

UMA ESTRATÉGIA ADAPTATIVA PARA
PROBLEMAS DE CONTATO EM ELASTICIDADE

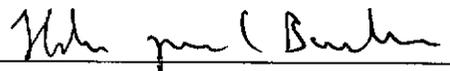
Afonso Celso de Castro Lemonge

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSI-
DADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA CIVIL.

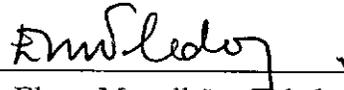
Aprovada por:



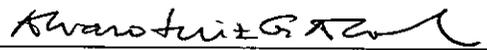
Prof. Luiz Landau, D. Sc.
(Presidente)



Prof. Helio José Corrêa Barbosa, D. Sc.



Prof. Elson Magalhães Toledo, D. Sc.



Prof. Álvaro L. G. A. Coutinho, D. Sc.

LEMONGE, AFONSO CELSO DE CASTRO

Uma Estratégia Adaptativa para

Problemas de Contato em Elasticidade [Rio de Janeiro] 1992

viii, 82 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia Civil, 1992)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Estratégias Adaptativas 2. Elementos Finitos

3. Problemas de Contato I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

*À Família França
e à memória de Joaquim Lemonge.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Helio José Corrêa Barbosa pela dedicação, orientação e inegável disposição em todos os momentos.

Ao Prof. Elson Magalhães Toledo a quem devo essa oportunidade.

Ao Prof. Luiz Landau pela acolhida junto ao Programa de Engenharia Civil.

Ao Prof. Júlio César da Silva Portela pelo apoio em uma fase difícil do mestrado e pela convivência acadêmica e profissional.

Aos professores, funcionários e amigos do Programa de Engenharia Civil da COPPE-UFRJ.

Aos amigos do LNCC/CNPq que sempre se encontraram dispostos a uma discussão técnica e em especial a Renato Simões e Eduardo Garcia pelo apoio na utilização de softwares do Laboratório;

Ao Prof. Raul Feijóo e Eduardo Fancello pela possibilidade oferecida bem como a orientação no uso do gerador automático de malhas Aranha.

Ao Programa de Engenharia Civil da COPPE, ao LNCC/CNPq que me ofereceu totais condições de trabalho e à CAPES pelo apoio financeiro.

Aos professores do Departamento de Estruturas da U.F.J.F. que possibilitaram o afastamento parcial das minhas atividades.

A toda minha família.

Por fim, devo agradecer à Maria Eugênia pelo incentivo e carinho durante todo esse tempo.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.)

UMA ESTRATÉGIA ADAPTATIVA PARA PROBLEMAS DE CONTATO EM ELASTICIDADE

Afonso Celso de Castro Lemonge

Junho de 1992

Orientador : Helio José Corrêa Barbosa

Programa : Engenharia Civil

Nesse trabalho uma estratégia adaptativa é usada para resolver problemas de contato com atrito de Coulomb. Um gerador de malhas bidimensionais baseado na técnica de avanço frontal é usado para a construção da malha inicial de elementos triangulares.

O problema de contato é então resolvido usando uma sequência de sub-problemas $P_1, P_2, P_1, P_2, \dots$ onde P_1 é correspondente ao problema sem atrito com forças tangenciais dadas ao longo da superfície de contato e P_2 é associado ao problema de Duvaut-Lions com forças normais prescritas e atrito tipo Coulomb como condições de contorno ao longo da região de contato.

Quando a convergência é encontrada, estimativas de erro são calculadas e procede-se a um refinamento do tipo h .

O processo é repetido até que o erro pré-estabelecido seja satisfeito.

Exemplos numéricos do procedimento são apresentados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

AN ADAPTIVE STRATEGY FOR CONTACT PROBLEMS IN ELASTICITY

Afonso Celso de Castro Lemonge

June, 1992

Thesis Supervisor : Helio José Corrêa Barbosa

Department : Civil Engineering

In this work an adaptive remeshing scheme is used to solve contact problems with Coulomb friction. An existing 2D mesh generator based on a frontal technique is used for the construction of the initial mesh of triangular elements.

