocean Engineering*, v. 4, pp. 141-171, 1977.
- [90] BLEVINS, R. D., 1990, *Flow-induced vibration*. 1 ed., Michigan, USA, Van Nostrand Reinhold.
- [91] PANTAZOPOULOS, M. S., "Vortex-induced vibration parameters: critical review", In: *1994 OMAE - Volume I, Offshore Technology ASME 1994*, December 1994.
- [92] GOPALKRISHNAN, R., *Vortex-induced Forces on Oscillating Bluff Cylinders*. D.Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, USA, 1992.
- [93] Disponível em: <<https://www.orcina.com/SoftwareProducts/OrcaFlex/Documentation/Help/Content/html/TimeDomainModels.htm#InlineDragAmplificationFactor>>. Acesso em 24 de maio de 2017.
- [94] DORMAND, J. R., PRINCE, P. J., "A family of embedded Runge-Kutta formulae", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 1, pp. 19-26, 1980.
- [95] SHAMPINE, L. F., REICHEL, M. W., "The MATLAB ODE Suite", *SIAM Journal of Scientific Computing, Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1997.
- [96] CANNAVÓ, F., "Sensitivity analysis for volcanic source modeling quality assessment and model selection", *Computers & Geosciences*, v. 44, pp. 52-59, 2012.
- [97] SOBOL, I. M., "Quasi-Monte Carlo methods", *Progress in Nuclear Energy*, v. 24 (1-3), pp. 55-61, 1990.
- [98] STELSON, T. E., "Virtual mass and acceleration in fluids", *ASCE Paper No. 2870, Transactions*, v. 81, 1957.
- [99] HASHEMINEJAD, S. M., RABIEE, A. H., JARRAHI, M., *et al.*, "Active vortex-induced vibration control of a circular cylinder at low Reynolds numbers using an adaptive fuzzy sliding mode controller", *Journal of Fluids and Structures*, v. 50, pp. 49-65, 2014.

[100] SOBOL, I. M., “Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models”, *Mathematical Modeling and Computational Experiment (English Translation)*, v. 1, pp. 407-414, 1993.

APÊNDICE A – ADIMENSIONALIZAÇÃO DO MODELO DE VIV

O modelo dimensional foi proposto como apresentado a seguir:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y} + \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot (U - \dot{x}) \quad (\text{A.1})$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = \frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot (U - \dot{x}) - \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{(U - \dot{x})^2 + \dot{y}^2} \cdot \dot{y} \quad (\text{A.2})$$

$$\ddot{w} + 2\varepsilon_x \Omega_f (w^2 - 1)\dot{w} + 4\Omega_f^2 w = \left(\frac{A_x}{D}\right) \ddot{x} \quad (\text{A.3})$$

$$\ddot{q} + \varepsilon_y \Omega_f (q^2 - 1)\dot{q} + \Omega_f^2 q = \left(\frac{A_y}{D}\right) \ddot{y} \quad (\text{A.4})$$

Inicialmente faz-se a divisão das equações de movimento do cilindro (A.1 e A.2) pela massa m e, neste momento, chamamos os termos de forçamento dessas equações simplesmente for F_x e F_y , logo:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2\tilde{x} = F_x/m \quad (\text{A.5})$$

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2\tilde{y} = F_y/m \quad (\text{A.6})$$

Onde: $\zeta = c/(2\omega_n m)$; $\omega_n = \sqrt{k/m}$.

Aplicando uma mudança de coordenadas adimensionais do tipo: $\tau = \omega_n t$, $\tilde{x} = x/D$, $\tilde{y} = y/D$ e derivando temos:

$$\omega_n^2 D \tilde{x}'' + 2\zeta \omega_n^2 D \tilde{x}' + \omega_n^2 D \tilde{x} = F_x/m \quad (\text{A.7})$$

$$\omega_n^2 D \tilde{y}'' + 2\zeta \omega_n^2 D \tilde{y}' + \omega_n^2 D \tilde{y} = F_y/m \quad (\text{A.8})$$

Onde o sobrescrito linha significa derivada tomada em relação ao tempo adimensional τ .

