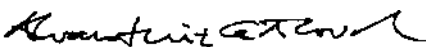


MÉTODOS DE REDUÇÃO DE BASE PARA PROBLEMAS TÉRMICOS  
EM REGIME TRANSIENTE COM CONDIÇÕES DE  
CONTORNO DE RADIAÇÃO E CONVECCÃO

*Fernando Carvalho dos Santos*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS  
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE  
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS  
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS  
EM ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Alvaro L. G. A. Coutinho, D. Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Luiz Landau, D. Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Breno Pinheiro Jacob, D. Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Chang Hung Kiang, Ph. D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1991

**SANTOS, FERNANDO CARVALHO DOS**

**Título [ Rio de Janeiro ] 1991**

**XII, 137 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M. Sc. , Engenharia Civil, 1991)**

**Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE**

**1. Método dos elementos Finitos I. COPPE/UFRJ II. Título (série)**

**Dedico**

à minha mãe *Ermencita Carvalho dos Santos* e

à minha noiva *Rosane Darcachy Marchon Vicker*

## AGRADECIMENTOS

Aos professores Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho e Luiz Landau pelo estímulo e amizade ao longo dos anos de trabalho em conjunto.

Aos amigos Cláudia, Luiz Fernando, Marco, Gray, Maria Lucia, Marcílio, Jorge, Adriana, Zacarias, Luiz Paulo, Moacir, Rafael e tantos outros que participaram de tantas alegrias durante estes anos de convivência neste caminho da pesquisa científica.

Aos funcionários Célio Noia e Gilberto pelo auxílio prestado na confecção gráfica da tese.

A Fernando L. B. Ribeiro pelo auxílio prestado na elaboração e impressão das malhas de elementos finitos utilizadas nos exemplos numéricos

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

**MÉTODOS DE REDUÇÃO DE BASE PARA PROBLEMAS TÉRMICOS  
EM REGIME TRANSIENTE COM CONDIÇÕES DE  
CONTORNO DE RADIAÇÃO E CONVECÇÃO**

*Fernando Carvalho dos Santos*

Agosto de 1991

Orientador: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Programa: Engenharia Civil

Nos últimos anos tem havido um interesse renovado pelos métodos de redução de base para a análise de problemas de transferência de calor em regime transiente. Particularmente, para condução de calor em regime transiente, pode-se mostrar que os métodos de redução baseados em algoritmos do tipo Lanczos ou Ritz são mais eficientes computacionalmente que os métodos de integração direta (métodos trapezoidal) ou o método modal clássico. Para problemas em regime transiente incluindo não-linearidades físicas, os métodos de redução embutidos num esquema do tipo Newton-Raphson com integração no tempo do tipo trapezoidal produzem uma solução rápida, confiável e precisa. Entretanto, quando a não-linearidade está restrita à condição de contorno, como no caso da condição de radiação térmica, outra estratégia pode ser proposta,

objeto desta tese. Esta é baseada na utilização do método da pseudo-força, que é largamente utilizada na análise de problemas de dinâmica de estruturas com não-linearidades localizadas. O aspecto chave desta implementação é a não necessidade de atualizações da matriz de condutividade, pelo fato que todos os termos não-lineares estão agrupados no lado direito das equações de transferência de calor. A eficiência computacional deste esquema de solução é demonstrada por exemplos numéricos.

Abstract of Thesis present to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degrees of Master of Science (M. Sc.).

**REDUCTION METHODS FOR TRANSIENT HEAT TRANSFER  
PROBLEMS WITH CONVECTION AND RADIATION  
BOUNDARY CONDITIONS**

*Fernando Carvalho dos Santos*

August 1991

Thesis Supervisor: Alvaro Luiz Gayoso de Azeredo Coutinho

Department: Civil Engineering

In the past few years there have been a renewed interest in reduction methods for transient heat transfer analysis. Particularly, for transient heat conduction, it has been shown that reduction methods based on Lanczos-type algorithms or Ritz methods are most effective than the usual direct approach ( $\alpha$ -methods) or classical modal methods. For transient heat transfer including nonlinear material laws, it can be shown that reduction methods, embedded within a trapezoidal rule algorithm for time marching with a Newton-Raphson scheme, provide an accurate, reliable and fast solution strategy. However, when the nonlinearities are restricted to the boundaries, as in the case of radiation boundaries, another strategy can be proposed which is the subject of the present dissertation. It is based on the utilization of the pseudo-force

algorithm, which is widely used in structural dynamics problems with localized nonlinearities. Its key aspect is that no costly matrix updates are needed, since all the nonlinear terms are grouped in the right hand side of the heat transfer equations. The computer effectiveness of this solution strategy is demonstrated by numerical experiments performed in standard tests and through comparisons against the usual numerical solution strategies.



## ÍNDICE

Página

### CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1 - Histórico e Motivação . . . . .	1
I.2 - Organização do Texto . . . . .	4

### CAPÍTULO II - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

II.1 - Formulação das Equações de Equilíbrio para Problemas de Transferência de Calor em Regime Transiente . . . . .	5
II.2 - Solução pelo Método dos Elementos Finitos . . . . .	9

### CAPÍTULO III - ANÁLISE LINEAR DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

III.1 - Introdução . . . . .	15
III.2 - Método de Integração Direta . . . . .	15
III.2.1 - Implementação para o Cálculo da Temperatura . . . . .	17
III.3 - Método de Redução Modal em Problemas Lineares de Transferência de Calor . . . . .	18

III.3.1 - Geração da Matriz de Transformação de Coordenadas Dependente do Fluxo de Calor . . . . .	22
III.4 - Critérios de Avaliação dos Vetores de Redução Modal . . . . .	26
III.4.1 - Critério de Avaliação pela Participação do Fluxo de Calor Externo . . . . .	28
III.4.2 - Critério de Avaliação pela Participação da Capacidade Térmica . . . . .	31
III.5 - Algoritmo dos Métodos de Redução Modal . . . . .	32
III.5.1 - Geração dos Vetores de Lanczos . . . . .	32
III.5.2 - Geração dos Vetores de Ritz . . . . .	36
III.5.3 - Comentários sobre a escolha do vetor de Partida . . . . .	39
III.6 - Exemplos Numéricos . . . . .	42
III.6.1 - Análise de Condução de Calor Unidimensional com Condição de Contorno de Convecção . . . . .	43
III.6.2 - Dissipação de Calor de um Túnel Passante por uma Massa de Rocha Não Homogênea . . . . .	57
 <b>CAPÍTULO IV - ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR</b>	
IV.1 - Introdução . . . . .	69
IV.2 - Análise Não-Linear Utilizando o Método da	

Pseudo-Força . . . . .	70
IV.3 - Implementação do Método da Pseudo-Força no Método de Integração Direta . . . . .	72
IV.3.1 - Algoritmo de Integração Direta das Equações Não-Lineares de Calor com o Método da Pseudo-Força . . . . .	73
IV.4 - Implementação do Método da Pseudo-Força no Método de Redução Modal . . . . .	76
IV.4.1 - Algoritmo de Integração das Equações Não-Lineares de Calor pelo Método de Redução Modal . . . . .	77
IV.5 - Comentários sobre a escolha do vetor de Partida para a análise não-linear . . . . .	79
IV.6 - Exemplos Numéricos . . . . .	81
IV.6.1 - Análise de Condução de Calor Unidimensional com Condição de Contorno de Convecção e Radiação . . . . .	82
IV.6.2 - Efeitos Térmicos Causados por Intrusão Basáltica em Rochas Sedimentares . . . . .	94
<b>CAPÍTULO V - CONCLUSÕES . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS. . . . .</b>	<b>112</b>

## APÊNDICES

### A - ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS NA ANÁLISE

A.1 - Elemento de Condução . . . . .	118
A.2 - Elemento de Capacidade Térmica . . . . .	124
A.3 - Elemento de Convecção . . . . .	124
A.4 - Elemento de Radiação . . . . .	128

### B - INTEGRAÇÃO EXATA

B.1 - Integração Exata de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem . . . . .	130
B.2 - Integração Exata para a Análise Não-Linear	132

### C - MÉTODO DE PRESCREVER A TEMPERATURA

C.1 - Método do Número Grande . . . . .	135
C.2 - Método do "0" e "1" Modificado . . . . .	136
C.3 - Através de Elementos de Convecção de Calor	136

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### I.1 - HISTÓRICO E MOTIVAÇÃO

Neste trabalho será utilizado o Método dos Elementos Finitos para a solução numérica de problemas de transferência de calor em regime transiente. Este método aproximado de discretização espacial transforma as equações diferenciais parciais que governam o problema, em um conjunto de equações diferenciais ordinárias semi-discretas que é geralmente resolvido pelos métodos de integração direta do tipo trapezoidal. Este método de solução, de propriedades numéricas já bastante conhecidas, é amplamente utilizado por programas comerciais como, ADINAT ( BATHE [ 1 ] ), ANSYS-PC/THERMAL [ 2 ] e etc.

Entretanto, GALLAGHER [ 3 ] em 1969, apresentou um trabalho sobre a utilização do método modal para a solução de problemas de condução de calor em regime transiente utilizando o Método dos Elementos Finitos. Diferentemente das estratégias usuais, os métodos de redução modal se baseiam na geração de uma base de transformação de coordenadas que gera um subespaço modal do espaço físico em que apenas as equações que contribuem efetivamente para a

solução serão utilizadas. Contudo, verificou-se que este método não apresentava um custo computacional aceitável para problemas com um grande número de equações, devido à necessidade de solução do problema de autovalor associado. Por outro lado, deste trabalho surgiu a base para a utilização de novos métodos modais de solução que serão aqui estudados.

Uma forma mais recente de obter-se a solução do problema é a utilização dos métodos de redução modal dependentes do fluxo de calor, já estudados por CARDONA [ 4], NOUR-OMID [ 5], COUTINHO [ 6], que serviram como ponto de partida para este trabalho.

Os algoritmos de redução modal dependentes do fluxo de calor utilizados são os de Lanczos, desenvolvido por LANCZOS [ 7] e o de Ritz, desenvolvido por WILSON [ 8]. Serão estudados os algoritmos que se baseiam na iteração inversa e direta. De forma a aumentar a eficiência computacional, serão também estudados critérios que podem ser utilizados para determinar a dimensão ótima do sub-espaco modal.

Desta forma, o objetivo do presente trabalho é estudar a utilização de métodos de redução modal para a análise de problemas de transferência de calor envolvendo condução, convecção ( transferência de calor de uma superfície para um fluido ) e radiação térmica ( que é a radiação eletromagnética emitida por um corpo em função de sua temperatura ). Os problemas com condução e convecção de

calor analisados são problemas lineares, enquanto os problemas que envolvem radiação térmica são problemas com não-linearidade na condição de contorno, e conseqüentemente, exigem um tratamento especial. Usualmente, utiliza-se para a solução destes problemas não-lineares os métodos iterativos do tipo NEWTON-RAPHSON, onde geralmente necessita-se de atualizações sucessivas da matriz de condutividade e radiação. Entretanto, os problemas onde a não-linearidade se encontra localizada na condição de contorno podem ser resolvidos através do Método da Pseudo-Força, proposto por STRICKLIN [9], cujas propriedades numéricas foram estudadas por TRUJILLO [10]. Este método, também iterativo, cuja idéia central consiste na separação do operador correspondente a não-linearidade em dois termos, um linear e outro não-linear. Este último é transferido para o lado do fluxo de calor e será chamado de termo da pseudo-força. As condições iniciais de iteração são fornecidas por um esquema de extrapolação linear, e uma vez que a não-linearidade fica situada no fluxo de calor, não há a necessidade de atualização da matriz de condutividade.

Os métodos de solução foram codificados na linguagem de computação FORTRAN 77 e o programa resultante foi compilado com otimização para a velocidade de execução. O programa foi executado no computador IBM 4381 com sistema operacional VM/SP Release 5.0, que se encontra no Núcleo de Computação Eletrônica (NCE) da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

## 1.2 - ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Além da introdução, o corpo do presente trabalho encontra-se organizado em quatro capítulos. Estes dedicam-se respectivamente ao desenvolvimento da teoria do Método dos Elementos Finitos para a solução de problemas de transferência de calor em regime transiente ( capítulo II ); ao estudo dos métodos de solução do sistema de equações lineares pela integração direta e pelos métodos de redução modal de Lanczos e de Ritz ( capítulo III ) e ao estudo dos métodos de solução do sistema equações não-lineares pela integração direta e pelos métodos de redução modal de Lanczos e de Ritz com a utilização do Método da Pseudo-Força ( capítulo IV ). Por sua vez, cada um destes capítulos contém os desenvolvimentos teóricos necessários em cada caso, além das aplicações dos procedimentos desenvolvidos na solução de problemas de engenharia.

Finalmente, o capítulo V apresenta os comentários finais, efetuando uma abordagem crítica do exposto no corpo da tese. Além disso, discute-se o futuro direcionamento das pesquisas relacionadas aos temas deste trabalho.



## CAPÍTULO II

## EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

## II.1 - FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR EM REGIME TRANSIENTE

Será descrito a seguir uma forma de obtenção da solução para problemas de transferência de calor em regime transiente pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

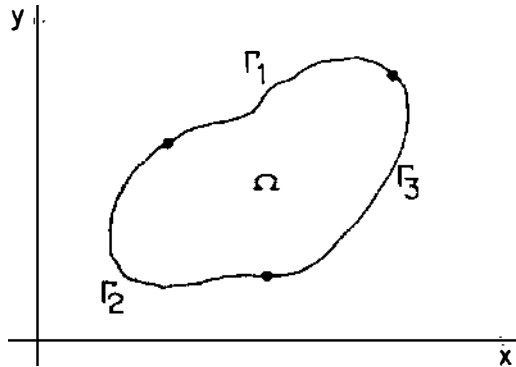


Figura II.1.1 - Corpo em estado de transferência de calor

Considere um corpo sólido de volume  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  e contorno  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  no estado de transferência de calor como mostrado na figura (II.1.1), com o material obedecendo a lei de Fourier de condução de calor,

$$q_x = -k_x \partial\theta / \partial x \quad (\text{II.1.1a})$$

$$q_y = -k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \quad (\text{II.1.1b})$$

onde  $\theta$  é a temperatura do corpo;  $q_x$  e  $q_y$  são os fluxos de calor por unidade de área;  $k_x$  e  $k_y$  são as condutividades térmicas correspondentes aos eixos cartesianos  $x$  e  $y$ . Considerando o corpo em equilíbrio tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = -q^c \quad (\text{II.1.2})$$

Sendo  $q^c$  a taxa de calor absorvida pelo material do corpo por unidade de volume, expressa por,

$$q^c = \rho c \dot{\theta} \quad (\text{II.1.3})$$

onde  $c$  é a calor específico do material,  $\rho$  a densidade,  $\dot{\theta}$  a derivada da temperatura em relação ao tempo e o ponto denota a derivada com relação ao tempo.

Na superfície do corpo podem ter as seguintes condições de contorno a serem satisfeitas:

$$\theta \Big|_{\Gamma_1} = \theta_c \quad (\text{II.1.4})$$

$$k_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_2} = q^\Gamma \quad (\text{II.1.5})$$

onde  $\theta_c$  é a temperatura conhecida ( temperatura prescrita ) na superfície  $\Gamma_1$ ,  $k_\eta$  é a condutividade térmica medida na direção normal à superfície, cujo sentido positivo aponta para fora,  $q^\Gamma$  é o fluxo de calor que entra pela superfície  $\Gamma_2$  do corpo. A equação (II.1.4) é conhecida como condição de contorno de Dirichlet, enquanto que a equação (II.1.5) como condição de contorno de Neumann.

As seguintes condições de contorno em  $\Gamma_2$  podem ser especificadas de acordo com (II.1.5):

i) Condição de fluxo de calor

O fluxo de calor pode ser prescrito em pontos específicos de  $\Gamma_2$ .

ii) Condição de contorno de convecção

Esta condição é expressa através da lei de Newton do resfriamento,

$$q^{\Gamma_c} = h ( \theta_a - \theta^\Gamma ) \quad (II.1.6)$$

onde  $h$  é o coeficiente de transferência de calor por convecção;  $\theta_a$  é a temperatura do fluido circundante;  $\theta^\Gamma$  é a temperatura do corpo na fronteira de convecção de calor e  $q^{\Gamma_c}$  o fluxo de calor de convecção por unidade de área.

## iii) Condição de contorno de radiação térmica

Esta condição é expressa através da lei de Stefan-Boltzmann de radiação térmica,

$$q^{\Gamma_R} = h_r \left[ (\theta_r)^4 - (\theta^{\Gamma_R})^4 \right] \quad (\text{II.1.7})$$

$$h_r = F_\epsilon F_g \sigma \quad (\text{II.1.8})$$

onde  $\theta_r$  é a temperatura da fonte de radiação térmica;  $\theta^{\Gamma_R}$  é a temperatura do corpo na fronteira de radiação térmica;  $h_r$  é o coeficiente de transferência de calor por radiação térmica;  $F_\epsilon$  é a emissividade monocromática do corpo;  $F_g$  é o fator de forma geométrica que relaciona a transferência de calor entre duas superfícies;  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e finalmente,  $q^{\Gamma_R}$  é o fluxo de calor de radiação por unidade de área.

Serão consideradas as seguintes hipóteses no uso de (II.1.1) à (II.1.7) :

i) Não há mudança de fase e efeito de calor latente.

ii) Estamos considerando a condição de condução de calor em sólidos e estruturas. Caso a transferência de calor envolva a análise de um fluido em movimento é necessário incluir na equação (II.1.2) o termo correspondente à transferência de calor por convecção através do meio. Entretanto, deve-se salientar que este

termo conduz a uma matriz de coeficientes não simétrica.

iii) A condição de transferência de calor será estudada em separado da análise de tensões.

iv) Os corpos analisados são os chamados *corpos cinzentos*, ou seja, aquele cuja emissividade monocromática do corpo é independente do comprimento de onda de radiação.

## II.2 - SOLUÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para o desenvolvimento da solução pelo MEF será adotada a formulação de Galerkin do problema de transferência de calor em regime transiente, HUGHES [11]. Desta forma sendo  $\delta$  e  $\mathcal{V}$  funções de valor real definidas em  $\Omega$ , onde  $\delta$  é o espaço dos valores prescritos e  $\mathcal{V}$  é o espaço das funções de ponderação, sejam  $\delta^h$  e  $\mathcal{V}^h$  espaços de dimensões finitas e aproximações de  $\delta$  e respectivamente, onde o superescrito  $h$  se refere a associação de  $\delta^h$  e  $\mathcal{V}^h$  a uma discretização do domínio  $\Omega$ . Assume-se que todos os membros de  $\mathcal{V}^h$  se anulam em  $\Gamma_1$  e que cada membro de  $\delta^h$  atende às condições de contorno prescritos em  $\Gamma_1$ . Logo, a solução  $u^h$  admite a seguinte representação,

$$u^h = v^h + \theta^h \quad (II.2.1)$$

onde  $v^h(t) \in \mathcal{V}^h$  (isto é, para cada instante de tempo  $t$   $v^h(\_,t)$  é uma função em  $\mathcal{V}^h$ )  $\theta^h(t) \in \delta^h$  sendo que

ambas satisfazem a condição de contorno  $u = g$  em  $\Gamma_1$ . Nesta formulação a variável  $x$  ( $x$  representa uma função do espaço cartesiano  $x$  e  $y$ ) das funções foi suprimida e onde aparece, por exemplo,  $v^h(0)$  isto quer representar  $v^h(\_,0)$ , ou seja, uma função de  $x$  para o instante de tempo  $t = 0$ . Todas as funções em (II.2.1) são funções do espaço e do tempo, isto é,

$$u^h(x,t) = v^h(x,t) + g^h(x,t) \quad (\text{II.2.2})$$

A formulação de Galerkin é definida como:

<p>Dados <math>f</math>, <math>g</math>, <math>h</math> e <math>u_0</math> achar <math>u^h = v^h + g^h</math> e  <math>u^h(t) \in \delta_t^h</math> isto para todo <math>w^h \in \mathcal{V}^h</math></p>
---

Sendo  $f$  o calor gerado por unidade de volume,  
 $f : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

Isto significa que  $f$  é uma função de  $x \in \Omega$  e  $t \in ]0, T[$ , logo pode-se escrever  $f = f(x,t)$ . De forma análoga as condições de contorno são dependentes do tempo,  $g : \Gamma_1 \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h : \Gamma_2 \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$ . A temperatura inicial deve ser dada como condição inicial do problema,  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Note que será considerado que  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  não variam com o tempo.

Considera-se também que as propriedades do material analisado, a densidade  $\rho$  e a capacidade térmica  $c$ , são

ambas positivas e funções de  $x \in \Omega$ .

A equação de transferência de calor será escrita como:

$$(\omega^h, \rho c \dot{u}^h) + a(\omega^h, u^h) = (\omega^h, f) + (\omega^h, h)_{\Gamma} \quad (II.2.3)$$

Sendo

$$a(\omega^h, u^h) = \int_{\Omega} \omega^h_{,i} k_{ij} u^h_{,j} d\Omega \quad (II.2.4)$$

$$\tilde{k} = \begin{bmatrix} k_{xx} & 0 \\ 0 & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (II.2.5)$$

$$(\omega^h, f) = \int_{\Omega} \omega^h f d\Omega \quad (II.2.6)$$

$$(\omega^h, h) = \int_{\Gamma_k} \omega^h h d\Gamma \quad (II.2.7)$$

onde  $k_{xx}$  (ou  $k_x$ ),  $k_{yy}$  (ou  $k_y$ ) são as condutividades térmicas e os índices  $i$  e  $j$  são índices livres, ou seja,  $i$  ou  $j$  podem assumir quaisquer das direções dos eixos cartesianos  $x, y$ . O ponto sobre a função, da mesma forma que antes, denota a diferenciação com relação ao tempo e o subscrito  $i$  representa a diferenciação com relação as direções dos eixos cartesianos. A notação  $a(\_,\_)$  representa o produto interno em  $\Omega$  ponderado por  $k_{ij}$ , ou norma de energia,  $(\_,\_)$  representa o produto interno em  $\Omega$  e  $(\_,\_)\_{\Gamma}$  representa o produto interno em  $\Gamma$ .

Utilizando as seguintes propriedades na formulação de Galerkin ,

$$a(w^h, u^h) = a(w^h, v^h) + a(w^h, g^h) \quad (\text{II.2.8})$$

$$(w^h, u^h) = (w^h, v^h) + (w^h, g^h) \quad (\text{II.2.9})$$

A equação (II.2.3) pode ser reescrita como:

$$(w^h, \rho c v^{\circ h}) + a(w^h, v^h) = (w^h, f) + (w^h, h)_{\Gamma} - (w^h, \rho c g^{\circ h}) - a(w^h, g^h) \quad (\text{II.2.10})$$

$$(w^h, \rho c v^h(0)) = (w^h, \rho c v_0) - (w^h, \rho c g^h(0)) \quad (\text{II.2.11})$$

Observa-se que o que aparece no lado direito das equações (II.2.10) e (II.2.11) são dados conhecidos. A equação (II.2.10), chamada de equação de Galerkin, é uma equação semi-discreta, porque o espaço é discretizado e o tempo permanece contínuo.

Considere agora que o corpo analisado, de domínio  $\Omega$  e fronteira  $\Gamma$ , foi discretizado em elementos de domínio  $\Omega^e$  e fronteira  $\Gamma^e$ , onde o superescrito  $e$  representa o número do elemento. Os pontos nodais podem existir em qualquer lugar do domínio  $\Omega^e$ , mais frequentemente eles são os vértices do elemento adotado. Seja  $n = \{1, 2, \dots, n_{n\Omega}\}$  o conjunto global dos número de nós onde  $n_{n\Omega}$  é o número de pontos nodais. O nó onde  $u^h$  deve ser determinado será representado como  $a$ . Os nós pertencentes ao conjunto  $n_g$  de nós prescritos, ou seja, onde  $u = g$ , devem ser excluídos e portanto, o conjunto de nós onde  $u^h$  deve ser determinado



será  $n - n_g$ . Será definido como  $n$  o número de elementos do conjunto  $n - n_g$ .

Logo a representação de  $v^h$  e  $g^h$  em termos das funções de base, será,

$$v^h(x,t) = \sum_{A \in \Sigma_{n-n_g}} H_A(x) \theta_A(t) \quad (\text{II.2.12})$$

$$g^h(x,t) = \sum_{A \in \Sigma_{n_g}} H_A(x) g_A(t) \quad (\text{II.2.13})$$

onde  $H_A$  é a função de interpolação,  $\theta_A$  a temperatura nodal e  $g_A$  os valores prescritos. Note que somente os valores nodais são dependentes do tempo. Substituindo-se (II.2.12) e (II.2.13) em (II.2.10) e (II.2.11) será obtida a expressão de Galerkin, cuja forma matricial resulta no sistema de equações diferenciais semi-discretas,

$$\underline{\underline{C}} \dot{\underline{\underline{\theta}}} + \underline{\underline{K}}^K \underline{\underline{\theta}} = \underline{\underline{f}}^q(t) \quad (\text{II.2.14})$$

onde  $\underline{\underline{C}}$  é a matriz de capacidade térmica, de ordem  $n \times n$ , simétrica positiva e semi-definida,  $\underline{\underline{K}}^K$  é a matriz de condutividade térmica esparsa, também de ordem  $n \times n$ , simétrica positiva e semi-definida,  $\underline{\underline{f}}^q(t)$  é o vetor do fluxo de calor por unidade de área,  $\underline{\underline{\theta}}$  é o vetor das temperaturas nodais e  $\dot{\underline{\underline{\theta}}}$  a derivada das temperaturas em relação ao tempo. O desenvolvimento completo destas matrizes pelo MEF se encontra no apêndice A.

A equação de transferência de calor com as condições

de contorno de convecção de calor e radiação térmica é obtida introduzindo as condições de contorno expressas pelas equações (II.1.6) e (II.1.7) na equação (II.2.14),

$$\underline{C} \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial t} + \underline{K}(\underline{\theta}) \underline{\theta} = \underline{f}(t) \quad (\text{II.2.15})$$

Sendo

$$\underline{K}(\underline{\theta}) = \underline{K}^K + \underline{K}^C + \underline{K}^R(\underline{\theta}) \quad (\text{II.2.16})$$

$$\underline{f}(t) = \underline{f}^o(t) + \underline{Q}^C + \underline{Q}^R \quad (\text{II.2.17})$$

$$\underline{Q}^C = \underline{K}^C \underline{\theta}_a \quad (\text{II.2.18})$$

$$\underline{Q}^R = \underline{K}^R \underline{\theta}_r \quad (\text{II.2.19})$$

onde  $\underline{K}$  é a soma das matrizes de condutividade térmica  $\underline{K}^K$ , com a de convecção de calor  $\underline{K}^C$ , mais a de radiação térmica  $\underline{K}^R$ ;  $\underline{f}(t)$  é fluxo de calor por unidade de área que corresponde a soma do fluxo de calor externo  $\underline{f}^o(t)$ , com o fluxo de calor devido a convecção de calor  $\underline{Q}^C$ , mais o fluxo de calor devido a radiação térmica  $\underline{Q}^R$ ;  $\underline{\theta}_a$  é a temperatura do fluido circundante e  $\underline{\theta}_r$  a temperatura da fonte de radiação térmica.

Deve-se salientar que a introdução da radiação torna a equação (II.2.15) não-linear, exigindo portanto um tratamento adequado para a obtenção da resposta transiente, como será visto no capítulo IV.

## CAPÍTULO III

### ANÁLISE LINEAR DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

#### III.1 - INTRODUÇÃO

Serão descritos a seguir os métodos utilizados para a análise de problemas lineares de transferência de calor envolvendo condução e convecção de calor, onde,

$$\tilde{K} = \tilde{K}^k + \tilde{K}^c \quad (\text{III.1.1})$$

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}^e(t) + \tilde{Q}^c \quad (\text{III.1.2})$$

#### III.2 - MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA

Utilizar-se-á o método trapezoidal geral descrito por HUGHES [11] para integrar o sistema de equações de equilíbrio semi-discretas de transferência de calor em regime transiente, equações (II.2.15), (III.1.1) e (III.1.2), com condição inicial.

$$\tilde{\theta}(t_0) = \tilde{\theta}_0 \quad (\text{III.2.1})$$

O algoritmo se baseia na seguinte formulação:

$$C \tilde{v}_{j+1} + K \tilde{d}_{j+1} = \tilde{f}_{j+1} \quad (\text{III.2.2})$$

Sendo

$$\tilde{d}_{j+1} = \tilde{d}_j + \Delta t \tilde{v}_{j+\alpha} \quad (\text{III.2.3})$$

$$\tilde{v}_{j+\alpha} = (1 - \alpha) \tilde{v}_j + \alpha \tilde{v}_{j+1} \quad (\text{III.2.4})$$

onde  $\tilde{d}_j$  e  $\tilde{v}_j$  são, respectivamente, aproximações de  $\theta(t_j)$  e  $\theta'(t_j)$ ;  $\tilde{f}_{j+1} = f(t_{j+1})$  é o fluxo de calor,  $\alpha$  é um parâmetro escolhido dentro do intervalo  $[0,1]$ ,  $\Delta t$  é o incremento de tempo.

