



Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

**ANÁLISE DE PROBLEMAS CONJUGADOS EM MICROSSISTEMAS TÉRMICOS
COM MÚLTIPLAS CORRENTES E GEOMETRIAS COMPLEXAS
VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL**

José Luiz Zanon Zotin

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Renato Machado Cotta
Diego Campos Knupp

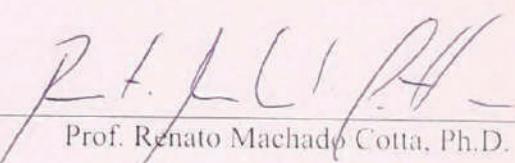
Rio de Janeiro
Abril de 2017

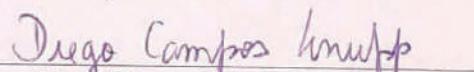
ANÁLISE DE PROBLEMAS CONJUGADOS EM MICROSSISTEMAS TÉRMICOS
COM MÚLTIPLAS CORRENTES E GEOMETRIAS COMPLEXAS
VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL

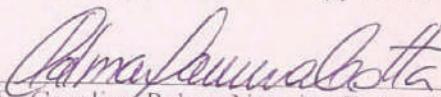
José Luiz Zanon Zotin

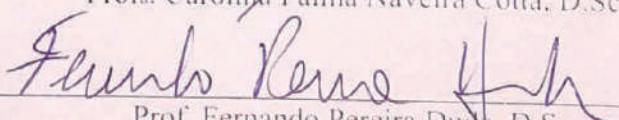
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

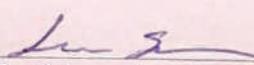
Examinada por:

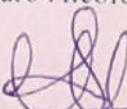

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.


Prof. Diego Campos Knupp
Prof. Diego Campos Knupp, D.Sc.


Prof. Carolina Palma Naveira Cotta
Prof. Carolina Palma Naveira Cotta, D.Sc.


Prof. Fernando Pereira Duda
Prof. Fernando Pereira Duda, D.Sc.


Prof. Leandro Alcosforado Sphaier
Prof. Leandro Alcosforado Sphaier, Ph.D.


Prof. Jesus Salvador Perez Guerrero
Prof. Jesus Salvador Perez Guerrero, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2017

Zotin, José Luiz Zanon

Análise de problemas conjugados em microssistemas térmicos com múltiplas correntes e geometrias complexas via transformação integral / José Luiz Zanon Zotin. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XXX, 245 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Renato Machado Cotta

Diego Campos Knupp

Tese (doutorado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 227-245.

1. Problemas Conjugados. 2. Microcanais. 3. Microtrocadores de calor. 4. Técnica da Transformada Integral Generalizada. 5. Domínio Único. I. Cotta, Renato Machado *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Tem confiança no Senhor de todo o teu Coração,
e não te estribas na tua prudência.
Pensa n'Ele em todos os teus caminho
e ele mesmo dirigirá os teus passos.*

(Prov. 3:5-6)

*Ainda que eu ande pelo vale da sombra da morte,
não temerei mal algum, porque Tu estás comigo,
o teu bastão e o teu cajado me consolam.*

(Salmo 23:4)

*A Deus e a minha família que sempre estiveram ao
meu lado durante esta empreitada.*

AGRADECIMENTOS

Presto meus sinceros agradecimentos ao meu orientador, professor Renato Machado Cotta, pela oportunidade ímpar que me foi oferecida de me aprofundar ainda mais no estudo teórico de transferência de calor, sempre me impondo desafios a serem vencidos. Sem dúvida, uma experiência inesquecível, cujo aprendizado carregarei por toda a minha vida.

Sou muito grato também ao meu co-orientador Diego Campos Knupp, o qual sempre se mostrou disponível para discutir de bom grado os problemas deste trabalho e que teve uma grande importância na finalização do mesmo.

Agradeço aos diretores da Divisão de Metrologia em Dinâmica de Fluidos do Inmetro, Valter Y. Aibe e Maria Helena, pelo apoio que me deram ao longo de todo o meu mestrado e também no começo do doutorado.

Agradeço também aos meus amigos de laboratório Ivana Cerqueira, Ivana Fernandes de Souza, José Martim e Kleber Lisboa pelos animados momentos de descontração que vivenciamos ao longo desse tempo. Ao Kleber também agradeço os debates técnicos que tivemos e que foram essenciais para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ainda à instituição CEFET por ter permitido a continuação do meu doutorado após passar no concurso para professor. Também agradeço ao professor Marcos Curi, da mesma instituição, pelas risadas e discussões técnicas que tivemos durante todos esses anos.

Agradeço a toda minha família, a quem devo tudo que eu sou e conquistei na minha vida. A meu pai, por toda sua sabedoria e experiência de vida, cujos conselhos são a base dos meus princípios e me indicam os melhores caminhos a serem traçados. A minha mãe, por toda sua demonstração de amor e Fé, que sempre esteve do meu lado nos momentos difíceis, me apoiando, guiando e jamais me deixando tropeçar. A minhas irmãs, que passaram por duras provações no último ano, mas que sem dúvida merecem tudo o que há de bom nesse mundo. Eu as amo de coração. A eles, demonstro minha admiração e meu

mais profundo e sincero amor, desejando-lhes toda a felicidade que possa existir neste mundo.

A minha noiva Sabrinne Monteiro de Macedo agradeço todas as demonstrações de amor, carinho e afeto ao longo de todos esses anos. Mas principalmente agradeço por toda a paciência e compreensão que teve durante a realização deste trabalho. Te amo do fundo meu coração.

Por final, agradeço a Deus por guiar meus caminhos e sempre me dar forças para enfrentar as provações que este mundo nos oferece.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

**ANÁLISE DE PROBLEMAS CONJUGADOS EM MICROSSISTEMAS TÉRMICOS
COM MÚLTIPLAS CORRENTES E GEOMETRIAS COMPLEXAS
VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL**

José Luiz Zanon Zotin

Abril/2017

Orientadores: Renato Machado Cotta
Diego Campos Knupp

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho apresenta-se uma solução híbrida numérico-analítica, através da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) empregando-se uma reformulação em domínio único com esquema de transformação total, para problemas de transferência de calor conjugada em microssistemas térmicos com escoamentos de fluidos imiscíveis em contato direto, múltiplas correntes e microcanais de configurações geométricas complexas. A GITT é empregada em combinação com uma estratégia de reformulação do problema em um único domínio, através de coeficientes com variação espacial introduzidos na equação da energia, que permitem unificar as formulações nas regiões solidas e fluidas. Alternativas de aceleração de convergência das expansões em autofunções são analisadas, incluindo o reordenamento dos termos na expansão baseada na diagonal da matriz de coeficientes do sistema transformado e a utilização de filtros recursivos na solução. Ambas mostraram um melhora significativa na convergência dos resultados, além de uma boa comparação com resultados numéricos obtidos através da plataforma comercial COMSOL.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements
for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THEORETICAL ANALYSIS OF HEAT TRANSFER IN MICROFLUIDIC DEVICES
WITH MULTIPLE CURRENTS AND TWO-DIMENSIONAL CONFIGURATIONS VIA
INTEGRAL TRANSFORMATION

José Luiz Zanon Zotin

April/2017

Advisors: Renato Machado Cotta
Diego Campos Knupp

Department: Mechanical Engineering

In this work a numerical-analytical hybrid solution is presented through the Generalized Integral Transformation Technique (GITT) using a single-domain reformulation with a total transformation scheme for problems of conjugated heat transfer in thermal micro-systems with flows of immiscible fluids in direct contact, multiple currents and microchannels of complex geometric configurations. The GITT is used in combination with a strategy to reformulate the problem in a single domain, through coefficients with spatial variation introduced in the energy equation, that allow to unify the formulations in the solid and fluid regions. Convergence acceleration alternatives of the expansions in autofunctions are analyzed, including the rearrangement of the terms in the expansion based on the diagonal of the matrix of coefficients of the transformed system and the use of recursive filters in the solution. Both showed a significant improvement in the convergence of the results, besides a good comparison with numerical results obtained through the COMSOL commercial platform.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 MOTIVAÇÃO	1
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	10
2.1 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	10
2.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM MICROCANAIS.....	12
2.3 ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM DUTOS E MICROCANAIS	18
2.4 DIFUSÃO AXIAL DE CALOR EM MICROCANAIS	23
2.5 PROBLEMAS CONJUGADOS EM TRANSFERÊNCIA DE CALOR.....	30
2.6 GITT APLICADA À MICROESCALA	36
3 OBJETIVOS.....	40
4 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)	42
4.1 PROBLEMA CONVECTIVO-DIFUSIVO GERAL	42
4.2 PROBLEMA COM FORMULAÇÃO EM DOMÍNIO ÚNICO	49

4.3 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALOR VIA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA	53
---	----

5 PROBLEMA CONJUGADO COM ESCOAMENTO BIFÁSICO ESTRATIFICADO E CONDUÇÃO AXIAL58

5.1 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL TOTAL COM PROBLEMA DE AUTOVALOR NÃO-CLÁSSICO 67	
--	--

5.2 SOLUÇÃO VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL PARCIAL	72
--	----

5.3 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO	77
---------------------------------	----

5.4 RESULTADOS	77
----------------------	----

5.4.1 <i>Resultados para um único microcanal no interior do domínio.</i>	78
--	----

5.4.2 <i>Resultados para múltiplos microcanais no interior do domínio.</i>	92
--	----

6 PROBLEMA CONJUGADO COM CANAIS DE GEOMETRIA VARIÁVEL.....107

6.1 GEOMETRIAS	109
----------------------	-----

6.1.1 <i>Canal Sinuoso</i>	109
----------------------------------	-----

6.1.2 <i>Canal com Parede Corrugada</i>	114
---	-----

6.2 PROBLEMA CONVECTIVO-DIFUSIVO BIDIMENSIONAL	117
--	-----

6.3 FILTRO.....	120
-----------------	-----

6.4 SOLUÇÃO VIA PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES CONSTANTES	122
6.4.1 <i>Solução permanente</i>	123
6.4.2 <i>Solução Transiente</i>	131
6.4.3 <i>Reordenamento sequencial da Matriz F.</i>	136
6.5 SOLUÇÃO VIA PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES VARIÁVEIS.....	137
6.6 SOLUÇÃO VIA FILTRO RECURSIVO.....	143
6.6.1 <i>Solução Permanente</i>	143
6.6.2 <i>Solução Transiente</i>	152
6.7 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO	155
6.8 RESULTADOS	156
6.8.1 <i>Solução em regime Permanente para o Canal Sinuoso</i>	157
6.8.2 <i>Solução em Regime Transiente para o Canal Sinuoso</i>	174
6.8.3 <i>Solução em Regime Permanente para o Canal com parede Corrugada</i>	185
7 CONCLUSÕES E PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS.....	200
8 ANEXO A.....	204
8.1 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR NÃO-CLÁSSICO ..	204

8.2 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL PARCIAL	209
9 ANEXO B.....	212
10 ANEXO C.....	216
10.1 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES CONSTANTES	216
10.2 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES VARIÁVEIS 219	
10.3 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO VIA FILTRO RECURSIVO.....	222
11 BIBLIOGRAFIA.....	227

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Curva da Lei de Moore com o número de transistores dos principais microprocessadores desde 1971. Adaptado de Scherer (2015)	2
Figura 1.2: Comparativo entre a demanda de fluxo de calor a ser dissipado por um VLSI e o fluxo gerado por outros sistemas. Adaptado de Bar-Cohen (1987).....	4
Figura 1.3: Pilha de chips tridimensional com resfriamento por líquido intercamadas. Fonte: Tiwari et al. (2012).....	5
Figura 1.4: Micro-trocadores de calor comerciais que utilizam microcanais. a) Fonte: CoolerMaster (2016); b) Fonte: Thermaltake (2016).....	6
Figura 1.5: Detalhe de um microrreator e de seu sistema de controle. Fonte: Mechtilde et al. (2006).	8
Figura 2.1: Esquemático de um microtrocador de calor. Fonte: Yu e Xin (1994).	14
Figura 4.1: a) Configuração complexa multidimensional com NV sub-regiões; b) Configuração em domínio único com domínio original; c) Configuração em domínio único com domínio original englobado por um domínio regular; Fonte: Cotta et al. (2016)	51
Figura 5.1: Esquemático geral do domínio com o substrato sólido e um escoamento bifásico estratificado em seu interior.....	60
Figura 5.2: Perfil de velocidade adimensional $U(Y)$ considerado para o escoamento bifásico estratificado água-óleo de soja.....	64

Figura 5.3: Esquemático geral do domínio com substrato sólido e escoamento bifásico estratificado água-óleo de soja em múltiplos microcanais considerado para análise.	65
Figura 5.4: Perfil de velocidade adimensional $U(Y)$ considerado para o escoamento bifásico estratificado água-óleo de soja em múltiplos canais.....	65
Figura 5.5: Desvios relativos do 1° , 5° , 10° , 15° , 20° e 25° autovalores do problema de autovalor não-clássico em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{p,aux}$	80
Figura 5.6: Convergência da quinta autofunção do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$	81
Figura 5.7: Perfis de temperatura obtidos através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$	83
Figura 5.8: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,1$ em um domínio com apenas um canal.....	85
Figura 5.9: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,2$ em um domínio com apenas um canal.....	85
Figura 5.10: Desvios relativos do 1° , 5° , 10° , 15° , 20° e 25° autovalores da solução via transformação parcial em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{p,aux}$	87
Figura 5.11: Convergência da quinta autofunção da solução via transformada integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$	88
Figura 5.12: : Isotermas da solução do problema com um único canal no interior do domínio.....	92

Figura 5.13: Desvios relativos do 1°, 5°, 10°, 15°, 20° e 25° autovalores do problema de autovalor não-clássico para múltiplos canais em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{p,aux}$	95
Figura 5.14: Convergência da oitava autofunção do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$	96
Figura 5.15: Perfis de temperatura para múltiplos canais obtidos através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$	97
Figura 5.16: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,1$ em um domínio com múltiplos canais.	99
Figura 5.17: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,2$ em um domínio com múltiplos canais.	100
Figura 5.18: Desvios relativos do 1°, 5°, 10°, 15°, 20° e 25° autovalores da solução via transformação parcial para múltiplos canais em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{p,aux}$	101
Figura 5.19: Convergência da oitava autofunção da solução via transformada integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$	102
Figura 5.20: Isotermas da solução do problema com múltiplos canais no interior do domínio.....	106
Figura 6.1: Exemplo de dispositivo com microcanais ondulados. Fonte: Dominic et al. (2015).....	108
Figura 6.2: Esquemático geral do domínio com um canal sinuoso.	110
Figura 6.3: Esquemático da parametrização utilizada.	112

Figura 6.4: Campo do módulo do vetor velocidade no interior do canal sinuoso.	113
Figura 6.5: Campo da componente $U(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal sinuoso.	113
Figura 6.6: Campo da componente $V(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal sinuosos.	114
Figura 6.7: Esquemático geral do domínio com um canal de parede corrugada.	115
Figura 6.8: Campo da componente $U(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal corrugado considerando $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=6$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$	116
Figura 6.9: Campo da componente $V(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal corrugado considerando $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=6$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$	117
Figura 6.10: Isotermas da solução do problema com canal ferradura obtidas a partir da metodologia da Seção 5.4.	160
Figura 6.11: Isotermas da solução do problema com canal ferradura obtidas a partir da plataforma COMSOL.	161
Figura 6.12: Convergência da temperatura adimensional no ponto $(X;Y)=(0,5;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.4 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).	163
Figura 6.13: Convergência da temperatura adimensional no ponto $(X;Y)=(1;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.4 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).	164
Figura 6.14: Convergência da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ no ponto $(X;Y)=(0,5;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento clássico	

(linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).

..... 173

Figura 6.15: Convergência da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ no ponto $(X; Y) = (1; 0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada). ... 173

Figura 6.16: Campo de temperatura transiente para $\tau = 0,0025$ 175

Figura 6.17: Campo de temperatura transiente para $\tau = 0,0125$ 176

Figura 6.18: Campo de temperatura transiente para $\tau = 0,05$ 176

Figura 6.19: Campo de temperatura transiente para $\tau = 0,1$ 177

Figura 6.20: Campo de temperatura transiente para $\tau = 0,175$ 177

Figura 6.21: Campo de temperatura transiente para $\tau = 0,25$ 178

Figura 6.22: Campo de temperatura transiente para $\tau = 1$ 178

Figura 6.23: Campo de temperatura transiente para $\tau = 4$ 179

Figura 6.24: Geometria para um canal corrugado e substrato com $\alpha_c = 0,1$, $\lambda_c = 6$, $\varepsilon_c = \pi/2$ e $i_{tot} = 1$ 185

Figura 6.25: Convergência da temperatura adimensional no ponto $(X; Y) = (1; 0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento sequencial (linha cheia) e com reordenamento clássico (linha tracejada). 190

Figura 6.26: Convergência do potencial no ponto $(X;Y)=(15;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento sequencial (linha cheia) e com reordenamento clássico (linha tracejada).	191
Figura 6.27: Isotermas da solução do problema conjugado com um canal corrugado com 6 corrugações obtidas a partir da metodologia da Seção 6.6 com $Pe=0,25$	191
Figura 6.28: Comparaçao entre o resultado da metodologia da Seção 6.6 e os obtidos pelo COMSOL para $Y=0,4$, $Y=0,5$ e $Y=0,6$ com $Pe=0,25$	194
Figura 6.29: Comparaçao entre o resultado da metodologia da Seção 6.6 (linha azul) e os obtidos pelo COMSOL (linha tracejada) para $X=0,5$ com $Pe=0,25$	195
Figura 6.30: Campo de desvio relativo entre a solução via GITT e a solução do COMSOL dado em porcentagem para um canal com 6 corrugações com $Pe=0,25$	195
Figura 6.31: Geometria para um canal corrugado e substrato com $\alpha_c=0,1$, $\lambda_c=4$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$	196
Figura 6.32: Geometria para um canal corrugado com $\alpha_c=0,1$, $\lambda_c=2$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$	196
Figura 6.33: Isotermas da solução do problema com um canal corrugado com 4 corrugações obtidas a partir da metodologia da Seção 6.6 com $Pe=0,25$	197
Figura 6.34: Isotermas da solução do problema com um canal corrugado com 2 corrugações obtidas a partir da metodologia da Seção 6.6 com $Pe=0,25$	198
Figura 6.35: Campo de desvio relativo entre a solução via GITT e a solução do COMSOL dado em porcentagem para um canal com 4 corrugações.....	198

Figura 6.36: Campo de desvio relativo entre a solução via GITT e a solução do COMSOL dado em porcentagem para um canal com 2 corrugações.....	199
Figura 8.1: Perfis de temperatura obtidos através do problema de autovalor não-clássico com $Pe=0,025$	206
Figura 8.2: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,1$	208
Figura 8.3: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,2$	208
Figura 10.1: Isotermas da solução do problema de Knupp et al. (2013) obtidas a partir da metodologia da Seção 6.4	218
Figura 10.2: : Perfis de temperatura obtidos a partir da metodologia da Seção 6.4 para $Pe=0,025$	219

LISTA DE TABELAS

Tabela 5.1: Convergência dos autovalores μ_i do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$	79
Tabela 5.2: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado, obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$	83
Tabela 5.3: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado, obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$	84
Tabela 5.4: Convergência dos autovalores β_i da solução via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$	87
Tabela 5.5: Convergência da temperatura via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$	90
Tabela 5.6: Convergência da temperatura via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$	90
Tabela 5.7: Comparação dos resultados de temperatura obtidos através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com $Pe_{fl}=0,025$ e considerando as casas decimais convergidas.	91
Tabela 5.8: Comparação dos resultados de temperatura obtidos através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com $Pe_{fl}=0,25$ considerando as casas decimais convergidas.	91
Tabela 5.9: Convergência dos autovalores μ_i do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$	95

Tabela 5.10: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$	98
Tabela 5.11: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$	98
Tabela 5.12: Convergência dos autovalores β_i da solução via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$. 101	
Tabela 5.13: Convergência dos resultados via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$ 103	
Tabela 5.14: Convergência dos resultados via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$ 103	
Tabela 5.15: Comparaçāo da temperatura obtida através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com múltiplos canais para $Pe_{fl}=0,025$ considerando as casas decimais convergidas. 104	
Tabela 5.16: Comparaçāo da temperatura obtida através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com múltiplos canais para $Pe_{fl}=0,25$ considerando as casas decimais convergidas. 105	
Tabela 6.1: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X,Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes para $Pe=1$ em $X=0,1$ 158	
Tabela 6.2: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X,Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes para $Pe=1$ em $X=0,25$ 159	

Tabela 6.3: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes para $Pe=1$ em $Y=0,25$	159
Tabela 6.4: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$	161
Tabela 6.5: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,25$	162
Tabela 6.6: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $Y=0,25$	162
Tabela 6.7: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=1$	165
Tabela 6.8: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,1$	166
Tabela 6.9: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,25$	166
Tabela 6.10: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $Y=0,25$	167
Tabela 6.11: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,1$	168
Tabela 6.12: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,25$	168

Tabela 6.13: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $X=0,1$	169
Tabela 6.14: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $X=0,25$	170
Tabela 6.15: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $Y=0,25$	170
Tabela 6.16: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $X=0,1$	171
Tabela 6.17: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $X=0,25$	172
Tabela 6.18: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $Y=0,25$	172
Tabela 6.19: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,025$	180
Tabela 6.20: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,1$	180

Tabela 6.21: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,5$	181
Tabela 6.22: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 1$	181
Tabela 6.23: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,025$	183
Tabela 6.24: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,1$	183
Tabela 6.25: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,5$	184
Tabela 6.26: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 1$	184
Tabela 6.27: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=0,25$	186
Tabela 6.28: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=0,25$ em $X=1$	187
Tabela 6.29: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=0,25$ em $X=5$	187
Tabela 6.30: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=0,25$ em $X=1$	188

Tabela 6.31: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=0,25$ em $X=5$	189
Tabela 6.32: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=0,25$ em $X=10$	189
Tabela 6.33: Tamanho máximo dos elementos das respectivas malhas utilizadas... Tabela 6.34: Análise de convergência entre as malhas utilizadas no COMSOL.....	192
Tabela 8.1: Convergência dos autovalores μ_i do problema de autovalor não-clássico para uma condição do primeiro tipo na parede externa com $Pe=0,025$	205
Tabela 8.2: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos considerando problema de autovalor não-clássico para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$	206
Tabela 8.3: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos considerando problema de autovalor não-clássico para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$	207
Tabela 8.4: Convergência dos autovalores $\beta_{a,i}$ da solução via transformação integral parcial para uma condição do primeiro tipo na parede externa com $Pe=0,025$	210
Tabela 8.5: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados via transformação integral parcial com os fornecidos por Knupp et al. (2013) para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$. Tabela 8.6: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados via transformação integral parcial com os fornecidos por Knupp et al. (2013) para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.	210
Tabela 10.1: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$	217

Tabela 10.2: Convergência de $\theta(X,Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$	217
Tabela 10.3: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=0,025$	220
Tabela 10.4: Convergência de $\theta(X,Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$	221
Tabela 10.5: Convergência de $\theta(X,Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$	221
Tabela 10.6: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=0,025$ para o filtro puramente condutivo.	223
Tabela 10.7: Convergência do potencial puramente condutivo obtido via problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$	223
Tabela 10.8: Convergência do potencial puramente condutivo $\theta_{FC}(X,Y)$ obtido via problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$	224
Tabela 10.9: Convergência do potencial original $\theta(X,Y)$ obtido via problema de autovalor coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$	225
Tabela 10.10: Convergência do potencial original $\theta(X,Y)$ obtido via problema de autovalor coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$	225

LISTA DE SÍMBOLOS

- b Razão entre as espessuras ocupadas por dois fluidos imiscíveis dentro de um canal;
- Bi Número de Biot;
- d Operador de dissipação linear no problema geral (Capítulo 3);
- f* Condição inicial (Capítulo 3);
- F* Módulo do campo de velocidade (Capítulo 5);
- g* Termo fonte da equação;
- h* Coeficiente de transferência de calor;
- H* Largura do canal no (Capítulo 4);
- i_{tot}* parâmetro relacionado à geometria da corrugação (Capítulo 5);
- k* Condutividade térmica;
- K* Condutividade térmica adimensional ou coeficiente do operador difusivo no problema geral (Capítulo 3);
- \mathbb{K} Razão de aspecto do domínio;
- L* Largura do domínio (Capítulo 4);
- L_x* Comprimento do domínio no eixo *x* (Capítulo 5);
- L_y* Comprimento do domínio no eixo *y* (Capítulo 5);
- N* Número de potenciais acoplados no problema geral (Capítulo 3);
- N_i* Integrais de normalização;
- N_V* Número de sub-regiões de um domínio;
- N_P* Ordem de truncamento;
- Nu* Número de Nusselt;

- P Termo fonte da equação (Capítulo 3);
 Pe Número de Peclet;
 Q Vazão;
 r Função de parametrização (Capítulo 5);
 r_μ Razão entre viscosidades (Capítulo 4);
 Re Número de Reynolds;
 t Variável temporal;
 T Temperatura ou potencial no problema geral (Capítulo 3);
 u Componente da velocidade do escoamento no eixo x ;
 U Componente da velocidade adimensional do escoamento no eixo x ;
 v Componente da velocidade do escoamento no eixo y ;
 V Componente da velocidade adimensional do escoamento no eixo y ou volume de uma determinada sub-região (Capítulo 3);
 w Capacidade térmica volumétrica ou coeficiente do operador transiente no problema geral (Capítulo 3);
 W Capacidade térmica volumétrica adimensional;
 x, y, z Variáveis espaciais;
 X, Y, Z Variáveis espaciais adimensionais;

LETRAS GREGAS

- α Operador na condição de contorno do problema geral (Capítulo 4)
 α_a Autovalor correspondente ao autovetor ζ (Capítulo 5)

α_b	Autovalor correspondente à autofunção φ (Capítulo 6);
α_c	Amplitude da corrugação (Capítulo 6);
β	Operador na condição de contorno no problema geral (Capítulo 4)
β_a	Autovalor correspondente à autofunção ξ (Capítulo 5)
β_b	Autovalor correspondente à autofunção ϕ (Capítulo 6);
γ	Autovalor correspondente à autofunção Υ ;
δ	Delta de Kronecker ou autovalor correspondente à autofunção Φ (Capítulo 6);
ε_c	Número de comprimento de ondas em um canal corrugado (Capítulo 6);
$\epsilon\theta$	Resíduo relativo do potencial θ ;
ζ	Autofunção;
θ	Temperatura adimensional ;
λ	Autovalor correspondente à autofunção Ω ;
λ_c	Número de comprimento de ondas em um canal corrugado (Capítulo 6);
μ	Autovalor correspondente à autofunção ψ ;
ν	Autovalor correspondente ao autovetor ϕ ;
ξ	Autofunção;
ϱ	Ângulo (Seção 6.1.1)
σ	Autovalores da matriz \mathbf{F}
τ	Variável temporal adimensional;
Υ	Autofunção;
φ	Autofunção;
ϕ	Termo fonte da condição de contorno (Capítulo 4)
ϕ_a	Autovetor (Capítulo 5)

ϕ_b Autofunção (Capítulo 6);

Φ Autofunção;

ψ Autofunção;

Ω Autofunção;

SUBSCRITOS E SUPERESCRITOS

aux Auxiliar;

in Denota a posição de entrada do canal;

f Denota a região do fluido;

f_1 Denota a região do fluido 1;

f_2 Denota a região do fluido 2;

F Filtro;

FC Filtro condutivo;

FP Filtro permanente;

G Global;

s Denota a região de sólido;

∞ Ambiente;

$*$ Potencial filtrado;

$-$ Potencial transformado;

\sim Autofunções normalizadas;

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Em 1971, a Intel desenvolveu o primeiro microprocessador da história, o Intel® 4004 (Intel, 2014), possuindo uma dimensão máxima de 3/4 de polegada e a mesma capacidade de processamento que o primeiro computador eletrônico (ENIAC) de 1946, o qual ocupava uma sala inteira. A vantagem do microprocessador não estava apenas em seu tamanho diminuto, mas também na potência dissipada. Conforme apresentado por INTEL (1971), a potência dissipada pelo microprocessador era de apenas 1 W, enquanto que o ENIAC dissipava, em média, 174 kW. Essa grande diferença na potência dissipada se deve ao uso de transistores no microchip ao invés de válvulas termiônicas, diodos e capacitores do computador eletrônico.

Desde então, uma corrida pelo aumento do número de transistores embutidos em um chip vem sendo travada entre os fabricantes de micro processadores, uma vez que a quantidade de transistores está diretamente relacionada à capacidade de processamento do processador. A famosa Lei de Moore (Moore, 1965) da computação afirma que o número de transistores empregados em um chip dobra a cada dois anos, fato este que pode ser observado até os dias de hoje conforme apresentado na Figura 1.1, onde é possível comparar o Intel® 4004, que possui 2300 transistores, com os processadores mais modernos atualmente, possuindo mais de 3 bilhões de transistores.

Ainda no mesmo artigo, Moore já apresentava certa preocupação com relação à dissipação térmica dos chips ao fazer o seguinte questionamento: “*Será possível remover o calor gerado por dezenas de milhares de componentes em um único chip de silício?*”. Essa preocupação é fundamental, uma vez que quanto maior a quantidade de transistores mais energia é consumida e dissipada em forma de calor pelo chip, podendo assim comprometer

sua vida útil. Se o consumo de energia por transistor se mantivesse igual desde o primeiro microprocessador, o consumo de energia dos processadores atuais seria 4000 vezes maior (Intel, 2011), o que tornaria a computação moderna inviável. A redução no consumo de energia dos processadores atuais só foi possível graças à diminuição de dimensão física no processo de fabricação dos transistores, o qual partiu de $10\text{ }\mu\text{m}$, utilizado no primeiro microprocessador da Intel, para atuais 14 nm (Intel® Core™ i7-6700K), aumentando a eficiência energética dos mesmos.

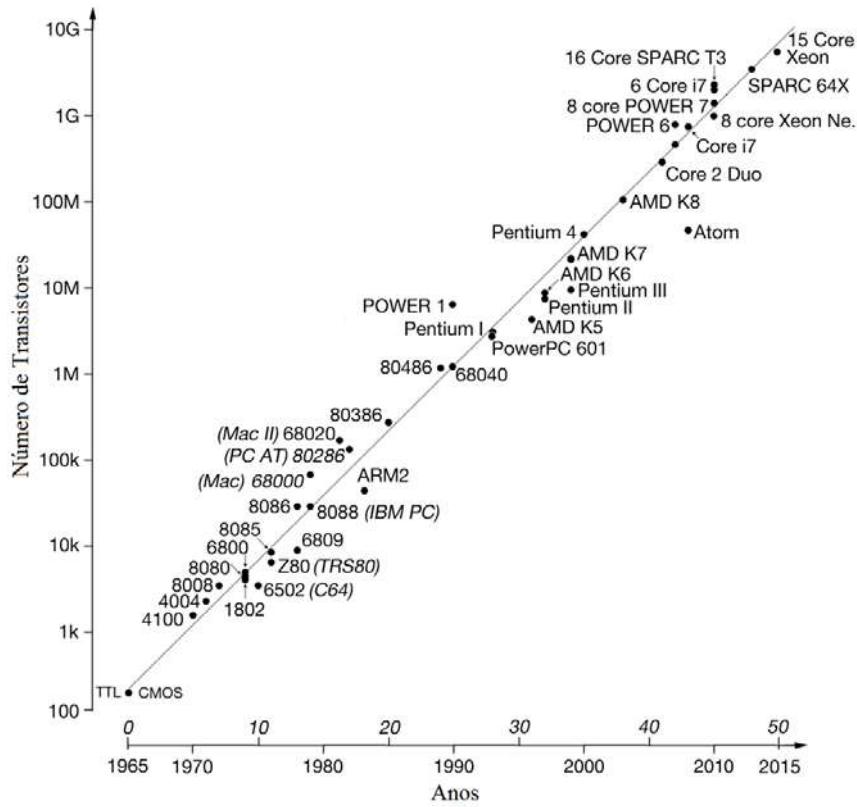


Figura 1.1: Curva da Lei de Moore com o número de transistores dos principais microprocessadores desde 1971. Adaptado de Scherer (2015).

Apesar do benefício energético da miniaturização, o número crescente de transistores nos chips causa um aumento na taxa de dissipação de energia dos mesmos. A miniaturização, por sua vez, diminui a área de troca térmica do chip, sendo necessário o

desenvolvimento de métodos cada vez mais eficientes para a dissipação do calor gerado, a fim de se evitar temperaturas críticas de operação do processador.

Tendo em vista esta dificuldade, Tuckerman e Pease (1981), em seu trabalho pioneiro, desenvolveram um trocador de calor compacto com o objetivo de aumentar a taxa de dissipação de calor para circuitos integrados VLSI (“*Very Large Scale Integration*”), classificação atribuída a microprocessadores que utilizam entre 10000 e 100000 transistores. Este micro-trocador de calor consistia em diversos microcanais paralelos, com seção de $57\text{ }\mu\text{m}$ por $365\text{ }\mu\text{m}$, operando com escoamento laminar de água, com o objetivo de aumentar a área de troca e os coeficientes de transferência de calor. O fluxo de calor dissipado pelo chip chegou a 790 W/cm^2 com o substrato atingindo uma temperatura máxima de 71°C acima da temperatura da água na entrada do trocador de calor, comprovando sua viabilidade e aplicabilidade na refrigeração de processadores. Diversos outros trabalhos que tiveram por intuito desenvolver microtrocadores de calor ou aperfeiçoá-los podem ser encontrados na literatura e serão abordados em maiores detalhes no capítulo seguinte.

A necessidade de arrefecer os VLSI foi novamente enfatizada por Bar-Cohen (1987), o qual compara a intensidade do fluxo de calor a ser dissipado nestes dispositivos ao fluxo gerado por uma explosão nuclear, conforme apresentado na Figura 1.2, mostrando o quão crítico é de fato este problema. A grande dificuldade se encontra principalmente nas temperaturas máximas que o processador pode atingir. Enquanto que uma carcaça de um motor de foguete ou a fuselagem de um ônibus espacial possuem uma temperatura máxima de operação entre 1000 e 1500 K (conforme pode ser visto na figura), a temperatura máxima limite de muitos processadores não passa de 100°C . Este fato indica o quanto importante é o arrefecimento adequado dos processadores.

Mais recentemente, como discutido por Brunschwiler et al. (2009a), o aumento na densidade de empacotamento de dispositivos eletrônicos tem caminhado na direção de se empilhar verticalmente microprocessadores em camadas, conectados por pilares de silício e condutores, com resfriamento nas camadas intermediárias. Esse arranjo tem sido denominado de pilhas tridimensionais de chips ("3D chip stacks"), e a densidade de

potência dissipada pode chegar a 4 kW/cm³ (Alfieri et al. (2010)). A estratégia de resfriamento desse sistema integrado de microprocessadores atualmente sendo considerada envolve, portanto, o uso de resfriamento por líquidos entre as camadas de chips (Figura 1.3), onde essa integração tridimensional do sistema de resfriamento entre os chips, com o escoamento permeando as fontes térmicas, leva a um resfriamento mais homogêneo e efetivo.

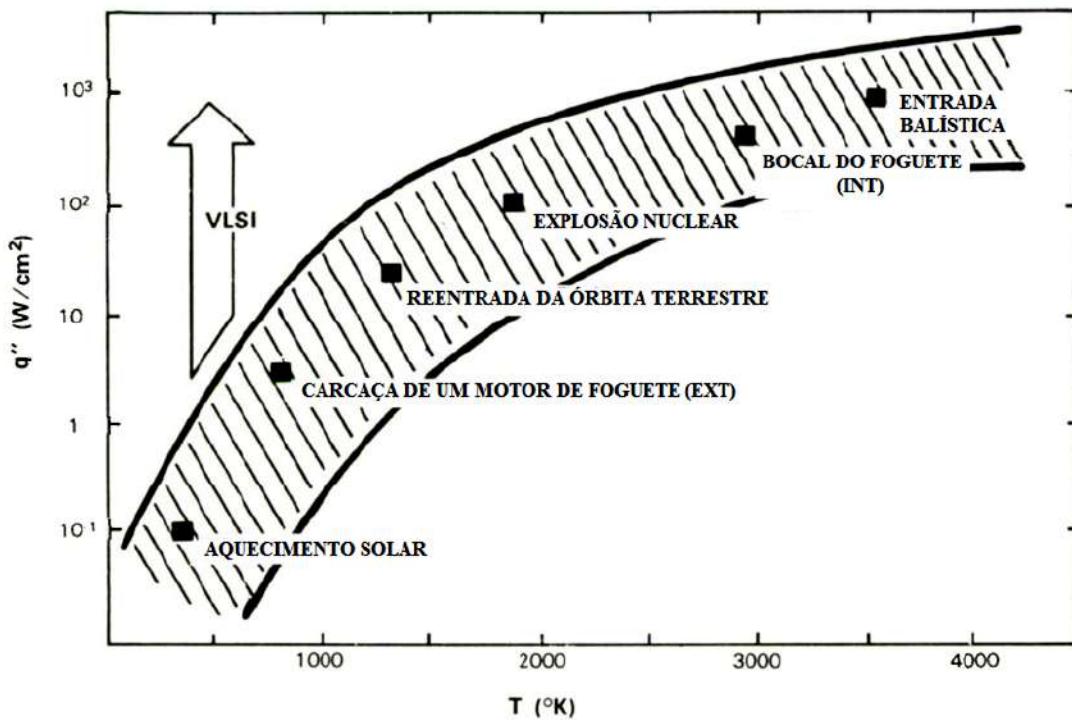


Figura 1.2: Comparativo entre a demanda de fluxo de calor a ser dissipado por um VLSI e o fluxo gerado por outros sistemas. Adaptado de Bar-Cohen (1987).

Atualmente, já se encontram amplamente disponíveis micro-trocadores de calor, que utilizam microcanais e líquidos como fluido refrigerante, para arrefecer microprocessadores, como os que são apresentados na Figura 1.4. Os próprios fabricantes destes micro-trocadores fornecem valores que indicam uma melhora significativa em relação aos sistemas genéricos (sistemas com aletas de alumínio e ventiladores),

conseguindo, em alguns casos, uma redução na temperatura de trabalho do microprocessador maior que 20°C, conforme relatado em Thermaltake (2017). No entanto, o fabricante não informa as condições específicas do teste que geraram esse decréscimo na temperatura do processador, o que inviabiliza sua utilização como parâmetro de comparação para outros testes. Além disso, devido a questões de segredo industrial, nenhuma informação sobre a potência dissipada nesses microtrocadores é fornecida pelos fabricantes.

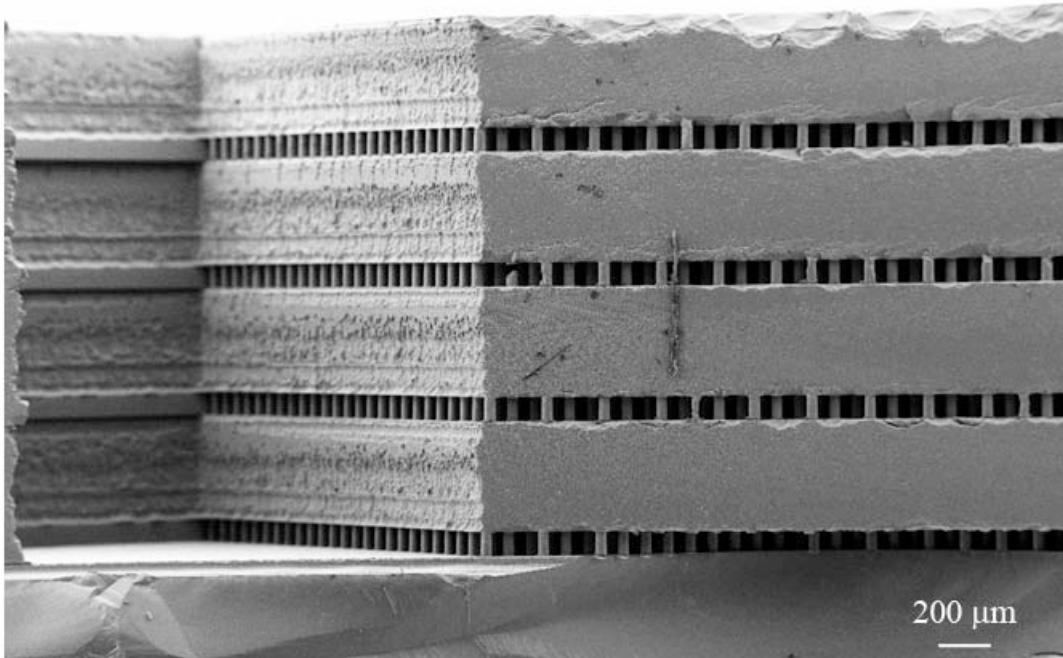


Figura 1.3: Pilha de chips tridimensional com resfriamento por líquido intercamadas. Fonte: Tiwari et al. (2012).

Como motivação adicional ao resfriamento líquido por microcanais, no trabalho de Zimmermann et al. (2012) é apresentado o sistema AQUASAR de resfriamento de supercomputadores. Com este sistema é possível reaproveitar o calor removido do processador e utilizá-lo em outras aplicações, como aquecimento predial por exemplo, garantindo assim uma maior viabilidade econômica e ambiental para supercomputadores.

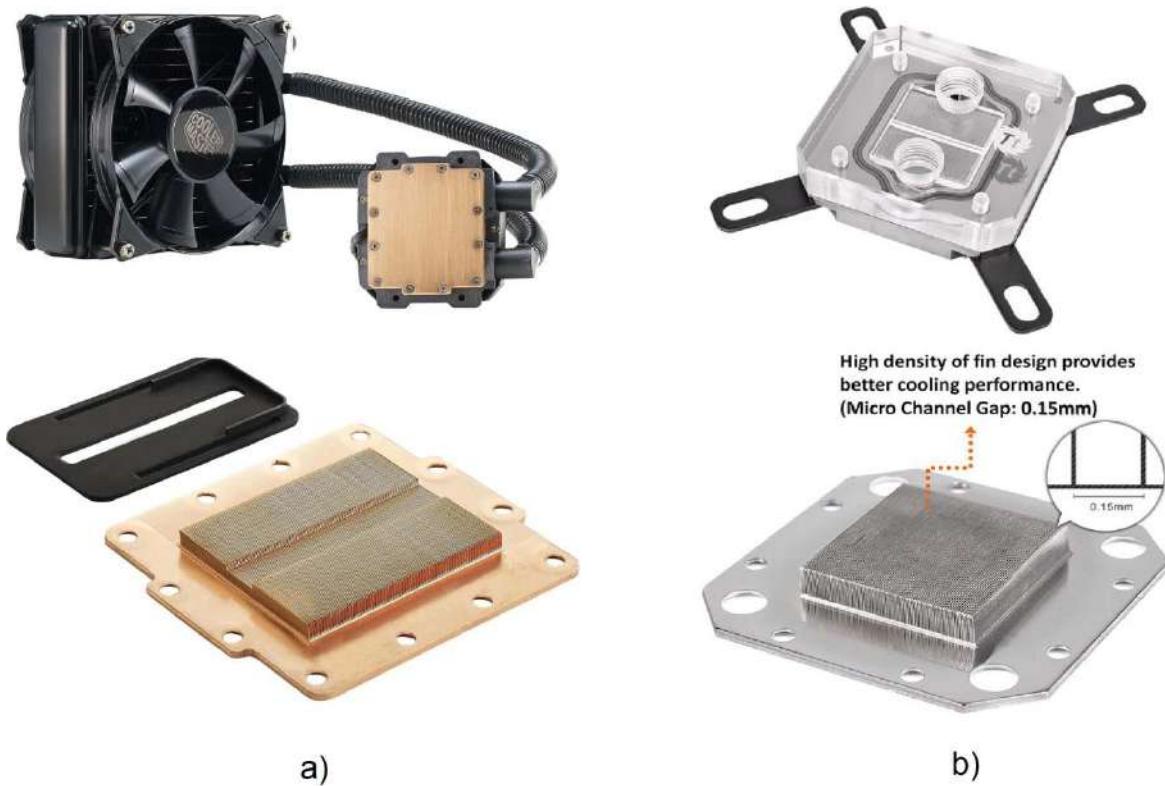


Figura 1.4: Micro-trocadores de calor comerciais que utilizam microcanais. a) Fonte: CoolerMaster (2016); b) Fonte: Thermaltake (2016).

O progressivo desenvolvimento de novos microprocessadores foi sempre acompanhado por novos avanços no projeto de sistemas de arrefecimento na forma de micro-trocadores e micro-dissipadores de calor compactos (em inglês, *micro-heat sinks*). Entretanto, os micro-dissipadores de calor não são os únicos dispositivos microfluidicos que requerem uma análise termo-hidráulica na micro-escala, levando em conta diferentes aspectos físicos em geral negligenciados na macro-escala. Por exemplo, micro-misturadores de fluidos a diferentes temperaturas e microrreatores com geração interna de calor ou aquecimento externo (Kumar et al. (2011); Kockman (2008); Mechtild et al. (2006); Costa Junior (2015), também apresentam importantes desafios de modelagem e simulação em transferência de calor e massa para um projeto otimizado. A Figura 1.5 ilustra o detalhe de um microrreator com seu sistema de controle (Mechtilde et al. (2006)

cujos reagentes utilizados foram acetonilacetona e etanolamina. Neste estudo, ressalta-se a utilização da tampa de selagem do microrreator feita em vidro, permitindo assim a aplicação de técnicas de espectroscopia ótica, como por exemplo a espectroscopia de Raman, ao longo de toda a extensão do canal do microrreator.

A simulação computacional de tais microssistemas tornou-se então essencial para a previsão do seu comportamento tanto em regime permanente quanto transiente, onde a transferência de calor conjugada por condução-convecção entre as diversas regiões de fluidos e sólidos tem papel crucial no projeto desses dispositivos microfluidicos. Os métodos numéricos clássicos, como diferenças finitas e elementos finitos, têm sido frequentemente empregados na análise de micro-trocadores de calor com conjugação, mas os custos computacionais envolvidos em geral levam a se preferir a simulação de uma célula característica do microssistema ou a se adotar uma configuração representativa simplificada. Além disso, as tarefas mais computacionalmente intensivas, como a otimização e análise do problema inverso correspondente, são de implementação com alto custo a partir das técnicas numéricas discretas convencionais.

Paralelamente aos desenvolvimentos acima citados, o próprio avanço da computação, tanto em termos de capacidade de processamento quanto ao aparecimento de novas plataformas computacionais, permitiu que novas metodologias de solução de equações diferenciais parciais pudessesem ser implementadas via técnicas ditas híbridas ou semi-analíticas, dentre as quais destaca-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT). Desde a sua proposição para solução de problemas não-lineares (Cotta (1990)), a GITT vem sendo cada vez mais aplicada em problemas convectivo-difusivos (Cotta (1993; 1994; 1998), Cotta e Mikhailov (1997; 2006)) com o intuito de usufruir das vantagens relativas em uma metodologia analítica clássica como a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) (Mikhailov e Ozisik (1984), Ozisik (1993)), em classes de problemas mais complexos nos quais esta última não se aplica, como por exemplo, em problemas não lineares, em domínios irregulares e com coeficientes variáveis espacialmente. A implementação da CITT e da GITT tem sido particularmente beneficiada com a utilização da plataforma de computação simbólica *Mathematica*® (Wolfram (2005)), por permitir que boa parte das manipulações matemáticas sejam realizadas de forma simbólica e automática,

diminuindo a ocorrência de erros nas deduções analíticas e tornando suas obtenções muito mais rápidas.

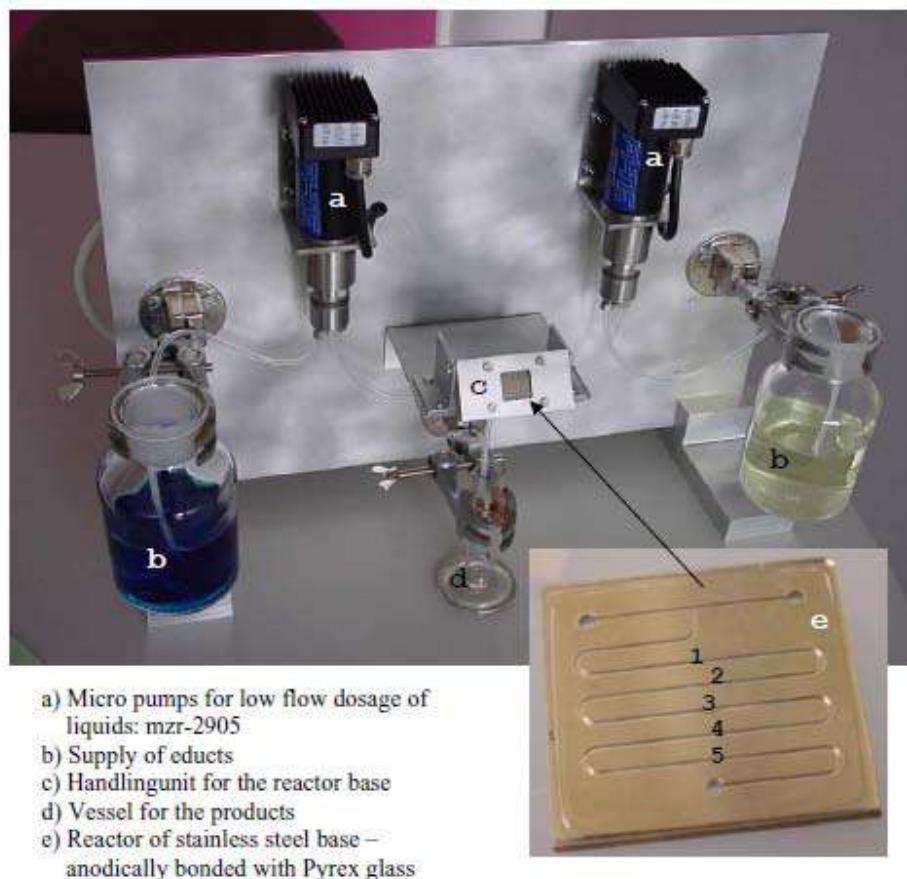


Figura 1.5: Detalhe de um microrreator e de seu sistema de controle. Fonte: Mechtilde et al. (2006).

Recentemente, Knupp et al. (2012) introduziram uma solução via GITT em conjunto com uma reformulação de problemas conjugados em um domínio único, aplicada à solução de problemas de transferência de calor em microssistemas térmicos, onde a equação de energia é resolvida simultaneamente para as regiões sólida e fluida. Os resultados foram então comparados com uma solução exata disponível para um caso teste, apresentando uma excelente concordância entre eles. Este trabalho marcou um importante avanço na aplicação

da GITT para problemas de transferência de calor em configurações complexas, uma vez que um micro-trocador de calor poderia ser então totalmente modelado e otimizado a partir de uma formulação em domínio único, onde os coeficientes dos diferentes operadores das equações de movimento e energia poderiam ser descritos na forma de funções com variação espacial, com o intuito de representar cada região deste domínio unificado. Até então, o emprego do método de transformação integral para resolver problemas com esta complexidade geométrica e física requeria um grande esforço analítico e resultava em sistemas transformados acoplados provenientes do tratamento de cada sub-região em estudo. O aprimoramento da GITT com formulações em domínio único se mostra extremamente desejável para sua aplicabilidade em situações cada vez mais gerais.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será apresentada a revisão bibliográfica essencial para realização deste trabalho. Para uma melhor organização e compreensão deste capítulo, o mesmo foi dividido em cinco temas pertinentes ao trabalho realizado, que são: Técnica da Transformada Integral Generalizada - GITT, transferência de calor em microcanais, escoamento multifásico em dutos e microcanais, difusão axial de calor em microcanais, problemas conjugados em transferência de calor e soluções e GITT aplicada à microescala.

2.1 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Conforme visto nas seções anteriores, diversos trabalhos utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) em problemas convectivos-difusivos, e mais recentemente para problemas utilizando formulação em domínio único, foram citados na literatura. Por conta disso, esta seção fará uma breve revisão bibliográfica sobre esta técnica, cuja metodologia será melhor apresentada no capítulo posterior.

A GITT, assim como diversas outras técnicas, possui suas raízes no método de separação de variáveis, desenvolvido por Fourier (1822) para resolver equações diferenciais parciais simples definidas pela equação de energia, como por exemplo, um problema de condução de calor transiente unidimensional. Este método consiste em transformar a variável dependente em um produto de funções, onde cada uma é função de apenas uma variável independente, buscando-se transformar a equação diferencial parcial em um conjunto de equações diferenciais ordinárias. O resultado final para a variável dependente é dado então a partir de um somatório infinito de funções ortogonais (dependendo da geometria estudada), as quais são função de autovalores obtidos pelas respectivas condições de contorno do sistema. Apesar do método de separação de variáveis ser muito difundido

na análise de problemas de transferência de calor, só é possível resolver problemas em que a geometria é simples e a equação diferencial e as condições de contorno sejam lineares e separáveis.

A partir do método de separação de variáveis, a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) foi então desenvolvida com o objetivo de estender as soluções analíticas de problemas de difusão de calor. Com isso, problemas envolvendo equações diferenciais e condições de contorno não-homogêneas poderiam ser agora resolvidos. Os fundamentos da teoria da CITT podem ser encontrados nos livros de Mikhailov e Ozisik (1984) e Ozisik (1993) e suas diversas aplicações, encontrados em diversos artigos (Mikhailov (1972), Mikhailov e Ozisik (1981;1986)) além dos que já foram citados nas seções anteriores. A técnica consiste basicamente em definir um par de transformação integral (transformada-inversa), o qual aplicado à equação diferencial parcial transforma a mesma em um sistema desacoplado de equações diferenciais ordinárias, que por sua vez é resolvido de forma analítica. O resultado é então aplicado na função inversa do par transformado retornando o campo de temperaturas desejado. Apesar do avanço considerável deste método para soluções analíticas, o mesmo ainda possuía restrições para a solução de problemas não-lineares, ou até mesmo de diversas classes de problemas lineares que não podiam ser transformados.

Com o intuito de vencer essas restrições, desenvolveu-se a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) (Cotta (1990; 1993; 1994; 1998), Cotta e Mikhailov (1997; 2006)), a qual possibilita a solução de problemas não-transformáveis pela CITT, ou seja, problemas de maior complexidade, englobando, inclusive, os problemas com formulação não-linear. Com esta técnica, o resultado do potencial transformado é obtido através da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias acoplado e infinito, o qual deve ser truncado e resolvido numericamente, motivo pelo qual a técnica é definida como um método híbrido analítico-numérico.

Nos trabalhos de Naveira et al. (2008a; 2008b), Naveira-Cotta et al. (2009a; 2009b), utilizou-se a GITT para a solução de problemas de condução de calor em meios heterogêneos, caracterizados por variações espaciais abruptas das propriedades

termofísicas. A solução foi obtida a partir de um problema de autovalor com coeficientes espacialmente variáveis cuja solução também era obtida via GITT. Estes estudos deram então início à formulação em domínio único da equação da energia, a qual foi testada e demonstrada em Knupp (2013).

Tendo isso em mente, um algoritmo de código aberto, escrito na plataforma computacional *Mathematica*®, com o objetivo de unificar os métodos de solução de problemas convectivos-difusivos via GITT e difundir a metodologia, foi desenvolvido pelo grupo de trabalho do Prof. Renato Machado Cotta da COPPE/UFRJ e denominado UNIT (*Unified Integral Transforms*) (Sphaier et al. (2011); Cotta et al. (2012); Cotta et al. (2013), Cotta et al. (2014)). O código em questão não foi utilizado para o desenvolvimento do presente trabalho, entretanto, com o intuito de se aprofundar mais na metodologia, um código dedicado foi implementado pelo próprio autor desta tese utilizando, também, a plataforma *Mathematica*®.

Mais recentemente, em Cotta et al. (2016 b) alguns avanços e aprimoramentos, desenvolvidos nos últimos anos, para soluções via GITT são apresentados. Entre eles é possível citar um novo esquema de reordenamento para expansões multidimensionais, formulação em domínio único para geometrias complexas, balanço integral de problemas de autovalor com o propósito de melhorar a convergência dos resultados, a consideração de problemas de autovalor com termos convectivos, além de problemas de autovalor não lineares. Alguns desse avanços serão apresentados ao longo deste trabalho.

2.2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM MICROCANAIS

O trabalho de Tuckerman e Pease (1981), citado na seção 1.1, pode ser considerado o precursor das pesquisas em transferência de calor em microcanais, uma vez que este apresentou um modelo de trocador compacto para chips de computador com diversos micro canais em paralelo com seção transversal de 57 μm por 365 μm . Baseado no trabalho de Tuckerman e Pease, Kiper (1984) desenvolveu outro microtrocador, utilizando água

novamente como fluido de trabalho, para retirar calor gerado pelos VLSI. Neste caso o fluido era forçado a passar por diversos furos com diâmetros de 750 μm gerando um jato incidente sobre a placa em contato direto com o substrato de silício, cuja distância entre o mesmo e os furos era três vezes o diâmetro dos furos. Kiper informa ter dissipado um fluxo de calor de 591 W/cm^2 , inferior à obtida por Tuckerman e Pease. Embora também tenha obtido um valor alto para o fluxo de calor dissipado, Kiper utilizou um escoamento turbulento, com um número de Reynolds para o jato de 17.857, enquanto Tuckerman utilizou um escoamento laminar, com número de Reynolds igual a 730.

Ainda no mesmo ano, Keyes (1984) propôs uma primeira modelagem matemática para o microssistema térmico de Tuckerman e Pease, onde o problema foi simplificado para um caso unidimensional entre placas paralelas infinitas, considerando que todo o calor proveniente do chip é transmitido direto para as microaletas, que correspondem às paredes dos microcanais. No mesmo trabalho Keyes ainda propôs uma otimização da geometria estudada para uma determinada vazão de água, levando em consideração a espessura da microaleta e a largura e altura do microcanal, chegando aos valores de 42 μm para ambas as larguras e 720 μm para a altura do microcanal. A Figura 2.1 apresenta um esquemático do microtrocador de calor estudado por Keyes, modelando o dispositivo de Tuckerman e Pease. Seguindo a mesma linha, Goldberg (1984) apresentou um estudo onde foram testados três diferentes tipos de microtrocadores de calor utilizando ar como fluido refrigerante, onde apenas a largura dos microcanais e a espessura das microaletas eram modificadas entre uma geometria e outra. Como resultado, concluiu que a geometria com menor largura do microcanal e com maior perda de carga resultava no trocador com a menor resistência térmica global.

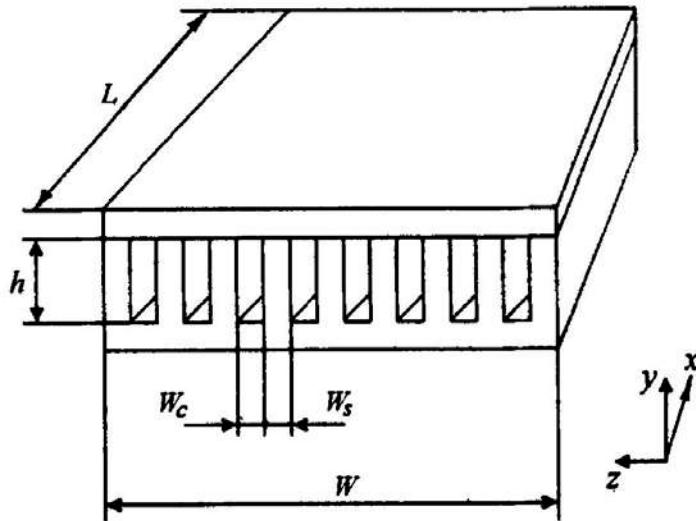


Figura 2.1: Esquemático de um microtrocador de calor. Fonte: Yu e Xin (1994).

Em Phillips (1988; 1988a), uma nova concepção para microtrocadores de calor foi abordada, a qual resultou em uma patente (Phillips et al. (1990)), cujo estudo considerou escoamentos no interior dos microcanais (diâmetro hidráulico $\approx 100 \mu\text{m}$) em regimes laminar e turbulento. Phillips concluiu que escoamentos turbulentos forneciam menores resistências térmicas e que canais com maior razão de aspecto, ou seja, a altura maior do que a largura, forneciam maiores números de Nusselt.

Samalan (1989) apresentou outra modelagem para o problema de transferência de calor em microcanais, onde as simplificações e suposições propostas resultaram em uma equação diferencial parcial não linear bidimensional. Segundo Samalan, a equação foi resolvida de forma exata, resultando em novos valores geométricos para redução da resistência térmica do microcanal de Tuckerman e Pease, com ambas larguras iguais a 49 μm . Análises semelhantes foram feitas por Weisberg e Bau (1992) e Yu e Xin (1994).

Dando continuidade aos estudos de Tuckerman e Pease, Goldberg e Phillips, Knight et al. (1992) afirma que a resistência térmica se comporta de diferentes maneiras para escoamentos laminares e turbulentos dependendo da perda de carga existente no sistema. Segundo seu estudo, quando a perda de carga no sistema é baixa, escoamentos laminares

conseguem fornecer resistências térmicas menores que escoamentos turbulentos, enquanto que para sistemas com perda de carga alta o escoamento turbulento é o que fornece a menor resistência térmica.

Mais adiante, no estudo de Harms et al.(1999), o autor afirma que para escoamentos laminares completamente desenvolvidos, a resistência térmica independe da perda de carga do sistema, havendo uma dependência apenas quando o escoamento se encontra em desenvolvimento. Além disso, uma outra análise no mesmo artigo aponta que microcanais com maior razão de aspecto, altura maior que largura, resulta em escoamento e transferência de calor mais eficientes, confirmando os resultados obtidos por Phillips (1988; 1988b).

Xu et al. (2000), em controvérsia com outros artigos (Peng et al. (1995); Peng e Peterson (1996)), afirma que o comportamento do fluido em microcanais é ainda descrito muito bem pelas equações de Navier-Stokes e que não era possível perceber efeitos inesperados da micro escala nos resultados. Este ainda afirma que divergências apresentadas em outros trabalhos eram devido provavelmente a erros de fabricação, como nas técnicas de selagem, e na medição dos microcanais. Para mostrar isso, dois microcanais foram estudados em paralelo, um construído em silício utilizando uma técnica de selagem apropriada que evitava erros de fabricação, e outro construído em alumínio, cuja técnica utilizava uma cola especial que acabava por introduzir parte desta cola dentro dos microcanais, reduzindo a área de passagem do fluido e modificando a perda de carga do sistema. Todo esse estudo foi realizado através da análise do fator de atrito dos canais, que se mostrou coerente com o escoamento de Pouseille, mas apresentando uma transição entre o regime laminar para o turbulento para número de Reynolds menores que os habituais, cerca de 1500.

Este mesmo efeito foi observado também por Garimella e Singhal (2004) com a transição do escoamento laminar para o turbulento ocorrendo para um número de Reynolds um pouco menor que 2000 para diâmetros diferentes ($974 \mu\text{m}$ e $324 \mu\text{m}$). Garimella e Singhal ainda afirmam que há pouca concordância entre os resultados apresentados na literatura sobre transferência de calor em microcanais para regimes laminar e turbulento, e

que os mesmos resultados experimentais apresentam um certo desvio em relação à teoria utilizada para a macroescala.

Em uma extensa revisão da literatura, Morini (2004) ressalta os resultados controversos obtidos entre Peng e Peterson (1996) e Xu et al. (2000) e diversos outros artigos abordando estudos sobre fator de atrito, transição entre regimes laminar e turbulento e números de Nusselt em microcanais, os quais também apresentaram grande divergência nos resultados apresentados. Como conclusão de sua revisão, Morini pôde apenas afirmar que o entendimento acerca dos mecanismos de escoamento e transferência de calor nos microcanais deveria ser considerado uma questão científica em aberto.

Hetsroni et al. (2005) apresentam comparações entre resultados experimentais de diversos trabalhos com análises numéricas considerando diferentes simplificações para o problema de escoamento e transferência de calor em microcanais. Como resultado, obteve-se que simplificações extremas, como por exemplo modelos unidimensionais com fluxo de calor e coeficiente de transferência de calor constantes, levavam a discrepâncias significativas entre os resultados experimentais e o modelo teórico. No entanto, ao considerar uma solução numérica utilizando as equações de Navier-Stokes e de energia completas aplicadas à geometria real do problema, junto com a difusão axial de calor tanto no fluido quanto no sólido, variação das propriedades físicas do fluido com a temperatura, entre outras, o modelo conseguia correlacionar muito bem os dados experimentais. Ou seja, segundo Hetsroni et al. (2005), os “efeitos da micro escala” reportados por outros autores que estariam afastando os resultados dos modelos teóricos nada mais seria do que uma extrema simplificação dos modelos teóricos existentes para os problemas de transferência de calor em microcanais, desprezando efeitos que na microescala não poderiam ser desprezados. A mesma conclusão foi obtida por Mokrani et al. (2009), onde este, através de uma série de dados experimentais, afirma que as mesmas leis e correlações convencionais aplicadas a problemas da macro-escala eram também capazes de prever os mesmo fenômenos na micro escala (para microcanais entre $50 \mu\text{m}$ e $500 \mu\text{m}$). O mesmo ainda afirma que a transição do escoamento entre regime laminar para turbulento ocorre também na mesma faixa de número de Reynolds que a observada na macro escala.