The contact problem is then solved using a sequence of sub-problems $P_1, P_2, P_1, P_2, \dots$ where P_1 is the corresponding frictionless problem with given tangential forces along the contact area and P_2 is the associated Duvaut-Lions problem of given normal forces and Coulomb-type friction boundary conditions along the contact region.

When the convergence is achieved error estimates are computed and new values for the size of elements in the mesh are determined.

The process is repeated until a pre-assigned error level is reached.

Numerical examples of the procedure are presented.

ÍNDICE

1.	INTRODUÇÃO	1
2.	PROBLEMAS DE CONTATO	5
	2.1 Introdução	5
	2.2 Contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida	6
	2.2.1 O problema de Signorini	10
	2.3 O problema de Duvaut-Lions	13
	2.4 Contato entre dois sólidos deformáveis	16
	2.5 Um procedimento iterativo para o contato com atrito	19
3.	ALGORÍTMOS DE SOLUÇÃO	21
	3.1 Introdução	21
	3.2 Aproximações via elementos finitos	22
	3.2.1 Contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida	22
	3.2.2 Contato entre dois sólidos deformáveis	24
	3.3 Algoritmos numéricos	24
	3.3.1 Contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida	24
	3.3.2 Contato entre dois sólidos deformáveis	28
4.	ESTIMATIVA DE ERRO E REFINAMENTO ADAPTATIVO	32
	4.1 Introdução	32
	4.2 Estimativas de erro em problemas de elasticidade plana	33
	4.3 Refinamento tipo h	35

4.3.1 Medidas de erro	36
4.4 Técnicas adaptativas	38
5. RESULTADOS NUMÉRICOS	43
6. CONCLUSÕES	71
BIBLIOGRAFIA	73
A.1 Apêndice 1	77
A.2 Apêndice 2	79

Capítulo 1

Introdução

Quando dois corpos deformáveis entram em contato existirá uma transmissão de forças, deformações, deslocamentos, distribuição de tensões e possíveis movimentos. Essa ocorrência é bastante frequente em sistemas mecânicos e estruturais.

A análise de problemas de contato é caracterizada por dificuldades conceituais, matemáticas e computacionais. Pode-se dizer que dentro da elasticidade linear esses problemas não são tratados frequentemente. Algumas dificuldades podem ser citadas: não se conhece “*a priori*” a superfície de contato, as reais condições de contorno no contato e muito menos as deformações, deslocamentos e tensões nessa região. As formulações para os modelos matemáticos, geralmente, se apresentam através de sistemas de equações não lineares ou sistemas de inequações. Além dessas dificuldades, incluem-se ainda, aquelas introduzidas quando se estuda o problema com atrito.

O fato de não se conhecer “*a priori*” a superfície de contato torna bastante complexa a análise do problema, isto porque, essa superfície desconhecida passa a fazer parte da solução.

O ponto de partida ou condição básica para a formulação é a condição de não interpenetração entre os sólidos que resultará em condições de contorno em forma de desigualdades. Por exemplo, o deslocamento de pontos de um corpo deformável próximos a uma superfície rígida não pode ser maior que a distância entre o corpo deformável e essa superfície.

Um breve histórico para os problemas de contato em elasticidade se encontra a seguir e apresentado com mais detalhes em [1] e [2], por exemplo.

Os primeiros trabalhos sobre problemas de contato em elasticidade são devidos a Poisson, Saint-Venant e Hertz desenvolvidos no século XIX. Destacam-se entre esses os estudos de Hertz introduzidos em 1882. Esses estudos tratavam de problemas de impacto, equilíbrio de dois corpos em contato e expressões que avaliavam pressões na área de contato. Além disso, Hertz introduziu o primeiro modelo aceitável para alguns problemas em elasticidade.