Ao dividir por $\omega_n^2 D$ temos:

$$\tilde{x}'' + 2\zeta \tilde{x}' + \tilde{x} = F_x/(Dm\omega_n^2) \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{y}'' + 2\zeta\tilde{y}' + \tilde{y} = F_y/(Dm\omega_n^2) \quad (\text{A.10})$$

Ao aplicar a definição dos termos de forçamento hidrodinâmico em x e y vem que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + 2\zeta\tilde{x}' + \tilde{x} = & \frac{1}{Dm\omega_n^2} \left(\frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{(U - D\omega_n\tilde{x}')^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot D\omega_n\tilde{y}' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{(U - D\omega_n\tilde{x}')^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot (U - D\omega_n\tilde{x}') \right) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' + 2\zeta\tilde{y}' + \tilde{y} = & \frac{1}{Dm\omega_n^2} \left(\frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{(U - D\omega_n\tilde{x}')^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot (U - D\omega_n\tilde{x}') \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{(U - D\omega_n\tilde{x}')^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot D\omega_n\tilde{y}' \right) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Introduzindo a velocidade normalizada ou reduzida adimensional, $U_{red} = 2\pi U/(\omega_n D)$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + 2\zeta\tilde{x}' + \tilde{x} = & \frac{1}{Dm\omega_n^2} \left(\frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{\left(\frac{U_{red}D\omega_n}{2\pi} - D\omega_n\tilde{x}'\right)^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot D\omega_n\tilde{y}' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{\left(\frac{U_{red}D\omega_n}{2\pi} - D\omega_n\tilde{x}'\right)^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot \left(\frac{U_{red}D\omega_n}{2\pi} \right. \right. \\ & \left. \left. - D\omega_n\tilde{x}'\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} & \tilde{y}'' + 2\zeta\tilde{y}' + \tilde{y} \\ = & \frac{1}{Dm\omega_n^2} \left(\frac{1}{2}\rho_f C_L D \sqrt{\left(\frac{U_{red}D\omega_n}{2\pi} - D\omega_n\tilde{x}'\right)^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot \left(\frac{U_{red}D\omega_n}{2\pi} - D\omega_n\tilde{x}'\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_f C_D D \sqrt{\left(\frac{U_{red}D\omega_n}{2\pi} - D\omega_n\tilde{x}'\right)^2 + D\omega_n\tilde{y}'^2} \cdot D\omega_n\tilde{y}' \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

O próximo passo é colocar D e ω_n em evidência, assim temos:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + 2\zeta\tilde{x}' + \tilde{x} = & \frac{D^3\omega_n}{Dm\omega_n^2} \left(\frac{1}{2}\rho_f C_L \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}'\right)^2 + \tilde{y}'^2} \cdot \tilde{y}' \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_f C_D \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}'\right)^2 + \tilde{y}'^2} \cdot \left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}'\right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' + 2\zeta\tilde{y}' + \tilde{y} = & \frac{D^3\omega_n^2}{Dm\omega_n^2} \left(\frac{1}{2}\rho_f C_L \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}\right)^2 + \tilde{y}^2} \cdot \left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}'\right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\rho_f C_D \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}\right)^2 + \tilde{y}^2} \cdot \tilde{y}' \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Definindo uma série de novos parâmetros adimensionais e reorganizando as equações vem que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + 2\zeta\tilde{x}' + \tilde{x} = & 8\pi^2 St^2 \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}\right)^2 + \tilde{y}^2} \left(\frac{1}{2} M_L q \tilde{y}' \right. \\ & \left. + \left(M_D + \frac{1}{2} M_D^{fl} w \right) \left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}' \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' + 2\zeta\tilde{y}' + \tilde{y} = & 8\pi^2 St^2 \sqrt{\left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}\right)^2 + \tilde{y}^2} \left(\frac{1}{2} M_L q \left(\frac{U_{red}}{2\pi} - \tilde{x}' \right) - \right. \\ & \left. \left(M_D + \frac{1}{2} M_D^{fl} w \right) \cdot \tilde{y}' \right) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Onde: } M_L = \frac{C_{L0}}{16\pi^2 St^2 \mu}, \quad M_D = \frac{C_{D0}}{16\pi^2 St^2 \mu}, \quad M_D^{fl} = \frac{C_{D0}^{fl}}{16\pi^2 St^2 \mu}, \quad \mu = m/\rho_f D^2, \quad q = \frac{2C_L}{C_{L0}},$$

$$w = \frac{2C_D^{fl}}{C_{D0}^{fl}} \text{ e } C_D = C_{D0} + C_{D0}^{fl}$$

O destaque agora é dado para as equações de representação da interação do fluido (A.3 e (A.4).