Asadi et al. (2014) fez uma nova revisão da literatura e, assim como Morini (2004), ainda ressaltou a grande discrepância entre os resultados apresentados entre os diversos artigos nesta área. Entre eles, Asadi et al. destacaram os resultados acerca do número de Reynolds crítico, que identifica a condição em que o escoamento inicia a transição do regime laminar para o turbulento. Vinte e três artigos publicados entre os anos 1991 e 2009 foram analisados para determinar uma faixa para o Reynolds crítico em microcanais, utilizando tanto líquidos quanto gases, resultando em valores distribuídos entre 300 e 6000. Estes resultados apresentam uma faixa muito mais ampla que os observados na macro escala, que geralmente se encontram entre 2300 e 4000. Asadi e colaboradores citam ainda algumas considerações que podem estar contribuindo para as discrepâncias entre resultados teóricos e experimentais, como por exemplo, o fato de tanto o perfil de velocidade quanto o de temperatura não se encontrarem completamente desenvolvidos nos estudos, consideração de escoamento com escorregamento na parede para escoamento com gases rarefeitos ($Kn > 0,001$), consideração de efeitos de compressibilidade para casos em que o sistema impõe uma alta perda de carga em escoamento com gases, consideração das incertezas experimentais nas comparações com as curvas teóricas. Em relação a este último item, os autores afirmam que alguns trabalhos mais recentes podem não ser confiáveis e, por isso, úteis para uma comparação.

No trabalho de Kim (2016) estudos empíricos foram realizados, mais uma vez, com o objetivo de verificar se a teoria da macro escala pode ser utilizada nos estudos de microcanais. Para isso, em seus experimentos considerou-se microcanais retangulares com diâmetro hidráulico variando entre $155 \mu\text{m}$ e $580 \mu\text{m}$ e razão de aspecto entre 0,25 e 3,8. O número de Reynolds, por sua vez, foi variado entre 30 e 2500. Como resultado, Kim afirma que o fator de fricção obtido foi o mesmo da teoria de Poiseuille para a macro escala, mas o número de Reynolds crítico obtido variou entre 1700 e 2400 dependendo da razão de aspecto do canal. Esses valores se encontram na faixa observada nos estudos avaliados por Asadi et al. (2014) e seu valor máximo (2400) se encontra na faixa geralmente observada para a macro escala. Mas novamente, como observado por Asadi et al., este trabalho não apresenta qualquer valor de incerteza em suas medições, seja do tamanho dos microcanais,

ou de outras grandezas mensuradas, dificultando assim sua comparação com outros trabalhos.

A revisão apresentada, para este tema em particular, indica ainda alguns questionamentos no estudo de transferência de calor em microcanais/microtrocadores de calor. Após três décadas de estudos, uma grande gama de resultados e modelos teóricos foram apresentados, os quais ainda mostram grande discrepância entre si. As discrepâncias podem ser creditadas, em parte, a alta complexidade na realização de medições acuradas na microescala e na própria confecção dos microcanais, além de, segundo Asadi et al. (2014), a falta de utilização de critérios experimentais rigorosos por alguns autores.

O presente estudo se baseia nas conclusões obtidas por Xu et al. (2000), Hetsroni et al. (2005), Mokrani et al. (2009) e Knupp et al. (2014) (que será apresentado mais adiante), os quais demonstram que as equações clássicas de Navier-Stokes e da energia ainda são válidas para problemas de convecção na micro escala, uma vez que todos os efeitos relevantes em cada aplicação específica tenham sido considerados na formulação.

2.3 ESCOAMENTO MULTIFÁSICO EM DUTOS E MICROCANAIS

A possibilidade de se aumentar a taxa de transferência de calor em escoamentos com mais de uma fase é muito anterior ao próprio estudo de convecção em microcanais. O conceito consiste em utilizar fluidos com propriedades distintas, além da mudança de fase, com o intuito de se chegar a condições mais favoráveis de troca de calor no sistema. Além disso, atualmente, com a difusão da tecnologia de microfabricação, escoamentos multifásicos têm sido utilizados para aumentar a eficiência de reações químicas, através da mistura de reagentes no interior de um único microssistema.

A literatura para este tópico pode ser dividida ainda em especificação do regime de escoamento entre as fases e aumento de eficiência em trocas térmicas e reações químicas. Todas as referencias serão abordadas conjuntamente, de forma cronológica.

Bentwich e Sideman (1964), Sideman e Peck (1966) e Sideman e Uliss (1972) fizeram diversos estudos considerando escoamentos anulares laminares em uma tubulação

vertical com dois fluidos imiscíveis. Os dois primeiros trabalhos apresentaram soluções para o campo de temperatura para este tipo de escoamento considerando fluidos com mesma massa específica e temperatura prescrita na parede da tubulação. O terceiro trabalho em questão, analisou o escoamento com e sem ebulação de uma das fases exatamente na região de interface dos dois fluidos, chegando a conclusão de que a taxa de transferência de calor do sistema onde ocorria a ebulação na interface era consideravelmente maior.

Somer et al. (1973) consideraram misturas com diferentes porcentagens de óleo em água, onde identificou diferentes padrões de escoamento para diferentes misturas. Através de dados experimentais, o autor afirma que quanto maior a fração de volume de óleo no escoamento, menor será a taxa de transferência de calor do sistema.

Mandhane et al. (1974) apresentaram um estudo sobre os diversos tipos de padrões de escoamento bifásico água-ar, os quais foram classificados em função da vazões dos dois fluidos. Um mapa com todos os regimes foi então apresentado para melhor compreensão do fenômeno. Bibliografias modernas (Brennen (2005)) ainda apresentam os mesmos mapas apresentados neste estudo.

Considerando ainda escoamentos anulares, Leib et al. (1977) consideraram, diferentemente dos dois primeiros trabalhos citados, um escoamento laminar de fluidos com massa específica distintas e fluxo de calor constante na parede da tubulação, apresentando uma solução teórica para o número de Nusselt do sistema, a qual foi comparada com dados experimentais obtidos. Como conclusão, os autores afirmam ter obtido uma divergência entre 40% e 320% entre os dados teóricos e experimentais, muito acima do obtido para um escoamento monofásico em tubos, cuja divergência não passava de 15%, mostrando a complexidade na análise térmica de um sistema multifásico.

Ooms et al. (1984) estudaram ainda, tendo em vista apenas o comportamento fluidodinâmico do sistema, um escoamento anular com um óleo muito viscoso no centro da tubulação e água na periferia. Como simplificação de seu modelo, a região ocupada pelo óleo foi considerada uma fase sólida e a região de contato entre os dois fluidos, considerada uma interface sólido/líquido, obtendo uma boa concordância para os valores experimentais de perda de carga.

No trabalho de Biswas e Greenfield (1985) foram avaliados escoamentos bifásicos em dutos capilares. O regime de escoamento água-ar foi então analisado em diversos tubos, com diâmetro variando entre 0,5 mm e 7,1 mm. Quatro padrões foram observados para diferentes vazões dos dois fluidos: estratificado, disperso, segmentado e anular.

Em Nogueira e Cotta (1990), o problema de escoamento com dois fluidos imiscíveis em contato direto no interior de uma tubulação e entre placas paralelas é estudado criteriosamente utilizando a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT). Os resultados teóricos obtidos foram então comparados com os dados experimentais fornecidos por Bentwich e Sideman (1964), resultando em uma boa concordância teórico-experimental e comprovando a eficácia da técnica para estudos desta natureza.

Dando prosseguimento aos estudos de escoamento anular em dutos, Shahidi e Ozbelge (1995) avaliaram a transferência de calor em um escoamento turbulento anular de água e óleo. Diversas variáveis foram analisadas com intuito de identificar as respectivas influências sobre a transferência de calor do sistema, como por exemplo: a velocidade de entrada da mistura, a temperatura de entrada do óleo e a fração em volume de óleo na mistura. O autor conclui que a taxa de transferência de calor é máxima para cada velocidade de entrada da mistura quando a fração em volume de óleo é próxima a 50% e que a mesma aumenta com a velocidade de entrada da mistura e com a temperatura de entrada do óleo.

Zhao e Bi (2001) apresentam os padrões de escoamento considerando uma mistura de ar água em microcanais de seção triangular. Apesar do autor utilizar a expressão microcanal, o menor diâmetro hidráulico utilizado por ele foi de 0,866 mm e os outros dois eram maiores que 1,4 mm. Em contrapartida Serizawa et al. (2002) apresentam um estudo detalhado a respeito do mesmo tipo de escoamento mas em microcanais circulares com diâmetros de $20\ \mu m$, $25\ \mu m$, $50\ \mu m$ e $100\ \mu m$. Assim como outros autores, um mapa contendo os diversos padrões de escoamento é apresentado.

Nogueria et al. (2004) apresentam uma solução analítica via transformação integral para o problema de transferência de calor e massa em um escoamento bifásico anular gás-líquido, considerando inclusive, a existência de ondas na interface entre os fluidos. Através

destes resultados fica nítido que a existência de ondulações na interface intensifica a taxa de transferência de calor do sistema, com aumentos ainda mais significativos conforme se aumenta o número de Reynolds.

Em outro estudo, Zhao (2006) mapeia os padrões de escoamento no interior de um microcanal com seção de $300\text{ }\mu\text{m} \times 600\text{ }\mu\text{m}$ e junção tipo T utilizando querosene e água. O autor chama atenção para a geometria da junção que auxilia na obtenção de determinados padrões de escoamento bifásico.

Com o objetivo diretamente voltado para o aumento da taxa de transferência de calor Asthana et al. (2011) utilizam um escoamento bifásico com dois fluidos imiscíveis (água e óleo) e padrão segmentado. Os microcanais utilizados no experimento possuíam uma seção de $100\text{ }\mu\text{m} \times 100\text{ }\mu\text{m}$ e as técnicas de medição empregadas foram o microLIF (Fluorescência Induzida por Laser) e microPIV (Velocimetria por Imagem de Partícula). O autor afirmar ter obtido um aumento de 300% no número de Nusselt em relação a um escoamento monofásico com água para uma determinada vazão, fato este que estaria relacionado, em parte, com a região de recirculação gerada pela gota de óleo do escoamento segmentado na água. Além disso, pelos dados apresentados fica claro que o número de Nusselt aumenta com a vazão empregada no sistema, embora este grande aumento no número de Nusselt implique em uma maior perda de carga no sistema, a qual também aumenta com a temperatura do sistema.

Malengier et al. (2011; 2012) avaliaram os efeitos da transferência de massa entre dois líquidos imiscíveis de um escoamento estratificado entre placas paralelas através de um método semi-analítico. No primeiro trabalho, observou-se que, mantida a vazão dos dois fluidos e variando-se a razão entre as viscosidades dos fluidos, a transferência de massa entre eles não era afetada. No segundo, avaliou-se o efeito do perfil de velocidade laminar (parabólico) em relação a um perfil de velocidade mais achatado obtido através de eletro-osmose, sobre a transferência de massa. Como conclusão, o autor afirma que o uso da eletro-osmose é vantajoso em apenas alguns casos.

Em Talimi et al. (2012), uma extensa revisão da literatura é feita no que concerne o estudo numérico de escoamentos bifásicos, tanto gás/líquido quanto líquido/líquido em

microcanais. Os autores destacam que o número de artigos voltados para o estudo de escoamento bifásico líquido/líquido é muito menor que os existentes para escoamento gás/líquido, e menor ainda para estudos focados em problemas de transferência de calor, sugerindo estudos com diferentes condições de contorno nas paredes dos canais.

Talimi et al. (2013) apresentam resultados numéricos de transferência de calor para escoamentos bifásicos gás/líquido com padrão de bolhas segmentadas em microcanais retangulares sujeitos à temperatura prescrita nas paredes. Avaliou-se a influência do número de Reynolds, do ângulo de contato entre a fase gasosa e as paredes do microcanal e do comprimento das bolhas de gás que formam o escoamento segmentado. Os resultados apresentados informam que: a transferência de calor aumenta conforme o número de Reynolds também é aumentado; o ângulo de contato apresenta praticamente nenhum efeito sobre a transferência de calor; quanto menor o comprimento da bolha maior a transferência de calor.

A distribuição de temperatura ao longo de escoamento entre duas placas paralelas estratificado de dois fluidos imiscíveis foi avaliada em Gada et al. (2013). Este apresentou resultados analíticos e numéricos para o perfil de velocidade e temperatura considerando um escoamento completamente desenvolvido e outro para um escoamento em desenvolvimento sujeito a uma condição de contorno do primeiro, segundo e terceiro tipo nas paredes do canal. Os resultados numéricos e analíticos apresentaram boa concordância.

Em Bandara et al. (2015) uma revisão da literatura abordando a transferência de calor com escoamentos bifásicos em microcanais é feita. Tanto estudos experimentais quanto numéricos foram avaliados e, assim como observado por Talimi et al. (2012), a maior parte dos estudos se concentra em escoamento gás/líquido, apesar de escoamentos líquido/líquido fornecerem maiores capacidades térmicas e condutividades térmicas. No entanto, deve se levar em consideração que escoamentos líquido/líquido terão uma perda de carga maior em relação a escoamentos gás/líquido, sendo necessário assim uma comparação entre a energia consumida e o fluxo de calor obtido para os dois tipos de escoamentos. Bandara e colaboradores ainda enfatiza que escoamentos bifásicos segmentados apresentam aumentos significativos no fluxo de calor em relação a escoamentos monofásicos, embora a literatura

não apresente um consenso sobre o quanto de fato é esse aumento. Discrepâncias de mais de 500% nos valores para o número de Nusselt foram observadas, assim como observado em Thiangtham et al.(2016). Bandara et al. sugere que novos modelos devem ser elaborados levando em consideração a espessura de filme , a perda de carga, a fração de vazio o ângulo de contato do fluido com a parede com o intuito de diminuir as discrepâncias observadas.

A maior parte dos trabalhos observados na literatura sobre escoamentos multifásicos em microcanais trata de escoamentos bifásicos gás/líquido e está voltada principalmente para a identificação dos padrões de escoamento no interior do microcanal, como reportado por Talimi et al. (2012). Apenas recentemente começou-se a observar trabalhos com o interesse em aumentar a taxa de transferência de calor através de escoamentos bifásicos líquido/líquido, utilizando principalmente padrões de escoamento segmentado.

2.4 DIFUSÃO AXIAL DE CALOR EM MICROCANAIS

Geralmente, o estudo de problemas de convecção interna forçada na macro-escala não engloba o fenômeno de difusão axial de calor, sendo considerado, por simplificação da equação da energia, apenas a difusão transversal de calor, como consequência de um número de Péclet relativamente alto ($Pe > 30$). A exceção mais evidente está associada a problemas de convecção interna com metais líquidos. No entanto, para problemas envolvendo microcanais, o número de Péclet observado é menor e, portanto, não pode ser desprezado. Como será visto a seguir, a não consideração do termo de difusão axial pode levar a erros consideráveis no estudo de convecção em microcanais, sendo necessário assim, a inclusão deste termo para uma melhor modelagem do problema.

Um dos primeiros trabalhos a propor uma solução analítica da equação da energia para problemas com difusão axial foi Hsu (1968). Para este caso, foi considerado um escoamento laminar no interior de uma tubulação com condições de contorno do terceiro tipo para o problema de energia na parede do tubo. A distribuição de temperatura no fluido

ao longo do raio da tubulação é determinada analiticamente através de uma expansão de autofunções e autovalores dependentes do número de Péclet. Quando este é muito alto, a solução, como esperado, se reduz ao caso em que há apenas difusão transversal. O autor afirma que para casos em que o número de Péclet é menor do que 5, ou seja, casos em que a condução axial começa de fato a ser crítica para o problema, a convergência é mais demorada, necessitando um número maior de autovalores para a obtenção de melhores resultados.

Em Davis e Gill (1970), analisa-se o impacto da difusão axial na parede sobre a distribuição de temperatura no fluido. Considerou-se um escoamento entre placas paralelas do tipo Poiseuille-Couette, onde uma das paredes se encontra em movimento com velocidade constante e o fluido está sujeito a um gradiente de pressão. As condições de contorno consideradas foram de temperatura constante na parte interna da parede em movimento e fluxo de calor constante na parte externa da parede estática e uma equação de continuidade foi utilizada para acoplar as equações de energia entre o sólido e o fluido. A solução para o campo de temperatura é novamente resolvida através de uma expansão em autovalores e autofunções, as quais são definidas através de uma função hipergeométrica confluente. O autor conclui que aumentando a espessura da parede estática sujeita ao fluxo de calor os efeitos de difusão axial são intensificados, enquanto que com o aumento do número de Péclet os mesmos efeitos são reduzidos.

Nos trabalhos de Tan e Hsu (1970; 1972) e Tan e Normandia (1975) os efeitos da difusão axial são novamente avaliados, mas em problemas de transferência de massa. No primeiro, a concentração é avaliada para diversos números de Péclet ao longo de um tubo com dois tipos de escoamento diferentes, o primeiro com perfil de velocidade uniforme e o segundo com perfil de velocidade parabólico. Resultados analíticos foram obtidos para os dois casos, novamente utilizando expansões em autovalores e autofunções, a qual, para o caso de escoamento com perfil de velocidade uniforme, pode ser expressa utilizando funções de Bessel. Assim como alegado por Hsu (1968), o autor destaca a convergência lenta de problemas com baixo número de Péclet, sendo necessário a utilização de um maior número de termos na expansão. No segundo trabalho o domínio do canal foi estendido à montante, com uma concentração arbitrária em $z = -\infty$ e uma condição de contorno com

gradiente de concentração nulo na parede, e à jusante considerando uma condição de contorno do primeiro tipo na parede. O problema foi então resolvido de forma analítica através do procedimento de autonormalização de Gram-Schmidt. O terceiro trabalho é muito similar ao segundo, diferindo apenas na geometria do canal, o qual é considerado um canal com seção retangular ao invés de circular. O mesmo procedimento para obtenção do resultado analítico é utilizado.

Michelsen e Villadsen (1974) apresentam um novo método para solução de equações diferenciais parciais lineares para solução do clássico problema de Graetz (Graetz, 1883; 1885) com o termo de condução axial incluído. O método de colocação ortogonal é empregado, o qual é seguido de uma análise algébrica matricial de autovalores. O método de colocação é comparado com uma solução através de uma expansão em séries de Fourier, mostrando a existência de uma convergência mais rápida da primeira solução em relação à segunda para regiões próximas à condição inicial ($y \rightarrow 0$).

No trabalho de Campo e Auguste (1978), o problema de convecção com difusão axial foi resolvido de forma numérica através da combinação dos métodos Gauss-Seidel e Newton-Raphson. Neste caso, foi considerado um problema semelhante ao apresentado por Tan e Hsu (1972) com uma tubulação a montante adiabática e outra a jusante aplicando-se simultaneamente uma condição de contorno na parede de convecção e radiação. O autor conclui que os efeitos da condução axial não estariam ligados apenas ao número de Péclet, mas também as condições de troca térmica com a parede. Se houvesse uma condição de retirada de calor muito alta na parede os efeitos da condução axial poderiam ser desprezados mesmo para valores de Péclet menores que 5.

Bayazitoglu e Ozisik (1980) estudaram a solução do problema de Graetz com o termo de condução axial incluso nas equações, sugerindo uma solução através de transformações integrais. O autor compara seus resultados com os apresentados na literatura, obtendo uma boa concordância para os valores de temperatura média e número de Nusselt. Diferentemente do trabalho apresentado anteriormente, considerou-se apenas o desenvolvimento térmico a montante da tubulação e não a jusante, embora a mesma técnica pudesse ser aplicada para tal fim. A inclusão da região à montante nas equações e sua

solução através da mesma técnica utilizada em Bayazitoglu e Ozisik (1980), foram feitas em Vick et al. (1980).

Uma nova solução exata para o mesmo problema de Vick et al. (1980) foi apresentada utilizando novamente transformações integrais no trabalho de Vick e Ozisik (1981). Neste, a técnica empregada é comparada com o procedimento de autonormalização de Gram-Schmidt, a qual também forneceu resultados exatos para o mesmo problema. Os resultados de ambas as técnicas apresentaram uma boa concordância, embora se ressalte que a nova técnica é menos complexa e menos custosa. Vick et al. (1983) deram prosseguimento aos estudos anteriores, avaliando os efeitos do número de Péclet, do perfil de velocidade (parabólico e uniforme) e do número de Biot para a condição de contorno com o ambiente externo, sobre a transferência de calor do sistema. Os três efeitos mostraram variações significativas sobre a distribuição do número de Nusselt, temperatura média do fluido e sobre a temperatura da parede ao longo do comprimento da tubulação.

Para resolver o problema de transferência de calor com difusão axial e com condições de contorno do primeiro e segundo tipo de forma exata, Nagasue (1981) utiliza dois métodos distintos: o método da superposição e o de funções de Green. Segundo o autor, ambos os métodos retornam resultados idênticos. A função de Green apesar de ser mais simples e fácil de ser implementada, sua aplicabilidade é restrita para casos em que a temperatura e o fluxo de calor são constantes. Já o método da superposição é mais complexo e sua aplicabilidade é mais extensa, sendo possível aplicar condições de contorno variáveis ao longo do comprimento da tubulação.

Abordando o problema com temperatura prescrita na parede apresentado em Nagasue (1981), Laohakul et al. (1985) propõe duas soluções aproximadas, através de uma transformação integral, na qual os autovalores e autovetores seriam calculados explicitamente. A primeira solução aproximada seria para problemas com baixo número de Péclét e a segunda para altos números de Péclét. Os resultados obtidos com as duas aproximações foram então comparados com os resultados apresentados em Nagasue (1981), onde se pode ver para a primeira aproximação uma boa concordância com os dados

para números de Péclet menores que 1 e para a segunda aproximação uma boa concordância para os números de Péclet maiores que 10.

O problema de Graetz estendido para a condição de condução axial é novamente estudado por Ebadian e Zhang (1989). Neste trabalho uma nova abordagem analítica, utilizando a transformada de Fourier, é apresentada. O problema convectivo resolvido para este caso consistiu em um escoamento completamente desenvolvido no interior de um tubo com um salto de temperatura em sua parede. A equação da energia para este caso foi transformada em um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual também foi resolvido de forma analítica.

Uma solução aproximada para o problema de autovalor não-clássico, resultante da aplicação do método de separação de variáveis nas equações de Graetz estendidas para condução axial, é apresentada em Oliveira et al. (1995) através da aplicação da GITT. Para este caso, as soluções aproximadas para as autofunções e os autovalores foram expandidas em termos de autofunções e autovalores auxiliares obtidos a partir de um problema de autovalor auxiliar clássico do tipo Sturm-Liouville, o qual apresenta solução analítica. É válido destacar ainda a necessidade de avaliação da convergência, não apenas do campo de temperatura, mas também da convergência dos autovalores e autofunções que serão utilizados para tal fim. Como resultado, o autor destaca o aumento da taxa de convergência dos autovalores para baixos números de Péclet e que quanto menor o número de Péclet, menor é a importância do perfil de velocidade no problema, seja ele parabólico ou uniforme. O autor ainda reforça que a solução obtida por GITT possui um potencial muito grande para resolver problemas de autovalor variados, não apenas aqueles restritos à formulação de Sturm-Liouville.

Conforme comentado na seção 2.1, a literatura afirma existir discrepâncias entre os resultados experimentais obtidos para transferência de calor em microcanais e os modelos teóricos aplicados na macro-escala. Guo e Li (2003) e Herwig e Hausner (2003) estão entre os primeiros a sugerir que um dos possíveis motivos para a existência dessa discrepancia é a não consideração da condução axial na modelagem do problema, cujos efeitos são amplificados na micro-escala. Ou seja, a discrepancia existente não seria por motivos de

novos fenômenos existentes apenas na micro-escala não considerados na equação da energia, mas sim pela não consideração da difusão axial, reforçando ainda mais as considerações feitas no final da seção 2.1.

Com esta informação, Maranzana et al. (2004) propõe dois modelos, um explícito e outro exato, para resolver o campo de temperatura na parede dos microcanais, levando em consideração a difusão axial de calor nas paredes. O modelo explícito considera um novo número adimensional M definido pelo autor como “número de condução axial”. Segundo o autor, para valores de M menores que 0,01 os efeitos da difusão axial podem ser desprezados. O método proposto para resolver a equação da energia transiente utiliza a transformada de Fourier para uma das componentes espaciais e a transformada de Laplace para o tempo, sendo conhecida como método de quadripolos. O autor ainda enfatiza a necessidade de se considerar os efeitos da difusão axial nos projetos de microtrocadores de calor, uma vez que, para fluxos contra-correntes a condução axial diminui a eficiência do trocador. Tiselj et al. (2004) também apresentam um estudo dos efeitos de condução axial sobre microtrocadores de calor. Neste, resultados numéricos e experimentais foram obtidos, e mais uma vez chegou-se a conclusão que as equações de Navier-Stokes e da energia representavam bem os resultados experimentais em microcanais.

Mais uma vez abordando o problema de Graetz estendido para condução axial, Jeong e Jeong (2006) resolve a equação da energia através de uma expansão em autofunções, para diferentes casos. Considerando um escoamento completamente desenvolvido e com condições de contorno do primeiro e segundo tipo na parede, os efeitos axiais foram avaliados para diferentes situações, como por exemplo, quando há salto de temperatura na parede (condição esta existente quando há escorregamento do fluido na parede do canal) e quando há dissipação viscosa. O número de Nusselt também foi calculado para os diversos casos. Os resultados mostraram que para valores baixos do número de Péclet, o número de Nusselt aumenta, enquanto que para valores altos do número de Knudsen, o número de Nusselt diminui. Um problema semelhante também foi abordado por Çetin et al. (2009), cujas conclusões obtidas para o número de Nusselt foram idênticas às apresentadas por Jeong e Jeong (2006).

Em Gondim et al. (2007) um problema transiente de transferência de calor entre placas paralellas é avaliado através da GITT em conjunto com uma estratégia de filtragem do problema, denominada como filtro instantâneo local (LIF), a qual garantiu uma aceleração da convergência. Para este problema considerou-se a existência de difusão axial e um escoamento completamente desenvolvido no interior do canal. A partir dos resutlados os autores reforçam que a difusão axial não deve ser neglengenciada, a priori, sem que se faça uma averiguação adequada das condições de contorno e de entrada adotadas no modelo matemático.

Cole e Çetin (2011) estudaram os efeitos da difusão axial tanto no líquido quanto nas paredes de um microcanal entre placas paralelas com escoamento completamente desenvolvido e com um fluxo de calor constante na superfície externa da parede. Os resultados foram obtidos de forma analítica através do método da função de Green, onde os efeitos do número de Péclet, comprimento do canal, espessura da parede e condutividade da parede sobre o número de Nusselt são abordados. Os autores afirmam que efeitos da condução axial nas paredes do canal não devem ser desprezadas nas seguintes condições, quando o microcanal possui uma razão entre seu comprimento e sua altura pequeno, quando o número de Péclet for pequeno, quando a razão entre a espessura da parede e a altura do microcanal for alta e quando a condutividade térmica do material da parede for maior que a condutividade do fluido no interior do microcanal.

No trabalho de Kalyoncu e Barisik (2016), o problema de Graetz estendido para condução axial é abordado para micro-trocadores de calor com o objetivo de, segundo os autores, verificar as divergências existentes entre os fenômenos de transporte convectivo na micro e na macro escala, conforme discutido anteriormente. Mais uma vez os resultados obtidos se mostram semelhantes aos trabalhos de Jeong e Jeong (2006), Cole e Çetin (2011) e Knupp et al. (2013), ou seja, um aumento do número de Nusselt para uma diminuição do número de Peclet e um aumento do número de Knudsen.

A revisão acima expõe a necessidade de se considerar a difusão axial em problemas de transferência de calor em microcanais, fato este que pode ser parte da causa das discrepâncias entre os resultados experimentais e numéricos. Vale ressaltar que parte dos

trabalhos apresentados nesta revisão, que consideraram os efeitos de difusão axial, obtiveram uma boa concordância entre resultados teóricos e experimentais, indicando que um esforço maior deve ser feito nesta linha de pesquisa.

2.5 PROBLEMAS CONJUGADOS EM TRANSFERÊNCIA DE CALOR

O termo “problema conjugado”, utilizado para uma classe de problemas em transferência de calor, foi definido primeiramente por Perelman (1961) como um problema onde há um acoplamento entre as equações de condução de calor no sólido e de convecção de calor no fluido. Ou seja, as equações de energia dos dois meios são acopladas por condições de interface, geralmente continuidade de temperatura e fluxo de calor, na superfície que os separa. Perelman (1961) aborda dois problemas conjugados diferentes. O primeiro considera um escoamento com velocidade uniforme sobre uma superfície sólida e o segundo um escoamento externo laminar ao redor de uma placa fina com uma fonte de calor interna. A solução exata para ambos os casos é obtida através do método de soluções assintóticas para equações integrais singulares.

Luikov et al. (1971) abordam problemas conjugados em escoamentos internos e externos. No primeiro, um escoamento de Poiseuille no interior de um duto circular é considerado e o problema conjugado é resolvido reduzindo as equações para uma única equação integral. No segundo, um escoamento externo com velocidade uniforme é considerado e sua solução obtida através da aplicação da transformada de Fourier. Dando continuidade a seus estudos, Luikov (1974) considera um problema conjugado de um escoamento externo laminar sobre uma placa plana com razão entre espessura e comprimento muito menor que um e com temperatura prescrita na superfície oposta ao escoamento. O número de Nusselt também foi calculado, onde chegou-se a conclusão que se o fluxo de calor para a placa for considerado, o número de Nusselt do sistema é incrementado.

No trabalho apresentado por Krishan (1982), o problema conjugado com escoamento completamente desenvolvido e transferência de calor transiente no interior de um tubo com espessura finita é resolvido utilizando-se a transformada de Laplace. As duas condições de contorno consideradas na parede externa da tubulação foram de fluxo de calor e temperatura uniformes.

Em Webb e Ramadhyani (1985), um problema conjugado foi considerado no estudo de transferência de calor no interior de um canal entre placas paralelas, com aletas internas transversais equidistantes uma das outras, e com escoamento laminar em regime permanente. Como condição de contorno nas paredes externas aplicou-se um fluxo de calor uniforme. O problema foi resolvido numericamente através do método de diferenças finitas e diversas simulações foram realizadas para diferentes arranjos geométricos e números de Reynolds e Prandtl. Os resultados obtidos indicaram um maior número de Nusselt para a geometria proposta, uma vez que o calor proveniente das paredes era melhor distribuído ao longo do fluido. O autor ainda sugere uma geometria otimizada para obter um elevado número de Nusselt, para um menor fator de atrito no interior do canal.

Cotta et al. (1987) apresentam a solução analítica e exata para um problema transiente de convecção forçada através de um escoamento com velocidade uniforme no interior de placas paralelas e dutos circulares com conjugação na parede. Foi utilizada uma condição de contorno do primeiro tipo na face externa da parede e uma temperatura de entrada no canal transiente periódica. A solução foi obtida através de autofunções e autovalores obtidos através de um problema de autovalor complexo, que por sua vez foi resolvido através do método de contagem modificado. Um dos resultados enfatizados pelo autor é a importância da capacidade térmica do material da parede. Quando a capacidade térmica é alta a parede é capaz de absorver mais calor, fazendo com que a variação periódica da temperatura na entrada do canal seja amortecida rapidamente ao longo de seu comprimento. No entanto, quando a capacidade térmica da parede é baixa, o efeito de amortecimento da temperatura é reduzido e a oscilação da mesma ao longo do canal se propaga ao longo de um comprimento maior da tubulação.

Outro problema transiente com conjugação é estudado por Lin e Kuo (1988), onde a condução (axial e radial) também é considerada no modelo. O escoamento no interior do duto é considerado laminar e completamente desenvolvido, com as paredes do tubo submetidas inicialmente a uma condição adiabática, para depois serem submetidas a fluxo de calor uniforme, e depois novamente retornando à condição adiabática. As equações de energia para o fluido e para o sólido foram resolvidas de forma numérica através do método de diferenças finitas. O autor enumera diversas conclusões a partir dos resultados obtidos. Entre elas é possível destacar a importância da capacidade térmica da parede sobre a propagação de calor ao longo do canal (assim como foi observado por Cotta et al. (1987)) e a influência significativa do número de Péclet sobre o transiente de temperatura, alegando que para números de Péclet altos o sistema leva menos tempo para atingir um regime permanente.

Olek et al. (1991) talvez tenha sido um dos primeiros trabalhos a tratar o problema conjugado de transferência de calor em domínio único. O problema em questão consistiu em um escoamento laminar completamente desenvolvido, tanto hidrodinamicamente quanto termicamente, no interior de um duto circular, com transiente de temperatura na parede, onde foram considerados dois casos distintos condições de contorno do primeiro e do segundo tipo na parede. Para resolvê-lo, utilizou-se um método de separação de variáveis não tradicional.

Utilizando a GITT, Guedes e Cotta (1991) estudaram um problema muito semelhante novamente ao apresentado por Cotta et al. (1987), resumindo-se a um problema conjugado convectivo-condutivo transiente de transferência de calor com temperatura de entrada variando periodicamente. No interior do canal, foi considerado um escoamento laminar entre placas paralelas, sujeitas a uma condição de contorno do terceiro tipo nas paredes externas. Para a solução por GITT, considerou-se um modelo de parede fina, sem a existência de gradiente transversal de temperatura, apenas axial. Como resultado, o autor alega que para a condição em que a razão entre capacidade térmica do fluido e do sólido é elevada, um aumento do número de Biot retorna um aumento na amplitude do fluxo de calor na interface líquido-sólido uma vez que, nesta condição, há uma menor resistência térmica entre o sólido e o ambiente. No entanto quando a mesma razão apresenta valores

baixos, um aumento do número de Biot retorna uma diminuição na amplitude do fluxo de calor.

Guedes e Ozisik (1992) estudaram um problema conjugado em regime estacionário com escoamento turbulento entre placas paralelas e condição de contorno do terceiro tipo aplicada na face externa da parede. Novamente o modelo de parede fina é utilizado para a solução via GITT, onde o gradiente transversal de temperatura é desprezado e apenas a condução axial é considerada. O autor conclui que os efeitos da condução axial na parede da tubulação são maiores em regiões próximas a entrada e para baixos números de Péclet , considerando o escoamento turbulento.

Um escoamento laminar completamente desenvolvido entre placas paralelas é novamente investigado por Yan (1993), onde tanto o escoamento quanto a parede possuem, inicialmente, a mesma temperatura. A parede do canal a montante e a jusante é considerada adiabática e no centro, definiu-se uma condição do terceiro tipo na face externa da parede com a temperatura do ambiente menor que a temperatura inicial do fluido e da parede. A transferência de calor transiente com conjugação foi considerada no modelo, o qual foi resolvido de forma numérica através do método de diferenças finitas. A influência da geometria e das propriedades térmicas do fluido e do sólido foi investigada, chegando-se a conclusão que para valores altos da razão entre a condutividade térmica da parede e do fluido e para espessuras maiores da parede, o tempo para se atingir um regime permanente para o campo de temperatura é maior. O mesmo efeito é observado para pequenos valores da razão entre a difusividade térmica da parede e do fluido.

Vynnycky et al. (1998) apresentam um problema de transferência de calor entre uma placa plana e um escoamento externo laminar (definido pela solução de Blasius) com conjugação na parede. A condição de contorno na face da parede oposta ao escoamento é definida com uma temperatura constante e tanto o comprimento quanto a espessura da placa são considerados finitos. O problema proposto é resolvido de duas formas distintas, a primeira de forma numérica e a segunda de forma analítica. A primeira apresentou dificuldades numéricas para determinadas condições de número de Péclet e razão entre largura e espessura da placa. O método analítico, por sua vez, se mostrou válido para

sistemas com número de Péclet muito maior que 1 e razão entre largura e espessura da placa menores que 5. Este mesmo problema também foi abordado por Chida (2000), cujo intuito era determinar a temperatura da parede ao longo do comprimento da placa. O problema também foi considerado conjugado e as equações de energia foram resolvidas de forma numérica e depois comparada com os dados obtidos por Vynnycky et al. (1998) e Luikov (1974).

Seguindo a mesma linha de pesquisa de Maranzana et al. (2004) apresentada na seção 2.3, Maranzana et al. (2004a) propõe uma solução analítica para o problema conjugado de transferência de calor com escoamento completamente desenvolvido entre placas paralelas, utilizando novamente o método de quadripolos. Neste caso considerou-se uma condição de contorno do segundo tipo na face externa das paredes. Como apresentado no primeiro trabalho, o método se mostrou eficiente para resolver o problema com difusão axial de calor no fluido para baixos números de Péclet, no entanto, o autor faz a ressalva de que a solução obtida por este método é válida para, entre outras condições, parâmetros termofísicos constantes. Ou seja, é provável que o mesmo método não possa ser utilizado em um problema não-linear ou abordando um domínio único, solução esta que será apresentada nos capítulos seguintes.

O problema de transferência de calor conjugado sobre uma placa plana com escoamento externo é novamente estudado por Naveira et al. (2009) com a inclusão de uma fonte de calor variável no tempo na interface sólido-fluido e considerando uma espessura de parede finita. O problema de condução de calor no sólido foi simplificado pelo método CIEA para depois ser acoplada à equação de energia do fluido e resolvida pela GITT através de uma transformação parcial, a qual retorna um sistema de equações diferenciais parciais resolvido pelo programa *Mathematica*®. Diversos problemas diferentes foram resolvidos, onde se modificou o material da parede e a espessura da mesma a fim de se comparar com um caso onde a conjugação na parede não era considerada.

Kabar et al. (2013) avaliaram a importância da condução axial na parede em um problema de transferência de calor conjugado com escoamento rarefeito e em desenvolvimento ao longo de um microcanal entre placas paralelas com condição do

segundo tipo na face externa da parede. A condição de rarefação do escoamento permite a suposição de escorregamento na parede para casos em que o número de Knudsen é maior que 0,001 ($Kn > 0,001$), permitindo, por sua vez, a ocorrência do fenômeno de salto de temperatura na parede. As equações de momentum e energia foram resolvidas de forma numérica, através do método de volumes finitos, cujos resultados para diferentes espessuras da parede e razões entre a condutividade térmica do sólido e do fluido foram obtidos e comparados entre si. Como conclusão, assim como obtido em outros trabalhos, para um escoamento sem escorregamento, ou seja, $Kn = 0$, quanto maior a espessura da parede maior será a importância do efeito da difusão axial de calor na parede. O autor ainda afirma que, devido a condição de salto de temperatura na interface sólido-líquido, a taxa de troca de calor entre os dois meios é consideravelmente diminuída, fazendo com que a difusão axial no meio sólido possa ser desprezado para qualquer valor de número de Knudsen e espessura da parede. No entanto, essa afirmação deve ser melhor avaliada, uma vez que o menor número de Knudsen avaliado pelo autor (0,06) é uma ordem de grandeza acima do número de Knudsen para o qual o efeito de salto de temperatura começa a existir.

Em Nekoubin (2016), um problema conjugado em microcanais com escoamento entre placas paralelas e dupla camada elétrica (EDL) com baixo potencial zeta é também estudado através de uma formulação em domínio único, cuja solução também é obtida através de uma expansão em autovalores e autofunções. Para validar esta solução, os resultados obtidos para um condição sem camada elétrica são comparados com outras resultados da literatura, onde o autor afirma existir uma boa concordância. De fato uma boa concordância pode ser observada na região termicamente desenvolvida do sistema, embora o mesmo não possa ser afirmado para a região em desenvolvimento térmico. Neste trabalho os efeitos do número de Peclet, espessura da parede, razão entre condutividades térmicas e o potencial zeta sobre o número de Nusselts são estudados a fundo.

A partir dos trabalhos apresentados é possível perceber a importância da consideração da conjugação na parede para problemas de transferência de calor na microescala. Para problemas na macroescala esse efeito geralmente não é muito importante pelo fato da espessura da parede das tubulações ser, geralmente, muito menor que o próprio diâmetro da tubulação. No entanto, quando o estudo de transferência de calor em microcanais é

abordado, a hipótese de parede com espessura fina já não é mais válida e os efeitos da conjugação associados aos efeitos da difusão axial de calor (comentada na seção 2.3) não podem mais ser desprezados. Assim como a difusão axial, a não inclusão nos modelos matemáticos dos efeitos da conjugação na parede pode ser mais um motivo para as discrepâncias existentes entre os resultados teóricos e experimentais.

2.6 GITT APLICADA À MICROESCALA

Mikhailov e Cotta (2005) utilizaram a Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) para resolver o problema de transferência de calor entre placas paralelas para uma condição de escorregamento e salto de temperatura na parede. Esta condição é válida, geralmente, para escoamentos de gases rarefeitos quando o número de Knudsen (Kn) atinge valores maiores que 0,001. As soluções apresentadas pelo autor foram desenvolvidas no programa *Mathematica®*.

Castellões et al. (2007), também utilizando a GITT, analisam um problema similar ao de Gondim et al. (2007), mas considerando um escoamento com escorregamento na parede. A variação do número de Nusselt em função do número de Knudsen e Brinkman foram analisados. Para o número de Knudsen, obteve-se a mesma conclusão apresentada por Jeong e Jeong (2006). Já para o número de Brinkman, observou-se que quanto maior o valor deste, maior o número de Nusselt do sistema.

Em Nunes et al. (2010) o problema de transferência de calor conjugado em um microcanal entre placas paralelas é abordado e comparado com dados experimentais obtidos a partir de um microcanal microusinado em metal (uma parede em latão e outra em cobre) com espaçamento de 270 μm . A condição de contorno do terceiro tipo nas faces externas das duas paredes foi considerada no modelo assim como um escoamento laminar no interior do canal e a difusão axial de calor no meio fluido. A metodologia semi-analítica da GITT foi novamente utilizada para resolver o problema, resultando em uma boa concordância (3% de desvio) com os dados experimentais obtidos para o número de

Nusselt ao longo do canal. O autor ainda frisa a importância de incluir o efeito da conjugação na parede na modelagem do problema, uma vez que a mesma leva a uma variação do fluxo de calor para o fluido ao longo da parede, diferentemente das considerações de fluxo uniforme, geralmente feitas nos estudos na macro-escala.

Castellões et al. (2010), aplicam a GITT através de uma transformação parcial e com uma formulação transitória, estudou a intensificação da taxa de transferência de calor em microcanais com paredes corrugadas. Para isso, assumiu-se a equação da energia com os efeitos de difusão axial inclusos e com condição de temperatura prescrita nas paredes sinuosas. Os resultados obtidos para o número de Nusselt com estas paredes foram comparados com os resultados obtidos para paredes planas, indicando que o aumento na taxa de transferência de calor se deve principalmente ao baixo número de Péclet e às corrugações nas paredes, as quais modificam o perfil de velocidade no interior do canal. No topo de cada corrugação observa-se um aumento do número de Nusselt uma vez que há um estrangulamento do escoamento e um consequente aumento da velocidade na região.

Mais recentemente, Knupp et al. (2013) abordaram um problema similar ao apresentado por Cole e Çetin (2011), mas aplicando uma condição do terceiro tipo na parede externa do microcanal. Para este caso foi considerado um problema conjugado, cuja solução foi obtida através de uma formulação em domínio único, onde as propriedades físicas do sólido e do fluido variam espacialmente com transições abruptas na interface sólido-líquido, resolvida por GITT. Diversos perfis de temperatura são apresentados pelo autor ao longo da geometria onde é possível ver a influência da difusão axial nas paredes, principalmente no começo do canal. A variação do número de Nusselt também é apresentada, comprovando mais uma vez que este é intensificado para menores valores do número de Péclet.

Knupp et al. (2014) apresentaram uma solução híbrida do problema conjugado de transferência de calor, empregando uma formulação em domínio único através da GITT, para diferentes geometrias, utilizando 1, 2 ou 3 canais circulares ($450 \mu\text{m}$ de diâmetro) paralelos, comparando, posteriormente, seus resultados semi-analíticos com resultados experimentais obtidos através da técnica de termografia por infravermelho. Sua

comparação mostra uma boa concordância entre os dados experimentais e teóricos, indicando mais uma vez que as teorias válidas para a macro escala ainda são diretamente aplicáveis na micro escala, uma vez que todos os efeitos importantes sejam considerados no modelo, como difusão axial e conjugação com a parede nesse caso específico.

Já nos trabalho de Knupp et al. (2014; 2015a) apresenta-se a solução via GITT de problemas de transferência de calor com conjugação e com formulação de domínio único. No primeiro trabalho, os resultados da solução híbrida numérico-analítico, obtidos para um problema 3D de escoamento laminar em um duto circular (diâmetro de $450\ \mu\text{m}$) no interior de uma chapa retangular com largura, espessura e comprimentos finitos, são comparados com os dados experimentais obtidos através da técnica de termografia por infravermelho. Esta comparação se mostrou surpreendente, validando não somente a técnica GITT com os dados experimentais, como também a utilização das equações de Navier-Stokes e de energia para problemas envolvendo microtrocadores de calor. No segundo trabalho, aborda-se um problema de transferência de calor transiente com conjugação e escoamento completamente desenvolvido entre placas paralelas considerando os efeitos de difusão axial de calor tanto na parede quanto no fluido. A condição de contorno na face externa da parede a montante do microcanal é considerada adiabática, enquanto que a jusante é considerada a existência de uma convecção externa. O problema é resolvido novamente através de GITT com formulação de domínio único e também numericamente através do programa de simulação numérica COMSOL® que utiliza o método de elementos finitos. Os resultados obtidos através das duas técnicas mostraram uma excelente concordância, comprovando a verificação dos dois códigos.

Em Knupp et al. (2015c) um trabalho similar à Knupp et al. (2014) é apresentado, considerando, no entanto, 6 microcanais com seção triangular ao invés de circulares. Os resultados obtidos via GITT foram então comparados com resultados numéricos, utilizando a plataforma comercial COMSOL, e resultados experimentais obtidos via termografia por infravermelho, através da qual foi possível medir a temperatura da face externa do substrato, e via fluorescência induzida por laser (LIF), com a qual foi possível medir a temperatura do fluido no interior dos microcanais. A solução do problema via GITT mostrou uma boa concordância com os resultados numéricos e experimentais, embora a

temperatura do fluido no interior dos microcanais próximos às laterais do microssistema tenha apresentado um decréscimo maior do que o observado nos modelos. Como explicação para essa variação em parte dos resultados, os autores indicam a dificuldade em isolar termicamente as laterais do microssistema, resultando em uma maior perda de calor do fluido presente nos microcanais próximos a estas laterais.

No trabalho de Cerqueira (2016), analisou-se um problema conjugado transiente tridimensional considerando um escoamento laminar no interior de um microcanal retangular. Além disso, considerou-se também que as condições de entrada do fluido variavam ao longo do tempo. Este problema por sua vez foi resolvido através da GITT com formulação em domínio único e seus resultados comparados com os resultados experimentais e os obtidos via COMSOL.

Knupp et al. (2016) apresenta um estudo de transferência de calor com conjugação na parede de um microcanal circular com condução axial e escorregamento na parede, resolvido através da GITT com formulação em domínio único e comparado com resultados obtidos via método de diferenças finitas. Além disso, apresenta-se uma nova metodologia de solução via GITT, que consiste na aplicação de um balanço integral no problema de autovalor. Com isso, conseguiu-se uma redução considerável da ordem de truncamento do problema (de 8000 autovalores para 50 autovalores, além de uma melhor concordância com o resultado numérico).

3 OBJETIVOS

O objetivo do presente trabalho é, portanto, apresentar uma metodologia numérico-analítica da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT), em combinação com a estratégia de reformulação em domínio único, com o intuito de se obter uma solução para problemas de transferência de calor conjugada envolvendo fluidos imiscíveis em contato direto, múltiplas correntes e microcanais com geometrias complexas. Com isso, será possível avançar no estudo de micro-trocadores de calor e outros dispositivos microfluidicos como micro-misturadores e microrreatores, ao visar o tratamento de configurações geométricas e físicas mais complexas dos que as consideradas em Knupp (2013).

Inicialmente, assim como abordado por Gada et al. (2013), será analisado o caso para um escoamento bifásico estratificado no interior de um ou mais canais retangulares. Dois esquemas distintos de transformação, um considerando um problema de autovalor não-clássico e outro considerando uma transformação parcial das equações, serão utilizados para obter-se a distribuição de temperatura através do canal com escoamento bifásico e nas paredes do substrato. Vale ressaltar que neste caso não existe simetria do perfil de temperatura devido à própria natureza do escoamento estratificado. Os resultados das duas metodologias serão analisados com o intuito de verificar qual delas possui a melhor taxa de convergência, independentemente do número de interfaces sólido-líquido ou líquido-líquido existentes no interior do domínio, e assim permitindo recomendar a melhor alternativa de transformação integral para o problema conjugado geral de múltiplos canais e múltiplas fases. Para este caso, observou-se uma melhora significativa da convergência dos resultados utilizando a solução via problema de autovalor não-clássico.

A seguir, o presente trabalho prossegue no estudo de transferência de calor conjugada em canais com configurações geométricas complexas. Como casos teste para desenvolver e ilustrar a metodologia, foram selecionadas duas geometrias bidimensionais, como características bem distintas. No primeiro caso, adotou-se um canal sinuoso do tipo "ferradura" de seção transversal constante ao longo do escoamento, e no segundo caso foi

considerado um canal reto corrugado, portanto com variações de seção transversal ao longo do escoamento. A variação mais complexa das propriedades e do perfil de velocidade (não resolvido via GIT) no interior do domínio, que ocorrem em ambas as direções espaciais, sugerem a necessidade de aplicar-se um esquema de transformação total na solução da equação de energia, em contraposição ao esquema de transformação parcial preferido por Knupp et al. (2013).

Três alternativas distintas de aplicação da GIT são avaliadas para o primeiro caso (canal sinuoso): uma considerando um problema de autovalor com coeficientes constantes, outra um problema de autovalor com coeficientes variáveis, e uma terceira adotando-se um filtro recursivo mais informativo. É importante ressaltar que todas essas alternativas da metodologia permitem, a princípio, resolver qualquer geometria arbitrária, tanto para o regime permanente quanto para o regime transitório, mas diferentes taxas de convergência podem ser obtidas, como será aqui analisado. Os resultados obtidos para cada metodologia, além de serem comparados entre si, também serão comparados com os resultados numéricos obtidos a partir da plataforma comercial COMSOL. A alternativa com melhores taxas de convergência, dentre as três especificadas, será então utilizada para estudar o segundo caso teste de canais corrugados, com diferentes tipos de corrugações.

4 TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA (GITT)

O presente capítulo tem por objetivo apresentar a solução formal, através da Técnica da Transformada Integral Generalizada, que compreende a solução de problemas específicos que serão tratados ao longo deste trabalho. Primeiramente, apresenta-se a metodologia de solução de um problema transiente convectivo-difusivo geral. Na sequência, a metodologia para a solução de um problema com formulação em domínio único é apresentada. E por final, a metodologia para a solução de problemas de autovalor através da própria GITT é brevemente discutida. Todas essas metodologias serão extensivamente utilizadas ao longo deste trabalho.

4.1 PROBLEMA CONVECTIVO-DIFUSIVO GERAL

Para melhor exemplificar a técnica de solução, será considerado um problema geral com N potenciais, T_k , acoplados, em regime transiente, os quais podem representar temperaturas, velocidades ou concentrações. O problema em si é definido em uma determinada região V com uma superfície de contorno S e com todos os termos convectivos e não-lineares inclusos no termo fonte da equação e das condições de contorno da mesma, conforme a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{w}_k(x) \frac{\partial T_k(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(K_k(\tilde{x}) \nabla T_k(\tilde{x}, t) \right) - d_k(\tilde{x}) T_k(\tilde{x}, t) + P_k(\tilde{x}, t, T), \quad (4.1a)$$
$$\tilde{x} \in V, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

tendo como condição de contorno e condição inicial, respectivamente:

$$\alpha_k(\tilde{x})T_k(\tilde{x}, t) + \beta_k(\tilde{x})K_k(\tilde{x})\frac{\partial T_k(\tilde{x}, t)}{\partial \tilde{n}} = \phi_k(\tilde{x}, t, T), \quad \tilde{x} \in S, \quad t > 0 \quad (4.1b)$$

$$T_k(\tilde{x}, 0) = f_k(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in V \quad (4.1c)$$

onde α_k e β_k são coeficientes para um determinada condição de contorno, \tilde{n} é o vetor normal à superfície S e ϕ_k o termo fonte da condição de contorno. Os coeficientes da equação e condição de contorno também podem ser não-lineares. No entanto, na forma apresentada já se considera a equação escrita com coeficientes lineares e com quaisquer não-linearidades incorporadas também ao termo fonte.

Para os casos em que $P_k \equiv P_k(x, t)$ e $\phi_k \equiv \phi_k(x, t)$, a equação se torna um problema de difusão linear de classe I, conforme a classificação apresentada por Mikhailov e Ozisik (1984), sendo possível, então, obter uma solução via CITT. No entanto, a formulação mais geral apresentada na Eq. 4.1 é não linear e sua solução só é possível através da GIT.

A seguir, considera-se uma solução filtro com o objetivo de acelerar a convergência da solução do potencial e melhorar o desempenho computacional do método através da consideração de informação do termo fonte (Cotta R. M., 1993; Cotta & Mikhailov, 1997), com o potencial sendo definido de forma geral como:

$$T_k(\tilde{x}, t) = T_k^*(\tilde{x}, t) + T_{k,F}(\tilde{x}; t) \quad (4.2)$$

onde $T_{k,F}(\tilde{x}; t)$ é a solução filtro (sendo t um parâmetro na solução) e $T_k^*(\tilde{x}, t)$ o potencial filtrado. Substituindo a Eq. (4.2) em (4.1) é possível obter a equação geral para o potencial filtrado:

$$w_k(\tilde{x}) \frac{\partial T_k^*(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(K_k(\tilde{x}) \nabla T^*(\tilde{x}, t) \right) - d_k(\tilde{x}) T_k^*(\tilde{x}, t) + P_k^*(\tilde{x}, t, T^*), \quad (4.3a)$$

$$\tilde{x} \in V, \quad t > 0$$

assim como sua respectiva condições de contorno e condição inicial:

$$\alpha_k(\tilde{x}) T_k^*(\tilde{x}, t) + \beta_k(\tilde{x}) K_k(\tilde{x}) \frac{\partial T_k^*(\tilde{x}, t)}{\partial n_{\tilde{x}}} = \phi_k^*(\tilde{x}, t, T^*), \quad \tilde{x} \in S, \quad t > 0 \quad (4.3b)$$

$$T_k^*(\tilde{x}, 0) = f_k^*(\tilde{x}) = f_k(\tilde{x}) - T_{k,F}(\tilde{x}; 0), \quad \tilde{x} \in V \quad (4.3c)$$

onde os termos fontes filtrados são:

$$\begin{aligned} P_k^*(\tilde{x}, t, T^*) &= P_k(\tilde{x}, t, T) \\ &- \left[w_k(\tilde{x}) \frac{\partial T_{k,F}(\tilde{x}; t)}{\partial t} - \nabla \cdot \left(K_k(\tilde{x}) \nabla T_{k,F}(\tilde{x}; t) \right) \right. \\ &\left. + d_k(\tilde{x}) T_{k,F}(\tilde{x}; t) \right] \end{aligned} \quad (4.3d)$$

$$\phi_k^*(\tilde{x}, t, \tilde{T}^*) = \phi_k(\tilde{x}, t, \tilde{T}) - \left[\alpha_k(\tilde{x}) T_{k,F}(\tilde{x}; t) + \beta_k(\tilde{x}) K_k(\tilde{x}) \frac{\partial T_{k,F}(\tilde{x}; t)}{\partial \tilde{n}} \right] \quad (4.3e)$$

Seguindo o formalismo de GITT, é necessário definir um problema de autovalor apropriado, a partir do qual será possível obter as autofunções e autovalores necessários para a solução do problema (4.1). Aplicando, então, o método de separação de variáveis no problema filtrado, é possível obter o seguinte problema de autovalor:

$$\nabla \cdot \left(K_k(\tilde{x}) \nabla \psi_{ki}^*(\tilde{x}) \right) + \left(\mu_{ki}^2 w_k(\tilde{x}) - d_k(\tilde{x}) \right) \psi_{ki}^*(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in V \quad (4.4a)$$

junto com suas condições de contorno:

$$\alpha_k(\tilde{x}) \psi_{ki}^*(\tilde{x}) + \beta_k(\tilde{x}) K_k(\tilde{x}) \frac{\partial \psi_{ki}^*(\tilde{x})}{\partial \tilde{n}} = 0, \quad \tilde{x} \in S \quad (4.2b)$$

onde μ_{ki} são os autovalores e $\psi_{ki}^*(\tilde{x})$ são as autofunções correspondentes, as quais serão consideradas previamente conhecidas para efeito prático na apresentação desta metodologia. Sendo assim, a partir das Eq. (4.4a) e (4.2b) e da propriedade da ortogonalidade das autofunções é possível definir os pares da transformada integral:

$$\text{Transformada: } \bar{T}_{k,i}(t) = \int_V w_k(\tilde{x}) \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) T_k(\tilde{x}, t) dV \quad (4.5a)$$

$$\text{Inversa: } T_k^*(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) \bar{T}_{k,i}(t) \quad (4.5b)$$

onde $\bar{T}_{k,i}^*(t)$ é o potencial filtrado transformado e $\tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x})$ é a autofunção normalizada, definida por:

$$\tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) = \frac{\psi_{ki}^*(\tilde{x})}{N_{ki}^{1/2}} \quad (4.5c)$$

e N_{ki} , a integral de normalização:

$$N_{ki} = \int_V w_k(\tilde{x}) \psi_{ki}^{*2}(\tilde{x}) dV \quad (4.5b)$$

Com o par transformada-inversa tendo sido definido, é possível agora realizar a transformação integral da Eq. (4.1) através da aplicação do operador $\int_V \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x})(\cdot) dV$ na mesma. Aplicando-se as condições de contorno definidas nas Eqs. (4.3b) e (4.2b) juntamente com a segunda fórmula de Green, obtém-se um sistema equações diferenciais ordinárias para os potenciais transformados $\bar{T}_{k,i}^*(t)$ e suas respectivas condições iniciais, explicitados como:

$$\frac{d\bar{T}_{k,i}^*(t)}{dt} + \mu_{ki}^2 \bar{T}_{k,i}^*(t) = \bar{P}_{ki}^*(t, T) + \bar{b}_{ki}^*(t, T), \quad (4.6a)$$

$$t > 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad k = 1, 2, \dots, N_P$$

onde $\bar{P}_{ki}^*(t, \tilde{T}_j^*)$ é o termo fonte transformado, que surge a partir da transformação integral dos termos fonte $P_k^*(\tilde{x}, t, \tilde{T}_j^*)$ da equação filtrada, e $\bar{b}_{ki}^*(t, \tilde{T}_j^*)$ surge a partir da contribuição dos termos fonte das condições de contorno, conforme apresentado abaixo:

$$\bar{P}_{ki}^*(t, \bar{T}_j) = \int_V \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) P_k^*(\tilde{x}, t, \tilde{T}_j^*) dV \quad (4.6b)$$

e

$$\bar{b}_{ki}^* = \int_S \phi_k^*(\tilde{x}, t, \tilde{T}_j^*) \left(\frac{\tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) - K_k(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x})}{\partial n}}{\alpha_k(\tilde{x}) + \beta_k(\tilde{x})} \right) dS. \quad (4.6c)$$

Por final, é necessário realizar a transformação das condições iniciais (4.1c) através do operador $\int_V w_k(\tilde{x}) \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x})(\cdot) dV$, o que resulta em:

$$\bar{T}_{k,i}(0) = \bar{f}_{ki} \equiv \int_V w_k(\tilde{x}) \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) f_k(\tilde{x}) dV \quad (4.7)$$

O sistema infinito de equações diferenciais ordinárias não-lineares e acopladas entre si apresentado na Eq. (4.6) não possui, geralmente, uma solução analítica, sendo necessário a utilização de um método numérico para sua solução, motivo pelo qual o método até então apresentado é classificado, novamente, como um método híbrido ou semi-analítico. Obviamente, o sistema infinito descrito deverá ser truncado até um determinado valor N_P que retorne o resultado convergido para uma determinada precisão desejada.

Por fim, após a obtenção dos N_P 's resultados dos potenciais transformados $\bar{T}_{k,i}^*(t)$, a partir de um algoritmo computacional, é possível recuperar os potenciais filtrados $T_k^*(\tilde{x}, t)$

aplicando-se a função inversa definida na Eq. (4.5b), que por sua vez será capaz de fornecer a solução do problema original para qualquer posição \tilde{x} e tempo t . Por final, para se recuperar o potencial original $T_k(\tilde{x}, t)$, aplica-se a inversa na Eq. (4.2), resultando em:

$$T(\tilde{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{ki}^*(\tilde{x}) \bar{T}_{k,i}^*(t) + T_{k,F}(\tilde{x}; t) \quad (4.8)$$

Existem diversos algoritmos computacionais em diferentes plataformas para a solução do sistema de equações diferenciais descrito anteriormente. Neste trabalho, assim como muitos outros que aplicam a GITT em seus problemas, será utilizada a plataforma *Mathematica®*. Há um motivo crucial para essa escolha, uma vez que este programa foi inicialmente concebido para computação simbólica, permitindo que diversas funções pudessem ser manipuladas de forma algébrica e não apenas numérica. Particularmente, as funções de integração (“*Integrate*”), derivação (“*Derivative*”) e solução de EDOs (“*DSolve*”) são de grande utilidade na aplicação da GITT, uma vez que as mesmas retornam resultados analíticos para suas respectivas funções.

A integração e derivação de funções na forma analítica são de grande importância para a obtenção do sistema de equações diferenciais ordinárias (Eq. (4.6)), pelo fato do mesmo conter boa parte da informação do problema. Erros numéricos na integração de funções ortogonais de grande oscilação, funções estas que aparecem comumente nos problemas de autovalor, não são raros de acontecer, os quais podem ser evitados e sua propagação eliminada através do uso da computação simbólica. Obviamente, nem todas as funções possuem soluções analíticas de integração e derivação e o uso de métodos numéricos é, também, necessário para tal fim, assim como para a solução do sistema de EDO’s comentado nesta seção, que em muitas situações necessita de uma solução numérica.

A plataforma *Mathematica®*, além de possuir uma biblioteca de funções específicas para computação simbólica, também possui diversas outras funções específicas para

computação numérica, fazendo deste um código híbrido, capaz de resolver problemas tanto de forma numérica como de forma analítica. Portanto, para aplicar uma metodologia dita híbrida, nada melhor do que um código híbrido capaz de atender as duas necessidades da GITT, tanto a parte numérica quanto a parte analítica. No entanto, a utilização de outras plataformas não é inviável e também pode ser feita.

4.2 PROBLEMA COM FORMULAÇÃO EM DOMÍNIO ÚNICO

Assim como feito na Seção 4.1, para melhor exemplificar a metodologia da GITT aplicada à formulação em domínio único, será considerado um problema geral com N potenciais acoplados, em regime transiente, para um determinado potencial T , o qual pode ser uma determinada temperatura, velocidade ou concentração. O problema em si é definido em uma configuração complexa multidimensional representado por diversas sub-regiões N_V (Figura 4.1a) com volume V_l , $l = 1, 2, \dots, N_V$, com continuidade de potenciais e fluxos nas interfaces destas sub-regiões e com todos os termos não-lineares inclusos no termo fonte da equação e das condições de contorno da mesma, conforme a seguinte equação:

$$w_{k,l}(\tilde{x}) \frac{\partial T_{k,l}(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(K_{k,l}(\tilde{x}) \nabla T_{k,l}(\tilde{x}, t) \right) - d_{k,l}(\tilde{x}) T_{k,l}(\tilde{x}, t) + P_{k,l}(\tilde{x}, t, \tilde{T}), \quad (4.9a)$$

$$\tilde{x} \in V_l, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad l = 1, 2, \dots, N_V$$

com suas condições de contorno e inicial nas interfaces definidas, respectivamente, como:

$$\alpha_{k,l}(\tilde{x})T_{k,l}(\tilde{x},t) + \beta_{k,l}(\tilde{x})K_{k,l}(\tilde{x})\frac{\partial T_{k,l}(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{n}} = \phi_{k,l}(\tilde{x},t, \tilde{T}), \quad (4.9b)$$

$$\tilde{x} \in S_l, \quad t > 0$$

$$K_{k,l}(\tilde{x})\frac{\partial T_{k,l}(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{n}} = K_{k,m}(\tilde{x})\frac{\partial T_{k,m}(\tilde{x},t)}{\partial \tilde{n}}, \quad \tilde{x} \in S_{l,m}, \quad t > 0 \quad (4.9c)$$

$$T_{k,l}(\tilde{x},t) = T_{k,m}(\tilde{x},t), \quad \tilde{x} \in S_{l,m}, \quad t > 0 \quad (4.9c)$$

$$T_{k,l}(\tilde{x},0) = f_{k,l}(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in V_l \quad (4.9c)$$

onde onde $\alpha_{k,l}$ e $\beta_{k,l}$ são coeficientes para um determinada condição de contorno, \tilde{n} é o vetor normal às superfícies das interfaces $S_{l,m}$ e das superfícies externas S_l e $\phi_{k,l}$ o termo fonte da condição de contorno.