Deve ser ressaltado, também, o trabalho de Signorini (1933), que estudou o problema de contato entre um sólido e uma superfície rígida sem consideração de atrito. Em 1963 surgiram os resultados das pesquisas de Prager na análise de problemas unilaterais em elasticidade. Fichera, também em 1963, analisou rigorosamente o problema de Signorini. Em 1964 Stampachia contribuiu com uma ferramenta matemática onde analisava, principalmente, formas bilineares coercivas não-simétricas em espaços de Hilbert.

Em 1972 Duvaut e Lions [3] publicaram um importante livro sobre inequações variacionais na mecânica e na física. Foram tratados, entre outros, problemas de contato formulados através de inequações variacionais, problemas com atrito de Coulomb, problemas em dinâmica e viscoelasticidade. Ainda na década de setenta, Glowinski, Lions e Tremolières apresentaram esquemas de aproximação e algoritmos de resolução para inequações variacionais.

Na década de oitenta destacam-se trabalhos importantes como os de Panagiotopoulos [4] que estudou inequações para problemas em mecânica e suas aplicações e, também, estudos conjuntos de Kikuchi e Oden [2] sobre inequações variacionais e o método dos elementos finitos. Atualmente, nota-se a atuação de diversas áreas, como a da matemática aplicada e vários campos da engenharia, com contribuições frequentes para o estudo dos problemas de contato.

Os problemas de contato analisados nesse trabalho estão amplamente discutidos em [1]. A formulação utiliza inequações variacionais e faz uso do método dos elementos finitos para obtenção de soluções aproximadas. Para resolução dos problemas de otimização foram utilizadas técnicas de programação matemática.

O avanço dos métodos numéricos para engenharia associados às técnicas computacionais tem possibilitado a melhoria dos processos para obtenção de soluções aproximadas para vários tipos de problemas como, por exemplo, aqueles resolvidos

através do método dos elementos finitos.

Uma das linhas de pesquisa que tem recebido grande contribuição de pesquisadores nessa área se refere às técnicas adaptativas. Destacam-se trabalhos de Babuska, Rheinboldt, Zienkiewicz, Zhu, Kelly, Carey, Gago entre outros [5],[6],[7],[8],[9],[10],[11] e [12]. Historicamente [13], três fases importantes podem representar o desenvolvimento nessa área, quais sejam: uma primeira fase de 1958 a 1975 cuja linha de pesquisa estava direcionada ao estudo de princípios variacionais e programação matemática para otimização da malha de elementos finitos; uma segunda fase de 1976 a 1984 com Babuska e Rheinboldt apresentando o desenvolvimento de uma teoria matemática aplicada à adaptatividade no método dos elementos finitos e por último uma terceira fase que se caracteriza pela aplicação de recursos computacionais aliados às técnicas adaptativas orientadas para a resolução de problemas específicos.

O erro, inerente a uma solução numérica aproximada, é a soma de algumas contribuições como o erro na escolha do modelo matemático que representa o problema, erro na discretização do domínio e erro de arredondamento.

Um dos objetivos de se estudar o erro é a busca de uma medida que quantifique a qualidade da solução de certo problema. Resultados de pesquisas sobre o erro deram origem à criação das estimativas de erro. A análise dessas estimativas pode ser feita “*a priori*” ou “*a posteriori*”. A primeira torna-se bastante complexa pois necessita de um estudo prévio da solução do problema antes de sua obtenção. A segunda é a mais frequentemente utilizada em métodos adaptativos por ser de obtenção mais simples já que se conhece a solução aproximada do problema antes da análise. As estimativas de erro são fundamentais para o desenvolvimento de estratégias de refinamento para uma malha de elementos finitos.

Três estratégias básicas são utilizadas para a melhoria na geração de uma malha, denotadas por técnicas r , h e p . A primeira (r) busca um reposicionamento dos nós sem introdução de graus de liberdade adicionais. A segunda (h) se caracteriza pela diminuição dos tamanhos dos elementos, existindo introdução de graus de liberdade adicionais. A terceira (p) se identifica pelo aumento seletivo do grau dos polinômios de interpolação. Atualmente, é bastante comum a combinação dessas estratégias básicas, como as técnicas h - p e r - h , ou até mesmo a aplicação

isolada de algumas delas em etapas diferentes de resolução do problema, de forma conveniente.