Alguns valores de  $\alpha$  determinam membros da família do método trapezoidal que já são bem conhecidos, cujas designações especiais são apresentadas na tabela (III.1).

$\alpha$	DESIGNAÇÃO
0	Diferença para frente, Euler p/ frente
1/2	Regra trapezoidal, Crank-Nicolson
2/3	Esquema Galerkin
1	Diferença para atrás, Euler p/ atrás

Tabela III.1 - Designação dos Métodos Trapezoidais.

Existem dois tipos de implementação possíveis; o que se baseia na determinação da derivada  $\tilde{v}$  e o outro na determinação da temperatura  $\tilde{d}$ , sendo este último escolhido

por ser o mais vantajoso computacionalmente para ser implementado, como será visto mais adiante, pela característica de se utilizar matriz de capacidade térmica diagonal.

Portanto, o problema agora consiste em desenvolver uma função  $\underline{d} \equiv \underline{d}(t)$  que satisfaça a equação (II.2.15) e a condição inicial correspondente a equação (III.2.1),

$$\underline{d}(t_0) = \underline{d}_0 \quad \text{(III.2.5)}$$

onde  $\underline{d}_0$  é a temperatura inicial.

### III.2.1 - IMPLEMENTAÇÃO PARA O CÁLCULO DA TEMPERATURA

Para esta implementação é necessário desenvolver uma relação recursiva que relaciona o passo  $j$  ao passo  $j+1$ . Para isso define-se o valor de  $\bar{\underline{d}}_{j+1}$  como:

$$\bar{\underline{d}}_{j+1} = \underline{d}_j + (1 - \alpha) \Delta t \underline{v}_j \quad \text{(III.2.6)}$$

As equações (III.2.3) e (III.2.4) podem ser combinadas e expressas em termos da (III.2.6),

$$\underline{d}_{j+1} = \bar{\underline{d}}_{j+1} + \alpha \Delta t \underline{v}_{j+1} \quad \text{(III.2.7)}$$

Com isso, pode-se eliminar  $\underline{v}_{j+1}$  da equação (III.2.2), obtendo-se então,

$$\left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \tilde{C} + \tilde{K} \right] \tilde{d}_{j+1} = \tilde{f}_{j+1} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \tilde{C} \tilde{d}_{j+1}^-$$

(III.2.8)

Desta forma determina-se o valor de  $\tilde{d}_{j+1}$ , e  $\tilde{v}_{j+1}$  pode então ser obtido pela equação (III.2.7), ou seja,

$$\tilde{v}_{j+1} = \frac{\tilde{d}_{j+1} - \tilde{d}_{j+1}^-}{\alpha \Delta t} \quad \text{(III.2.9)}$$

A vantagem computacional citada anteriormente se deve ao fato de que se a matriz de capacidade térmica for diagonal, o lado direito da igualdade na equação (III.2.8) será mais simples de ser calculado. O método proposto é incondicionalmente estável para  $\alpha$  no intervalo  $[0,5, 1]$  conforme demonstra HUGHES [12], tanto para a análise linear quanto para a não-linear.

### III.3 - MÉTODO DE REDUÇÃO MODAL EM PROBLEMAS LINEARES DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

Dado o sistema de equações de equilíbrio semi-discretas de transferência de calor para regime transiente, equações (II.2.15), (III.1.1) e (III.1.2), o método de redução modal substitui o sistema original com  $n$  equações, por um outro de ordem reduzida obtido através da transformação de coordenadas,

$$\underline{\theta} = \phi \underline{x} \quad (\text{III.3.1})$$

onde  $\underline{x}$  é o vetor de temperaturas no novo sistema de coordenadas, ou temperaturas generalizadas, e  $\phi = [ \phi^1, \phi^2, \phi^3, \dots, \phi^m ]$  é a matriz de transformação, de ordem  $m \times n$ , onde geralmente  $m \ll n$ .

Desta forma, a resposta transiente  $\underline{\theta}(t)$  pode ser aproximada por uma combinação linear das temperaturas generalizadas  $\underline{x}(t)$ . Sendo assim, a precisão da resposta depende inteiramente da qualidade da matriz de transformação escolhida.

Aplicando a transformação de coordenadas, equação (III.3.1), à equação (II.2.15) obtém-se um novo sistema de equações,

$$\bar{C} \dot{\underline{x}} + \bar{K} \underline{x} = \bar{f}(t) \quad (\text{III.3.2})$$

sendo a matriz de capacidade térmica, condutividade e o vetor de fluxo de calor expressos no novo sistema de coordenadas por,

$$\bar{C} = \phi^T C \phi \quad (\text{III.3.3})$$

$$\bar{K} = \phi^T K \phi \quad (\text{III.3.4})$$

$$\bar{f}(t) = \phi^T f(t) \quad (\text{III.3.5})$$

O método clássico de redução modal utiliza como matriz de transformação de coordenadas a matriz de modos térmicos, cujas colunas são os  $m$  primeiros autovetores do problema de autovalor associado à equação (II.2.15), isto é,

$$\tilde{K} \phi = \tilde{C} \phi \tilde{\Lambda}_m \quad (\text{III.3.6})$$

onde  $\tilde{\Lambda}_m$  é a matriz de ordem  $m$  que contém os autovalores do problema. Além disso, caso os vetores  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m$  forem ortonormalizados em relação a  $\tilde{C}$ , tem-se a seguinte relação,

$$\phi_i^T \tilde{C} \phi_j = \delta_{ij} \quad (\text{III.3.7})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o operador Delta de Kronecker.

Isto conduz às relações de ortogonalidade,

$$\phi^T \tilde{K} \phi = \tilde{\Lambda}_m \quad (\text{III.3.8})$$

$$\phi^T \tilde{C} \phi = I_m \quad (\text{III.3.9})$$

onde  $I_m$  é a matriz identidade de ordem  $m$ .

Pré-multiplicando a equação (II.2.15) por  $\phi^T$  e aplicando a transformação de coordenadas (III.3.1), e as relações (III.3.8) e (III.3.9), o sistema de equações reduzido, para condução de calor em regime transiente, pode ser escrito como,



$$\mathbf{I}_m \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}_m \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{f}(t) \quad (\text{III.3.10})$$

A equação (III.3.10) corresponde a um conjunto de  $m$  equações desacopladas do tipo,

$$\ddot{x}_i + \lambda_{ii} \dot{x}_i = f_i ; \quad i = 1, m \quad (\text{III.3.11})$$

onde  $x_i$  e  $\dot{x}_i$  são, respectivamente, a temperatura generalizada e sua derivada;  $\lambda_{ii}$  o autovalor;  $f_i$  o fluxo de calor em coordenadas modais e o índice  $i$  representa a  $i$ -ésima componente da matriz ou vetor correspondente. Esta equação diferencial ordinária de primeira ordem é integrada no tempo para obtenção da resposta transiente, conforme descrito no apêndice B.

Este método de redução modal, proposto por GALLAGHER [3], mesmo muito atrativo, segundo GOUTINHO [13], não apresenta uma eficiência computacional aceitável. Isto se deve ao fato de que a resposta transiente é geralmente caracterizada pelos modos térmicos mais altos o que, conseqüentemente, torna muito custoso a solução da equação (III.3.6) para o número de modos necessários para uma representação adequada da resposta transiente.

### III.3.1 - GERAÇÃO DA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS DEPENDENTE DO FLUXO DE CALOR

Uma alternativa para a geração da matriz de transformação de coordenadas é a geração dos vetores de redução modal feita pelo algoritmo de Lanczos (LAN) proposto por NOUR-OMID [5,14] ou de Ritz (RITZ) proposto por WILSON [8]. O algoritmo gera uma base ortonormal na sequência de Krylov,

$$K(\underline{f}) = \text{span} \{ \underline{f}, \underline{A} \underline{f}, (\underline{A})^2 \underline{f}, \dots, (\underline{A})^m \underline{f} \} \quad (\text{III.3.13})$$

onde  $\underline{f}$  é o vetor de partida e a matriz  $\underline{A}$  é definida como:

$$\underline{A} = \underline{K}^{-1} \underline{C}, \text{ para iteração inversa} \quad (\text{III.3.14})$$

$$\underline{A} = \underline{C}^{-1} \underline{K}, \text{ para iteração direta} \quad (\text{III.3.15})$$

Os vetores podem ser gerados de forma  $\underline{K}$ -ortonormal, como descrito nas referências [15,16,17,18,19]. Como resultado, LAN ou RITZ produzem uma matriz de transformação de coordenadas  $\phi$ , cujas colunas são aproximações de Rayleigh-Ritz dos autovetores, e uma matriz diagonal  $\bar{\Lambda}_m$ , contendo uma aproximação dos  $m$  primeiros autovalores do problema de autovalor definido pela equação (III.3.6).

A técnica de geração pelo método de Lanczos se baseia na construção dos vetores da sequência de Krylov através da

reortogonalização de Gram-Schmidt. Em consequência, obtém-se um conjunto de  $m$  vetores  $\underline{C}$ -ortonormais que são utilizados como base para a transformação de coordenadas. Uma importante parte do processo é estabelecer um esquema de ortogonalização para os vetores adicionais da sequência de Krylov, levando em consideração a aritmética finita que faz com que se perca rapidamente a ortogonalidade da sequência de vetores. Entre os esquemas propostos, o de PARLETT [20] faz a ortogonalização com relação aos dois vetores anteriores, o que torna o algoritmo de Lanczos bem simples. Isto é obtido pela fórmula de recursão de Lanczos com três termos,

$$\beta_{i+1} \underline{x}_i = \underline{C}^{-1} \underline{K} \underline{x}_i - a \underline{x}_i - \beta_i \underline{x}_{i-1} \quad (\text{III.3.16})$$

Sendo

$$a_i = \underline{x}_i^T \underline{C} \underline{K}^{-1} \underline{C} \underline{x}_i \quad (\text{III.3.17})$$

$$\beta_{i+1} = \left( \underline{x}_i^T \underline{C} \underline{x}_i \right)^{1/2} \quad (\text{III.3.18})$$

onde  $\underline{x}_i$  são os vetores de Lanczos e  $\beta_{i+1}$  é um fator de escala. Em seguida, a matriz de condutividade térmica é projetada no subespaço de Lanczos definido pelo conjunto de vetores  $\underline{X} = [ \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m ]$ . Desta forma, tem-se,

$$\underline{\bar{K}} = \underline{X}^T \underline{K} \underline{X} \quad (\text{III.3.19})$$

A aproximação dos autovalores  $\omega_i^2$  associado a cada

vetor de  $\underline{x}$  é obtida pela solução do problema de autovalor no subespaço reduzido,

$$\bar{K} \underline{Q} = \underline{Q} \bar{\Lambda} \quad (\text{III.3.20})$$

onde  $\bar{\Lambda}$  é uma matriz diagonal que contém uma aproximação dos autovalores. A matriz de transformação de coordenadas é obtida através de,

$$\underline{\phi} = \underline{X} \underline{Q} \quad (\text{III.3.21})$$

A técnica de geração pelo método de Ritz é semelhante ao método de Lanczos, diferindo apenas na reortogonalização de Gram-Schmidt, onde ao invés de efetuar-se a ortogonalização com relação aos dois vetores anteriores, efetua-se com relação a todos os vetores anteriores. Isto pode ser sumarizado através do processo,

Fornecer um vetor inicial  $u_1$ .

$$\text{Calcular } x_1 = u_1 / \beta_1 \quad (\text{III.3.22})$$

$$\text{Sendo } \beta_1 = (u_1^T C u_1)^{1/2} \quad (\text{III.3.23})$$

Cálculo dos vetores adicionais,  $i = 2, \dots, L$ .

Resolver para a iteração:

$$\text{Inversa: } K \underline{x}_i^* = C \underline{x}_{i-1} \quad (\text{III.3.24})$$

$$\text{Direta: } C \underline{x}_i^* = K \underline{x}_{i-1} \quad (\text{III.3.25})$$

Para  $j = 1$  a  $i-1$  faça

$$c_j = \tilde{x}_j^T G \tilde{x}_i^* \quad (\text{III.3.26})$$

$$\tilde{x}_i^{*(j-1)} = \tilde{x}_i^{*(j)} - c_j \tilde{x}_j \quad (\text{III.3.27})$$

Fim do loop

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_i^{*(i)} / \beta_i \quad (\text{III.3.28})$$

Sendo

$$\beta_i = \left( \tilde{x}_i^{*(i)T} G \tilde{x}_i^{*(i)} \right)^{1/2} \quad (\text{III.3.29})$$

onde  $\tilde{x}_j$ ,  $j = 1$  à  $i$ , são agora os vetores de Ritz e  $\beta_i$  é um fator de escala semelhante ao do método de Lanczos.

Porém, é conhecido, BJORK [15], que o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para a obtenção de um conjunto de vetores ortogonais é computacionalmente instável. Os vetores calculados perdem a ortogonalidade devido ao auto cancelamento provocado pelo erro de aritmética finita que possuem os vetores anteriores. Para eliminar este problema será utilizado o método de ortogonalização modificado. Além disso, para aumentar a estabilidade no método pode-se fazer a atualização utilizando o vetor para regime permanente ao invés do vetor  $\tilde{x}_{i-1}$  na equação (III.3.24) ou (III.3.25), como proposto por LEGER [21]. Portanto, a equação (III.3.24) ou (III.3.25)

deve ser substituída pelas seguintes equações,

$$\tilde{a}_{i-1} = \tilde{x}_{i-1}^T \tilde{C} \tilde{u}_{i-1} \quad (\text{III.3.30})$$

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_{i-1} - \tilde{a}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \quad (\text{III.3.31})$$

Resolver para a iteração:

$$\text{Inversa: } \tilde{K} \tilde{x}_i^* = \tilde{C} \tilde{u}_i \quad (\text{III.3.32})$$

$$\text{Direta: } \tilde{C} \tilde{x}_i^* = \tilde{K} \tilde{u}_i \quad (\text{III.3.33})$$

A forma básica de implementação dos algoritmos será descrita adiante no item III.5.

#### III.4 - CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO DOS VETORES DE REDUÇÃO MODAL

A geração de vetores de Lanczos ou Ritz para os métodos de análise por redução modal requer a determinação do menor número de vetores que representem a solução de forma precisa. Para um melhor desempenho computacional esta determinação deve ser feita de uma forma automática, durante a geração dos vetores.

Os critérios de avaliação apresentados adiante, equivalentes aos propostos por LEGER [22] para a análise estrutural, levam em consideração que durante a geração dos vetores estão disponíveis três dados do problema: as matrizes de condutividade térmica e de capacidade térmica e o vetor de partida da iteração, que normalmente corresponde

a uma função do fluxo de calor. Portanto, pode-se dizer que a solução  $\theta$  é uma função de,

$$\theta = \theta (K, C, p(s, t)) \quad (\text{III.4.1})$$

O fluxo de calor, dado pelo vetor  $p(s, t)$ , pode geralmente ser decomposto em um vetor  $f(s)$  que representa a distribuição espacial do fluxo e uma função escalar do tempo  $g(t)$ . Logo  $\theta$  pode ser reescrito como,

$$\theta = \chi (K, C, f) \Psi(t) \quad (\text{III.4.2})$$

onde  $\chi$  é considerada invariante no tempo e  $\Psi(t)$  é uma função escalar do tempo, que caracteriza a variação da resposta de  $\theta$  ao longo do tempo, devido à  $g(t)$ .

Os vetores gerados pelos algoritmos de Lanczos e Ritz podem ser escritos como,

$$\underline{x}_i = \underline{x}_i (K, C, f) \quad (\text{III.4.3})$$

e os autovetores associados como,

$$\phi = \phi_i (K, C, f) = \phi (K, C) \quad (\text{III.4.4})$$

Pelas equações (III.4.3) e (III.4.4) serão determinados os critérios de participação da distribuição espacial do vetor de fluxo de calor e da participação da capacidade térmica.

O primeiro critério reflete o efeito do fluxo de calor na resposta. De acordo com HANSTEEN [18], erros nos métodos modais são causados pela omissão de componentes do fluxo que são ortogonais aos modos incluídos na análise.

O segundo critério se baseia no fato que a capacidade térmica altera a absorção da energia em trânsito na massa do material. Portanto, altera a velocidade de variação da temperatura na análise transiente. A resposta  $\theta$  pode ser expressa como:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{x}_i \quad (\text{III.4.5})$$

onde

$$\gamma_i = \theta^T \tilde{C} \tilde{x}_i \quad (\text{III.4.6})$$

Sendo assim, o peso da contribuição dos  $\tilde{x}_i$  na resposta depende da intensidade dos vetores  $\theta$  e  $\tilde{C} \tilde{x}_i$ , além do ângulo entre eles. Portanto, torna-se evidente que a participação da distribuição da capacidade térmica é importante para a geração dos vetores que compõe a matriz de transformação de coordenadas.

### III.4.1 - CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO PELA PARTICIPAÇÃO DO FLUXO DE CALOR EXTERNO

A distribuição espacial do vetor de fluxo de calor na



equação (III.2.1) pode ser fatorada nas direções do subespaço como,

$$\underline{f}(s) = \underline{X} \underline{\omega} \quad (\text{III.4.7})$$

onde  $\underline{\omega}$  é a amplitude do vetor de redução modal em coordenadas globais para o vetor de fluxo. A matriz  $\underline{X}$  de redução modal, de ordem  $n \times n$ , é o operador de transformação das coordenadas globais  $\underline{\omega}$  para as coordenadas da fluxo  $\underline{f}$ .

Aplicando a ortonormalidade da capacidade térmica aos vetores de redução modal da equação (III.4.7),  $\underline{\omega}$  pode ser obtido por,

$$\underline{\omega} = \underline{f}^T \underline{C} \underline{X} \quad (\text{III.4.8})$$

Em forma de componentes, esta equação pode ser escrita como,

$$\omega_i = \underline{f}_i^T \underline{C} \underline{x}_i \quad (\text{III.4.9})$$

onde o subscrito  $i$  indica a  $i$ -ésima direção principal dos vetores de redução modal.

Portanto, a distribuição espacial  $\underline{f}(s)$  pode ser expressa como.

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{f}_i^T G \tilde{x}_i \quad (\text{III.4.10})$$

Entretanto, se apenas  $m$  vetores de redução modal forem utilizados para a matriz de transformação  $\tilde{X}$  e sendo  $(n-m)$  o número de componentes do vetor de fluxo omitidos, a equação (III.4.10) não atenderá a igualdade pois existirá um vetor de erro. Este, pode ser expresso como,

$$\tilde{e}_m = \tilde{f} - \tilde{f}_m \quad (\text{III.4.11})$$

onde

$$\tilde{f}_m = \sum_{i=1}^m \tilde{x}_i \tilde{f}_i^T G \tilde{x}_i \quad (\text{III.4.12})$$

Assim, o número de vetores de redução modal a serem incluídos na transformação tem uma relação direta com a precisão da análise. Um critério de avaliação pode ser definido a partir do vetor de erro  $\tilde{e}_m$  como a seguir:

$$\varepsilon_m = | \tilde{f}_m^T \tilde{e}_m | / ( \tilde{f}_m^T \tilde{f}_m ) \quad (\text{III.4.13})$$

onde  $\varepsilon_m$  é o erro cometido no truncamento dos modos que não foram representados na base de transformação de coordenadas.

Pode-se observar que quando se utiliza todos os modos o valor de  $\varepsilon_n$  será igual a zero. A geração dos vetores pode ser interrompida quando  $\varepsilon_m$  for menor que uma tolerância

pré-estabelecida que de acordo com LEGER [22] deve se situar em torno de 0,05 a 0,10.

### III.4.2 - CRITÉRIO DE AVALIAÇÃO PELA PARTICIPAÇÃO DA CAPACIDADE TÉRMICA

Dado a dependência da solução em relação a matriz de capacidade térmica, a eficiência no uso dos vetores de redução modal pode ser também indicada por,

$$\zeta_m = \frac{\sum_{i=1}^m (\bar{C}^T x_i)^2}{\sum_{i=1}^n \bar{C}_i} \quad (\text{III.4.14})$$

onde  $\zeta_m$  é a contribuição da capacidade térmica contida na transformação e  $\bar{C}$  é um vetor cujo  $i$ -ésimo termo  $\bar{C}_i$  é calculado por,

$$\bar{C}_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} \quad (\text{III.4.15})$$

No nosso caso, utiliza-se matriz de capacidade térmica diagonal. Portanto,

$$\bar{C}_i = C_{ii} \quad (\text{III.4.16})$$

Note que  $\zeta_m$  se aproxima monotonicamente de 1 quando  $m$  tende a  $n$ . Este critério de avaliação pode ser utilizado para interromper a geração quando  $\zeta_m$  for superior a uma tolerância pré-estabelecida que deve situar-se entre 0,9 a 0,95, segundo LEGER [22].

### III.5 - ALGORITMO DOS MÉTODOS DE REDUÇÃO MODAL

Serão descritos agora os algoritmos de Lanczos e Ritz para a obtenção dos vetores de redução modal. Como já evidenciado anteriormente, estes algoritmos diferem basicamente na forma de ortogonalização dos vetores gerados. Enquanto o método de Ritz faz a ortogonalização com relação a todos os vetores anteriores, o método de Lanczos somente mantém a ortogonalidade com relação aos dois vetores anteriores.

O algoritmo de Lanczos é o mais vantajoso computacionalmente, entretanto por utilizar-se aritmética de precisão finita, o algoritmo gera vetores adicionais que podem perder rapidamente a ortogonalidade no decorrer das iterações.

#### III.5.1 - GERAÇÃO DOS VETORES DE LANCZOS

Algoritmo de geração dos vetores de Lanczos com os critérios de avaliação para os dois tipos de iteração,

inversa e direta.

### INICIO DA ITERAÇÃO

a) Cálculo de:

$$a.1) \text{ SM} = \sum_{i=1}^n \bar{C}_i$$

$$a.2) \tilde{f}^T \tilde{f}$$

$$a.3) \tilde{f}^T \tilde{C}$$

b) Gerando o vetor de partida para a iteração:

b.1) Inversa pela solução do problema em regime permanente,

$$K \tilde{x}_1^* = \tilde{f}$$

$$\tilde{w}_1^* = K \tilde{x}_1^* = \tilde{f}$$

b.2) Direta, o próprio fluxo de calor,

$$C \tilde{x}_1^* = K \tilde{x}_0 = \tilde{f}$$

$$\tilde{w}_1^* = K \tilde{x}_0 = \tilde{f}$$

c) Normalização de  $\tilde{x}_1^*$  com relação a capacidade térmica,

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1^* / \beta, \quad \beta = \|\tilde{x}_1^*\|_C, \quad \text{armazena } \tilde{x}_1.$$

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1^* / \beta, \quad \text{armazena } \tilde{w}_1.$$

onde o símbolo  $\|\cdot\|_C$  representa a norma em relação a capacidade térmica, ou seja,  $\|\tilde{v}\|_C = (\tilde{v}^T \tilde{C} \tilde{v})^{1/2}$ , para  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n$ .

d) Avaliação do vetor gerado:

d.1) Cálculo do erro de participação do fluxo de

calor,

$$\tilde{f}_m = \tilde{x}_1^T (\tilde{f}^T \tilde{C}) \tilde{x}_1$$

$$\varepsilon_m = | \tilde{f}_m^T (\tilde{f}_m - \tilde{f}_{m-1}) | / (\tilde{f}_m^T \tilde{f}_m)$$

d.2) Cálculo da participação da capacidade térmica,

$$S = (\tilde{x}_1 \tilde{C}^T)$$

$$SMO = S^2$$

$$\zeta_m = SMO / SM$$

d.3) Controle das tolerâncias atingidas.

Se  $\varepsilon_m < TOL1$  então o critério foi atendido

Se  $\zeta_m \geq TOL2$  então o critério foi atendido

Caso o critério de avaliação escolhido for atendido então pare a iteração.

Caso contrário continue a iteração.

Obs: TOL1 e TOL2 são tolerâncias pré-estabelecidas, citadas nos itens (III.4.1) e (III.4.2).

## GERAÇÃO AUTOMÁTICA DOS VETORES ADICIONAIS

De  $i = 2$  até a convergência faça:

e) Geração de um novo vetor para a iteração:

e.1) Inversa, cálculo de:

$$\tilde{w}_i^* = \tilde{C} \tilde{x}_{i-1}^*$$

$$\tilde{K} \tilde{x}_i^* = \tilde{w}_i^*$$

e.2) Direta, cálculo de:

$$\tilde{w}_i^* = \tilde{K} \tilde{x}_{i-1}^*$$

$$\tilde{C} \tilde{x}_i^* = \tilde{w}_i^*$$

f) Ortogonalização com relação aos dois vetores anteriores.

f.1) Cálculo de  $a$ ,

$$a = \underline{x}_{i-1}^T C \underline{x}_i^*$$

f.2) Cálculo de:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{x}}_i &= \underline{x}_i^* - a \underline{x}_{i-1} \\ \underline{\tilde{w}}_i &= \underline{w}_i^* - a \underline{w}_{i-1} \end{aligned}$$

f.3) Cálculo de:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_i &= \underline{\tilde{x}}_i - \beta \underline{x}_{i-1} \\ \hat{\underline{w}}_i &= \underline{\tilde{w}}_i - \beta \underline{w}_{i-1} \end{aligned}$$

g) Normalização de  $\hat{\underline{x}}_i$  com relação a capacidade térmica.

$$\begin{aligned} \underline{x}_i &= \hat{\underline{x}}_i / \beta, \quad \beta = \|\hat{\underline{x}}_i\|_C, \text{ armazena } \underline{x}_i. \\ \underline{w}_i &= \hat{\underline{w}}_i / \beta, \text{ armazena } \underline{w}_i. \end{aligned}$$

h) Avaliação do vetor gerado:

h.1) Cálculo do erro de participação do fluxo de calor,

$$\begin{aligned} \underline{f}_m &= \underline{x}_i ( \underline{f}^T C ) \underline{x}_i + \underline{f}_m \\ \varepsilon_m &= | \underline{f}^T ( \underline{f} - \underline{f}_m ) | / ( \underline{f}^T \underline{f} ) \end{aligned}$$

h.2) Cálculo da participação da capacidade térmica,

$$\begin{aligned} S &= ( \underline{x}_i C^T ) \\ SYM &= S^2 + SYM \\ \zeta_m &= SYM / SM \end{aligned}$$

h.3) Controle das tolerâncias atingidas.

Se  $\varepsilon_m < \text{TOL1}$  então o critério foi atendido

Se  $\zeta_m \geq \text{TOL2}$  então o critério foi atendido

Caso o critério de avaliação escolhido for

atendido então vá para o FIM DA ITERAÇÃO.

Caso contrário volte ao início da iteração.

### FIM DA ITERAÇÃO

i) Projetar a matriz de condutividade térmica no subespaço de Lanczos.

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T W$$

onde  $\tilde{X} = [ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m ]$  e  $W = [ w_1, w_2, \dots, w_m ]$ .

### III.5.2 - GERAÇÃO DOS VETORES DE RITZ

Algoritmo de geração dos vetores de Ritz com os critérios de avaliação para os dois tipos de iteração, inversa e direta e correção estática dos vetores.