O problema (4.9) pode ser, então, resolvido através da GIT, a qual pode ser aplicada por meio de uma única expansão em autofunções para cada potencial e depois acoplada a todos os sistemas e potenciais transformados para cada sub-região, ou aplicada por meio de um problema de autovalor multi-regional que acopla todas as sub-regiões através de um único conjunto de autovalores. O domínio único pode ser representado de duas maneiras distintas, conforme apresentado na Figura 4.1. A primeira, Figura 4.1b, mantém a geometria externa irregular do domínio original após definição dos coeficientes com variação espacial (condutividade térmica, campo de velocidade, viscosidade, etc...), representando todas as sub-regiões internas. A segunda, Figura 4.1c, considera uma geometria padrão, regular, para um domínio que engloba a geometria externa do domínio original. Apesar de domínios irregulares poderem ser transformados diretamente pela

GITT, é possível obter vantagens computacionais ao englobar o domínio irregular por um domínio regular.

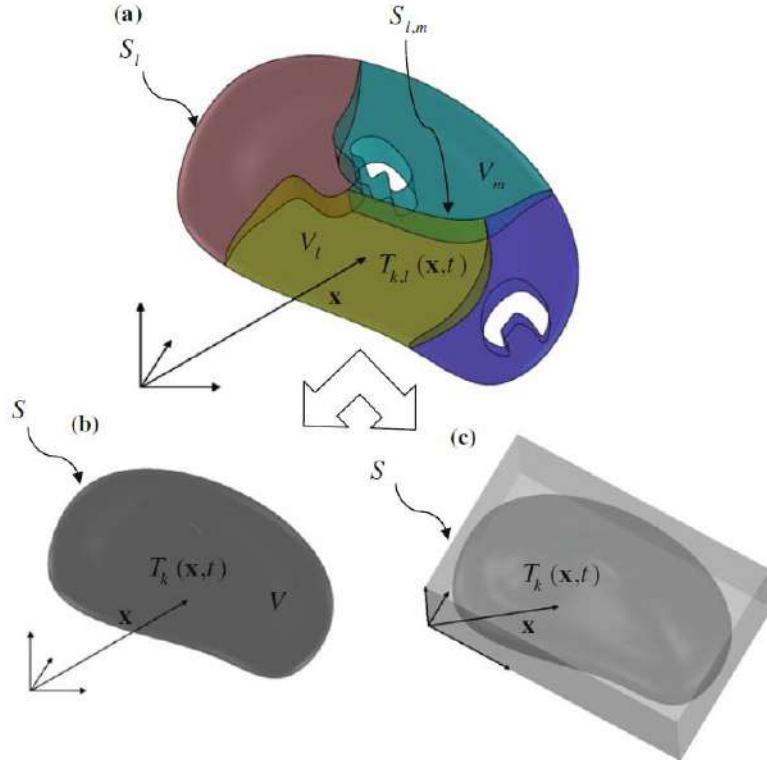


Figura 4.1: a) Configuração complexa multidimensional com N_V sub-regiões; b) Configuração em domínio único com domínio original; c) Configuração em domínio único com domínio original englobado por um domínio regular; Fonte: Cotta et al. (2016).

Sendo assim, conforme demonstrado nos trabalhos de Cotta et al. (2016b), Knupp et al. (2015b) e Knupp et al. (2015c), que abordam a análise de problemas conjugados específicos em domínio único, o problema (4.9) pode ser resrito por meio de uma formulação em domínio único através de coeficientes de variação espacial e termos fontes conforme se segue:

$$w_k(\tilde{x}) \frac{\partial T_k(\tilde{x}, t)}{\partial t} = \nabla \cdot \left(K_k(\tilde{x}) \nabla T_k(\tilde{x}, t) \right) - d_k(\tilde{x}) T_k(\tilde{x}, t) + P_k(\tilde{x}, t, \tilde{T}), \quad (4.10a)$$

$$\tilde{x} \in V, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

$$\alpha_k(\tilde{x}) T_k(\tilde{x}, t) + \beta_k(\tilde{x}) K_k(\tilde{x}) \frac{\partial T_k(\tilde{x}, t)}{\partial n_{\tilde{x}}} = \phi_k(\tilde{x}, t, \tilde{T}), \quad \tilde{x} \in S, \quad t > 0 \quad (4.10b)$$

$$T_k(\tilde{x}, 0) = f_k(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in V \quad (4.10c)$$

onde

$$V = \sum_{l=1}^{N_V} V_l, \quad S = \sum_{l=1}^{N_V} S_l \quad (4.10d)$$

Os coeficientes de variação espacial, $w_k(\tilde{x})$, $K_k(\tilde{x})$ e $d_k(\tilde{x})$ presentes na Eq. (4.10a), os quais não possuem mais o índice l relativo às sub-regiões, são, agora, representados por funções com transição abrupta entre as interfaces das diversas sub-regiões, gerando assim, uma formulação em domínio único para o problema original, que agora pode ser resolvido através da metodologia da GITT apresentada na Seção 4.1.

4.3 SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE AUTOVALOR VIA TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

Teoricamente, o problema de autovalor apresentado na Eq. (4.4a) pode ser substituído por qualquer problema de autovalor do tipo Sturm-Liouville. No entanto, afim de incorporar a maior quantidade possível de informação do problema original no problema de autovalor, uma solução completa para Eq. (4.4a) é desejável e possível através, também, da GITT, cuja solução foi apresentada, primeiramente, em Mikhailov e Cotta (1994).

Sendo assim, o objetivo da GITT, neste caso, é transformar o problema de autovalor original em problemas de autovalores algébricos, capazes de fornecer a solução para os autovalores e os autovalores de forma aproximada. Para isso, considere o problema abaixo definido em uma determinada região V com superfícies de contorno S :

$$\nabla \cdot \left(K(\tilde{x}) \nabla \psi(\tilde{x}) \right) + \left(\mu^2 w(\tilde{x}) - d(\tilde{x}) \right) \psi(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in V \quad (4.11a)$$

com suas respectivas condições de contorno:

$$\alpha(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}) + \beta(\tilde{x}) K(\tilde{x}) \frac{\partial \psi(\tilde{x})}{\partial n_{\tilde{x}}} = 0, \quad \tilde{x} \in S \quad (4.11b)$$

onde $w(\tilde{x})$, $K(\tilde{x})$, $d(\tilde{x})$, $\alpha(\tilde{x})$ e $\beta(\tilde{x})$ são funções previamente conhecidas. μ e $\psi(\tilde{x})$ são, respectivamente, os autovalores e autofunções correspondentes que desejam ser calculados a partir da presente metodologia.

A notação do problema (4.11) pode ser simplificada afim de ser expresso da seguinte forma:

$$L\psi(\tilde{x}) = w(\tilde{x})\mu^2\psi(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in V \quad (4.12a)$$

assim como suas condições de contorno:

$$B\psi(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in S \quad (4.12b)$$

onde:

$$L = \nabla \cdot (K(\tilde{x})\nabla) + d(\tilde{x}) \quad (4.12c)$$

$$B = \alpha(\tilde{x}) + \beta(\tilde{x})K(\tilde{x})\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \quad (4.12d)$$

Ainda assim, é possível reescrever o problema (4.12) como:

$$\hat{L}\psi(\tilde{x}) = ((\hat{L} - L)\psi(\tilde{x}) + w(\tilde{x})\mu^2\psi(\tilde{x})), \quad \tilde{x} \in V \quad (4.13a)$$

$$\hat{B}\psi(\tilde{x}) = (\hat{B} - B)\psi(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in S \quad (4.13b)$$

$$\hat{L} = \nabla \cdot (\hat{K}(\tilde{x})\nabla) + \hat{d}(\tilde{x}) \quad (4.13c)$$

$$\hat{B} = \hat{\alpha}(\tilde{x}) + \hat{\beta}(\tilde{x}) \hat{K}(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial \tilde{n}} \quad (4.13d)$$

onde \hat{L} e \hat{B} são os operadores que serão utilizados na definição de um problema de autovalor auxiliar, apresentado abaixo:

$$\hat{L}\Omega(\tilde{x}) = \lambda^2 \hat{w}(\tilde{x}) \Omega(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in V \quad (4.14a)$$

$$\hat{B}\Omega(\tilde{x}) = 0, \quad \tilde{x} \in S \quad (4.14b)$$

de forma que os coeficientes $\hat{w}(\tilde{x})$, $\hat{K}(\tilde{x})$, $\hat{d}(\tilde{x})$, $\hat{\alpha}(\tilde{x})$ e $\hat{\beta}(\tilde{x})$ sejam escolhidos, dando preferência a funções mais simples e que contenham o máximo de informação possível dos coeficientes originais, afim de se garantir uma solução analítica direta para os autovalores λ e as autofunções correspondentes $\Omega(\tilde{x})$.

Seguindo a metodologia da GITT, o par de transformação integral é definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\psi}_i = \int_V \hat{w}(\tilde{x}) \tilde{\Omega}_i(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}) dV \quad (4.15a)$$

$$\text{Inversa: } \psi(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(\tilde{x}) \bar{\psi}_i \quad (4.15b)$$

onde $\bar{\psi}_i$ é a autofunção transformada e $\tilde{\Omega}_i(\tilde{x})$ é a autofunção auxiliar normalizada, definida por:

$$\tilde{\Omega}_i(\tilde{x}) = \frac{\Omega_i(\tilde{x})}{N_{\Omega i}^{1/2}} \quad (4.15c)$$

$$N_{\Omega i} = \int_V \hat{w}(\tilde{x}) \Omega_i^2(\tilde{x}) dV \quad (4.15d)$$

Dando prosseguimento, o seguinte sistema algébrico transformado é obtido através da operação do termo $\int_V \tilde{\Omega}_i(\tilde{x})(\cdot) dV$ no problema (4.13):

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 \bar{\psi}_i &= \int_S \gamma_i (\hat{B} - B) \psi(\tilde{x}) dS + \int_V \tilde{\Omega}_i(\tilde{x}) (\hat{L} - L) \psi(\tilde{x}) dV \\ &\quad + \mu_i^2 \int_V \tilde{\Omega}_i(\tilde{x}) w(\tilde{x}) \psi(\tilde{x}) dV , \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\gamma_i = \frac{\tilde{\Omega}_i(\tilde{x}) - \hat{K}(\tilde{x}) \frac{\partial \tilde{\Omega}_i(\tilde{x})}{\partial \tilde{n}}}{\hat{\alpha}(\tilde{x}) + \hat{\beta}(\tilde{x})} \quad (4.16b)$$

A autofunção original $\psi(\tilde{x})$, presente na Eq. (4.16a), por sua vez, pode ser substituída por sua formulação inversa (Eq. (4.15b)), permitido que o presente sistema algébrico possa ser truncado em um determinado valor $N_{P,aux}$ e reescrito da seguinte forma:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{C})\{\bar{\psi}\} = \mu_i^2 \mathbf{D}\{\bar{\psi}\} \quad (4.17a)$$

onde \mathbf{A} , \mathbf{C} e \mathbf{D} são matrizes quadradas $N_{P,aux} \times N_{P,aux}$ definidas como:

$$A_{ij} = - \int_S \gamma_i (\hat{B} - B) \tilde{\Omega}_j (\tilde{x}) dS - \int_V (\hat{L} - L) \tilde{\Omega}_i (\tilde{x}) \tilde{\Omega}_j (\tilde{x}) dV \quad (4.17b)$$

$$C_{ij} = \lambda_i^2 \delta_{ij} \quad (4.17c)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker,

$$D_{ij} = \int_V w (\tilde{x}) \tilde{\Omega}_i (\tilde{x}) \tilde{\Omega}_j (\tilde{x}) dV \quad (4.17d)$$

Sendo assim, o problema de autovalor original apresentado nas eqs. (4.11) foi reduzido a um problema de autovalor algébrico definido na Eq. (4.17a), o qual pode ser facilmente resolvida por rotinas de análise matricial disponíveis na plataforma *Mathematica®*, obtendo-se assim, os autovalores e seus autovalores correspondentes. For fim, as autofunções desejadas podem ser obtidas a partir da formula da inversa (Eq. (4.15b)). Como é possível notar, as autofunções originais serão agora definidas através de uma expansão em autofunções auxiliares. Tanto a convergência das autofunções quanto a dos autovalores deve ser verificado para uma determinada ordem de truncamento $N_{P,aux}$.

5 PROBLEMA CONJUGADO COM ESCOAMENTO BIFÁSICO ESTRATIFICADO E CONDUÇÃO AXIAL

Nos trabalhos de Knupp (2013) e Knupp et al. (2012; 2013; 2014; 2015a; 2015c,), conforme já relatado nos capítulos anteriores, apresentou-se a aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) para a solução de problemas de transferência de calor conjugados de convecção-condução. Utilizou-se a estratégia de reformulação do problema em um domínio único, considerando escoamento laminar monofásico e completamente desenvolvido no interior de um ou mais canais.

Neste capítulo será apresentada uma extensão desses trabalhos, focando na solução de problemas conjugados com escoamentos bifásicos estratificados em canais retangulares (placas paralelas). Resultados para este caso, desprezando os efeitos de condução axial na formulação, foram apresentados em Zotin et al. (2014), na fase inicial do presente estudo. Aqui será dada ênfase à análise de problemas em que a condução axial não pode ser desprezada. Para tal, serão utilizadas duas metodologias diferentes, originalmente apresentadas por Knupp et al. (2013), quais sejam, a transformação integral total via problema de autovalor não-clássico e a solução via esquema de transformação integral parcial.

O padrão de escoamento adotado para essa extensão da metodologia está relacionado com a revisão da literatura feita por Talimi et al. (2012), onde afirma-se que o número de artigos voltados para soluções analíticas de transferência de calor em escoamento bifásico é muito pequeno, sugerindo-se ainda estudos com diferentes condições de contorno nas paredes dos canais. De fato, como apresentado na Seção 2.3, poucos artigos que tratam de escoamentos multifásicos em microcanais estão voltados para a análise especificamente da transferência de calor. Um deles é o trabalho de Asthana et al. (2011), a partir do qual se

identificou um aumento significativo da taxa de transferência de calor para um escoamento bifásico líquido-líquido com padrão segmentado.

A consideração de escoamento bifásico estratificado foi motivada pelos estudos de micromisturadores e microreatores, como ilustrado nos trabalhos de Costa Junior (2012) e Pontes et al. (2014). O primeiro aborda micromisturadores de dois fluidos, utilizando uma geometria de canal em Y, cujos fluidos adentram o sistema com temperaturas diferentes. O segundo trata de microreatores considerando um escoamento bifásico estratificado com a existência de uma reação química entre os dois fluidos. A variação de concentrações ao longo do canal foi determinada também utilizando a GITT, levando-se em consideração a influência da temperatura da reação, embora o campo de temperatura não tenha sido avaliado. Conhecendo o comportamento do campo de temperatura ao longo do microcanal, melhores resultados podem ser obtidos para a estimativa do campo de concentração nos reagentes e produtos.

No trabalho Gada et al. (2013) apresenta-se uma modelagem para o perfil de temperatura considerando um escoamento bifásico estratificado entre placa paralelas para diferentes condições de contorno nas paredes do canal. No entanto, seu estudo não está voltado para escoamentos em microcanais e, portanto, os efeitos de conjugação com a parede e a difusão axial de calor ao longo do fluido no canal não são considerados em seu modelo físico-matemático.

Sendo assim, este capítulo visa preencher a lacuna de modelagem e resultados existentes na literatura para problemas de transferência de calor com escoamento bifásico estratificado em microcanais. A Figura 5.1 apresenta a geometria inicial que será considerada para este estudo.

Assim, a equação da energia para o presente problema conjugado de transferência de calor em regime permanente, incluindo a variação espacial (neste caso apenas na coordenada y) das propriedades termofísicas e campo de velocidades, juntamente com as condições de contorno, pode ser escrita como:

$$w(y)u(y)\frac{\partial T(y, z)}{\partial z} = k(y)\frac{\partial^2 T(y, z)}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(k(y)\frac{\partial T(y, z)}{\partial y}\right), \quad 0 < y < L, \quad z > 0 \quad (5.1a)$$

$$\begin{aligned} T(y, 0) &= T_{in}; & -k_s \frac{\partial T(y, z)}{\partial y} \Big|_{y=0} + hT(0, z) &= hT_\infty; \\ k_s \frac{\partial T(y, z)}{\partial y} \Big|_{y=L} &+ hT(L, z) = hT_\infty; & \frac{\partial T(y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_\infty} &= 0; \end{aligned} \quad (5.1b-e)$$

onde $w(y)$ é a variação espacial da capacidade térmica volumétrica (ρC_p), $u(y)$ a variação espacial da velocidade, $k(y)$ a variação espacial da condutividade térmica, h o coeficiente de transferência de calor por convecção e T_∞ a temperatura do meio externo.

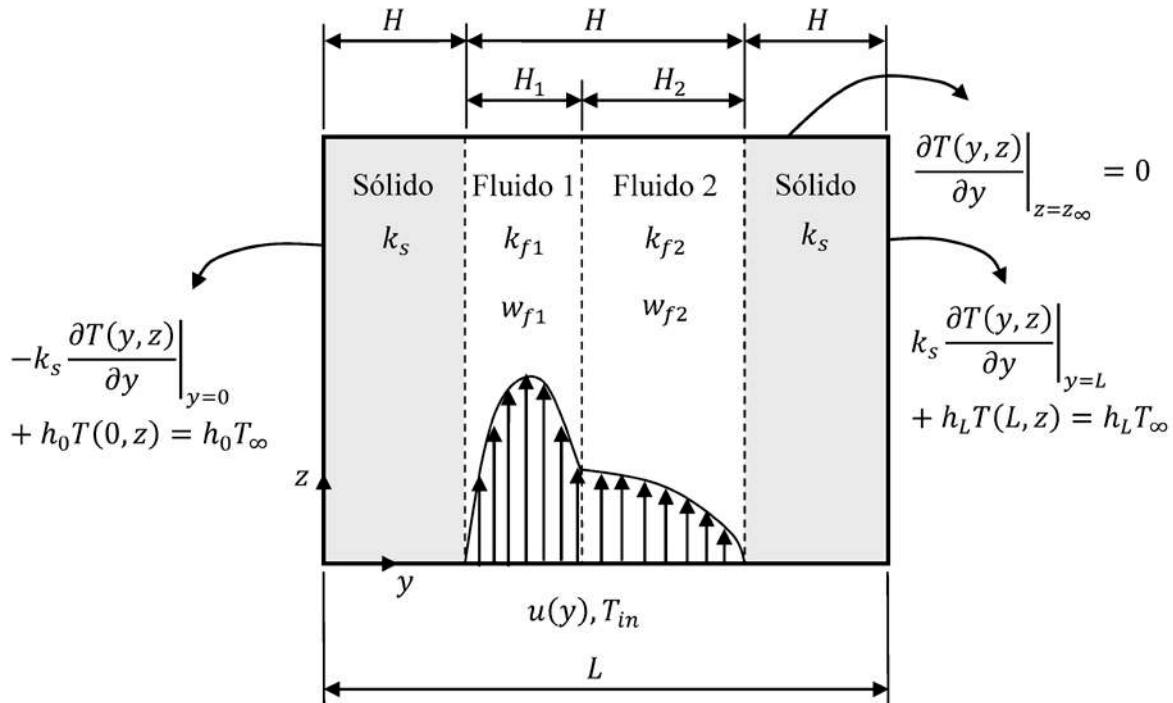


Figura 5.1: Esquemático geral do domínio com o substrato sólido e um escoamento bifásico estratificado em seu interior.

A adimensionalização da Eq. (5.1a) adotada em Knupp et al. (2013) para um escoamento monofásico é alterada, escolhendo-se arbitrariamente como referência as propriedades do fluido 1 para caracterizar o número de Péclet. Assim, os seguintes parâmetros adimensionais são propostos:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z}{L Pe_{f1}}; \quad Y = \frac{y}{L}; \quad U = \frac{u(y)}{4u_{av}}; \quad \theta = \frac{T - T_{in}}{T_\infty - T_{in}} \\ K &= \frac{k(y)}{k_{f1}}; \quad W = \frac{w_f(y)}{w_{f1}}; \quad Bi = \frac{h L}{k_s}; \quad Pe_{f1} = \frac{4u_{av}L w_{f1}}{k_{f1}} \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde k_{f1} e w_{f1} são, respectivamente, a condutividade térmica e a capacidade térmica volumétrica do fluido 1 e u_{av} a média dos perfis de velocidade no domínio do fluido. Como pode ser visto as propriedades térmicas foram todas adimensionalizadas em função das propriedades do fluido 1. Como não se pode garantir a priori que este possui a maior razão entre condutividade e a capacidade térmica entre os dois fluidos, garantindo assim que Pe_{f1} seja o menor dos dois casos, este pode eventualmente não ser o critério de decisão para inclusão dos efeitos de difusão axial na modelagem. Portanto, é necessário avaliar uma adimensionalização tanto através das propriedades do fluido 1 quanto do fluido 2. Através desta adimensionalização, os termos que irão carregar a informação da transição dos dois fluidos ao longo do domínio são $K(Y)$, $W(Y)$ e $U(Y)$.

Logo, aplicando os parâmetros adimensionais apresentados na equação geral da energia (Eq. (5.1a)), obtém-se a seguinte equação adimensional:

$$U(Y)W(Y) \frac{\partial \theta(Y, Z)}{\partial Z} = \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \frac{\partial^2 \theta(Y, Z)}{\partial Z^2} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(Y) \frac{\partial \theta(Y, Z)}{\partial Y} \right), \quad (5.3a)$$

$$0 < Y < 1$$

as condições de contorno adimensionais:

$$\begin{aligned} \theta(Y, 0) = 0; \quad -\left. \frac{\partial \theta(0, Z)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi (\theta(0, Z) - 1) = 0; \\ \left. \frac{\partial \theta(1, Z)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi (\theta(1, Z) - 1) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta(Y, Z)}{\partial Z} \right|_{Z=z_\infty} = 0; \end{aligned} \quad (5.3b-e)$$

O termo $U(Y)W(Y)$ pode ser definido em apenas uma expressão para efeito de cálculo. No entanto, no presente de trabalho os termos foram mantidos separados a fim de garantir uma melhor compreensão de cada termo da equação da energia. Vale ressaltar, que diferentemente do domínio para um escoamento monofásico com substrato e condições de contorno transversais simétricas, não é possível aplicar uma condição de simetria no presente domínio, pois esta condição não é válida para um escoamento bifásico estratificado. Sendo assim, para o domínio da Figura 5.1, os termos adimensionais com dependência espacial podem ser expressos como:

$$W(Y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Y \leq H/L \\ 1, & H/L < Y \leq (H + H_1)/L \\ w_{f2}/w_{f1}, & (H + H_1)/L < Y \leq 2H/L \\ 0, & 2H/L < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.4a)$$

$$U(Y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Y \leq H/L \\ U_f(y), & H/L \leq Y \leq 2H/L \\ 0, & 2H/L < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.4b)$$

$$K(Y) = \begin{cases} k_s/k_{f1}, & 0 \leq Y \leq H/L \\ 1, & H/L < Y \leq (H + H_1)/L \\ k_{f2}/k_{f1}, & (H + H_1)/L < Y \leq 2H/L \\ k_s/k_{f1}, & 2H/L < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.4c)$$

$U_f(y)$ é o perfil de velocidade completamente desenvolvido para um escoamento bifásico estratificado entre placas paralelas, que tem solução analítica de fácil obtenção (Bird et al. (2002)). As soluções analíticas dos perfis de velocidade dos fluidos 1 e 2 podem

ser obtidas através das equações de Navier-Stokes, na qual aplica-se duas condições de contorno e duas condições de interface específicas. Considerando a condição de não deslizamento nas paredes, as velocidades tanto do fluido 1 quanto do fluido 2 nas duas paredes deverão ser nulas. Já na interface entre os dois fluidos, a velocidade de ambos deverá ser continua assim como a tensão de cisalhamento. No entanto, para aplicação das condições de contorno na interface entre os dois fluidos é necessário saber o local exato dessa interface. Para tal, incorpora-se, também, um balanço de massa à solução. Através de manipulação algébrica da solução descrita, Al-Dhubabian (2005) fornece uma relação analítica que relaciona a razão das espessuras dos dois fluidos com a razão das vazões e das viscosidades dos mesmos. Esta expressão pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = b \left(\frac{1 + \left(\frac{b^2 - r_\mu}{2r_\mu(1+b)} \right) - \left(\frac{r_\mu + b}{3r_\mu(1+b)} \right) b}{1 - \left(\frac{b^2 - r_\mu}{2b(1+b)} \right) - \left(\frac{r_\mu + b}{3b(1+b)} \right)} \right) \quad (5.5)$$

onde b é a razão das espessuras dos dois fluidos, que para este caso pode ser definido como $b = H_1/H_2$, r_μ a razão entre as viscosidades dos dois fluidos e Q_1 e Q_2 a vazão do fluido 1 e do fluido 2, respectivamente. Sendo assim, para o exemplo que será considerado na seção de resultados, com $Q_1 = Q_2$ e $r_\mu = 0,016735$, resulta em $b = 0,386362$. Logo, o perfil de velocidade $U(Y)$ obtido através desses valores pode ser visualizado na Figura 5.2.

A razão entre as viscosidades dos dois fluidos adotada é equivalente à razão entre a viscosidade da água (1.01×10^{-3} Pa.s) e do óleo de soja (6.035×10^{-2} Pa.s), os quais são imiscíveis. A razão entre as vazões foi escolhida arbitrariamente com o intuito apenas de garantir um alto gradiente de velocidade na região de interface dos dois fluidos, como pode ser observado na Figura 5.2, e verificar como a convergência dos resultados obtidos via GITT se comporta nesta região.

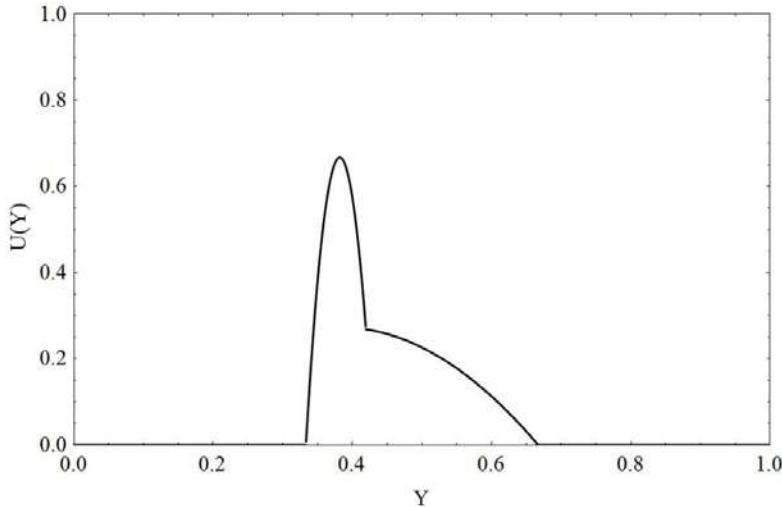


Figura 5.2: Perfil de velocidade adimensional $U(Y)$ considerado para o escoamento bifásico estratificado água-óleo de soja.

Casos com múltiplos canais, mais precisamente 4 canais, no interior de um substrato sólido, também serão abordados neste capítulo, considerando o mesmo escoamento bifásico estratificado apresentado acima. Com isso, a nova geometria, que também não possui simetria, apresenta 12 interfaces no interior do domínio, mostrando ser possível modelar uma pilha de chips para resfriamento conforme apresentado na Figura 1.3. Sendo assim, espera-se, investigar como a convergência da solução via GITT se dará em função de um maior número de interfaces. Na Figura 5.3 apresenta-se um esquemático da geometria de múltiplos canais em questão e, para melhor visualização, apresenta-se na Figura 5.4 a variação do perfil de velocidade ao longo do domínio.

Um aspecto inovador na definição de $W(Y)$, $U(Y)$ e $K(Y)$ ao longo domínio do problema, implementada no código deste trabalho, foi a utilização da função *Piecewise* da plataforma *Mathematica®*, a qual é uma função definida por múltiplas subfunções aplicadas em um determinado intervalo do domínio. Além disso, a função de integração, tanto analítica quanto numérica, do mesmo sistema de computação simbólica consegue reconhecer os respectivos intervalos de integração da função *Piecewise*, fazendo com que o código seja mais simples, conciso e automático, uma vez que não é necessário definir os

limites de integração para cada região do domínio. A mesma função permite ainda que geometrias mais complexas, para um determinado domínio, sejam consideradas, como será visto mais à frente.

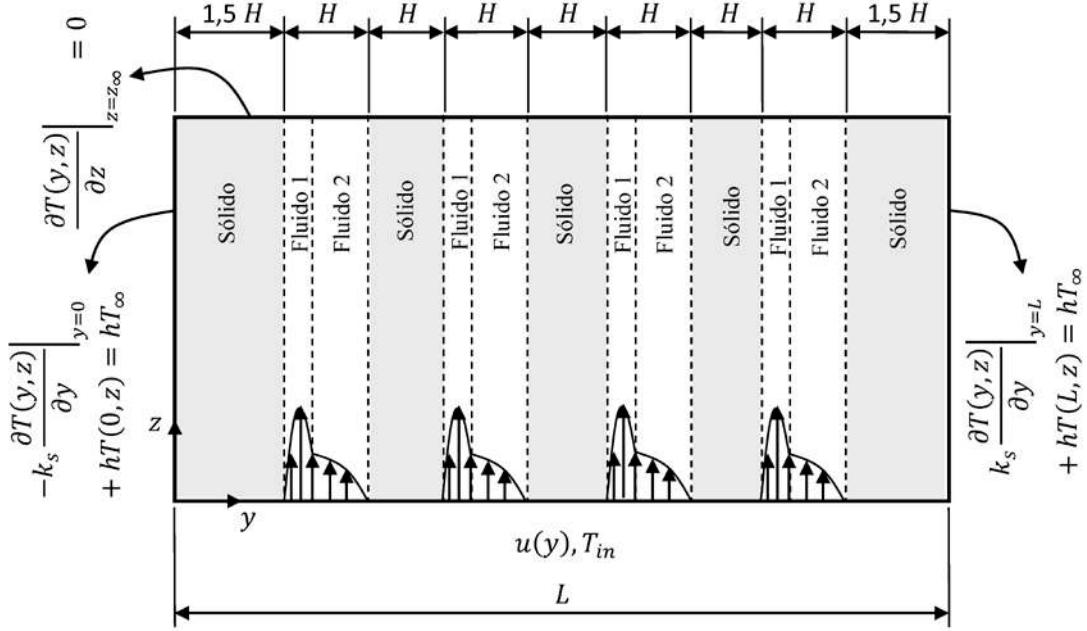


Figura 5.3: Esquemático geral do domínio com substrato sólido e escoamento bifásico estratificado água-óleo de soja em múltiplos microcanais considerado para análise.

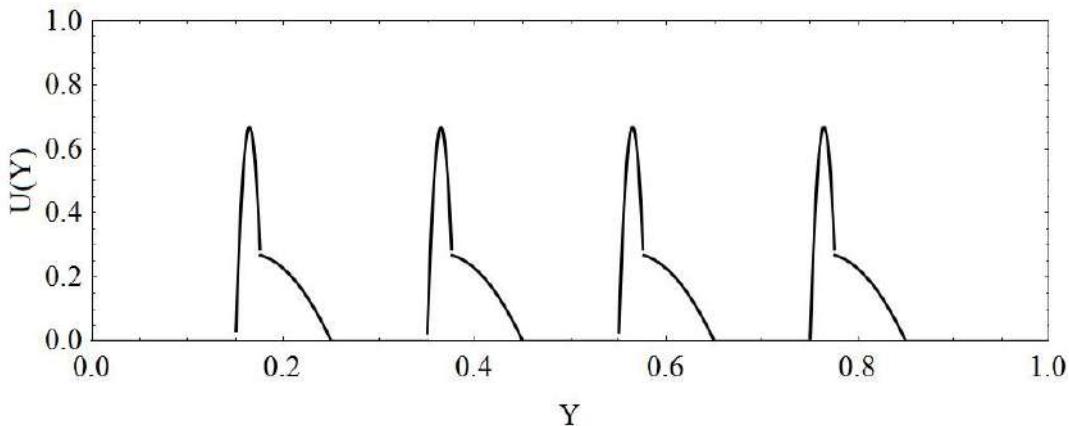


Figura 5.4: Perfil de velocidade adimensional $U(Y)$ considerado para o escoamento bifásico estratificado água-óleo de soja em múltiplos canais.

Dando prosseguimento à apresentação da metodologia de solução do problema, é desejável a utilização de filtros na aplicação da Técnica da Transformada Integral Generalizada com o objetivo de acelerar a convergência das expansões em autofunções.

Com este propósito, apresenta-se neste caso um filtro analítico simples, para homogeneização das condições de contorno, na forma:

$$\theta(Y, Z) = 1 + \theta^*(Y, Z) \quad (5.6)$$

onde $\theta^*(Y, Z)$ é o potencial filtrado. Logo, aplicando a Eq. (5.6) na equação da energia adimensionalizada (Eq.(5.3)), obtém-se:

$$U(Y)W(Y) \frac{\partial \theta^*(Y, Z)}{\partial Z} = \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \frac{\partial^2 \theta^*(Y, Z)}{\partial Z^2} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(Y) \frac{\partial \theta^*(Y, Z)}{\partial Y} \right), \quad (5.7a)$$

$$0 < Y < 1$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \theta^*(Y, 0) &= -1; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(Y, Z)}{\partial Z} \right|_{Z=\infty} = 0; \\ -\left. \frac{\partial \theta^*(0, Z)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta^*(0, Z) &= 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(1, Z)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta^*(1, Z) = 0 \end{aligned} \quad (5.7b-d)$$

As condições de contorno apresentadas nas Eqs. (5.7b-d) é uma condição de contorno do terceiro tipo, em que o número de Biot está diretamente relacionado ao coeficiente de transferência de calor por convecção h . No entanto, esta mesma condição de contorno pode ser considerada uma condição de contorno mais geral, dependendo dos valores atribuídos

ao número de Biot. Se $Bi \rightarrow \infty$, a condição de temperatura prescrita na parede (primeiro tipo), como no exemplo de Knupp et al. (2012), é obtida. Se $Bi \rightarrow 0$, obtém-se uma condição de parede adiabática (ou simetria) na parede.

5.1 TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL TOTAL COM PROBLEMA DE AUTOVALOR NÃO-CLÁSSICO

Esta abordagem de solução de problemas de convecção interna com difusão axial foi empregada inicialmente nos trabalhos de Vick e Ozisik (1981) e Vick et al. (1983). Knupp (2013) estendeu essa análise para problemas conjugados com condução axial tanto no sólido quanto no fluido, onde propôs-se uma solução para o problema (5.7) na forma:

$$\theta^*(Y, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{-\mu_i^2 Z} \psi_i(Y) \quad (5.8)$$

cujas autofunções satisfazem o seguinte problema de autovalor não clássico, obtido através da aplicação do método de separação de variáveis na Eq. (5.7a):

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left(K(Y) \frac{\partial \psi_i(Y)}{\partial Y} \right) + \left(\frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \mu_i^4 + W(Y)U(Y)\mu_i^2 \right) \psi_i(Y) = 0 \quad (5.9a)$$

$$-\frac{d\psi_i(Y)}{dY} \Big|_{Y=0} + Bi\psi_i(0) = 0, \quad \frac{d\psi_i(Y)}{dY} \Big|_{Y=1} + Bi\psi_i(1) = 0 \quad (5.9b)$$

onde μ_i são os autovalores e $\psi_i(Y)$ as autofunções. Assim como o problema de autovalor geral com coeficientes variáveis apresentado na Seção 4.3, este não apresenta uma solução explícita e sua solução será obtida através da aplicação da Técnica da Transformada

Integral Generalizada. Por sua vez, a aplicação da GITT neste tipo de problema de autovalor está descrita em Oliveira et al. (1995). Sendo assim, seguindo esse formalismo, define-se o par transformada-inversa que será utilizado na transformação integral como:

$$\text{Transformada: } \bar{\psi}_{m,n} = \int_0^1 W(Y)U(Y)\tilde{\Omega}_n(Y)\psi_m(Y)dY \quad (5.10a)$$

$$\text{Inversa: } \psi_m(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_n(Y)\bar{\psi}_{m,n} \quad (5.10b)$$

onde $\tilde{\Omega}_n(Y)$ é a autofunção auxiliar normalizada definida como:

$$\tilde{\Omega}_n(Y) = \frac{\Omega_n(Y)}{N_n^{1/2}} \quad (5.10c)$$

e N_n é a integral de normalização, expressa pela seguinte equação:

$$N_n = \int_0^1 \Omega_n^2(Y)dY \quad (5.10d)$$

Para a determinação desta autofunção, é proposto um problema de autovalor auxiliar clássico do tipo Sturm-Liouville:

$$\frac{d^2\Omega_n(Y)}{dY^2} + \lambda_n^2\Omega_n(Y) = 0 \quad (5.11a)$$

$$-\frac{d\Omega_n(Y)}{dY} \Big|_{Y=0} + Bi\Omega_n(0) = 0, \quad \frac{d\Omega_n(Y)}{dY} \Big|_{Y=1} + Bi\Omega_n(1) = 0 \quad (5.11b)$$

Realizando a transformação integral da Eq. (5.9a) através da aplicação do operador $\int_0^1 \tilde{\Omega}_m(Y)(\cdot)dY$, é possível obter a seguinte expressão, em forma matricial:

$$(\mathbf{E} + \mathbf{F})\{\bar{\psi}\} = (\mu^4 \mathbf{G} + \mu^2 \mathbf{H})\{\bar{\psi}\} \quad (5.12a)$$

onde:

$$\mathbf{E} = \{E_{mn}\},$$

$$E_{mn} = \int_0^1 \frac{d^2\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY^2} \tilde{\Omega}_m(Y)dY + \int_0^1 K(Y) \frac{d\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY} \frac{d\tilde{\Omega}_m(Y)}{dY} dY \\ - \underbrace{K(1)\tilde{\Omega}_m(1) \frac{d\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY} \Big|_{Y=1}}_{\mathbf{E1}} + \underbrace{K(0)\tilde{\Omega}_m(0) \frac{d\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY} \Big|_{Y=0}}_{\mathbf{E2}} \quad (5.12b)$$

$$\mathbf{F} = \{F_{mn}\}, \quad F_{mn} = \lambda_m^2 \delta_{mn} \quad (5.12c)$$

$$\mathbf{G} = \{G_{mn}\}, \quad G_{mn} = \int_0^1 \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \tilde{\Omega}_n(Y) \tilde{\Omega}_m(Y) dY \quad (5.12d)$$

$$\mathbf{H} = \{H_{mn}\}, \quad H_{mn} = \int_0^1 W(Y) U(Y) \tilde{\Omega}_n(Y) \tilde{\Omega}_m(Y) dY \quad (5.12e)$$

onde o termo δ_{mn} é o delta de Kronecker. Para os casos em que $Bi \rightarrow \infty$ ou $Bi \rightarrow 0$ nas condições de contorno do problema, fica claro que os termos $\mathbf{E1}$ e $\mathbf{E2}$ são nulos.

É importante ressaltar que a ordem das matrizes infinitas \mathbf{E} , \mathbf{F} , \mathbf{G} e \mathbf{H} deve ser truncada em um determinado valor $N_{P,aux} \times N_{P,aux}$ que garanta uma convergência adequada para as autofunções e autovalores.

Como discutido em Oliveira et al. (1995), para resolver o problema apresentado na Eq. (5.12a) a seguinte transformação é aplicada:

$$(\mathbf{L} - \nu^2 \mathbf{J})\{\phi_a\} = 0 \quad (5.13a)$$

onde as respectivas matrizes quadradas \mathbf{J} e \mathbf{L} de ordem $2N_{P,aux} \times 2N_{P,aux}$ são definidas como:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{G}] \\ [\mathbf{G}] & [\mathbf{H}] \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}] \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{E} + \mathbf{F} \quad (5.13b-d)$$

e

$$\{\phi_a\} = \begin{pmatrix} \{\phi_{a,1}\} \\ \{\phi_{a,2}\} \end{pmatrix} \quad (5.13e)$$

Como pode ser visto, a Eq. (5.13a) é um problema algébrico de autovalor matricial que pode ser facilmente resolvido através da função *Eigensystem* da plataforma *Mathematica®*, retornando assim, os autovalores ν^2 e os autovetores $\{\phi_a\}$. No entanto, apenas os autovetores $\{\phi_{a,2}\}$, os quais possuem valores positivos, e seus correspondentes autovalores são de interesse nesta solução, pois a autofunção transformada $\{\bar{\psi}\}$ e seus respectivos autovalores μ^2 correspondem aos autovetores $\{\phi_{a,2}\}$.

A partir da autofunção transformada (autovetores) $\bar{\psi}_{m,n}$ é possível então recuperar a autofunção original $\psi_m(Y)$ através da aplicação da formula da inversa (Eq. (5.10b)). Sendo assim, é possível agora retornar à Eq. (5.8), onde ainda resta determinar os coeficientes c_i , para satisfazer a condição de entrada no canal. O sistema de equações algébricas acopladas

necessárias para obter os valores de c_i é apresentado na Eq.(5.14a). Este sistema deve ser truncado em uma ordem N_p que garanta a convergência adequada para o campo de temperatura. A determinação desse sistema de equações está descrita em Knupp et al. (2013) e não será apresentada aqui. Logo:

$$\begin{aligned} C_j N_j - \int_0^1 \left(U(Y)W(Y) + \mu_j^2 \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \right) \psi_j(Y) \theta^*(Y, 0) dY \\ - \sum_{i=1}^{N_p} c_i \int_0^1 \mu_i^2 \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \psi_i(Y) \psi_j(Y) dY = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N_p \end{aligned} \quad (5.14a)$$

onde N_j é a integral de normalização definida como:

$$N_j = \int_0^1 \left(U(Y)W(Y) + \mu_j^2 \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \right) \psi_j^2(Y) dY \quad (5.14b)$$

Por final, para recuperar o campo de temperatura original, basta substituir o potencial filtrado, truncado para o mesmo valor N_p definido anteriormente, na equação do filtro (Eq.(5.6)), resultando em:

$$\theta(Y, Z) = 1 + \sum_{i=1}^{N_p} c_i e^{-\mu_i^2 Z} \psi_i(Y) \quad (5.15)$$

É importante garantir que a ordem de truncamento $N_{p,aux}$ seja sempre maior que N_p , uma vez que $N_{p,aux}$ está relacionada diretamente com a convergência dos autovalores originais. Como será possível observar mais adiante, quanto maior a quantidade de autovalores originais utilizados para convergência do potencial, ou seja, quanto maior o

valor de N_P , maior tem que ser a ordem de truncamento $N_{P,aux}$ para garantir a convergência desses mesmos autovalores. A utilização de $N_{P,aux} < N_P$, pode resultar na utilização de autovalores com uma convergência ruim, comprometendo o resultado final.

5.2 SOLUÇÃO VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL PARCIAL

Nesta proposta alternativa de metodologia, também proposta em Knupp (2013), evita-se a solução do problema de autovalor não-clássico, assim como um problema mais complicado em Z , e propõe-se operar a transformação integral apenas na direção transversal Y . Portanto, o processo de transformação integral resulta em um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem (problema de valor de contorno). Embora uma solução analítica possa ser encontrada para esse sistema de EDO's transformado, desde que em forma linear, para uma maior generalidade, emprega-se aqui uma alternativa híbrida numérico-analítica com esquema de transformação parcial, introduzindo-se um termo pseudo-transiente, ou efetivamente transiente, quando aplicável, garantindo assim uma fácil solução numérica. Para tanto, no presente caso adiciona-se um termo pseudotransiente na equação da energia adimensionalizada (Eq.(5.7)), resultando na seguinte equação para o potencial filtrado:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^*(Y, Z, t)}{\partial t} + U(Y)W(Y) \frac{\partial \theta^*(Y, Z, t)}{\partial Z} \\ = \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \frac{\partial^2 \theta^*(Y, Z, t)}{\partial Z^2} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(Y) \frac{\partial \theta^*(Y, Z, t)}{\partial Y} \right), \end{aligned} \quad (5.16a)$$

$$0 < Y < 1, \quad 0 < Z < Z_\infty, \quad t > 0$$

com as seguintes condições de contorno:

$$-\left. \frac{\partial \theta^*(Y, Z, t)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi\theta^*(0, Z, t) = 0, \quad (5.16b-c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta^*(Y, Z, t)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi\theta^*(1, Z, t) = 0, \quad 0 < Z < Z_\infty, \quad t > 0$$

$$\theta^*(Y, 0, t) = -1, \quad \left. \frac{\partial \theta^*(Y, Z, t)}{\partial Z} \right|_{Z=Z_\infty} = 0, \quad 0 < Y < 1, \quad t > 0 \quad (5.16d-e)$$

$$\theta^*(Y, Z, 0) = -1, \quad 0 < Y < 1, \quad 0 < Z < Z_\infty \quad (5.16f)$$

Na formulação pseudo-transiente, pode-se informar uma condição inicial de fácil obtenção que se aproxime mais da solução em regime permanente, como por exemplo a solução do problema sem condução axial, visando a redução do custo computacional na solução do sistema transformado. Aqui optou-se simplesmente pela adoção da condição de contorno na face $Z=0$ como condição inicial.

Sendo assim, para resolver o problema pseudotransiente da Eq. (5.16a) a GITT será empregada com uma única transformação integral na direção Y . O par transformada-inversa para este caso é definido então como:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_i(Z, t) = \int_0^1 \tilde{\xi}_i(Y) \theta^*(Y, Z, t) dY \quad (5.17a)$$

$$\text{Inversa: } \theta^*(Y, Z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\xi}_i(Y) \bar{\theta}_i(Z, t) \quad (5.17b)$$

onde $\tilde{\xi}_i(Y)$ é a autofunção normalizada definida como:

$$\tilde{\xi}_i(Y) = \frac{\xi_i(Y)}{\sqrt{N_i}} ; \quad N_i = \int_0^1 \xi_i^2(Y) dY ; \quad (5.17c,d)$$

A autofunção $\xi_i(Y)$, por sua vez, é obtida através do seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d}{dY} \left(K(Y) \frac{d\xi_i(Y)}{dY} \right) + \beta_{a,i}^2 \xi_i(Y) = 0 \quad (5.18a)$$

onde $\beta_{a,i}$ são os autovalores e as condições de contorno para este problema são:

$$-\left. \frac{d\xi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=0} + Bi \xi_i(0) = 0 ; \quad \left. \frac{d\xi_i(Y)}{dY} \right|_{Y=1} + Bi \xi_i(1) = 0 \quad (5.18b)$$

O problema de autovalor foi escolhido de forma a incorporar informação sobre a transição das regiões sólidas e fluidas através do coeficiente $K(Y)$. Essa escolha permite transformar exatamente o termo difusivo em Y e o termo transiente, gerando acoplamentos no sistema transformado tanto no termo convectivo quanto no termo difusivo da direção longitudinal, Z . Um problema de autovalor mais geral, incorporando também a informação variável do termo convectivo, ou seja, tendo como função peso o produto $U(Y)W(Y)$, pode também ser considerado, levando à transformação exata do termo convectivo. Como o termo pseudo-transiente é arbitrário, já que apenas a solução em tempo infinito é desejada, correspondendo à solução em regime permanente, esse mesmo grupo de coeficientes poderia ser incorporado no termo pseudo-transiente, levando à sua transformação exata. Nessa escolha de problema de autovalor então, apenas o termo difusivo em Z não seria transformado de forma desacoplada, requerendo truncamento a posteriori, e melhores resultados poderiam ser antecipados, já que todos os coeficientes variáveis estariam sendo considerados nesse caso. Todavia, a opção aqui foi de considerar o problema (5.18), apenas com o coeficiente $K(Y)$, para avaliar isoladamente sua importância na convergência da solução.

Novamente, este problema de autovalor não possui solução explícita, sendo necessário o uso da GITD para solucioná-lo. A metodologia aplicada aqui é idêntica a

apresentada na Seção 5.1, no problema (5.10), e por isso não será descrita de forma detalhada novamente. Sendo assim, ao final do procedimento, o seguinte problema algébrico é obtido:

$$(\mathbf{L} - \alpha_a \mathbf{M}) \bar{\boldsymbol{\zeta}} = 0 \quad (5.19a)$$

onde:

$$\bar{\boldsymbol{\zeta}} = \{\bar{\xi}_{n,m}\}; \quad \alpha_{a,i} = \beta_{a,i}^2; \quad \mathbf{M} = \{M_{n,m}\}; \quad (5.19b-d)$$

$$M_{n,m} = - \int_0^1 \tilde{\Omega}_n(Y) \tilde{\Omega}_m(Y) dY;$$

$$\mathbf{L} = \{L_{n,m}\};$$

$$L_{n,m} = - \int_0^1 K(Y) \frac{d\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY} \frac{d\tilde{\Omega}_m(Y)}{dY} dY + \underbrace{K(1)\tilde{\Omega}_m(1) \frac{d\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY} \Big|_{Y=1}}_{L1} - \quad (5.19e)$$

$$\underbrace{- K(0)\tilde{\Omega}_m(0) \frac{d\tilde{\Omega}_n(Y)}{dY} \Big|_{Y=0}}_{L2};$$

onde $\tilde{\Omega}_m(Y)$ é autofunção auxiliar normalizada obtida a partir do problema de autovalor auxiliar da Eq. (5.10). Novamente, os termos $L1$ e $L2$ são os termos dependentes das condições de contorno.

Operando a Eq.(5.16a) com o termo $\int_0^1 \tilde{\xi}_i(Y)(.) dY$, o seguinte sistema transformado de equações diferenciais parciais pode ser obtido:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i(Z, t)}{\partial t} + \beta_{a,i}^2 \bar{\theta}_i(Z, t) = g_i(Z, t, \bar{\boldsymbol{\theta}}) \quad (5.20a)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\theta}} = \{\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \dots\}$ e:

$$g_i(Z, t, \bar{\boldsymbol{\theta}}) = - \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\partial \bar{\theta}_n(Z, t)}{\partial Z} \int_0^1 U(Y) W(Y) \xi_i(Y) \tilde{\xi}_n(Y) dY + \\ + \sum_{n=1}^{N_p} \frac{\partial^2 \bar{\theta}_n(Z, t)}{\partial Z^2} \int_0^1 \frac{K(Y)}{Pe_{f1}^2} \tilde{\xi}_i(Y) \tilde{\xi}_n(Y) dY \quad (5.20b)$$

Por fim, as condições de contorno transformadas são dadas por:

$$\bar{\theta}_i(Z, 0) = \int_0^1 \tilde{\xi}_i(Y) \theta^*(Y, Z, 0) dY \quad (5.20c)$$

$$\bar{\theta}_i(0, t) = \int_0^1 \tilde{\xi}_i(Y) \theta^*(Y, 0, t) dY; \quad \left. \frac{\partial \bar{\theta}_i(Z, t)}{\partial Z} \right|_{Z=z_\infty} = 0; \quad (5.20d)$$

Assim como nas outras abordagens já apresentadas, o sistema de EDP's definido anteriormente deve ser truncado em uma ordem N_p que garanta uma convergência adequada para o campo de temperatura. O sistema de EDP's pode ser resolvido de forma numérica utilizando a função *NDSolve* da plataforma *Mathematica*®, a qual permite o controle dos erros absolutos e relativos da solução. No presente caso, a solução de interesse é aquela que se apresenta no regime permanente, ou seja, após o efeito pseudo-transiente introduzido não ser mais relevante. Com os valores de $\bar{\theta}_i(Z, t)$ obtidos, aplica-se a fórmula da inversa (Eq. (5.17b)) e depois a equação do filtro (5.6) para recuperar o campo de temperatura original.

5.3 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO

Antes de testar o problema proposto no começo deste capítulo, foi necessário fazer a verificação do código implementado. Para isso, foram utilizados os dados apresentados em Knupp et al. (2013), relativos a um problema no qual considera-se um escoamento monofásico e hidrodinamicamente desenvolvido entre placas paralelas. As equações utilizadas para esta verificação são as mesmas apresentadas no começo deste capítulo, tirando o fato de que, por se tratar de um escoamento monofásico, o termo Pe_{f1} se torna, neste caso, apenas Pe . É importante salientar também que a adimensionalização da equação da energia foi feita de forma diferente à apresentada por Knupp et al. (2013), fazendo com que o número de Péclet da presente verificação seja equivalente à metade do número de Péclet em Knupp et al. (2013).

Os resultados obtidos para a verificação do código podem ser observados no ANEXO A (Capítulo 8) e mostram uma ótima concordância com os resultados de Knupp et al. (2013). Para a solução via problema de autovalor não clássico, o desvio relativo em relação aos resultados da literatura ficaram abaixo de 0,025% com uma ordem de truncamento de 25 autovalores. Já a solução via transformação integral parcial apresentou um desvio relativo abaixo de 0,25% com uma ordem de truncamento de 50 autovalores. Embora isso indique uma convergência mais rápida dos resultados utilizando a solução via problema de autovalor não-clássico, não se sabe como uma maior quantidade de interfaces no meio irá interferir nas taxas de convergências das duas soluções propostas.

5.4 RESULTADOS

Uma vez que o código foi devidamente verificado com os resultados existentes na literatura, é possível apresentar agora os resultados obtidos para o problema original deste capítulo, ou seja, um problema conjugado de transferência de calor com formulação em domínio único considerando um escoamento bifásico estratificado completamente desenvolvido. A apresentação dos resultados foi dividida em duas seções: a primeira,

considerando apenas um canal no interior do domínio e a segunda, considerando múltiplos canais.

Os resultados que serão apresentados aqui foram parcialmente apresentados em Zotin et al. (2016a) utilizando, no entanto, propriedades termofísicas hipotéticas ao longo do domínio. No presente caso, os resultados foram obtidos considerando a região sólida como sendo acrílico ($k_s = 0,19 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$) e os dois fluidos como sendo água ($k_{f1} = 0,62 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ e $w_{f1} = 4,112 \text{ MJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$) e óleo de soja ($k_{f2} = 0,158 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ e $w_{f2} = 1,727 \text{ MJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$). Além disso, as dimensões do canal consideradas foram: $H = 1/3$, $H_1 = 0,09289$ e $H_2 = 0,24044$. Os valores para as propriedades termofísicas do óleo de soja foram retirados de Hammond et al. (2005) e Janke et al. (2013).

5.4.1 Resultados para um único microcanal no interior do domínio.

O domínio apresentando apenas um microcanal em seu interior já foi definido na Figura 5.1, assim como o perfil de velocidade na Figura 5.2. Para este caso então, as variações das propriedades térmicas e do perfil de velocidade, obtido para $Q_1 = Q_2$, ao longo do domínio são definidas como:

$$W(Y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Y \leq 1/3 \\ 1, & 1/3 < Y \leq 0,426229 \\ 0,420066, & 0,426229 < Y \leq 2/3 \\ 0, & 2/3 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.21a)$$

$$K(Y) = \begin{cases} 0,306452, & 0 \leq Y \leq 1/3 \\ 1, & 1/3 < Y \leq 0,426229 \\ 0,254839, & 0,426229 < Y \leq 2/3 \\ 0,306452, & 2/3 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.21b)$$

$$U(Y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Y \leq 1/3 \\ -31.6155 + 166.689 Y - 215.527 Y^2, & 1/3 < Y \leq 0.426229 \\ -0.256662 + 2.78966 Y - 3.60700 Y^2, & 0.426229 < Y \leq 2/3 \\ 0, & 2/3 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.21c)$$

As condições de contorno em ambas as laterais do domínio serão consideradas como sendo do primeiro tipo, ou seja, $Bi \rightarrow \infty$. O número de Péclet do fluido 1 (Pe_{f1}), que aparece na equação da energia adimensionalizada, foi obtido para este estudo como sendo $Pe_{f1} = 0,025$.

Considerando primeiramente a abordagem da Seção 5.1, ou seja, através de um problema de autovalor não-clássico, as ordens de truncamento consideradas para solução deste problema foram as mesmas consideradas para a verificação do código, ou seja, $N_{aux} = 50$ e $N_p = 25$. A Tabela 5.1 apresenta a convergência dos cinco primeiros autovalores μ_i em função da ordem de truncamento $N_{P,aux}$, resultando em uma convergência entre o terceiro e o quarto algarismo significativo para todos os valores apresentados, muito próximo ao observado para o caso com escoamento monofásico.

Tabela 5.1: Convergência dos autovalores μ_i do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$.

Autovalores		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
	Ordem					
$N_{P,aux} = 10$		0,2620	0,3859	0,4987	0,5421	0,6409
$N_{P,aux} = 20$		0,2618	0,3850	0,4968	0,5399	0,6388
$N_{P,aux} = 30$		0,2617	0,3845	0,4958	0,5394	0,6378
$N_{P,aux} = 40$		0,2617	0,3843	0,4955	0,5390	0,6374
$N_{P,aux} = 50$		0,2617	0,3842	0,4952	0,5389	0,6371

Para se ter uma melhor avaliação da convergência desses autovalores é possível avaliar também a evolução do desvio relativo em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{P,aux}$. Para isso, utilizou-se a seguinte expressão:

$$\epsilon\mu(n) = \left| \frac{\mu_n - \mu_{n-5}}{\mu_n} \right| \cdot 100 \quad (5.22)$$

Esses resultados são apresentados na Figura 5.5 onde observa-se desvios relativos abaixo de 0,03% para todos os autovalores observados, indicando assim uma boa convergência dos mesmos para $N_{P,aux} = 50$.

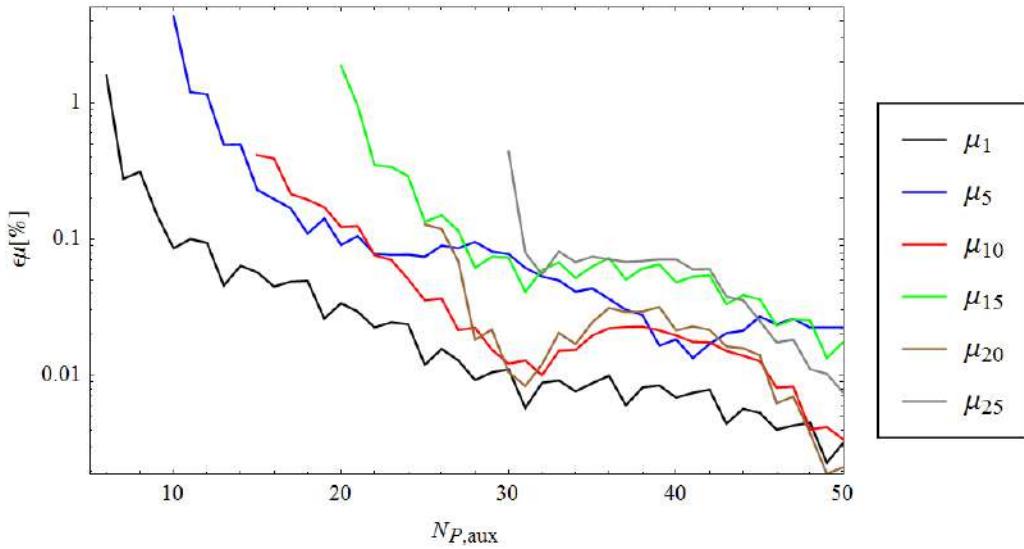


Figura 5.5: Desvios relativos do 1°, 5°, 10°, 15°, 20° e 25° autovalores do problema de autovalor não-clássico em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{P,aux}$.

Através do mesmo problema algébrico (Eq.(5.13a)) utilizado para determinar os autovalores, é possível determinar a autofunção transformada, a qual, através da Eq.(5.10b),

fornecerá a autofunção original do problema de autovalor não-clássico. Sendo assim, a autofunção ψ_i dependerá tanto da ordem de truncamento $N_{P,aux}$ quanto da N_p .

Na Figura 5.6 apresenta-se um gráfico de convergência da quinta autofunção, em função apenas da ordem de truncamento $N_{P,aux}$, onde as linhas verticais tracejadas pretas representam a interface entre o meio líquido e sólido e a linha vertical tracejada vermelha representa a interface entre os dois fluidos. Para este caso N_p foi considerado constante ($N_p = 25$). A quinta autofunção foi escolhida arbitrariamente, uma vez que todas as outras autofunções observadas apresentaram o mesmo comportamento que será descrito a seguir.

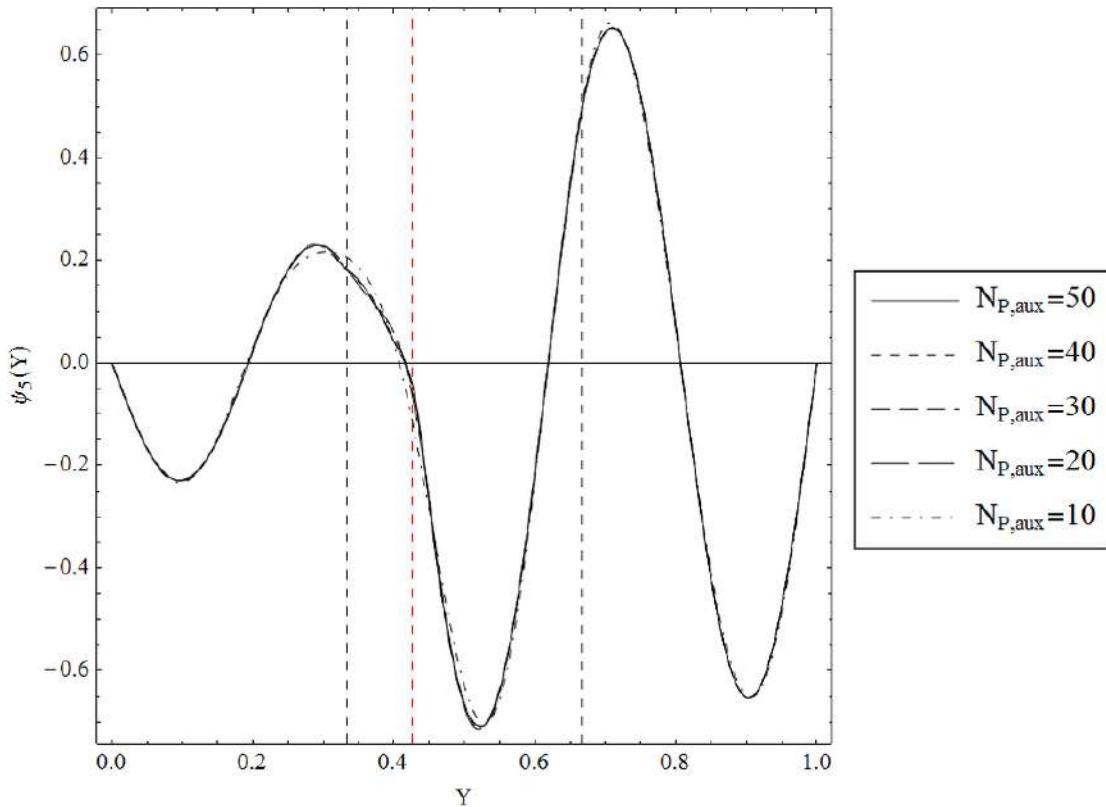


Figura 5.6: Convergência da quinta autofunção do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$.

Como pode ser observado, a convergência da autofunção ψ_i se mostra mais sensível próxima às regiões de interface, onde pode haver uma convergência mais lenta. Para regiões afastadas da interface, a autofunção já se encontra com convergência na escala do gráfico para $N_{P,aux} = 10$. No entanto, para regiões mais próximas à interface, observa-se a necessidade de ordens $N_{P,aux} > 20$.

Tendo obtido então os autovalores e as autofunções do problema de autovalor com difusão axial, é possível agora recuperar o campo de temperatura original do problema. Estes dados estão expostos na Figura 5.7, onde diversos perfis de temperatura são apresentados para diferentes valores de ZPe_{f1} ao longo domínio. Assim como observado na Figura 8.1 (ANEXO A), é possível perceber novamente a deformação do perfil de temperatura no meio sólido causada pelo efeito da condução axial. No entanto, para ZPe_{f1} maiores, é possível notar uma tendência do perfil de temperatura para um comportamento mais linear.

Para ilustrar a convergência dos perfis de temperatura da Figura 5.7, a Tabela 5.2 e a Tabela 5.3 apresentam a convergência da temperatura para diversos pontos do domínio em função da ordem de truncamento N_P . A primeira tabela apresenta os valores em $ZPe_{f1} = 0,1$ e a segunda em $ZPe_{f1} = 0,2$. Os resultados da primeira tabela apresentaram uma concordância em ± 1 no quarto algarismo significativo para $N_P = 25$, enquanto que a segunda apresentou uma concordância total no quarto algarismo significativo, também para $N_P = 25$. Comparando com os resultados obtidos para o problema de verificação do código (Tabela 8.2 e Tabela 8.3), o qual possui apenas uma interface no domínio, a ordem de truncamento necessária para garantir uma convergência semelhante aos resultados deste problema foi a mesma, indicando que, talvez, o número de interfaces não interfira tanto na taxa de convergência do campo de temperaturas.