O objetivo principal deste texto é a busca de uma metodologia que permita ao analista o tratamento de problemas de contato desde o lançamento da primeira malha de elementos finitos até a obtenção de uma solução aproximada, com nível de erro pré-estabelecido e através de um caminho eficiente. Para isso, adotou-se um estimador de erro proposto por Zienkiewicz e Zhu [5],[6],[7] e [8] e uma estratégia adaptativa do tipo h . Procedeu-se a uma regeneração das malhas utilizando-se o gerador automático de malhas ARANHA[14] e [15].

O texto está dividido em seis capítulos. No segundo capítulo encontra-se a formulação para problemas de contato com e sem atrito, entre um sólido deformável e uma superfície rígida e entre dois sólidos deformáveis. Ainda nesse capítulo, mostra-se um procedimento iterativo para a solução do problema de contato com atrito.

No terceiro capítulo as correspondentes soluções numéricas via elementos finitos bem como os algoritmos utilizados são apresentados. No quarto capítulo o estimador de erro e a técnica adaptativa utilizada nesse trabalho são detalhadas. No quinto capítulo apresentam-se alguns resultados numéricos obtidos pela metodologia proposta. Em seguida, no sexto capítulo, estão as conclusões e sugestões para futuros desenvolvimentos. Inclui-se ainda, para comodidade do leitor, dois apêndices: o primeiro com a descrição do algoritmo de Gauss-Seidel com relaxação e projeção e o segundo com algumas informações adicionais e regras de utilização para o gerador automático de malhas ARANHA.

Capítulo 2

Problemas de Contato

2.1 Introdução

Considere-se dois corpos quaisquer se encontrando em determinado instante através de uma superfície comum de limites desconhecidos *a priori*. Existirá o fenômeno de contato entre os dois corpos que tem ocorrência bastante comum em sistemas mecânicos e estruturais.

O fato de não se conhecer *a priori* a superfície de contato entre os corpos torna complexa a análise do problema, pois a determinação dos limites dessa superfície passa a fazer parte da solução. Quanto às condições de contorno da região passível de entrar em contato pode-se dizer que essas são ditas ambíguas, pois não se conhece o limite exato onde devem ser prescritas forças ou deslocamentos.

O ponto de partida das formulações é a condição de não interpenetração entre os corpos, o que torna obrigatório um tratamento especial através de inequações variacionais.

Algumas poucas soluções analíticas podem ser encontradas na literatura, mas a maioria dos problemas deste tipo são resolvidos através de soluções numéricas aproximadas. Além disso quando considera-se o atrito entre as superfícies, o estudo do problema torna-se bastante complexo.

2.2 O problema de contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida

Imagine-se um sólido em sua condição indeformada com contorno regular submetido a um campo vetorial de forças de volume em Γ , forças de superfície em Γ_f , deslocamentos prescritos em Γ_u e que pode entrar em contato com uma superfície rígida através de uma parte denominada de Γ_c . O seu contorno pode ser decomposto por três partes disjuntas, representadas por Γ_u , Γ_f e Γ_c , tais que:

$$\Gamma_u \cap \Gamma_f = \Gamma_u \cap \Gamma_c = \Gamma_c \cap \Gamma_f = \emptyset$$

onde \emptyset representa o conjunto vazio. Define-se então:

- Γ_u \longrightarrow parte do contorno onde os deslocamentos são prescritos;
- Γ_f \longrightarrow parte do contorno onde as forças são prescritas;
- Γ_c \longrightarrow parte do contorno passível de entrar em contato.

A parte do contorno denominado Γ_c é aquela que apresenta condições de contorno ambíguas pois após a aplicação das cargas, podem os seus pontos entrar em contato ou não com uma superfície rígida S ou permanecer em contato ou separar-se desta mesma superfície.