#### i) INÍCIO DA ITERAÇÃO

a) Cálculo de:

$$a.1) SM = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i$$

$$a.2) \tilde{f}^T \tilde{f}$$

$$a.3) \tilde{f}^T \tilde{G}$$

b) Gerando o vetor de partida para a iteração:

b.1) Solução para o primeiro vetor, resolver:

$$\tilde{K} \tilde{u}_1 = \tilde{f}$$



b.2) Inversa, pela solução do problema em regime permanente,

$$\begin{aligned} \tilde{K} \tilde{x}_1^* &= \tilde{C} \tilde{u}_1 \\ \tilde{w}_1^* &= \tilde{C} \tilde{u}_1 \end{aligned}$$

b.3) Direta, o próprio fluxo de calor,

$$\begin{aligned} \tilde{C} \tilde{x}_1^* &= \tilde{f} = \tilde{K} \tilde{u}_1 \\ \tilde{w}_1^* &= \tilde{f} \end{aligned}$$

c) Normalização de  $\tilde{x}_1^*$  com relação a capacidade térmica,

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= \tilde{x}_1^* / \beta, \quad \beta = \|\tilde{x}_1^*\|_{\tilde{C}}, \quad \text{armazena } \tilde{x}_1. \\ \tilde{w}_1 &= \tilde{w}_1^* / \beta, \quad \text{armazena } \tilde{w}_1. \end{aligned}$$

d) Avaliação do vetor gerado:

d.1) Cálculo do erro de participação do fluxo de calor,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_m &= \tilde{x}_1 (\tilde{f}^T \tilde{C}) \tilde{x}_1 \\ \epsilon_m &= | \tilde{f}^T (\tilde{f} - \tilde{f}_m) | / (\tilde{f}^T \tilde{f}) \end{aligned}$$

d.2) Cálculo da participação da capacidade térmica,

$$\begin{aligned} S &= (\tilde{x}_1 \tilde{C}^T) \\ SXM &= S^2 \\ \zeta_m &= SXM / SM \end{aligned}$$

d.3) Controle das tolerâncias atingidas.

Se  $\epsilon_m < \text{TOL1}$  então o critério foi atendido

Se  $\zeta_m \geq \text{TOL2}$  então o critério foi atendido

Caso o critério de avaliação escolhido for atendido então pare a iteração.

Caso contrário continue a iteração.

Obs: TOL1 e TOL2 são tolerâncias pré-estabelecidas,

citadas nos itens (III.4.1) e (III.4.2).

### GERAÇÃO AUTOMÁTICA DOS VETORES ADICIONAIS

De  $i = 2$  até a convergência faça:

e) Cálculo da correção da resposta em regime permanente dos vetores,

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{i-1} &= \tilde{x}_{i-1}^T \tilde{G} \tilde{u}_{i-1} \\ \tilde{u}_i &= \tilde{u}_{i-1} - \tilde{a}_{i-1} \tilde{x}_{i-1} \end{aligned}$$

f) Geração de um novo vetor para a iteração:

f.1) Inversa, cálculo de:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i^* &= \tilde{G} \tilde{u}_i \\ \tilde{K} \tilde{x}_i^* &= \tilde{w}_i^* \end{aligned}$$

f.2) Direta, cálculo de:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i^* &= \tilde{K} \tilde{u}_i \\ \tilde{G} \tilde{x}_i^* &= \tilde{w}_i^* \end{aligned}$$

g) Ortogonalização de Gram-Schmidt modificada.

De  $j = 1$  até  $i-1$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j &= \tilde{x}_j^T \tilde{G} \tilde{x}_i^{*(j)} \\ \tilde{x}_i^{*(j+1)} &= \tilde{x}_i^{*(j)} - \tilde{c}_j \tilde{x}_j \end{aligned}$$

h) Normalização de  $\tilde{x}_i^{*(i)}$  com relação a capacidade térmica.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= \tilde{x}_i^{*(i)} / \beta, \quad \beta = \|\tilde{x}_i^{*(i)}\|_{\tilde{G}}, \quad \text{armazena } \tilde{x}_i. \\ \tilde{w}_i &= \tilde{w}_i^{*(i)} / \beta, \quad \text{armazena } \tilde{w}_i. \end{aligned}$$

i) Avaliação do vetor gerado:

i.1) Cálculo do erro de participação do fluxo de calor,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_m &= \tilde{x}_i (\tilde{f}^T \tilde{C}) \tilde{x}_i + \tilde{f}_m \\ \varepsilon_m &= | \tilde{f}^T (\tilde{f} - \tilde{f}_m) | / (\tilde{f}^T \tilde{f}) \end{aligned}$$

i.2) Cálculo da participação da capacidade térmica,

$$\begin{aligned} S &= (\tilde{x}_1 \tilde{C}^T) \\ SXM &= S^2 + SXM \\ \zeta_m &= SXM / SM \end{aligned}$$

i.3) Controle das tolerâncias atingidas.

Se  $\varepsilon_m < TOL1$  então o critério foi atendido

Se  $\zeta_m \geq TOL2$  então o critério foi atendido

Caso o critério de avaliação escolhido for atendido então vá para o FIM DA ITERAÇÃO.

Caso contrário volte ao início da iteração.

### FIM DA ITERAÇÃO

j) Projetar a matriz de condutividade térmica no subespaço de Ritz.

$$\tilde{K} = \tilde{X}^T \tilde{W}$$

onde  $\tilde{X} = [ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_m ]$  e  $\tilde{W} = [ \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_m ]$ .

### III.5.3 - COMENTÁRIOS SOBRE A ESCOLHA DO VETOR DE PARTIDA

O vetor de partida pode ser arbitrariamente escolhido.

Entretanto, estudos já feitos por PARLETT [20] e

CULLUM [23] demonstram que melhores resultados podem ser obtidos por uma escolha especial do vetor de partida.

Para o caso da iteração inversa, escolhendo-se como vetor de partida o vetor das temperaturas em regime permanente se obterá uma base de redução modal que levará a uma boa solução ao longo do domínio, porém não ficam garantidos os pontos nodais onde existem fluxo de calor. Pode-se ainda citar que geralmente obtém-se como primeiro autovalor o menor autovalor do problema de autovalor generalizado.

Na iteração direta a escolha feita é o fluxo de calor, que fornecerá uma base de redução modal que levará a uma boa solução nos pontos nodais onde há fluxo de calor, nos pontos do domínio não se terá nenhuma garantia. Ao contrário do caso anterior, obtém-se geralmente como primeiro autovalor o maior autovalor do problema de autovalor generalizado.

Uma outra estratégia é utilizar um vetor de partida defasado, conforme alternativa proposta por CARDONA [4]. Esta considera a temperatura no instante de tempo  $\alpha \Delta t$  ao invés do instante  $t_0 = 0$ . Esta escolha tem o propósito de fornecer um vetor de partida com algumas características da solução transiente.

Este vetor é obtido a partir da primeira solução do sistema pela integração direta pelo método trapezoidal,

$$\left( \tilde{K} + \frac{\tilde{G}}{\alpha \Delta t} \right) \tilde{x}_1 = \tilde{f} + \frac{\tilde{G} \tilde{\theta}_0}{\alpha \Delta t} \quad (\text{III.5.1})$$

onde  $\tilde{\theta}_0$  é a temperatura inicial do corpo e  $\tilde{x}_1$  é o vetor de partida defasado.

### III.6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Serão analisados dois problemas numéricos. O primeiro, de condução de calor unidimensional com condição de contorno de convecção, será utilizado para verificar a concordância dos resultados numéricos com os resultados analíticos. O segundo, de condução de calor bidimensional, será utilizado para verificar-se que os métodos de redução modal são eficientes em problemas de grandes discretizações.

### III.6.1 - ANÁLISE DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CONVECÇÃO

Será analisado um problema unidimensional de condução de calor com condição de contorno de convecção nos extremos, cujos dados e solução analítica foram obtidos do trabalho de OWEN [24]. O domínio foi discretizado por 12 elementos de condução, o contorno por dois elementos de convecção de calor, um em cada extremidade. A malha possui ao todo 26 nós e 13 graus de liberdade, conforme pode ser visto na figura (III.6.1.1).

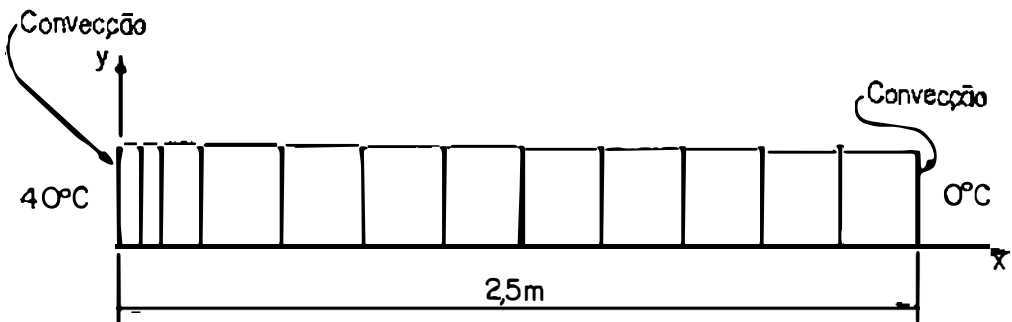


Figura III.6.1.1 - Corpo linear com condição de contorno de convecção discretizado.

As propriedades físicas são: coeficiente de condução de calor  $1,4 \text{ W/m}^\circ\text{C}$  , capacidade térmica  $1000 \text{ Ws/m}^2/\circ\text{C}$  e coeficiente de transferência de calor por convecção  $21 \text{ W/m}^2/\circ\text{C}$ .

As condições iniciais e de contorno são: temperatura inicial do corpo uniforme de  $0^\circ\text{C}$  , temperatura do fluido externo na coordenada  $x = 0,0 \text{ m}$  ,  $\theta_0 = 40^\circ\text{C}$  ;  $x = 2,5 \text{ m}$  ,  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$  . Estas permanecem constantes ao longo de toda a análise. Os incrementos de tempo utilizados para a integração são de 1 e 10 segundos.

Este exemplo será utilizado para se avaliar de forma geral o desempenho do método de redução modal quando confrontado com os resultados obtidos pelo método trapezoidal e com resultados analíticos. Serão feitas comparações com análises utilizando a redução da quantidade de modos térmicos e sua consequência na precisão da resposta. As comparações serão feitas com os resultados do problema em  $x = 0,0 \text{ m}$ .

#### 1) Análise da precisão da resposta

Pode-se observar que os resultados obtidos pelo métodos modais com a integração exata das equações desacopladas considerando  $\Delta t = 10 \text{ s}$  e todos os modos, apresentados respectivamente nas figuras (III.6.1.2) e (III.6.1.3), para os métodos de redução de Lanczos e Ritz, apresentam uma precisão maior que a obtida pelo método



trapezoidal, figura (III.6.1.4) . Além disso, observa-se que a resposta obtida pelo método trapezoidal com  $\alpha = 0,5$  apresenta oscilações. Reduzindo-se o intervalo de tempo para 1 segundo esta oscilação desaparece, conforme mostrado na figura (III.6.1.5) e a precisão também aumenta. Este comportamento não ocorre com os métodos de redução modal uma vez que as equações desacopladas são integradas exatamente. Desta forma a precisão da resposta depende unicamente da qualidade da matriz de transformação de coordenadas.

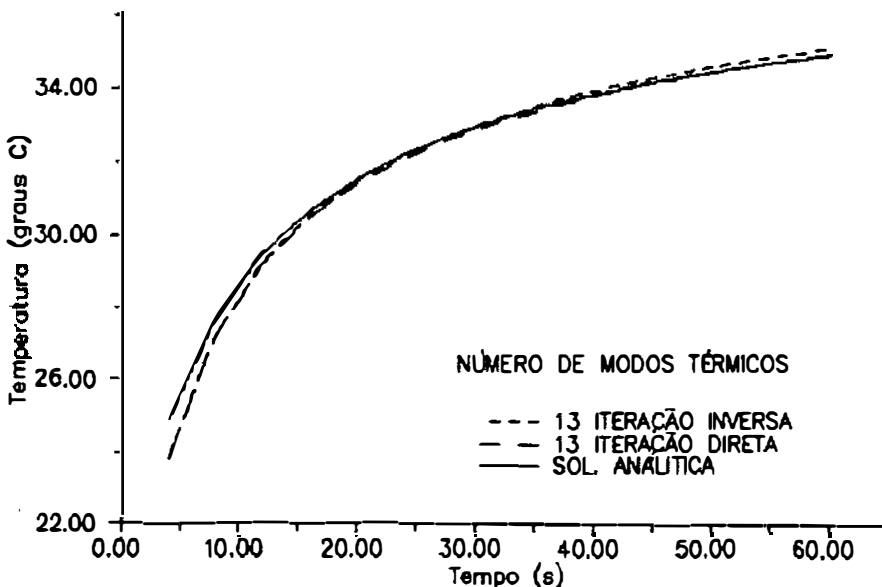


Figura III.6.1.2 - Método de Lanczos.

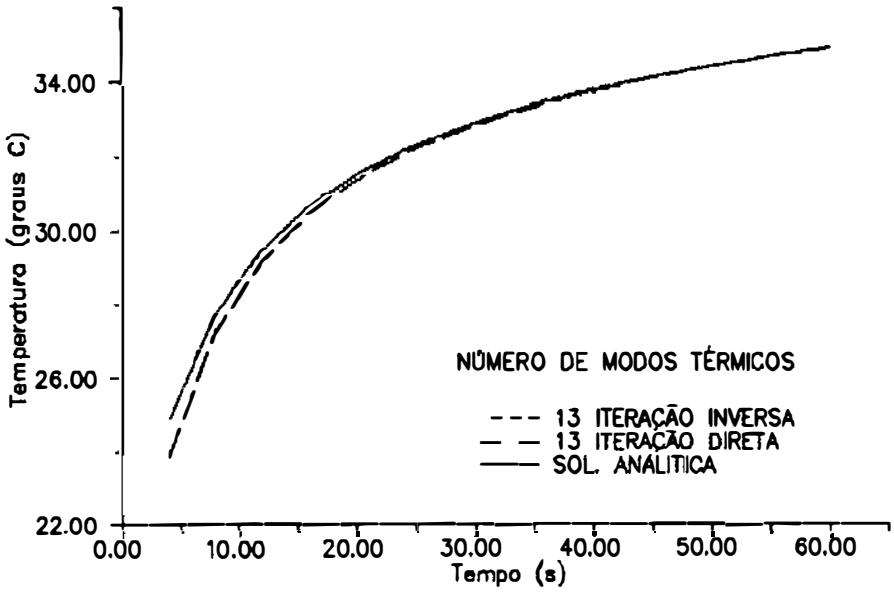


Figura III.6.1.3 - Método de Ritz.

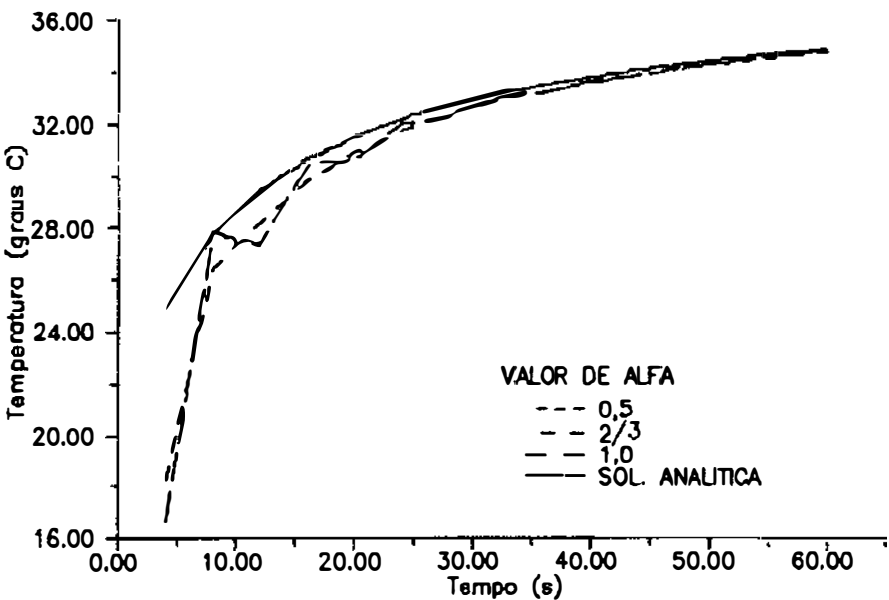


Figura III.6.1.4 - Método trapezoidal de integração, intervalo de tempo: 10 s.

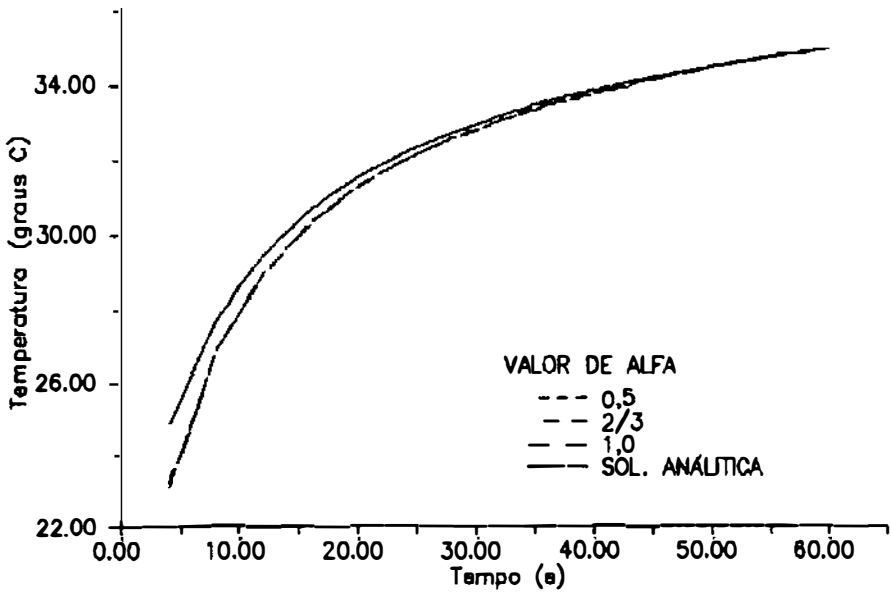


Figura III.6.1.5 - Método trapezoidal de Integração, intervalo de tempo: 1 s.

#### ii) Análise dos métodos modais de LAN e RITZ

Repetindo-se a análise anterior para uma quantidade de vetores inferior a aquela que esgota o espaço de solução, observa-se que os métodos de Lanczos e Ritz que utilizam a iteração direta ( respectivamente, figuras (III.6.1.6) e (III.6.1.7) ) apresentam um resultado melhor que os baseados em iteração inversa ( respectivamente, figuras (III.6.1.8) e (III.6.1.9) ). Verificar-se também que os resultados com iteração direta utilizando 4, 8, e 13 modos térmicos são coincidentes.

Convém citar que o método de redução modal é eficiente para a análise de problemas que possuam muitos modos térmicos de forma que os modos de menor influência possam ser desprezados.

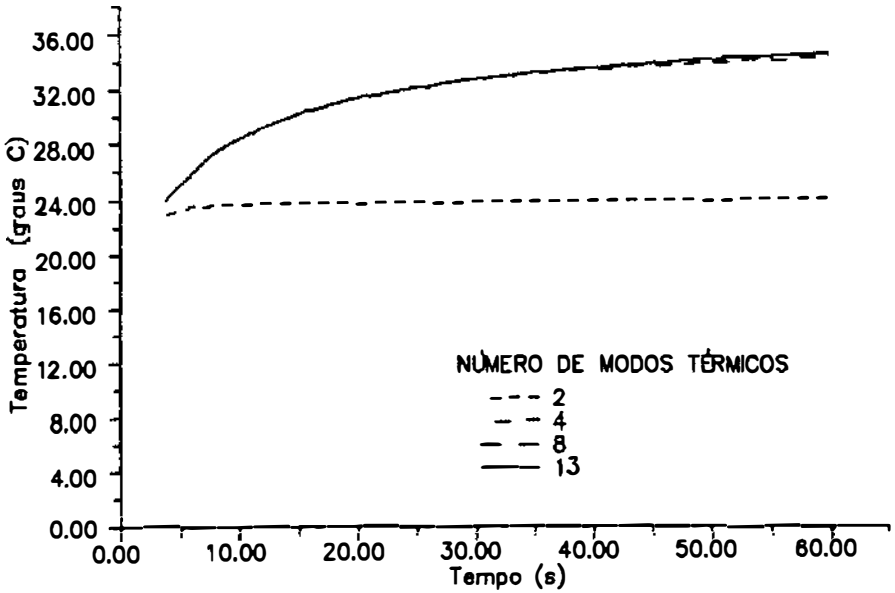


Figura III.6.1.6 - Método de Lanczos, iteração direta.

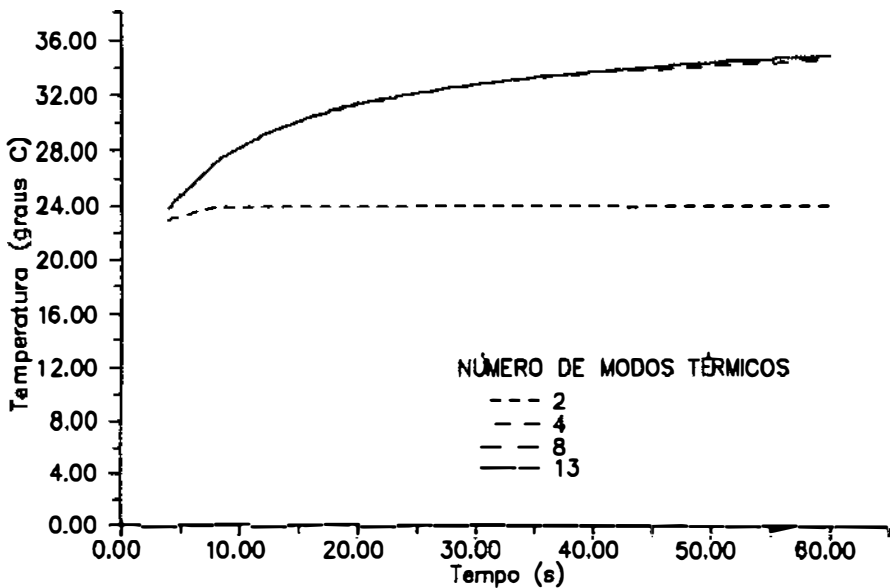


Figura III.6.1.7 - Método de Ritz, iteração direta.

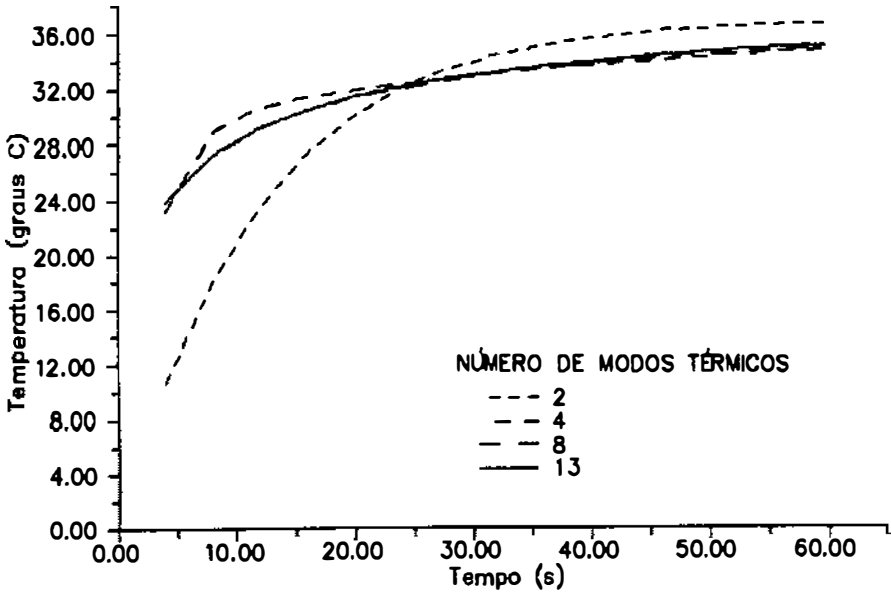


Figura III.6.1.8 - Método de Lanczos, iteração inversa.

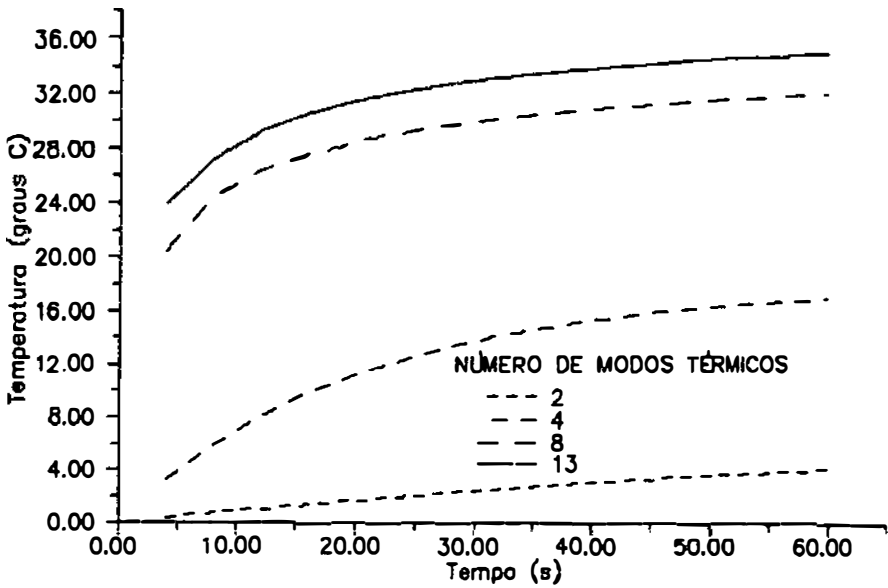


Figura III.6.1.9 - Método de Ritz, iteração inversa.

### iii) Análise com relação ao tempo de processamento

São mostrados na tabela (III.6.1.1) os resultados de tempo de processamento para o método de integração direta e os métodos modais com 13 modos, onde na coluna A tem-se a análise com esquema de integração com 5000 intervalos para  $\Delta t = 1,0$  s e na coluna B tem-se 500 intervalos para  $\Delta t = 10,0$  s. Analisando os resultados observa-se, particularmente neste problema, que no caso de problemas com pequeno número de graus de liberdade e poucos intervalos de tempo o resultado do tempo de processamento para a integração direta é inferior aos obtidos pelos métodos modais.

O tempo de processamento citado refere-se a soma dos tempos de processamento de cada etapa da análise. Deve-se enfatizar que o que mais influi nos resultados de tempo de processamento no caso do método trapezoidal é o cálculo da resposta e no caso da redução modal a geração dos vetores, a solução do problema de autovalor reduzido e o cálculo da resposta. Deve-se salientar que avaliar o quanto será gasto de tempo de processamento para o método trapezoidal é mais simples, pois este depende apenas do número de equações e do número de intervalos de tempo  $\Delta t$ . Já no método de redução modal, a avaliação do tempo de processamento depende de um dado que geralmente não está a disposição antes de se iniciar a solução do problema que é o número de modos térmicos a serem utilizados. Consequentemente, os demais tempos de processamento não poderão ser estimados,

pois serão dependentes deste resultado.

MÉTODO	COLUNA A	COLUNA B
	5000x( $\Delta t=1,0s$ )	500x( $\Delta t=10,0s$ )
MÉTODO- $\alpha^*$	13,21	6,11
LAN INVERSA	7,62	6,12
LAN DIRETA	7,63	6,15
RITZ INVERSA	7,77	6,24
RITZ DIRETA	7,78	6,19

Tabela III.6.1.1 - Tempos total de processamento, para tempo total de análise de 5000 s.

\* Método- $\alpha \equiv$  Método trapezoidal

iv) Análise do resultado dos critérios de avaliação dos vetores gerados

Observando os resultados para os critérios de avaliação para a erro na participação do fluxo de calor ( $\varepsilon_m$ ) e para a participação capacidade térmica ( $\zeta_m$ ), para os métodos de Lanczos e Ritz, listados na tabelas (III.6.1.2) à (III.6.1.5), verifica-se que para a iteração inversa obteve-se um bom resultado para a participação da capacidade térmica logo nos primeiros vetores ( $m = 1 \text{ à } 6$ ). Isso indica que os primeiros vetores trarão uma boa contribuição para a resposta ao longo de todo o

domínio. Entretanto, tal fato não significa que a resposta correta será alcançada. Para que isso ocorra, é necessário que a geração dos vetores de redução modal continue até que o erro na participação do fluxo de calor seja inferior a um valor que considere que os modos térmicos desprezados sejam desnecessários. Desta forma, será equilibrada a contribuição dos modos devido a capacidade térmica e ao vetor de partida na geração da base de transformação de coordenadas.

Os resultados para a iteração direta indicam que obtém-se uma excelente representação do fluxo de calor logo no primeiro vetor ( $\varepsilon_1$  é aproximadamente igual a zero). Entretanto, como na iteração inversa, deve-se continuar a geração dos vetores até que  $\zeta_m$  seja superior a um valor que considere que os modos térmicos desprezados sejam desnecessários.