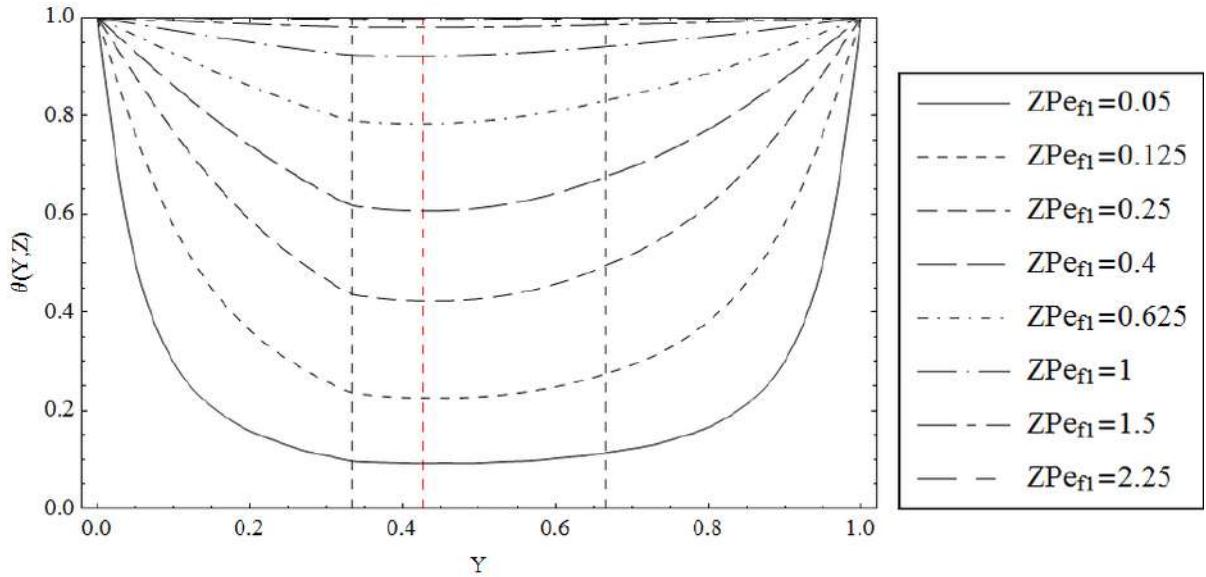


Figura 5.7: Perfis de temperatura obtidos através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$.

Tabela 5.2: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado, obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$.

$ZPe_{fl} = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_p = 5$	0,5371	0,2213	0,1672	0,2681	0,5192
$N_p = 10$	0,4996	0,2490	0,1812	0,2700	0,5064
$N_p = 15$	0,5031	0,2483	0,1838	0,2690	0,5094
$N_p = 20$	0,5032	0,2480	0,1838	0,2687	0,5099
$N_p = 25$	0,5031	0,2480	0,1837	0,2688	0,5098

Tabela 5.3: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado, obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$.

$ZPe_{f1} = 0,2$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 5$	0,7169	0,4401	0,3501	0,4801	0,7247
$N_P = 10$	0,7118	0,4447	0,3521	0,4803	0,7237
$N_P = 15$	0,7119	0,4447	0,3522	0,4802	0,7238
$N_P = 20$	0,7119	0,4447	0,3522	0,4802	0,7238
$N_P = 25$	0,7119	0,4447	0,3522	0,4802	0,7238

Apresenta-se aqui uma forma de avaliar a convergência do resultado, através da análise da estimativa do resíduo relativo ao longo domínio, ou seja, a razão entre a contribuição dos últimos termos da expansão e a melhor estimativa da solução, obtida com a maior ordem de truncamento disponível. Com isso, será possível analisar a convergência dos resultados de forma mais global ao longo do domínio, e mais facilmente identificar as regiões onde a convergência é mais lenta ou mais rápida. Para tanto, adotaram-se os cinco últimos termos da expansão para definir o resíduo relativo, para cada ordem de truncamento analisada:

$$\epsilon\theta(Y, Z) = \left| \frac{\sum_{i=1}^{N_P} \tilde{\psi}_i(Y) \bar{\theta}_i(Z) - \sum_{i=1}^{N_P-5} \tilde{\psi}_i(Y) \bar{\theta}_i(Z)}{1 + \sum_{i=1}^{N_P} \tilde{\psi}_i(Y) \bar{\theta}_i(Z)} \right| \cdot 100 \quad (5.23)$$

Para ilustrar valores do resíduo relativo, dois gráficos apresentam a sua variação ao longo de Y , para dois valores de N_P diferentes, em $ZPe_{f1} = 0,1$ (Figura 5.8) e $ZPe_{f1} = 0,2$ (Figura 5.9). Como é de se esperar, para maiores valores de N_P , menor será o resíduo relativo da temperatura e, consequentemente, melhor a convergência do resultado.

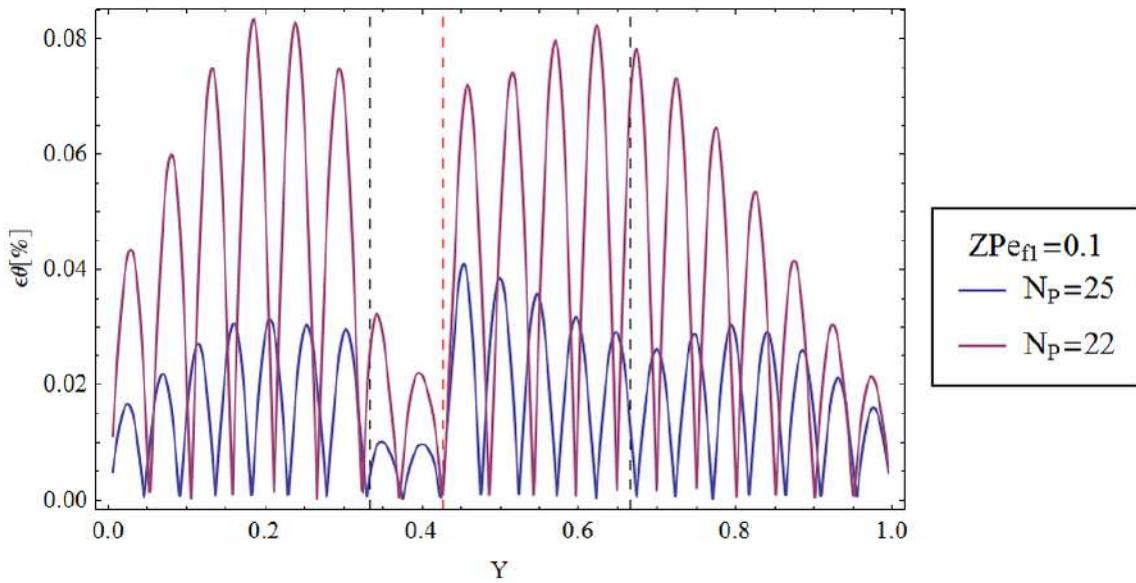


Figura 5.8: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,1$ em um domínio com apenas um canal.

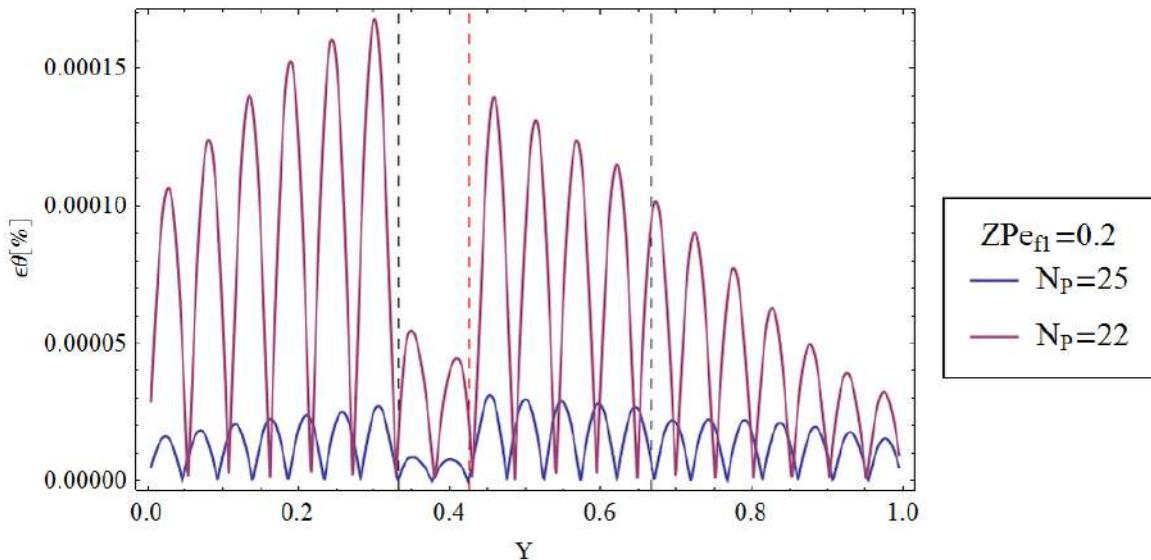


Figura 5.9: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,2$ em um domínio com apenas um canal.

Assim como descrito no ANEXO A, observa-se uma tendência dos resíduos relativos serem maiores nos meios sólidos e, neste caso, mais próximos das interfaces. No entanto, pelo fato do problema ser assimétrico, os resíduos relativos nas duas regiões sólidas também não apresentam simetria, uma vez que ambas estão em contato com fluidos diferentes. Observa-se também, que nesse exemplo específico, os resíduos para a região do fluido 1 tendem a ser menores em relação ao fluido 2, possivelmente pelo fato da equação da energia ter sido adimensionalizada através das propriedades do fluido 1. No entanto, isso deve ser investigado mais a fundo. Fazendo ainda uma comparação entre as mesmas duas figuras, é possível observar uma esperada convergência mais lenta do potencial para os menores valores de z . Para $ZPe_{f1} = 0,2$ o resíduo relativo médio é três ordens de grandeza menor em relação a $ZPe_{f1} = 0,1$ para a mesma ordem de truncamento.

Partindo para a abordagem via transformação integral parcial, apresenta-se na Tabela 5.4 a análise de convergência dos cinco primeiros autovalores β_i em função da ordem de truncamento $N_{P,aux}$. Para que os resultados do campo de temperatura original possam ser obtidos, utilizaram-se as mesmas ordens de truncamento declaradas no problema no qual a verificação do código foi feita ($N_{P,aux} = 60$, $N_P = 50$). Observa-se uma convergência entre o terceiro e quarto algarismo significativo em todos os valores apresentados.

Assim como feito para a solução via problema de autovalor não clássico, na Figura 5.10 apresenta-se os desvios relativos para 6 autovalores distintos em função da ordem de truncamento. Todos os autovalores observados apresentaram desvios relativos menores que 0,07% , indicando assim uma boa convergência dos mesmos para $N_{P,aux} = 60$.

Na Figura 5.11 apresenta-se um gráfico de convergência da quinta autofunção, em função apenas da ordem de truncamento $N_{P,aux}$. Assim como foi observado para a convergência da autofunção ψ_i (Figura 5.6), a convergência da autofunção ξ_i também se mostra mais lenta próxima às interfaces, sendo necessário uma ordem de truncamento $N_{aux} > 30$ para garantir uma convergência da autofunção na escala gráfica apresentada.

Tabela 5.4: Convergência dos autovalores β_i da solução via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$.

Autovalores		β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
Ordem	β_i					
$N_{P,aux} = 10$		1,7552	3,4802	5,5273	6,9102	9,0188
$N_{P,aux} = 20$		1,7531	3,4668	5,4922	6,8603	8,9469
$N_{P,aux} = 30$		1,7520	3,4599	5,4694	6,8577	8,9200
$N_{P,aux} = 40$		1,7517	3,4574	5,4635	6,8528	8,9093
$N_{P,aux} = 50$		1,7514	3,4553	5,4562	6,8515	8,9007
$N_{P,aux} = 60$		1,7513	3,4545	5,4541	6,8496	8,8970

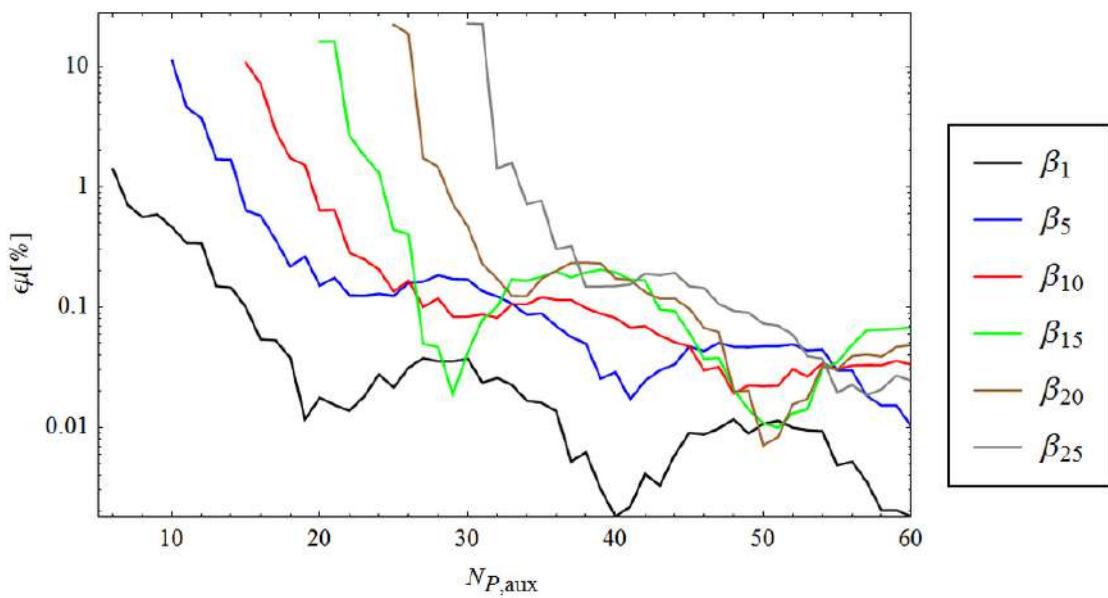


Figura 5.10: Desvios relativos do 1° , 5° , 10° , 15° , 20° e 25° autovalores da solução via transformação parcial em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{p,aux}$.

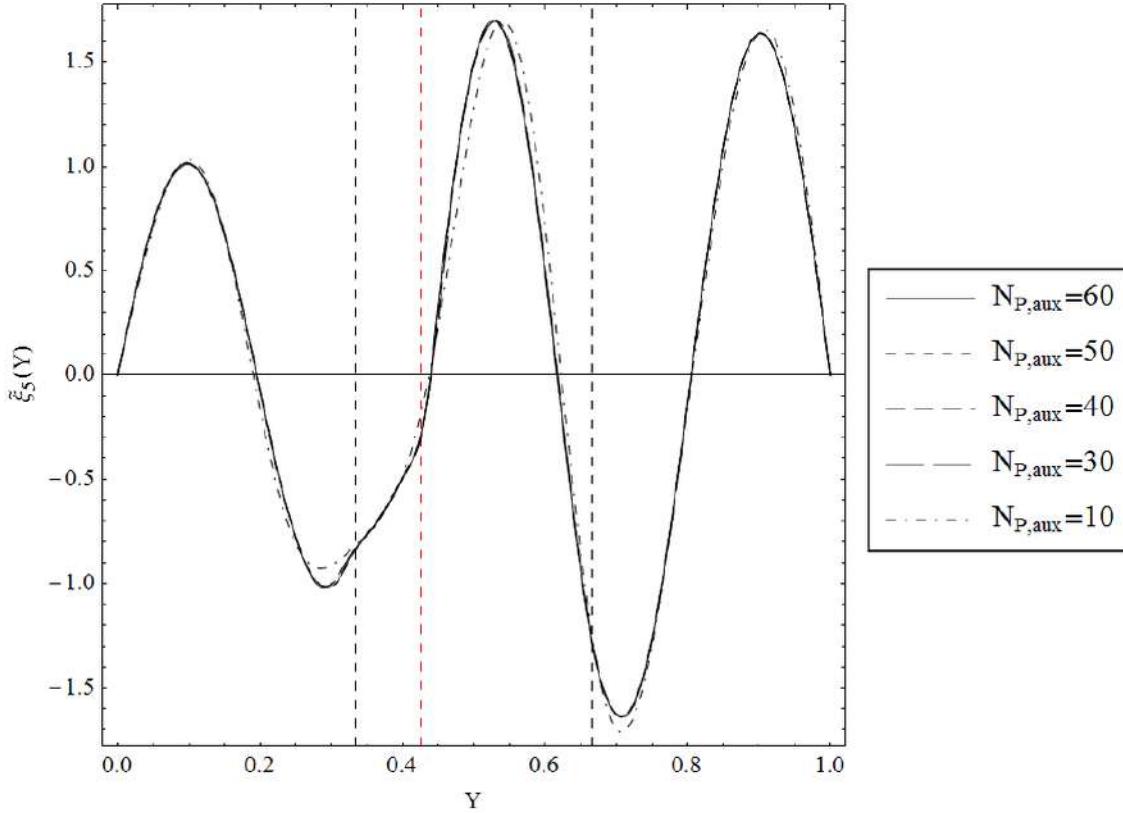


Figura 5.11: Convergência da quinta autofunção da solução via transformada integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pefl=0,025$.

Com os autovalores e autofunções obtidos, é necessário agora determinar o potencial transformado $\bar{\theta}_i(Z, t)$ através do sistema de EDP's da Eq.(5.20a), cuja solução pode ser facilmente obtida através da função *NDSolve* do programa *Mathematica*®. Como dito anteriormente, o resultado de interesse se encontra no regime permanente. Para o problema em questão, um tempo de $t = 4$ foi suficiente para garantir esta condição.

Na Tabela 5.5 e na Tabela 5.6 apresenta-se a convergência da temperatura para diversos pontos do domínio em função da ordem de truncamento N_P . Observando ambas as

tabelas, obteve-se uma concordância de ± 2 no quarto algarismo significativo em todos os pontos apresentados, tanto para $ZPe_{f1} = 0,1$ quanto $ZPe_{f1} = 0,2$.

Assim como foi observado para a solução via problema de autovalor não-clássico, ao fazer uma comparação com os resultados obtidos para o problema de verificação do código (Tabela 8.5 e Tabela 8.6), o qual possui apenas uma interface no domínio, a ordem de truncamento para garantir a convergência é muito semelhante. Além disso, os resíduos relativos máximos observados tanto para este caso quanto para o caso da verificação do código foram muito semelhantes. Ou seja, aparentemente, o número de interfaces no interior do domínio não interfere na convergência da temperatura para as duas metodologias empregadas.

Dando continuidade, é possível fazer agora uma comparação entre os resultados de temperatura obtidos através das duas abordagens consideradas. Essa comparação é apresentada na Tabela 5.7, apresentando uma concordância de ± 1 no quarto algarismo significativo tanto para $ZPe_{f1} = 0,1$ quanto para $ZPe_{f1} = 0,2$. Na Tabela 5.8 a mesma comparação, mas considerando $Pe_{f1} = 0,25$, é apresentada e, novamente, observa-se uma concordância de ± 1 no quarto algarismo significativo tanto para $ZPe_{f1} = 0,1$ quanto $ZPe_{f1} = 0,2$. Apesar da convergência dos resultados para $Pe_{f1} = 0,25$ não terem sido apresentados, as mesmas ordens de truncamento foram utilizadas, e as mesmas concordâncias em relação à condição de $Pe_{f1} = 0,025$ obtidas.

Por fim, para uma melhor visualização dos resultados obtidos, apresenta-se na Figura 5.12 o gráfico das isotermas do presente problema considerando $Pe_{f1} = 0,025$.

Tabela 5.5: Convergência da temperatura via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$.

$ZPe_{f1} = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 10$	0,4999	0,2496	0,1863	0,2686	0,5066
$N_P = 20$	0,5029	0,2464	0,1829	0,2687	0,5099
$N_P = 30$	0,5030	0,2475	0,1831	0,2688	0,5098
$N_P = 40$	0,5032	0,2483	0,1837	0,2688	0,5098
$N_P = 50$	0,5031	0,2481	0,1837	0,2688	0,5098

Tabela 5.6: Convergência da temperatura via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$.

$ZPe_{f1} = 0,2$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 10$	0,7121	0,4465	0,3545	0,4802	0,7239
$N_P = 20$	0,7114	0,4433	0,3510	0,4800	0,7237
$N_P = 30$	0,7117	0,4441	0,3515	0,4801	0,7238
$N_P = 40$	0,7119	0,4448	0,3523	0,4802	0,7238
$N_P = 50$	0,7119	0,4447	0,3522	0,4802	0,7238

Tabela 5.7: Comparação dos resultados de temperatura obtidos através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com $Pe_{fl}=0,025$ e considerando as casas decimais convergidas.

	$ZPe_{f1} = 0,1$		$ZPe_{f1} = 0,2$	
	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²
$Y = 0,1$	0,5031	0,5031	0,7119	0,7119
$Y = 0,25$	0,2480	0,2481	0,4447	0,4447
$Y = 0,5$	0,1837	0,1837	0,3522	0,3522
$Y = 0,75$	0,2688	0,2688	0,4802	0,4802
$Y = 0,9$	0,5098	0,5098	0,7238	0,7238

¹ $N_{P,aux} = 50$ e $N_P = 25$ ² $N_{P,aux} = 60$ e $N_P = 50$

Tabela 5.8: Comparação dos resultados de temperatura obtidos através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com $Pe_{fl}=0,25$ considerando as casas decimais convergidas.

	$ZPe_{f1} = 0,1$		$ZPe_{f1} = 0,2$	
	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²
$Y = 0,1$	0,5026	0,5026	0,7109	0,7110
$Y = 0,25$	0,2465	0,2465	0,4420	0,4420
$Y = 0,5$	0,1812	0,1811	0,3482	0,3482
$Y = 0,75$	0,2680	0,2680	0,4788	0,4788
$Y = 0,9$	0,5096	0,5096	0,7233	0,7233

¹ $N_{P,aux} = 50$ e $N_P = 25$ ² $N_{P,aux} = 60$ e $N_P = 50$

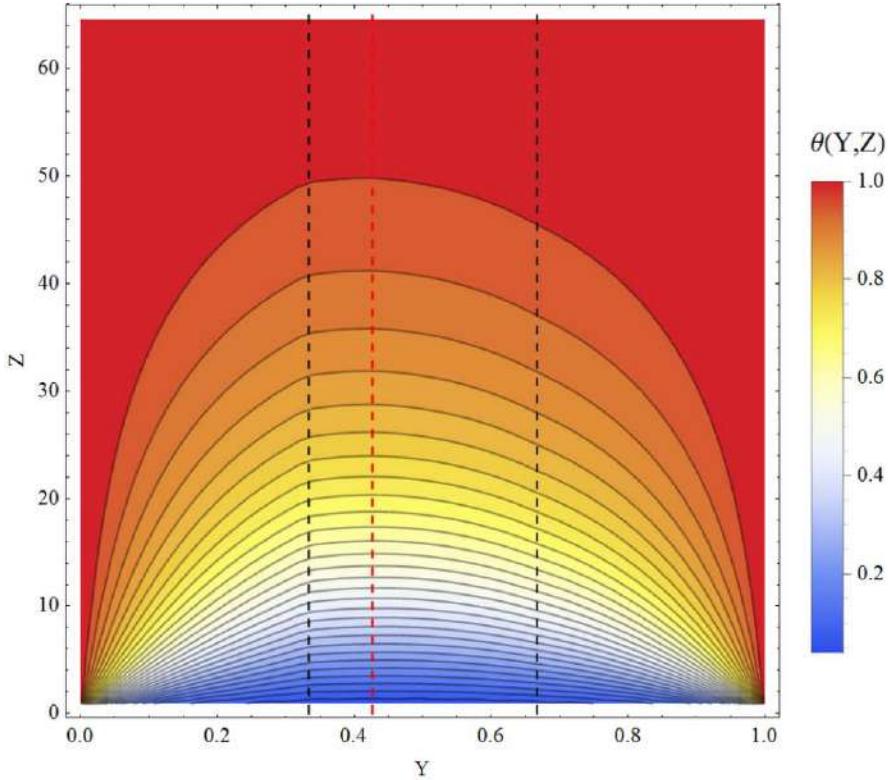


Figura 5.12: : Isotermas da solução do problema com um único canal no interior do domínio.

5.4.2 Resultados para múltiplos microcanais no interior do domínio.

Para este estudo considerou-se quatro microcanais no interior do domínio com o mesmo escoamento bifásico estratificado apresentado anteriormente, conforme apresentado na Figura 5.3 e na Figura 5.4. Com isso, a nova geometria, que também não possui simetria, apresenta 12 interfaces no interior do domínio, o que permitirá verificar de forma mais adequada se a complexidade física interfere na convergência da solução.

Além do perfil de velocidade, já definido na Figura 5.4, é necessário definir também a variação das propriedades térmicas ao longo domínio. Os valores das propriedades térmicas dos três meios distintos (sólido, fluido 1 e fluido 2) são os mesmos que os apresentados para o problema abrangendo apenas uma canal no interior do domínio. Neste caso no entanto, considerou-se $H = 0.1$, $H_1 = 0,02786$ e $H_2 = 0,07214$. Sendo assim, nas Eqs. (5.24a-c) apresenta-se a variação dessas propriedades e dos perfis de velocidade ao

longo da largura do domínio também adimensionalizada. Novamente, as variações das propriedades e do perfil de velocidade foram definidas pela função *Piecewise* do programa Mathematica®.

$$W(Y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Y \leq 0,15 \\ 1, & 0,15 < Y \leq 0,17786 \\ 0,420066, & 0,17786 < Y \leq 0,25 \\ 0, & 0,25 < Y \leq 0,35 \\ 1, & 0,35 < Y \leq 0,37786 \\ 0,420066, & 0,37786 < Y \leq 0,45 \\ 0, & 0,45 < Y \leq 0,55 \\ 1, & 0,55 < Y \leq 0,57786 \\ 0,420066, & 0,57786 < Y \leq 0,65 \\ 0, & 0,65 < Y \leq 0,75 \\ 1, & 0,75 < Y \leq 0,77786 \\ 0,420066, & 0,77786 < Y \leq 0,85 \\ 0, & 0,85 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.24a)$$

$$K(Y) = \begin{cases} 0,306452, & 0 \leq Y \leq 0,15 \\ 1, & 0,15 < Y \leq 0,17786 \\ 0,254839, & 0,17786 < Y \leq 0,25 \\ 0,306452, & 0,25 < Y \leq 0,35 \\ 1, & 0,35 < Y \leq 0,37786 \\ 0,254839, & 0,37786 < Y \leq 0,45 \\ 0,306452, & 0,45 < Y \leq 0,55 \\ 1, & 0,55 < Y \leq 0,57786 \\ 0,254839, & 0,57786 < Y \leq 0,65 \\ 0,306452, & 0,65 < Y \leq 0,75 \\ 1, & 0,75 < Y \leq 0,77786 \\ 0,254839, & 0,77786 < Y \leq 0,85 \\ 0,306452, & 0,85 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.24b)$$

$$U(Y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq Y \leq 0,15 \\ -65.383 + 795.10 Y - 2394.7 Y^2, & 0,15 < Y \leq 0,17786 \\ -0.82180 + 13.306 Y - 40.077 Y^2, & 0,17786 < Y \leq 0,25 \\ 0, & 0,25 < Y \leq 0,35 \\ -320.19 + 1753.0 Y - 2394.7 Y^2, & 0,35 < Y \leq 0,37786 \\ 5.0862 + 29.337 Y - 40.077 Y^2, & 0,37786 < Y \leq 0,45 \\ 0, & 0,45 < Y \leq 0,55 \\ -766.58 + 2710.9 Y - 2394.7 Y^2, & 0,55 < Y \leq 0,57786 \\ 12.556 + 45.368 Y - 40.077 Y^2, & 0,57786 < Y \leq 0,65 \\ 0, & 0,65 < Y \leq 0,75 \\ -1404.5 + 3668.8 Y - 2394.7 Y^2, & 0,75 < Y \leq 0,77786 \\ -23.233 + 61.399 Y - 40.077 Y^2, & 0,77786 < Y \leq 0,85 \\ 0, & 0,85 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (5.24c)$$

Dando início à apresentação dos resultados via problema de autovalor não-clássico (Seção 5.1), utilizou-se como ordens de truncamento $N_{P,aux} = 70$ e $N_P = 25$. A ordem de truncamento para a solução do problema de autovalor para este caso foi ligeiramente aumentada em relação ao problema anterior, com o intuito de garantir uma convergência semelhante de ± 2 no quarto algarismo significativo para os autovalores μ_i . Com isso, percebe-se que um maior número de interfaces no interior do domínio, de fato, pode interferir na convergência da solução. Todas essas observações podem ser verificadas na Tabela 5.9 onde apresenta-se a convergência dos autovalores μ_i .

Além disso, mais uma vez apresenta-se, na Figura 5.13, a variação dos desvios relativos de alguns autovalores em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{P,aux}$. Como é possível observar, para $N_{P,aux} = 70$ os desvios relativos de todos os autovalores observados já se encontram abaixo de 0,03%, semelhante ao que se observou para o caso contendo apenas um microcanal no interior do domínio (Figura 5.5), indicando portanto, uma boa convergência dos autovalores.

Tabela 5.9: Convergência dos autovalores μ_i do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$.

Autovalores		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
μ_i	Ordem					
$N_{P,aux} = 30$		0,2669	0,3770	0,4594	0,4594	0,6164
$N_{P,aux} = 40$		0,2664	0,3764	0,4588	0,5211	0,6149
$N_{P,aux} = 50$		0,2662	0,3761	0,4584	0,5207	0,6142
$N_{P,aux} = 60$		0,2662	0,3760	0,4583	0,5205	0,6141
$N_{P,aux} = 70$		0,2661	0,3759	0,4582	0,5203	0,6140

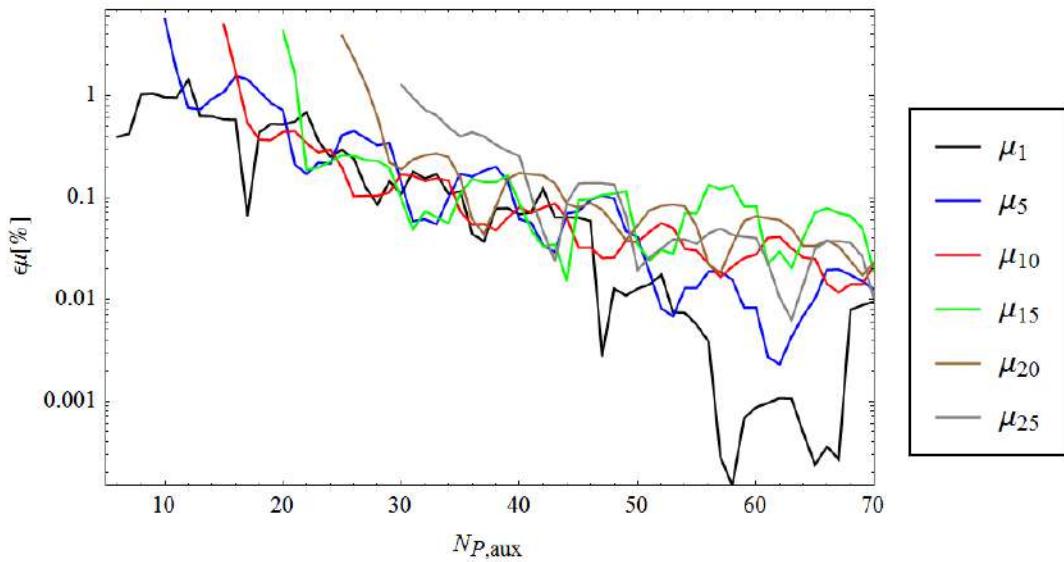


Figura 5.13: Desvios relativos do 1° , 5° , 10° , 15° , 20° e 25° autovalores do problema de autovalor não-clássico para múltiplos canais em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{p,aux}$.

A convergência da oitava autofunção em função da ordem de truncamento $N_{P,aux}$ é, por sua vez, apresentada na Figura 5.14. Devido ao maior número de interfaces presentes neste domínio, não é possível perceber, na escala do gráfico, uma convergência mais rápida ou mais lenta ao longo dos diferentes meios. No entanto, para uma ordem de truncamento $N_{aux} > 50$, a autofunção já aparece convergida para a escala do gráfico apresentada.

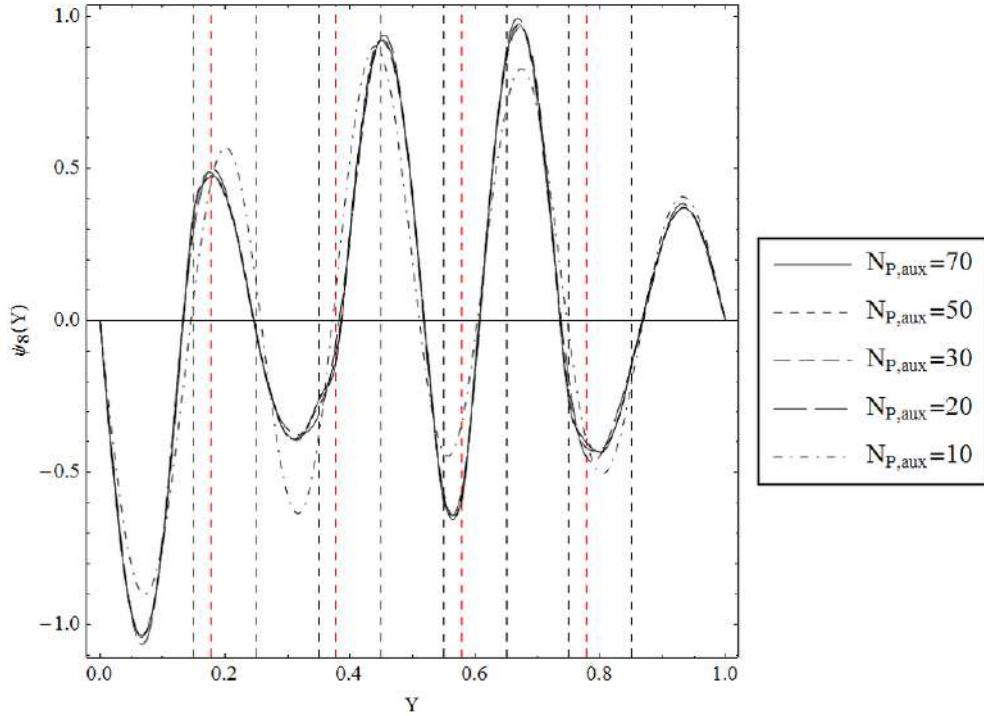


Figura 5.14: Convergência da oitava autofunção do problema de autovalor não-clássico para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$.

A seguir apresenta-se os diferentes perfis de temperatura obtidos ao longo do domínio, como pode ser visto na Figura 5.15. As mesmas observações feitas para os perfis de temperatura do problema com apenas um canal ainda são válidas para o presente problema e, portanto, não serão novamente apresentadas. Devido ao maior número de canais no interior deste domínio, é possível observar temperaturas menores nas mesmas posições longitudinais ao longo do domínio, em função do resfriamento mais efetivo.

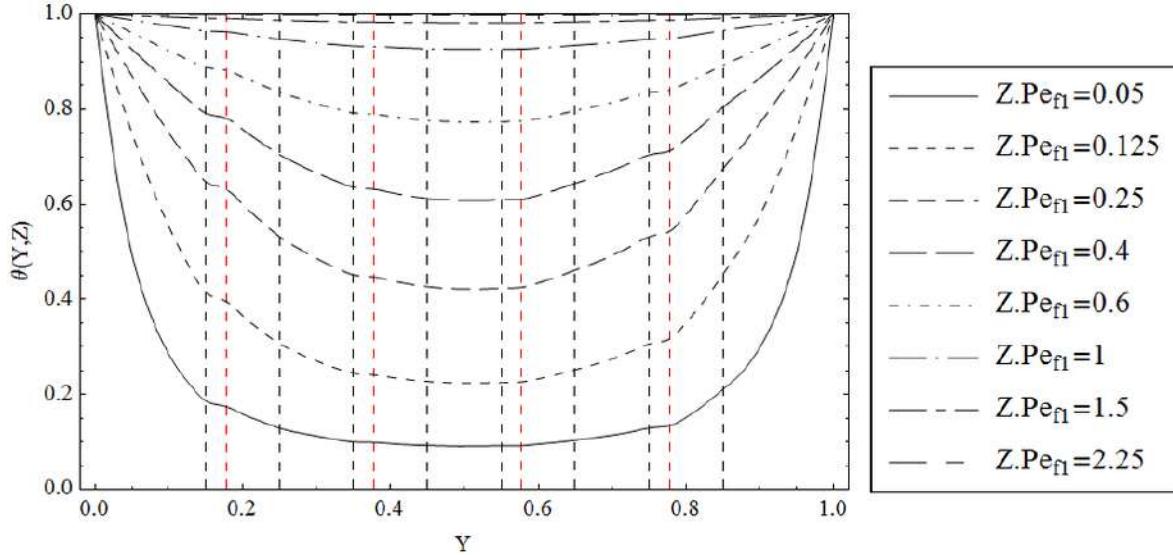


Figura 5.15: Perfis de temperatura para múltiplos canais obtidos através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$.

Na Tabela 5.10 e Tabela 5.11 apresenta-se a convergência da temperatura em função da ordem de truncamento N_P em diferentes pontos ao longo do domínio. Como pode ser observado, para $N_P = 25$ obteve-se concordância de ± 1 no quarto algarismo significativo em $ZPe_{f1} = 0,1$ e concordância completa no sexto algarismo significativo em $ZPe_{f1} = 0,2$, ordens estas muito semelhantes às obtidas para o problema com apenas um canal no interior do domínio.

Com isso, é possível concluir que o número de interfaces no interior do domínio aparentemente não altera a ordem de truncamento N_P para se obter uma determinada convergência da temperatura, através da metodologia apresentada na Seção 5.1. No entanto, para a convergência dos autovalores foi necessário um acréscimo da ordem de truncamento $N_{P,aux}$.

Tabela 5.10: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{f1}=0,1$.

$ZPe_{f1} = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 5$	0,5191	0,2342	0,1737	0,2479	0,5112
$N_P = 10$	0,4796	0,2508	0,1799	0,2496	0,5033
$N_P = 15$	0,4833	0,2506	0,1805	0,2501	0,5057
$N_P = 20$	0,4834	0,2504	0,1805	0,2500	0,5061
$N_P = 25$	0,4833	0,2504	0,1805	0,2500	0,5060

Tabela 5.11: Convergência da temperatura para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais obtida através do problema de autovalor não-clássico com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{f1}=0,2$.

$ZPe_{f1} = 0,2$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 5$	0,6957	0,4496	0,3461	0,4515	0,7162
$N_P = 10$	0,6914	0,4523	0,3470	0,4520	0,7155
$N_P = 15$	0,6914	0,4523	0,3470	0,4520	0,7155
$N_P = 20$	0,6914	0,4523	0,3470	0,4520	0,7155
$N_P = 25$	0,6914	0,4523	0,3470	0,4520	0,7155

Novamente, utiliza-se a estimativa do resíduo relativo, apresentado na Eq. (5.23), para fazer uma análise mais global da convergência. Para ilustrar valores do resíduo relativo, dois gráficos apresentam a sua variação ao longo de Y , para dois valores de N_P

diferentes, em $ZPe_{f1} = 0,1$ (Figura 5.16) e $ZPe_{f1} = 0,2$ (Figura 5.17). Como esperado, para maiores valores de N_p menor será o resíduo relativo da temperatura e, consequentemente, melhor a convergência do resultado. No entanto, diferentemente do observado para o caso com apenas um canal no interior do domínio, analisando a Figura 5.16 e a Figura 5.17, não foi possível verificar uma região específica (sólido, fluido, interface) do domínio que possua um resíduo relativo maior ou menor. Os valores dos resíduos relativos apresentam ter uma variação aleatória ao longo de todo eixo Y do domínio, provavelmente por conta do número elevado de interfaces existentes no interior do domínio. Fazendo ainda uma comparação entre a Figura 5.16 e a Figura 5.17, é possível observar uma esperada convergência mais lenta da expansão para os menores valores de z. Para $ZPe_{f1} = 0,2$ o resíduo relativo médio é, novamente, três ordens de grandeza menor em relação a $ZPe_{f1} = 0,1$ para a mesma ordem de truncamento.

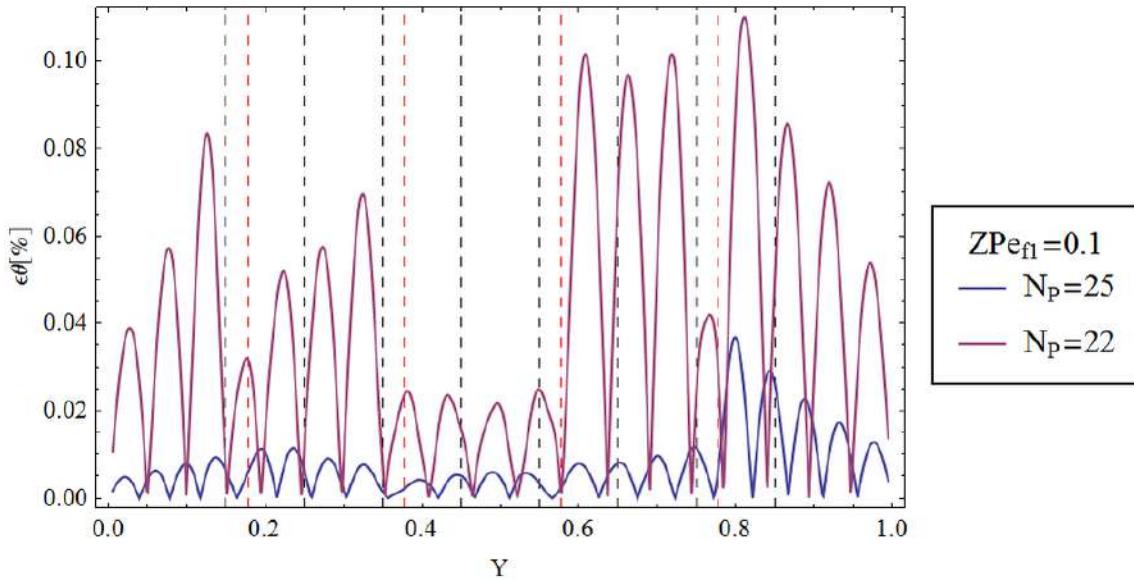


Figura 5.16: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_p em $ZPe_{fl}=0,1$ em um domínio com múltiplos canais.

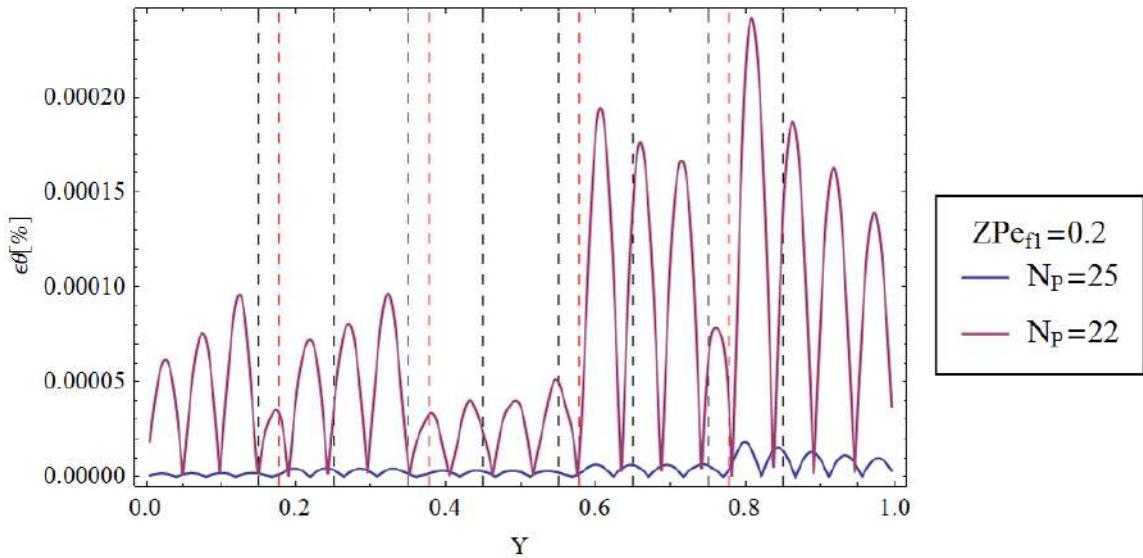


Figura 5.17: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,2$ em um domínio com múltiplos canais.

Considerando agora a abordagem da Seção 5.2, ou seja, através da solução via transformação integral parcial, é necessário informar que as ordens de truncamento para este caso também foram aumentadas, em relação ao problema com apenas um canal do interior do domínio, afim de garantir uma convergência similar. Sendo assim, utilizou-se $N_{P,aux} = 120$ e $N_P = 100$. Na Tabela 5.12 apresenta-se a convergência dos cinco primeiros autovalores β_i em função da ordem de truncamento $N_{P,aux}$, apresentando uma concordância de ± 2 no quarto algarismo significativo para $N_{P,aux} = 120$. Com isso, é possível perceber o quanto o número de interfaces interfere na convergência dos autovalores β_i da solução via transformação parcial.

Assim como foi feito para os casos anteriores, na Figura 5.18, apresenta-se a variação dos desvios relativos de alguns autovalores em função da ordem de truncamento auxiliar $N_{P,aux}$. Como é possível observar, para $N_{P,aux} = 120$ os desvios relativos de todos os autovalores observados já se encontram abaixo de 0,03%, abaixo inclusive do que se observou para o caso contendo apenas um microcanal no interior do domínio (Figura 5.10), indicando portanto, uma boa convergência dos autovalores.

Tabela 5.12: Convergência dos autovalores β_i da solução via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pefl=0,025$.

$\beta_{a,i}$	$\beta_{a,1}$	$\beta_{a,2}$	$\beta_{a,3}$	$\beta_{a,4}$	$\beta_{a,5}$
Ordem					
$N_{P,aux} = 70$	1,7605	3,5218	5,2818	7,0207	8,7546
$N_{P,aux} = 80$	1,7593	3,5197	5,2788	7,0170	8,7448
$N_{P,aux} = 90$	1,7582	3,5172	5,2750	7,0128	8,7361
$N_{P,aux} = 100$	1,7570	3,5151	5,2718	7,0091	8,7270
$N_{P,aux} = 110$	1,7563	3,5136	5,2696	7,0064	8,7212
$N_{P,aux} = 120$	1,7561	3,5132	5,2689	7,0056	8,7205

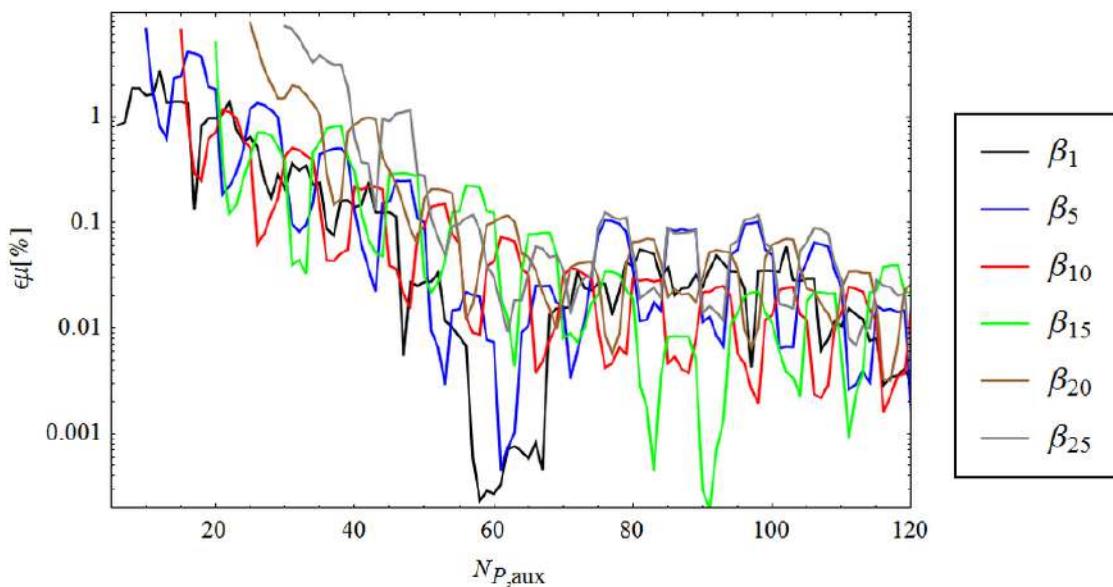


Figura 5.18: Desvios relativos do 1° , 5° , 10° , 15° , 20° e 25° autovalores da solução via transformação parcial para múltiplos canais em função da ordem de truncamento auxiliar

$N_{p,aux}/\cdot$

A convergência da oitava autofunção em função da ordem de truncamento $N_{P,aux}$ é, por sua vez, apresentada na Figura 5.19. Assim, como na Figura 5.14 não é possível perceber, visualmente, uma convergência mais rápida ou mais lenta ao longo das diferentes regiões. No entanto, para uma ordem de truncamento $N_{P,aux} > 80$, a autofunção já aparece convergida para a escala do gráfico apresentada.

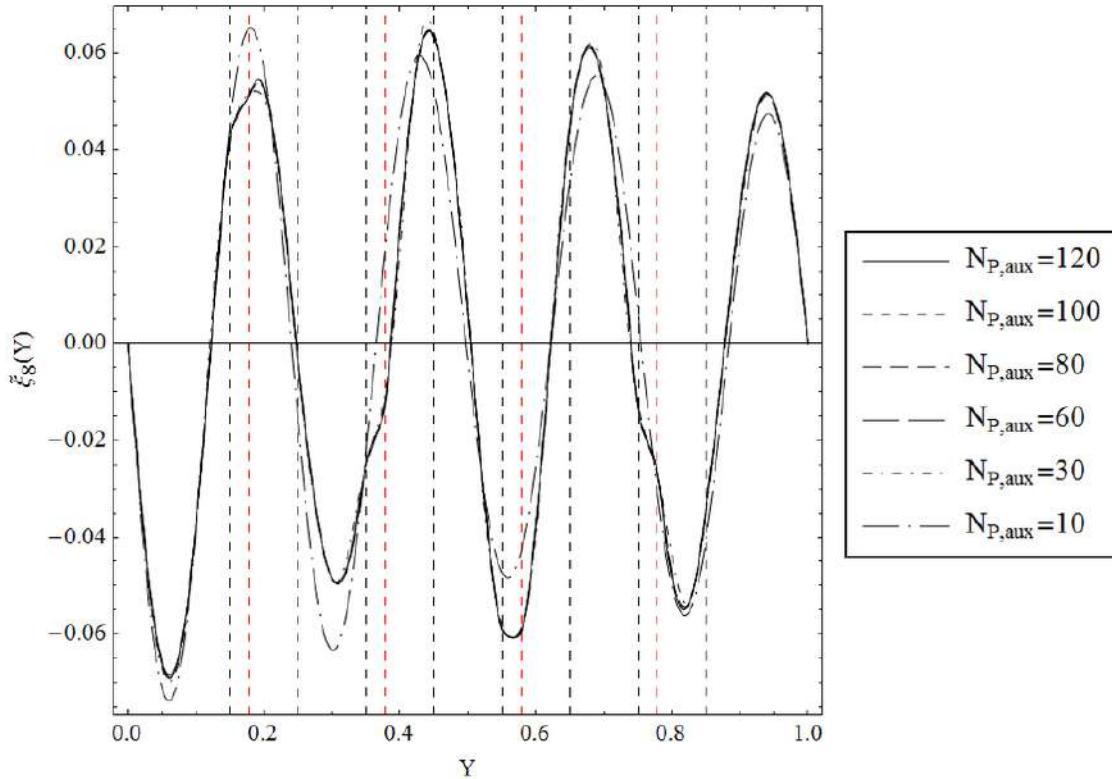


Figura 5.19: Convergência da oitava autofunção da solução via transformada integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$.

Na Tabela 5.13 e na Tabela 5.14 apresenta-se a análise de convergência da temperatura em função da ordem de truncamento N_P para diferentes pontos do domínio. Observando ambas as tabelas, obteve-se uma concordância de ± 2 no quarto algarismo significativo em todos os pontos apresentados para $ZPe_{f1} = 0,1$, enquanto que para $ZPe_{f1} = 0,2$ obteve-se concordância completa no quarto algarismo significativo.

Tabela 5.13: Convergência dos resultados via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,1$.

$ZPe_{f1} = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 40$	0,4832	0,2489	0,1801	0,2514	0,5066
$N_P = 60$	0,4843	0,2499	0,1801	0,2501	0,5062
$N_P = 80$	0,4835	0,2490	0,1797	0,2497	0,5065
$N_P = 90$	0,4841	0,2497	0,1802	0,2506	0,5064
$N_P = 100$	0,4842	0,2497	0,1802	0,2504	0,5063

Tabela 5.14: Convergência dos resultados via transformação integral parcial para um escoamento bifásico estratificado em múltiplos canais com $Pe_{fl}=0,025$ em $ZPe_{fl}=0,2$.

$ZPe_{f1} = 0,2$	$Y = 0,1$	$Y = 0,25$	$Y = 0,5$	$Y = 0,75$	$Y = 0,9$
Ordem					
$N_P = 40$	0,6916	0,4507	0,3462	0,4526	0,7162
$N_P = 60$	0,6923	0,4513	0,3462	0,4520	0,7159
$N_P = 80$	0,6918	0,4507	0,3458	0,4517	0,7158
$N_P = 90$	0,6922	0,4512	0,3463	0,4522	0,7160
$N_P = 100$	0,6922	0,4512	0,3463	0,4522	0,7160

Sendo assim, é possível concluir que o número de interfaces no interior do domínio tem influência mais significativa na convergência da temperatura no caso da solução via transformada integral parcial. Quando comparado com a metodologia da Seção 5.1, a convergência se mostrou mais lenta. A solução via problema de autovalor não-clássico mostrou a necessidade de apenas um pequeno aumento da ordem de truncamento na

solução do problema de autovalor, $N_{P,aux}$ para garantir a convergência dos autovalores auxiliares, enquanto a ordem de truncamento N_P se manteve a mesma. Logo, com estes resultados expostos é possível afirmar que a solução via problema de autovalor não-clássico foi menos sensível em sua convergência ao número de interfaces no interior do domínio do que a solução via transformada integral parcial, oferecendo assim uma convergência mais rápida para um problema com uma configuração física mais complexa.

A seguir faz-se uma comparação entre os resultados da temperatura adimensional obtidos através das metodologias consideradas. Da Tabela 5.15 observa-se que tanto para $ZPe_{f1} = 0,1$ quanto para $ZPe_{f1} = 0,2$ obteve-se uma concordância de ± 1 no terceiro algarismo significativo. Na Tabela 5.16 a mesma comparação, mas considerando $Pe_{f1} = 0,25$, é apresentada, e novamente observa-se uma concordância de ± 1 no terceiro algarismo significativo tanto para $ZPe_{f1} = 0,1$ quanto $ZPe_{f1} = 0,2$. Apesar da convergência dos resultados para $Pe_{f1} = 0,25$ não ter sido apresentada, as mesmas ordens de truncamento foram utilizadas, e as mesmas concordâncias em relação à condição de $Pe_{f1} = 0,025$.

Tabela 5.15: Comparação da temperatura obtida através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com múltiplos canais para $Pe_{fl}=0,025$ considerando as casas decimais convergidas.

	$ZPe_{f1} = 0,1$		$ZPe_{f1} = 0,2$	
	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²
$Y = 0,1$	0,483391	0,484237	0,691469	0,692273
$Y = 0,25$	0,250468	0,249791	0,452330	0,451275
$Y = 0,5$	0,180512	0,180227	0,347021	0,346308
$Y = 0,75$	0,250067	0,250491	0,452018	0,452231
$Y = 0,9$	0,506027	0,506368	0,715577	0,716026

¹ $N_{P,aux} = 70$ e $N_P = 25$

² $N_{P,aux} = 120$ e $N_P = 100$

Tabela 5.16: Comparação da temperatura obtida através das duas metodologias empregadas para diferentes pontos do domínio com múltiplos canais para $Pe_{f1}=0,25$ considerando as casas decimais convergidas.

	$ZPe_{f1} = 0,1$		$ZPe_{f1} = 0,2$	
	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²	PAV não-clássico ¹	Transf. Parcial ²
$Y = 0,1$	0,482349	0,483186	0,689989	0,690791
$Y = 0,25$	0,24866	0,247983	0,449613	0,448548
$Y = 0,5$	0,178532	0,178245	0,343779	0,343062
$Y = 0,75$	0,248105	0,248529	0,449193	0,449404
$Y = 0,9$	0,505315	0,505657	0,714468	0,714919

¹ $N_{P,aux} = 70$ e $N_P = 25$

² $N_{P,aux} = 120$ e $N_P = 100$

Finalmente, para uma melhor visualização dos resultados obtidos, apresenta-se na Figura 5.20 o gráfico das isotermas do presente problema considerando $Pe_{f1} = 0,025$.

Os resultados apresentados na Seção 5.3 e ANEXO A serviram para verificar o código desenvolvido para este trabalho e apresentar a avaliação da convergência dos resultados através dos gráficos de resíduo relativo. Na Seção 5.4, utilizando as mesmas abordagens anteriormente verificadas, apresentou-se resultados inéditos, até então, na literatura para um problema de transferência de calor conjugado em microcanais com escoamento bifásico estratificado. Para modelar este problema, foi necessário apresentar outra adimensionalização para a equação da energia, com a qual foi possível considerar as propriedades térmicas de ambos os fluidos do escoamento. Em todos os problemas avaliados um estudo mais refinado sobre o comportamento da convergência foi feito, a partir dos quais foi possível chegar a conclusões interessantes e que poderão ser úteis para futuras aplicações.

No entanto, todos os domínios considerados até aqui possuem canais retos entre placas paralelas, e portanto suas propriedades e perfis de velocidades variam apenas ao longo da coordenada Y . Esta análise não é suficiente para demonstrar a aplicabilidade da metodologia em problemas usuais em microfluidica, como por exemplo, com canais sinuosos e corrugados, ou até geometrias mais complexas. Para tanto, faz-se agora necessário considerar um domínio que apresente variações de suas propriedades tanto no eixo Y quanto no eixo Z , como será analisado no próximo capítulo.

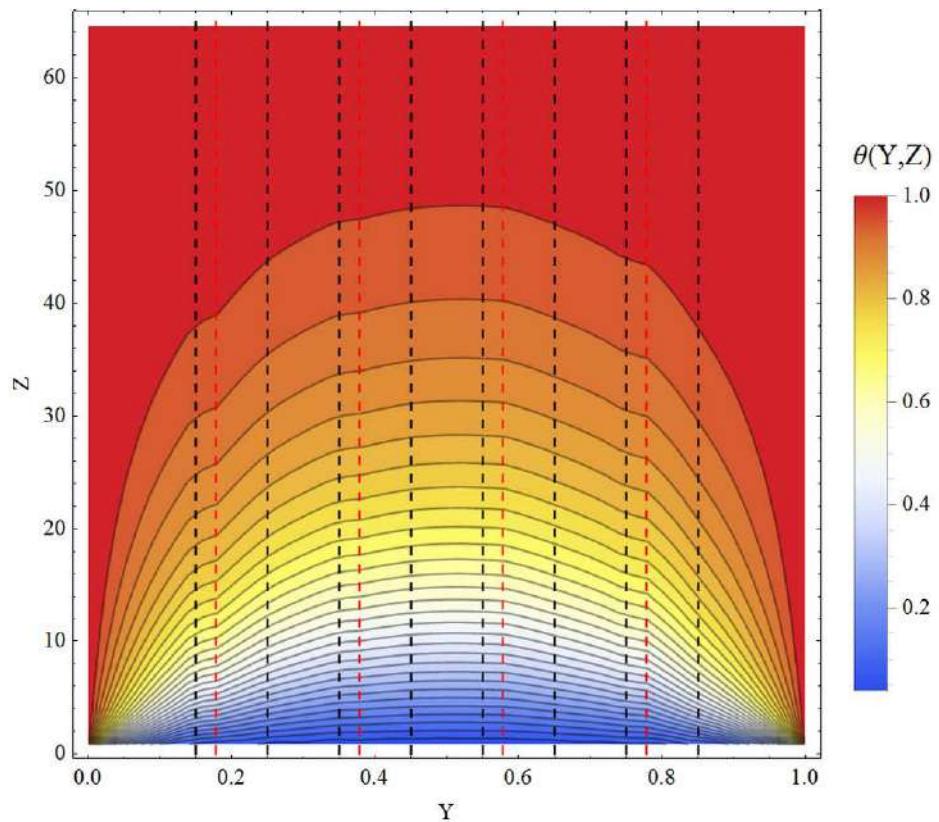


Figura 5.20: Isothermas da solução do problema com múltiplos canais no interior do domínio.

6 PROBLEMA CONJUGADO COM CANAIS DE GEOMETRIA VARIÁVEL

A consideração de canais retos e de seção transversal constante e regular ao longo de seu comprimento, pode ser válida para micro-trocadores de calor como os apresentados na Figura 1.5 e na Figura 2.1. No entanto, alguns trabalhos como (Wang & Chen (2002), Haller et al. (2009), Castellões et al. (2010), Mohammed et al. (2011), Sui et al. (2011), Singh et al. (2014), Dominic et al. (2015)), apresentaram aumentos consideráveis no coeficiente de troca térmica de seus micro-trocadores ao utilizar canais com paredes corrugadas ou canais com geometrias onduladas ou sinuosos (Figura 6.1). Junto com esse aumento na troca térmica, todos os autores relatam um esperado aumento na perda de carga do sistema. Sui et al. (2011) e Dominic et al. (2015) afirmam que a troca térmica em função do número de Reynolds aumenta a uma taxa mais elevada do que a perda de carga, fazendo com que alguns micro-trocadores venham a ter uma viabilidade energética maior utilizando canais ondulados.

Além disso, quando se considera microrreatores, a utilização de canais com curvas, como o da Figura 1.5, ou outras geometrias não retas, é altamente desejável. O objetivo de um microrreator é acelerar a reação entre dois ou mais reagentes para gerar um determinado produto. A taxa de conversão dos reagentes em produtos é proporcional ao tempo de residência dos reagentes no interior do microrreator e da temperatura do meio de reação (Pontes et al. (2014; 2015), Charoenwat e Dennis (2009)), ou seja, quanto maior o tempo de residência e maior a temperatura, maior será a concentração do produto final. Para se aumentar o tempo de residência, uma das possibilidades é aumentar o comprimento do canal, o qual pode ser dotado de curvas para ocupar a maior área possível do microrreator, ao invés de aumentar seu comprimento através de um único canal reto. As curvas, no entanto, exercem outro papel fundamental na aceleração da taxa de conversão: possibilitar uma intensificação da mistura ou aumentar a interface entre os reagentes através da geração

de vórtices. Sendo assim, a utilização de curvas e outras geometrias nos canais de microreatores vêm sendo cada vez mais aplicada e estudada (Gunther e Jensen (2006), Wen et al. (2009), Martínez Arias et al. (2012), Schwarz et al. (2013), Santana et al. (2015)) afim de garantir uma maior taxa de reação para um menor tempo de residência.

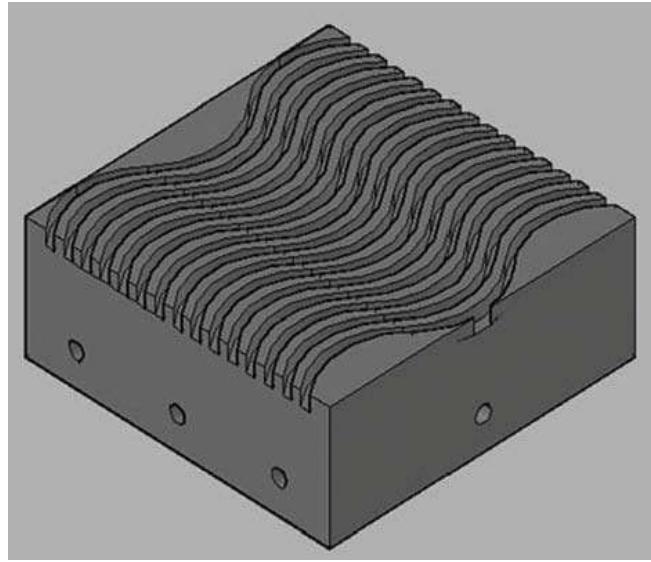


Figura 6.1: Exemplo de dispositivo com microcanais ondulados. Fonte: Dominic et al. (2015).

Como pôde ser evidenciado, a consideração de apenas canais retos no interior de um domínio pode não ser suficiente para muitos micro-sistemas. Sendo assim, o presente capítulo tem por objetivo apresentar soluções através da Técnica da Transformada Integral Generalizada para um problema conjugado em transferência de calor com difusão na direção do escoamento, considerando formulação em domínio único para um canal com geometria bidimensional variável, afim de ilustrar a metodologia proposta e apresentar resultados para estas geometrias mais complexas. Castellões et al. (2010) foi o primeiro a empregar a GITT na solução do campo de temperatura para canais corrugados com condução axial considerando um escoamento laminar, mas sem considerar os efeitos de conjugação com a parede.

A metodologia aqui proposta pode ser empregada, a principio, em qualquer geometria mais complexa (canais bifurcados, meios porosos, etc...), além daquelas selecionadas para ilustração referentes a canais sinuosos e paredes corrugadas. O grau de complexidade está ligado simplesmente à capacidade de representação das geometrias irregulares a partir de coeficientes dependentes de todas as variáveis espaciais na formulação em domínio único, uma vez que a definição dos limites de integração também se torna mais complexa.