Ao aplicar a mesma mudança de variáveis adimensionais, $\tau = \omega_n t$, $\tilde{x} = x/D$ e $\tilde{y} = y/D$ ficamos com:

$$\omega_n^2 w'' + 2\varepsilon_x \Omega_f (w^2 - 1) \omega_n w' + 4\Omega_f^2 w = \left(\frac{A_x}{D} \right) D \tilde{x}'' \omega_n^2 \quad (\text{A.19})$$

$$\omega_n^2 q'' + \varepsilon_y \Omega_f (q^2 - 1) \omega_n q' + \Omega_f^2 q = \left(\frac{A_y}{D} \right) D \omega_n^2 \tilde{y}'' \quad (\text{A.20})$$

Finalmente, ao dividir as equações A.15 e A.16 por ω_n^2 chegamos a:

$$w'' + 2\varepsilon_x \Omega (w^2 - 1) w' + 4\Omega^2 w = A_x \tilde{x}'' \quad (\text{A.21})$$

$$q'' + \varepsilon_y \Omega (q^2 - 1) q' + \Omega^2 q = A_y \tilde{y}'' \quad (\text{A.22})$$

APÊNDICE B – ANÁLISE DE SENSIBILIDADE GLOBAL POR DECOMPOSIÇÃO DE VARIÂNCIAS E ESTIMATIVA DOS ÍNDICES DE SENSIBILIDADE PELO MÉTODO DE MONTE CARLO

A metodologia para a análise de sensibilidade global do modelo por decomposição de variâncias utilizada no atual estudo é descrita a seguir:

Sendo um modelo qualquer do tipo:

$$y = f(X)$$

onde $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é um conjunto n-dimensional de entrada de variáveis aleatórias independentes, a função ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) $f(X)$ representa qualquer modelo computacional, no caso o modelo fenomenológico de VIV e a saída y é uma determinada variável de interesse.

O valor esperado ou expectância da saída $E\{y\}$ é definido como [95]:

$$E\{y\} = \int_{l^n} f(X) dX \quad (B.1)$$

Na qual, $f \subseteq l^n$, l^n é o hipercubo unitário n-dimensional, pois, para realizar a ASG é necessário assumir ou aplicar uma mudança de variáveis para garantir que $f(X)$ esteja definida no intervalo $[0,1]^n$.

Com isso $f(X)$ pode ser decomposta em funções elementares da forma [56]:

$$y = f(X) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) \quad (B.2)$$

onde f é integrável e f_0 é uma constante. SOBOL [97, 100] provou que a decomposição acima (B.2) é única e é conhecida como ANOVA se satisfaz a condição:

$$\forall k = 1 \dots s, \quad \int_0^1 f_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{ik} = 0$$

Para todos os componentes da soma na equação (B.2) e tem-se que para parâmetros de entrada com distribuição uniforme:

$$f_0 = \int_0^1 f(X) dX \quad (B.3)$$

A decomposição ANOVA tem a importante propriedade de ortogonalidade, ou seja, para dois grupos de variáveis de entrada $\alpha \neq \beta$, seu produto interno é:

$$\int_0^1 f_\alpha f_\beta dx = 0$$

A decomposição ANOVA pode ser reescrita ao aplicar o operador variância à equação (B.2) [8]:

$$Var(Y) = V = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1\dots n}$$

onde V_{ar} é o operador variância e [56]:

$$V_i = Var(E(Y|x_i))$$

$$V_{ij} = Var(E(Y|x_i, x_j)) - V_i - V_j$$

$$V_{ijk} = Var(E(Y|x_i, x_j, x_k)) - V_i - V_j - V_k - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk}$$

nas quais, E é a esperança matemática e os índices de sensibilidade de Sobol são definidos a seguir:

O índice primário ou de primeira ordem estima a sensibilidade no modelo devido unicamente ao parâmetro de entrada i :

$$S_i = \frac{V_i}{V} = \frac{Var(E(Y|x_i))}{Var(Y)}$$

Os índices conjuntos ou de mais alta ordem dão informações da contribuição da interação dos termos i e j na sensibilidade:

$$S_{ij} = \frac{V_{ij}}{V} = \frac{Var(E(Y|x_{ij}))}{Var(Y)} - S_i - S_j$$

Os índices de efeitos totais medem a contribuição de todos os termos que envolvem o parâmetro i em termos da variância da saída do modelo:

$$S_{ti} = \sum S_{i,\dots,i} = \frac{E(Var(Y|x_i))}{Var(Y)}$$

A estimativa dos índices de sensibilidade no caso é dada através do uso do método de Monte Carlo, no qual as integrais multidimensionais mencionadas são calculadas computacionalmente através da interpretação probabilística de uma integral [95].

SALTELLI *et al.* [8], ELDRED *et al.* [55], MORIO [56] e CANNAVÓ [95] detalham a metodologia usada na estimativa dos índices por Monte Carlo.

Primeiramente, considera-se uma variável aleatória distribuída uniformemente em l^n :

$$\int_0^1 f(X)dX = E[f(X)] \quad (B.4)$$

Uma aproximação para a expectância matemática da equação (B.4) é:

$$\hat{E}[f(X)] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \quad (B.5)$$

onde x_i é uma sequência de tamanho N de pontos aleatórios em l^n . A aproximação, equação (B.5) converge para equação (B.4) com probabilidade 1 quando $N \rightarrow \infty$ [95].

O método de Monte Carlo é usado para construir amostras de realizações de determinada variável de entrada utilizando distribuições de probabilidades estabelecidas *a priori*. Sejam 2 amostras de dimensão N de realizações de X [56]:

$$X_k^i = (x_{k=1}^{i=1}, \dots, x_k^i); k = 1, \dots, N \text{ e } i = 1, 2$$

A partir dessas duas amostras de X e seguindo a notação de acento circunflexo “^” para denotar uma aproximação, o primeiro índice de Sobol para X_i é definido como:

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}} = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$$

onde:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^1, \dots, x_{kn}^1)$$

$$\hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(x_{k1}^1, \dots, x_{kn}^1) - \hat{f}_0^2$$

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^1, \dots, x_{k(i-1)}^1, x_{ki}^1, x_{k(i+1)}^1, \dots, x_{kn}^1) \cdot f(x_{k1}^2, \dots, x_{k(i-1)}^2, x_{ki}^2, x_{k(i+1)}^2, x_{kn}^2)$$

Os índices de segunda ordem são estimados a seguir:

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\hat{U}_{ij} - \hat{f}_0^2 - \hat{V}_i - \hat{V}_j}{\hat{V}}$$

Na qual n é a dimensão de parâmetros de entrada e:

$$\hat{U}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^1, \dots, x_{k(i-1)}^1, x_{ki}^1, x_{k(i+1)}^1, \dots, x_{k(j-1)}^1, x_{kj}^1, x_{k(j+1)}^1, \dots, x_{kn}^1) \\ f(x_{k1}^2, \dots, x_{k(i-1)}^2, x_{ki}^1, x_{k(i+1)}^2, \dots, x_{k(j-1)}^2, x_{kj}^1, x_{k(j+1)}^2, \dots, x_{kn}^2)$$

Os índices de Sobol de mais alta ordem são obtidos analogamente. Por fim, os índices de sensibilidade totais são calculados da seguinte maneira:

$$\hat{S}_{ti} = 1 - \frac{\tilde{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}}$$

Sendo que:

$$\tilde{U}_i \\ = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x_{k1}^1, \dots, x_{k(i-1)}^1, x_{ki}^1, x_{k(i+1)}^1, \dots, x_{kn}^1) \cdot f(x_{k1}^1, \dots, x_{k(i-1)}^1, x_{ki}^2, x_{k(i+1)}^1, \dots, x_{kn}^1)$$