Além disso, pode-se observar que o critério de avaliação pela capacidade térmica é eficiente quando o fluxo de calor não tem relevância na análise, como em certos problemas de transferência de calor por condução. Por exemplo, considere uma placa isolada em que a distribuição de temperatura inicial não seja uniforme, deixando-se então a placa chegar a sua temperatura de equilíbrio. Desta forma, não haverá fluxo de calor externo, implicando que  $\varepsilon_m$  será indeterminado para qualquer  $m$ , veja equação (III.4.13). Portanto, o único critério de avaliação que poderá ser empregado será  $\zeta_m$ .



O critério de avaliação pelo fluxo de calor é eficiente nos casos em que o fluxo de calor externo tem muita influência na resposta. Tal é o caso dos problemas em que se tem convecção de calor e radiação, pois estas condições de contorno geram um vetor de fluxo de calor que é introduzido do lado direito da equação (II.2.15). Nestes casos, precisa-se de uma boa representação do fluxo de calor e portanto, o critério de avaliação pela participação do fluxo de calor será bastante importante.

m	$\epsilon_m$	$\zeta_m$
1	0,9709	0,7657
2	0,9063	0,8754
3	0,8098	0,9169
4	0,6754	0,9373
5	0,5249	0,9493
6	0,3572	0,9569
7	0,1876	0,9613
8	0,1380	0,9651
9	0,1003	0,9678
10	$0,5875 \times 10^{-2}$	0,9687
11	$0,8620 \times 10^{-3}$	1,0140
12	$0,9896 \times 10^{-4}$	1,8080
13	$0,1172 \times 10^{-3}$	1,8100

Tabela III.6.1.2 - Método de Lanczos, iteração inversa.

$m$	$\varepsilon_m$	$\zeta_m$
1	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,0100
2	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,0300
3	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,0700
4	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,1500
5	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,2500
6	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,3500
7	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,4500
8	$0,5244 \times 10^{-13}$	0,5500
9	$0,6161 \times 10^{-9}$	0,6500
10	$0,7158 \times 10^{-5}$	0,7499
11	0,0744	0,8453
12	0,7095	0,8522
13	0,7101	0,9527

Tabela III.6.1.3 - Método de Lanczos, iteração direta.

$m$	$\epsilon_m$	$\zeta_m$
1	0,9997	0,8490
2	0,9973	0,8490
3	0,9893	0,9335
4	0,9733	0,9346
5	0,9433	0,9562
6	0,9049	0,9572
7	0,8613	0,9645
8	0,6342	0,9648
9	0,4551	0,9687
10	0,4241	0,9700
11	0,0379	0,9709
12	$0,4940 \times 10^{-14}$	0,9715
13	$0,4737 \times 10^{-15}$	1,0000

**Tabela III.6.1.4 - Método de Ritz, iteração inversa.**

$m$	$\varepsilon_m$	$\zeta_m$
1	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,0100
2	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,0300
3	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,0698
4	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,1491
5	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,2474
6	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,3454
7	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,4435
8	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,5422
9	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,6508
10	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,6955
11	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,8190
12	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,8969
13	$0,2707 \times 10^{-15}$	0,9851

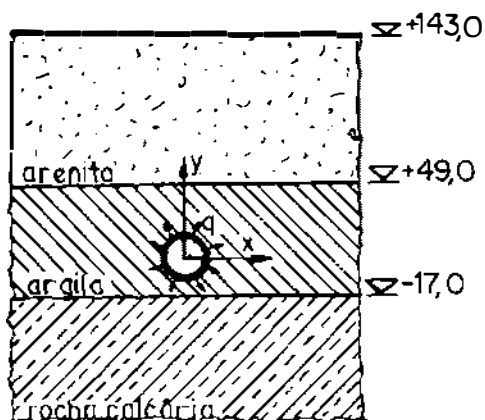
Tabela III.6.1.5 - Método de Ritz, iteração direta.

v) Vetor de partida dos métodos de redução modal

Devido a ausência de resultados anteriores a este texto no que diz respeito a iteração direta, houve a necessidade de se estudar qual o melhor tipo de vetor de partida para este tipo de iteração e os resultados obtidos indicam que o melhor vetor de partida era o próprio fluxo de calor, para outras escolhas não se obteve sequer a geração de mais de dois ou três vetores.

### III.6.2 - DISSIPACÃO DE CALOR DE UM TÚNEL PASSANTE POR UMA MASSA DE ROCHA NÃO HOMOGÊNEA

Será analisado um problema de dissipação bidimensional de calor em um túnel que atravessa uma massa de rocha estratificada, cuja condutividade na direção cartesiana  $x$  é diferente da direção cartesiana  $y$ , ou seja, o meio é ortotrópico. Os dados e solução numérica aproximada foram obtidos do trabalho de DAMJANIC [25]. O domínio mostrado na figura (III.6.2.1), foi discretizado por 79 elementos de condução. A malha resultante possui ao todo 101 nós e 93 graus de liberdade e por ser o problema simétrico, somente foi discretizado metade do domínio, conforme pode ser visto na figura (III.6.2.2).



Fluxo de calor, na superfície do túnel:  
 $q = 4,0 \text{ W/m}^2$

Diâmetro do túnel:  
 $D = 6,0 \text{ m}$

Temperatura inicial:

$$\theta_0^* = 0,0^\circ \text{ C}$$

Topologia da seção transversal, mostrando a posição do túnel.

Figura III.6.2.1 - Túnel passante por uma massa de rocha não-homogênea.

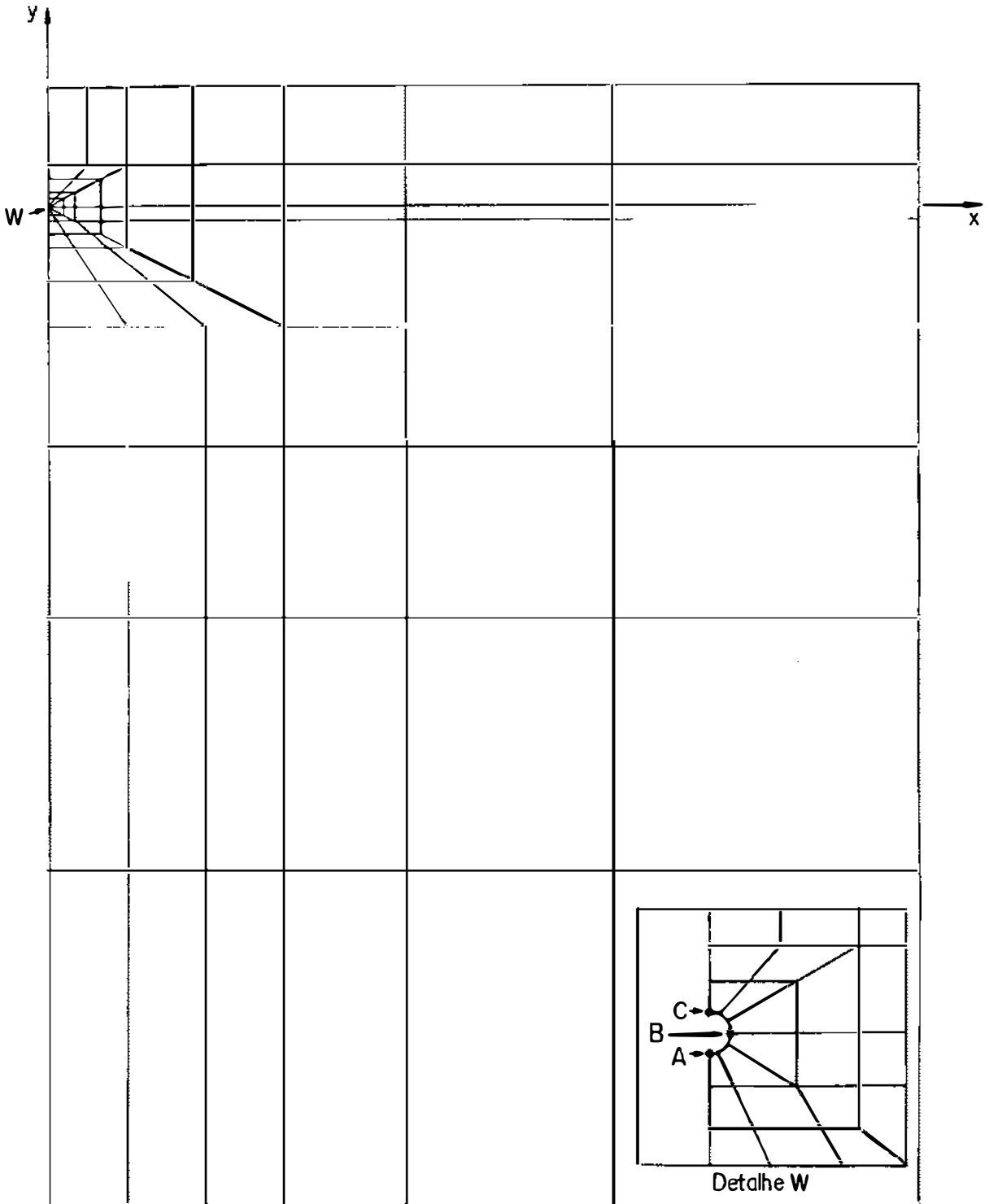


Figura III.6.2.2 - Malha de elementos finitos utilizada na a solução.

As condições iniciais e de contorno são: temperatura inicial do corpo uniforme de,  $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ ; fluxo de calor que entra constantemente pelo túnel,  $q = 4,0 \text{ W/m}^2$  e diâmetro do túnel,  $D = 6,00 \text{ m}$ . O esquema utilizado para a integração no tempo é  $\Delta t = 0,00625$  anos para o intervalo de tempo  $T \in (0, 0,25]$ ,  $\Delta t = 0,01875$  anos para  $T \in (0,25, 1,0]$  e  $\Delta t = 0,025$  anos para  $T \in (1,0, 32,25]$ . As propriedades físicas se encontram na tabela (III.6.2.1).

MATERIAL	DENSIDADE (Kg/m <sup>3</sup> )	CONDUTIVIDADE (W/m <sup>°C</sup> )		CAPACIDADE TÉRMICA (W hr/m <sup>3</sup> °C)
		K <sub>x</sub>	K <sub>y</sub>	
ARENITO	2150	2,40	2,00	420,0
ARGILA	1500	1,69	1,30	360,0
ROCHA CALCÁREA	2500	3,00	3,00	610,0

Tabela III.6.2.1 - Propriedades físicas dos materiais.

Este exemplo será utilizado para se avaliar de forma geral o desempenho com relação ao tempo de processamento e precisão dos métodos de redução modal quando confrontados com os resultados obtidos pelo método trapezoidal. Serão feitas comparações com análises utilizando a redução da quantidade de modos térmicos e sua consequência no tempo de processamento e na precisão da resposta. As comparações serão feitas com os resultados do problema em pontos da superfície do túnel, que serão chamados, respectivamente,

de pontos A, B e C , cujas coordenadas são: (0,0 , -3,0) , (3,0 , 0,0) e (0,0 , 3,0).

i) Análise dos métodos modais de LAN e RITZ

Escolhendo o ponto B para comparações, verifica-se que os resultados obtidos pelo método de Lanczos independente do tipo de iteração, figuras (III.6.2.3) e (III.6.2.4), apresentaram um resultado mais coerente que os obtidos pelo método de Ritz, figuras (III.6.2.5) e (III.6.2.6). No método de Ritz somente obteve-se um bom resultado na iteração inversa com 30 vetores. Isto se deve fundamentalmente a sequência de vetores gerados em cada método, que serão analisados em detalhe adiante.

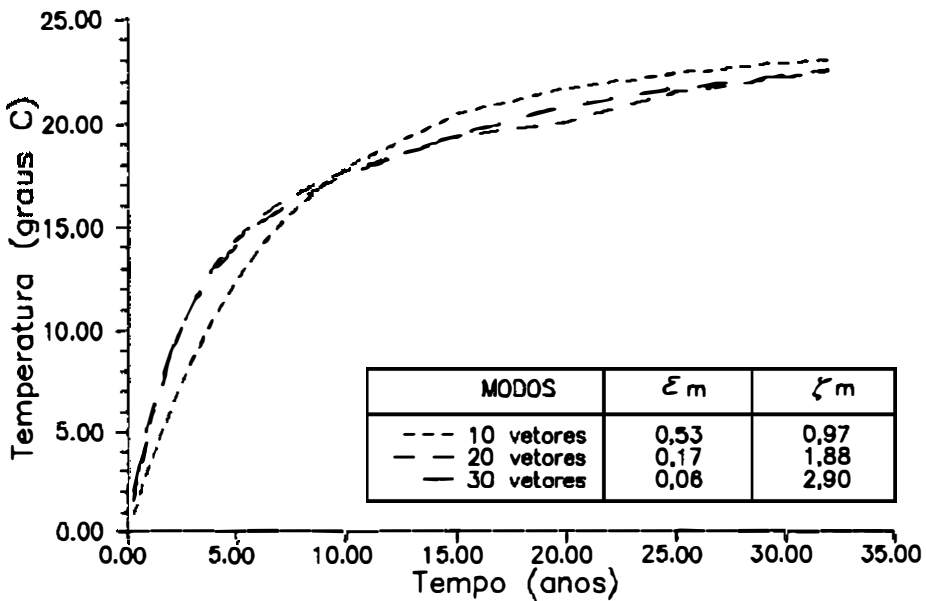


Figura III.6.2.3 - Método de Lanczos, iteração inversa, ponto B.



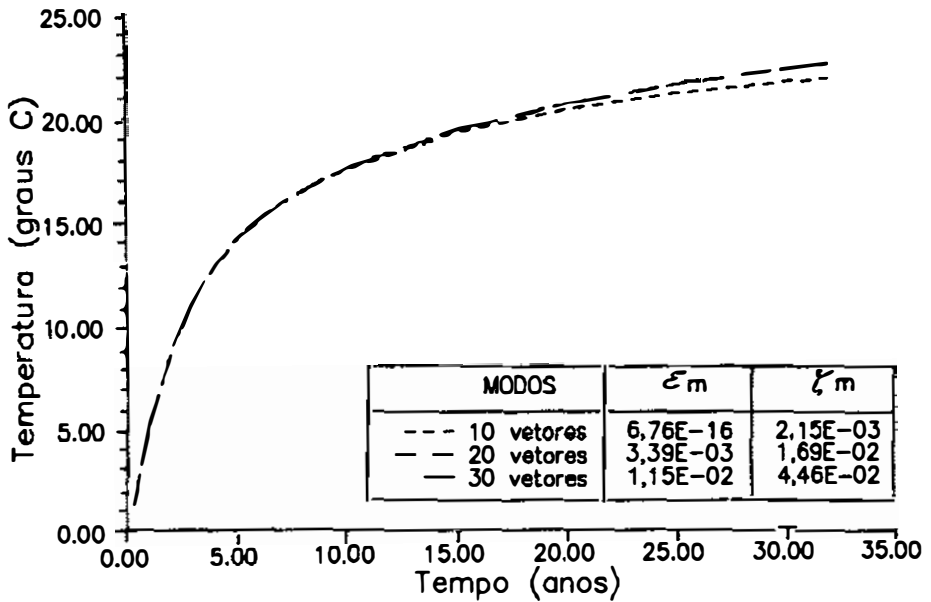


Figura III.6.2.4 – Método de Lanczos, iteração direta, ponto B.

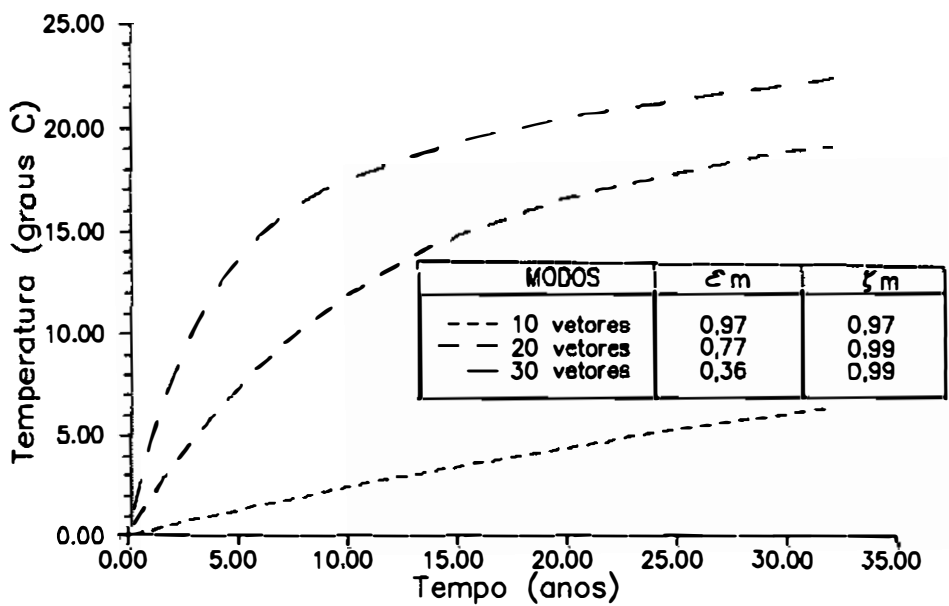


Figura III.6.2.5 – Método de Ritz, iteração inversa, ponto B.

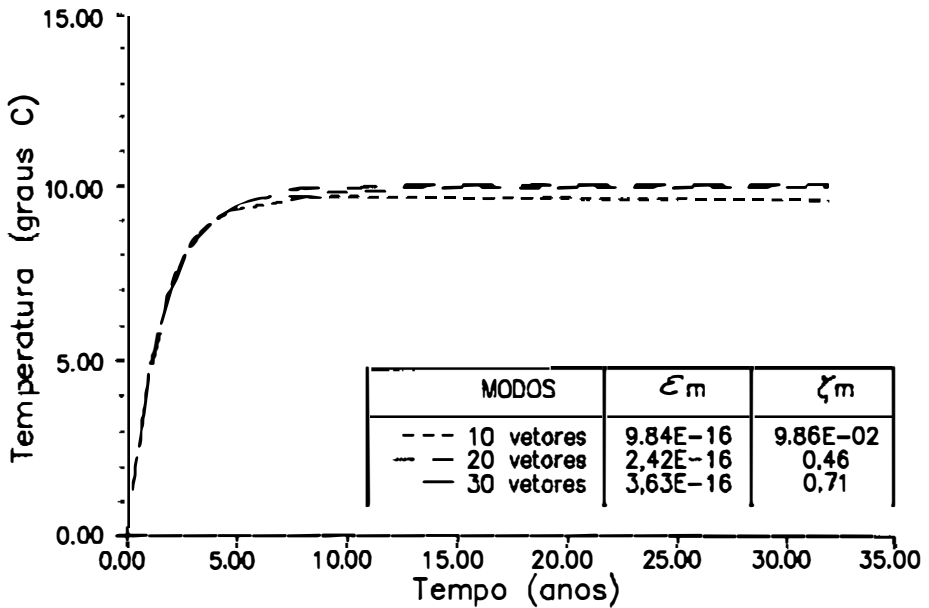


Figura III.6.2.6 – Método de Ritz, iteração direta, ponto B.

ii) Análise da precisão da resposta dos métodos de redução modal

Pode-se observar que os resultados obtidos pelo método de integração direta ( $\alpha = 1$ ) mostrados nas figuras (III.6.2.7) para o ponto A, (III.6.2.8) para o ponto B e (III.6.2.9) para o ponto C, apresentam uma boa correlação com os obtidos pelos métodos modais com a integração exata das equações desacopladas, a partir de 30 vetores na base. Em particular, verifica-se que o método de Lanczos com iteração direta já fornece resultados aceitáveis para uma base com apenas 20 vetores.

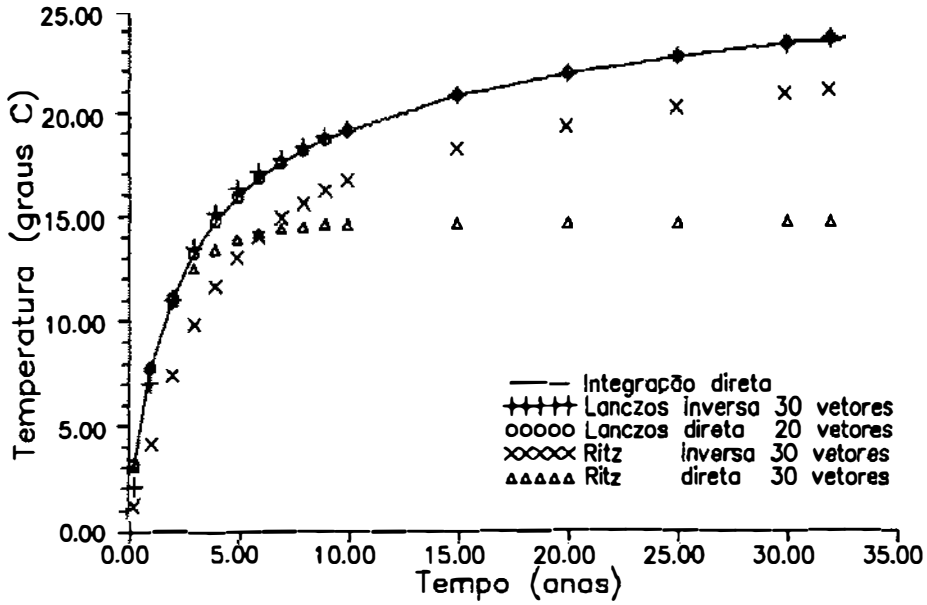


Figura III.6.2.7 - Comparação: Métodos modais x Integração direta, no ponto A.

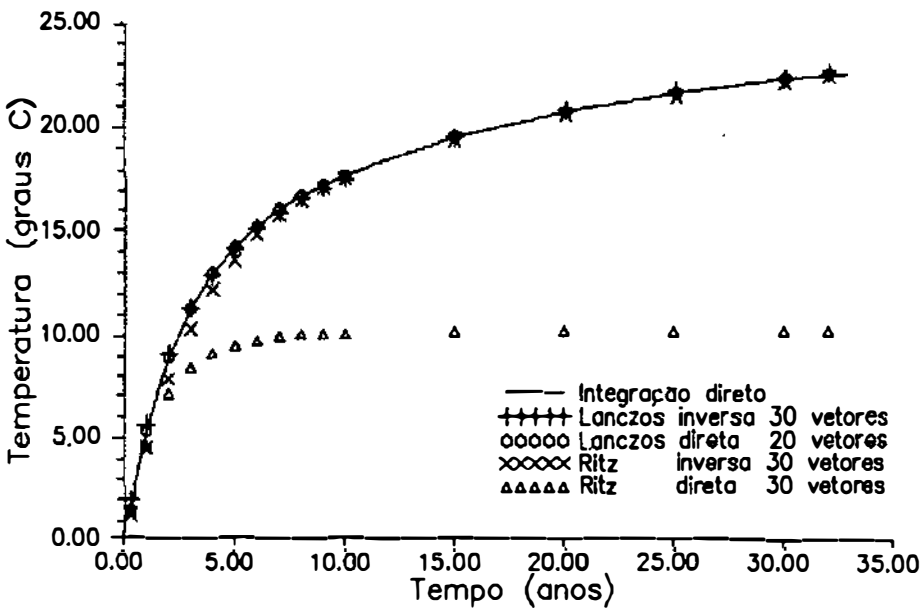


Figura III.6.2.8 - Comparação: Métodos modais x Integração direta, no ponto B.

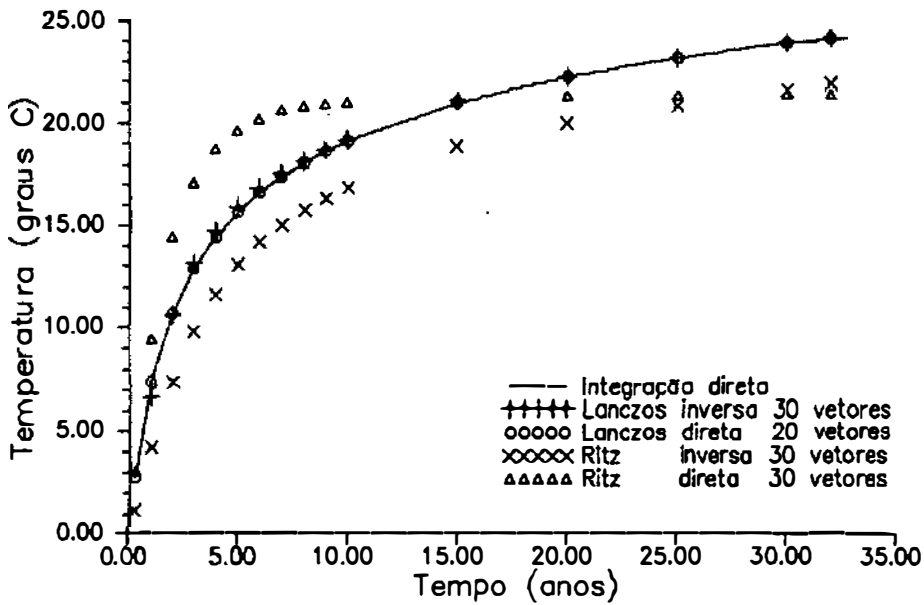


Figura III.6.2.9 - Comparação: Métodos modais x Integração direta, no ponto C.

### iii ) Análise da sequência de vetores gerados

A análise da sequência de vetores gerados será feita através das frequências em rad/s. Estas frequências são obtidas pela raiz quadrada dos autovalores associados aos vetores gerados. Nas figuras (III.6.2.10) e (III.6.2.11) observa-se que as sequências de vetores geradas pelos métodos de Lanczos e Ritz, respectivamente, baseada na iteração direta produzem uma faixa de frequências mais dispersa que na iteração inversa, figuras (III.6.2.12) e (III.6.2.13). Pode-se verificar também que a sequência gerada pelo método de Lanczos obtém maior dispersão que a gerada pelo método de Ritz. Isto indica que o método de Lanczos obtém um espectro de frequências mais amplo. Entretanto, verifica-se que no método de Ritz com iteração direta, obteve-se uma ampla faixa de frequências, contudo a

resposta obtida não foi satisfatória. Isso se deve a ausência das frequências baixas que predominam na solução deste problema, conforme pode ser verificado na figura (III.6.2.11).

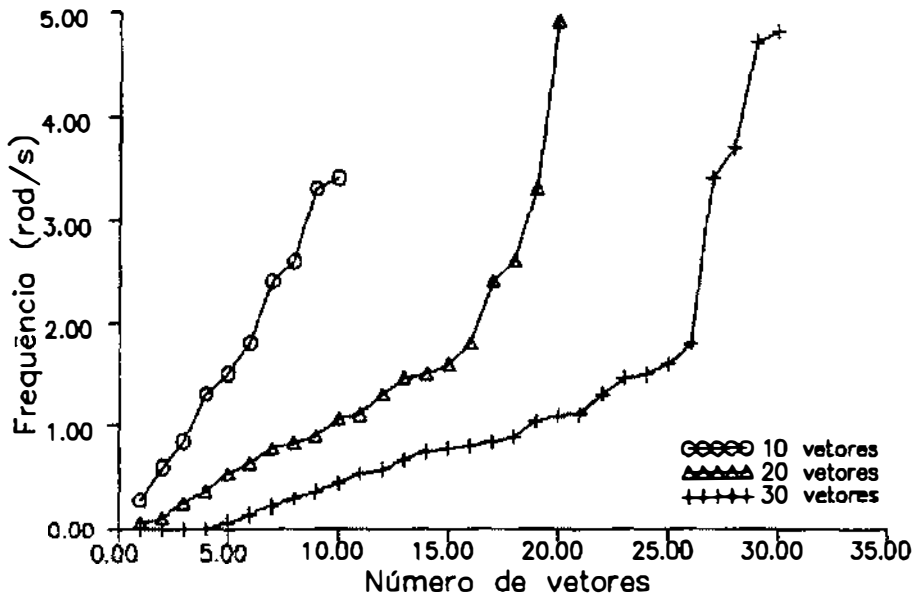


Figura III.6.2.10 – Método de Lanczos, iteração direta.