6.1 GEOMETRIAS

Três abordagens da GITT, com soluções diferentes, serão abordadas neste capítulo. Estas serão definidas e desenvolvidas posteriormente. Apesar dessas soluções serem gerais, ou seja, qualquer geometria bidimensional de canal poderia a principio ser tratada, por limitações de tempo e espaço, duas geometrias representativas serão consideradas neste estudo. A primeira geometria, que representa o caso de canais com seção transversal uniforme mas com curvas ao longo do seu comprimento, consiste de um canal sinuoso em forma de "ferradura". Este primeiro caso-teste permitirá avaliar comparativamente as três abordagens propostas. A segunda geometria representa o caso de seção transversal variável ao longo do canal, que aqui consiste de um canal corrugado, similar aos apresentados por Castellões et al. (2010), a qual será avaliada pelo método que tiver apresentado os melhores resultados de convergência para a primeira geometria.

6.1.1 *Canal Sinuoso*

A primeira geometria proposta para esta análise se encontra na Figura 6.2, onde se apresenta o domínio de um micro-sistema com um canal sinuoso em seu interior, e as respectivas condições de contorno de cada superfície lateral do domínio consideradas. Aproxima-se o escoamento laminar de baixos números de Reynolds no interior do canal,

considerando-se um escoamento de perfil parabólico completamente desenvolvido ao longo de toda a extensão do canal, como adotado em canais corrugados por Castellões et al. (2010) e verificado em Silva et al. (2011), o qual será descrito mais adiante. A metodologia para construir as funções com variação espacial que representam a fomulação em domínio único também será apresentada a seguir.

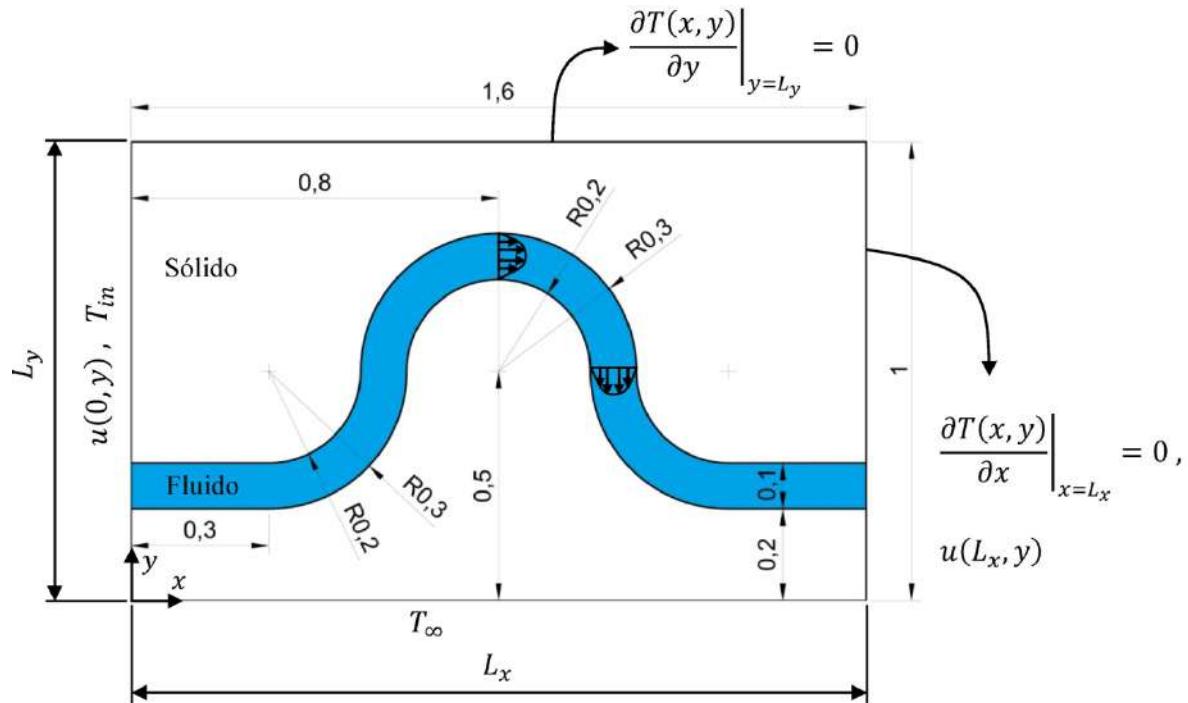


Figura 6.2: Esquemático geral do domínio com um canal sinuoso.

Mais uma vez utilizou-se a função *Piecewise* da plataforma *Mathematica*® para construir tais funções e o código desenvolvido para gerá-las se encontra no ANEXO B (Capítulo 9) deste trabalho. A geometria do canal sinuoso foi dividida em duas geometrias distintas: uma que possui canais retos e outra que possui canais semicirculares. O domínio foi então gerado através da combinação dessas duas geometrias, como pode ser visto na Figura 6.2.

Para gerar as funções da geometria semicircular, uma equação do segundo grau (correspondente ao perfil de velocidade de um escoamento laminar desenvolvido) foi parametrizada ao longo da mesma, da seguinte forma:

$$F(X, Y) = A r(X, Y)^2 + B r(X, Y) + C \quad (6.1a)$$

onde A , B e C são constantes que devem ser calculadas para garantir perfil de velocidade desejável e $r(X, Y)$ é a função vetorial a partir da qual a função do segundo grau está sendo parametrizada, definida como:

$$r(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (6.1b)$$

uma vez que a geometria é circular. Um esquemático representando esta parametrização é apresentado na Figura 6.3. Com isso, a função $F(X, Y)$ agora é capaz de fornecer a distribuição do módulo do vetor velocidade da geometria considerada, apresentada na Figura 6.4. No entanto, a Eq. (6.2) necessita das componentes da velocidade nas direções X e Y , ou seja, U e V , as quais podem ser obtidas multiplicando-se a função $F(X, Y)$ pelo cosseno e pelo seno, respectivamente, do ângulo φ , correspondente à tangente da geometria do círculo. Logo:

$$\begin{aligned} U(X, Y) &= F(X, Y) \cdot \cos(\varphi(X, Y)) \\ V(X, Y) &= F(X, Y) \cdot \sin(\varphi(X, Y)) \end{aligned} \quad (6.2a-b)$$

onde:

$$\varrho(X, Y) = -\tan^{-1}\left(\frac{X}{Y}\right) \quad (6.2c)$$

Com isso, os campos das componentes da velocidade nas direções X e Y no interior do canal sinuoso podem ser calculados, os quais são apresentados respectivamente na Figura 6.5 e na Figura 6.6. Como é possível perceber, os campos de velocidade se mostram coerentes, com a componente $U(X, Y)$ apresentando valores máximos para os trechos horizontais do domínio e valores nulos para os trechos verticais, enquanto que a componente $V(X, Y)$ apresenta valor nulo nos trechos horizontais e máximos, positivos ou negativos, nos trechos verticais. As funções $K(X, Y)$ e $W(X, Y)$, embora mais simples, podem ser geradas a partir da mesma metodologia.

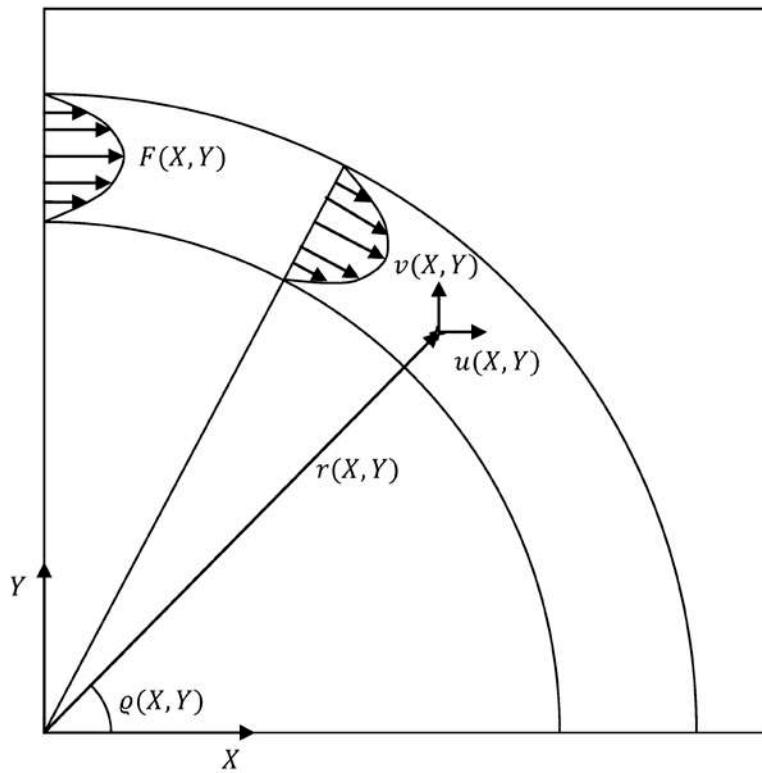


Figura 6.3: Esquemático da parametrização utilizada.

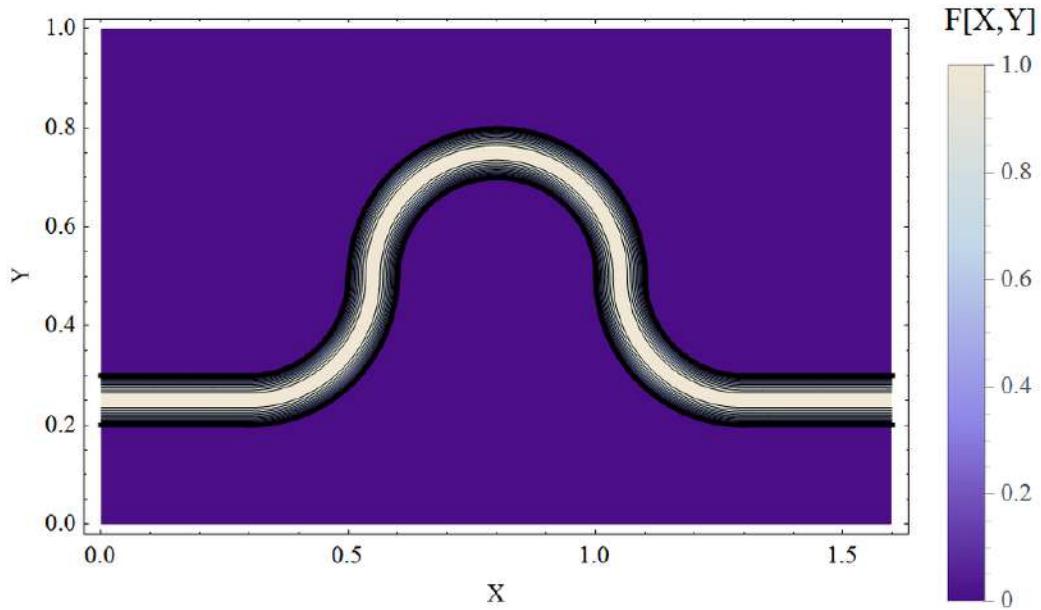


Figura 6.4: Campo do módulo do vetor velocidade no interior do canal sinuoso.

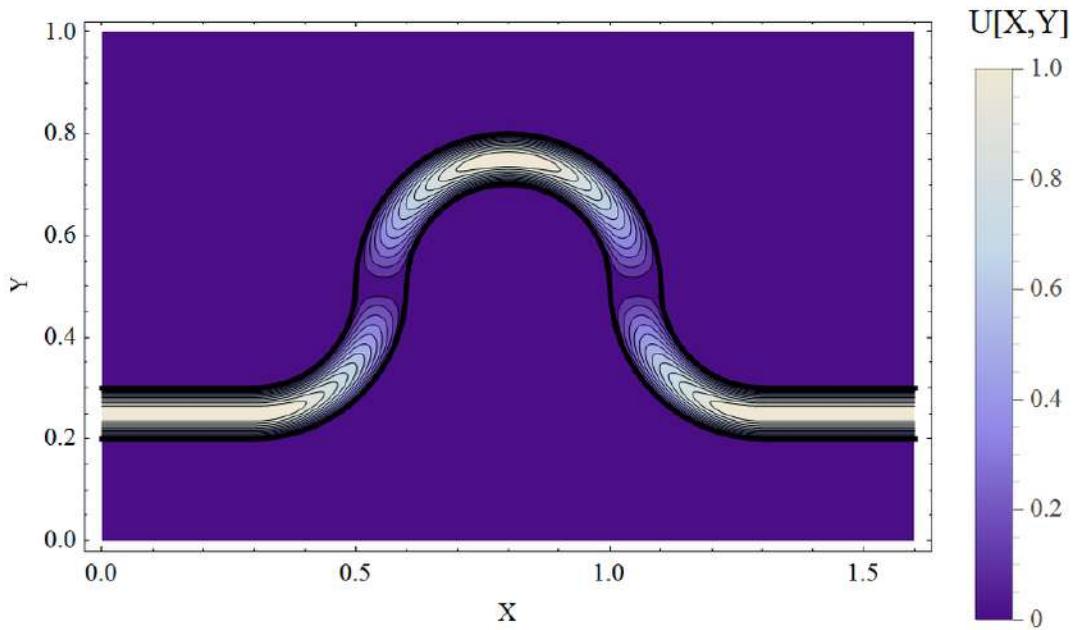


Figura 6.5: Campo da componente $U(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal sinuoso.

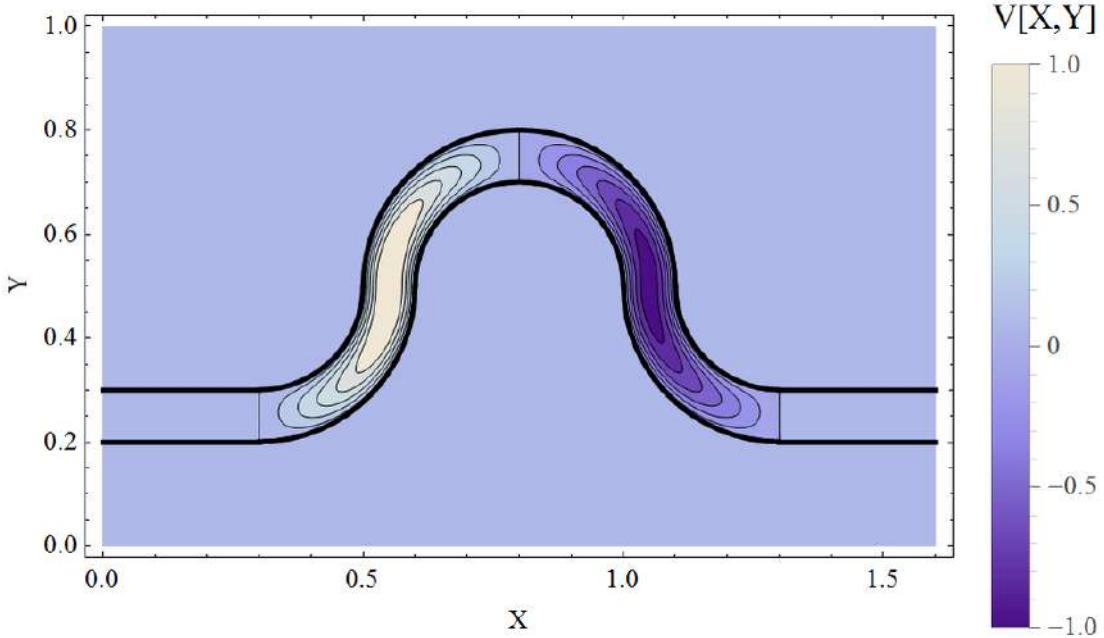


Figura 6.6: Campo da componente $V(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal sinuosos.

6.1.2 Canal com Parede Corrugada

A geometria proposta para este caso se encontra na Figura 6.7, onde se apresenta o domínio de um micro-sistema com um canal com parede corrugada em seu interior e as respectivas condições de contorno de cada superfície lateral do domínio consideradas. O escoamento no interior do canal será mais uma vez considerado como laminar e localmente desenvolvido, permitindo que o perfil de velocidade no eixo x seja considerado parabólico, adaptando-se instantaneamente às variações de seção transversal, ao longo de todo o comprimento do canal. A verificação dessa aproximação foi criticamente realizada comparando-se a solução por GITT das equações de Navier-Stokes correspondentes com a solução parabólica aproximada, em função da amplitude/frequência da corrugação e o número de Reynolds do escoamento (Silva 2003; Castellões et al. 2010; Silva et al. 2011). Castellões (2010) chegou à conclusão que a solução simplificada consegue fornecer resultados muito próximos aos obtidos por Silva (2003) para $Re \leq 100$, desde que a

amplitude do canal seja $\alpha \leq 0.1$. Acima desse valor, a amplitude começa a gerar altos gradientes de pressão, favorecendo o descolamento da camada limite e formando regiões de recirculação no interior das corrugações, conforme apresentado em Silva et al. (2011). Castellões (2010) conclui que para pequenas amplitudes da corrugação, não foi possível observar variações significativas no comportamento do campo de velocidade.

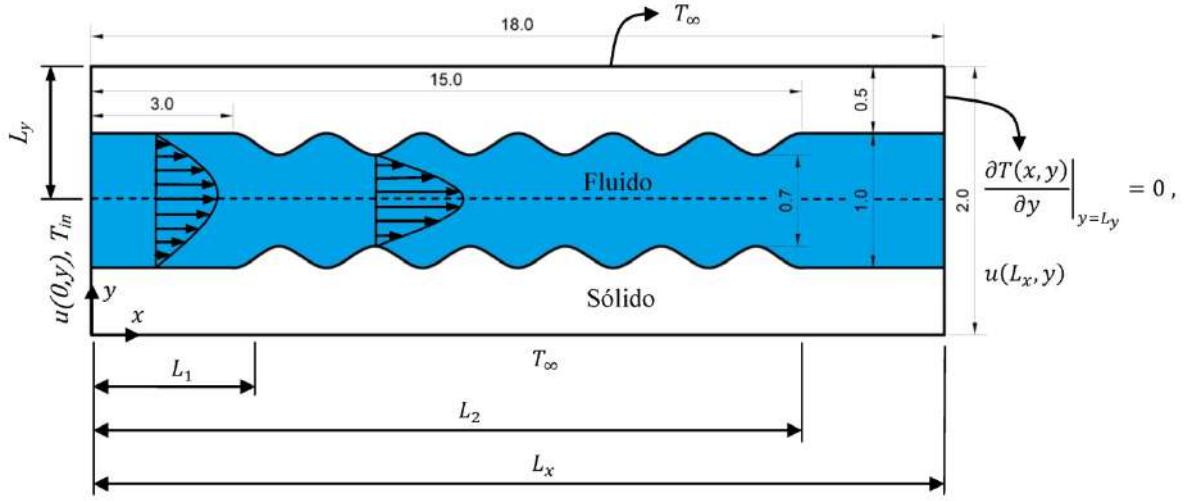


Figura 6.7: Esquemático geral do domínio com um canal de parede corrugada.

A função utilizada para construir a geometria do canal corrugado foi retirada de Castellões (2010) e é apresentada abaixo:

$$f y_c(x) = \begin{cases} y_c & , 0 < x < L_1 \\ y_c + \alpha_c \sum_{i=1}^{i_{tot}} \left[8 \frac{\sin(i\frac{\pi}{2})}{(i\pi)^2} \sin\left((x - L_1)\frac{2i\lambda_c\pi}{L_2 - L_1} + \dots\right) \dots + i\varepsilon_c \right] - \sin(i\varepsilon_c) & , L_1 < x < L_2 \\ y_c & , L_2 < x < L_X \end{cases} \quad (6.3)$$

onde, y_c é a distância do centro do canal até a parede do canal com trecho reto, α_c é a amplitude da corrugação, λ_c é o número de comprimento de ondas existente na corrugação, ε_c é a defasagem que se deseja dar à corrugação e i_{tot} é o parâmetro relacionado à geometria da corrugação (podendo ser senoidal ou triangular dependendo dos valores adotados para i_{tot}).

Com a geometria da corrugação definida, é possível agora calcular os perfis de velocidade no interior do canal. Assim como para canal sinuoso, considerou-se a aproximação de perfil de velocidade parabólico desenvolvido ao longo de todo o canal. Uma vez que a largura do canal expande e contrai com as corrugações, leva-se em conta a equação de conservação de massa, alterando o perfil parabólico e garantindo assim a mesma vazão de líquido ao longo de todo o canal. A Figura 6.8 apresenta o campo da componente $U(X, Y)$ da velocidade.

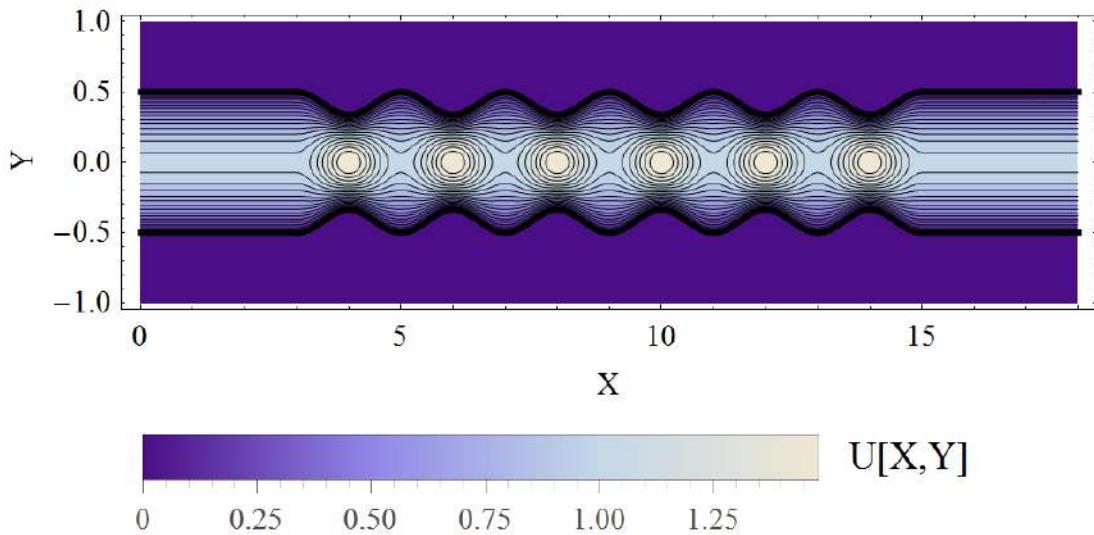


Figura 6.8: Campo da componente $U(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal corrugado considerando $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=6$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$.

Para calcular a componente $V(X, Y)$ da velocidade utiliza-se a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis, definida como:

$$\frac{\partial U(X, Y)}{\partial X} + \frac{\partial V(X, Y)}{\partial Y} = 0 \quad (6.4)$$

A expressão para a componente $V(X, Y)$ da velocidade pode ser então facilmente obtida utilizando a função *DSolve* da plataforma *Mathematica®*, com o intuito de resolver a Equação 6.4, tendo em vista que a expressão para $U(X, Y)$ foi obtida anteriormente.

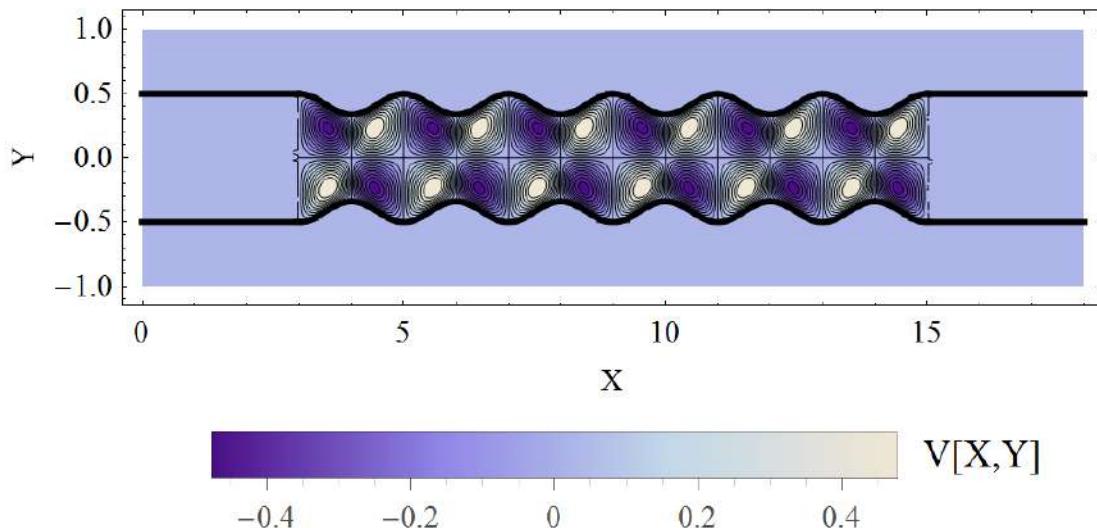


Figura 6.9: Campo da componente $V(X, Y)$ do vetor velocidade no interior do canal corrugado considerando $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=6$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$.

6.2 PROBLEMA CONVECTIVO-DIFUSIVO BIDIMENSIONAL

Ao longo desse capítulo serão apresentadas três esquemas de transformação integral para solucionar a equação da energia do problema conjugado aqui em análise, através da formulação em domínio único. São elas: solução via problema de autovalor com

coeficientes constantes (solução mais simples possível), solução via problema de autovalor com coeficientes variáveis (onde as informações do campo de condutividade térmica é inserido no problema de autovalor) e solução via filtro recursivo, onde a solução do problema condutivo é utilizado como filtro para a solução do problema geral.

Assim, a equação da energia para o presente problema conjugado de transferência de calor transiente, incluindo a variação espacial bidimensional das propriedades termofísicas e do campo de velocidades, juntamente com as condições de contorno generalizadas, pode ser escrita da seguinte forma:

$$w(x, y) \left(\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} + u(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} + v(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(x, y) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right), \quad (6.5a)$$

$$0 < x < L_x, \quad 0 < y < L_y, \quad t > 0$$

$$T(x, y, 0) = T_{\infty}; \quad T(0, y, t) = T_{in}; \quad \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0; \quad (6.5b-f)$$

$$-k_s \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} + hT(x, 0, t) = hT_{\infty};$$

$$k_s \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L_y} + hT(x, L_y, t) = hT_{\infty}$$

onde $w(x, y)$ é a variação espacial da capacidade térmica volumétrica, $u(x, y)$ e $v(x, y)$ a variação espacial das componentes da velocidade, $k(x, y)$ a variação espacial da condutividade térmica, h o coeficiente de transferência de calor por convecção com o ambiente externo, e T_{∞} a temperatura do meio externo. As condições de contorno específicas para cada caso abordado neste podem ser visualizadas na Figura 6.2 e na Figura 6.7 e serão melhor definidos posteriormente.

A adimensionalização do problema (6.5), por sua vez, pode ser obtida propondo-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L_y Pe}; \quad Y = \frac{y}{L_y}; \quad U = \frac{u(x, y)}{u_{\max}}; \quad V = \frac{v(x, y)}{u_{\max}}; \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_{in} - T_\infty} \\ K &= \frac{k(x, y)}{k_f}; \quad W = \frac{w(x, y)}{w_f}; \quad Bi = \frac{h L_y}{k_s}; \quad Pe = \frac{u_{\max} L_y w_f}{k_f}; \quad \tau = \frac{u_{\max} t}{L_x} \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde k_s e k_f são as condutividades térmicas do sólido e do fluido respectivamente, w_f a capacidade térmica volumétrica do fluido e u_{\max} a velocidade máxima do perfil de velocidade no interior do canal.

Logo, aplicando estes parâmetros adimensionais na Eq. (6.5), obtém-se a seguinte equação da energia adimensional:

$$\begin{aligned} W(X, Y) \left(Pe \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial \tau} + U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial X} + Pe V(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right) \\ = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right), \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1, \quad \tau > 0$$

juntamente com as condições de contorno adimensionais:

$$\begin{aligned} \theta(X, Y, 0) = 0; \quad \theta(0, Y, \tau) = 1; \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\ - \left. \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta(X, 0, \tau) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta(X, 1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (6.7b-f)$$

6.3 FILTRO

Para homogeneizar as condições de contorno e garantir uma aceleração da convergência da expansão em autofunções, será considerada uma solução filtro em regime permanente, com a temperatura adimensional sendo escrita como:

$$\theta(X, Y, \tau) = \theta^*(X, Y, \tau) + \theta_F(X, Y) \quad (6.8)$$

onde $\theta^*(X, Y, \tau)$ é a solução filtrada e $\theta_F(X, Y)$ a solução filtro. Para esta solução filtro será considerado um problema puramente condutivo com propriedades homogêneas ao longo de todo o domínio e com as mesmas condições de contorno do problema (6.7). Logo:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \theta_F(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_F(X, Y)}{\partial Y^2} = 0, \quad 0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1 \quad (6.9a)$$

$$\theta_F(0, Y) = 1; \quad \left. \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0;$$

$$-\left. \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta_F(X, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta_F(X, 1) = 0 \quad (6.9b-f)$$

O problema apresentado na Eq. (6.9a) pode ser resolvido através da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT), cujo o par transformada-inversa para este caso é definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_{F,i}(X) = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(Y) \theta_F(X, Y) dY \quad (6.10\text{a})$$

$$\text{Inversa: } \theta_F(X, Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_i(Y) \bar{\theta}_{F,i}(X) \quad (6.10\text{b})$$

onde $\tilde{\varphi}_i(Y)$ é a autofunção normalizada definida como:

$$\tilde{\varphi}_i(Y) = \frac{\varphi_i(Y)}{\sqrt{N_i}} ; \quad N_i = \int_0^1 \varphi_i^2(Y) dY ; \quad (6.10\text{c,d})$$

A autofunção $\varphi_i(Y)$, por sua vez, é obtida através do seguinte problema de autovalor:

$$\frac{d^2 \varphi_i(Y)}{dY^2} + \alpha_{b,i}^2 \varphi_i(Y) = 0 \quad (6.11\text{a})$$

onde $\alpha_{b,i}$ são os autovalores e as correspondentes condições de contorno para este problema são:

$$-\frac{\partial \varphi_i(Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=0} + Bi \varphi_i(0) = 0 ; \quad \frac{\partial \varphi_i(Y)}{\partial Y} \Big|_{Y=1} + Bi \varphi_i(1) = 0 \quad (6.11\text{b})$$

Realizando a transformação integral da Eq. (6.9a) através da aplicação do operador $\int_0^1 \tilde{\varphi}_i(Y)(\cdot)dY$, é possível obter a seguinte expressão:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{d^2 \bar{\theta}_{F,i}(X)}{dX^2} - \alpha_{b,i}^2 \bar{\theta}_{F,i}(X) = 0 \quad (6.12)$$

cuja solução analítica é dada por:

$$\bar{\theta}_{F,i}(X) = C_{1,i} e^{x \alpha_{b,i} Pe} + C_{2,i} e^{-x \alpha_{b,i} Pe} \quad (6.13a)$$

onde $C_{1,i}$ e $C_{2,i}$ são constantes que podem ser obtidas através das condições de contorno transformadas da direção X :

$$\bar{\theta}_{F,i}(0) = \int_0^1 \tilde{\varphi}_i(Y) \underbrace{\theta_F(0, Y)}_{=1} dY, \quad \left. \frac{\partial \bar{\theta}_{F,i}(X)}{\partial X} \right|_{X=L_x/L_y} = 0 \quad (6.13b,c)$$

Portanto, com os valores de $\bar{\theta}_{F,i}(X)$ obtidos aplica-se a fórmula da inversa (Eq. (6.10b)) para recuperar a solução exata para o filtro, truncando-se posteriormente a equação em um determinado número de termos na expansão, N_F .

6.4 SOLUÇÃO VIA PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES CONSTANTES

Uma vez obtida a solução filtro, a fim de recuperar a temperatura adimensional do problema original, é necessário obter uma solução para o problema filtrado ($\theta^*(X, Y, \tau)$). Conforme afirmado anteriormente, três metodologias de solução através da GITT serão abordadas no presente capítulo. A primeira será através da proposição de um problema de autovalor com coeficientes constantes para resolver tanto o problema em regime

permanente como em transiente. Além disso, será proposta uma nova alternativa de reordenamento dos autovalores com o objetivo de buscar uma convergência mais rápida para a expansão em autofunções.

6.4.1 Solução permanente

Para a obtenção da solução em regime permanente, considera-se inicialmente o problema apresentado na Eq. (6.7), mas sem, obviamente, incluir o termo transiente. Com isso, a equação da energia adimensional em regime permanente é dada por:

$$\begin{aligned} W(X, Y) \left(U(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right) \\ = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right), \end{aligned} \quad (6.14a)$$

$$0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1$$

juntamente com suas condições de contorno:

$$\theta(0, Y) = 1; \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \quad (6.14b-e)$$

$$-\left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta(X, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta(X, 1) = 0$$

Aplicando a Eq. (6.8) do potencial filtrado, obtém-se:

$$\begin{aligned}
W(X, Y) & \left(U(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right) \\
& = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right) \\
& + g(X, Y),
\end{aligned} \tag{6.15a}$$

$$0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1$$

onde o termo fonte oriundo da substituição do filtro é dado por:

$$\begin{aligned}
g(X, Y) & = -W(X, Y) \left(U(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial Y} \right) \\
& + \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial Y} \right)
\end{aligned} \tag{6.15b}$$

e as condições de contorno:

$$\begin{aligned}
\theta^*(0, Y) & = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\
-\left. \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta^*(X, 0) & = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta^*(X, 1) = 0
\end{aligned} \tag{6.15c-f}$$

Sendo assim, para resolver o problema (6.15) a GITT será empregada novamente. Logo, o par transformada-inversa para este caso é definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_{m,n}^* = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_{m,n}(X, Y) \theta^*(X, Y) dX dY \quad (6.16a)$$

$$\text{Inversa: } \theta^*(X, Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{m,n}(X, Y) \bar{\theta}_{m,n}^* \quad (6.16b)$$

onde $\tilde{\psi}_{m,n}(X, Y)$ é a autofunção normalizada definida como:

$$\tilde{\psi}_{m,n}(X, Y) = \frac{\psi_{m,n}(X, Y)}{\sqrt{N_{m,n}}} ; \quad N_{m,n} = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \psi_{m,n}^2(X, Y) dX dY ; \quad (6.16c,d)$$

A autofunção $\psi_{m,n}(X, Y)$, por sua vez, é obtida através do seguinte problema de autovalor com coeficientes constantes:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \psi_{m,n}(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi_{m,n}(X, Y)}{\partial Y^2} + \mu_{m,n}^2 \psi_{m,n}(X, Y) = 0 \quad (6.17a)$$

onde $\mu_{m,n}$ são os autovalores e as correspondentes condições de contorno para este problema são:

$$\begin{aligned} \psi_{m,n}(0, Y) &= 0; & \left. \frac{\partial \psi_{m,n}(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=L_x/L_y} &= 0; \\ -\left. \frac{\partial \psi_{m,n}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \psi_{m,n}(X, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial \psi_{m,n}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \psi_{m,n}(X, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.17b)$$

Com o intuito de se aplicar a técnica de separação de variáveis na solução do problema (6.17), a autofunção $\psi_{m,n}(X, Y)$ pode ser definida como:

$$\psi_{m,n}(X, Y) = \Phi_m(X)\Upsilon_n(Y) \quad (6.18)$$

Logo, substituindo a expressão (6.18) na Eq. (6.17) obtém-se:

$$\underbrace{\frac{1}{Pe^2} \frac{1}{\Phi_m(X)} \frac{\partial^2 \Phi_m(X)}{\partial X^2}}_{-\delta_m^2} + \underbrace{\frac{1}{\Upsilon_n(Y)} \frac{\partial^2 \Upsilon_n(Y)}{\partial Y^2}}_{-\gamma_n^2} + \mu_{m,n}^2 = 0 \quad (6.19)$$

o qual pode ser dividido em dois problemas, com solução analítica, para cada direção espacial, ou seja:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Phi_m(X)}{\partial X^2} + \delta_m^2 \Phi_m(X) = 0 \quad (6.20a)$$

$$\Phi_m(0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \Phi_m(X)}{\partial X} \right|_{X=L_x/L_y} = 0 \quad (6.20b,c)$$

$$\frac{\partial^2 \Upsilon_n(Y)}{\partial Y^2} + \gamma_n^2 \Upsilon_n(Y) = 0 \quad (6.21a)$$

$$-\left. \frac{\partial \Upsilon_n(Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \Upsilon_n(0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \Upsilon_n(Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \Upsilon_n(1) = 0 \quad (6.21b,c)$$

Com isso, é possível afirmar que:

$$\mu_{m,n}^2 = \delta_m^2 + \gamma_n^2 \quad (6.22)$$

expressão que sugere o esquema de reordenamento dos termos na expansão em autofunções, através de combinações em ordem crescente da soma dos quadrados dos autovalores δ e γ . O reordenamento tem o objetivo de tornar a computação mais eficiente e garantir uma convergência mais rápida dos resultados, transformando o somatório duplo da fórmula da inversa (Eq. (6.16b)) em um somatório simples relativo ao par de autovalores nas duas direções, ordenados através do par de índices (m, n) . Cotta e Mikhailov (1997) sugerem que o reordenamento mais simples a ser feito é o reordenamento em ordem crescente da soma dos quadrados dos autovalores, conforme representado na Eq. (6.22). Sendo assim, a fórmula da inversa (Eq. (6.16b)) pode ser reescrita como:

$$\theta^*(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_k^* \quad (6.23)$$

onde cada k está relacionado a um par (m, n) listado em ordem crescente em função da Eq. (6.22).

No entanto, quando o domínio do problema não apresenta as mesmas dimensões nas duas direções espaciais, ou quando o número de Péclet do problema não é unitário, a expressão (6.22) pode fornecer um reordenamento privilegiando os autovalores de uma determinada direção espacial, o que pode comprometer a convergência de um modo geral ao longo do domínio. Para garantir que ambos autovalores tenham a mesma influência, uma nova expressão para o reordenamento será sugerida.

É possível notar que os problemas (6.20) e (6.21) são semelhantes, sendo diferenciados pelo número de Péclet e das grandezas características das dimensões X e Y . Sendo assim, as mesmas podem ser rescritas da seguinte forma:

$$\delta_m^2 = -\frac{1}{Pe^2 \Phi_m(X)} \frac{\partial^2 \Phi_m(X)}{\partial X^2}; \quad \gamma_n^2 = -\frac{1}{\Upsilon_n(Y)} \frac{\partial^2 \Upsilon_n(Y)}{\partial Y^2} \quad (6.24a,b)$$

Como as dimensões X e Y são diferentes, uma rápida mudança de variável será utilizada, sendo definida por:

$$\hat{X} = X \frac{L_y}{L_x} = X\mathbb{K} \quad (6.25)$$

onde \mathbb{K} pode ser denominado como a razão de aspecto do domínio. Substituindo a Eq. (6.25) na Eq. (6.24a), obtém-se então:

$$\delta_m^2 = -\frac{\mathbb{K}^2}{Pe^2} \frac{1}{\Phi_m(\hat{X})} \frac{\partial^2 \Phi_m(\hat{X})}{\partial \hat{X}^2} \quad (6.26)$$

Logo, para garantir um reordenamento justo e balanceado entre as dimensões espaciais é necessário anular o termo \mathbb{K}^2/Pe^2 , fazendo com que a nova expressão para o reordenamento seja proposta como:

$$\mu_{m,n}^2 = \hat{\delta}_m^2 + \gamma_n^2 = \left(\frac{Pe^2}{\mathbb{K}^2} \right) \delta_m^2 + \gamma_n^2 \quad (6.27a)$$

ou

$$\mu_{m,n}^2 = \delta_m^2 + \hat{\gamma}_n^2 = \delta_m^2 + \left(\frac{\mathbb{K}^2}{Pe^2} \right) \gamma_n^2 \quad (6.27b)$$

Qualquer uma das duas expressões ((6.27a) e (6.27b)) fornecerá o mesmo reordenamento. Logo, o reordenamento continuará sendo feito em ordem crescente da soma dos quadrados dos autovalores, sendo que, agora, um dos autovalores será balanceado pelo termo \mathbb{K}^2/Pe^2 . É importante frisar ainda que os cálculos dos autovalores e das autofunções ainda deve ser feito através dos problemas (6.20) e (6.21).

Dando continuidade, a transformação integral do problema (6.15) pode ser feita aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y)(\cdot) dX dY$ no mesmo, resultando no seguinte sistema de equações algébricas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} \bar{\theta}_k^* = B_k \quad (6.28a)$$

onde $A_{k,j}$ é definido por:

$$\begin{aligned}
A_{k,j} = & \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) U(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial X} dX dY \\
& + Pe \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) V(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial Y} dX dY \\
& - \frac{1}{Pe^2} \left(\int_0^1 \left(\left(K(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{X=0}^{X=L_x/L_y} \right) dY \right. \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_j(X, Y)}{\partial X} \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial X} dX dY \right) \\
& - \int_0^{L_x/L_y} \left(\left(K(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}^{Y=1} \right) dY \\
& + \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_j(X, Y)}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial Y} dX dY
\end{aligned} \tag{6.28b}$$

e B_k definido por:

$$\begin{aligned}
B_k = & \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} g(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) dX dY \\
= & - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) U(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} dX dY \\
& - Pe \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) V(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} dX dY \\
& + \frac{1}{Pe^2} \left(\int_0^1 \left(\left(K(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{X=0}^{X=L_x/L_y} \right) dY \right. \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial X} \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} dX dY \right) \\
& + \int_0^{L_x/L_y} \left(\left(K(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{Y=0}^{Y=1} \right) dY \\
& - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial Y} \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} dX dY
\end{aligned} \tag{6.28c}$$

Para ser resolvido, o sistema de equações (6.28a) deve ser truncado em um determinado valor N_P que garanta a convergência do potencial desejada. Feito isso, o mesmo pode ser facilmente resolvido utilizando a função *LinearSolve* da plataforma *Mathematica*®, que fornece uma solução analítica para sistema de equações, ou então, de forma matricial, através do produto entre a inversa da matriz quadrada \mathbf{A} ($N_P \times N_P$) e o vetor B ($N_P \times 1$) expressa da seguinte forma:

$$\tilde{\theta}^* = \mathbf{A}^{-1} \tilde{B} \quad (6.29)$$

Neste trabalho, todos os sistemas de equações algébricas foram resolvidos de forma matricial.

Com o potencial transformado tendo sido obtido, basta agora substituí-lo na fórmula da inversa (Eq. (6.23)), para recuperar o potencial filtrado, e depois aplicar novamente a equação filtro (Eq. (6.8)), para recuperar o potencial original. Portanto:

$$\theta(X, Y) = \sum_{k=1}^{N_P} \tilde{\psi}_k(X, Y) \tilde{\theta}_k^* + \theta_F(X, Y) \quad (6.30)$$

6.4.2 Solução Transiente

Para a obtenção da solução transiente, aplica-se, inicialmente, a Eq. (6.8) do potencial filtrado no problema apresentado na Eq. (6.7). Com isso, obtém-se:

$$\begin{aligned}
W(X, Y) & \left(Pe \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial \tau} + U(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right) \\
& = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right) \\
& + g(X, Y),
\end{aligned} \tag{6.31a}$$

$$0 < X < \frac{L_x}{L_y}, \quad 0 < Y < 1, \quad \tau > 1$$

onde $g(X, Y)$ é expresso novamente pela Eq. (6.15b). As condições inicial e de contorno são expressas por:

$$\begin{aligned}
\theta^*(X, Y, 0) & = -\theta_F(X, Y); \quad \theta^*(0, Y, \tau) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\
& - \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta^*(X, 0, \tau) = 0; \\
& \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta^*(X, 1, \tau) = 0
\end{aligned} \tag{6.31b-e}$$

Partindo para a solução via GIT, o par transformada-inversa para este caso é definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_{m,n}^*(\tau) = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_{m,n}(X, Y) \theta^*(X, Y, \tau) dX dY \tag{6.32a}$$

$$\text{Inversa: } \theta^*(X, Y, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{m,n}(X, Y) \bar{\theta}_{m,n}^*(\tau) \tag{6.32b}$$

onde $\tilde{\psi}_{m,n}(Y)$ é a autofunção normalizada já definida na Eq. (6.16c,d). O problema de autovalor é idêntico ao apresentado para a solução permanente, assim como todo o processo de reordenamento dos autovalores, e portanto não serão novamente descritos. No entanto, vale ressaltar que após o reordenamento, a equação da inversa pode ser rescrita na forma:

$$\theta^*(X, Y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_k^*(\tau) \quad (6.33)$$

Dando continuidade, a transformação integral do problema (6.31) pode ser feita aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y)(\cdot) dX dY$ no mesmo, resultando no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{k,j} \frac{d\bar{\theta}_k^*(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} \bar{\theta}_k^*(\tau) = B_k \quad (6.34a)$$

onde $A_{k,j}$ e B_k são os mesmos termos definidos anteriormente, através da Eq. (6.28b) e da Eq. (6.28c) respectivamente, e $C_{k,j}$ expresso por:

$$C_{k,j} = Pe \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) dX dY \quad (6.34b)$$

A condição inicial da Eq. (6.34a), por sua vez, pode ser expressa por:

$$\bar{\theta}_k^*(0) = -\bar{f}_k = - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y) \theta_F(X, Y) dX dY \quad (6.34c)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias (6.34a) pode ser simbolicamente resolvido utilizando a função *DSolve* da plataforma *Mathematica®*, que fornece uma solução analítica para este problema, após ser truncado em um determinado número de equações N_p que garanta a convergência do potencial desejada. É possível ainda obter diretamente essa solução analítica na forma matricial, caso este adotado para as soluções neste trabalho. Para tanto, a Eq. (6.34a) será reescrita na forma matricial:

$$\mathbf{C} \frac{d\bar{\theta}^*}{d\tau} + \mathbf{A}\bar{\theta}^* = \mathbf{B} \quad (6.35)$$

onde \mathbf{C} e \mathbf{A} são matrizes quadradas ($N_p \times N_p$) e \mathbf{B} um vetor ($N_p \times 1$). Multiplicando a Eq. (6.35) pela inversa da matriz \mathbf{C} , obtém-se:

$$\frac{d\bar{\theta}^*}{d\tau} + \mathbf{F}\bar{\theta}^* = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B} \quad (6.36)$$

onde $\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$. Com isso, a seguinte mudança de variável é proposta:

$$\tilde{\theta}^* = \mathbf{V}\bar{\theta}^* \quad (6.37)$$

onde a matriz \mathbf{V} corresponde aos autovetores da matriz \mathbf{F} . Aplicando a Eq. (6.37) na Eq. (6.36) e multiplicando pela inversa da matriz \mathbf{V} é possível obter a seguinte expressão:

$$\frac{d\tilde{\theta}^*}{d\tau} + \sigma \tilde{\theta}^* = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \quad (6.38a)$$

onde σ são os autovalores da matriz \mathbf{F} e a condição inicial é dada por:

$$\tilde{\theta}^*(0) = -\tilde{\mathbf{V}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} \quad (6.38b)$$

Sendo assim, é possível perceber que a Eq. (6.38a) é, agora, um sistema de equações diferenciais ordinárias desacopladas, cuja solução é dada por:

$$\tilde{\theta}_k^*(\tau) = \frac{G_k - e^{-\sigma_k \tau} [G_k - \sigma_k \tilde{\theta}_k^*(0)]}{\sigma_k} \quad (6.39a)$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{V}}^{-1} \tilde{\mathbf{C}}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \quad (6.39b)$$

Logo, para recuperar o potencial transformado, basta aplicar a Eq. (6.37) novamente. O potencial original, por sua vez, será obtido aplicando-se a fórmula da inversa (6.33) junto a equação filtro (Eq. (6.8)). Portanto:

$$\theta(X, Y, \tau) = \sum_{k=1}^{N_P} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_k^*(\tau) + \theta_F(X, Y) \quad (6.40)$$

É importante ressaltar também que para se obter a solução permanente desta solução, basta considerar um valor suficientemente alto para τ . Observando a Eq. (6.39a), fica claro que quanto maior o valor de τ , menor será a importância do termo transiente na solução.

Apesar de ser possível obter a solução permanente através da solução transiente, a solução permanente na Seção 6.4.1 foi apresentada pois sua solução é mais simples do que resolver a solução transiente para valores altos de τ , uma vez que a solução se dá através de um sistema de equações algébricas ao invés de um sistemas de equações diferenciais ordinárias. Logo, se o objetivo for obter apenas a solução permanente do problema recomenda-se a utilização da solução da Seção 6.4.1.

6.4.3 Reordenamento sequencial da Matriz F .

Além do reordenamento dos termos da expansão em autofunções do problema de autovalor com coeficientes constantes descrito anteriormente, é possível sugerir outros esquemas visando acelerar a convergência da solução. A matriz F , ao ser analisada, apresenta os maiores valores em sua diagonal em relação ao resto da matriz. Para uma matriz diagonal, sabe-se que os autovalores são iguais aos elementos da própria diagonal da matriz. Logo, para o caso da matriz F , é possível afirmar que os autovalores podem ser aproximados, para fins de reordenamento, com a diagonal da matriz F , $\sigma_i \approx F_{i,i}$.

Observando a solução do problema transiente (Eq. (5.39a)) é possível perceber o quanto fundamental o autovalor da matriz F é para a convergência do resultado, uma vez que o mesmo, além de se encontrar no denominador da equação, também se encontra no termo exponencial, que governam a taxa de convergência. Logo, para uma convergência adequada seria necessário garantir que todos os autovalores estivessem em ordem crescente. A diagonal da matriz F , no entanto, não se encontra ordenada, fazendo com que o truncamento em um determinado valor N_P possa acarretar na exclusão de termos de importância para a convergência do resultado.

O processo de reordenamento sequencial da matriz \mathbf{F} começa então com o cálculo de uma quantidade (N_D) razoável de elementos de sua diagonal, com $N_D \gg N_P$, para garantir que elementos importantes não sejam perdidos e excluídos do reordenamento. Nesta primeira etapa, não há necessidade de calcular a matriz \mathbf{F} completa, apenas a sua diagonal. Feito isso, a lista com N_D elementos da diagonal deve ser ordenada de forma crescente, mantendo-se todavia, a informação sobre a posição original de cada elemento. Isso pode ser feito através da função *Ordering* da plataforma *Mathematica*®. Com a posição original de cada elemento da diagonal tendo sido ordenada em função de seus valores, é possível agora então calcular tanto a matriz \mathbf{F} quanto o vetor $\tilde{\mathbf{G}}$ completos a partir deste ordenamento, truncados novamente em um determinado valor N_P . Logo, a nova matriz \mathbf{F} reordenada possuirá os elementos de sua diagonal ordenados em ordem crescente, o que, consequentemente, fornecerá autovalores também ordenados em ordem crescente.

Este procedimento não se aplica apenas ao problema transiente, podendo ser empregado também no problema permanente. Observando novamente a Eq. (6.39a) é fácil perceber que para $t \rightarrow \infty$, σ_k se torna os autovalores da matriz \mathbf{A} . Portanto, aplicar o reordenamento sequencial no problema permanente também é possível e desejável para uma convergência mais eficaz dos resultados.

6.5 SOLUÇÃO VIA PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

A primeira solução proposta é a mais simples possível, uma vez que adotou-se um problema de autovalor com coeficientes constantes para sua solução. No entanto, visando a obtenção de resultados com melhor convergência, a utilização de problemas de autovalor que contenham a maior quantidade de informação possível sobre o problema seria desejável. Esta seção se concentrará apenas na adoção de um novo problema de autovalor e, portanto, somente o problema original permanente (Eq. (6.14)) será abordado, uma vez que a extensão para o problema transiente já foi devidamente apresentada na seção anterior.

Sendo assim, através da aplicação do método de separação de variáveis no problema já filtrado (Eq. (6.15)) é possível obter, então, o seguinte problema de autovalor:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial Y} \right) + \mu_i^2 \psi_i(X, Y) = 0 \quad (6.41a)$$

$$\psi_i(0, Y) = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=L_x/L_y} = 0; \quad (6.41b)$$

$$-\left. \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \psi_i(X, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi_i(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \psi_i(X, 1) = 0$$

o qual não possui solução exata. É possível notar que o termo $W(X, Y)$ não foi incluído nos problemas de autovalores abordados neste trabalho. Isso pode ser explicado analisando a equação adimensional da energia em regime permanente (Eq. (6.14)). Pelo fato da adimensionalização na equação da energia ser feita a partir das propriedades do fluido, o termo $W(X, Y)$ possui valor unitário na região do fluido e diferente de 1 na região sólida. O termo $U(X, Y)$ por sua vez possui valor nulo na região sólida. Sendo assim, o produto $W(X, Y) \cdot U(X, Y)$ presente Eq. (6.14) é igual $U(X, Y)$ e, portanto, a inclusão do termo $W(X, Y)$ no problema de autovalor não irá contribuir para uma melhora da convergência. No entanto, se o objetivo for a solução transiente do problema, a inclusão de $W(X, Y)$ no problema de autovalor irá sim contribuir para uma melhora da convergência, uma vez que este mesmo termo multiplica o termo transiente na Eq. (6.31).

Segundo, então, o formalismo clássico da GITT apresentado na Seção 4.3 visando a solução de problemas de autovalores, o par transformada-inversa pode ser definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\psi}_{m,n} = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\Omega}_{m,n}(X, Y) \psi_{m,n}(X, Y) dX dY \quad (6.42a)$$

$$\text{Inversa: } \psi_{m,n}(X, Y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_{m,n}(X, Y) \bar{\psi}_{m,n} \quad (6.42\text{b})$$

onde $\tilde{\Omega}_{m,n}(X, Y)$ é a autofunção auxiliar normalizada definida como:

$$\tilde{\Omega}_{m,n}(X, Y) = \frac{\Omega_{m,n}(X, Y)}{\sqrt{N_{m,n}}} ; \quad N_{m,n} = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \Omega_{m,n}^2(X, Y) dX dY ; \quad (6.42\text{c,d})$$

A autofunção $\Omega_{m,n}(X, Y)$, por sua vez, é obtida através do seguinte problema de autovalor com coeficientes constantes:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \Omega_{m,n}(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega_{m,n}(X, Y)}{\partial Y^2} + \lambda_{m,n}^2 \Omega_{m,n}(X, Y) = 0 \quad (6.43\text{a})$$

onde $\lambda_{m,n}$ são os autovalores auxiliares e as condições de contorno correspondentes são:

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(0, Y) &= 0; & \left. \frac{\partial \Omega_{m,n}(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=L_x/L_y} &= 0 ; \\ -\left. \frac{\partial \Omega_{m,n}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \Omega_{m,n}(X, 0) &= 0 ; \\ \left. \frac{\partial \Omega_{m,n}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \Omega_{m,n}(X, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.43\text{b})$$

Com o intuito de se aplicar a separação de variáveis no problema (6.43), a autofunção $\Omega_{m,n}(X, Y)$ auxiliar pode ser definida como:

$$\Omega_{m,n}(X, Y) = \Phi_m(X)\Upsilon_n(Y) \quad (6.44)$$

Logo, substituindo a expressão (6.44) na Eq. (6.43a) será possível obter novamente a Eq. (6.19), cuja solução já foi apresentada e não será novamente exposta aqui. No entanto, vale ressaltar que após o reordenamento dos autovalores, a equação da inversa pode ser reescrita na forma:

$$\psi_k(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\Omega}_k(X, Y) \bar{\psi}_k \quad (6.45)$$

A transformação integral do problema de autovalor com coeficientes variáveis (Eq. (6.41)) pode ser feita aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\Omega}_k(X, Y)(\cdot) dX dY$ no mesmo, resultando no seguinte problema de autovalor:

$$(\mathbf{D} + \mu^2 \mathbf{I})\{\bar{\psi}\} = 0 \quad (6.46a)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e \mathbf{D} é definida por:

$$\begin{aligned}
D_{k,j} = & \frac{1}{Pe^2} \left(\int_0^1 \left(\left(K(X, Y) \tilde{\Omega}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\Omega}_k(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{X=0}^{X=L_x/L_y} \right) dY \right. \\
& - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\Omega}_j(X, Y)}{\partial X} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k(X, Y)}{\partial X} dX dY \Big) \\
& + \int_0^{L_x/L_y} \left(\left(K(X, Y) \tilde{\Omega}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\Omega}_k(X, Y)}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}^{Y=1} \right) dY \\
& - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\Omega}_j(X, Y)}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k(X, Y)}{\partial Y} dX dY
\end{aligned} \tag{6.46b}$$

Como pode ser visto, a Eq. (6.46a) é um problema de autovalor que pode ser facilmente resolvido através da função *Eigensystem* da plataforma *Mathematica*®, retornando assim, os autovalores μ^2 e os autovetores $\{\bar{\psi}\}$. É importante ressaltar que a ordem das matrizes quadradas infinitas \mathbf{D} e \mathbf{I} deve ser truncada em um determinado valor $N_{P,aux} \times N_{P,aux}$ que garanta uma convergência adequada dos autovalores e autovetores. As autofunções $\psi_k(X, Y)$, por sua vez, podem ser recuperadas através da fórmula da inversa (Eq. (6.45)).

Com o problema de autovalor com coeficientes variáveis (Eq. (6.41)) tendo sido resolvido, é necessário agora aplicar a GITT no problema filtrado. Para isso, o par transformada-inversa para este caso é definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_k^* = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y) \theta^*(X, Y) dX dY \tag{6.47a}$$

$$\text{Inversa: } \theta^*(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_k^* \tag{6.47b}$$

onde $\tilde{\psi}_k(X, Y)$ é a autofunção normalizada definida como:

$$\tilde{\psi}_k(X, Y) = \frac{\psi_k(X, Y)}{\sqrt{N_k}} ; \quad N_k = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \psi_k^2(X, Y) dX dY ; \quad (6.47c,d)$$

É possível agora realizar a transformação integral do problema original (6.15), a qual pode ser feita aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y)(\cdot) dX dY$ no mesmo e, logo em seguida, a equação da inversa (Eq.(6.47b)), resultando no seguinte sistema de equações algébricas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_{k,j} \bar{\theta}_k^* = B_k \quad (6.48a)$$

onde B_k é ainda expressa pela Eq. (6.28c), e $M_{k,j}$ é definido por:

$$M_{k,j} = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) U(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial X} dX dY \\ + Pe \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) V(X, Y) \tilde{\psi}_j(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial Y} dX dY \\ + \mu_k^2 \delta_{k,j} \quad (6.48b)$$

onde $\delta_{k,j}$ é o delta de Kronecker. Para ser resolvido, o sistema de equações (6.48a) deve ser truncado em um determinado valor $N_p < N_{p,aux}$ que garanta a convergência do potencial desejada. Feito isso, o mesmo pode ser facilmente resolvido utilizando a função *LinearSolve* da plataforma *Mathematica*®, que fornece uma solução analítica para sistema de equações, ou então, de forma matricial, através do produto entre a inversa da matriz quadrada \mathbf{M} ($N_p \times N_p$) e o vetor B ($N_p \times 1$), conforme já apresentado na Eq. (6.29). Com o potencial transformado tendo sido obtido, basta agora substituí-lo na fórmula da inversa

(Eq. (6.47b)), para recuperar o potencial filtrado, e depois aplicar novamente a equação filtro (Eq. (6.8)), para recuperar o potencial original.

6.6 SOLUÇÃO VIA FILTRO RECURSIVO

6.6.1 Solução Permanente

As duas metodologias apresentadas anteriormente utilizavam um filtro para homogeneizar as condições de contorno do problema. Nesta seção, serão utilizados dois filtros recursivos, o primeiro já apresentado na Seção 6.3 e o segundo será um filtro puramente condutivo, resolvido através de um problema de autovalor com coeficientes variáveis. Por fim, este segundo filtro é aplicado à equação completa da energia, a qual será então resolvida através de um problema de autovalor com coeficientes constantes. O objetivo de aplicar os filtros recursivos neste problema é, mais uma vez, carregar o máximo de informação analítica possível para a solução por GITT da equação da energia e, com isso, melhorar a convergência do resultado.

Sendo assim, as duas soluções filtro aplicadas sucessivamente podem ser definidas como:

$$\theta_{FC}(X, Y) = \theta_{FC}^*(X, Y) + \theta_F(X, Y) \quad (6.49a)$$

e

$$\theta(X, Y) = \theta^*(X, Y) + \theta_{FC}(X, Y) \quad (6.49b)$$

onde θ_F é a solução filtro da Seção 6.3, θ_{FC} é a solução filtro puramente condutiva incluindo, no entanto, a função da condutividade térmica com variação espacial na equação da energia e θ o potencial original do problema. θ^* e θ_{FC}^* são as respectivas soluções filtradas de cada um dos dois filtros.

Para obter a solução filtro puramente condutiva θ_{FC} , considera-se a equação da energia contendo apenas o termo condutivo, o que resulta na seguinte expressão:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y} \right) = 0, \quad (6.50a)$$

$$0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1$$

juntamente com suas condições de contorno:

$$\begin{aligned} \theta_{FC}(0, Y) &= 1; \quad \left. \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\ -\left. \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta_{FC}(X, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta_{FC}(X, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.50b-e)$$

Substituindo a Eq. (6.49a) na Eq. (6.50), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}^*(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}^*(X, Y)}{\partial Y} \right) \\ = -\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial Y} \right), \end{aligned} \quad (6.51a)$$

$$0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1$$

$$\begin{aligned}
\theta_{FC}^*(0, Y) = 0; \quad & \left. \frac{\partial \theta_{FC}^*(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\
& - \left. \frac{\partial \theta_{FC}^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta_{FC}^*(X, 0) = 0; \\
& \left. \frac{\partial \theta_{FC}^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta_{FC}^*(X, 1) = 0
\end{aligned} \tag{6.51b-e}$$

Com a equação da energia puramente condutiva devidamente filtrada, é possível dar início então à sua solução via problema de autovalor com coeficientes variáveis. A determinação dos autovalores e autofunções via transformada integral é rigorosamente a mesma apresentada na seção anterior (6.5) entre as Eq. (6.41a) e a Eq. (6.46), e portanto, por motivo de brevidade, não serão apresentadas novamente. Sendo assim, considerando os autovalores μ e as autofunções ψ devidamente conhecidas, é possível definir agora o par transformada-inversa afim de aplicar a GITD no problema puramente condutivo. Logo:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_{FC,k}^* = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y) \theta_{FC}^*(X, Y) dX dY \tag{6.52a}$$

$$\text{Inversa: } \theta_{FC}^*(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_{FC,k}^* \tag{6.52b}$$

onde $\tilde{\psi}_k(X, Y)$ é a autofunção normalizada já definida na Eq. (6.47c,d).

É possível agora realizar a transformação integral do problema puramente condutivo filtrado (6.51), a qual pode ser feita aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y)(\cdot) dX dY$ no mesmo e, logo em seguida, a equação da inversa (Eq.(6.52b)), resultando na seguinte equação algébrica:

$$\bar{\theta}_{FC,k}^* = \frac{H_k}{\mu_k^2} \quad (6.53a)$$

onde H_k é definido por:

$$\begin{aligned}
 H_k = & \frac{1}{Pe^2} \left(\int_0^1 \left(\left(K(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{X=0}^{X=L_x/L_y} \right) dY \right. \\
 & - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial X} \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} dX dY \Big) \\
 & + \int_0^{L_x/L_y} \left(\left(K(X, Y) \tilde{\psi}_k(X, Y) \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{Y=0}^{Y=1} \right) dY \quad (6.53b) \\
 & - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\psi}_k(X, Y)}{\partial Y} \frac{\partial \theta_F(X, Y)}{\partial X} dX dY
 \end{aligned}$$

Assim, aplicando o problema de autovalor com coeficientes variáveis no problema puramente condutivo (Eq. (6.51)), obtém-se uma solução exata para o filtro via CITT, uma vez que a solução é dada por um sistema de equações algébricas desacopladas, como pode ser visto na Eq. (6.53a). Por fim, aplicando a solução do filtro condutivo transformado ($\bar{\theta}_{FC,k}^*$) na equação da inversa (Eq. (6.52b)), juntamente com a Eq. (6.49a), obtém-se então a solução do filtro puramente condutivo que já enxerga as variações abruptas das condutividades térmicas no interior do domínio.

Passando agora para o problema geral (Eq. (6.14)), contendo tanto os termos difusivos quanto convectivos, e aplicando o filtro puramente condutivo através da Eq. (6.49b), obtém-se a seguinte expressão para o problema geral filtrado:

$$\begin{aligned}
& W(X, Y) \left(U(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right) \\
& = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right) \\
& + g(X, Y), \quad 0 < X < L_x/L_y, \quad 0 < Y < 1
\end{aligned} \tag{6.54a}$$

juntamente com suas condições de contorno também filtradas:

$$\begin{aligned}
& \theta^*(0, Y) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\
& -\left. \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta^*(X, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta^*(X, 1) = 0
\end{aligned} \tag{6.54b-e}$$

onde:

$$g(X, Y) = -W(X, Y) \left(U(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y} \right) \tag{6.55f}$$

Seguindo novamente o formalismo da GITT, o par transformada-inversa pode ser definido como:

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_k^* = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) \theta^*(X, Y) dX dY \tag{6.56a}$$

$$\text{Inversa: } \theta^*(X, Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) \bar{\theta}_k^* \tag{6.56b}$$

onde $\tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)$ é a autofunção normalizada definida como:

$$\tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) = \frac{\phi_{b,k}(X, Y)}{\sqrt{N_k}} ; \quad N_k = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \phi_{b,k}^2(X, Y) dX dY ; \quad (6.56c,d)$$

Uma vez que a solução filtro agora incorpora a informação sobre a variação espacial dos coeficientes da equação de energia (só os termos condutivos), seria uma escolha natural, para se atingir ainda melhores taxas de convergência, agora adotar um problema de autovalor com coeficientes variáveis que incorporasse a informação nos coeficientes $K(X, Y)$, bem como nos demais coeficientes, $W(X, Y).U(X, Y)$ e $W(X, Y).V(X, Y)$. A inclusão dos termo convectivo na direção axial, conjuntamente com a difusão axial, já foi testada com excelentes resultados no capítulo 4, empregando-se o problema de autovalor não-clássico, que levaria à transformação integral exata dos termos difusivos e do termo convectivo em X , enquanto os termos transiente e convectivo em Y seriam responsáveis pelo acoplamento dos termos transformados. Por outro lado, o problema de autovalor tipo Sturm-Liouville com os coeficientes $W(X, Y)$ e $K(X, Y)$, levaria à transformação exata dos termos transientes e difusivos, enquanto os termos convectivos seriam responsáveis pelo acoplamento. Mais recentemente, foi formalizado o método de transformação integral empregando problemas de autovalor convectivos (Cotta et al. 2016), que permitiria reescrever o presente problema em uma forma difusiva generalizada, oferecendo outra opção para representação da base de expansão em autofunções. Portanto, tem-se algumas alternativas de base que poderão se exploradas em trabalhos futuros, como será comentado nas conclusões do presente trabalho. Aqui, entretanto, buscou-se isolar a influência do novo filtro recursivo, comparando a solução com sua adoção àquela desenvolvida na primeira metodologia aqui apresentada, usando meramente um filtro de condições de contorno. Para isso, adotou-se o mesmo problema de autovalor de coeficientes constantes da primeira metodologia propostas, o que permitirá avaliar tão somente possíveis melhorias nas taxas de convergência da expansão em autofunções em função do novo filtro.

A autofunção $\phi_{b,k}(X, Y)$, por sua vez, é obtida através do seguinte problema de autovalor com coeficientes constantes:

$$\frac{1}{Pe^2} \frac{\partial^2 \phi_{b,k}(X, Y)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi_{b,k}(X, Y)}{\partial Y^2} + \beta_{b,k}^2 \phi_{b,k}(X, Y) = 0 \quad (6.57a)$$

onde $\beta_{b,k}$ são os autovalores e as condições de contorno para este problema são:

$$\begin{aligned} \phi_{b,k}(0, Y) &= 0; \quad \left. \frac{\partial \phi_{b,k}(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\ -\left. \frac{\partial \phi_{b,k}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \phi_{b,k}(X, 0) &= 0; \\ \left. \frac{\partial \phi_{b,k}(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \phi_{b,k}(X, 1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.57b)$$

A solução desse problema de autovalor já foi devidamente apresentada na Seção 6.4 e não será novamente explicitada. Por fim, aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)(\cdot) dX dY$ no problema geral filtrado Eq.(6.54) e, logo em seguida, a equação da inversa (Eq.(6.56b)), é possível obter o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} \bar{\theta}_k^* = B_k \quad (6.58a)$$

onde $A_{k,j}$ é definido por:

$$\begin{aligned}
A_{k,j} = & \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) U(X, Y) \tilde{\phi}_{b,j}(X, Y) \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)}{\partial X} dX dY \\
& + Pe \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) V(X, Y) \tilde{\phi}_{b,j}(X, Y) \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)}{\partial Y} dX dY \\
& - \frac{1}{Pe^2} \left(\int_0^1 \left(\left(K(X, Y) \tilde{\phi}_{b,j}(X, Y) \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)}{\partial X} \right) \Big|_{X=0}^{X=L_x/L_y} \right) dY \right. \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,j}(X, Y)}{\partial X} \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)}{\partial X} dX dY \right) \\
& - \int_0^{L_x/L_y} \left(\left(K(X, Y) \tilde{\phi}_{b,j}(X, Y) \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)}{\partial Y} \right) \Big|_{Y=0}^{Y=1} \right) dY \\
& + \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} K(X, Y) \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,j}(X, Y)}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y)}{\partial Y} dX dY
\end{aligned} \tag{6.58b}$$

e B_k definido por:

$$\begin{aligned}
B_k = & \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} g(X, Y) \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) dX dY \\
= & - \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) U(X, Y) \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial X} dX dY \\
& - Pe \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} W(X, Y) V(X, Y) \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y} dX dY
\end{aligned} \tag{6.58c}$$

Com o intuito de evitar o cálculo direto das derivadas do filtro puramente condutivo $\frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial X}$ e $\frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y}$ presentes na Eq. (6.58a), utilizou-se a formulação de balanço integral definida em Cotta e Mikhailov (1997). Sendo assim, o balanço integral na direção Y para as condições de contorno apresentadas na Eq. (6.50b-e) pode ser obtida como:

$$\int_Y^1 \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y') \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y')}{\partial X} \right) dY' + \int_Y^1 \frac{\partial}{\partial Y'} \left(K(X, Y') \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y')}{\partial Y'} \right) dY' = 0 \quad (6.59a)$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial Y} = \frac{1}{K(X, Y)} \int_Y^1 \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y') \frac{\partial \theta_{FC}(X, Y')}{\partial X} \right) dY' \quad (6.59b)$$

Já o balanço integral na direção X é definido como:

$$\begin{aligned} & \int_X^{L_x/L_y} \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X', Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X', Y)}{\partial X'} \right) dX' \\ & + \int_X^{L_x/L_y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X', Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X', Y)}{\partial Y} \right) dX' = 0 \end{aligned} \quad (6.60c)$$

o que resulta em:

$$\frac{\partial \theta_{FC}(X, Y)}{\partial X} = - \frac{Pe^2}{K(X, Y)} \int_X^{L_x/L_y} \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X', Y) \frac{\partial \theta_{FC}(X', Y)}{\partial Y} \right) dX' \quad (6.59d)$$

Deduções similares podem ser feitas para condições de contorno diferentes das consideradas.

O sistema de equações (6.58a) deve ser truncado em um determinado valor N_P que garanta a convergência do potencial desejada e sua solução é idêntica à apresentada na Eq. (6.29). Com o potencial transformado tendo sido obtido, basta agora substituí-lo na fórmula

da inversa (Eq.(6.56b)), para recuperar o potencial filtrado, e depois aplicar novamente a equação filtro (Eq. (6.49b)), para recuperar o potencial original. Portanto:

$$\theta(X, Y) = \sum_{k=1}^{N_P} \tilde{\phi}_{b,k}(X, Y) \bar{\theta}_k^* + \theta_{FP}(X, Y) \quad (6.61)$$

6.6.2 Solução Transiente

Assim como foi feito para a solução permanente, também é possível aplicar um filtro recursivo para a solução transiente. Ou seja, ao invés de se calcular a solução transiente através da metodologia apresentada na Seção 6.4.2, utiliza-se a solução do problema em regime permanente como filtro para a solução do problema transiente. Sendo assim, podemos considerar a seguinte expressão:

$$\theta(X, Y, \tau) = \theta^*(X, Y, \tau) + \theta_{FP}(X, Y) \quad (6.62)$$

onde $\theta_{FP}(X, Y)$ é a solução geral do problema em regime permanente acima obtida e $\theta^*(X, Y, \tau)$ é a solução filtrada. Aplicando este filtro recursivo na Eq. (6.7) obtém-se então:

$$\begin{aligned} W(X, Y) & \left(Pe \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial \tau} + U(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial X} + PeV(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right) \\ & = \frac{1}{Pe^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(K(X, Y) \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right) \\ & + g(X, Y), \end{aligned} \quad (6.63a)$$

$$0 < X < \frac{L_x}{L_y}, \quad 0 < Y < 1, \quad \tau > 1$$

juntamente com suas condições de contornos expressas por:

$$\begin{aligned} \theta^*(X, Y, 0) = -\theta_{FP}(X, Y); \quad \theta^*(0, Y, \tau) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \\ -\left. \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right|_{Y=0} + Bi \theta^*(X, 0, \tau) = 0; \\ \left. \frac{\partial \theta^*(X, Y, \tau)}{\partial Y} \right|_{Y=1} + Bi \theta^*(X, 1, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (6.62\text{b-e})$$

Uma vez aplicada a solução em regime permanente como filtro, o termo fonte $g(X, Y)$, existente na Eq. (6.31), acaba se tornando nulo na Eq. (6.63a), tornando assim a sua solução do problema filtrado mais simples. A partir deste ponto o formalismo da GITT pode ser iniciado novamente, definindo-se um par transformada-inversa e aplicando-o na expressão filtrada.

$$\text{Transformada: } \bar{\theta}_k^*(\tau) = \int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y) \theta^*(X, Y, \tau) dX dY \quad (6.64\text{a})$$

$$\text{Inversa: } \theta^*(X, Y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_k^*(\tau) \quad (6.64\text{b})$$

onde $\tilde{\psi}_k(Y)$ é a autofunção normalizada e ordenada. O problema de autovalor é idêntico ao apresentado na Eq. (6.17), assim como todo o processo de reordenamento dos autovalores, e portanto não serão novamente descritos. A fórmula da inversa continua sendo

Dando continuidade, a transformação integral do problema (6.63a) pode ser feita aplicando-se o operador $\int_0^1 \int_0^{L_x/L_y} \tilde{\psi}_k(X, Y)(\cdot) dX dY$ no mesmo, resultando no seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_{k,j} \frac{d\bar{\theta}_j^*(\tau)}{d\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j} \bar{\theta}_j^*(\tau) = 0 \quad (6.65)$$

onde $A_{k,j}$ e $C_{k,j}$ são os mesmos termos definidos anteriormente, através da Eq. (6.28b) e da Eq. (6.34b) respectivamente. Já a condição inicial é definida pela Eq. (6.34c).

A solução analítica do sistema de equações diferenciais ordinárias (Eq. (6.65)) na forma matricial pode ser expresso como:

$$\mathbf{C} \frac{d\bar{\theta}^*}{d\tau} + \mathbf{A} \bar{\theta}^* = \mathbf{0} \quad (6.66)$$

onde \mathbf{C} e \mathbf{A} são matrizes quadradas ($N_p \times N_p$). Multiplicando a Eq. (6.66) pela inversa da matriz \mathbf{C} , obtém-se:

$$\frac{d\bar{\theta}^*}{d\tau} + \mathbf{F} \bar{\theta}^* = \mathbf{0} \quad (6.67)$$

onde $\mathbf{F} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$. Com isso, a seguinte mudança de variável é proposta:

$$\tilde{\bar{\theta}}^* = \mathbf{V} \tilde{\bar{\theta}}^* \quad (6.68)$$

onde a matriz \mathbf{V} corresponde aos autovetores da matriz \mathbf{F} . Aplicando a Eq. (6.67) na Eq. (6.68) e multiplicando pela inversa da matriz \mathbf{V} é possível obter a seguinte expressão:

$$\frac{d\tilde{\bar{\theta}}^*}{d\tau} + \sigma \tilde{\bar{\theta}}^* = \mathbf{0} \quad (6.69a)$$

onde σ são os autovalores da matriz \mathbf{F} e a condição inicial é dada por:

$$\tilde{\theta}_k^*(0) = -\mathbf{V}^{-1}\tilde{f}_k \quad (6.69b)$$

Logo, a solução do novo sistema de equações diferenciais ordinárias desacopladas será:

$$\tilde{\theta}_k^*(\tau) = e^{-\sigma_k \tau} \tilde{\theta}_k^*(0) \quad (6.70)$$

Para recuperar o potencial transformado, basta aplicar a Eq. (6.68) novamente. O potencial original, por sua vez, será obtido aplicando-se a fórmula da inversa (6.64b) junto a equação filtro (Eq. (6.62)). Portanto:

$$\theta(X, Y, \tau) = \sum_{k=1}^{N_P} \tilde{\psi}_k(X, Y) \bar{\theta}_k^*(\tau) + \theta_{FP}(X, Y) \quad (6.71)$$

6.7 VERIFICAÇÃO DO CÓDIGO

Para verificar as metodologias propostas neste capítulo, juntamente com o código desenvolvido na plataforma *Mathematica®*, considerou-se mais uma vez o problema apresentado em Knupp et al. (2013), no qual considera-se um escoamento monofásico, parabólico, entre placas paralelas. Este mesmo problema foi utilizado para verificação do código das metodologias do Capítulo 5. Esses resultados são apresentados no ANEXO C (Capítulo 10). Todas as três metodologias consideradas nesse capítulo apresentaram uma boa concordância com os resultados de Knupp et al. (2013) (com desvios relativos abaixo

de 0,5%) embora o número de termos nas expansões tenha aumentado significativamente em relação às soluções nas geometrias mais simples do Capítulo 5, por se tratarem de transformações duplas com problemas de autovalor clássicos bidimensionais. Para a convergência da solução via filtro recursivo foi necessária uma menor ordem de truncamento $N_p < 100$ para garantir uma convergência completa no quarto algarismo significativo. Já para as soluções via problema de autovalor com coeficientes constantes e variáveis foi necessário uma ordem de truncamento $N_p = 220$ para garantir uma convergência completa no terceiro algarismo significativo. A solução via problema de autovalor com coeficientes variáveis, $K(X,Y)$ apenas, não mostrou uma melhora significativa em relação à solução via problema de autovalor com coeficientes constantes, apesar da mesma carregar alguma informação, em especial sobre os termos difusivos, dentro do problema de autovalor.

Com estes resultados é possível comprovar a verificação do código e das metodologias adotadas. Apesar dos resultados de temperatura apresentarem um desvio relativo pequeno em relação aos obtidos por Knupp et al. (2013), a convergência do problema se mostrou mais lenta em relação aos resultados obtidos via transformação parcial. No entanto, a solução proposta neste trabalho é mais multipropósito e não tem como competir com uma solução dedicada à um problema mais simples e, portanto, uma comparação de convergência entre elas é injusta.

6.8 RESULTADOS

Com a verificação do código tendo sido feita, é possível dar início à apresentação dos resultados obtidos para os casos propostos na Seção 6.1. Inicialmente serão apresentados os resultados obtidos para o canal sinuoso em regime permanente, os quais serão verificados a partir de resultados obtidos através de uma plataforma CFD comercial que emprega o método de elementos finitos (COMSOL). Em seguida, serão apresentados os resultados considerando regime transitente para o mesmo problema. Por fim, os resultados relativos à duas geometrias de canal com parede corrugada serão apresentados. Parte dos

resultados encontrados nesta seção podem ser encontrados em Zotin et al. (2016 b) e Cotta et al. (2016 b e 2016 d).

6.8.1 Solução em regime Permanente para o Canal Sinuoso

As propriedades dos materiais que foram considerados para a solução deste problema são as mesmas que foram utilizadas nos problemas do Capítulo 5, ou seja: água ($k_f = 0,62 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ e $w_f = 4,112 \text{ MJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$) para o meio líquido e acrílico ($k_s = 0,19 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ e $w_s = 1,749 \text{ MJ}/(\text{m}^3 \cdot \text{K})$) para o meio sólido. Sendo assim, considerando agora as propriedades físicas adimensionais, calculadas conforme a Eq (6.6), obtém-se:

$$W(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{meio líquido} \\ 0.425382, & \text{meio sólido} \end{cases} \quad (6.72\text{a})$$

$$K(X, Y) = \begin{cases} 1, & \text{meio líquido} \\ 0.306452, & \text{meio sólido} \end{cases} \quad (6.72\text{b})$$

As condições de contorno utilizadas para este problema em particular foram:

$$\left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \quad \theta(X, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=1} = 0; \quad (6.72\text{c-e})$$

Considerando inicialmente a metodologia apresentada na Seção 6.4 para regime permanente, utilizou-se como ordem de truncamento $N_p = 400$ para garantir uma boa convergência de seus resultados. Nota-se que a ordem de truncamento foi praticamente

dobrada em relação ao problema com um canal reto ($N_P = 220$), como requerido para a convergência dos resultados na geometria mais complexa.

A convergência da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ e a comparação com os resultados fornecidos pela plataforma COMSOL (obtidos a partir da opção de malha "*Extremely Fine*") são apresentados nas Tabela 6.1, Tabela 6.2 e Tabela 6.3. Como é possível observar, para $N_P = 400$ obtém-se uma convergência de ± 1 no terceiro algarismo significativo tanto para $X = 0,1$ quanto para $X = 0,2$. Ao se comparar estes resultados com os obtidos pelo COMSOL, observa-se desvios relativos em sua grande parte abaixo de 1%, exceto o ponto $(X; Y) = (1,5; 0,25)$, o qual apresentou um desvio de 4,43%. Apesar de ser um desvio relativamente alto, em Knupp (2013) obteve-se desvios relativos maiores que esse ao comparar resultados provenientes da plataforma COMSOL com aqueles obtidos via GITT para a geometria mais simples. Com isso, é possível afirmar que há uma boa concordância entre os resultados obtidos via GITT e aqueles obtidos via simulação numérica

Tabela 6.1: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes para $Pe=1$ em $X=0,1$.

$X = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,54085	0,84725	0,88884
$N_P = 120$	0,53458	0,84888	0,89156
$N_P = 190$	0,53245	0,84936	0,89105
$N_P = 260$	0,53303	0,84913	0,89118
$N_P = 330$	0,53362	0,84946	0,89214
$N_P = 400$	0,53356	0,84981	0,89121
COMSOL	0,53160	0,85149	0,89320
Desvio Relativo	0,37%	0,20%	0,22%

Tabela 6.2: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes para $Pe=1$ em $X=0,25$.

$X = 0,25$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,30576	0,63530	0,73400
$N_P = 120$	0,29911	0,65036	0,73370
$N_P = 190$	0,29560	0,64798	0,73407
$N_P = 260$	0,29692	0,64529	0,73490
$N_P = 330$	0,29740	0,64722	0,73522
$N_P = 400$	0,29741	0,64764	0,73448
COMSOL	0,29569	0,65310	0,73912
Desvio Relativo	0,58%	0,84%	0,63%

Tabela 6.3: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes para $Pe=1$ em $Y=0,25$.

$Y = 0,25$	$X = 0,25$	$X = 0,75$	$X = 1,5$
$N_P = 50$	0,58158	0,20694	0,10298
$N_P = 120$	0,57801	0,20655	0,10261
$N_P = 190$	0,57562	0,20893	0,10133
$N_P = 260$	0,57476	0,20877	0,10169
$N_P = 330$	0,57415	0,20827	0,10190
$N_P = 400$	0,57408	0,20795	0,10190
COMSOL	0,57770	0,21008	0,10662
Desvio Relativo	0,63%	1,01%	4,43%

Na Figura 6.10 apresenta-se as isotermas obtidas a partir da metodologia apresentada na Seção 6.4 e, na Figura 6.11, as isotermas obtidas pela plataforma COMSOL. Comparando essas duas figuras, é possível notar um comportamento similar entre as isotermas, onde fica nítida a distorção do campo de temperatura causada pelo canal sinuoso.

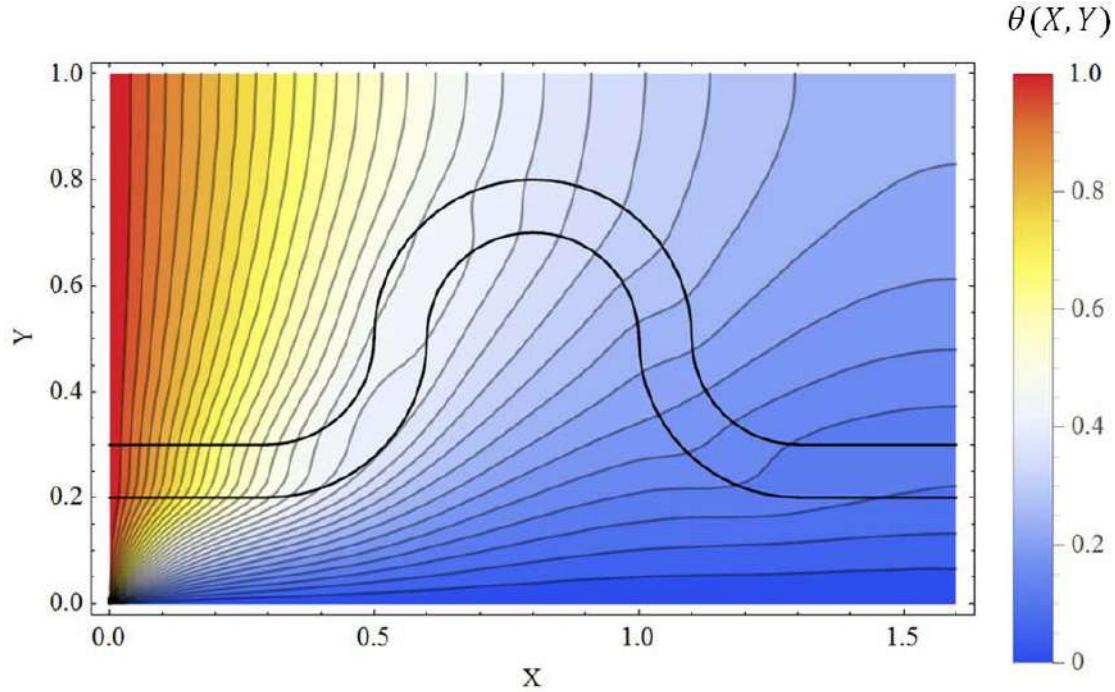


Figura 6.10: Isotermas da solução do problema com canal ferradura obtidas a partir da metodologia da Seção 5.4.

Considerando ainda a metodologia apresentada na Seção 6.4, mas, neste caso, aplicando o reordenamento sequencial da matriz \mathbf{F} , conforme apresentada na Seção 6.4.3, os mesmos resultados são apresentados nas Tabela 6.4, Tabela 6.5 e Tabela 6.6. Mais uma vez obteve-se uma convergência de ± 1 no terceiro algarismo significativo tanto para $X = 0,1$ quanto para $X = 0,2$. Os desvios relativos em relação à solução da plataforma COMSOL não tiveram uma variação significativa em relação aos resultados com reordenamento clássico.

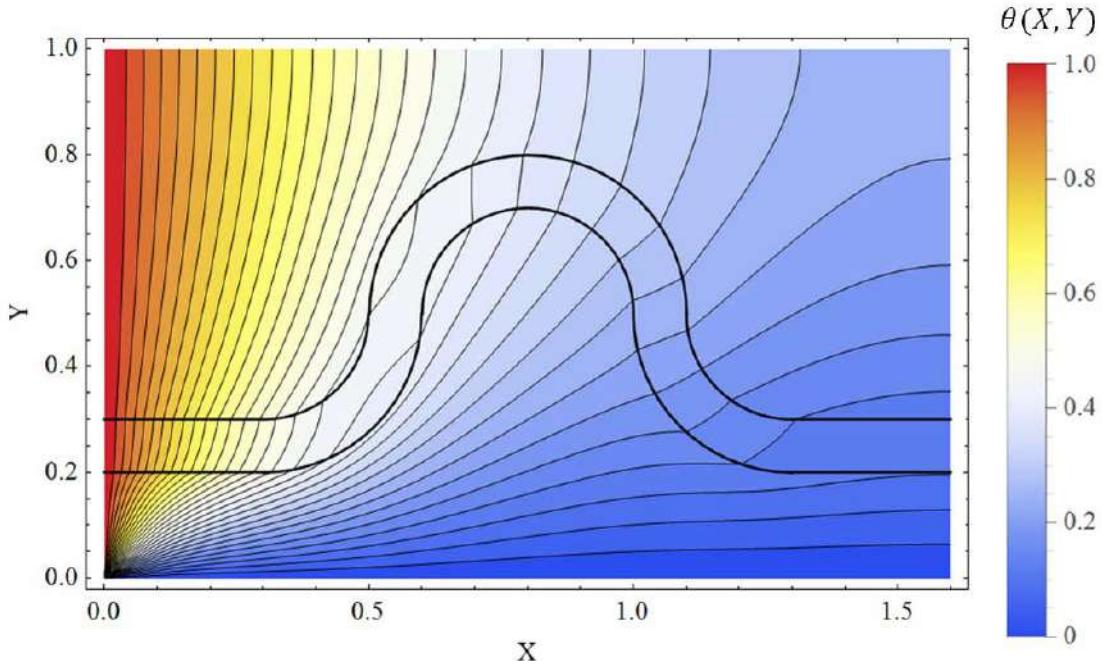


Figura 6.11: Isotermas da solução do problema com canal ferradura obtidas a partir da plataforma COMSOL.

Tabela 6.4: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$.

$X = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,54669	0,84860	0,88954
$N_P = 120$	0,53653	0,84804	0,89172
$N_P = 190$	0,53557	0,85012	0,89110
$N_P = 260$	0,53300	0,84935	0,89087
$N_P = 330$	0,53245	0,84900	0,89123
$N_P = 400$	0,53312	0,84867	0,89150
COMSOL	0,53160	0,85149	0,89320
Desvio Relativo	0,28%	0,33%	0,19%

Tabela 6.5: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,25$.

$X = 0,25$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,31374	0,64371	0,73961
$N_P = 120$	0,30122	0,64496	0,73544
$N_P = 190$	0,29939	0,64820	0,73401
$N_P = 260$	0,29683	0,64641	0,73445
$N_P = 330$	0,29623	0,64604	0,73429
$N_P = 400$	0,29705	0,64596	0,73422
COMSOL	0,29569	0,65310	0,73912
Desvio Relativo	0,46%	1,09%	0,66%

Tabela 6.6: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $Y=0,25$.

$Y = 0,25$	$X = 0,25$	$X = 0,75$	$X = 1,5$
$N_P = 50$	0,57232	0,20804	0,10005
$N_P = 120$	0,57706	0,20860	0,10162
$N_P = 190$	0,57770	0,20890	0,10208
$N_P = 260$	0,57531	0,20797	0,10164
$N_P = 330$	0,57472	0,20790	0,10172
$N_P = 400$	0,57399	0,20785	0,10166
COMSOL	0,57770	0,21008	0,10662
Desvio Relativo	0,64%	1,06%	4,65%

A partir dos resultados apresentados nas tabelas acima não é possível perceber uma melhora significativa dos resultados utilizando o reordenamento sequencial. No entanto, analisando a convergência do potencial em alguns pontos específicos do domínio, é possível perceber uma convergência ligeiramente melhor, conforme se pode observar nas Figura 6.12 e Figura 6.13. Enquanto que a solução com reordenamento clássico apresenta, visualmente, uma boa convergência com uma ordem de truncamento de, aproximadamente, 350 autovalores, a solução com o novo reordenamento necessitou de uma ordem de truncamento de, aproximadamente, 250 autovalores.

Dando continuidade, será considerada agora a metodologia da Seção 6.5, a qual emprega um problema de autovalor com coeficientes variáveis, para a solução do mesmo problema. Sendo assim, utilizou-se como ordem de truncamento para o cálculo dos autovalores $N_{P,aux} = 400$, enquanto que para a solução do campo de temperaturas, a expansão foi truncada em $N_P = 380$.

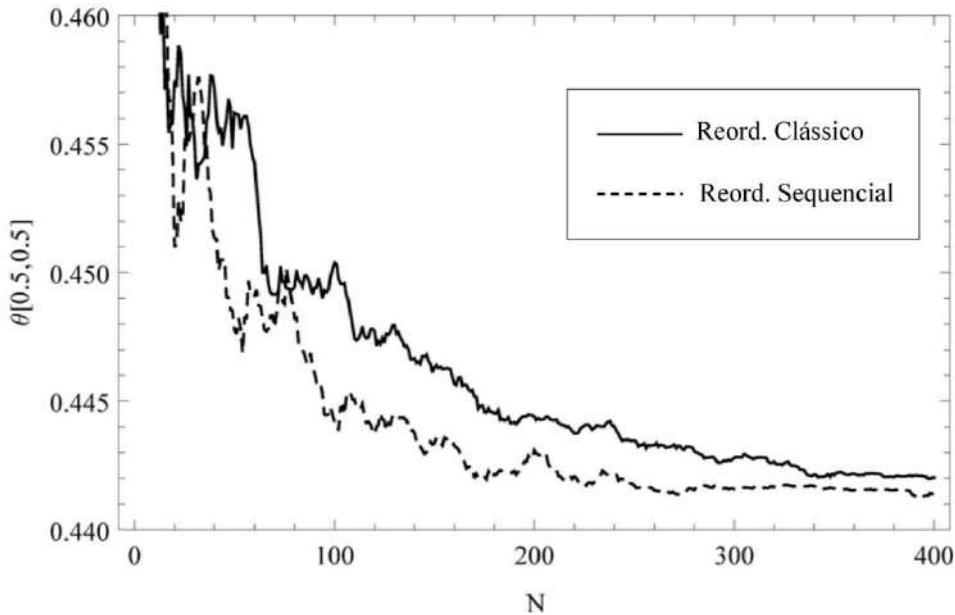


Figura 6.12: Convergência da temperatura adimensional no ponto $(X;Y)=(0,5;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.4 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).

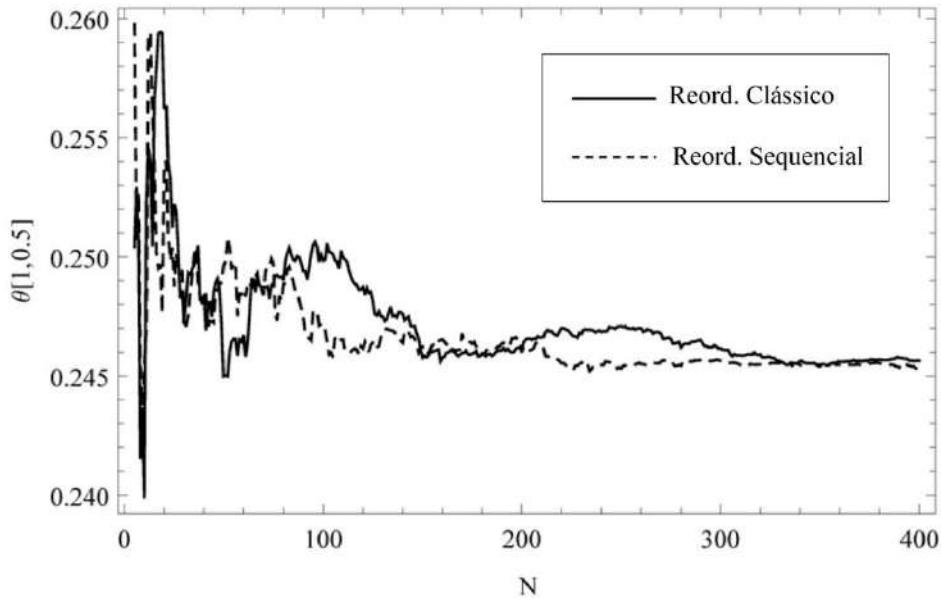


Figura 6.13: Convergência da temperatura adimensional no ponto $(X;Y)=(1;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.4 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).

Na Tabela 6.7 apresenta-se uma breve análise de convergência de cinco autovalores distintos do problema de autovalor com coeficientes variáveis, após solução do problema de autovalor algébrico definido pela Eq. (6.46). Para a ordem de truncamento máxima de $N_{P,aux} = 400$, a convergência se dá no quarto dígito significativo dos autovalores apresentados.

A convergência dos resultados da temperatura, juntamente com uma comparação com os resultados obtidos pelo COMSOL são apresentados nas Tabela 6.8, Tabela 6.9 e Tabela 6.10. Como é possível observar, para $N_p = 380$ obtém-se uma convergência de ± 1 no terceiro algarismo significativo para $X = 0,1$, e convergência completa no terceiro algarismo significativo para $X = 0,25$. Apesar da presente metodologia incorporar mais informação ao problema de autovalor do que aquela apresentada anteriormente, esta alternativa visa essencialmente investigar uma possível aceleração de convergência, uma vez que todos os três procedimentos aqui propostos tem séries convergentes, que devem

levar ao mesmo resultado para séries infinitas. De fato, comparando-se estes resultados com os obtidos pelo COMSOL, observa-se uma pequena variação dos desvios relativos em relação à metodologia anterior, devido às taxas de convergência distintas, fato este também observado na Seção 10.2. Apesar desta metodologia incorporar informação sobre a variação do coeficiente $K(X, Y)$ à base da expansão, uma redução significativa da ordem de truncamento N_P não foi observada, portanto, é possível afirmar que se necessitaria incorporar a informação dos demais operadores com coeficientes variáveis para que uma taxa de convergência espectral pudesse ser obtida, a exemplo da solução do problema conjugado em canal reto, empregando o problema de autovalor que incorpora simultaneamente a convecção e a difusão axial.

Tabela 6.7: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=1$.

Autovalores		μ_1	μ_5	μ_{10}	μ_{25}	μ_{50}
μ_i	Ordem					
$N_{P,aux} = 50$		1,1220	3,3679	5,2253	8,3729	1,1841
$N_{P,aux} = 100$		1,1208	3,3653	5,2221	8,3495	1,1833
$N_{P,aux} = 200$		1,1199	3,3611	5,2125	8,3323	1,1735
$N_{P,aux} = 280$		1,1195	3,3592	5,2062	8,3191	1,1704
$N_{P,aux} = 360$		1,1190	3,3584	5,2048	8,3145	1,1693
$N_{P,aux} = 400$		1,1188	3,3579	5,2038	8,3131	1,1685

Tabela 6.8: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,1$.

$X = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 40$	0,54457	0,85177	0,88925
$N_P = 120$	0,53883	0,84384	0,89232
$N_P = 200$	0,53492	0,84836	0,89382
$N_P = 280$	0,53054	0,85336	0,89007
$N_P = 360$	0,53288	0,85002	0,89099
$N_P = 380$	0,53324	0,84933	0,89114
COMSOL	0,53160	0,85149	0,89320
Desvio Relativo	0,31%	0,25%	0,23%

Tabela 6.9: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,25$.

$X = 0,25$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 40$	0,31595	0,64793	0,74329
$N_P = 120$	0,30434	0,63861	0,73500
$N_P = 200$	0,29735	0,64943	0,73624
$N_P = 280$	0,29297	0,65214	0,73200
$N_P = 360$	0,29672	0,64750	0,73417
$N_P = 380$	0,29692	0,64714	0,73436
COMSOL	0,29569	0,65310	0,73912
Desvio Relativo	0,42%	0,91%	0,64%

Tabela 6.10: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $Y=0,25$.

$Y = 0,25$	$X = 0,25$	$X = 0,75$	$X = 1,5$
$N_P = 40$	0,56888	0,20901	0,10077
$N_P = 120$	0,57437	0,20716	0,10137
$N_P = 200$	0,57685	0,20975	0,10200
$N_P = 280$	0,57539	0,20903	0,10184
$N_P = 360$	0,57516	0,20809	0,10176
$N_P = 380$	0,57571	0,20803	0,10209
COMSOL	0,57770	0,21008	0,10662
Desvio Relativo	0,44%	0,98%	4,24%

Por fim, apresenta-se os resultados obtidos com a metodologia da Seção 6.6, ou seja, a partir da utilização de um filtro recursivo na solução. Conforme comenta-se na Seção 10.3, resolve-se inicialmente o problema puramente condutivo através de um problema de autovalor com coeficientes variáveis, cujo resultado servirá como filtro para o problema geral que possui os termos de convecção. Para a solução do problema puramente condutivo utilizou-se como ordem de truncamento $N_{P,auxFC} = 400$ para o problema de autovalor auxiliar e $N_{P,FC} = 380$ para o problema de autovalor original. A convergência dos autovalores é a mesma já apresentada na Tabela 6.7. A convergência dos resultados desse problema filtro é ilustrada nas Tabela 6.11 e Tabela 6.12. Como é possível observar, para $N_{P,FC} = 380$ obtém-se uma convergência de ± 1 no terceiro algarismo significativo tanto para $X = 0,1$ quanto para $X = 0,2$.

Com o potencial do problema puramente condutivo tendo sido obtido, pode-se então apresentar agora os resultados obtidos para o potencial original, assim como a comparação com os resultados do COMSOL. Estes resultados da temperatura adimensional estão ilustrados nas Tabela 6.13, Tabela 6.14 e Tabela 6.15.

Tabela 6.11: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,1$.

$X = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_{P,FC} = 40$	0,53704	0,84274	0,88639
$N_{P,FC} = 120$	0,53355	0,83654	0,88908
$N_{P,FC} = 200$	0,53017	0,84153	0,89073
$N_{P,FC} = 280$	0,52547	0,84619	0,88690
$N_{P,FC} = 360$	0,52761	0,84256	0,88781
$N_{P,FC} = 380$	0,52795	0,84190	0,88796

Tabela 6.12: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=1$ em $X=0,25$.

$X = 0,25$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_{P,FC} = 40$	0,30532	0,63437	0,73559
$N_{P,FC} = 120$	0,29694	0,62724	0,72729
$N_{P,FC} = 200$	0,28999	0,63758	0,72891
$N_{P,FC} = 280$	0,28528	0,64015	0,72472
$N_{P,FC} = 360$	0,28914	0,63553	0,72677
$N_{P,FC} = 380$	0,28925	0,63516	0,72697

Observando as tabelas abaixo, é possível perceber uma melhora significativa da taxa de convergência dos resultados em relação às metodologias anteriores. Com uma ordem de truncamento de apenas 40 autovalores já é possível garantir uma convergência de ± 1 no

terceiro algarismo significativo, enquanto que essa convergência só havia sido obtida com 380 ou 400 autovalores nas metodologias anteriores. Com $N_P = 120$ obtém-se uma convergência de ± 2 no quarto algarismo significativo em relação ao resultado para $N_P = 400$. Já os desvios relativos em relação ao resultado do COMSOL, como esperado, os mesmos continuam com a mesma ordem de grandeza das metodologias anteriores. Apenas em um ponto $(X; Y) = (1,5; 0,25)$ (Tabela 6.6), observou-se uma alteração sensível do desvio relativo, de 4,43% para 2,60%. Ficou evidente que a utilização de um filtro recursivo tem um impacto significativo na taxa de convergência da temperatura. O filtro mais completo, ao extrair informação analítica da formulação original, resulta em um problema filtrado cujos termos não transformáveis se comportam agora como termos fonte de menor relevância ao resultado final.

Tabela 6.13: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com filtro puramente condutivo para

$$Pe=1 \text{ em } X=0,1.$$

$X = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,53313	0,84948	0,89181
$N_P = 120$	0,53277	0,84918	0,89175
$N_P = 190$	0,53267	0,84916	0,89180
$N_P = 260$	0,53269	0,84917	0,89179
$N_P = 330$	0,53274	0,84921	0,89179
$N_P = 400$	0,53276	0,84926	0,89180
COMSOL	0,53160	0,85149	0,89320
Desvio Relativo	0,22%	0,26%	0,16%

Tabela 6.14: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com filtro puramente condutivo para

$$Pe=1 \text{ em } X=0,25.$$

$X = 0,25$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,29742	0,64883	0,73607
$N_P = 120$	0,29711	0,64873	0,73617
$N_P = 190$	0,29709	0,64872	0,73617
$N_P = 260$	0,29712	0,64865	0,73612
$N_P = 330$	0,29713	0,64873	0,73612
$N_P = 400$	0,29716	0,64880	0,73615
COMSOL	0,29569	0,65310	0,73912
Desvio Relativo	0,50%	0,65%	0,40%

Tabela 6.15: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes com filtro puramente condutivo para

$$Pe=1 \text{ em } Y=0,25.$$

$Y = 0,25$	$X = 0,25$	$X = 0,75$	$X = 1,5$
$N_P = 50$	0,57690	0,21016	0,10380
$N_P = 120$	0,57647	0,21042	0,10386
$N_P = 190$	0,57632	0,21044	0,10381
$N_P = 260$	0,57639	0,21041	0,10383
$N_P = 330$	0,57638	0,21041	0,10384
$N_P = 400$	0,57631	0,21040	0,10385
COMSOL	0,57770	0,21008	0,10662
Desvio Relativo	0,24%	0,15%	2,60%

Ainda utilizando a metodologia com filtro recursivo, apresenta-se agora os resultados com reordenamento sequencial aplicado ao problema de autovalor com coeficientes constantes, utilizado na solução acima. O filtro puramente condutivo é o mesmo com seus resultados já expostos nas Tabela 6.11 e Tabela 6.12. A convergência e comparação com os dados obtidos pelo COMSOL podem ser visualizados nas Tabela 6.16, Tabela 6.17 e Tabela 6.18. Não é possível verificar uma melhora significativa na taxa de convergência em relação aos resultados com reordenamento pela soma dos quadrados dos autovalores. Ainda com $N_P = 120$ obtém-se uma convergência de ± 2 no quarto algarismo significativo em relação ao resultado para $N_P = 400$. Os desvios relativos frente aos resultados obtidos pelo COMSOL se mantiveram praticamente inalterados. No entanto, ao analisar a Figura 6.14 e a Figura 6.15 é possível notar uma leve melhora na taxa de convergência. Obviamente, uma vez que a utilização do filtro puramente condutivo já garantiu grande parte da melhora na convergência, a utilização do reordenamento sequencial garantirá apenas um refinamento desta mesma convergência.

Tabela 6.16: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro

puramente condutivo para $Pe=1$ em $X=0,1$.

$X = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,53378	0,85004	0,89210
$N_P = 120$	0,53277	0,84923	0,89175
$N_P = 190$	0,53272	0,84918	0,89180
$N_P = 260$	0,53268	0,84917	0,89176
$N_P = 330$	0,53266	0,84920	0,89180
$N_P = 400$	0,53271	0,84918	0,89179
COMSOL	0,53160	0,85149	0,89320
Desvio Relativo	0,21%	0,27%	0,16%

Tabela 6.17: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $X=0,25$.

$X = 0,25$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,29785	0,64926	0,73652
$N_P = 120$	0,29726	0,64869	0,73621
$N_P = 190$	0,29720	0,64879	0,73611
$N_P = 260$	0,29711	0,64869	0,73610
$N_P = 330$	0,29705	0,64869	0,73614
$N_P = 400$	0,29714	0,64869	0,73613
COMSOL	0,29569	0,65310	0,73912
Desvio Relativo	0,49%	0,67%	0,40%

Tabela 6.18: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=1$ em $Y=0,25$.

$Y = 0,25$	$X = 0,25$	$X = 0,75$	$X = 1,5$
$N_P = 50$	0,57588	0,21044	0,10371
$N_P = 120$	0,57626	0,21044	0,10379
$N_P = 190$	0,57649	0,21040	0,10385
$N_P = 260$	0,57644	0,21038	0,10384
$N_P = 330$	0,57634	0,21040	0,10385
$N_P = 400$	0,57628	0,21039	0,10383
COMSOL	0,57770	0,21008	0,10662
Desvio Relativo	0,25%	0,15%	2,62%

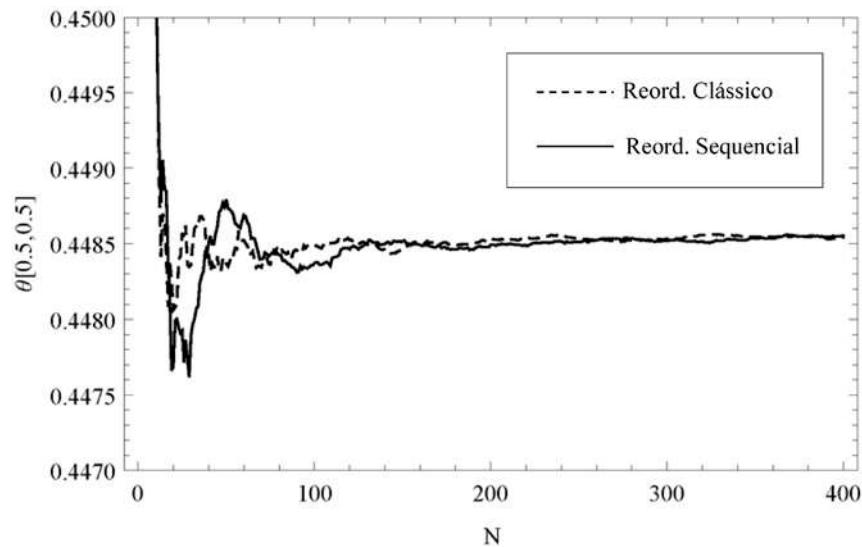


Figura 6.14: Convergência da temperatura adimensional $\theta(X,Y)$ no ponto $(X;Y)=(0,5;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).

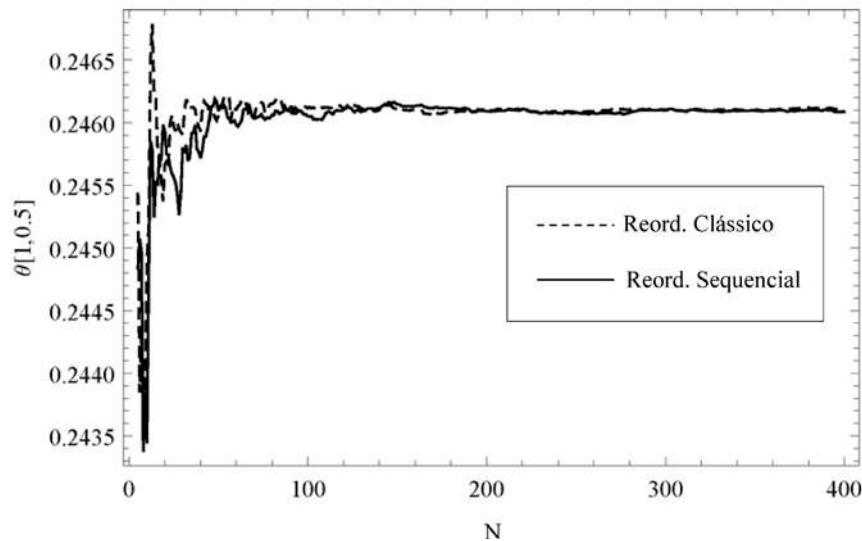


Figura 6.15: Convergência da temperatura adimensional $\theta(X,Y)$ no ponto $(X;Y)=(1;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento clássico (linha cheia) e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes (linha tracejada).

Os resultados obtidos com a metodologia da Seção 6.6, ou seja, a partir da utilização de um filtro recursivo na solução, indicam que o maior custo computacional da solução se encontra na convergência dos termos difusivos do problema (filtro puramente condutivo $\theta_{FC}(X, Y)$), fato este que não era possível analisar através das outras duas metodologias. Conforme pôde ser observado, a ordem de truncamento do problema estritamente condutivo foi $N_{P,FC} = 380$ para garantir uma convergência no terceiro algarismo significativo. No caso da solução geral, já incluindo os termos convectivos, a ordem de truncamento necessária para garantir convergência no quarto algarismo significativo se deu em $N_P = 100$. Ou seja, a maior dificuldade de convergência do problema está, aparentemente, no termo difusivo. Isso pode ser explicado pelo fato do termo difusivo estar presente ao longo de todo o domínio, enquanto que o termo convectivo aparece apenas na região do fluido, ocupando, por tanto, uma área menor do domínio.

Sendo assim, a partir dos dados apresentados nesta seção, fica evidente que, das metodologias consideradas para a solução de problemas com geometrias complexas, a metodologia que apresentou melhores taxas de convergência foi a metodologia da Seção 6.6, que considera a utilização de um filtro recursivo puramente condutivo. Portanto, esta metodologia será também preferida para a solução do caso-teste de canal com paredes corrugadas.

6.8.2 Solução em Regime Transiente para o Canal Sinuoso

Partindo agora para os resultados em regime transiente, será considerada inicialmente a metodologia apresentada na Seção 6.4.2, a qual utiliza um problema de autovalor com coeficientes constantes. As mesmas propriedades físicas e condições de contorno utilizadas para a solução permanente também foram consideradas para este caso. A ordem de truncamento utilizada, assim como no caso de regime permanente, foi $N_P = 400$. A seguir são apresentadas onze figuras que representam o campo de temperaturas obtido para diferentes valores da variável tempo adimensional ($\tau = 0.0025$, $\tau = 0.0125$, $\tau = 0.05$, $\tau = 0.1$, $\tau = 0.175$, $\tau = 0.25$, $\tau = 1$ e $\tau = 4$).

Como é possível observar, os resultados obtidos mostram coerência com o fenômeno físico esperado. Observa-se o efeito de pré-aquecimento promovido pelo escoamento ao longo do canal, com a convecção distorcendo transversal e longitudinalmente as isotermas, em relação ao comportamento puramente difusivo. A partir de $\tau = 1$ o campo de temperatura começa a se estabilizar, até alcançar o regime permanente em $\tau = 4$.

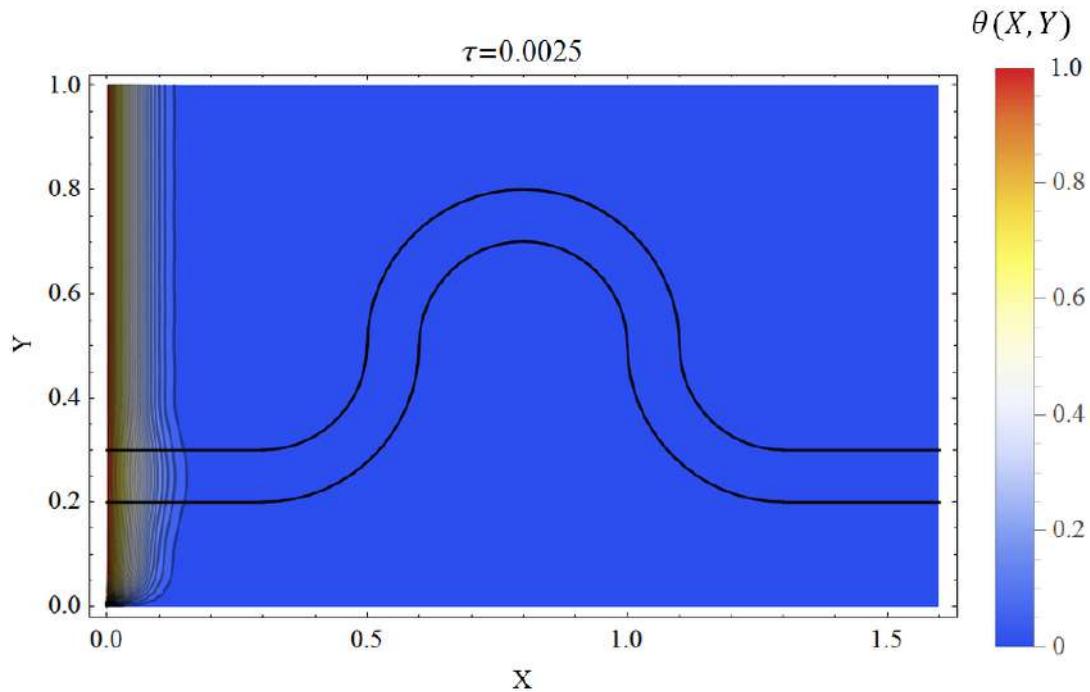


Figura 6.16: Campo de temperatura transiente para $\tau=0,0025$.

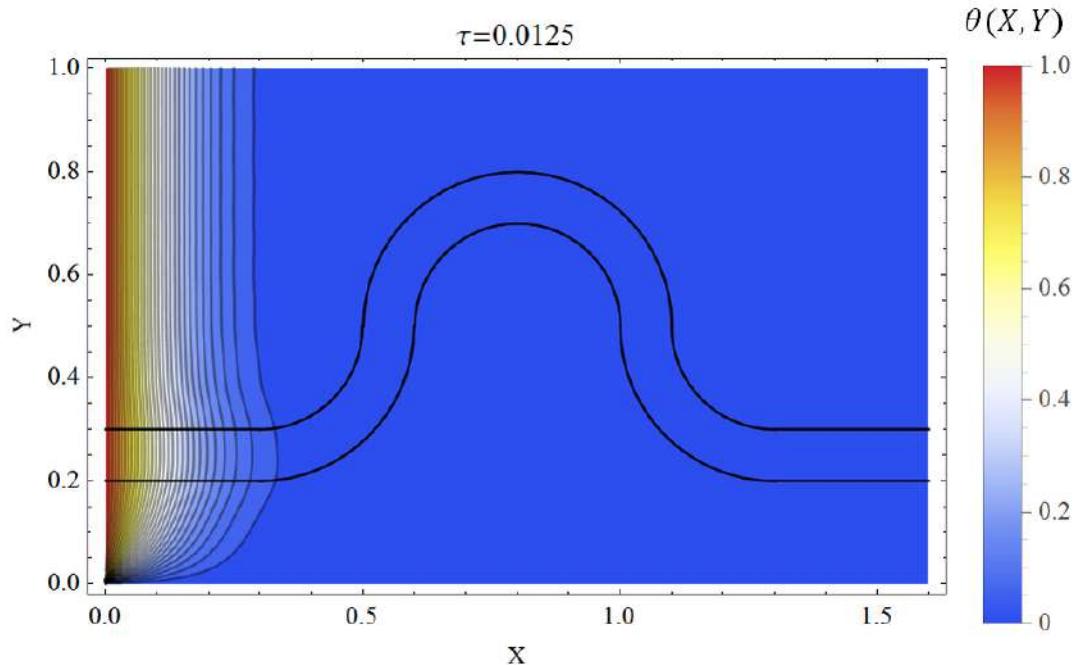


Figura 6.17: Campo de temperatura transiente para $\tau=0,0125$.

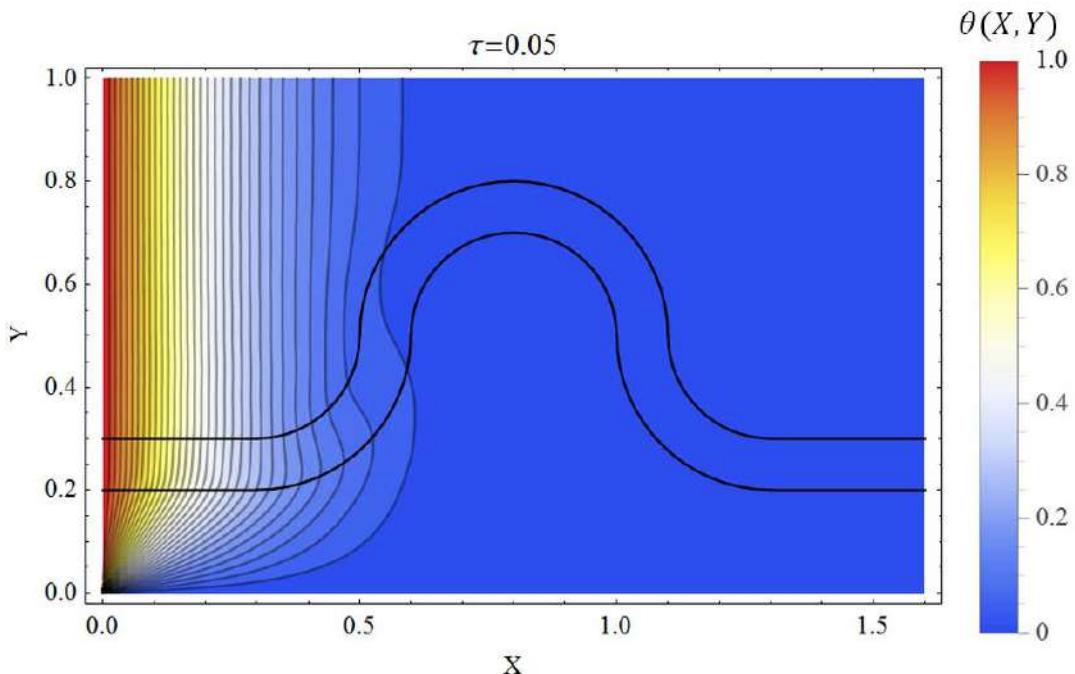


Figura 6.18: Campo de temperatura transiente para $\tau=0,05$.

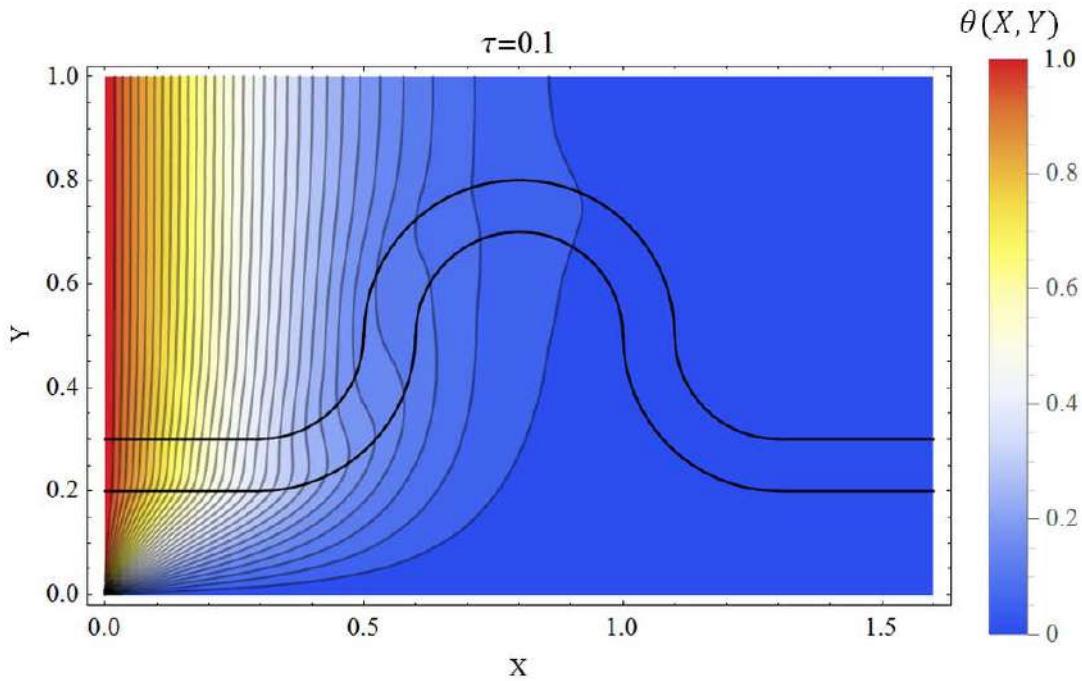


Figura 6.19: Campo de temperatura transiente para $\tau=0,1$.

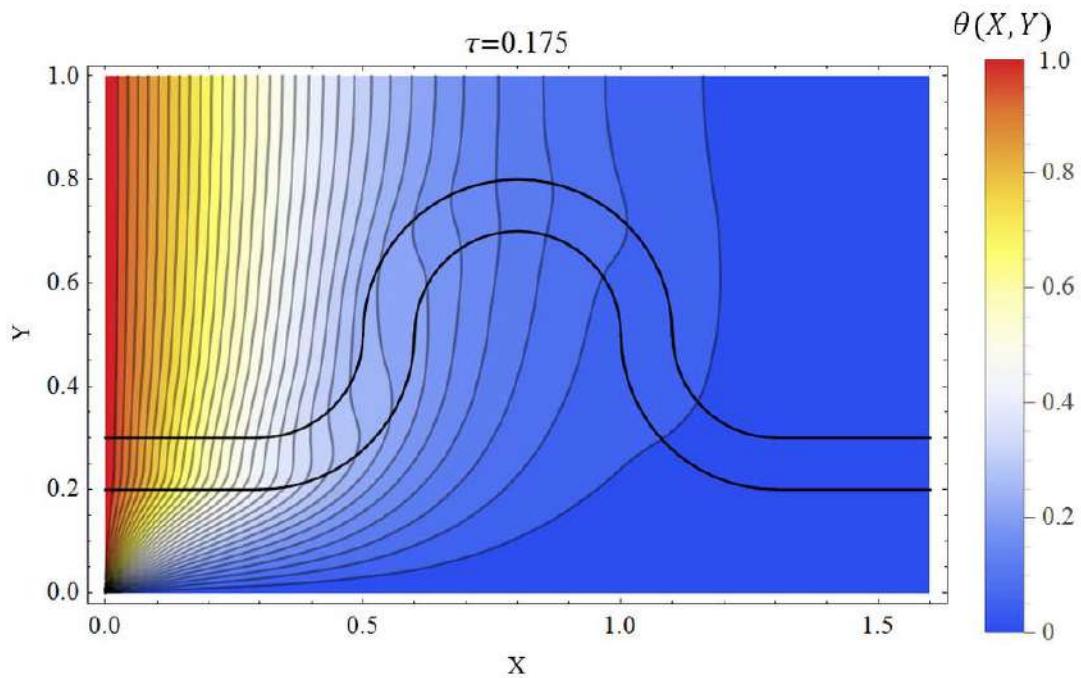


Figura 6.20: Campo de temperatura transiente para $\tau=0,175$.

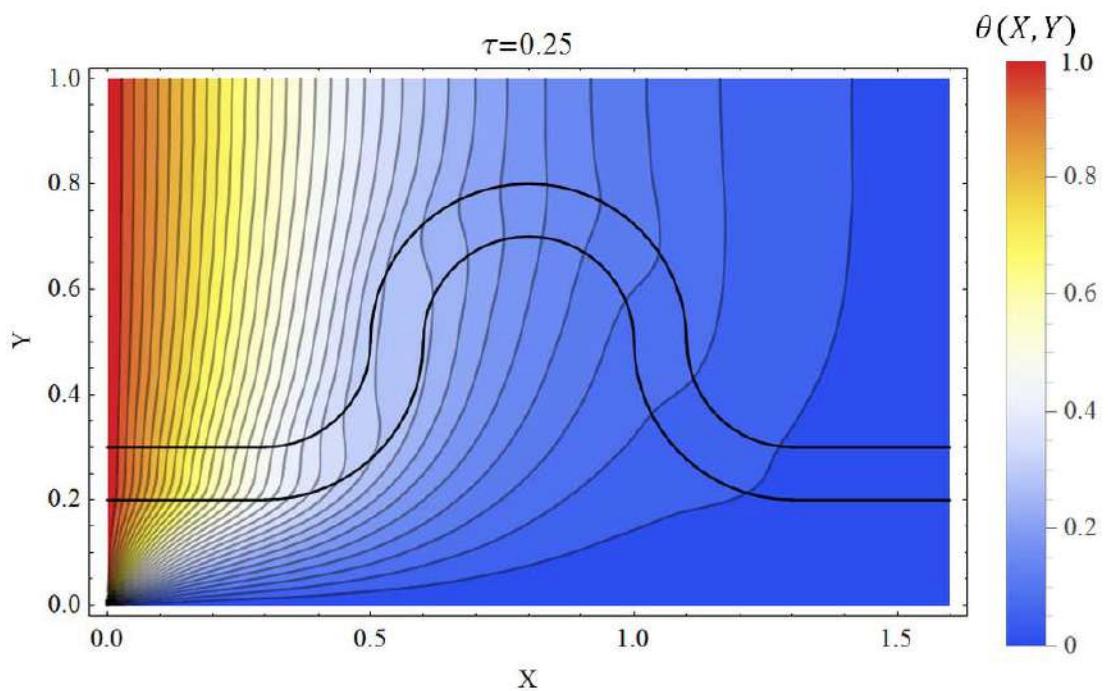


Figura 6.21: Campo de temperatura transiente para $\tau=0, 25$.

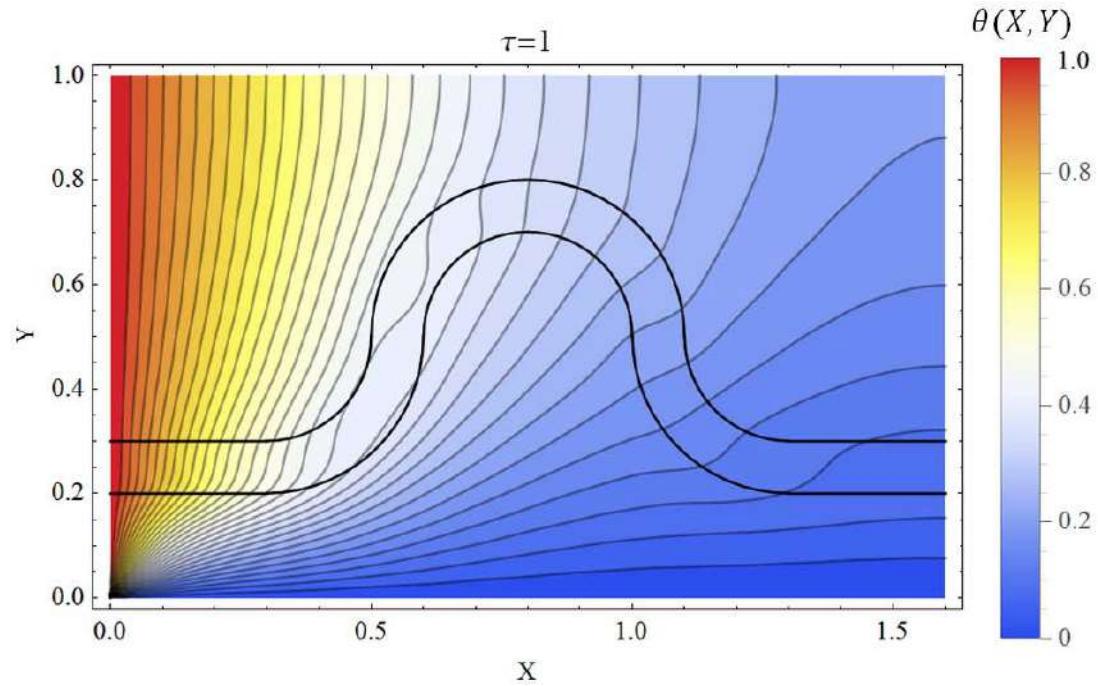


Figura 6.22: Campo de temperatura transiente para $\tau=1$.