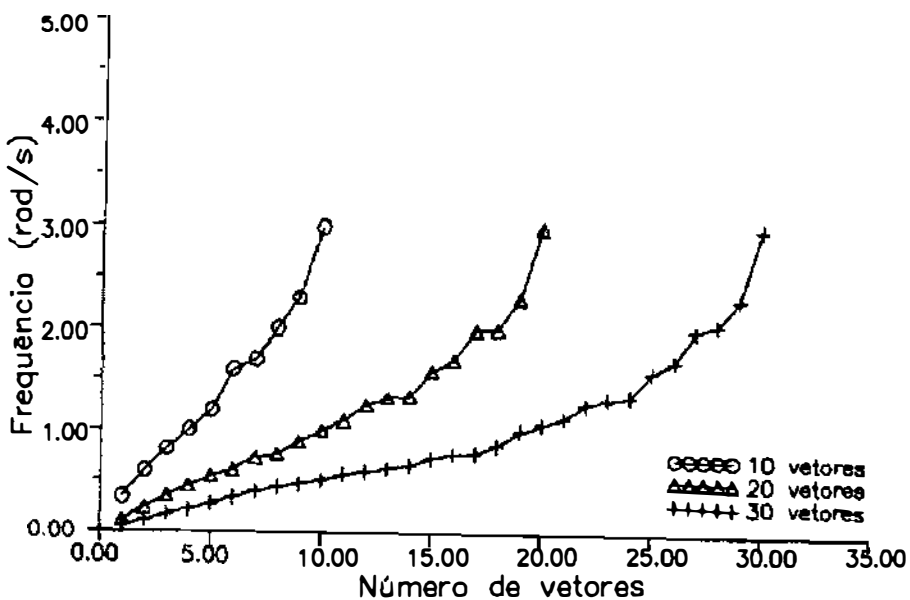


Figura III.6.2.11 – Método de Ritz, iteração direta.

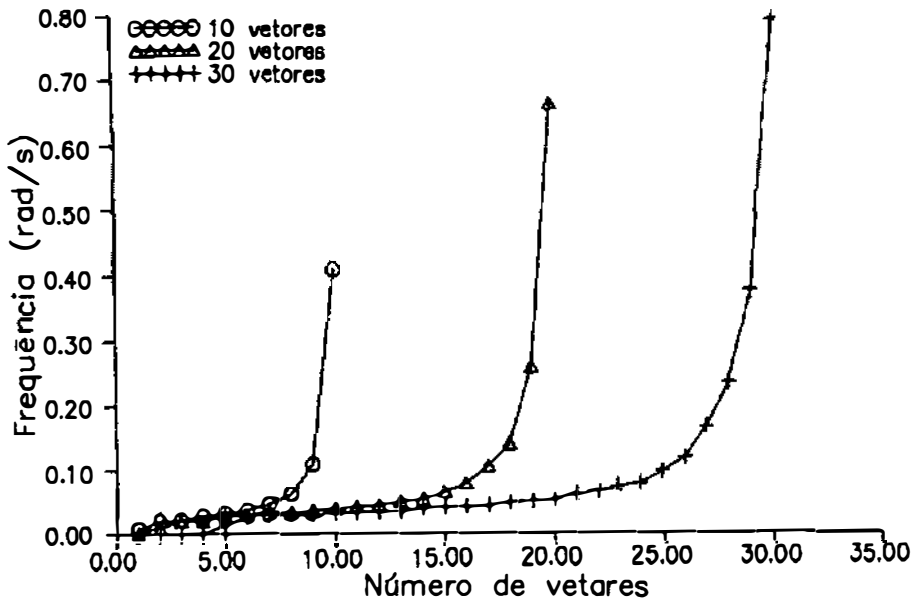


Figura III.6.2.12 – Método de Lanczos, iteração inversa.

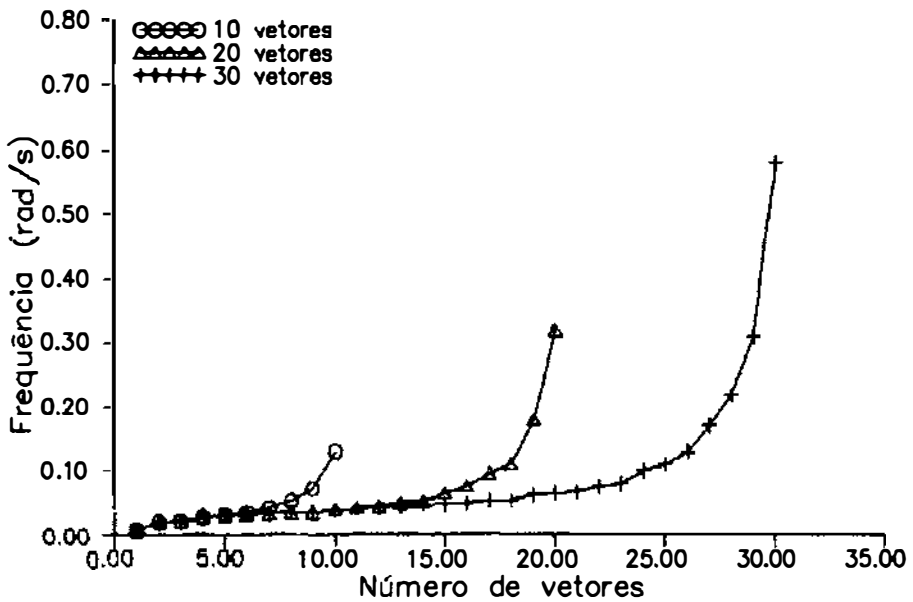


Figura III.6.2.13 – Método de Ritz, iteração inversa.

## iv) Análise com relação ao tempo de processamento

Analisando os resultados de tempo de processamento listados na tabela (III.6.2.2) verifica-se que os resultados para os métodos modais são bem inferiores ao obtido pela integração direta. No método de Lanczos com iteração inversa e 10 vetores na base, obteve-se uma boa resposta com um tempo de processamento de apenas 15,1 % em relação ao método de integração direta, conforme mostrado na tabela (III.6.2.3), que contém os tempos de processamento em relação ao método de integração direta. Isto indica que os métodos modais são efetivamente mais eficientes para problemas que possuam muitos graus de liberdade.

MÉTODO	NÚMERO DE VETORES		
	10	20	30
LAN INVERSA	1,86	3,38	5,87
LAN DIRETA	2,05	3,69	6,64
RITZ INVERSA	2,03	3,83	6,58
RITZ DIRETA	2,13	3,96	6,44
MÉTODO- $\alpha$ *	12,33		

Tabela III.6.2.2 - Tempos de processamento em segundos.

\* Método- $\alpha$   $\equiv$  Método trapezoidal

MÉTODO	NÚMERO DE VETORES		
	10	20	30
LAN INVERSA	15,1	27,4	47,6
LAN DIRETA	16,6	29,9	53,9
RITZ INVERSA	16,5	31,1	53,4
RITZ DIRETA	17,3	32,1	52,2
MÉTODO- $\alpha$ *	100		

Tabela III.6.2.3 - Tempos de processamento relativo a 100 % para a integração direta.



## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE NÃO-LINEAR DE PROBLEMAS DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

A seguir será descrito a análise de problemas envolvendo condução, convecção e radiação térmica. Portanto, a análise passa a ser a de um problema não-linear devido a presença da radiação térmica.

Os métodos de integração direta e redução modal foram transformados em algoritmos iterativos de análise não-linear através da implementação do método da pseudo-força, descrito adiante. Esta escolha se deve às características da não-linearidade, que se encontra no contorno e é independente dos fenômenos de condutividade e convecção de calor. Deve-se salientar que o procedimento usual de solução consiste na utilização de um método do tipo Newton para solução do sistema de equações algébricas não-lineares em cada instante de tempo, BATHE [26]. Esta opção implica em uma atualização frequente da matriz de condutividade completa.

## IV.2 - ANÁLISE NÃO-LINEAR UTILIZANDO O MÉTODO DA PSEUDO-FORÇA

A análise com radiação envolve uma não-linearidade na matriz de condutividade completa ( condução mais convecção e radiação ). O método da pseudo-força, proposto por STRIKLIN [ 9] no contexto da análise estrutural, se baseia na separação da matriz de condutividade em duas partes: uma correspondente a parte linear, devido a condução e convecção, e outra correspondente a parte não-linear do problema, devido a radiação térmica.

A parte correspondente a não-linearidade é transferida para o outro lado da igualdade, o lado do fluxo de calor. Portanto, evita-se que na análise seja necessária a atualização da matriz de condutividade completa a cada iteração ( LANDAU [27] ).

A matriz  $\underline{\underline{K}}^R$  da equação (II.2.15) é uma função da temperatura de equilíbrio  $\underline{\underline{K}}^R(\underline{\underline{\theta}})$ . Sendo assim, a solução da equação (II.2.15) pode ser obtida através de um esquema iterativo de cálculo, onde a matriz  $\underline{\underline{K}}^R(\underline{\underline{\theta}})$  será dependente da resposta do problema resolvido para uma condição inicial de iteração fornecida. Sendo  $k$  o índice que conta as iterações, a equação (II.2.15) pode ser re-escrita como,

$$\underline{\underline{C}} \underline{\underline{\theta}}^{(k)} + ( \underline{\underline{K}} + \underline{\underline{K}}^C ) \underline{\underline{\theta}}^{(k)} + \underline{\underline{K}}^R(\underline{\underline{\theta}}^{(k-1)}) \underline{\underline{\theta}}^{(k-1)} = \underline{\underline{f}} + \underline{\underline{Q}}^C + \underline{\underline{Q}}^R$$

(IV.2.1)

O processo iterativo será terminado tão logo seja satisfeito um critério de convergência que será visto mais adiante. Aplicando o método da pseudo-força, tem-se,

$$\underline{C} \dot{\underline{\theta}}^{(k)} + (\underline{K} + \underline{K}^C) \underline{\theta}^{(k)} = \underline{f} + \underline{Q}^C + \underline{Q}^R + \underline{H}^{(k)} \quad (\text{IV.2.2})$$

Sendo o vetor de pseudo-força definido como:

$$\underline{H}^{(k)} = - \underline{K}^R(\underline{\theta}^{(k-1)}) \underline{\theta}^{(k-1)} \quad (\text{IV.2.3})$$

Introduzindo-se agora a discretização ao longo do tempo, obtém-se a expressão,

$$\underline{C} \dot{\underline{\theta}}^{(k)} + (\underline{K} + \underline{K}^C) \underline{\theta}^{(k)} = \underline{f} + \underline{Q}^C + \underline{Q}^R + \underline{H}^{(k)} \quad (\text{IV.2.4})$$

Pela equação (IV.2.3) pode-se notar que a pseudo-força é calculada com o resultado da temperatura da iteração anterior, portanto para a primeira iteração deve-se utilizar um esquema para fornecer esta condição inicial.

Esta condição será dada fazendo-se uma extrapolação da pseudo-força no instante de tempo anterior, conforme LANDAU [27], VENANCIO FILHO [28] e GOUTINHO [29]. Desenvolvendo uma expansão do vetor de pseudo-força em torno da condição de equilíbrio anterior, ou seja,

$$t+\Delta t \underline{\underline{H}}^{(1)} = \underline{\underline{H}}^{(j)} + \Delta t \left. \frac{\partial \underline{\underline{H}}^t}{\partial \tau} \right|_{\tau = t} \quad (\text{IV.2.5})$$

onde  $\underline{\underline{H}}^{(j)}$  é a pseudo-força do intervalo de tempo anterior que atendeu ao critério de convergência em  $j$  iterações.

Utilizando uma aproximação de primeira ordem para a derivada com relação ao tempo pode-se escrever:

$$t+\Delta t \underline{\underline{H}}^{(1)} = 2 \underline{\underline{H}}^{(j)} - t+\Delta t \underline{\underline{H}}^{(j)} \quad (\text{IV.2.6})$$

Esta expressão representa uma extrapolação linear da pseudo-força tomando-se em consideração as duas pseudo-forças anteriores no estado de equilíbrio. Este método tem sido utilizado com sucesso e suas características de estabilidade foram estabelecidas por TRUJILLO [10].

### IV.3 - IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DA PSEUDO-FORÇA NO MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA

Dada a equação (III.2.8), a implementação do método da pseudo-força é feita somando-se ao lado direito desta equação a parcela correspondente a pseudo-força e transformando o cálculo das temperaturas em um processo iterativo, onde ao final de cada iteração verifica-se se a variação da temperatura calculada entre duas iterações

consecutivas foi inferior a uma tolerância pré-estabelecida. Assim,

$$\left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \underline{C} + \underline{K} + \underline{K}^C \right] \underline{d}_{n+1}^{(k)} = \underline{f}_{n+1} + \underline{Q}^C +$$

$$\underline{Q}^R + \frac{1}{\alpha \Delta t} \underline{C} \underline{d}_{n+1} + \underline{H}_{n+1}^{(k)} \quad (\text{IV.3.1})$$

onde  $k$  se refere ao número da iteração.

A convergência é atingida quando a norma relativa for menor ou igual a uma tolerância pré-estabelecida. Esta norma é calculada através da expressão,

$$\xi = \frac{\| \underline{d}_{n+1}^{(k)} - \underline{d}_{n+1}^{(k-1)} \|}{\| \underline{d}_{n+1}^{(k)} \|} \leq \text{TOL} \quad (\text{IV.3.2})$$

onde  $\xi$  é a norma relativa e TOL é a tolerância pré-estabelecida.

#### IV.3.1 - ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO DIRETA DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE CALOR COM O MÉTODO DA PSEUDO-FOR

##### CÁLCULOS INICIAIS

- a) Cálculo das matrizes de condutividade , capacidade térmica e leitura do fluxo de calor externo.

b) Cálculo da matriz de condutividade efetiva,

$$\underline{K}_{ef} = \left[ \frac{1}{\alpha \Delta t} \underline{C} + \underline{K} + \underline{K}^C \right]$$

c) Triangularização de  $\underline{K}_{ef}$  :

$$\underline{K}_{ef} = \underline{L} \underline{D} \underline{L}^T$$

d) Cálculo dos vetores de fluxo de calor de convecção e radiação térmica.

e) Inicialização das pseudo-forças  $t_{0H}$  e  $t_{0-\Delta t H}$ .

#### PARA CADA INTERVALO DE TEMPO

f) Cálculo do vetor de fluxo efetivo,

$$\underline{f}_{ef} = \underline{f}_{n+1} + \underline{Q}^C + \underline{Q}^R + \frac{1}{\alpha \Delta t} \underline{d}_{n+1}$$

#### INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO

De  $k = 1, 2, \dots$  até convergência faça:

g) Cálculo do vetor de pseudo-força:

g.1) Se  $k = 1$ ,

$$\underline{H}_{n+1}^{(0)} = 2 \underline{H}_n^{(j)} - \underline{H}_{n-1}^{(j)}$$

Obs: Os índices  $j$  e  $j'$  referem-se as pseudo-forças

que atingiram a convergência em  $j$  e  $j'$  iterações.

g.2) Se  $k > 1$ , montar a pseudo-força de acordo com a equação (IV.2.3), vide apêndice item A.4.

h) Recálculo do vetor de força efetivo,

$$\tilde{f}_{ef}^{(k)} = \tilde{f}_{ef} + \tilde{H}^{(k)}$$

i) Solução do sistema de equações:

$$(L D L^T) \tilde{d}_{n+1}^{(k)} = \tilde{f}_{ef}^{(k)}$$

j) Cálculo da norma relativa  $\xi$ :

$$\xi = \frac{\| \tilde{d}_{n+1}^{(k)} - \tilde{d}_{n+1}^{(k-1)} \|}{\| \tilde{d}_{n+1}^{(k)} \|}$$

h) Verificação da convergência:

h.1) Se  $\xi > TOL$  retornar para o início do processo iterativo.

h.2) Se  $\xi \leq TOL$  então faça:

h.2.1) Cálculo de  $\tilde{v}$

h.2.2) Atualize a condição inicial para a pseudo-força,

$$\tilde{H}_{n+1}^{(0)} = \tilde{H}_n^{(j)}$$

h.2.3) Passe para o próximo intervalo de tempo.

#### IV.4 - IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DA PSEUDO-FORÇA NO MÉTODO DE REDUÇÃO MODAL

A implementação do método da pseudo-força no método de redução modal será feita na rotina de integração das equações desacopladas.

A equação de equilíbrio (III.3.10) incluindo o método da pseudo-força para o instante de tempo  $t+\Delta t$ , será:

$$\mathbb{I}_{\sim m}^{t+\Delta t} \underline{\underline{x}}^{(k)} + \mathbb{A}_{\sim m}^{t+\Delta t} \underline{\underline{y}}^{(k)} = \mathbb{f}^{t+\Delta t} + \phi^T \mathbb{H}^{(k)} \quad (\text{IV.4.1})$$

onde a pseudo-força  $\mathbb{H}^{(k)}$  é calculada conforme descrito no apêndice A.

Por ser a análise não-linear dependente da temperatura de equilíbrio no intervalo de tempo corrente, o processo será iterativo, onde novamente  $k$  indica a iteração. O número de iterações será determinado por um critério de convergência, avaliado pela temperatura em coordenadas físicas,

$$\xi = \frac{\| \underline{\underline{\theta}}^{t+\Delta t(k)} - \underline{\underline{\theta}}^{t+\Delta t(k-1)} \|}{\| \underline{\underline{\theta}}^{t+\Delta t(k)} \|} \leq \text{TOL} \quad (\text{IV.4.2})$$

onde TOL, da mesma forma que antes, é uma tolerância



pré-estabelecida.

#### IV.4.1 - ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES NÃO-LINEARES DE CALOR PELO MÉTODO DE REDUÇÃO MODAL

##### CÁLCULOS INICIAIS

- a) Cálculo das matrizes de capacidade térmica, condutividade, convecção e leitura do fluxo de calor externo.
- b) Cálculo dos vetores de fluxo de calor de convecção e radiação térmica.
- c) Inicialização do vetor de partida dos algoritmos de Lanczos ou Ritz.
- d) Cálculo dos vetores de Lanczos ou Ritz e projeção da matriz de condutividade no subespaço.
- e) Solução do problema de autovalor:

$$\bar{K} \phi = I_m \phi \Lambda_m$$

- f) Inicialização das pseudo-forças  $t_{0_H}$  e  $t_{0-\Delta t_H}$ ,

## PARA CADA INTERVALO DE TEMPO

g) Cálculo do vetor de fluxo de calor em coordenadas modais.

$${}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{f}}^- = \phi^T \left( {}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{f}} + \underline{Q}^C + \underline{Q}^R \right)$$

## INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO

De  $k = 1, 2, \dots$  até convergência faça:

h) Cálculo do vetor de pseudo-força:

h.1) Se  $k = 1$ ,

$${}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{H}}^{(k)} = 2 \underline{\tilde{H}}^{(j)} - {}^{t-\Delta t} \underline{\tilde{H}}^{(j)}$$

Obs: Os índices  $j$  e  $j'$  referem-se as pseudo-forças que atingiram a convergência em  $j$  e  $j'$  iterações.

h.2) Se  $k > 1$ , montar a pseudo-força de acordo com a equação (IV.2.3), vide apêndice item A.4.

i) Cálculo do vetor de força efetivo em coordenadas modais.

$${}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{f}}^{\wedge} = {}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{f}}^- + \phi \underline{\tilde{H}}^{(k)}$$

j) Integração exata das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem desacopladas (vide apêndice B, seção 2).

$$\underline{\tilde{m}}^T \underline{\tilde{v}}^{(k)} + \underline{\tilde{m}}^{\wedge} \underline{\tilde{x}}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{f}}^{\wedge (k)}$$

l) Cálculo das temperaturas nodais na iteração  $k$ ,

$${}^{t+\Delta t} \underline{\tilde{\theta}}^{(k)} = \phi \underline{\tilde{x}}^{(k)}$$

m) Cálculo da norma relativa,

$$\xi = \frac{\| \overset{t+\Delta t}{\theta}^{(k)} - \overset{t+\Delta t}{\theta}^{(k-1)} \|}{\| \overset{t+\Delta t}{\theta}^{(k)} \|}$$

n) Verificação da convergência:

n.1) Se  $\xi > \text{TOL}$  retornar para o início do processo iterativo.

n.2) Se  $\xi \leq \text{TOL}$  então faça:

n.2.1) Cálculo de  $\overset{\circ}{\theta}$ .

n.2.2) Atualize a condição inicial para a pseudo-força,

$$\overset{H^{(0)}}{\sim}_{n+1} = \overset{H^{(j)}}{\sim}_n$$

n.2.3) Passe para o próximo intervalo de tempo.

#### IV.5 - COMENTÁRIOS SOBRE A ESCOLHA DO VETOR DE PARTIDA PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

Na análise transiente com radiação, o fluxo de calor varia devido às não-linearidades. Portanto, a escolha do vetor de partida pode influenciar muito na precisão da análise.

O vetor de partida utilizado para a análise não-linear é composto pelo fluxo de calor mais o vetor de fluxo devido a temperatura da fonte de radiação, pois a pseudo-força não é conhecida inicialmente. Esta escolha é baseada no fato de

que a distribuição espacial do fluxo devido a fonte de radiação ser semelhante a pseudo-força, por ela atuar nos mesmos pontos nodais.

## IV.6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

Serão analisados dois problemas numéricos. Ambos envolvendo condução, convecção e radiação. O primeiro exemplo será utilizado para verificar a concordância dos resultados numéricos obtidos através do MEF com os obtidos pelo método de Monte Carlo. O segundo, uma análise bidimensional, será utilizado para verificar-se os resultados dos métodos de redução modal para problemas de discretizações muito grandes.

#### IV.6.1 - ANÁLISE DE CONDUÇÃO DE CALOR UNIDIMENSIONAL COM CONDIÇÃO DE CONTORNO DE CONVECÇÃO E RADIAÇÃO

Será analisado um problema unidimensional de condução de calor com condição de contorno de convecção e radiação nos dois extremos, cujos dados e solução numérica pelo método de Monte Carlo (é um método de probabilidade utilizado para a solução de problemas de transferência de calor baseados na representação por diferenças finitas) foram obtidos do trabalho de HAJI-SHEIKH [30]. Este problema também foi solucionado pelo MEF por BATHE [31] e pode ser considerado um teste padrão para a verificação dos métodos aqui estudados. A discretização do domínio é feita por 20 elementos de condução e o contorno por dois elementos de convecção mais dois de radiação, em cada extremidade. A malha possui ao todo 42 nós e 11 graus de liberdade, conforme pode ser visto na figura (IV.6.1.1).

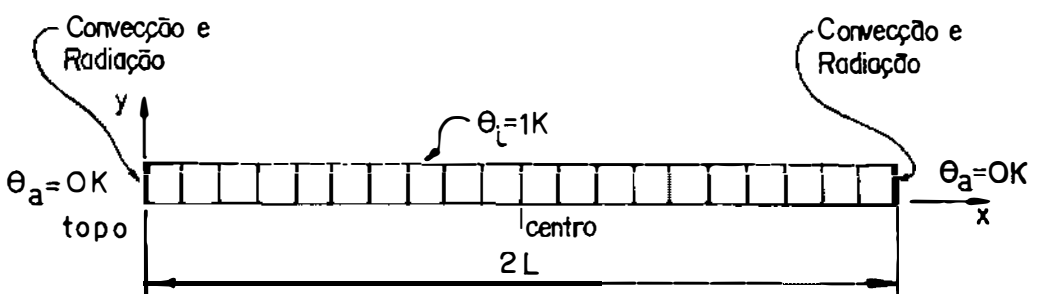


Figura IV.6.1.1 - Corpo linear com condição de contorno de convecção e radiação.

As propriedades físicas são: coeficiente de condução de calor  $1,0 \text{ W/m/}^\circ\text{C}$ , capacidade térmica  $1,0 \text{ Ws/m}^2/^\circ\text{C}$  e coeficiente de transferência de calor por convecção dado através do número de Biot,  $Bi = 4,0$ ; a emissividade  $F_\varepsilon = 1$  e o coeficiente de transferência de calor por radiação dado por  $\Gamma = 4,0$ .

As condições iniciais e de contorno são: temperatura inicial do corpo: uniforme de  $\theta_i = 1 \text{ K}$  ( Kelvin ) no instante de tempo  $t = 0^+$ ; temperatura do fluido externo igual a  $\theta_a = 0 \text{ K}$ , em ambos os lados e constante durante toda a análise. O esquema utilizado para a integração é de  $\Delta t = 0,001 \text{ s}$  para o intervalo de tempo  $T \in ( 0 , 0,06 ]$ ,  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$  para  $T \in ( 0,06 , 0,66 ]$  e  $\Delta t = 0,05 \text{ s}$  para  $T \in ( 0,66 , 5,01 ]$ . A tolerância para a análise não-linear é de  $1,0 \times 10^{-4}$ .

Este exemplo será utilizado para se avaliar de forma geral a precisão dos métodos de redução modal e trapezoidal quando confrontados com os resultados obtidos pelo método de Monte Carlo. Serão feitas comparações com análises utilizando a redução da quantidade de modos térmicos e sua consequência no tempo de procesamento e na precisão da resposta. As comparações serão feitas com os resultados do problema no centro e no topo.

#### i) Análise dos métodos de redução modal

Verifica-se, nas figuras de (IV.6.1.2) e (IV.6.1.3),

que os resultados obtidos pelo método de Ritz apresentaram um resultado melhor que os obtidos pelo método de Lanczos, para ambos os tipos de iteração ( inversa e direta, respectivamente ), figuras (IV.6.1.4) e (IV.6.1.5), para um número de modos variando entre 2 e 11.

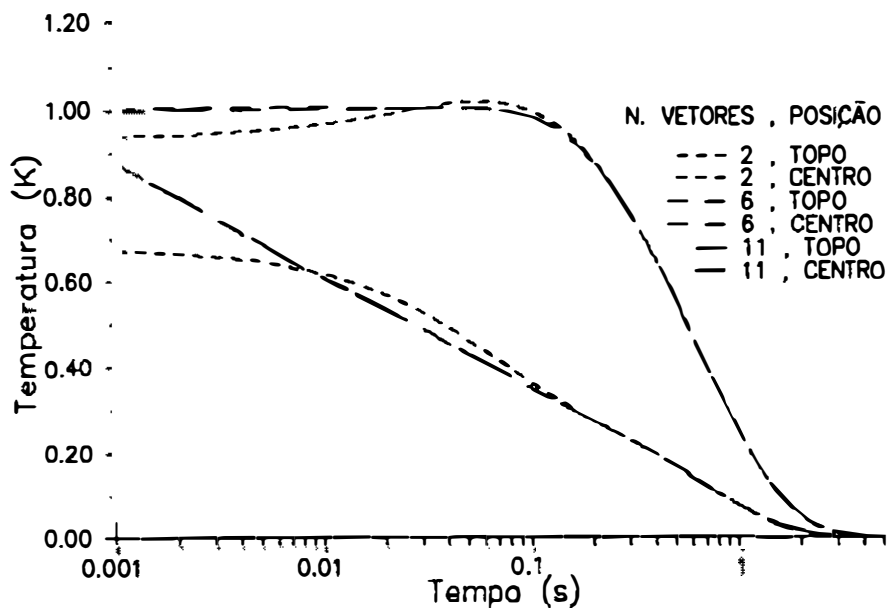


Figura IV.6.1.2 — Método de Ritz, iteração inversa.

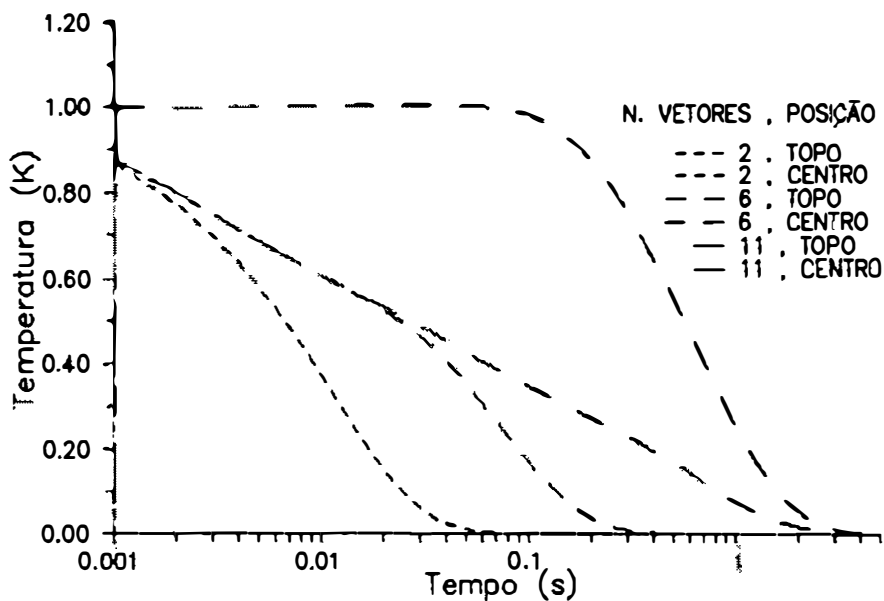


Figura IV.6.1.3 — Método de Ritz, iteração direta.