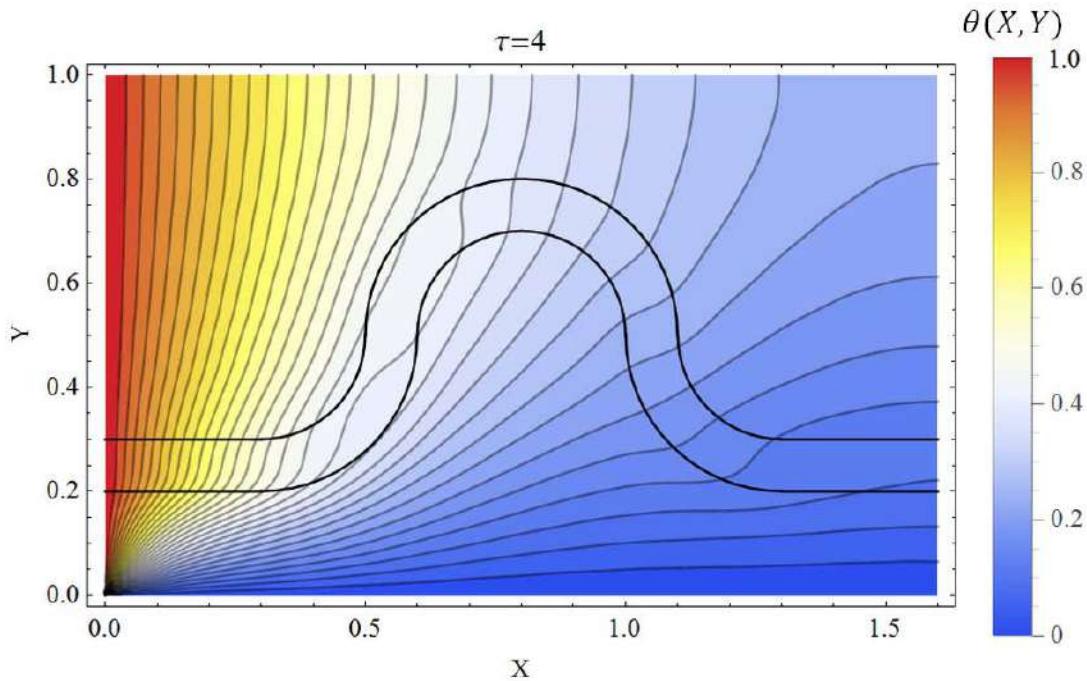


Figura 6.23: Campo de temperatura transiente para $\tau=4$.

A convergência da temperatura adimensional em alguns pontos do domínio e para diferentes tempos adimensionais pode ser visualizada nas Tabela 6.19, Tabela 6.20, Tabela 6.21, Tabela 6.22. Como é possível observar, para uma ordem de truncamento de $N_P = 400$, obteve-se convergência em ± 1 no terceiro algarismo significativo para todos os pontos e nos diferentes tempos apresentados, taxa de convergência esta muito próxima à obtida no problema em regime permanente.

Tabela 6.19: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e

$$\tau = 0,025.$$

$X = 0,1$ e $\tau = 0,025$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,43672	0,62083	0,59984
$N_P = 120$	0,44824	0,61548	0,59917
$N_P = 190$	0,44247	0,61023	0,59704
$N_P = 260$	0,44005	0,61180	0,59870
$N_P = 330$	0,43912	0,61254	0,59920
$N_P = 400$	0,43808	0,61121	0,59876

Tabela 6.20: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e

$$\tau = 0,1.$$

$X = 0,1$ e $\tau = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,48984	0,79081	0,79481
$N_P = 120$	0,51898	0,77667	0,79042
$N_P = 190$	0,51351	0,77243	0,78723
$N_P = 260$	0,50903	0,77608	0,78993
$N_P = 330$	0,50736	0,77757	0,79074
$N_P = 400$	0,50627	0,77597	0,79006

Tabela 6.21: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e

$$\tau = 0,5.$$

$X = 0,1$ e $\tau = 0,5$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,50830	0,85498	0,88109
$N_P = 120$	0,54387	0,83727	0,87593
$N_P = 190$	0,53759	0,83310	0,87237
$N_P = 260$	0,53219	0,83740	0,87553
$N_P = 330$	0,53021	0,83926	0,87644
$N_P = 400$	0,52911	0,83755	0,87564

Tabela 6.22: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial para $Pe=1$ em $X=0,1$ e

$$\tau = 1.$$

$X = 0,1$ e $\tau = 1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,51077	0,86369	0,89306
$N_P = 120$	0,54706	0,84557	0,88789
$N_P = 190$	0,54079	0,84131	0,88421
$N_P = 260$	0,53525	0,84571	0,88744
$N_P = 330$	0,53323	0,84761	0,88835
$N_P = 400$	0,53212	0,84589	0,88754

Considerando agora a metodologia apresentada na Seção 6.6.2, a qual engloba uma solução transiente via filtro recursivo, serão apresentados apenas as tabelas para o estudo da convergência da temperatura adimensional, uma vez que os gráficos dos campos de

temperatura no domínio ao longo do tempo são rigorosamente iguais. Diferentemente do resultado anterior, a convergência neste caso não se mostra tão uniforme para todos os instantes de tempo. Devido à utilização do filtro em regime permanente, a convergência dos resultados em regime transiente se mostram mais rápidas, mas com variações entre um instante de tempo e outro. Quanto menor o tempo adimensional considerado, ou seja, quanto mais próxima da condição inicial, mais lenta é a convergência e quanto mais próxima da condição de regime permanente ($\tau \rightarrow \infty$), mais rápida ela se torna. Isso se deve basicamente à natureza da Eq. (6.70), na qual os autovalores e a variável do tempo adimensional se encontram exclusivamente no termo exponencial, garantindo assim uma convergência mais acelerada para maiores valores, simultaneamente, do autovalor e de τ . Essa condição pode ser claramente observada na Tabela 6.23, Tabela 6.24, Tabela 6.25 e Tabela 6.26. Na Tabela 6.23, para $\tau = 0,025$, observa-se uma concordância de ± 1 no terceiro algarismo significativo para uma ordem de truncamento de $N_P = 330$. Já na Tabela 6.24, para $\tau = 0,1$, a convergência é de ± 1 no quarto algarismo significativo para uma ordem de truncamento de $N_P = 330$. Na Tabela 6.25, para $\tau = 0,5$, observa-se uma convergência de ± 2 no quarto algarismo significativo para uma ordem de truncamento de $N_P = 120$. E por final, na Tabela 6.26, para $\tau = 1$, obtém-se uma convergência ± 2 no quarto algarismo significativo para uma ordem de truncamento de apenas $N_P = 50$. Portanto, a solução com filtro recursivo se mostra mais adequada para a solução do problema transiente, uma vez que a convergência se mostra mais rápida e, por conseguinte, exigindo um menor custo computacional.

É importante ressaltar que a solução em regime permanente utilizada como filtro para esta solução transiente foi a solução obtida via problema de autovalor com coeficientes constantes e reordenamento sequencial. Optou-se por esta solução para efeitos de comparação com a solução transiente da Seção 6.4.2, uma vez que nesta também se utilizou um problema de autovalor com coeficientes constantes e reordenamento sequencial para a sua solução. No entanto, qualquer outra solução em regime permanente (via outra metodologia) poderia ser utilizada como filtro, sendo assim, mais uma vantagem para a sua utilização.

Tabela 6.23: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,025$.

$X = 0,1$ e $\tau = 0,025$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,45825	0,60291	0,59429
$N_P = 120$	0,43324	0,61580	0,59879
$N_P = 190$	0,43374	0,61485	0,60038
$N_P = 260$	0,43690	0,61200	0,59879
$N_P = 330$	0,43801	0,61082	0,59837
$N_P = 400$	0,43809	0,61121	0,59876

Tabela 6.24: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,1$.

$X = 0,1$ e $\tau = 0,1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,51137	0,77290	0,78926
$N_P = 120$	0,50399	0,77700	0,79005
$N_P = 190$	0,50478	0,77704	0,79056
$N_P = 260$	0,50588	0,77628	0,79002
$N_P = 330$	0,50625	0,77585	0,78992
$N_P = 400$	0,50627	0,77597	0,79006

Tabela 6.25: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 0,5$.

$X = 0,1$ e $\tau = 0,5$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,52983	0,83707	0,87555
$N_P = 120$	0,52888	0,83760	0,87556
$N_P = 190$	0,52886	0,83771	0,87571
$N_P = 260$	0,52904	0,83760	0,87563
$N_P = 330$	0,52910	0,83753	0,87561
$N_P = 400$	0,52911	0,83755	0,87564

Tabela 6.26: Convergência da temperatura adimensional transiente $\theta(X, Y, \tau)$ via filtro recursivo para $Pe=1$ em $X=0,1$ e $\tau = 1$.

$X = 0,1$ e $\tau = 1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,53230	0,84577	0,88751
$N_P = 120$	0,53207	0,84590	0,88751
$N_P = 190$	0,53206	0,84593	0,88755
$N_P = 260$	0,53210	0,84591	0,88753
$N_P = 330$	0,53212	0,84589	0,88753
$N_P = 400$	0,53212	0,84589	0,88754

6.8.3 Solução em Regime Permanente para o Canal com parede Corrugada

Como observado anteriormente, as melhores taxas de convergência para o presente problema foram obtidas através da metodologia que considera a utilização de um filtro recursivo puramente condutivo (Seção 6.6). Desta forma, no presente caso-teste, que considera o problema conjugado para um canal com paredes corrugadas, será empregada apenas esta metodologia, permitindo assim que diferentes geometrias para a corrugação do canal sejam avaliadas e comparadas entre si.

Levando-se em consideração a expressão da corrugação, conforme a Eq.(6.3), a primeira geometria a ser analisada utiliza uma amplitude $\alpha_c = 0.1$, um número de comprimento de ondas $\lambda_c = 6$, uma defasagem de $\varepsilon_c = \pi/2$ e $i_{tot} = 1$ (o que garante ao canal corrugado uma geometria puramente senoidal). Novamente, será considerada a água como meio fluido e o acrílico como meio sólido, com suas respectivas propriedades físicas definidas na Seção 6.8.1. Além disso, para o número de Peclet considerou-se $Pe = 0,25$. Na Figura 6.28 é possível visualizar esta geometria e as condições de contorno consideradas são apresentadas na Eq. (6.73).

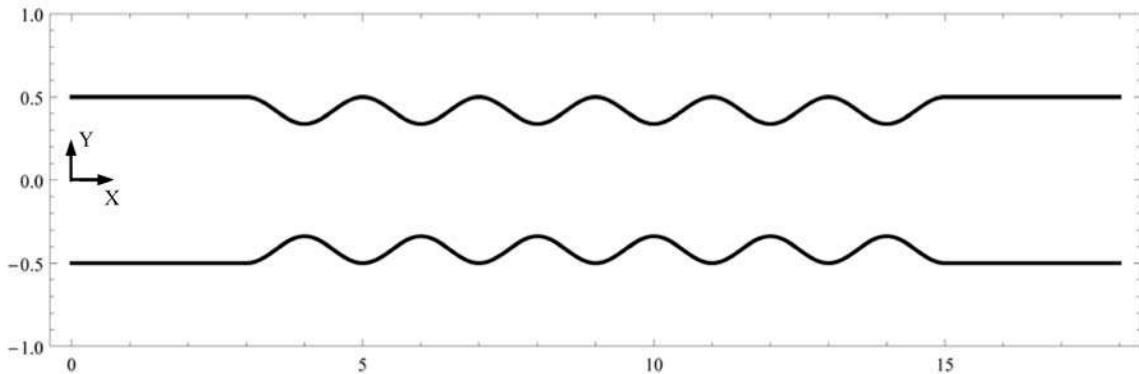


Figura 6.24: Geometria para um canal corrugado e substrato com $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=6$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$.

$$\left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial X} \right|_{X=\frac{L_x}{L_y}} = 0; \quad \theta(X, 1) = 1; \quad \left. \frac{\partial \theta(X, Y)}{\partial Y} \right|_{Y=0} = 0; \quad (6.73)$$

Apresentando inicialmente os resultados para o filtro puramente condutivo, foi necessária uma ordem de truncamento maior que em relação ao exemplo anterior, para garantir convergência de mesma ordem dos resultados. Sendo assim, a ordem de truncamento utilizada foi $N_{P,aux} = 600$ para o problema de autovalor auxiliar e $N_{P,FC} = 550$ para o problema de autovalor original. Na Tabela 6.27 apresenta-se a análise de convergência de cinco autovalores distintos do problema de autovalor com coeficientes variáveis, utilizados para a solução do filtro puramente condutivo.

Tabela 6.27: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=0,25$.

Autovalores		μ_1	μ_5	μ_{10}	μ_{25}	μ_{50}
	Ordem					
$N_{P,aux} = 150$		0,9700	2,7873	3,6401	5,8357	9,1064
$N_{P,aux} = 300$		0,9681	2,7834	3,6358	5,8322	8,1111
$N_{P,aux} = 420$		0,9675	2,7764	3,6336	5,8308	8,1062
$N_{P,aux} = 500$		0,9674	2,7740	3,6251	5,8287	8,0934
$N_{P,aux} = 560$		0,9673	2,7736	3,6224	5,8193	8,0879
$N_{P,aux} = 600$		0,9672	2,7735	3,6211	5,8149	8,0863

A convergência dos resultados desse problema filtro são apresentados na Tabela 6.28 e Tabela 6.29. Como é possível observar, para $N_{P,FC} = 550$ obtém-se uma convergência de ± 1 no quarto algarismo significativo tanto para $X = 1$ quanto para $X = 5$.

Tabela 6.28: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=0,25$ em $X=1$.

$X = 1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_{P,FC} = 100$	0,18225	0,20640	0,40903
$N_{P,FC} = 200$	0,18139	0,20521	0,40864
$N_{P,FC} = 300$	0,18164	0,20647	0,40798
$N_{P,FC} = 450$	0,18154	0,20803	0,40792
$N_{P,FC} = 530$	0,18142	0,20782	0,40809
$N_{P,FC} = 550$	0,18149	0,20772	0,40811

Tabela 6.29: Convergência da solução puramente condutiva $\theta_{FC}(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes variáveis para $Pe=0,25$ em $X=5$.

$X = 5$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_{P,FC} = 100$	0,68617	0,71380	0,83712
$N_{P,FC} = 200$	0,68595	0,71291	0,83761
$N_{P,FC} = 300$	0,68540	0,71285	0,83715
$N_{P,FC} = 450$	0,68580	0,71355	0,83749
$N_{P,FC} = 530$	0,68587	0,71336	0,83752
$N_{P,FC} = 550$	0,68578	0,71346	0,83753

Com solução do problema puramente condutivo tendo sido obtida, é possível apresentar agora os resultados obtidos para a temperatura adimensional original, calculados via um problema de autovalor com coeficientes constantes ($N_P = 400$) e com reordenamento sequencial, assim como a comparação com os resultados do COMSOL. Estes dados estão ilustrados nas Tabela 6.30, Tabela 6.31 e Tabela 6.32.

Analizando os resultados do problema original, mais uma vez se observa uma convergência rápida dos resultados. Com uma ordem de truncamento de $N_P = 40$ já se obtém uma convergência de ± 2 no quarto algarismo significativo em relação ao resultado para $N_P = 400$, mostrando mais uma vez a vantagem da utilização da solução com o filtro recursivo. A comparação com os resultados fornecidos pelo COMSOL resultaram em um desvio relativo abaixo de 0,5% para os pontos analisados, indicando assim uma boa concordância entre os resultados.

Tabela 6.30: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=0,25$ em $X=1$.

$X = 1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 50$	0,16364	0,19294	0,40148
$N_P = 120$	0,16363	0,19294	0,40166
$N_P = 190$	0,16370	0,19295	0,40163
$N_P = 260$	0,16378	0,19303	0,40167
$N_P = 330$	0,16372	0,19309	0,40164
$N_P = 400$	0,16371	0,19308	0,40166
COMSOL	0,16433	0,19343	0,40248
Desvio Relativo	0,38%	0,18%	0,20%

Tabela 6.31: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=0,25$ em $X=5$.

$X = 5$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 40$	0,65299	0,68514	0,82262
$N_P = 100$	0,65296	0,68469	0,82268
$N_P = 220$	0,65286	0,68479	0,82282
$N_P = 330$	0,65287	0,68486	0,82281
$N_P = 380$	0,65298	0,68496	0,82277
$N_P = 400$	0,65294	0,68503	0,82274
COMSOL	0,65096	0,68343	0,82339
Desvio Relativo	0,30%	0,23%	0,08%

Tabela 6.32: Convergência e comparação da temperatura adimensional $\theta(X, Y)$ obtida com problema de autovalor de coeficientes constantes e reordenamento sequencial com filtro puramente condutivo para $Pe=0,25$ em $X=10$.

$X = 10$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
$N_P = 40$	0,89601	0,90509	0,94768
$N_P = 100$	0,89594	0,90503	0,94794
$N_P = 220$	0,89595	0,90499	0,94784
$N_P = 330$	0,89594	0,90497	0,94780
$N_P = 380$	0,89590	0,90497	0,94781
$N_P = 400$	0,89593	0,90496	0,94783
COMSOL	0,89278	0,90368	0,94691
Desvio Relativo	0,35%	0,14%	0,10%

A utilização do reordenamento sequencial nesta solução garantiu mais uma vez uma melhora na taxa de convergência dos resultados, apresentando um impacto mais significativo na convergência do que a observada para o caso do canal sinuoso. Embora os resultados para o caso com reordenamento clássico não tenham sido apresentados, por motivo de brevidade, apresenta-se na Figura 6.25 e na Figura 6.26 uma comparação da convergência da solução com reordenamento pela soma dos quadrados dos autovalores e com reordenamento pela diagonal da matriz de coeficientes para dois pontos distintos. Como é possível observar, a convergência para a solução com reordenamento sequencial se apresenta mais rápida e com menos oscilações em relação à solução com reordenamento clássico.

Por fim, apresenta-se na Figura 6.27 as isotermas obtidas a partir da metodologia apresentada na Seção 6.6.

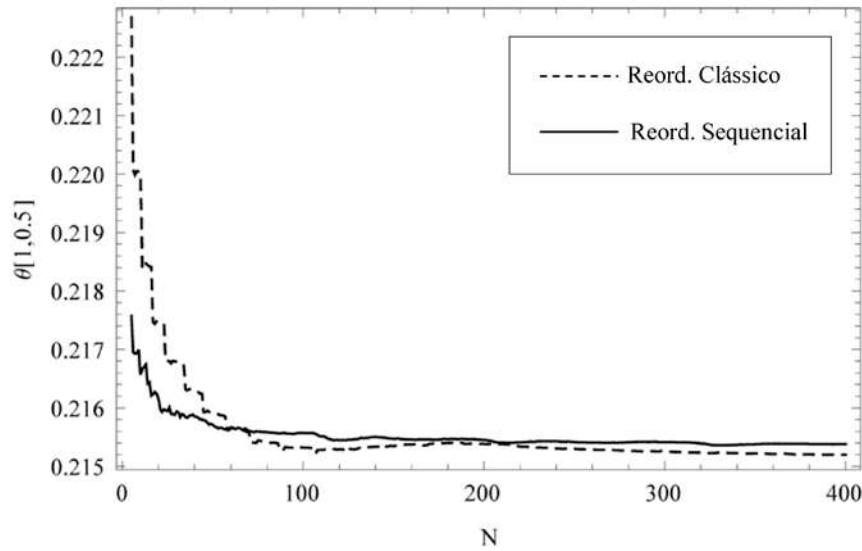


Figura 6.25: Convergência da temperatura adimensional no ponto $(X;Y)=(1;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento sequencial (linha cheia) e com reordenamento clássico (linha tracejada).

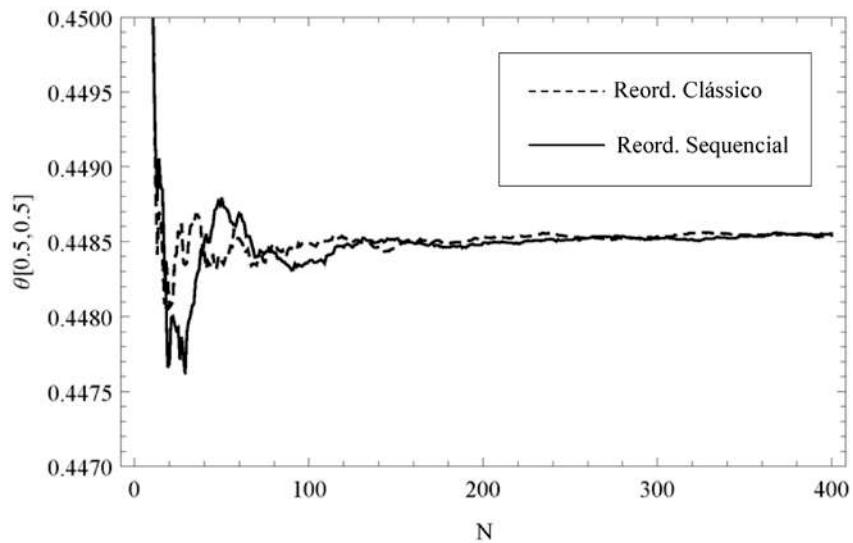


Figura 6.26: Convergência do potencial no ponto $(X;Y)=(15;0,5)$ considerando a metodologia da Seção 6.6 com reordenamento sequencial (linha cheia) e com reordenamento clássico (linha tracejada).

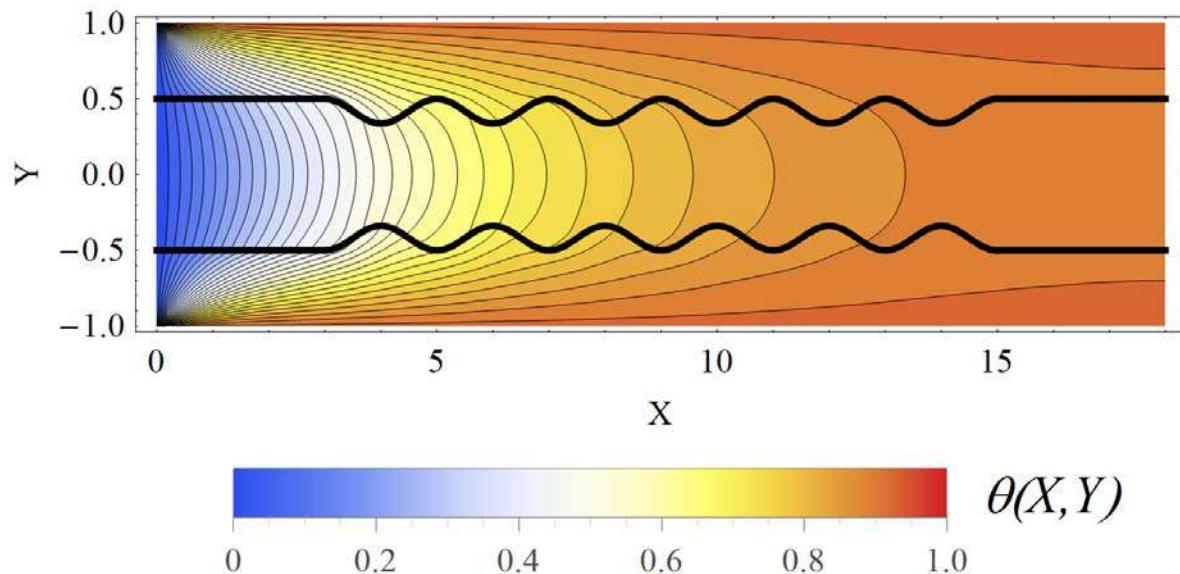


Figura 6.27: Isotermas da solução do problema conjugado com um canal corrugado com 6 corrugações obtidas a partir da metodologia da Seção 6.6 com $Pe=0,25$.

Para se obter os resultados do COMSOL nesta seção, fez-se um estudo de malha com o intuito de se averiguar a convergência dos resultados em função do tamanho dos elementos de malha utilizados. Sendo assim, utilizou-se cinco malhas com tamanhos máximos de elementos diferentes, conforme discriminado na Tabela 6.33.

Tabela 6.33: Tamanho máximo dos elementos das respectivas malhas utilizadas.

Definição	Tamanho máximo dos elementos
Malha 1	0.8
Malha 2	0.4
Malha 3	0.2
Malha 4	0.1
Malha 5	0.05

Como pode ser visto, a malha 5 é a malha mais fina, sendo seu tamanho máximo 16 vezes menor do que o tamanho máximo do elemento da malha 1. Uma comparação com os resultados obtidos em diferentes pontos do domínio para cada uma dessas malhas é apresentada na Tabela 5.34, onde observa-se uma variação máxima de ± 1 no terceiro algarismo significativo em $X=1$ e ± 1 no quarto algarismo significativo em $X=5$ e $X=10$. Ou seja, a utilização da malha mais refinada fornece resultados para a temperatura adimensional convergidos no mínimo no terceiro dígito significativo, nesses pontos.

Tabela 6.34: Análise de convergência entre as malhas utilizadas no COMSOL

$X = 1$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
Malha 1	0,16452	0,19342	0,40315
Malha 2	0,16475	0,19374	0,40316
Malha 3	0,16432	0,19342	0,40254
Malha 4	0,16433	0,19340	0,40234
Malha 5	0,16433	0,19343	0,40248
$X = 5$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
Malha 1	0,65100	0,68343	0,82337
Malha 2	0,65108	0,68350	0,82344
Malha 3	0,65096	0,68346	0,82341
Malha 4	0,65095	0,68346	0,82338
Malha 5	0,65096	0,68343	0,82339
$X = 10$	$Y = 0,1$	$Y = 0,4$	$Y = 0,7$
Malha 1	0,89278	0,90367	0,94687
Malha 2	0,89280	0,90369	0,94688
Malha 3	0,89278	0,90367	0,94689
Malha 4	0,89278	0,90368	0,94691
Malha 5	0,89278	0,90368	0,94691

Comparando ainda a solução obtida via GITT e a obtida através do COMSOL, observa-se, novamente, uma concordância muito boa conforme é possível verificar na Figura 6.28, onde se apresenta a distribuição de temperatura, para as duas soluções, ao longo do eixo X para $Y = 0,4$, $Y = 0,5$ e $Y = 0,6$. Analisando agora a distribuição de temperatura ao longo do eixo Y para $X = 5$ (Figura 6.29), ainda se observa um boa concordância dos resultados, embora fique perceptível, nessa escala ampliada em relação

ao gráfico anterior, uma pequena discrepância destes perfis de temperatura na interface ($Y = 0,5$).

Para que uma avaliação mais global do desvio relativo entre as duas soluções possa ser feita, apresenta-se na Figura 6.30 os valores dos desvios relativos percentuais ao longo de todo o domínio. Como pode ser observado, os maiores desvios relativos se encontram próximos às regiões de interface no início do canal, podendo chegar a valores da ordem de 1,5%, valor esse pouco maior do que os obtidos para os pontos das Tabela 6.30, Tabela 6.31 e Tabela 6.32. Na região de interface das corrugações, observa-se um desvio relativo maior na primeiras corrugação, podendo chegar a valores de 1%. Após a segunda corrugação o desvio relativo máximo para essas regiões não ultrapassa 0,5%. Já no meio sólido, em sua maior parte, observa-se desvios relativos abaixo de 0,25% e no meio fluido, desvios relativos abaixo de 0,5%.

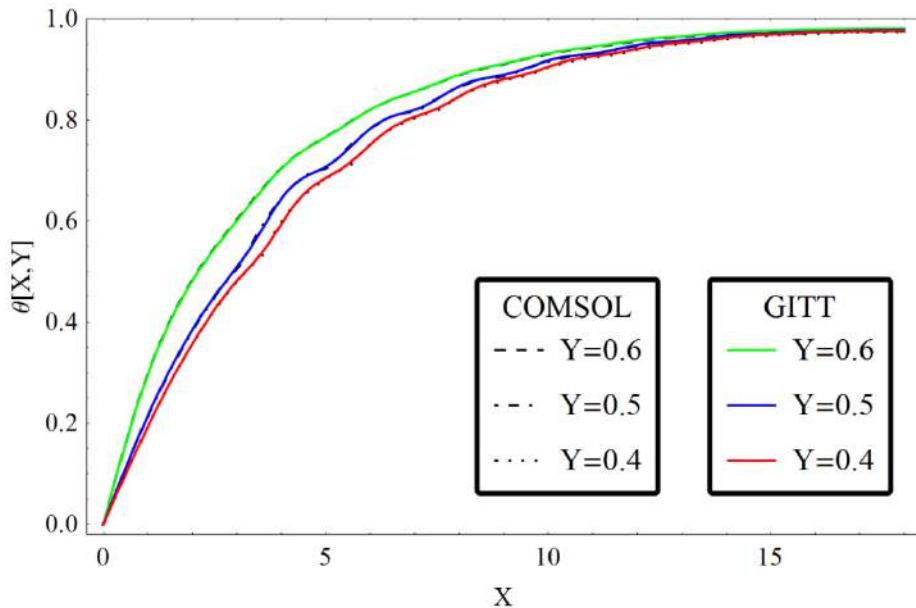


Figura 6.28: Comparação entre o resultado da metodologia da Seção 6.6 e os obtidos pelo COMSOL para $Y=0,4$, $Y=0,5$ e $Y=0,6$ com $Pe=0,25$.

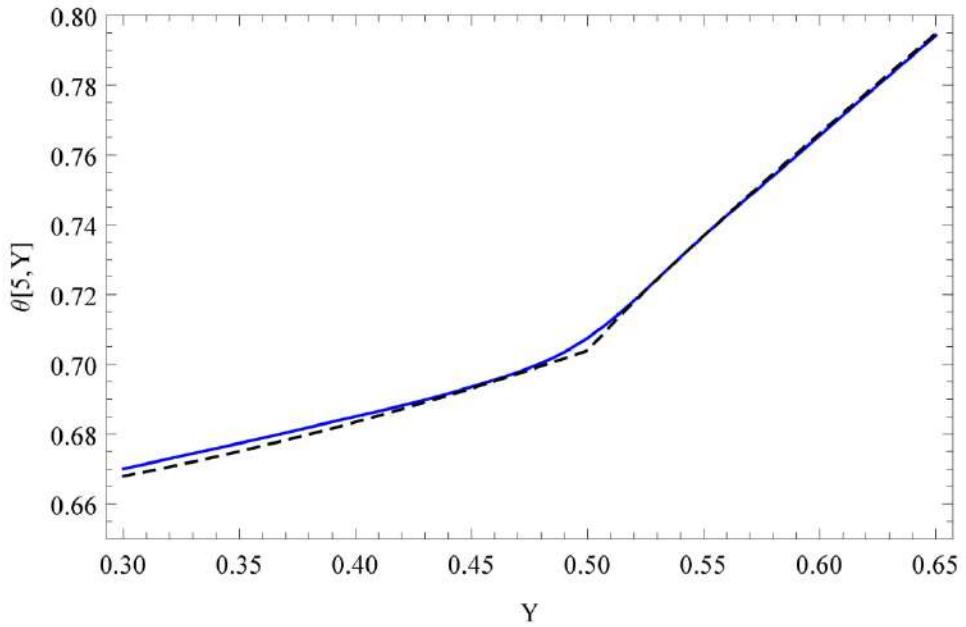


Figura 6.29: Comparação entre o resultado da metodologia da Seção 6.6 (linha azul) e os obtidos pelo COMSOL (linha tracejada) para $X=0,5$ com $Pe=0,25$.

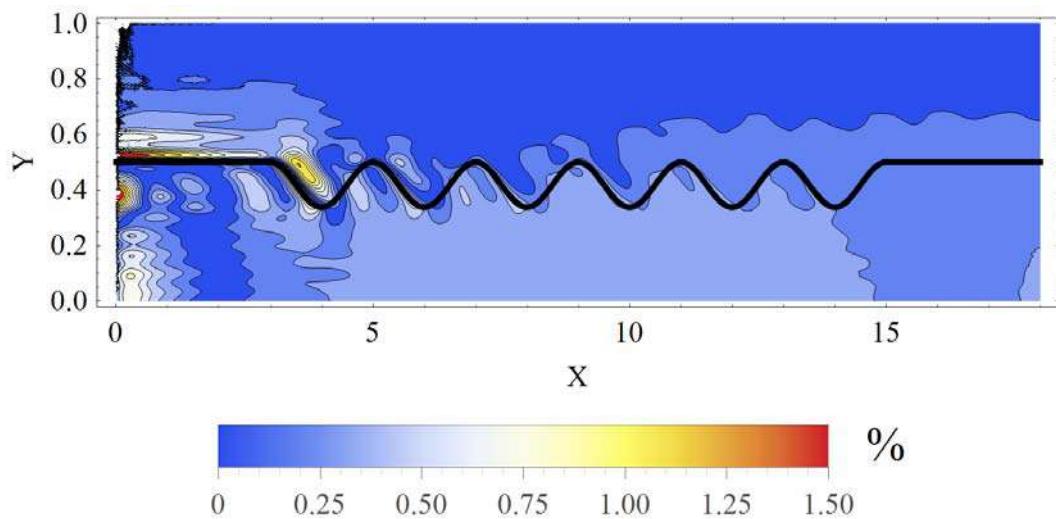


Figura 6.30: Campo de desvio relativo entre a solução via GITT e a solução do COMSOL dado em porcentagem para um canal com 6 corrugações com $Pe=0,25$.

A seguir apresenta-se os resultados do problema conjugado para outras duas geometrias de canal corrugado com substrato retangular, com quatro e duas corrugações conforme ilustradas na Figura 6.31 e Figura 6.32 respectivamente.

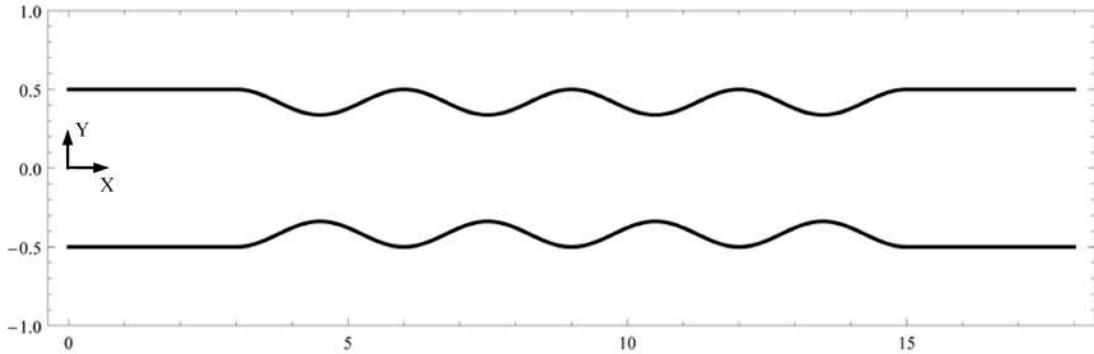


Figura 6.31: Geometria para um canal corrugado e substrato com $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=4$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$.

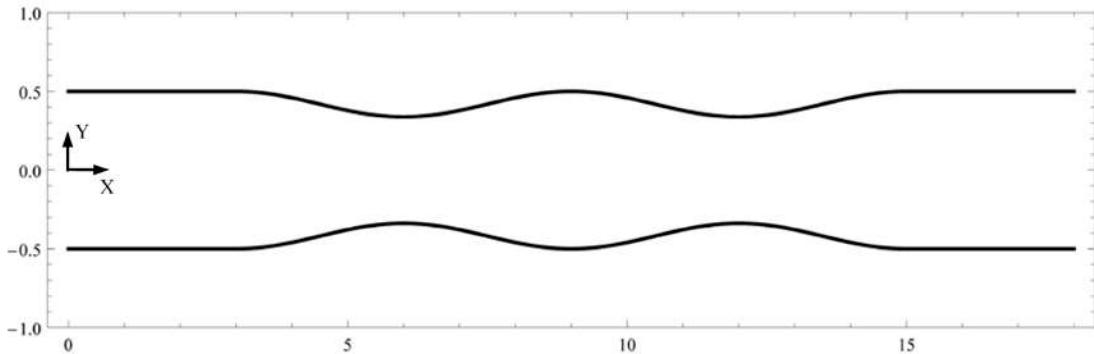


Figura 6.32: Geometria para um canal corrugado com $\alpha_c=0.1$, $\lambda_c=2$, $\varepsilon_c=\pi/2$ e $i_{tot}=1$.

Os campos de temperatura obtidos para os dois casos são apresentados na Figura 6.33 e Figura 6.34. A convergência desses resultados não serão apresentadas uma vez que elas são muito similares à convergência para o caso com 6 corrugações. No entanto, apresenta-se na Figura 6.35 e na Figura 6.36 o campo de desvio relativo obtido a partir da

comparação com os dados do COMSOL. Apesar dos valores máximos de desvio relativo não se mostrarem alterados quando comparados com a Figura 6.30, percebe-se claramente uma diminuição dos mesmos para a região próxima à interface da primeira corrugação, indicando a existência de uma melhor aderência entre os resultados para o canal com corrugações mais suaves.

Com todos os resultados tendo sido apresentados, é possível então afirmar que a metodologia proposta neste trabalho conseguiu cumprir seu objetivo, o qual consistia na solução de problemas de transferência de calor convectivos-difusivos com formulação em domínio único considerando geometrias de microcanais bidimensionais. Dois tipos de geometria de canal, sinuoso e corrugado, foram considerados neste estudo e os resultados obtidos foram comparados com os resultados provenientes da plataforma comercial de elementos finitos COMSOL, resultando em boas concordâncias entre ambos.

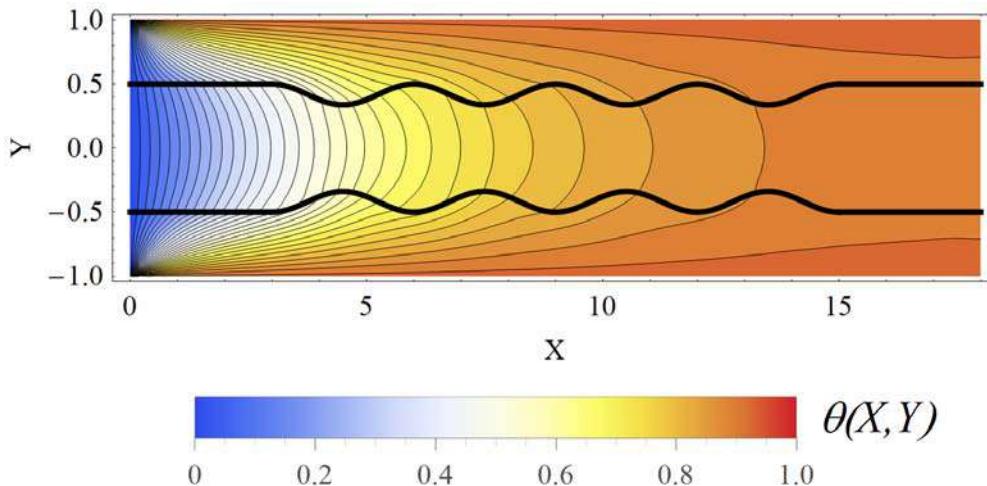


Figura 6.33: Isotermas da solução do problema com um canal corrugado com 4 corrugações obtidas a partir da metodologia da Seção 6.6 com $Pe=0,25$.

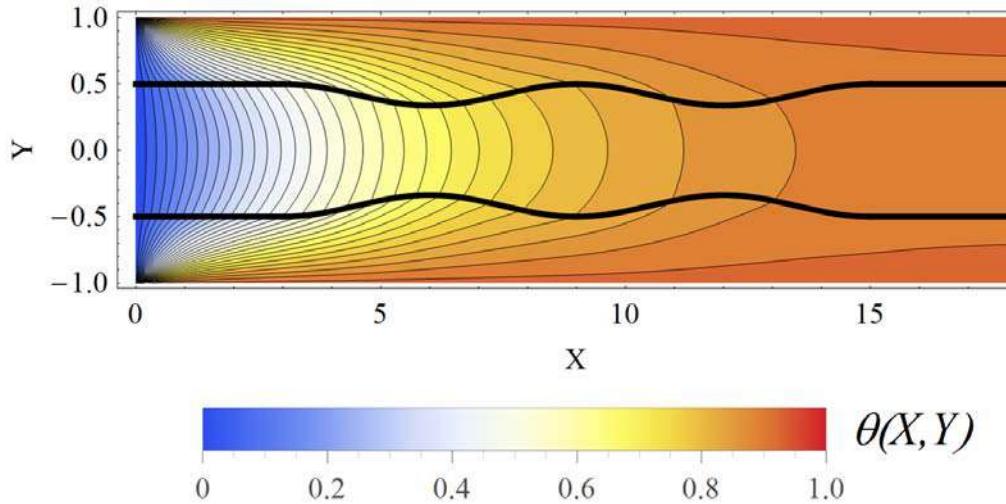


Figura 6.34: Isotermas da solução do problema com um canal corrugado com 2 corrugações obtidas a partir da metodologia da Seção 6.6 com $Pe=0,25$.

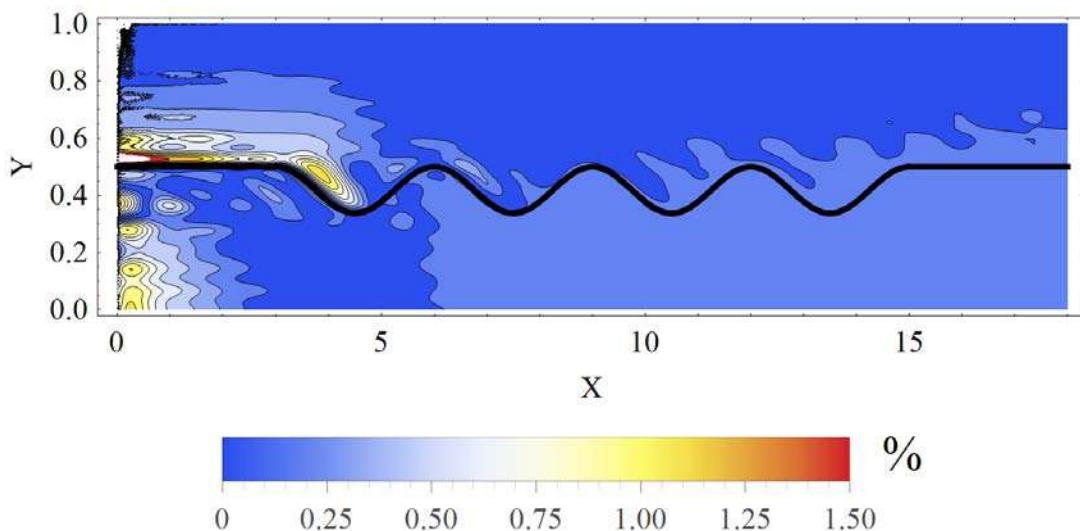


Figura 6.35: Campo de desvio relativo entre a solução via GITT e a solução do COMSOL dado em porcentagem para um canal com 4 corrugações.

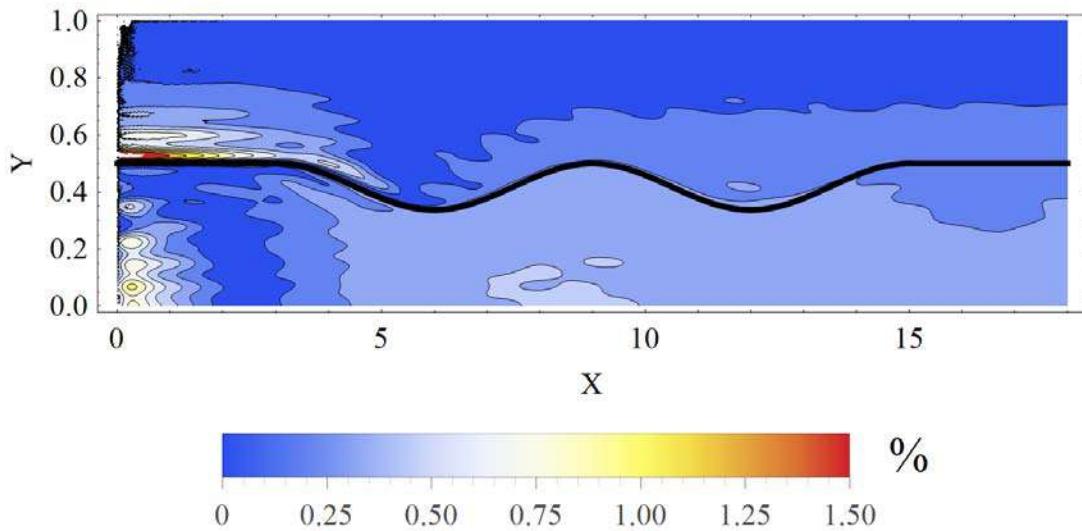


Figura 6.36: Campo de desvio relativo entre a solução via GITT e a solução do COMSOL dado em porcentagem para um canal com 2 corrugações.

7 CONCLUSÕES E PROPOSTA DE TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho dedicou-se à extensão da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) em associação com a reformulação em domínio único, para a solução de problemas conjugados de convecção-condução considerando geometrias complexas de microcanais. Na primeira parte do estudo, buscou-se generalizar a metodologia desenvolvida por Knupp (2013), para o caso de múltiplas correntes e fluidos em camadas paralelas de subestratos, mas com variações geométricas e de propriedades termofísicas e demais coeficientes apenas em uma única direção coordenada. A segunda parte do trabalho concentrou-se em geometrias complexas, aqui entendidas como aquelas que envolvem variações geométricas e de propriedades termofísicas e termos fonte em todas as variáveis espaciais do problema.

Na primeira fase da pesquisa foi dada ênfase ao problema conjugado de transferência de calor com condução axial, múltiplas correntes e escoamento de fluidos imiscíveis, com campos de velocidade completamente desenvolvidos. Exemplos com até doze interfaces sólido-líquido e/ou líquido-líquido foram tratados via problema de autovalor não-clássico e via transformação integral parcial, obtendo-se resultados com excelente concordância para as duas soluções. A primeira solução com problema de autovalor não-clássico demonstrou ser menos suscetível ao número de interfaces em função da ordem de truncamento utilizada, ou seja, sua convergência não mostrou uma alteração significativa com o aumento do número de interfaces. Além disso, a convergência da temperaturas pôde ser melhor avaliada em cada região do domínio através dos gráficos de resíduo relativo, os quais poderão servir para o aprimoramento da metodologia a fim de se garantir melhores taxas de convergência em regiões específicas do domínio.

Na segunda fase da pesquisa, duas situações de canais com geometrias apresentando variações bidimensionais ao longo do domínio, mas de natureza distinta, mais especificamente canal sinuoso e canal corrugado, foram estudadas. Três metodologias

diferentes, considerando a transformação integral total da equação da energia, foram avaliadas para a solução do problema em regime permanente, levando-se em consideração a geometria sinuosa inicialmente. O objetivo foi avaliar qual dessas três metodologias apresentaria as melhores taxas de convergência. O esquema de solução basal, de aplicação mais imediata, é aquele que adota apenas um filtro de condição de contorno e um problema de autovalor com coeficientes constantes. No segundo esquema de solução buscou-se analisar a aceleração de convergência que seria obtida a partir de um problema de autovalor com coeficientes variáveis, aqui levando-se em conta apenas o coeficiente variável dos temos difusivos, $K(X, Y)$, e novamente somente com filtro simples de condição de contorno. E por fim, o terceiro esquema apresenta uma solução via filtro recursivo, que leva em conta a solução em regime permanente do problema puramente difusivo como filtro para a solução em regime transiente do problema completo. Os resultados de cada uma dessas metodologias foram comparados com os obtidos através da plataforma comercial COMSOL, todas com excelente concordância entre si e com a solução puramente numérica. Os resultados obtidos mostraram que a solução de melhor taxa de convergência, e portanto que exige as menores ordens de truncamento e menor tempo de processamento, foi a solução via filtro recursivo.

O presente trabalho também permitiu avaliar um esquema de reordenamento dos autovalores, em substituição ao reordenamento clássico pela soma dos quadrados dos autovalores, consistindo basicamente no ordenamento em ordem crescente da diagonal da matriz F , a qual foi denominada como reordenamento sequencial. A convergência das temperaturas para os dois esquemas de reordenamento foi analisada comparativamente e em todos os casos estudados o reordenamento sequencial apresentou convergências mais rápidas, sendo portanto uma forma de reordenamento mais indicada.

Soluções transientes para o mesmo problema também foram obtidas via os dois esquemas de problema de autovalor com coeficientes constantes e de filtro recursivo. As duas soluções apresentaram resultados concordantes, embora, novamente, a solução via filtro recursivo tenha apresentado uma convergência mais rápida para todos os instantes de tempo analisados.

Com a melhor metodologia, dentre as consideradas, tendo sido definida, o problema conjugado envolvendo um canal corrugado foi então analisado. Foram consideradas, inicialmente, três geometrias diferentes para as corrugações, modificando-se apenas o comprimento de onda das corrugações, resultando em canais com 6, 4 e 2 corrugações. Todos os resultados para os campos de temperatura das três geometrias foram comparados com resultados obtidos via COMSOL, resultando em desvios relativos máximos de 1,5% para as ordens de truncamento e refinamento de malhas aqui adotados.

Os resultados obtidos no presente trabalho confirmam que a Técnica da Transformada Integral Generalizada em esquema de transformação total e com formulação em domínio único, é adequada à solução de problemas conjugados com variação multidimensional de geometria e propriedades. No entanto, trabalhos futuros devem focar na aceleração da convergência das expansões da transformação total, a fim de diminuir o custo computacional. Uma alternativa a ser considerada é a generalização do problema de autovalor não-clássico, semelhante ao empregado na primeira fase do estudo, mas levando em conta as variações bidimensionais de geometria e propriedades. Outra proposta consiste na utilização de problema de autovalores não-lineares, com a inclusão dos termo convectivos da equação da energia em seu interior, conforme descrito em Cotta et al. (2016 e), carregando assim mais informação sobre o problema original para o problema de autovalor e, consequentemente, garantindo taxas de convergências melhores para a solução. Recentemente, no trabalho de Cotta et al. (2016 c) propôs-se a aplicação da técnica de balanço integral diretamente no problema de autovalor, com o intuito de acelerar a convergência do próprio problema de autovalor. O resultado foi uma redução considerável nas ordens de truncamento das expansões e mesmo uma redução na propagação de erros das etapas numéricas. No entanto, esta técnica foi desenvolvida para aplicações em transformações integrais de problemas unidimensionais, ou seja, o balanço integral foi aplicado em apenas uma direção espacial. Como continuidade do presente trabalho, sugere-se então o desenvolvimento desta nova metodologia para transformações em problemas multidimensionais, resultando na aplicação de um balanço integral em duas ou mais direções para o problema de autovalor.

8 ANEXO A

Os coeficientes com variação espacial considerados para a verificação das metodologias do Capítulo 5 foram:

$$W(Y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq Y \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (8.1a)$$

$$U(Y) = \begin{cases} U_f(Y), & 0 \leq Y \leq 1/2 \\ 0, & 1/2 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (8.1b)$$

$$K(Y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq Y \leq 1/2 \\ 1/4, & 1/2 < Y \leq 1 \end{cases} \quad (8.1c)$$

onde $U_f(Y)$ é a equação do perfil de velocidade completamente desenvolvido de um escoamento monofásico entre placas paralelas, apresentado em Knupp et al. (2013).

É importante notar que neste exemplo, devido à condição de simetria existente, apenas uma interface entre a região sólido-fluido se encontra no interior do domínio.

8.1 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR NÃO-CLÁSSICO

Para que uma comparação mais justa destes resultados fosse feita, as mesmas ordens de truncamento ($N_{P,aux} = 50$ e $N_p = 25$) utilizadas por Knupp et al. (2013) também foram consideradas nesta verificação.

Sendo assim, os primeiros resultados a serem apresentados são relativos à análise de convergência dos autovalores do problema de autovalor não-clássico (Seção 5.1). Como pode ser visto na Tabela 8.1, a convergência dos cinco primeiros autovalores é apresentada para diferentes valores de $N_{P,aux}$, resultando em uma convergência de ± 2 no quarto

algarismo significativo. Através do mesmo problema algébrico (Eq.(5.13a)) utilizado para determinar os autovalores é possível determinar a autofunção transformada, a qual, através da Eq.(5.10b), fornece a autofunção original do problema de autovalor não-clássico.

Tabela 8.1: Convergência dos autovalores μ_i do problema de autovalor não-clássico para uma condição do primeiro tipo na parede externa com $Pe=0,025$.

Autovalores		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
μ_i	Ordem					
$N_{P,aux} = 10$		0,1518	0,3671	0,4261	0,5414	0,5833
$N_{P,aux} = 20$		0,1515	0,3664	0,4252	0,5403	0,5819
$N_{P,aux} = 30$		0,1514	0,3662	0,4249	0,5400	0,5815
$N_{P,aux} = 40$		0,1514	0,3661	0,4248	0,5398	0,5813
$N_{P,aux} = 50$		0,1514	0,3660	0,4247	0,5397	0,5811

Na Figura 8.1 são apresentados os perfis de temperatura para diferentes valores de Z ao longo do domínio. No meio sólido, como pode ser visto, o comportamento do perfil de temperatura não é linear como observado em problemas simples de condução de calor, uma vez que os efeitos da condução axial se encontram agora presentes também na parede.

Após a determinação dos perfis de temperatura, é possível agora fazer uma comparação com os resultados apresentados em Knupp et al. (2013). Esta por sua vez é apresentada na Tabela 8.2 e Tabela 8.3 para $ZPe = 0,1$ e $ZPe = 0,2$ respectivamente. Como é possível observar, para $ZPe = 0,1$ obteve-se uma convergência de ± 2 no quarto algarismo significativo para $N_P = 25$. A comparação com os resultados de Knupp mostraram uma concordância de ± 1 no quarto algarismo significativo. Já para o caso de $ZPe = 0,2$, obteve-se uma convergência de ± 1 no sexto algarismo significativo para $N_P = 25$. Como esperado para uma solução via GITT, os resultados mais longe da condição inicial ($Z = 0$) tendem a

convergir mais rápido. Por fim, a comparação com os resultados de Knupp mostraram, novamente, uma concordância de ± 1 no quarto algarismo significativo, garantindo assim a verificação do código para esta presente metodologia.

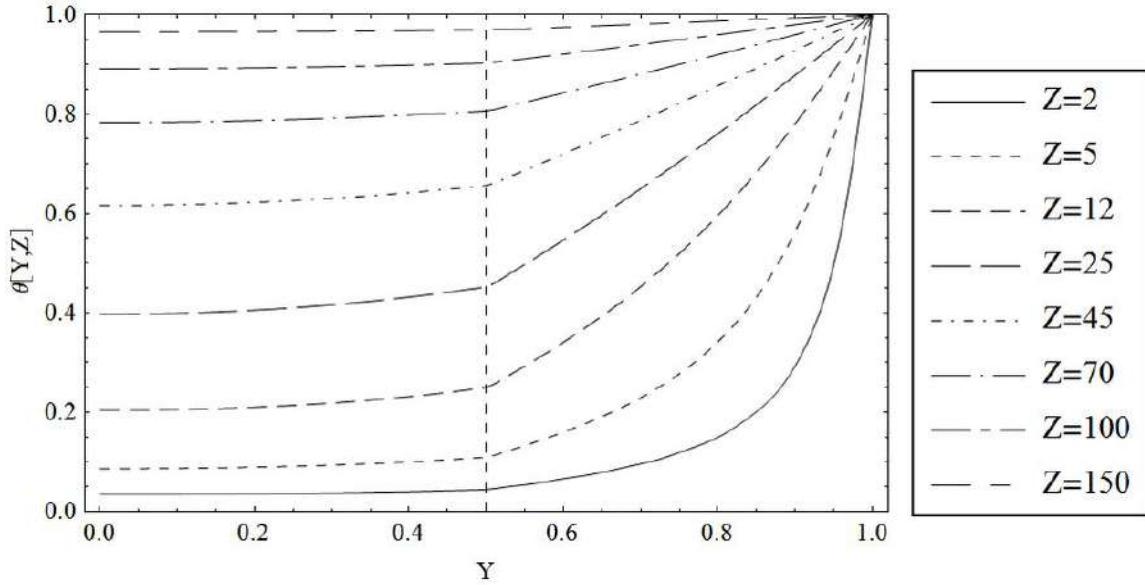


Figura 8.1: Perfis de temperatura obtidos através do problema de autovalor não-clássico com $Pe=0,025$.

Tabela 8.2: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos considerando problema de autovalor não-clássico para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$.

$ZPe = 0,1$		$Y = 0,3$		$Y = 0,6$		$Y = 0,9$	
Ordem	Knupp et al. (2013)	Seção 5.1	Knupp et al. (2013)	Seção 5.1	Knupp et al. (2013)	Seção 5.1	
$N_P = 5$	0,07429	0,074293	0,1515	0,151503	0,5299	0,52994	
$N_P = 10$	0,07397	0,073973	0,1310	0,131028	0,4914	0,491381	
$N_P = 15$	0,07500	0,074999	0,1297	0,129702	0,4941	0,494115	
$N_P = 20$	0,07501	0,075012	0,1294	0,129399	0,4947	0,494747	
$N_P = 25$	0,07499	0,074990	0,1294	0,12937	0,4947	0,494681	

Tabela 8.3: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos considerando problema de autovalor não-clássico para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.

$ZPe = 0,2$	$Y = 0,3$		$Y = 0,6$		$Y = 0,9$	
Ordem	Knupp et al. (2013)	Seção 5.1	Knupp et al. (2013)	Seção 5.1	Knupp et al. (2013)	Seção 5.1
$N_P = 5$	0,1481	0,148134	0,2488	0,248756	0,6999	0,699913
$N_P = 10$	0,1483	0,148295	0,2450	0,245032	0,6945	0,694546
$N_P = 15$	0,1483	0,148337	0,2450	0,244973	0,6945	0,694602
$N_P = 20$	0,1483	0,148337	0,2450	0,244971	0,6945	0,694606
$N_P = 25$	0,1483	0,148337	0,2450	0,244971	0,6945	0,694605

Em um problema no qual a condução axial de calor é desprezada, os maiores resíduos relativos são observados na região da interface e no meio fluido, dependendo da altura ZPe observada. Além disso, é possível verificar que para maiores ordens de truncamento os resíduos relativos tendem a diminuir mais rapidamente no meio sólido do que no meio fluido, indicando uma convergência mais rápida dos resultados no meio sólido. No entanto, não é isso que se observa quando os efeitos de condução axial estão presentes no modelo matemático.

Para ilustrar valores do resíduo relativo deste problema, obtidos a partir da Eq. (5.23), dois gráficos apresentam a sua variação ao longo de Y , para dois valores de N_P diferentes, em $ZPe = 0,1$ (Figura 8.2) e $ZPe = 0,2$ (Figura 8.3). Como pode ser observado na Figura 8.2, para uma ordem de truncamento $N_P = 22$ os resíduos relativos apresentam possuir uma distribuição semelhante, quase simétrica, entre o meio fluido e o meio sólido, com um valor relativamente baixo para região da interface. No entanto, para $N_P = 25$ os resíduos relativos decrescem a uma taxa maior no meio fluido que no meio sólido, indicando que a região com convergência mais lenta para o presente problema seja a região sólida. O mesmo efeito é observado na Figura 8.3. Nesta, é possível verificar que os valores dos

resíduos relativos são 3 ordens de grandeza menores, uma vez que o ponto $ZPe = 0,2$ se encontra mais afastado da condição inicial do problema.

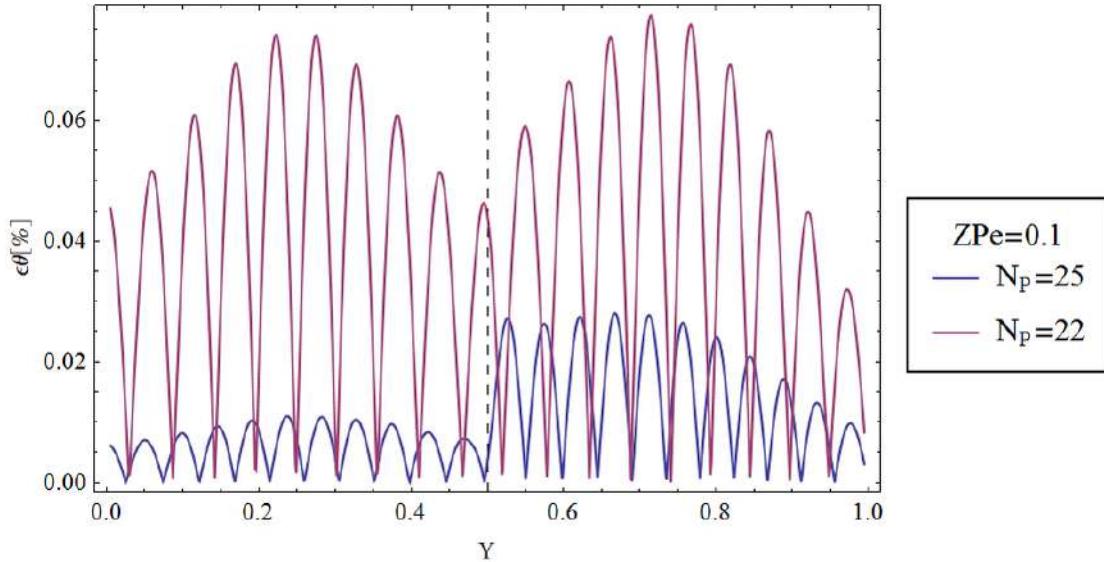


Figura 8.2: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,1.$

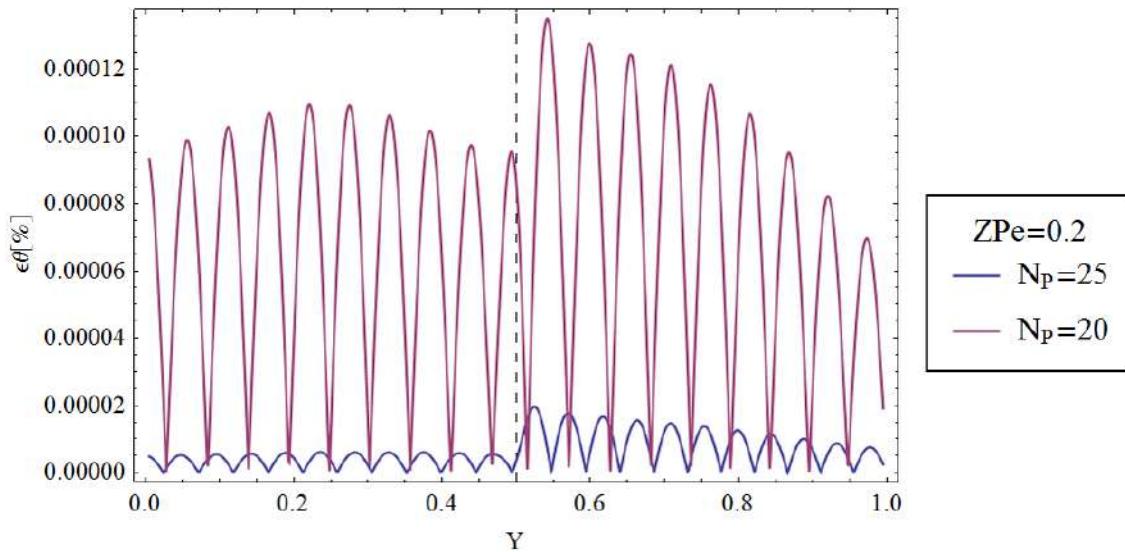


Figura 8.3: Resíduo relativo da temperatura ao longo de Y para diferentes valores de N_P em $ZPe_{fl}=0,2.$

Como pôde ser observado esse tipo de análise se mostra de grande utilidade para uma avaliação mais global da convergência ao longo de todo o domínio do problema.

8.2 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO VIA TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL PARCIAL

Mais uma vez, para garantir uma comparação justa entre os resultados adotaram-se as mesmas ordens de truncamento ($N_{P,aux} = 60$ e $N_p = 50$) utilizadas por Knupp et al. (2013) para esta verificação.

A Tabela 8.4 apresenta uma breve análise de convergência dos cinco primeiros autovalores do problema de autovalor para esta metodologia, apresentada na Seção 5.2, após solução do problema de autovalor algébrico definido pela Eq. (5.19). Para a ordem de truncamento máxima de $N_{P,aux} = 60$, a convergência se dá no terceiro dígito significativo dos autovalores aqui mostrados.

Com aos autovalores e autofunções definidas, é necessário agora determinar o potencial transformado $\bar{\theta}_i(Z, t)$ através do sistema de EDP's da Eq.(5.20a), cuja solução pode ser facilmente obtida através da função *NDSolve* do programa *Mathematica®*. Como dito anteriormente, o resultado de interesse é aquele referente ao regime permanente. O tempo necessário para que a solução pseudotransiente atinja o regime permanente, no entanto, pode variar de um problema para outro. Para o problema em questão, um tempo adimensional de $t = 10$ foi mais que suficiente para garantir esta condição.

Sendo assim, para este determinado instante de tempo, é possível fazer uma comparação com os resultados fornecidos por Knupp et al. (2013). Esta comparação se encontra ilustrada na Tabela 8.5 e Tabela 8.6, para $ZPe = 0,1$ e $ZPe = 0,2$, respectivamente. Como é possível observar, para $ZPe = 0,1$ obteve-se uma convergência de ± 1 no terceiro algarismo significativo para $N_p = 50$. A comparação com os resultados de Knupp mostraram uma concordância completa no terceiro algarismo significativo. Já para o caso de $ZPe = 0,2$, obteve-se uma convergência de ± 2 no quarto algarismo

significativo para $N_P = 50$ e a comparação com os resultados de Knupp mostraram uma concordância de ± 1 no terceiro algarismo significativo

Tabela 8.4: Convergência dos autovalores $\beta_{a,i}$ da solução via transformação integral parcial para uma condição do primeiro tipo na parede externa com $Pe=0,025$.

Autovalores		$\beta_{a,1}$	$\beta_{a,2}$	$\beta_{a,3}$	$\beta_{a,4}$	$\beta_{a,5}$
Ordem	$\beta_{a,i}$					
$N_{P,aux} = 10$		0,8457	3,1939	5,4702	7,1834	9,6203
$N_{P,aux} = 20$		0,8434	3,1678	5,4563	7,1473	9,5075
$N_{P,aux} = 30$		0,8426	3,1591	5,4517	7,1388	9,4786
$N_{P,aux} = 40$		0,8422	3,1548	5,4494	7,1349	9,4648
$N_{P,aux} = 50$		0,8420	3,1521	5,4480	7,1326	9,4567
$N_{P,aux} = 60$		0,8418	3,1504	5,4470	7,1311	9,4513

Tabela 8.5: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados via transformação integral parcial com os fornecidos por Knupp et al. (2013) para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$.

$ZPe = 0,1$		$Y = 0,3$		$Y = 0,6$		$Y = 0,9$	
Ordem		Knupp et al. (2013)	Seção 5.2	Knupp et al. (2013)	Seção 5.2	Knupp et al. (2013)	Seção 5.2
$N_P = 10$	-	0,07606		-	0,1280	-	0,4934
$N_P = 20$	-	0,07518		-	0,1297	-	0,4946
$N_P = 30$	0,07387	0,07495	0,2789	0,1295	0,8197	0,4946	
$N_P = 40$	0,07464	0,07488	0,1721	0,1293	0,5180	0,4946	
$N_P = 50$	0,07492	0,07499	0,1298	0,1296	0,4943	0,4946	

Mais uma vez, é possível afirmar que há uma ótima concordância entre os dados obtidos através do código desenvolvido neste trabalho e os resultados de Knupp et al. (2013), garantindo a verificação do mesmo nesta segunda abordagem. No entanto, é possível perceber que os resultados da presente metodologia convergem mais rapidamente do que aqueles do artigo citado. É difícil avaliar o motivo dessa variação sem uma comparação direta entre os dois códigos.

Tabela 8.6: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados via transformação integral parcial com os fornecidos por Knupp et al. (2013) para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.

$ZPe = 0,2$		$Y = 0,3$		$Y = 0,6$		$Y = 0,9$	
Ordem		Knupp et al. (2013)	Seção 5.2	Knupp et al. (2013)	Seção 5.2	Knupp et al. (2013)	Seção 5.2
$N_P = 10$	-	0,1475	-	0,2437	-	0,6944	
$N_P = 20$	-	0,1484	-	0,2454	-	0,6946	
$N_P = 30$	0,1469	0,1482	0,3423	0,2451	0,8355	0,6946	
$N_P = 40$	0,1579	0,148	0,3374	0,2450	0,6343	0,6946	
$N_P = 50$	0,1484	0,1483	0,2447	0,2452	0,6944	0,6946	

É possível ainda, fazer uma comparação entre os resultados obtidos através das duas metodologias aqui abordadas (Seção 5.1 e Seção 5.2), através das tabelas apresentadas até o momento. A boa concordância dos resultados entre as duas técnicas é evidente, concordando entre si em ± 1 no terceiro algarismo significativo.

9 ANEXO B

Código desenvolvido na plataforma *Mathematica*® para gerar todas as funções das propriedades térmicas com dependência espacial utilizadas no problema do Capítulo 5,

Definição das constantes:

```
In[1]:(*Condutividade termica W/m K*) Kagua=0,62;
Kacrilico=0,19; Ks=Kacrilico/Kagua;

In[2]:(*Capacidade termica J/kg K*)Wagua=979,12(*média
ρ*)*4200(*média Cp*); Wacrilico=1190(*ρ*)*1470(*Cp*);
Ws=Wacrilico/Wagua;
```

Definição das funções $U(X, Y)$, $K(X, Y)$ e $W(X, Y)$ ao longo de uma curvatura de raio R :

```
In[3]:=respU[R_,L_]:=Solve[{F*R^2+R*A+B==0,(F*(R-L))^2+(R-
L)*A+B)==0,(F*(R-L/2))^2+(R-L/2)*A+B)==1},{A,B,F}]
In[4]:=respw[R_,L_]:=Solve[{R*A+B==1,((R-L)*A+B)==1},{A,B}]
In[5]:=respk[R_,L_]:=Solve[{R*A+B==1,((R-L)*A+B)==1},{A,B}]
```

Definição da geometria do microcanal através da função *Piecewise*:

```
In[6]:=f[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{F*(Sqrt[x^2+y^2])^2+A*(Sqrt
[x^2+y^2])+B/,respU[R,L][[1]],R-L<=Sqrt[(x^2+y^2)]<=R}},0]
In[7]:=fw[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{A*(Sqrt[x^2+y^2])+B/,respw
[R,L][[1]],R-L<=Sqrt[(x^2+y^2)]<=R}},Ws]
In[8]:=fk[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{A*(Sqrt[x^2+y^2])+B/,respk
[R,L][[1]],R-L<=Sqrt[(x^2+y^2)]<=R}},Ks]
```

```

In[9]:=Fi[y_,R_,L_]=Piecewise[{{F*y^2+A*y+B/,respU[R,L][[1]],R-L<=y<=R},0];
In[10]:=Fiw[y_,R_,L_]=Piecewise[{{A*y+B/,respw[R,L][[1]],R-L<=y<=R}},Ws];
In[11]:=Fik[y_,R_,L_]=Piecewise[{{A*y+B/,respk[R,L][[1]],R-L<=y<=R}},Ks];
In[12]:=F[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{Fi[y,R,L],0<=x<=R},{f[x-R,y-R-2*L,R,L],R<=x<=2*R},{f[x-4R-L,y-R-2*L,R,L],3*R+L<=x<=4*R+L},{Fi[y,R,L],4*R+L<=x<=5*R+L}},0];
In[13]:=Fw[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{Fiw[y,R,L],0<=x<=R},{fw[x-R,y-R-2*L,R,L],R<=x<=2*R},{fw[x-4R-L,y-R-2*L,R,L],3*R+L<=x<=4*R+L},{Fiw[y,R,L],4*R+L<=x<=5*R+L}},Ws];
In[14]:=Fk[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{Fik[y,R,L],0<=x<=R},{fk[x-R,y-R-2*L,R,L],R<=x<=2*R},{fk[x-4R-L,y-R-2*L,R,L],3*R+L<=x<=4*R+L},{Fik[y,R,L],4*R+L<=x<=5*R+L}},Ks];
In[15]:=Fb[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{f[x-2R-2*L,y-R-2*L,R,L],2R-L<=x<=4*R}},0];
In[16]:=Fbw[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{fw[x-2R-2*L,y-R-2*L,R,L],2R-L<=x<=4*R}},Ws];
In[17]:=Fbk[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{fk[x-2R-2*L,y-R-2*L,R,L],2R-L<=x<=4*R}},Ks];
In[18]:=FT[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{F[x,y,R,L],0<=y<=R+2L},{Fb[x,y,R,L],R+2L<=y<=2R+2L}},0];
In[19]:=FTw[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{Fw[x,y,R,L],0<=y<=R+2L},{Fbw[x,y,R,L],R+2L<=y<=2R+2L}},Ws];
In[20]:=FTk[x_,y_,R_,L_]=Piecewise[{{Fk[x,y,R,L],0<=y<=R+2L},{Fbk[x,y,R,L],R+2L<=y<=2R+2L}},Ks];

```

```

In[21]:θ[x_,y_]:=ArcTan[D[Sqrt[r^2-x^2],x]/,r->Sqrt[x^2+y^2]]

In[22]:=fp[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{1,R-L<=Sqrt[(x^2+y^2)]<=R}},0]

In[23]:=uFi[y_,R_,L_]:=Piecewise[{{F*y^2+A*y+B/,respU[R,L][[1]]},R-L<=y<=R}},0];

In[24]:=uF[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{uFi[y,R,L],0<=x<=R},{f[x-R,y-R-2*L,R,L]*Cos[θ[x-R,y-R-2*L]],R<=x<=2*R},{f[x-4R-L,y-R-2*L,R,L]*Cos[θ[x-4R-L,y-R-2*L]],3*R+L<=x<=4*R+L},{uFi[y,R,L],4*R+L<=x<=5*R+L}},0];

In[25]:=uFb[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{f[x-2R-2*L,y-R-2*L,R,L]*Cos[θ[x-2R-2*L,y-R-2*L]],2R-L<=x<=4*R}},0];

In[26]:=uFT[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{uF[x,y,R,L],0<=y<=R+2L},{uFb[x,y,R,L],R+2L<=y<=2R+2L}},0];

In[27]:=uFTFTw[x_,y_,R_,L_]:=uFT[x,y,R,L]*FTw[x,y,R,L];

In[28]:=vFi[y_,R_,L_]:=Piecewise[{{0,R-L<=y<=R}},0];

In[29]:=vF[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{vFi[y,R,L],0<=x<=R},{f[x-R,y-R-2*L,R,L]*Sin[-θ[x-R,y-R-2*L]],R<=x<=2*R},{f[x-4R-L,y-R-2*L,R,L]*Sin[-θ[x-4R-L,y-R-2*L]],3*R+L<=x<=4*R+L},{vFi[y,R,L],4*R+L<=x<=5*R+L}},0];

In[30]:=vFb[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{f[x-2R-2*L,y-R-2*L,R,L]*Sin[θ[x-2R-2*L,y-R-2*L]],2R-L<=x<=4*R}},0];

In[30]:=vFT[x_,y_,R_,L_]:=Piecewise[{{vF[x,y,R,L],0<=y<=R+2L},{vFb[x,y,R,L],R+2L<=y<=2R+2L}},0];

In[30]:=vFTFTw[x_,y_,R_,L_]:=vFT[x,y,R,L]*FTw[x,y,R,L];

```

Construção dos gráficos de $U(X, Y)$, $V(X, Y)$, $K(X, Y)$ e $W(X, Y)$ para a região do domínio especificado:

```

In[31]:PCanal=Graphics[{Line[{{0,0,2},{0,3,0,2}}],Line[{{0,0,3},{0,3,0,3}}],Line[{{1,3,0,2},{1,6,0,2}}],Line[{{1,3,0,3},{1,6,0,3}}],Circle[{0,3,0,5},0,3,{0,-π/2}],Circle[{0,3,0,5},0,2,{0,-π/2}],Circle[{0,8,0,5},0,2,{0,π}],Circle[{0,8,0,5},0,3,{0,π}],Circle[{1,3,0,5},0,2,{-π/2,-π}],Circle[{1,3,0,5},0,3,{-π/2,-π}]},Frame->True,AspectRatio->Automatic,PlotRange->{{0,1,6},{0,1}}]

In[32]:GraFF=ContourPlot[FT[x,y,0,3,0,1],{x,0,1,6},{y,0,1},Contours->10,AspectRatio->Automatic,MaxRecursion->3,ContourStyle->{{Black,Thin}},Exclusions->None,PlotLegends->BarLegend[Automatic,None]];

In[33]:GrafUFT=Show[GraFF,PCanal]

In[34]:GrafUF=ContourPlot[uFT[x,y,0,3,0,1],{x,0,1,6},{y,0,1},Contours->10,AspectRatio->Automatic,MaxRecursion->3,ContourStyle->{{Black,Thin}},Exclusions->None,PlotLegends->BarLegend[Automatic,None]];

In[35]:GrafUFT=Show[GrafUF,PCanal]

In[36]:GrafVF=ContourPlot[vFT[x,y,0,3,0,1],{x,0,1,6},{y,0,1},Contours->15,AspectRatio->Automatic,MaxRecursion->6,ContourStyle->{{Black,Thin}},Exclusions->None,PlotLegends->BarLegend[Automatic,None]];

In[37]:GrafVFT=Show[GrafVF,PCanal]

```

10 ANEXO C

10.1 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES CONSTANTES

Considerando inicialmente a metodologia apresentada na Seção 6.4 para regime permanente, utilizou-se como ordem de truncamento $N_P = 220$. Essa ordem de truncamento equivale a, praticamente, nove vezes a ordem de truncamento utilizada por Knupp et al. (2013) ($N_P = 25$) para garantir uma boa convergência de seus resultados. Essa grande diferença na convergência dos resultados do mesmo problema pode ser explicada pela forma como a GITT foi empregada nos dois casos. Em Knupp et al. (2013) a solução foi obtida através de uma transformação parcial do problema, fazendo com que uma das direções fosse discretizada numericamente e, consequentemente, apresentasse uma convergência muito mais rápida. Para o presente caso, uma vez que se almeja validar o código para problemas com geometrias variáveis no espaço, optou-se por uma transformação total, mesmo não havendo necessidade, uma vez que o canal é reto, ou seja, só há variação das propriedades em uma direção. Com isso, é necessário que haja uma combinação de autovalores tanto na direção x quanto na direção y para garantir uma convergência adequada da solução, resultando assim, em uma convergência mais lenta.

A convergência dos resultados e a comparação com os resultados de Knupp et al. (2013) são apresentados na Tabela 10.1 e Figura 10.2. Como é possível observar, para $N_P = 220$ obtém-se uma convergência de ± 3 no quarto algarismo significativo para $ZPe = 0,1$, e de ± 1 no quarto algarismo significativo para $ZPe = 0,2$. Ao se comparar estes resultados com os obtidos por Knupp et al. (2013), observa-se uma boa concordância, com um erro relativo entre os resultados abaixo de 1%, garantindo assim a verificação do código e da metodologia da Seção 6.4. Na Figura 10.1 apresenta-se as isotermas obtidas para este mesmo problema e na Figura 10.2 os perfis de temperatura para diferentes valores de Z .

Tabela 10.1: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_P = 50$	0,07680	0,1306	0,4946
$N_P = 100$	0,07536	0,1287	0,4946
$N_P = 150$	0,07494	0,1285	0,4944
$N_P = 180$	0,07499	0,1285	0,4945
$N_P = 210$	0,07504	0,1286	0,4944
$N_P = 220$	0,07501	0,1285	0,4944
Knupp et al. (2013)	0,07499	0,1294	0,4947
Desvio Relativo	0,03%	0,63%	0,05%

Tabela 10.2: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_P = 50$	0,1512	0,2463	0,6944
$N_P = 100$	0,1487	0,2432	0,6944
$N_P = 150$	0,1481	0,2432	0,6941
$N_P = 180$	0,1482	0,2434	0,6944
$N_P = 210$	0,1483	0,2435	0,6942
$N_P = 220$	0,1483	0,2435	0,6941
Knupp et al. (2013)	0,1483	0,2450	0,6945
Desvio Relativo	0,03%	0,14%	0,05%

Apesar dos valores de temperatura muito próximos obtidos, conforme apresentado nessas duas tabelas, se a Figura 10.2 e a Figura 8.1 (página 206), que apresenta os mesmos resultados, forem comparadas será possível notar uma pequena discrepância na variação de temperatura na região de interface entre o meio sólido e líquido. Na Figura 8.1 é visualmente nítida a variação mais abrupta de temperatura nesta região, enquanto que na Figura 10.2 essa variação é mais suave. Embora essas variações sejam pequenas, elas interferem diretamente no cálculo do gradiente de temperatura, o que poder comprometer o cálculo mais acurado de um fluxo de calor local na parede.

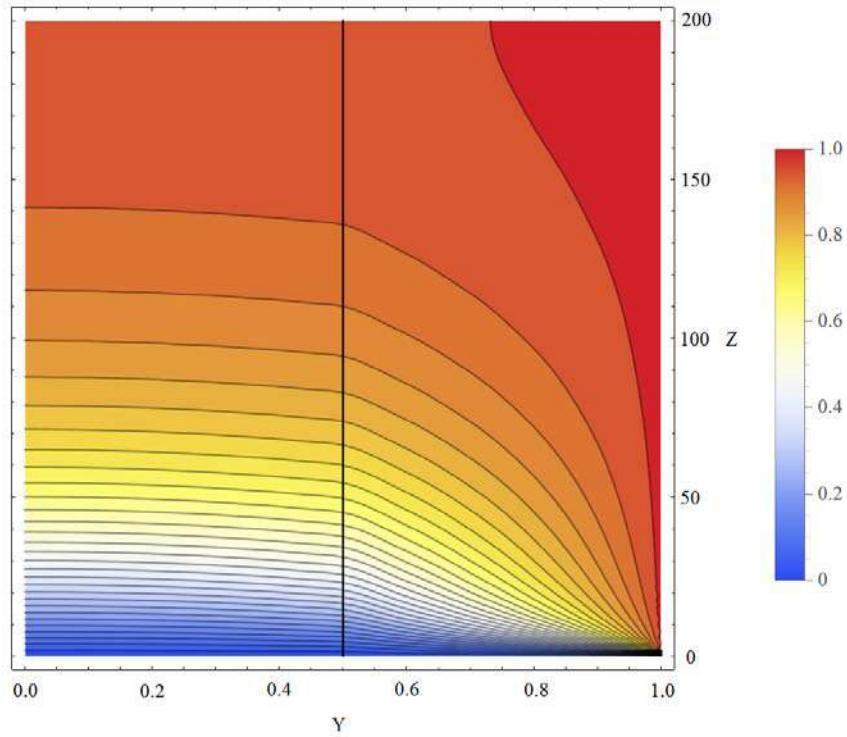


Figura 10.1: Isotermas da solução do problema de Knupp et al. (2013) obtidas a partir da metodologia da Seção 6.4.

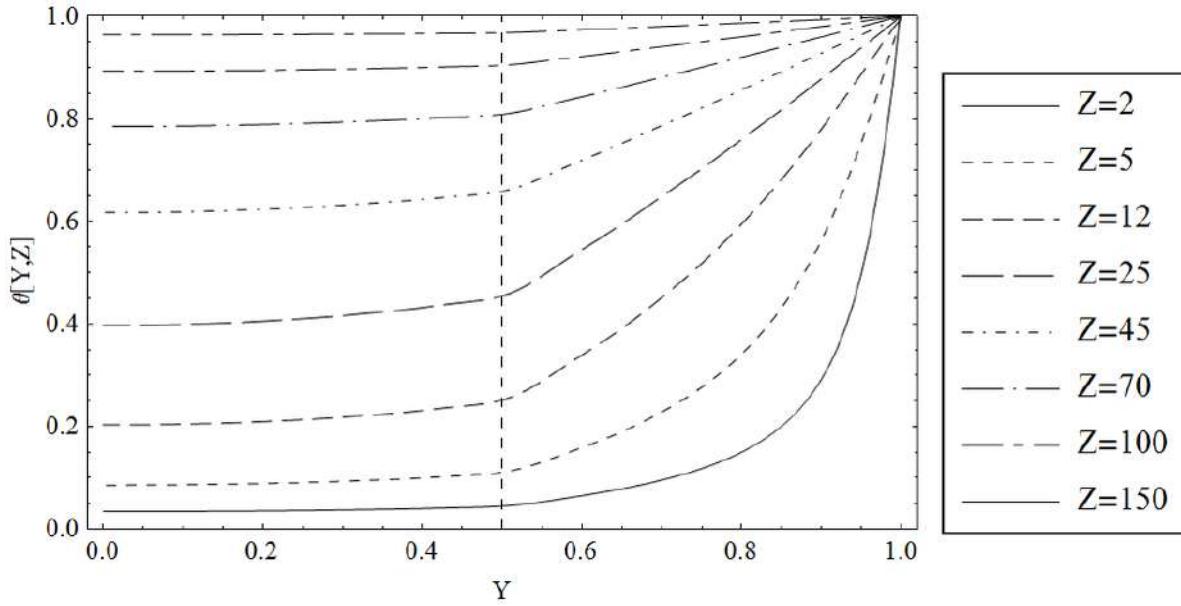


Figura 10.2: : Perfis de temperatura obtidos a partir da metodologia da Seção 6.4 para $Pe=0,025$.

Um número maior de autovalores, 400, foi testado para avaliar a convergência na região de interface, mas não houve melhora significativa dos resultados na região. Com isso, é possível afirmar que a transformação integral do problema nas duas direções acarreta em uma convergência muito mais lenta dos resultados, principalmente na região da interface, quando comparado com a transformação parcial do problema.

O reordenamento sequencial, apresentado na Seção 6.4.3, não será empregado nesta seção, uma vez que esta possui o único objetivo de verificar as diferentes metodologias.

10.2 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE AUTOVALOR COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

Considerando agora a metodologia apresentada na Seção 6.5, utilizou-se como ordem de truncamento para o cálculo dos autovalores $N_{P,aux} = 300$, enquanto que para a solução geral os resultados foram truncados em $N_P = 220$. Na Tabela 10.3 apresenta-se uma breve

análise de convergência dos cinco primeiros autovalores do problema de autovalor com coeficientes variáveis, após solução do problema de autovalor algébrico definido pela Eq. (6.46). Para a ordem de truncamento máxima de $N_{P,aux} = 300$, a convergência se dá no terceiro dígito significativo dos autovalores apresentados.

Tabela 10.3: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=0,025$.

Autovalores		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
μ_i	Ordem					
$N_{P,aux} = 50$		0,89110	1,1954	1,6327	2,1026	2,5562
$N_{P,aux} = 100$		0,89107	1,1954	1,6327	2,1026	2,5562
$N_{P,aux} = 150$		0,89061	1,1952	1,6327	2,1026	2,5562
$N_{P,aux} = 220$		0,89021	1,1950	1,6326	2,1025	2,5554
$N_{P,aux} = 260$		0,88995	1,1950	1,6326	2,1025	2,5554
$N_{P,aux} = 300$		0,88971	1,1948	1,6326	2,1025	2,5552

A convergência dos resultados do potencial, juntamente com uma comparação com os resultados de Knupp et al. (2013) são apresentados na Tabela 10.4 e Tabela 10.5. Como é possível observar, para $N_P = 220$ obtém-se uma convergência de ± 2 no quarto algarismo significativo para $ZPe = 0,1$, e de ± 3 no quarto algarismo significativo para $ZPe = 0,2$. Comparando-se estes resultados com os obtidos por Knupp et al. (2013), observa-se novamente uma boa concordância, com desvios relativos abaixo de 1%, garantindo assim a verificação do código e da metodologia da Seção 6.5.

Tabela 10.4: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_P = 50$	0,07364	0,1260	0,4960
$N_P = 100$	0,07333	0,1264	0,4947
$N_P = 150$	0,07457	0,1277	0,4945
$N_P = 180$	0,07541	0,1286	0,4945
$N_P = 210$	0,07506	0,1290	0,4942
$N_P = 220$	0,07507	0,1288	0,4944
Knupp et al. (2013)	0,07499	0,1294	0,4947
Desvio Relativo	0,11%	0,41%	0,05%

Tabela 10.5: Convergência de $\theta(X, Y)$ e comparação dos resultados obtidos com problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_P = 50$	0,1456	0,2389	0,6970
$N_P = 100$	0,1454	0,2397	0,6948
$N_P = 150$	0,1475	0,2421	0,6943
$N_P = 180$	0,1490	0,2436	0,6944
$N_P = 210$	0,1484	0,2443	0,6938
$N_P = 220$	0,1484	0,2441	0,6941
Knupp et al. (2013)	0,1483	0,2450	0,6945
Desvio Relativo	0,11%	0,37%	0,04%

As isotermas e os perfis de temperatura obtidos para esta metodologia não serão apresentados, uma vez que os mesmos são praticamente idênticos aos apresentados na Figura 10.1 e Figura 10.2, e as pequenas diferenças existentes entre esses resultados e os obtidos por Knupp et al. (2013) são imperceptíveis na escala apresentada.

O objetivo da utilização de uma solução via problema de autovalor com coeficientes variáveis é adicionar mais informação ao problema de autovalor original e, consequentemente, acelerar a convergência do potencial. No entanto, ao comparar a Tabela 10.1 e Tabela 10.2 com a Tabela 10.4 e Tabela 10.5 , respectivamente não é possível observar qualquer melhora significativa na convergência dos resultados.

10.3 VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO VIA FILTRO RECURSIVO

Será considerada agora a metodologia apresentada na Seção 6.6. Primeiramente, considera-se um problema puramente condutivo, ou seja, sem os termos de convecção na equação da energia, o qual pode ser resolvido através de um problema de autovalor com coeficientes variáveis, cuja ordem de truncamento adotada foi $N_{P,auxFC} = 400$ para o problema de autovalor auxiliar e $N_{P,FC} = 320$ para o problema de autovalor original. A convergência dos autovalores é apresentada na Tabela 10.6. A convergência dos resultados desse problema inicial são apresentados na Tabela 10.7 e Tabela 10.8. Como é possível observar, para $N_{P,FC} = 320$ obtém-se uma convergência de ± 1 no quarto algarismo significativo tanto para $ZPe = 0,1$ quanto para $ZPe = 0,2$.

Este resultado do problema puramente condutivo, por sua vez, será utilizado como filtro para o problema original contendo os termos convectivos, o qual será resolvido através de um problema de autovalor com coeficientes constantes.

Tabela 10.6: Convergência dos autovalores μ_i da solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis com $Pe=0,025$ para o filtro puramente condutivo.

Autovalores		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5
μ_i	Ordem					
$N_{P,aux} = 100$		0,89175	1,1958	1,6327	2,1027	2,5568
$N_{P,aux} = 200$		0,89024	1,1950	1,6326	2,1025	2,5558
$N_{P,aux} = 250$		0,88995	1,1949	1,6326	2,1025	2,5554
$N_{P,aux} = 320$		0,88971	1,1948	1,6326	2,1025	2,5550
$N_{P,aux} = 360$		0,88952	1,1948	1,6326	2,1025	2,5550
$N_{P,aux} = 400$		0,88950	1,1947	1,6326	2,1025	2,5548

Tabela 10.7: Convergência do potencial puramente condutivo obtido via problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_{P,FC} = 100$	0,073711	0,12751	0,49407
$N_{P,FC} = 200$	0,076607	0,12966	0,49464
$N_{P,FC} = 250$	0,076514	0,13017	0,49444
$N_{P,FC} = 280$	0,076457	0,13001	0,49477
$N_{P,FC} = 310$	0,076053	0,12985	0,49474
$N_{P,FC} = 320$	0,076069	0,12982	0,49473

Tabela 10.8: Convergência do potencial puramente condutivo $\theta_{FC}(X, Y)$ obtido via problema de autovalor coeficientes variáveis para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.

$ZPe = 0,2$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_{P,FC} = 100$	0,14604	0,24179	0,69356
$N_{P,FC} = 200$	0,15135	0,24565	0,69462
$N_{P,FC} = 250$	0,15113	0,4654	0,69422
$N_{P,FC} = 280$	0,15103	0,24625	0,69483
$N_{P,FC} = 310$	0,15031	0,24594	0,69477
$N_{P,FC} = 320$	0,15033	0,24589	0,69475

A convergência dos resultados do potencial original, juntamente com uma comparação com os resultados de Knupp et al. (2013) são apresentados na Tabela 10.9 e Tabela 10.10. Como é possível observar, já é possível obter uma convergência completa no quarto algarismo significativo para uma ordem de truncamento abaixo de $N_P = 100$, tanto para $ZPe = 0,1$ quanto para $ZPe = 0,2$. Comparando-se estes resultados com os obtidos por Knupp et al. (2013), observa-se novamente uma boa concordância. Apesar do número de autovalores necessários para a solução do problema filtro puramente condutivo ter sido maior que o utilizado na solução via problema de autovalor com coeficientes variáveis, os desvios relativos se mostraram inferiores aos observados nas metodologias anteriores, com todos os valores abaixo de 0,5%, garantindo assim a verificação do código e da metodologia da Seção 6.6.

Através dos resultados apresentados fica claro a vantagem da utilização do filtro recursivo, uma vez que a ordem de truncamento necessária para a convergência do problema original se mostrou abaixo da metade, em comparação às soluções via problema de autovalor com coeficientes constantes e coeficientes variáveis.

Tabela 10.9: Convergência do potencial original $\theta(X, Y)$ obtido via problema de autovalor
coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,1$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_P = 50$	0,075069	0,12920	0,49460
$N_P = 100$	0,075047	0,12919	0,49460
$N_P = 150$	0,075041	0,12918	0,49459
$N_P = 180$	0,075039	0,12918	0,49459
$N_P = 210$	0,075036	0,12918	0,49459
$N_P = 220$	0,075034	0,12918	0,49459
Knupp et al. (2013)	0,07499	0,1294	0,4947
Desvio Relativo	0,06%	0,17%	0,02%

Tabela 10.10: Convergência do potencial original $\theta(X, Y)$ obtido via problema de autovalor
coeficientes constantes para $Pe=0,025$ em $ZPe=0,2$.

$ZPe = 0,1$	$Y = 0,3$	$Y = 0,6$	$Y = 0,9$
$N_P = 50$	0,14842	0,24467	0,69449
$N_P = 100$	0,14841	0,24466	0,69448
$N_P = 150$	0,14842	0,24465	0,69446
$N_P = 180$	0,14842	0,24465	0,69446
$N_P = 210$	0,14842	0,24465	0,69446
$N_P = 220$	0,14842	0,24464	0,69447
Knupp et al. (2013)	0,1483	0,2450	0,6945
Desvio Relativo	0,08%	0,15%	0,004%

Mais uma vez, as isotermas e os perfis de temperatura obtidos para esta metodologia não serão apresentados, uma vez que os mesmos são praticamente idênticos aos apresentados na Figura 10.1 e Figura 10.2, e as pequenas diferenças são imperceptíveis na escala apresentada.

11 BIBLIOGRAFIA

- Al-Dhubabian, A. A. (2005). "Production of Biodiesel from Soybean Oil in a Micro Scale Reactor". A thesis submitted to Oregon State University.
- Alfieri, F., Tiwari, M. K., Zinovik, I., Brunschwiler, T., Michel, B., e Poulikakos, D. (2012). "On the significance of developing boundary layers in integrated water cooled 3D chip stacks". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55, 5222–5232.
- Alfieri, F., Tiwari, M. K., Zinovik, I., Poulikakos, D., Brunschwiler, T., e Michel, B. (2010). "3D Integrated Water Cooling of a Composite Multilayer Stack of Chips". *Journal of Heat Transfer*, 132, 1-9.
- Asadi, M., Xie, G., e Sunden, B. (2014). "A review of heat transfer and pressure drop characteristics of single and two-phase microchannels". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 79, 34–53.
- Asthana, A., Zinovik, I., Weinmueller, C., e Poulikakos, D. (2011). "Significant Nusselt number increase in microchannels with a segmented flow of two immiscible liquids: An experimental study." *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, 1456-1464.
- Bandara, T., Nguyen, N.-T., e Rosengarten, G. (2015). "Slug flow heat transfer without phase change in microchannels: A review". *Chemical Engineering Science*, 126, 283-295.
- Bar-Cohen, A. (1987). "Thermal Management of Air- and Liquid-Cooled Multichip Modules". *IEEE Transaction on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, CHMT-10, 159-175.
- Bayazitoglu, Y., e Ozisik, M. N. (1980). "On the solution of Graetz type problems with axial conduction". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 23, 1399-1402.

- Bentwich, M., e Sideman, S. (1964). “Temperature distribution and heat transfer in annular two-phase (liquid-liquid) flow”. *Can. J. Chem. Eng.*, 42, 9-13.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., e Lightfoot, E. N. (2002). “Transport Phenomena”, Second Edition. John Wiley & Sons, Inc.
- Biswas, J., e Greenfield, P. F. (1985). “Two phase flow through vertical capillaries-existence of a stratified flow pattern”. *Int. J. Multiphase Flow*, 11, 553-563.
- Boyce, W. E., e DiPrima, R. C. (2002). “Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno”. Rio de Janeiro: LTC.
- Brennen, C. E. (2005). “Fundamentals of Multiphase Flows”. Pasadena, California: Cambridge University Press.
- Brunschwiler, T., Michel, B., Paredes, S., Drechsler, U., Cesar, W., Toeral, G., Temiz, Y., e Leblebici, Y.. (2009a). Validation of Porous-Media Prediction of Interlayer Cooled 3D-Chip Stacks. *IEEE International Conference on 3D System Integration, 3DIC*, 1-10.
- Brunschwiler, T., Michel, B., Rothuizen, H., Kloter, U., Wunderle, B., Oppermann, H., e Reichl, H. (2009b). “Interlayer cooling potential in vertically integrated packages”. *Microsyst. Technol.*, 15, 57–74.
- Brunschwiler, T., Paredes, S., Drechsler, U., Michel, B., Cesar, W., Leblebici, Y., Wunderle, B., e Reichl, H.. (2010). “Heat-removal performance scaling of interlayer cooled chip stacks”. *IEEE*, 1-12.
- Campo, A., e Auguste, J.-C. (1978). “Axial conduction in laminar pipe flows with nonlinear wall heat fluxes”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 21, 1591-1607.
- Castellões, F. V., Cardoso, C. R., Couto, P., e Cotta, R. M. (2007). “Transient Analysis of Slip Flow and Heat Transfer in Microchannels”. *Heat Transfer Engineering*, 28(6), 549-558.

- Castellões, F. V. (2010). “Análise da Intensificação Térmica em Canais Corrugados a Baixo Número de Reynolds”. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ.
- Castellões, F. V., Quaresma, J. N., e Cotta, R. M. (2010). “Convective Heat Transfer Enhancement in Low Reynolds Number Flows with Wavy Walls”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, 2022-2034.
- Cerqueira, I. G. (2016). “Análise teórica-experimental de problemas conjugados transientes multidimensionais em microssistemas térmicos”. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ.
- Çetin, B., Yazicioglu, A. G., e Kakaç, S. (2009). “Slip-flow heat transfer in microtubes with axial conduction and viscous dissipation – An extended Graetz problem”. *International Journal of Thermal Sciences*, 48, 1673–1678.
- Charoenwat, R., e Dennis, B. H. (2009). “Transesterification of Vegetable Oils with a Continuous Flow Capillary Reactor”. *Proceedings of the ASME 2009 Early Career Technical Conference*, 1-5.
- Chida, K. (2000). “Surface temperature of a flat plate of finite thickness under conjugate laminar forced convection heat transfer condition”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43, 639-642.
- Cole, K. D., e Çetin, B. (2011). “The effect of axial conduction on heat transfer in a liquid microchannel flow”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, 2542–2549.
- CoolerMaster. (2016). Acesso em 06 de 05 de 2016, disponível em Cooler Master: <http://www.coolermaster.com/cooling/cpu-liquid-cooler/nepton-140xl/>
- Costa Junior, J. M. (2015). “Microrreatores para síntese de biodiesel com recuperação de calor rejeitado de painéis fotovoltaicos de alta concentração”. Rio de Janeiro: Exame de Qualificação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ.

- Cotta, R. M., Mikhailov, M. D., e Ozisik, M. N. (1987). “Transient conjugated forced convection in ducts with periodically varying inlet temperature”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30, 2073-2082.
- Cotta, R. M. (1990). “Hybrid Numerical-Analytical Approach to Nonlinear Diffusion”. *Numer. Heat Transfer, Part B*, 217-226.
- Cotta, R. M. (1993). “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow”. Boca Raton, FL.: CRC Press.
- Cotta, R. M. (1994). “Benchmark Results in Computational Heat and Fluid Flow: The Integral Transform Method”. *Int. J. Heat Mass Transfer (Invited Paper)*, 37(Suppl. 1), 381-394.
- Cotta, R. M., e Mikhailov, M. D. (1997). “Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic” Computation. Chichester, UK: Wiley-Interscience.
- Cotta, R. M. (1998). “The Integral Transform Method in Thermal and Fluid Sciences and Engineering”. New York: Begell House.
- Cotta, R. M., e Mikhailov, M. D. (2006). “Hybrid Methods and Symbolic Computations”. In: W. Minkowycz, E. M. Sparrow, e J. Y. Murthy, *Handbook of Numerical Heat Transfer*, 2nd ed. New York: Jonh Wiley.
- Cotta, R. M., Knupp, D. C., Naveira-Cotta, P., C., Sphaier, L. A., e Quaresma, J. N. (2012). “The Unified Integral Transforms (UNIT) algorithm with total and partial transformation: a tribute to Prof. Mikhail D. Mikhailov”. *Proceedings of ENCIT 2012* (pp. 1-14). Rio de Janeiro, RJ: ABCM.
- Cotta, R. M., Knupp, D. C., Naveira-Cotta, C. P., Sphaier, L. A., e Quaresma, J. N. (2013). “Unified Integral Transforms Algorithm for Solving Multidimensional Nonlinear Convection-Diffusion Problems”. *Numerical Heat Transfer - Part A: Applications*, 63, 840–866.
- Cotta, R., Knupp, D., Naveira-Cotta, C., Sphaier, L., e Quaresma, J. (2014). “The Unified Integral Transforms (UNIT) Algorithm with Total and Partial Transformation”. *Comput. Thermal Sciences*, 6(6), 507-524.

- Cotta, R. M., Knupp, D. C., e Naveira-Cotta, C. P. (2016). “Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems”. New York: Springer, Mechanical Engineering Series.
- Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., Knupp, D. C., Zotin, J. L., e Pontes, P. C. (2016 b). “Eigenfunction Expansions for Coupled Nonlinear Convection-Diffusion Problems in Complex Physical Domains”. *Proceedings of Eurotherm 2016*.
- Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., e Knupp, D. (2016 c). “Enhanced convergence of eigenfunction expansions in convection-diffusion with multiscale space variable coefficients”. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 70, 492-512.
- Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., Knupp, D. C., Zotin, J. L., e Pontes, P. C. (2016 d). “Eigenfunction Expansions for Coupled Nonlinear Convection-Diffusion Problems in Complex Physical Domains”. *Journal of Physics: Conference Series*, 745, 022001.
- Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., Knupp, D. C. (2016 e). “Nonlinear Eigenvalue Problem in the Integral Transforms Solution of Convection-Diffusion with Nonlinear Boundary Conditions”. *Int. Journal of Num. Methods for Heat and Fluid flow*, 26 (3/4), 767-789..
- Davis, E. J., e Gill, W. N. (1970). “The effects of axial conduction in the wall on heat transferwith laminar flow”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13, 459-470.
- Dominic, A., Saragan, J., Suresh, S., e Devah Dhanush, V. S. (2015). “An Experimental Investigation of Wavy and Straight Minichannels Heat Sinks Using Water and NanoFluids”. *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, 7, 031012-1 - 031012-9.
- Dynamics, D. (5 de Novembro de 2014). *Dantec Dynamics*. Fonte: <http://www.dantecdynamics.com/microfluidics>.
- Ebadian, M. A., e Zhang, H. Y. (1989). “An exact solution of extended Graetz problem with axial heat conduction”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32, 1709-1717.

Fourier, J. (1822). “Théorie Analytique de la Chaleur” (1988 ed.). Sceaux, França: Jacques Gabay.

Gada, V. H., Datta, D., e Sharma, A. (2013). “Analytical and numerical study for two-phase stratified-flow in a plane channel subjected to different thermal boundary conditions”. *International Journal of Thermal Sciences*, 71, 88-102.

Garimella, S. V., e Singhal, V. (2004). Single-Phase Flow and Heat Transport and Pumping Considerations in Microchannel Heat Sinks. *Heat Transfer Engineering*, 25, 15–25.

Goldberg, N. (1984). “Narrow Channel Forced Air Heat Sink”. *IEEE Transaction on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, CHMT-7, 154-159.

Gondim, R. R., Macedo, E. N., e Cotta, R. M. (2007). “Hybrid solution for transient internal convection with axial diffusion: Integral transforms and local instantaneous filtering”. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 17, 405-417.

Graetz, L. (1883). “Üben die wärmeleitungsähigkeit von flüssigkeiten. (On the thermal conductivity of liquids, part 1)”. *Ann. Phys. Chem.*, 18, 79-94.

Graetz, L. (1885). “Üben die wärmeleitungsähigkeit von flüssigkeiten. (On the thermal conductivity of liquids, part 2)”. *Ann. Phys. Chem.*, 25, 337-357.

Guedes, R. O., e Cotta, R. M. (1991). “Periodic laminar forced convection within ducts including wall heat conduction effects”. *Int. J. Engng. Sci.*, 29, 535-547.

Guedes, R. O., e Ozisik, M. N. (1992). “Conjugated turbulent heat transfer with axial conduction in wall and convection boundary conditions in a parallel-plate channel”. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 13, 322-328.

Guerrero, J. S. (1991). “Solução das Equações de Navier-Stokes em Formulação de Função Corrente via Transformada Integral”. Rio de Janeiro: Tese de Mestrado apresentada ao programa de pós-graduação de engenharia mecânica da UFRJ.

Guerrero, J. S. (1995). “Transformação integral das equações de Navier-Stokes para escoamento laminar em canais de geometria bidimensional arbitrária”. Rio de

Janeiro: Tese de Doutorado apresentada ao programa de pós-graduação em engenharia mecânica da UFRJ.

Guerrero, J. S., Quaresma, J. N., e Cotta, R. M. (2000). “Simulation of laminar flow inside ducts of irregular geometry using integral transforms”. *Computational Mechanics*, 25, 413-420.

Gunther, A., e Jensen, K. F. (2006). “Multiphase Microfluidics: from flow characteristics to chemical and materials synthesis”. *Lab Chip*, 6, pp. 1487-1503.

Guo, Z.-Y., e Li, Z.-X. (2003). “Size effect on microscale single-phase flow and heat transfer”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46, 149–159.

Haller, D., Woias, P., e Kockmann, N. (2009). “Simulation and experimental investigation of pressure loss and heat transfer in microchannel networks containing bends and T-junctions”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, 2678-2689.

Hammond, E. G., Johnson, L. A., Su, C., Wang, T., e White, P. J. (2005). “Soybean Oil”. In: F. Shahidi, *Bailey's Industrial Oil and Fat Products* (Sixth Edition ed.). John Wiley & Sons, Inc.

Harms, T. M., Kazmierczak, M. J., e Gerner, F. M. (1999). “Developing convective heat transfer in deep rectangular microchannels”. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20, 149-157.

Hegde, P. G. (2006). “Microchannel heat sinks for cooling high heat flux electronic devices — analysis with single and two phase flow”. Universiti Sains Malaysia, Tese de Doutorado.

Hegde, P. (2007). “Numerical Analysis of Multistack Microchannel Heat Sinks Cooled by Boiling Two Phase Flow”. *9th Electronics Packaging Technology Conference*, pp. 843-847.

Hegde, P. G., e Seetharamu, K. N. (2008). “Effects of Non-Uniform Base Heating in Multi Stack Microchannel Heat Sinks used for Cooling High Heat Flux Electronic Chips

and Devices”. *33rd International Electronics Manufacturing Technology Conference*, pp. 1-6.

Herwig, H., e Hausner, O. (2003). “Critical view on “new results in micro-fluid mechanics”: an example”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46, 935–937.

Hetsroni, G., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., e Yarin, L. (2005). “Heat transfer in micro-channels: Comparison of experiments with theory and numerical results”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 48, 5580–5601.

Hsu, C. (1968). “Exact solution to entry-region laminar heat transfer with axial conduction and the boundary condition of the third kind”. *Chemical Engineering Science*, 23, 457-468.

Intel. (1971). “4004 single chip 4 bit P-Channel Microprocessor”. INTEL. Intel.

Intel. (2011). “Intel® 4004 processor celebrates 40th anniversary”. Intel. Intel.

Intel. (2014). “The Story of the Intel® 4004”. Acesso em 13 de Setembro de 2014, disponível em Intel: <http://www.intel.com.br/content/www/br/pt/history/museum-story-of-intel-4004.html>

Janke, I., Neto, M. A., Jr., J. R., Garzon, N. N., Hartmann, R. M., e Jr., A. A. (2013). “Viscosity and Thermal Conductivity of Soybean oil-diesel blends between 293 and 353 K”. *Proceedings og the 22nd International Congress of Mechanical Engineering*, 6.

Jeong, H.-E., e Jeong, J.-T. (2006). “Extended Graetz problem including streamwise conduction and viscous dissipation in microchannels”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49, 2151–2157.

Kabar, Y., Bessaih, R., e Rebay, M. (2013). “Conjugate heat transfer with rarefaction in parallel plates microchannel”. *Superlattices and Microstructures*, 60, 370–388.

Kalyoncu, G., & Barisik, M. (2016). “The extended Graetz problem for micro-slit geometries; analytical coupling of rarefaction, axial conduction and viscous dissipation””. *International Journal of Thermal Sciences*, 110, 261-269.

- Keyes, R. W. (1984). "Heat Transfer in Forced Convection Through Fins". *IEEE Transaction on Electron Devices*, 9, 1218-1221.
- Kim, B. (2016). "An experimental study on fully developed laminar flow and heat transfer in rectangular microchannels". *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 1-9 (Article in Press).
- Kiper, A. M. (1984). "Impinging water jet cooling of VLSI circuits". *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 11, 517-526.
- Knight, R. W., Hall, D. J., Goodling, J. S., e Jaeger, R. C. (1992). "Heat Sink Optimization with Application". *IEEE Transaction on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, 15, 832-842.
- Knupp, D. C., Naveira-Cotta, C. P., e Cotta, R. M. (2012). "Theoretical analysis of conjugated heat transfer with a single domain formulation and integral transforms". *Internal Communications in Heat and Mass Transfer*, 39, 355-362.
- Knupp, D. C. (2013). "Análise de problemas conjugados em microdissipadores térmicos por transformação integral em domínio único e técnicas ópticas não intrusivas". Rio de Janeiro: Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ.
- Knupp, D. C., Naveira-Cotta, C. P., e Cotta, R. M. (2013). "Conjugated Convection-Conduction Analysis in Microchannels With Axial Diffusion Effects and a Single Domain Formulation". *Journal of Heat Transfer*, 135, 1-10.
- Knupp, D. C., Naveira-Cotta, C. P., e Cotta, R. M. (2014). "Theoretical-experimental analysis of conjugated heat transfer in nanocomposite heat spreaders with multiple microchannels". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 74, 306–318.
- Knupp, D. C., Naveira-Cotta, C. P., Rrenfer, A., Tiwari, M. K., Cotta, R. M., e Poulikakos, D. (2015). "Analysis of conjugated heat transfer in micro-heat exchangers via integral transforms and non-intrusive optical techniques". *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 25(6), 1444-1452.

- Knupp, D. C., Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., e Kakaç, S. (2015a). “Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral transforms with single domain formulation”. *International Journal of Thermal Sciences, Article in Press*, 248-257.
- Knupp, D. C., Cotta, R. M., e Naveira-Cotta, C. P. (2015b). “Fluid Flow and Conjugated Heat Transfer in Arbitrarily Shaped Channels via Single Domain Formulation and Integral Transforms”. *Int. J. Heat & Mass Transfer*, 82, pp. 479-489.
- Knupp, D. C., Naveira-Cotta, C. P., Renfer, A., Tiwari, M. K., Cotta, R. M., e Poulikakos, D. (2015c). “Analysis of Conjugated Heat Transfer in Micro-Heat Exchangers Via Integral TRansforms and Non-Intrusive Optical Techniques”. *Int. J. of Num. Meth. for Heat and Fluid Flow*, 25(6), pp. 1444-1462.
- Knupp, D. C., Mascouto, F. S., Abreu, L. A., e Naveira-Cotta, C. P. (2016). “Conjugated heat transfer with slip flow in microchannels: single domain integral transforms with enhanced convergence”. *16th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*.
- Kockmann, N. (2008). “Transport Phenomena in Micro Process Engineering”. Springer.
- Krishan, B. (1982). “On conjugated heat transfer in fully developed flow”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 25, 288-289.
- Kumar, V., Paraschivoiu, M., e Nigam, K. D. (2011). “Single-phase fluid flow and mixing in microchannels”. *Chemical EngineeringScience*, 66, 1329–1373.
- Laohakul, C., Chan, C. Y., Look, K. Y., e Tan, C. W. (1985). “On approximate solutions of the Graetz problem with axial conduction”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 541-545.
- Leib, T. M., Fink, M., e Hasson, D. (1977). “Heat Transfer in Vertical Annular Laminar Flow of two Immiscible Liquids”. *Int. J. Multiphase Flow*, 3, 533-549.
- Lin, T. F., e Kuo, J. C. (1988). “Transient conjugated heat transfer in fully developed larninar pipe flows”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 31, 1093- 1102.

- Luikov, A. V., Aleksashenko, V. A., e Aleksashenko, A. A. (1971). “Analytical methods of solution of conjugated problems in convective heat transfer”. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 14, 1047-1056.
- Luikov, A. B. (1974). “Conjugate convective heat transfer problems”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 17, 257-265.
- Malengier, B., Pushpavanam, S., e D’haeye, S. (2011). “Optimizing performance of liquid–liquid extraction in stratified flow in micro-channels”. *J. Micromech. Microeng.*, 21, 1-13.
- Malengier, B., Tamalapakula, J., e Pushpavanam, S. (2012). “Comparison of laminar and plug flow-fields on extraction performance in micro-channels”. *Chemical Engineering Science*, 83, 2-11.
- Mandhane, J. M., Gregory, G., e Aziz, K. (1974). “A flow pattern map for gas-liquid flow in horizontal pipes”. *Int. J. Multiphase Flow*, 1, 537-553.
- Maranzana, G., Perry, I., e Maillet, D. (2004). “Mini- and micro-channels: influence of axial conduction in the walls”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 3993–4004.
- Maranzana, G., Perry, I., e Maillet, D. (2004a). “Modeling of conjugated heat transfer between parallel plates separated by a hydrodynamically developed laminar flow by the quadrupole method”. *Numerical Heat Transfer, Part A*, 46, 147–165.
- Martínez Arias, E. L., Martins, P. F., Munhoz, A. L., Gutierrez-Rivera, L., e Filho, R. M. (2012). “Continuous Synthesis and in Situ Monitoring of Biodiesel Production in Different Microfluidic Devices”. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51, 10755–10767.
- Mechtilde, S., Eduard, S., e Andreas, F. (2006). “Computer Controlled Chemical Micro-Reactor”. *Journal of Physics: International Conference on Materials for Advanced Technologies, Symposium Y*, 28, 115–118.
- Mikhailov, M. D. (1972). “General solutions of the heat equation in finite regions”. *Int. J. Engng. Sci.*, 10, 577-591.

- Mikhailov, M. D., e Ozisik, M. N. (1981). “On general solution of heat conduction in an anisotropic medium”. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 8, 329-335.
- Mikhailov, M. D., e Ozisik, M. N. (1984). “Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion”. John Wiley.
- Mikhailov, M. D., e Ozisik, M. N. (1986). “Unified Finite Integral Transform Analysis”. *Journal of the Franklin Institute*, 6, 299-307.
- Mikhailov, M. D., e Cotta, R. M. (1994). “Integral Transform Method for Eigenvalue Problems”. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 10, 827-853.
- Mikhailov, M. D., e Cotta, R. M. (2005). “Mixed symbolic-numerical computation of convective heat transfer with slip flow in microchannels”. *International Communication in Heat and Mass Transfer*, 32, 341-348.
- Mohammed, H. A., Gunnasegaran, P., e Shuaib, N. H. (2011). “Numerical simulation of heat transfer enhancement in wavy microchanne heat sink”. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38, 63-68.
- Mokrani, O., Bourouga, B., Castelain, C., e Peerhossaini, H. (2009). “Fluid flow and convective heat transfer in flat microchannels”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, 1337–1352.
- Moore, G. E. (19 de Abril de 1965). “Cramming More Components onto Integrated Circuits”. *Electronics*, pp. 114-117.
- Morini, G. L. (2004). “Single-phase convective heat transfer in microchannels: a review of experimental results”. *International Journal of Thermal Science*, 43, 631-651.
- Nagasue, H. (1981). “Steady-state heat transfer with axial conduction in laminar flow in a circular tube with a specified temperature or heat flux wall”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24, 1823-1832.
- Naveira, C. P., Fudym, O., Cotta, R. M., e Orlande, H. R. (2008a). “Integral Transform Solutions for Diffusion in Heterogeneous Media”. *Proceedings of IMECE2008. ASME International Mechanical Engineering Congress & Exposition*.

- Naveira, C. P., Cotta, R. M., Orlande, H. R., e Fudym, O. (2008b). “Generalized Integral Transform Technique for Sturm-Liouville Problems in Heterogeneous Media”. *12th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering, ENCIT 2008*.
- Naveira, C., Lachi, M., Cotta, R., e Padet, J. (2009). “Hybrid formulation and solution for transient conjugated conduction–external convection”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52, 112–123.
- Naveira-Cotta, C. P., Cotta, R. M., Orlande, H. R., e Fudym, O. (2009a). “Eigenfunction Expansions for Transient Diffusion in Heterogeneous Media”. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 52, 5029-5039.
- Naveira Cotta, C. P. (2009b). “Problemas Inversos de Condução de Calor em Meios Heterogêneos: Analise Teórico-Experimental via TRansformação Integral, Inferência Bayesiana e Termografia por Infravermelho”. Rio de Janeiro: Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE/UFRJ.
- Nogueira, E., e Cotta, R. M. (1990). “Heat transfer solutions in laminar co-current flow”. *Wärme- und Stoffübertragung*, 25, 361-367.
- Nogueira, E., Dantas, L. B., e Cotta, R. M. (2004). “Analysis of Interfacial and Mass Transfer Effects on Forced Convection in Gas-Liquid Annular Two-Phase Flow”. *Thermal Engineering*, 5, 45-51.
- Nunes, J. S., Cotta, R. M., Avelino, M., e Kakaç, S. (2010). “Conjugated Heat Transfer in Microchannels”. *Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications*, 1, 61-82.
- Olek, S., Elias, E., Wacholder, E., e Kaizerman, S. (1991). “Unsteady conjugated heat transfer in laminar pipe flow”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 34, 1443-1450.
- Oliveira, M. C., Ramos, R., e Cotta, R. M. (1995). “On the eigenvalue basic to the analytical solution of convective heat transferwith axial diffusion effects”. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, 287-296.

- Ooms, G., Seoal, A., e Van Der Wees, A. J. (1984). “A Theoretical model for core-annular flow of a very viscous oil core and a water annulus through a horizontal pipe”. *Int. J. Multiphase Flow*, 10, 41-60.
- Ozisik, M. N. (1993). “Heat Conduction”, Second Edition. Wiley-Interscience.
- Peng, X. F., Peterson, G. P., e Wang, B. X. (1995). “Frictional flow characteristics of water flowing through rectangular microchannels”. *J. Exp. Heat Transfer*, 7, 248-264.
- Peng, X. F., e Peterson, G. P. (1996). “Convection Heat transfer and flow friction for water flow in microchannel structures”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39, 2599-2608.
- Perelman, T. L. (1961). “On conjugated Problems of Heat Transfer”. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 3, 294-303.
- Phillips, R. J. (1988). “Microchannel Heat Sinks”. *The Lincoln Laboratory Journal*, 1, 31-48.
- Phillips, R. J. (1988a). “Forced-Convection, Liquid-Cooled, MicroChannel Heat Sinks”. Lexington, Massachusetts: Lincoln Laboratory, MIT.
- Phillips, R. J., Glicksman, L. R., e Larson, R. (1990). *Patente Nº US 4894709* A. Estados Unidos.
- Pontes, C. P., Chen, K., Naveira-Cotta, C. P., e Quaresma, J. N. (2014). “Mass transfer simulation of biodiesel synthesis in microreactors”. *Proceedings of ENCIT 2014*, 1-8.
- Pontes, P. C., Naveira-Cotta, C. P., Macedo, E. N., e Quaresma, J. N. (2015). “Integral Transforms Analysis of Three-Dimensional Mass Transfer in the Transesterification Process in Microreactors”. *Proceedings of CHT-15. 6th International Symposium on Advances in Computational Heat Transfer*, 1-22.
- Renfer, A. (2013). “Microscale Thermofluidics in Integrated Water Cooling of 3D Electronic Chips”. Zurique: Tese de doutorado, ETH Zurich, Suiça.
- Samalan, V. K. (1989). “Convective Heat Transfer in Microchannels”. *Journal of Electronic Materials*, 18, 611-617.

- Santana, H. S., Júnior, J. L., e Taranto, O. P. (2015). “Numerical simulation of biodiesel synthesis in microchannels with circular obstructions”. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 98, pp. 137-146.
- Scherer, T. (2015). “50 Years of Moore’s Law”. Acesso em 05 de 05 de 2016, disponível em Elektor: <https://www.elektormagazine.com/articles/moores-law/6631>
- Schwarz, S., S.Borovinskaya, E., e Reschetilowski, W. (2013). “Base catalyzed ethanolysis of soy bean oil in microreactors: Experiments and kinetic modeling”. *Chemical Engineering Science*, 104, Chemical Engineering Science.
- Serizawa, A., Feng, Z., e Kawara, Z. (2002). “Two phase flow in microchannels”. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 26, 701-714.
- Shahidi, M. K., e Ozbelge, T. A. (1995). “Direct contact heat transfer between two immiscible liquids flowing in a horizontal concentric annulus”. *Int.L Multiphase Flow*, 21, 1025-1036.
- Sideman, S., e Peck, R. E. (1966). “Graphical solution for heat transfer in two-phase laminar flow”. *Israel J. Tech.*, 5, 203-210.
- Sideman, S., e Uliss, I. (1972). “Direct contact heat transfer between immiscible liquids in stratified flow with simultaneous interfacial boiling”. *Chemical Engineering Science*, 27, 1245- 1256.
- Silva, R. d. (2003). “A técnica da trasnformada integral genelarizada no escoamento e na transferência de calor em dutos”. João Pessoa: Tese de Doutorado, UFPB.
- Silva, R. L., Santos, C. A., Quaresma, J. N., e Cotta, R. M. (2011). “Integral Transforms Solution for Flow Development in Wavy-Wall Ducts”. *Int. J. Num. Meth. Heat & Fluid Flow*, 21(2), 219-243.
- Singh, J., Kockmann, N., e Nigam, K. D. (2014). “Novel three-dimensional microfluidic devide for process intensification”. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 86, 78-89.

- Somer, I. G., Bora, M., Kaymakçalan, O., Ozmen, S., e Arikan, Y. (1973). “Heat transfer to an immiscible liquid mixture and between liquids in direct contact”. *Desalination*, 13, 231-249.
- Sphaier, L. A., Cotta, R. M., Naveira-Cotta, C. P., e Quaresma, J. N. (2011). “The UNIT algorithm for solving one-dimensional convection-diffusion problems via integral transforms”. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 38, 565–571.
- Sui, Y., Lee, P. S., e Teo, C. J. (2011). “An experimental study of flow friction and heat transfer in wavy microchannels with rectangular cross section”. *International Journal of Thermal Sciences*, 50, 2473-2482.
- Talimi, V., Muzychka, Y. , e Kocabiyik, S. (2012). “A review on numerical studies of slug flow hydrodynamicsand heat transfer in microtubes and microchannels”. *International Journal of Multiphase Flow*, 39, 88-104.
- Talimi, V., Muzychka, Y., e Kocabiyik, S. (2013). “Slug flow heat transfer insquare microchannels”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 62, 752–760.
- Tan, C. W., e Hsu, C. (1970). “Mass transfer of decaying products with axial diffusion in cylindrical tubes”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 13, 1887-1905.
- Tan, C. W., e Hsu, C. (1972). “Low Peclet number mass transfer in laminar flow through circular tubes”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15, 2187-2201.
- Tan, C. W., e Normandia, M. J. (1975). “Low Peclet number diffusion in narrow rectangular channels”. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 2, 259 - 266.
- Thermaltake. (2016). Acesso em 06 de 05 de 2016, disponível em Thermaltake USA:
http://www.thermaltakeusa.com/Cooler/Liquid_Cooler /Water_Blocks/C_00002883/Pacific_W3_CPU_Water_Block/design.htm
- Thermaltake. (2017). Acesso em 26 de 1 de 2017, disponível em Thermaltake USA:
http://br.thermaltake.com/Cooler/Liquid_Cooler /All_in_One/C_00002457/Water_3_0_Extreme_S/design.htm

- Thiangtham, P., Keepaiboon, C., Kiatpachai, P., Asirvatham, L. G., Mahian, O., Dalkilic, A. S., e Wongwises, S. (2016). “An experimental study on two-phase flow patterns and heat transfer characteristics during boiling of R134a flowing through a multi-microchannel heat sink”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 98, 390-400.
- Tiselj, I., Hetsroni, G., Mavko, B., Mosyak, A., Pogrebnyak, E., e Segal, Z. (2004). “Effect of axial conduction on the heat transfer in micro-channels”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47, 2551–2565.
- Tiwari, M. K.; Zimmermann, S., Sharma, C. S., Alfieri, F., Renfer, A., Brunschwiler, T., Meijer, I., Michel, B., e Poulikakos, D. (2012). “Waste Heat Recovery in Supercomputers and 3D Integrated Liquid Cooled Electronics”. *13th IEEE ITHERM Conference*, 545-551.
- Tuckerman, D. B., e Pease, R. F. (1981). “High performance heat sinking for VLSI”. *IEEE Electron Dev. Lett.*, 2, 126-129.
- Vick, B., Ozisik, M. N., e Bayazitoglu, Y. (1980). “A method of analysis of low Pellet number thermal entry region problems with axial conduction”. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 7, 235-248.
- Vick, B., e Ozisik, M. N. (1981). “An exact analysis of low pellet number heat transfer in laminar flow with axial conduction”. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 8, 1-10.
- Vick, B., Ozisik, M. N., e Ullrich, F. D. (1983). “Effects of Axial Conduction in Laminar Tube Flow with Convective Boundaries”. *Journal of the Franklin Institute*, 316, 159-173.
- Vynnycky, M., Kimura, S., Kanev, K., e Pop, I. (1998). “Forced convection heat transfer from a flat plate: the conjugate problem”. *Int J. Heat Mass Transfer*, 41, 45-59.
- Wang, C. C., e Chen, C. K. (2002). “Forced Convection in a Wavy-Wall Channel”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 2587-2595.
- Webb, B., e Ramadhyani, S. (1985). “Conjugate heat transfer in a channel with staggered ribs”. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 28, 1679-1687.

- Weisberg, A., e Bau, H. H. (1992). "Analysis of microchannel for integrated cooling". *Int.J. Heat Mass Transfer*, 35, 2465-2474.
- Wen, Z., Yu, X., Tu, S.-T., Yan, J., e Dahlquist, E. (2009). "Intensification of Biodiesel Synthesis using zigzag micro-channel reactors". *Bioresource Technology*, 100, pp. 3054-3060.
- Wolfram, S. (2005). "The Mathematica Book". Cambridge: Wolfram Media.
- Xie, G.-N., Wang, Q.-W., e Zeng, M. (2007). "Numerical Investigation of Heat Transfer and Fluid Flow Characteristics Inside a Wavy Channel". *Heat Mass Transfer*, 43, 603-611.
- Xu, B., Ooi, K., e Wong, N. (2000). "Experimental Investigation of flow friction for liquid flow in microchannels". *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 27, 1165-1176.
- Yan, W.-M. (1993). "Transient conjugated heat transfer in channel flows with convection from the ambient". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36, 1295-1301.
- Yin, J., Yang, G., Hao, G., e LV, P. (2011). "Numerical Investigation of Flow and Heat Transfer in Corrugated Sinusoidal Wavy Channel". *Power and Energy Engineering Conference (APPEEC)*, 1-5.
- Yu, S., e Xin, M. (1994). "An Approximate Model of Microchannel Cooling". *Journal of Thermal Science*, 3, 243-249.
- Zhao, Q. S., e Bi, Q. C. (2001). "Co-current Air-water two-phase flow patterns in vertical triangular microchannels". *International Journal of Multiphase Flow*, 27, 765-782.
- Zhao, Y. (2006). "Liquid-Liquid Two-Phase Flow Patterns in a Rectangular Microchannel". *AIChE Journal*, 52, 4052-4060.
- Zimmermann, S., Meijer, I., Tiwari, M. K., Paredes, S., Michel, B., e Poulikakos, D. (2012). "Aquasar: A hot water cooled data center with direct energy reuse". *Energy*, 43, 237-245.
- Zotin, J. L. Z., Knupp, D. C., e Cotta, R. M. (2014). "Integral Transforms with Single Domain Formulation for Conjugated Heat Transfer in Multistream Direct Contact

Laminar Flow”. *Proceedings of ENCIT 2014 - November 10-13, 2014, Belém, PA, Brazil.*

Zotin, J. L., Knupp, D. C., e Cotta, R. M. (2016a). “Analytical-Numerical Solutions for Conjugated Heat Transfer in Multistream Microsystems”. In: M. Rebay, S. Kakaç, & R. M. Cotta, *Microscale and Nanoscale Heat Transfer* (1º ed., pp. 349-367). Boca Raton: CRC Press.

Zotin, J. L. Z., Knupp, D. C., e Cotta, R. M. (2016 b). “Conjugated Heat Transfer in Complex Geometries via Total Integral Transformation and Single Domain Formulation”. *4th International Conference on Computational Methods for Thermal Problems - ThermaComp2016*. July, Atlanta, USA.