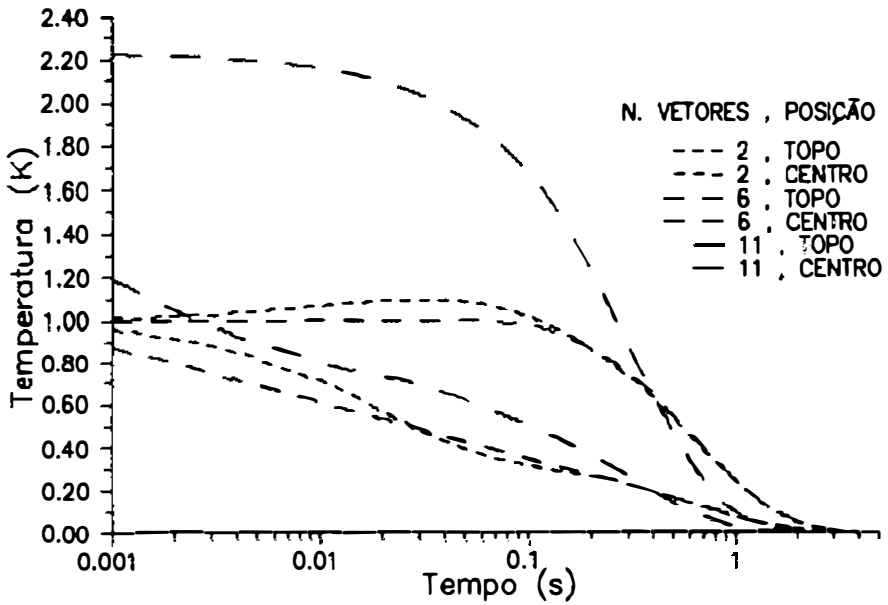


Figura IV.6.1.4 – Método de Lanczos, iteração inversa.

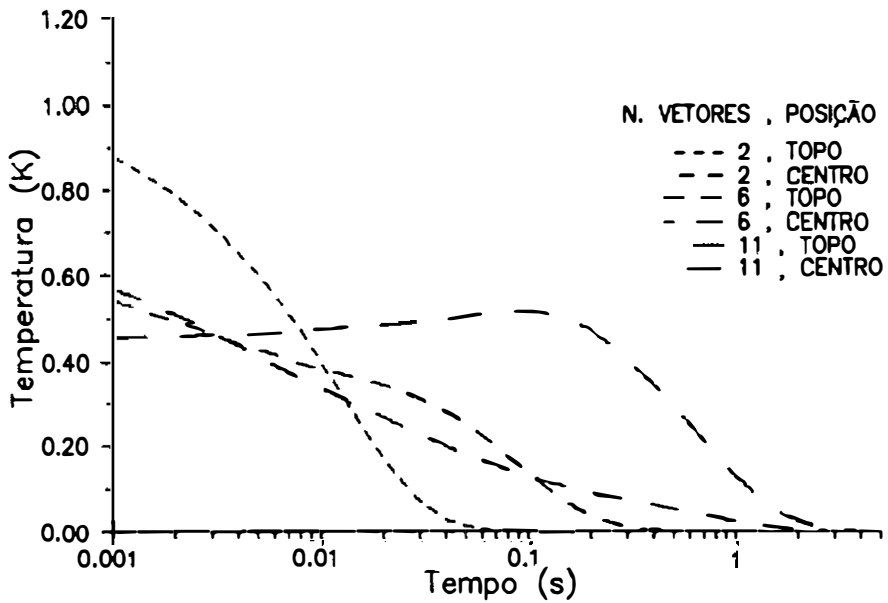


Figura IV.6.1.5 – Método de Lanczos, iteração direta.

Deve-se notar que este exemplo possui condição de temperatura inicial diferente de zero, implicando na necessidade de se fornecer esta condição inicial em coordenadas modais. Isto é feito pré-multiplicando-se o vetor com a temperatura inicial em coordenadas físicas por  $\phi^T C$ . Esta esquema exige que exista uma perfeita ortogonalidade dos vetores gerados, ou seja, que  $\phi^T C \phi$  seja numericamente igual a matriz identidade  $I$ . Contudo, na prática isso não é obtido com facilidade e consequentemente, a resposta perde precisão. Por exemplo, os resultados da figura (IV.6.1.4), correspondente à análise pelo método de Lanczos baseado na iteração inversa, indicam que com 11 vetores houve perda de ortogonalidade, logo, o algoritmo de integração das equações desacopladas partiu de condições iniciais diferentes das fornecidas. O mesmo ocorre com os resultados para a iteração direta, figura (IV.6.1.5). A perda de ortogonalidade citada pode ser verificada pelos critérios de avaliação dos vetores, ou seja, quando  $\zeta_m > 1$  e/ou  $\epsilon_m$  for crescente, conforme mostrado nas tabelas (IV.6.1.1) à (IV.6.1.4).

$m$	$\varepsilon_m$	$\zeta_m$
1	0,9500	1,0000
2	0,7073	1,0000
3	0,3591	1,0000
4	0,1074	1,0000
5	0,0183	1,0000
6	$0,1784 \times 10^{-2}$	1,0000
7	$0,9511 \times 10^{-4}$	1,0000
8	$0,8460 \times 10^{-4}$	1,0000
9	$0,7375 \times 10^{-2}$	1,9240
10	$0,7385 \times 10^{-2}$	1,9250
11	$0,7385 \times 10^{-2}$	1,9250

Tabela IV.6.1.1 - Método de Lanczos, iteração inversa.

( perda de ortogonalidade a partir de  $m = 9$  )

m	$\varepsilon_m$	$\zeta_m$
1	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,0500
2	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,1642
3	$0,1490 \times 10^{-2}$	0,2574
4	$0,4327 \times 10^{-2}$	0,3337
5	$0,4854 \times 10^{-2}$	0,3992
6	$0,5453 \times 10^{-2}$	0,4513
7	$0,6095 \times 10^{-2}$	0,4985
8	$0,6322 \times 10^{-2}$	0,5345
9	$0,6337 \times 10^{-2}$	0,5672
10	$0,8900 \times 10^{-2}$	0,5919
11	0,0107	0,6023

Tabela IV.6.1.2 - Método de Lanczos, iteração direta.

( perda de ortogonalidade a partir de  $m = 3$  )

m	$\varepsilon_m$	$\zeta_m$
1	0,9914	0,9371
2	0,9196	0,9909
3	0,7529	0,9978
4	0,4659	0,9994
5	0,1587	0,9999
6	0,0243	1,0000
7	$0,1733 \times 10^{-2}$	1,0000
8	$0,5545 \times 10^{-4}$	1,0000
9	$0,6201 \times 10^{-6}$	1,0000
10	$0,5830 \times 10^{-8}$	0,9700
11	$0,9607 \times 10^{-9}$	0,9709

Tabela IV.6.1.3 - Método de Ritz, iteração inversa.

( sem perda de ortogonalidade )

m	$\varepsilon_m$	$\zeta_m$
1	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,0500
2	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,1500
3	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,2500
4	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,3500
5	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,4500
6	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,5500
7	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,6500
8	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,7500
9	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,8500
10	$0,8327 \times 10^{-16}$	0,9500
11	$0,8327 \times 10^{-16}$	1,0000

Tabela IV.6.1.4 - Método de Ritz, iteração direta.

( sem perda de ortogonalidade )

ii) Análise da precisão da resposta

Pode-se observar que os resultados obtidos pelo método modal com a integração exata das equações desacopladas, apresentado na figura (IV.6.1.6) para o método de Ritz ( iteração direta e inversa ) apresentam uma boa correlação com os obtidos pelo método de Monte Carlo ( HAJI-SHEIKH e SPARROW ) e na figura (IV.6.1.7), para o método de Lanczos ( iteração direta e inversa ) que apresenta um bom resultado para uma base com 6 vetores e iteração inversa. A

título de ilustração mostra-se na figura (IV.6.1.8) a comparação entre os resultados do método de Monte Carlo e o método trapezoidal ( $\alpha = 1$ ), que também apresenta uma boa correlação.

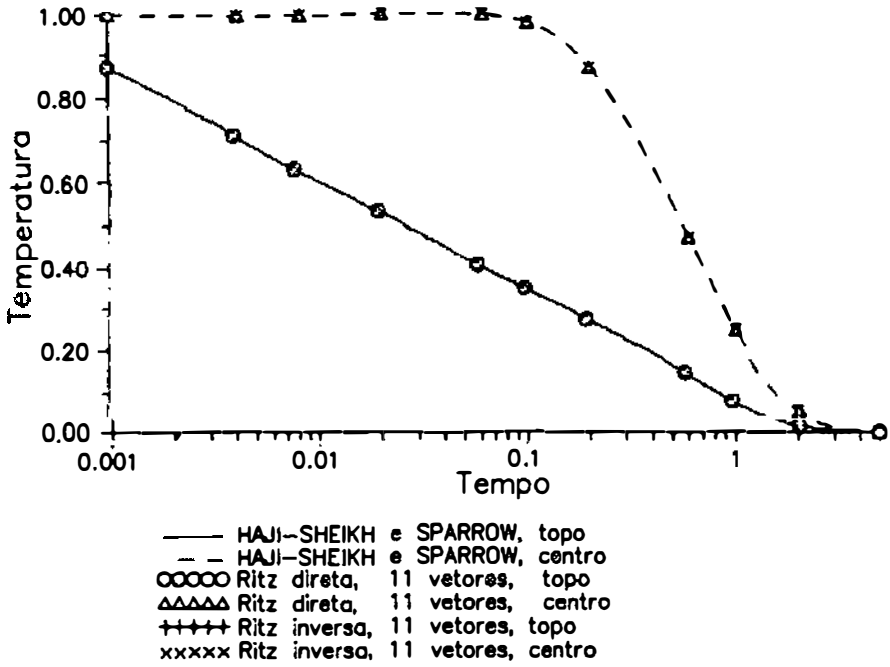


Figura IV.6.1.6 — Resultados do método de Ritz.

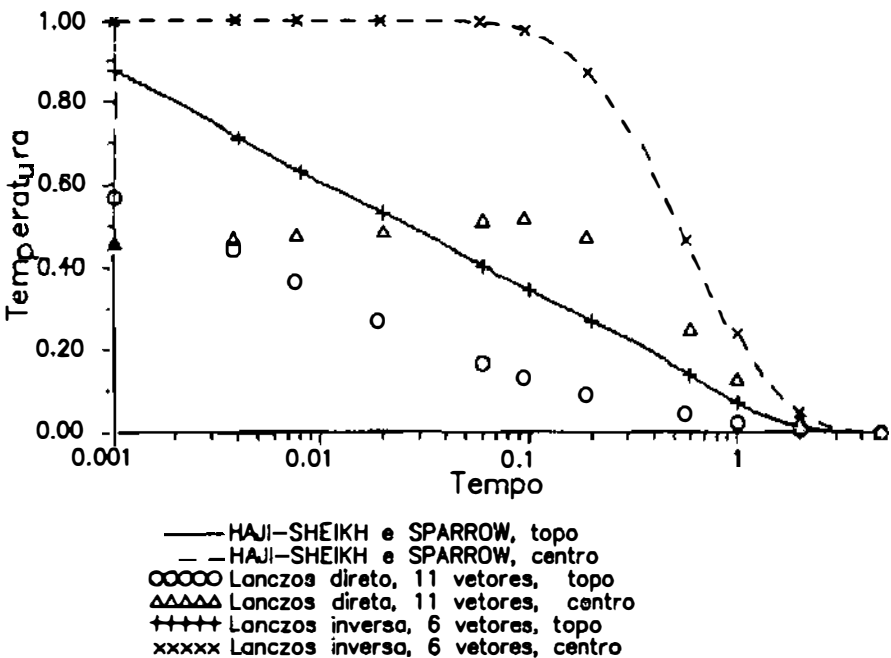
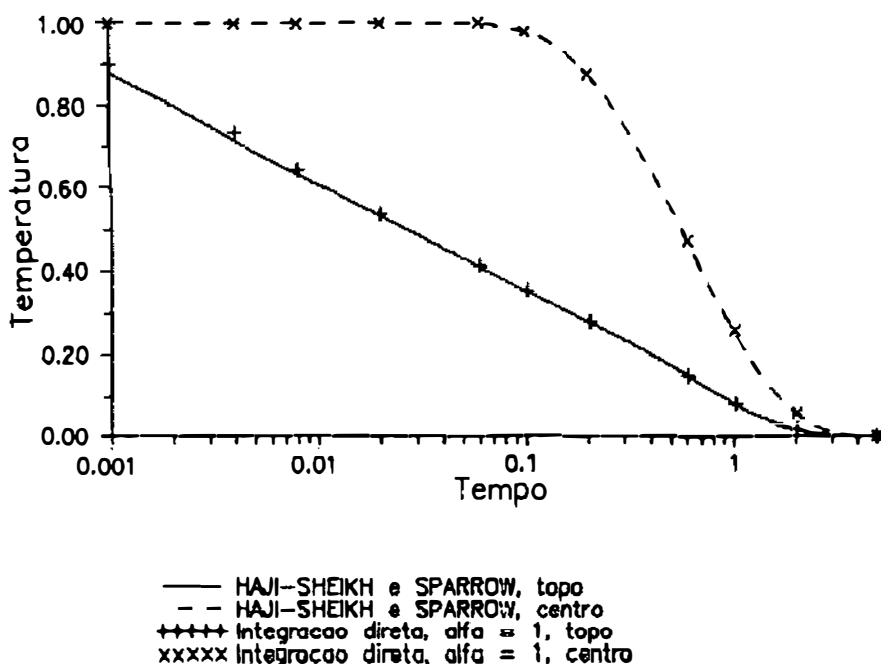


Figura IV.6.1.7 — Resultados do método de Lanczos.



Figuro IV.6.1.8 - Resultados do Integrocao direto.

iii) Análise com relação ao tempo de processamento

Analisando os resultados de tempo de processamento listados na tabela (IV.6.2.5) verifica-se que os tempos para os métodos modais são comparáveis ao tempo obtido pela integração direta.

METODO	NÚMERO DE VETORES		
	2	6	11
LAN INVERSA	4,20	4,61	5,24
LAN DIRETA	4,78	4,67	5,22
RITZ INVERSA	4,16	4,67	5,28
RITZ DIRETA	4,87	4,72	5,38
METODO- $\alpha$	5,72		

Tabela IV.6.1.5 - Tempos de processamento em segundos.



iv) Análise do número de iterações do método da pseudo-força

Neste problema, o processo iterativo da pseudo-força nos métodos estudados não apresentou nenhum problema de ordem numérica. O número de iterações atingido foi dois, para todos os métodos, modais ou integração direta.

#### IV.6.2 - EFEITOS TÉRMICOS CAUSADOS POR INTRUSÃO BASÁLTICA EM ROCHAS SEDIMENTARES

Este problema trata da transferência de calor bidimensional através de uma massa de rocha sedimentar com uma intrusão de rocha basáltica cujos dados foram gentilmente cedidos pela PETROBRÁS. No problema original tinha-se como condição de contorno na superfície a temperatura prescrita de  $20^{\circ}\text{C}$ , neste problema as condições de contorno na superfície passam a ser de convecção e radiação de calor. O domínio foi discretizado por 540 elementos de condução, 45 de convecção de calor e 45 de radiação e a malha possui ao todo 598 nós e 598 graus de liberdade, conforme pode ser visto na figura (IV.6.2.1).

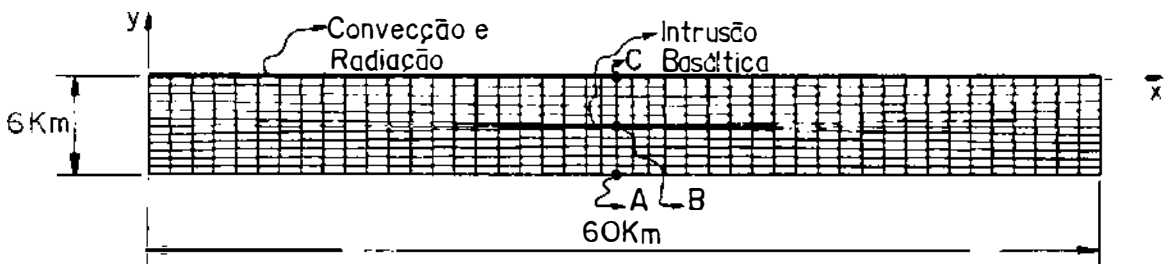


Figura IV.6.2.1 - Malha de elementos finitos utilizada na a solução.

As condições iniciais e de contorno são: temperatura inicial de  $20^{\circ}\text{C}$  na superfície superior exposta a radiação e convecção, variando linearmente no interior da massa até a temperatura de  $120^{\circ}\text{C}$  na superfície inferior, no instante  $T = \Delta t$  a temperatura da intrusão basáltica passa a ser de  $800^{\circ}\text{C}$ . Será mantido um fluxo de calor constante ao longo de toda a análise na superfície inferior de  $5,2 \times 10^5 \text{ cal/Km}^2$ . As dimensões da massa basáltica são de 0,2 Km de profundidade por 6 Km de comprimento, situada no centro da malha de elementos finitos. O esquema de integração é  $\Delta t = 0,001$  milhão de ano para o intervalo de tempo  $T \in (0, 1]$ . As propriedades físicas se encontram na tabela (IV.6.2.1). A tolerância para a análise não-linear é de  $1 \times 10^{-3}$ .

MATERIAL	CONDUTIVIDADE (Cal/Km <sup>2</sup> °C)	CAPACIDADE TERMICA (Cal milhões anos/Km <sup>3</sup> °C)
ROCHA SEDIMENTAR	$15,7785 \times 10^{15}$	$6,25 \times 10^{14}$
BASALTO	$25,2456 \times 10^{15}$	$1,00 \times 10^{15}$

Tabela IV.6.2.1 - Propriedades físicas dos materiais.

Este exemplo será utilizado para se avaliar de forma geral o desempenho com relação ao tempo de processamento e precisão do método de redução modal quando confrontado com os resultados obtidos pelo método trapezoidal. Serão feitas comparações com análises utilizando a redução da quantidade

de modos térmicos e sua consequência no tempo de processamento e na precisão da resposta. As comparações serão feitas com os resultados do problema nos pontos de coordenadas:  $(29,5, -6,0)$ ,  $(29,5, -3,0)$  e  $(29,5, 0,0)$  que serão chamados de pontos A, B e C, respectivamente.

#### i) Análise dos métodos modais de LAN e RITZ

Verifica-se na figura (IV.6.2.2) que o método de Lanczos com iteração inversa não obteve bons resultados para quatro vetores e a geração de mais vetores não foi possível devido a perda de ortogonalidade ser crítica, implicando em problemas de ordem numérica. Os resultados apresentados nas figuras (IV.6.2.3) para o ponto A, (IV.6.2.4) para o ponto B e (IV.6.2.5) para o ponto C, obtidos pelo método de Lanczos com iteração direta apresentam um bom resultado para 20 vetores porém, como será visto no item a seguir, sua precisão não é completamente satisfatória.

O método de Ritz com iteração inversa, apresentado nas figuras (IV.6.2.6) para o ponto A, (IV.6.2.7) para o ponto B e (IV.6.2.8) para o ponto C, atingiu o melhor resultado e o método de Ritz com iteração direta, observe a figura (IV.6.2.9), não apresentou bons resultados. Como será visto adiante, isto se deve a sequência de vetores gerados e a qualidade dos vetores.

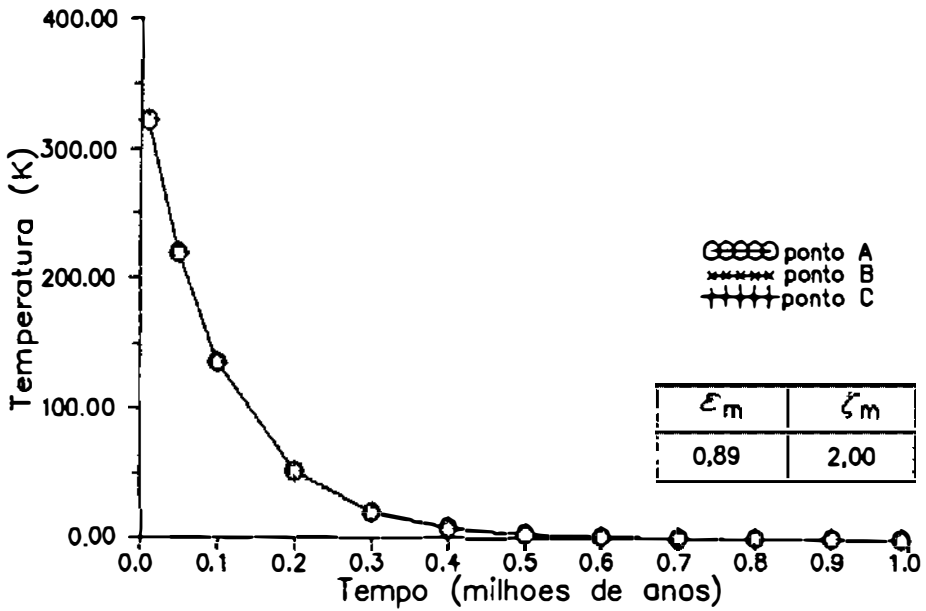


Figura IV.6.2.2 – Método de Lanczos, iteração inversa, 4 vetores.

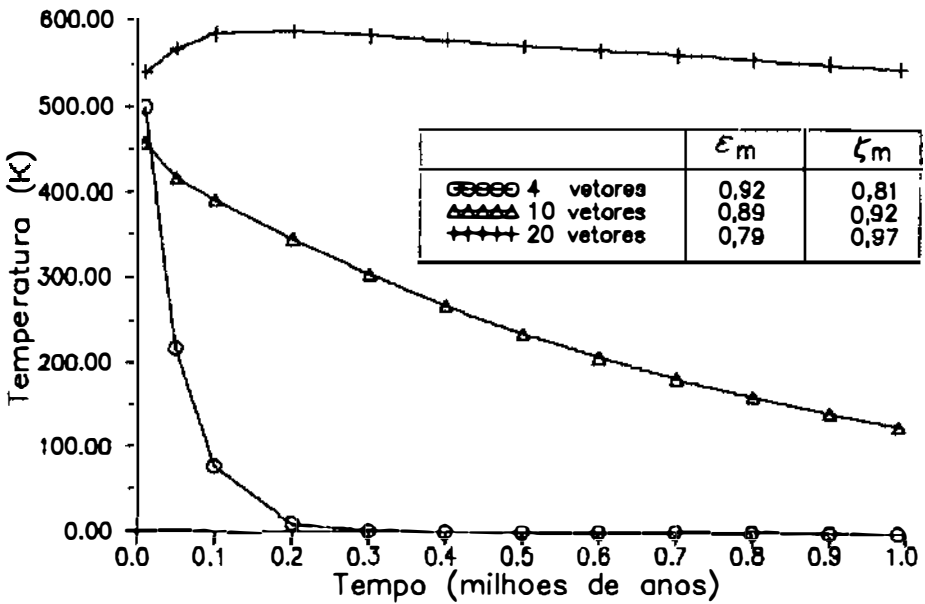


Figura IV.6.2.3 – Método de Lanczos, iteração direta, ponto A.

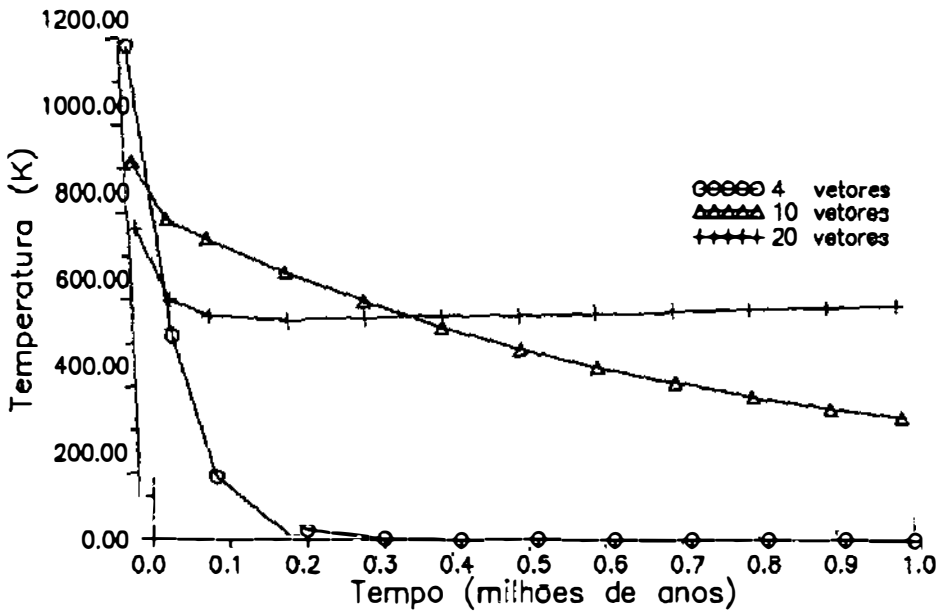


Figura IV.6.2.4 – Método de Lanczos, iteração direta, ponto B.

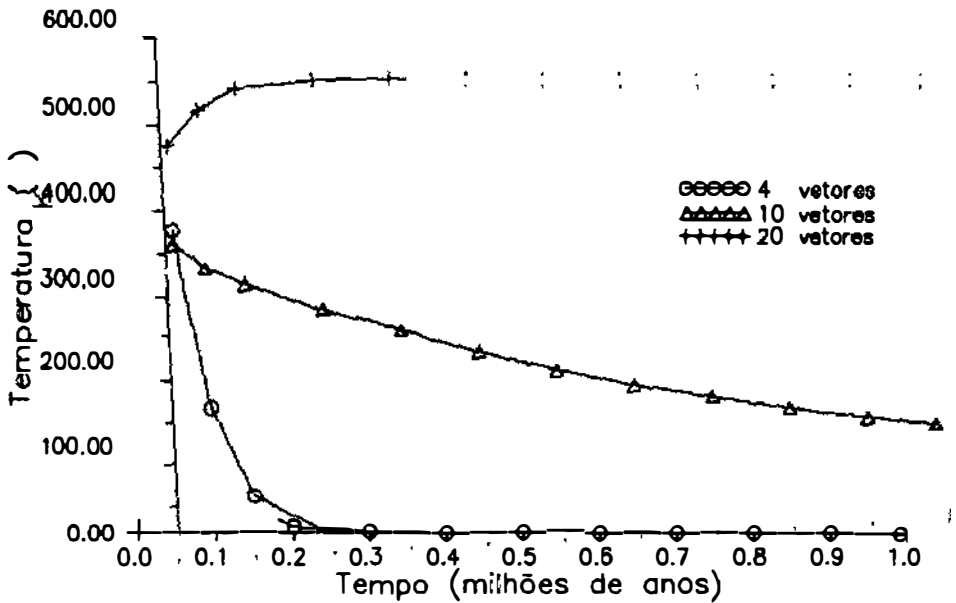


Figura IV.6.2.5 – Método de Lanczos, iteração direta, ponto C.

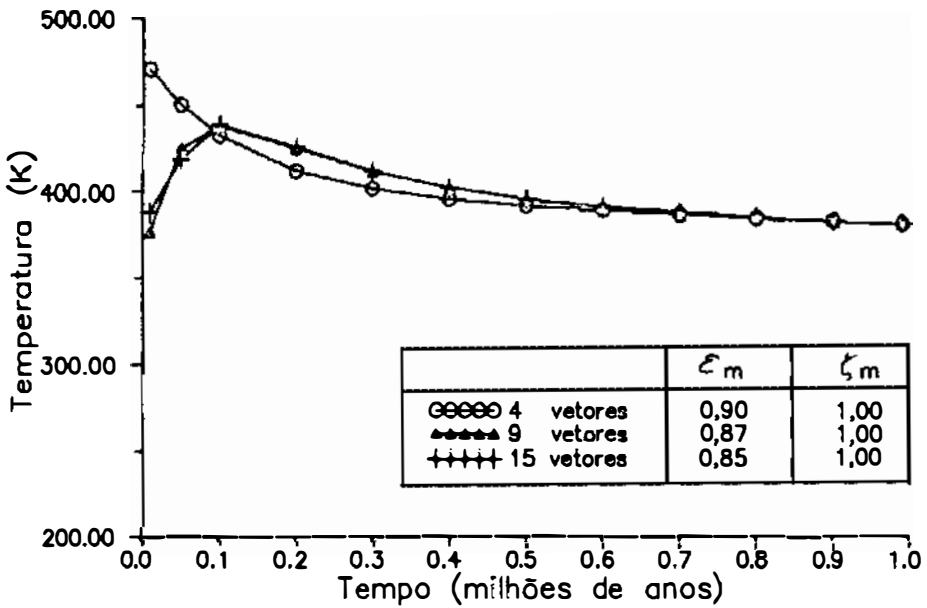


Figura IV.6.2.6 – Método de Ritz, iteração inversa, ponto A.

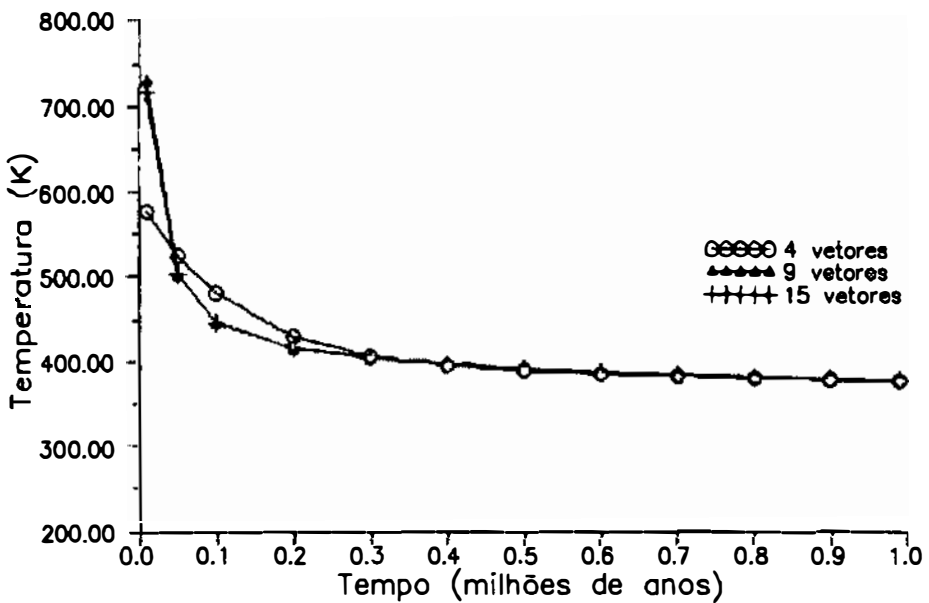


Figura IV.6.2.7 – Método de Ritz, iteração inversa, ponto B.

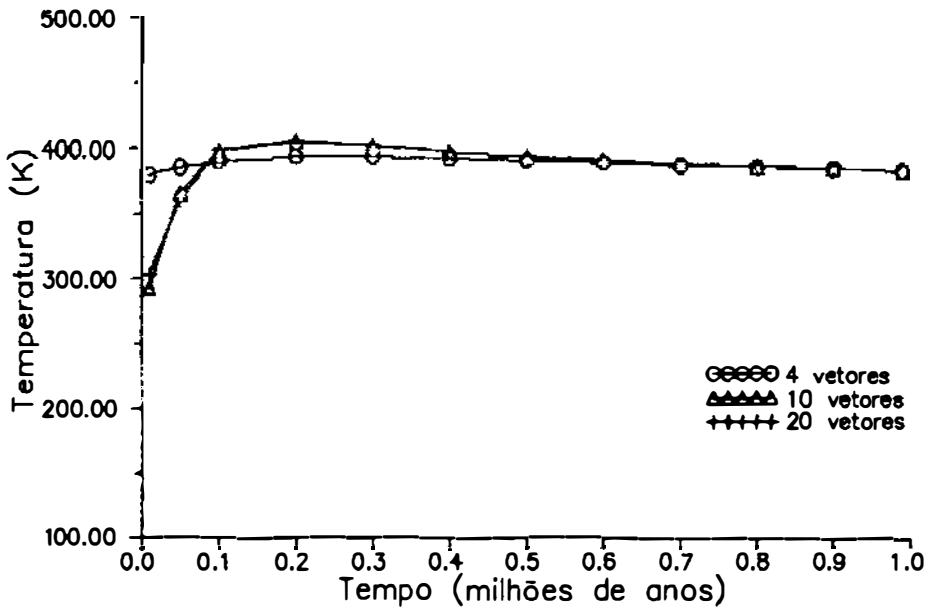


Figura IV.6.2.8 – Método de Ritz, iteração inversa, ponto C.

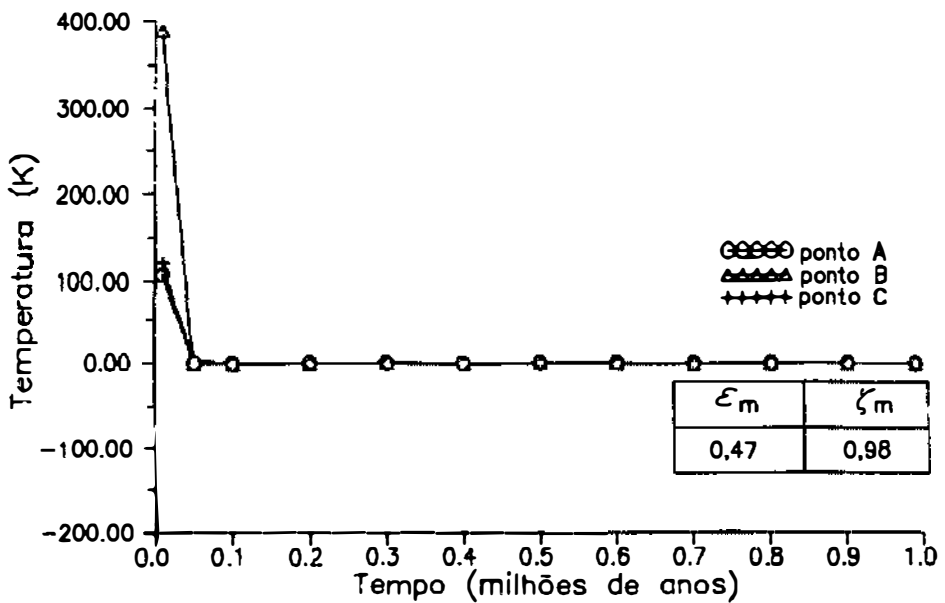


Figura IV.6.2.9 – Método de Ritz, iteração direta, 15 vetores.



## ii) Análise da precisão da resposta

Pode-se observar, nas figuras (IV.6.2.10) para o ponto A, (IV.6.2.11) para o ponto B e (IV.6.2.12) para o ponto C, que a correlação entre os resultados da integração direta e do método de Ritz com iteração inversa e 15 vetores é boa. Entretanto, os resultados para o método de Lanczos com iteração direta e 20 vetores apresentam erro nas condições iniciais porém, uma boa representação da variação da temperatura é alcançada. Isso pode ser verificado pela translação da curva de um valor aproximadamente constante de temperatura.

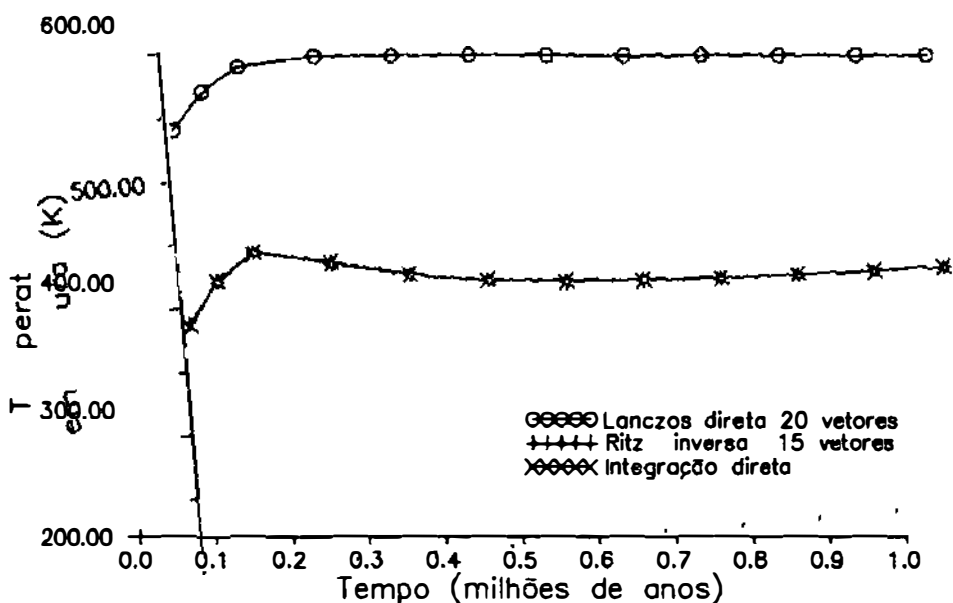


Figura IV.6.2.10 - Comparação: Métodos modais x Integração direta, ponto A.

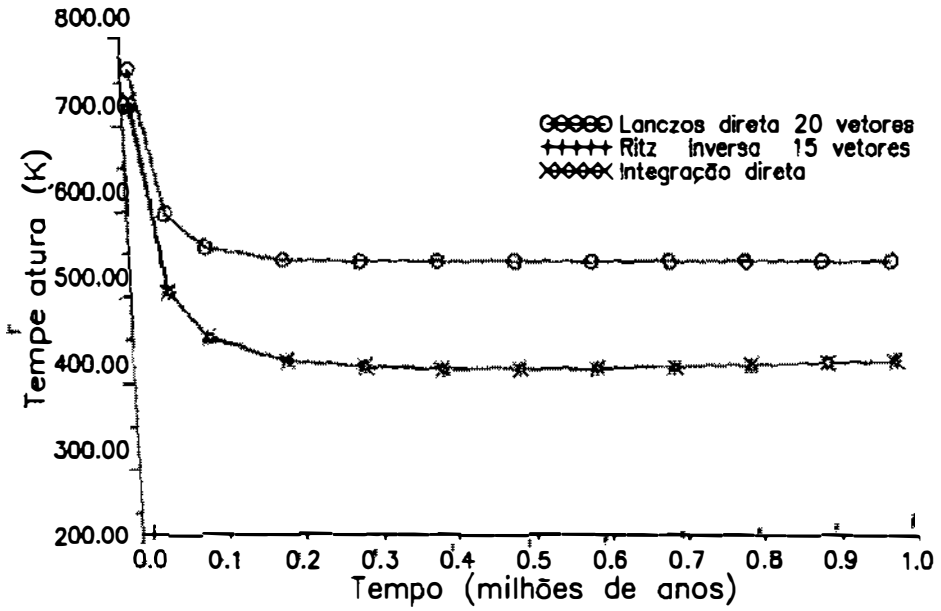


Figura IV.6.2.11 - Comparação: Métodos modais x Integração direta, ponto B.

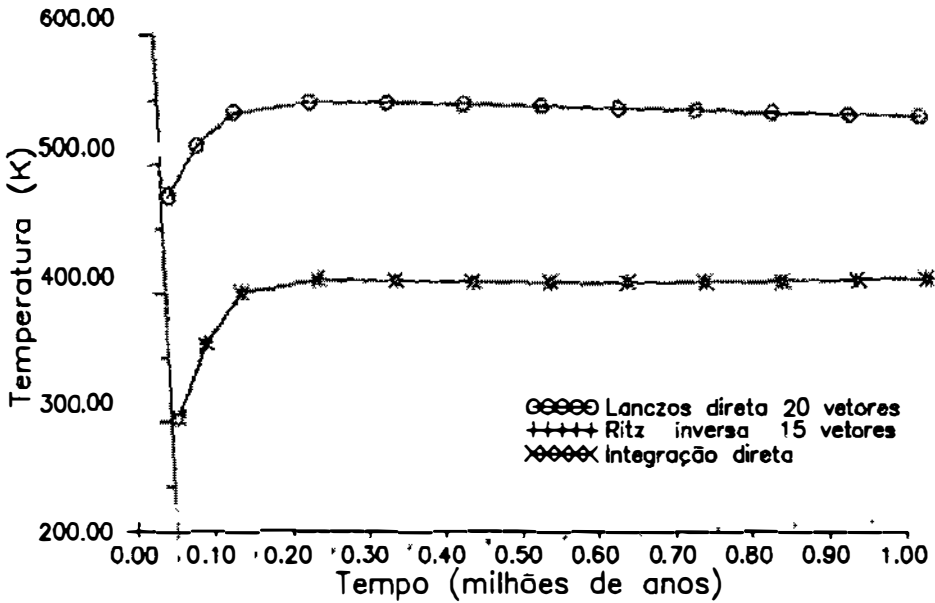
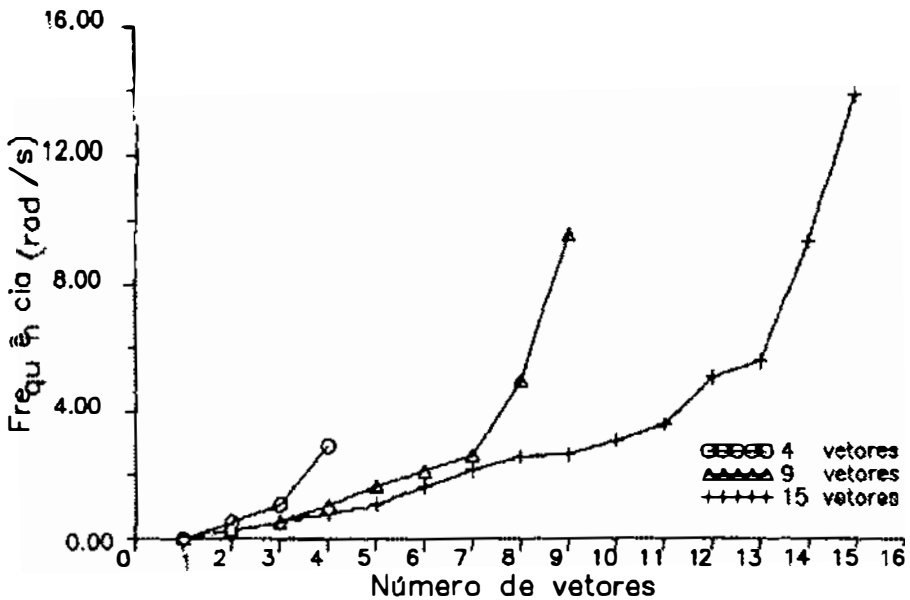


Figura IV.6.2.12 - Comparação: Métodos modais x integração direta, ponto C.

## iii) Análise da sequência de vetores gerados

Tomando como referência a sequência de vetores gerada pelo método de Ritz com iteração inversa, apresentado na figura (IV.6.2.13) observa-se uma faixa de espectro estreito e concentrada nas frequências mais baixas, indicando que neste problema as frequências mais baixas são dominantes para uma boa resposta. A sequência de frequências gerada pelo método de Lanczos com iteração direta possui características semelhantes, porém com poucas frequências baixas, observe na figura (IV.6.2.14). São apresentados também os resultados para o método de Ritz com iteração direta ( figura (IV.6.2.15) ) e para o de Lanczos com iteração inversa ( figura (IV.6.2.16) ) .



Figuro IV.6.2.13 - Método de Ritz, iteração inversa.

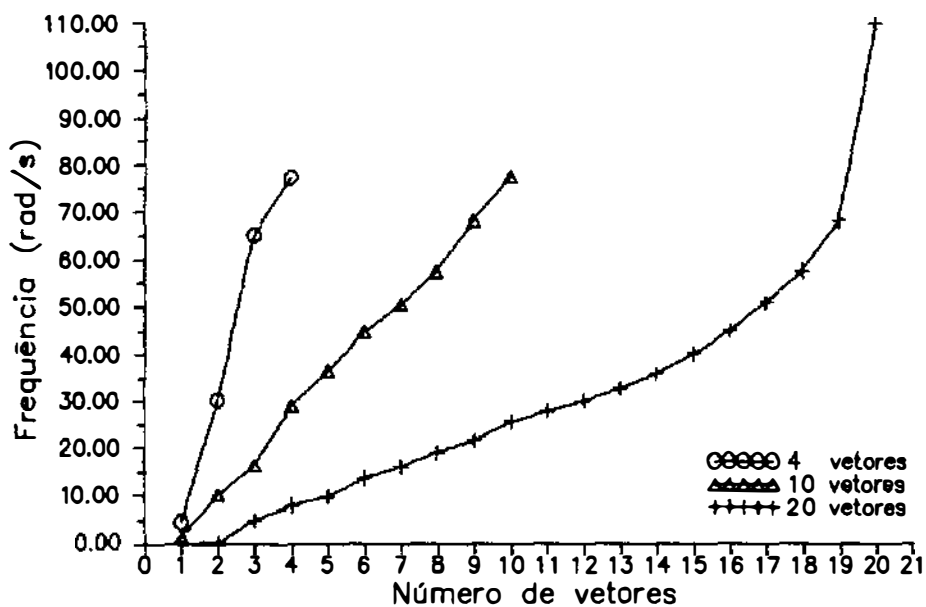


Figura IV.6.2.14 – Método de Lanczos, iteração direta.

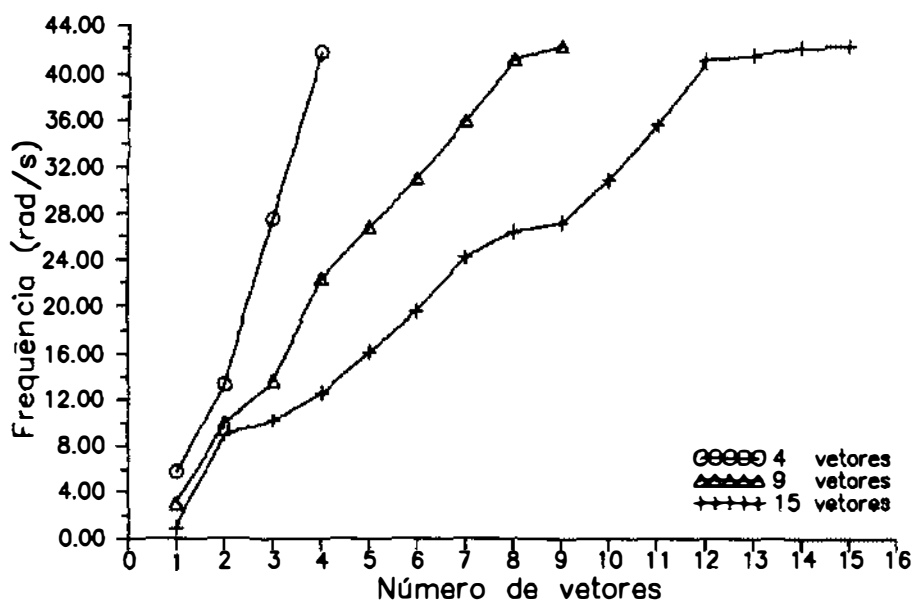


Figura IV.6.2.15 – Método de Ritz, iteração direta.

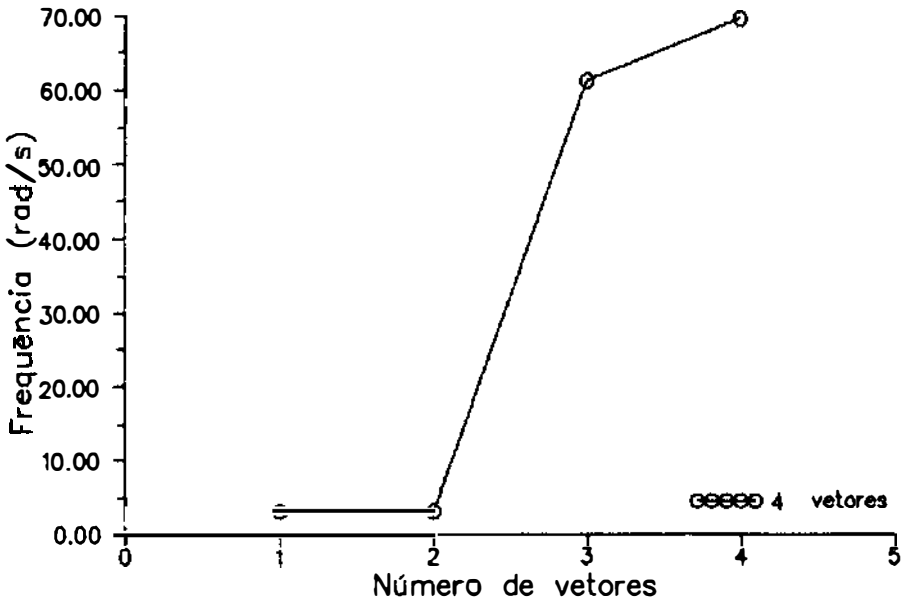


Figura IV.6.2.16 - Método de Lanczos, iteração inversa.

Observa-se também, como no exemplo numérico (III.6.2), que o método de Lanczos produz um espectro de frequências mais disperso ( figuras (IV.6.2.14) e (IV.6.2.16) ) que o método de Ritz ( figuras (IV.6.2.13) e (IV.6.2.15) ) .

#### iv) Análise com relação ao tempo de processamento

O tempo de processamento obtido para a integração direta (  $\alpha = 1$  ) é de 206,7 segundos, os demais resultados serão dados em porcentagem relativos a este tempo. Analisando os resultados da tabela (IV.6.2.2) observa-se que o tempo de processamento para o método de Ritz com iteração inversa e 15 vetores é aproximadamente metade do método de integração direta. São também apresentados nesta tabela os resultados para a iteração direta com 4, 9 e 15 modos térmicos, apesar deste não ter alcançado boa

resposta. Os resultados da tabela (IV.6.2.3) são para os métodos de Lanczos, estes resultados indicam que este problema não possui um número de graus de liberdade muito grande, pois apesar da utilização de um método de ortogonalização mais simples os resultados foram pouco inferiores aos do método de Ritz que utiliza um esquema de ortogonalização completa.

NÚMERO DE VETORES	RITZ	
	INVERSA	DIRETA
4	28,2	28,3
9	37,0	37,0
15	47,3	47,8

Tabela IV.6.2.2 - Tempos de processamento relativo a 100% para a integração direta.

NÚMERO DE VETORES	LANCZOS	
	INVERSA	DIRETA
4	28,1	28,4
10	*	38,6
20	*	56,9

Tabela IV.6.2.3 - Tempos de processamento relativo a 100% para a itegração direta.

v) Análise do número de iterações do método da pseudo-força

Da mesma forma que no exemplo numérico (IV.6.1), neste problema, o processo iterativo da pseudo-força nos métodos estudados não apresentou nenhum problema de ordem numérica. O número médio de iterações atingido foi dois, para todos os métodos.

vi) Escolha do vetor de partida

Para este problema foi escolhido o vetor de partida proposto por CARDONA [4], descrito no item III.5.3, pelo fato deste problema ter temperatura inicial não uniforme. O vetor de partida convencional foi utilizado, e apresentou resultados pouco satisfatórios sendo abolida a sua utilização, por não conseguir representar a distribuição inicial de temperatura.

vii) Análise dos resultados dos critérios de avaliação

Observando os resultados de  $\epsilon_m$  e  $\zeta_m$  para o método de Lanczos com iteração direta, mostrados na figura (IV.6.2.3), e os do Ritz com iteração inversa, mostrados na figura (IV.6.2.6), verifica-se que os resultados alcançados para  $\zeta_m$  são bons, enquanto os demais foram deficientes. Indicando que a solução será bem representada para valores de  $\zeta_m$  próximos da unidade e vetores associados as baixas frequências.

De fato pode-se dizer que há uma correlação entre  $\zeta_m$  e  $\varepsilon_m$  e o espectro de frequência, onde  $\zeta_m$  está geralmente associado as baixas frequências (primeiros modos), pois a capacidade térmica é distribuída pelo domínio e  $\varepsilon_m$  as altas frequências (modos particulares, com boa representação em pontos específicos), pois está associado a distribuição espacial do fluxo de calor, que geralmente é distribuído por pontos específicos do contorno. Desta forma, para cada tipo de problema haverá um critério mais eficiente.



## CAPÍTULO V

### V.1 - CONCLUSÕES

Ao término deste trabalho conclui-se que a utilização dos métodos de redução modal dependentes do fluxo de calor apresentam resultados com precisão, estabilidade numérica e bom desempenho computacional, de tal forma que pode-se dizer que estes métodos são eficientes para a solução dos problemas de transferência de calor com condições de contorno de convecção e de radiação.

Com respeito aos dois métodos de redução modal descritos no capítulo III, mostrou-se que a diferenciação entre o método de Lanczos e o de Ritz era na ortogonalização de Gram-Schmidt adotada. O método de Lanczos utiliza um esquema de ortogonalização mais simples, enquanto que o de Ritz utiliza um processo de reortogonalização total através da técnica de Gram-Schmidt modificada. De posse dos resultados obtidos, verifica-se que a geração dos vetores pelo método de Lanczos perde rapidamente a ortogonalidade. Contudo, observa-se que na solução de problemas com muitos graus de liberdade, este método apresenta bons resultados, devido principalmente as propriedades da sequência de vetores gerados que neste caso, apresentam uma boa ortogonalidade. Por outro lado,

acredita-se que para um melhor desempenho do método de Lanczos, deve ser implementado um esquema suplementar de verificação da ortogonalidade dos vetores de forma que, quando for detectada perda de ortogonalidade, esta seja recuperada através de uma reortogonalização. Entre as técnicas encontradas na literatura, as mais eficientes são a reortogonalização seletiva, como proposta por PARLETT [20,33], ou parcial, proposta por SIMON [33,34].

Outro ponto importante a ser citado é a escolha do vetor de partida para a geração de base. Em análises não-lineares pelo método da pseudo-força, esta escolha possui muita importância pois, nestes problemas a pseudo-força deve ser bem representada pela matriz de transformação de coordenadas. Isto pode ser observado pelos resultados do exemplo numérico (IV.6.1), onde verifica-se no método de Ritz com iteração direta uma perda de precisão ao longo do tempo, devido a consequente perda de qualidade de representação da pseudo-força.

A partir dos resultados obtidos na análise não-linear pode-se dizer que para problemas com não-linearidade no contorno, o método da pseudo-força, extraído da análise estrutural e implementado na análise de transferência de calor, é simples, eficiente e numericamente estável.

Um outro ponto a ser explorado é a aplicação a problemas tridimensionais de transferência de calor. Assim como, outros tipos de problemas que sejam governados por

equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como problemas de escoamento de fluidos ( invíscido, incompressível e irrotacional ), condução de eletricidade e etc.

A análise não-linear pode ser estendida facilmente para não-linearidades na convecção de calor. Estudos podem ser feitos para não-linearidades do material utilizando-se o método da Pseudo-Força.

Esquemas de integração mais eficientes com relação ao incremento de tempo podem ser implementados utilizando-se incrementos de tempo variável selecionados automaticamente. Sabendo-se que as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são governadas por funções exponenciais, isso implica que, em instantes onde o gradiente de temperatura é grande, necessita-se de incrementos de tempo menores e em momentos onde o gradiente de temperatura é pequeno, o incremento de tempo pode ser aumentado.

Além disso, pode-se verificar que os métodos modais baseados na iteração inversa e direta tem vantagens e desvantagens. Desta forma, sugere-se para pesquisas futuras o aproveitamento das vantagens dos dois tipos de iteração. Isto é possível através da utilização de duas matrizes de transformação de coordenadas, uma gerada pela iteração inversa e outra pela iteração direta.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1] BATHE, KLAUS-JÜRGEN , "ADINAT - A Finite Elemente Program for Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis of Temperatures", Acoustics and Vibration Laboratory, Mechanical Engineering Dept., M. I. T. , Cambridge, Massachusetts, Report 82448-5, 1977.
- [ 2] ANSYS-PC/THERMAL 4.3 (on MS-DOS and PC-DOS Systems), Swanson analysis Systems, Inc. Revision History, Update 0, march 28, 1988.
- [ 3] GALLAGHER, R. H. e MALLET, R. , "Efficient Solution Processes for Finite Element Analisis of Transient Heat Conduction", *ASME Winter Annual Meeting*, Los Angeles, California, Novembro, 1969.
- [ 4] CARDONA, ALBERTO e IDELSOHN, SERGIO , "Solution of Non-Linear Thermal Transient Problems by a Reduction Method", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 1023-1042, 1986.
- [ 5] NOUR-OMID, B. e WILSON, E. L. , "A New Algorithm for Heat Conduction Analysis", R. W. Lewis e K. Morgan (eds.), *Numerical Methods in thermal Problems*, Pineridge Press, Swanses, UK, pp. 18-29, 1985.

- [ 6] COUTINHO, ALVARO L. G. A. , O Algoritmo de Lanczos para a Solução de Problemas Estacionários e Transientes pelo Método dos Elementos Finitos, Tese de Doutorado, Departamento de Eng. Civil, COPPE/UFRJ, 1987.
- [ 7] LANGZOS, CORNELIUS , "An Iteraction Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators", *J. Research Natl. Bur. Standards*, Vol. 45, pp. 255-282, 1950.
- [ 8] WILSON, EDWARD L. , YUAN, MING-WU e DICKENS, JOHN M., "Dynamic Analysis by Direct Superposition of Ritz Vectors", *J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 813-821, 1982.
- [ 9] STRICKLIN, JAMES A. e HAISLER, WALTER E. , "Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 7, pp. 125-136, 1977.
- [10] TRUJILLO, D. M. , "Stability Analysis of an Extrapolated Force Correction Method for Nonlinear Structural Dynamics", *Jornal of Applied Mechanics* , Vol. 49, pp. 203-205, 1982.
- [11] HUGHES, THOMAS J. R. , *The Finite Element Method Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., 1987.

- [12] HUGHES, THOMAS J. R. , "Unconditionally Stable Algorithms for Nonlinear Heat Conduction", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 10, pp. 135-139, 1977.
- [13] COUTINHO, ALVARO L. G. A. , LANDAU, LUIZ , WROBEL, LUIZ G. e EBECKEN, NELSON F. F. , "Modal Solution of Transient Heat Conduction Utilizing Lanczos Algorithm", *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 28, pp. 13-25, 1989.
- [14] NOUR-OMID, BAHRAM e CLOUGH, RAY W. , "Dynamic Analysis of Structures Using Lanczos Co-ordinates", *J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 12, pp. 565-577, 1984.
- [15] BJORK, A. , "Solving Linear Least Squares Problems by Gram-Schmidt Orthogonalization", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 17/18, pp. 541-560, 1979.
- [16] CLOUGH, R. W. e WILSON, E. L. , "Dynamic Analysis of Large Structural Systems with Local Nonlinearities", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 17/18, pp. 107-129, 1979.
- [17] GUYAN, R. J. , "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal*, Vol. 3 , pp. 380, 1965.
- [18] HANSTEEN, O. E. e WILSON, E. L. , "On the Accuracy of

Mode Superposition Analysis in Structural Dynamics", *Int. J. Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 7, pp. 405-411, 1979.

[19] JOO, K. J. e WILSON, E. L. , Generation of Ritz Vectors for Adaptive Finite Element Dynamic Analysis, Proc. of U.S.-Korea Seminar on Critical Engineering Systems, 1987.

[20] PARLETT, B. N. , *The Symmetric Eigenvalue Problem*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1980.

[21] LEGER, P. , WILSON, E. L. e CLOUGH, R. W. , "The Use of Load Dependent Vectors for Dynamic and Earthquake analysis", UCB/EERC-86/04, março, 1986.

[22] LEGER, PIERRE , WILSON, E. L. e JOO, KUAN-JUNG , "Ritz Vectors and Generation Criteria for Mode Superposition Analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 149-167, 1989.

[23] CULLUM, J. K. e WILLOUGHBY, R. A. , *Lanczos Algorithms for Large Symmetric eigenvalue Computations, Vol. 1 Theory, Vol. 2 Programs*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[24] OWEN, D. R. J. e DAMJANIC, F. , "Reduced Numerical Integration in Thermal Transient Finite Element Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 17, pp. 261-276, 1983.

- [25] DAMJANIC, F. e OWEN, D. R. J. "Mapped Infinite Elements in Transient Thermal Analysis", *Computers & Structures*, Vol. 19, N. 4, pp. 673-687, 1984.
- [26] BATHE, KLAUS-JÜRGEN, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.
- [27] LANDAU, L. Comportamento Não-Linear de Estruturas pelo Método de Superposição Modal, Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ/PEC, 1983.
- [28] VENANCIO FILHO, FERNANDO , COUTINHO, ALVARO L. G. A. , LANDAU, LUIZ , LIMA, EDISON C. P. e EBECKEN, NELSON F. F. "Nonlinear Dynamic Analysis using the Pseudo-Force Method and the Lanczos Algorithm", *Computers & Structures*, Vol. 30, pp. 979-983, 1988.
- [29] COUTINHO, ALVARO L. G. A. , LANDAU, LUIZ , LIMA, EDISON C. P. e EBECKEN, NELSON F. F. , "A Comparison of Algorithms for Dynamic Nonlinear Interaction of Elastic Plates on Discrete Supports", *Numerical Methods for Nonlinear Problems* (edited by G. Taylor, D. R. J. Owen, E. Hinton and F. B. Damjanic), Pineridge Press. Swansea, pp. 678-691 , 1986.
- [30] HAJI-SHEIKH, A. e SPARROW, E. M. "The Solution Of Heat Conduction Problems by Probability Methods", *Trans. ASME, J. of Heat Transfer*, Vol. 39, pp.



121-131, 1967.

- [31] BATHE, K. J. e KHOSHGOFTAAR, M. R. , "Finite Element Formulation and Solution of Nonlinear Heat Transfer", *Nuclear engineering and Design*, Vol. 51, pp. 389-401, 1979.
- [32] PARLETT, B. N. e SCOTT, D. S. , "The Lanczos Algorithm with Selective orthogonalization", *Math. Comp.*, Vol. 33, pp. 219-238, 1979.
- [33] SIMON, H. D. , The Lanczos Algorithm for Solving Symmetric Linear Systems, Ph. D. Dissertation, Dept. of Mathematics, University of California, Berkeley, 1982.
- [34] SIMON, H. D. , "Analysis of the Symmetric Lanczos Algorithm with Reorthogonalization Methods", *Lin. Alg. Appl.*, Vol. 61, pp. 101-131, 1984.

# APÊNDICE A

## ELEMENTOS FINITOS UTILIZADOS NA ANÁLISE

### A.1 - ELEMENTO DE CONDUÇÃO

O elemento de condução utilizado é do tipo quadrilátero sólido isoparamétrico de quatro nós conforme figura A.1.

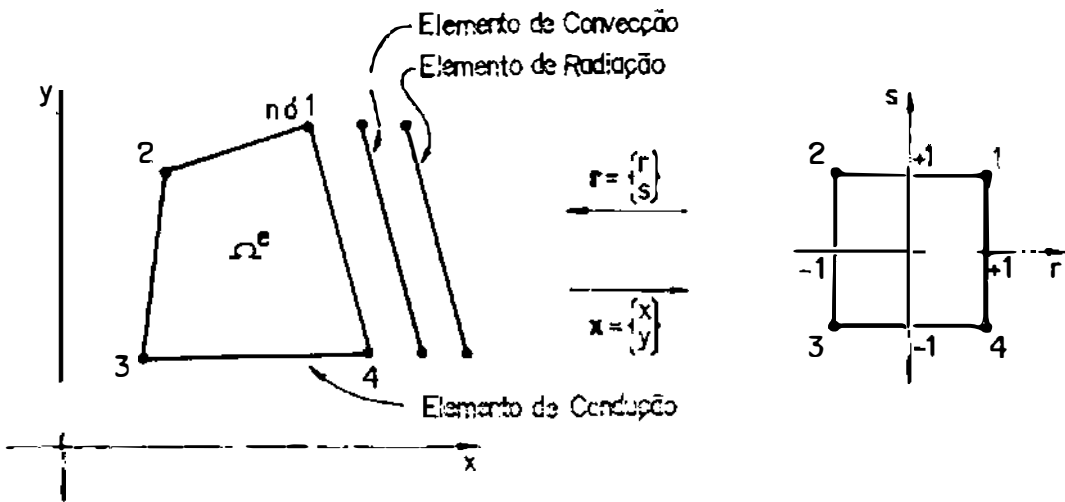


Figura A.1 - Elemento finito de condução, convecção e radiação de calor.

As coordenadas dos nós serão definidas como  $(x_i, y_i)$  onde i indica o número do nó correspondente. As funções de

interpolação adotadas serão bilineares, dadas por:

$$h_1 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 + s) \quad (\text{A.1})$$

$$h_2 = \frac{1}{4} (1 - r)(1 + s) \quad (\text{A.2})$$

$$h_3 = \frac{1}{4} (1 - r)(1 - s) \quad (\text{A.3})$$

$$h_4 = \frac{1}{4} (1 + r)(1 - s) \quad (\text{A.4})$$

As funções de interpolação do elemento são definidas no sistema de coordenadas natural onde as variáveis  $r$  e  $s$ , que variam de  $-1$  a  $+1$ , correspondem a um único ponto  $(x,y)$  no sistema global.

A coordenada de um ponto genérico qualquer dentro do elemento de condução será dado por:

$$x = \sum_{i=1}^4 h_i x_i \quad (\text{A.5})$$

$$y = \sum_{i=1}^4 h_i y_i \quad (\text{A.6})$$

onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto,  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas dos quatro nós do elemento,  $h_i$  são as funções de interpolação calculadas no ponto  $(r,s)$  em coordenadas naturais correspondente ao ponto  $(x,y)$  no sistema de coordenadas globais.

A matriz de interpolação de temperatura do elemento é,

$$\underline{\underline{H}}^e = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+r)(1+s) & (1-r)(1+s) & (1-r)(1-s) & (1+r)(1-s) \end{bmatrix}$$

(A.7)

Pode-se escrever as seguintes relações para a temperatura e a sua derivada,

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\theta}}^e = \underline{\underline{H}}^e {}^t \underline{\underline{\theta}} \quad (\text{A.8a})$$

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\theta}}_\Gamma^e = \underline{\underline{H}}_\Gamma^e {}^t \underline{\underline{\theta}} \quad (\text{A.8b})$$

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\dot{\theta}}}^e = \underline{\underline{B}}^e {}^t \underline{\underline{\theta}} \quad (\text{A.8c})$$

onde  ${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\theta}}$  é o vetor das temperaturas nos pontos nodais no instante de tempo  $t+\Delta t$  e o superescrito  $e$  denota o índice do elemento, cuja forma matricial é:

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{\theta}}^T = \left[ {}^{t+\Delta t} \theta_1 \quad {}^{t+\Delta t} \theta_2 \quad \dots \quad {}^{t+\Delta t} \theta_n \right] \quad (\text{A.9})$$

A matriz  $\underline{\underline{H}}_\Gamma^e$  é a matriz de interpolação para a temperatura na superfície do elemento  $e$  onde o subscrito  $\Gamma$  denota superfície e a matriz  $\underline{\underline{B}}^e$  contém as derivadas parciais das funções de interpolação  $\underline{\underline{H}}^e$  com respeito as coordenadas globais, que é definida como,

$$\underline{B}^e = \begin{bmatrix} \frac{\partial H^e}{\partial x} \\ \frac{\partial H^e}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

A partir da formulação de Galerkin descrita no capítulo II obtém-se a matriz de condutividade,

$$\underline{K} = \sum_{e=1}^{nel} (K^e) \quad (\text{A.11a})$$

$$K^e = [K_{\underline{p}}^e] \quad (\text{A.11b})$$

$$K_{\underline{p}}^e = \int_{\Omega^e} \underline{B}^{eT} \underline{k} \underline{B}^e d\Omega \quad (\text{A.11c})$$

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.11d})$$

onde  $\underline{K}$  é a matriz de condutividade total;  $\underline{k}$  é a matriz constitutiva, se  $k_x = k_y$ , tem-se um material isotrópico;  $K_{\underline{p}}^e$  é a matriz de condutividade associada,  $K^e$  é a matriz de condutividade expandida;  $\underline{B}^e$  é a matriz de gradiente de temperatura;  $\Omega^e$  é o domínio de integração correspondente ao volume do elemento. O superescrito  $e$  representa o índice do elemento,  $nel$  é o número de elementos do corpo e os colchetes na equação (A.11c) representam a expansão da matriz de condutividade do elemento para os graus de

liberdade correspondente no sistema de equações completo.

O cálculo da integral na equação (A.11c) pode ser facilitado se o mesmo for feito em coordenadas naturais. Isto é feito da seguinte forma, sabendo-se que o sistema de coordenadas naturais é um subespaço com outra base do global, para o qual pode-se escrever,

$$x = f(r,s) \quad (\text{A.12a})$$

$$y = g(r,s) \quad (\text{A.12b})$$

A relação inversa, de maneira análoga, é,

$$r = \hat{f}(x,y) \quad (\text{A.13a})$$

$$s = \hat{g}(x,y) \quad (\text{A.13b})$$

O necessário são as derivadas parciais  $\partial / \partial x$  e  $\partial / \partial y$  e para isso aplica-se a regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (\text{A.14a})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} \quad (\text{A.14b})$$

O cálculo de  $\partial r / \partial x$  e  $\partial s / \partial x$  é necessário e portanto significa que a relação inversa em (A.13a,b) deve ser calculada. Esta relação inversa em geral é difícil de ser estabelecida explicitamente e portanto, o cálculo das

derivadas parciais deve ser obtido pelo seguinte caminho.

Pela regra da cadeia obtém-se,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Separando a matriz da equação (A.15),

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Sendo  $\underline{J}$  o operador Jacobiano que relaciona as derivadas parciais no sistema de coordenadas naturais ao global.

O operador Jacobiano é obtido através das equações (A.5) e (A.6) e para se obter  $\partial / \partial x$  utiliza-se a relação,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \underline{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \quad (\text{A.17})$$

Isto implica que a inversa de  $\underline{J}$  deve existir. Se a inversa existir existirá uma relação única entre o sistema de coordenadas natural e o global.

## A.2 - ELEMENTO DE CAPACIDADE TÉRMICA

O elemento de capacidade térmica é obtido de forma análoga,

$$\underline{C} = \sum_{e=1}^{nel} ( \underline{C}^e ) \quad (A.18a)$$

$$\underline{C}^e = \left[ \underline{C}_P^e \right] \quad (A.18b)$$

$$\underline{C}_P^e = \int_{\Omega^e} \underline{H}^{eT} \rho c \underline{H}^e d\Omega \quad (A.18c)$$

onde  $\underline{C}$  é a matriz de capacidade total;  $\rho c$  é a capacidade térmica do elemento;  $\underline{H}^e$  é a matriz de interpolação do elemento  $e$ ;  $\Omega$  é o domínio de integração do elemento de volume.

## A.3 - ELEMENTO DE CONVECÇÃO

A convecção de calor é fornecida ao sistema pela condição dada pela equação (II.1.6),

$$q^{\Gamma c} = h ( \theta_a - \theta^{\Gamma} ) \quad (A.19)$$

onde  $h$  é o coeficiente de convecção,  $\theta_a$  a temperatura do fluido circundante,  $\theta^{\Gamma}$  a temperatura da superfície sob convecção e  $q^{\Gamma c}$  é o fluxo de calor por convecção.



O elemento de convecção implementado é de dois nós e se superpõe a um dos lados do elemento de condução, com normal no plano x-y. A matriz  $\underline{K}^C$  do elemento de convecção é obtido pela integração do fluxo que atravessa a área do elemento. O cálculo do fluxo é feito ao longo do comprimento do elemento ( com espessura constante ). Portanto, é necessário saber a variação da temperatura ao longo do comprimento, a qual é obtida multiplicando-se as temperaturas dos nós pelas funções de interpolação.

A matriz de interpolação de superfície para o elemento de convecção representado na figura A.1 é a matriz de interpolação  $\underline{H}^e$  calculada em  $r = +1$ ,

$$\underline{H}_{\Gamma}^e = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+s) & 0 & 0 & (1-s) \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Reescrevendo a equação (A.19) na forma matricial tem-se:

$$\underline{Q}^{\Gamma c} = \underline{Q}^c - \underline{K}^c \underline{\theta}^{\Gamma} \quad (\text{A.21})$$

Sendo

$$\underline{Q}^c = \sum_{e=1}^{nec} ( \underline{Q}^e ) \quad (\text{A.22a})$$

$$\underline{Q}^e = \begin{bmatrix} \underline{Q}_p^e \end{bmatrix} \quad (\text{A.22b})$$

$$\underline{Q}_p^e = \int_{\Gamma} h \underline{H}_{\Gamma}^{eT} \underline{H}_{\Gamma}^e d\Gamma \underline{\theta}_p \quad (\text{A.22c})$$

$$\tilde{K}^c = \sum_{o=1}^{nec} (K_o^e) \quad (A.23a)$$

$$\tilde{K}^o = \left[ K_p^e \right] \quad (A.23b)$$

$$K_p^o = \int_{\Gamma} h H_{\Gamma}^{eT} H_{\Gamma}^e d\Gamma \quad (A.23c)$$

onde  $Q^c$  é o vetor com o fluxo de calor proveniente da temperatura do fluido sob convecção;  $\tilde{K}^c$  é a matriz de convecção que será somada a matriz de condutividade térmica;  $nec$  é o número de elementos de convecção e  $Q^{\Gamma c}$  é o fluxo de calor trocado por convecção.

Para o cálculo da integral das equações (A.22c) e (A.23c) necessita-se do diferencial de superfície  $d\Gamma$  expresso no sistema  $r,s$  de coordenadas naturais. Se  $t$  é a espessura, considerada constante, logo  $d\Gamma = t dl$ , onde  $dl$  é um diferencial de comprimento, para o qual é válida a relação,

$$dl = \det \left[ J_{\Gamma} \right] ds \quad (A.24)$$

Sendo

$$\det \left[ J_{\Gamma} \right] = \left\{ \left[ \frac{\partial x}{\partial s} \right]^2 + \left[ \frac{\partial y}{\partial s} \right]^2 \right\}^{1/2}$$

$$(A.25)$$

Pelas equações (A.5) e (A.6) pode-se escrever  $x$  e  $y$

como:

$$x = \frac{1}{4} \left[ (1+r)(1+s) x_1 + (1-r)(1+s) x_2 + \right. \\ \left. (1-r)(1-s) x_3 + (1+r)(1-s) x_4 \right] \quad (\text{A.26a})$$

$$y = \frac{1}{4} \left[ (1+r)(1+s) y_1 + (1-r)(1+s) y_2 + \right. \\ \left. (1-r)(1-s) y_3 + (1+r)(1-s) y_4 \right] \quad (\text{A.26b})$$

A derivação parcial de (A.26a,b) resultará em:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{4} \left[ (1+r) x_1 + (1-r) x_2 - \right. \\ \left. (1-r) x_3 - (1+r) x_4 \right] \quad (\text{A.27a})$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{4} \left[ (1+r) y_1 + (1-r) y_2 - \right. \\ \left. (1-r) y_3 - (1+r) y_4 \right] \quad (\text{A.27b})$$

Em  $r = 0$  obtém-se:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{2} \left[ x_1 + x_4 \right] \quad (\text{A.28a})$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{2} \left[ y_1 + y_4 \right] \quad (\text{A.28b})$$

#### A.4 - ELEMENTO DE RADIAÇÃO

O elemento de radiação é obtido de forma análoga ao de convecção. A diferença é a utilização da temperatura elevada a quarta potência ao invés da temperatura simplesmente.

Reescrevendo a equação (II.1.7) na forma matricial tem-se:

$$\underline{Q}^{\Gamma R} = \underline{Q}^R - \underline{K}^R \left( \underline{\theta}^{\Gamma} \right)^4 \quad (\text{A.29})$$

Sendo

$$\underline{Q}^R = \sum_{e=1}^{ner} ( \underline{Q}^e ) \quad (\text{A.30a})$$

$$\underline{Q}^e = \left[ \underline{Q}_p^e \right] \quad (\text{A.30b})$$

$$\underline{Q}_p^e = \int_{\Gamma} h \underline{H}_{\Gamma}^T \underline{H}_{\Gamma} d\Gamma \left( \underline{\theta}_{r_p} \right)^4 \quad (\text{A.30c})$$

$$\underline{K}^R = \sum_{e=1}^{ner} ( \underline{K}^e ) \quad (\text{A.31a})$$

$$\underline{K}^e = \left[ \underline{K}_p^e \right] \quad (\text{A.31b})$$

$$\underline{K}_p^e = \int_{\Gamma} h \underline{H}_{\Gamma}^T \underline{H}_{\Gamma} d\Gamma \quad (\text{A.31c})$$

onde  $\underline{Q}^R$  é o vetor com o fluxo de calor proveniente da temperatura da fonte de radiação;  $\underline{K}^R$  é a matriz de radiação;  $ner$  é o número de elementos de radiação térmica e

$Q^{\Gamma R}$  é o fluxo de calor trocado por radiação térmica. O produto  $K^R \left( \theta^{\Gamma} \right)^4$  corresponde a pseudo-força utilizada nos algoritmos descritos no capítulo IV.

Em termos computacionais a sua implementação requer um algoritmo iterativo e portanto há a necessidade de se armazenar as propriedades físicas e geométricas do elemento de radiação, pois serão necessárias posteriormente para o cálculo iterativo da solução.

## APÊNDICE B

## INTEGRAÇÃO EXATA

## B.1 - INTEGRAÇÃO EXATA DE EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA DE PRIMEIRA ORDEM

Será descrito agora a forma de obtenção da fórmula de integração exata para a equação diferencial ordinária de primeira ordem aplicada a problemas de transferência de calor com o carregamento definido em segmentos de reta, conforme mostra figura (B.1).

Dada a equação de transferência de calor para um grau de liberdade,

$$\dot{x} + \lambda x = a + b t \quad (B.1)$$

Sujeita a condição inicial,

$$x(t_0) = x_0 \quad (B.2)$$

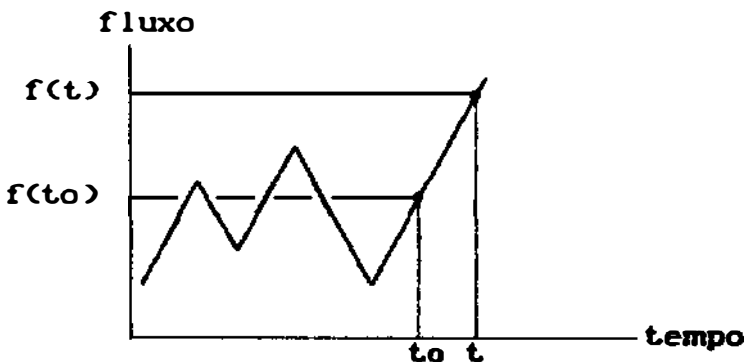


Figura B.1 - Função do fluxo de calor.

De acordo com a figura (b.1) os coeficientes do carregamento são definidos por:

$$a = f(t_0) \quad (B.3)$$

$$b = (f(t) - f(t_0)) / \Delta t \quad (B.4)$$

$$\Delta t = t - t_0 \quad (B.5)$$

Por verificação observa-se que uma simplificação pode ser obtida multiplicando-se a equação (B.1) por  $e^{\lambda t}$ ,

$$e^{\lambda t} \dot{x} + \lambda e^{\lambda t} x = e^{\lambda t} (a + b t) \quad (B.6)$$

Simplificando o lado esquerdo da equação (B.6) que é a derivada do produto de  $e^{\lambda t} x$ , então,

$$\frac{d}{dt} \left( e^{\lambda t} x \right) = e^{\lambda t} (a + b t) \quad (B.7)$$

Integrando (B.7) tem-se:

$$e^{\lambda t} x = \int e^{\lambda t} (a + b t) dt \quad (B.8)$$

Efetuada a integral, obtém-se:

$$x = \frac{a}{\lambda} + \frac{b t}{\lambda} - \frac{b}{\lambda^2} + e^{-\lambda t} C_0 \quad (B.9)$$

O valor de  $C_0$  é obtido pela condição inicial fornecida pela equação (B.2) em  $t_0 = 0$ ,

$$C_0 = x_0 - \frac{1}{\lambda} \left[ a - \frac{b}{\lambda} \right] \quad (B.10)$$

Substituindo  $C_0$  em (B.9) tem-se finalmente,

$$x'' = \frac{1}{\lambda} \left\{ \left[ a - \frac{b}{\lambda} \right] \left[ 1 - e^{-\lambda \Delta t} \right] + b \Delta t \right\} + x_0 e^{-\lambda \Delta t} \quad (B.11)$$

Este esquema de solução não apresenta instabilidade numérica e a qualidade dos resultados obtidos dependerá inteiramente da matriz de transformação de coordenadas utilizada para desacoplar o sistema original.

## B.2 - INTEGRAÇÃO EXATA PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

A integração exata das equações não-lineares em coordenadas modais é feita da seguinte forma,

### CÁLCULOS INICIAIS

- a) Montagem das matrizes  $\underline{K}$ ,  $\underline{C}$  e  $\underline{f}$ .
- b) Geração dos vetores de redução modal.
- c) Solução do problema de autovalor reduzido.
- d) Cálculo das matrizes  $\underline{\Lambda}$  e  $\underline{\phi}$ .
- e) Cálculo de  $\underline{\phi}^T \underline{f}$ .



## CÁLCULO DA RESPOSTA EM COORDENADAS MODAIS

f) Leitura da temperatura inicial  $\theta_0$  e cálculo de  $\underline{x}_0$ .

g) Cálculo das pseudo-força  $t_{\underline{H}}$  e  $t_{\underline{H}}^{0-\Delta t}$ .

De  $nt = 1$  até o número total de intervalos de tempo faça:

## INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO

De  $k = 1, 2 \dots$  até a convergência faça:

h) Cálculo da pseudo-força  $t_{\underline{H}}^{(k)}$ .

De  $i = 1$  até o número de modos da análise faça:

i) Cálculo dos coeficientes de carregamento para a análise não-linear,

$$t_{a_i} = t_{f_i} + t_{H_i^{(j)}}$$

$$t_{b_i^{(k)}} = \left( t_{f_i} + t_{H_i^{(k)}} - t_{a_i} \right) / \Delta t$$

j) Cálculo da solução  $x_i^{(k)}$  pela equação (B.11).

Fim do loop  $i$

l) Cálculo das temperaturas nodais,

$$\theta = \phi \underline{x}$$

m) Cálculo da norma relativa de temperaturas,

$$\xi = \frac{\| \underline{\vartheta}^{(k)} - \underline{\vartheta}^{(k-1)} \|}{\| \underline{\vartheta}^{(k)} \|}$$

n) Controle da tolerância atingida.

Se  $\xi > \text{TOL}$  voltar para o início do processo iterativo.

Se  $\xi \leq \text{TOL}$  passe para o próximo intervalo de tempo  $n\tau$ .

Sendo TOL uma tolerância pré-estabelecida.

FIM DO CÁLCULO DA RESPOSTA

## APÊNDICE C

### MÉTODO DE PRESCREVER A TEMPERATURA

#### C.1 - MÉTODO DO NÚMERO GRANDE

A prescrição da temperatura pelo método do número grande é feita somando-se ao elemento da diagonal da matriz de condutividade no grau de liberdade correspondente a temperatura prescrita um número de valor grande (A) que seja cerca de  $10^5$  vezes superior aos valores encontrados na diagonal da matriz e ao vetor de fluxo de calor o mesmo valor (A) multiplicado pelo valor da temperatura prescrita.

No método de integração direta do sistema de equações este método de prescrever a temperatura se mostra eficiente. Entretanto, no método de redução modal este método altera o espectro de autovalores e autovetores. Isto influi de tal forma, que altera a sequência de vetores gerados, obtendo-se uma sequência com uma tendência para os autovalores mais elevados.

## C.2 - MÉTODO DO "0 E 1" MODIFICADO

O método de "0 e 1" modificado consiste no método do "0 e 1" convencional que ao invés de se trocar o valor do elemento da diagonal da matriz de condutividade por "1" (um) mantém-se o valor ali encontrado. O método pode ser sumarizado da seguinte forma, soma-se ao vetor de fluxo de calor um vetor de equilíbrio que consiste dos elementos da coluna da matriz de condutividade correspondente ao grau de liberdade da temperatura prescrita multiplicado pela temperatura prescrita com o sinal trocado com excessão do elemento que é multiplicado pelo elemento da diagonal. Após isto os elementos da linha e coluna correspondente ao grau de liberdade da temperatura prescrita da matriz de condutividade são substituídos por "0" (zero) com excessão do elemento da diagonal, que é mantido inalterado.

Este método tem a vantagem de não alterar o espectro de autovalores e autovetores. Tornando-se eficiente para os métodos de integração direta e método de redução modal.

## C.3 - ATRAVÉS DE ELEMENTOS DE CONVECÇÃO DE CALOR

Este método, proposto por BATHE [ 1,26], consiste em se colocar elementos de convecção no nós com temperatura prescrita e escolhendo para coeficiente de convecção de calor um valor grande em relação a ordem de grandeza encontrada na matriz de condutividade, este método é

análogo ao método do número grande, possuindo também as mesmas características numéricas.