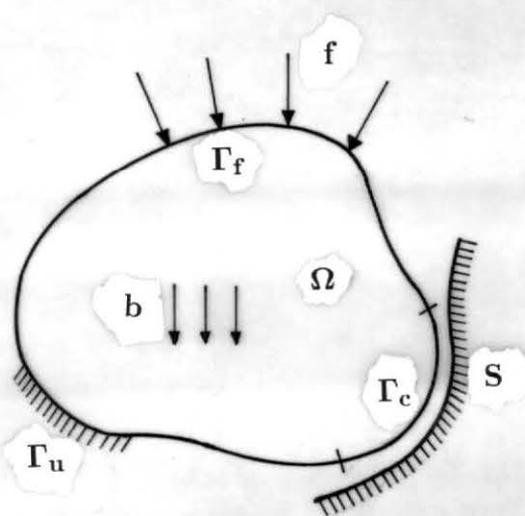


Fig. 2.1

A condição de não interpenetração dos corpos deve ser satisfeita e pode ser escrita no regime de deformações e deslocamentos infinitesimais, como:

$$u(x) \cdot n(x) - s(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Gamma_c$$

ou

$$u_n - s \leq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_c$$

onde $n(x)$ é o vetor normal exterior ao corpo em $x \in \Gamma_c$ e $s(x)$ é a função que fornece a distância entre os pontos de Γ_c e S . Essa expressão mostra que a diferença entre a componente normal do deslocamento (u_n) de um ponto qualquer de Γ_c e a distância (s) existente entre esse mesmo ponto e a superfície rígida S deve ser menor ou igual a zero.

Devido a não consideração do atrito, até o momento, as tensões tangenciais nos pontos que entraram em contato são nulas. E havendo contato surgirá uma reação r_n , que tem direção coincidente com a normal interior à superfície S e pode-se escrever:

$$r'_n = r \cdot n \quad r_n \leq 0$$

ou ainda:

$$\text{se} \quad u_n - s < 0 \quad \longrightarrow \quad r_n = 0$$

$$\text{se} \quad u_n - s = 0 \quad \longrightarrow \quad r_n \leq 0$$

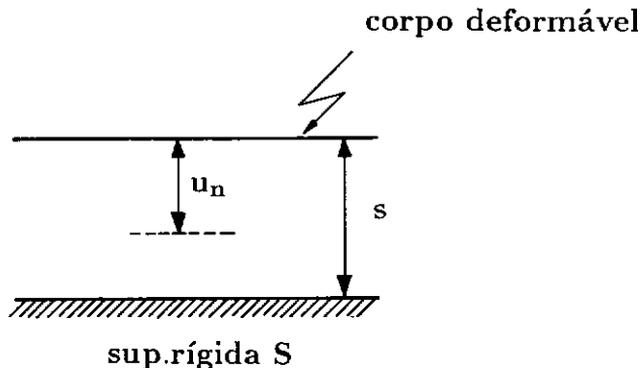


Fig. 2.2

Todavia, a introdução do atrito modifica as tensões tangenciais nos pontos pertencentes a Γ_c que, agora, deixam de ser nulas.

Em toda formulação apresentada nesse texto serão utilizadas características de atrito do tipo Coulomb discutidas com mais detalhes em [1], por exemplo.

O contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida, pode ser modelado pelo problema de valor de contorno:

$$\operatorname{div}\sigma(u) + b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f \quad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} (u \cdot n - s)\sigma_n = 0 \\ \text{se } u \cdot n < s \quad \text{então:} \\ \quad \sigma_n = 0 \\ \quad \sigma_t = 0 \\ \text{se } u \cdot n = s \quad \text{então:} \\ \quad \sigma_n \leq 0 \\ \quad \text{se } \|\sigma_t\| < \mu\|\sigma_n\| \quad \text{então: } u_t = 0 \\ \quad \text{se } \|\sigma_t\| = \mu\|\sigma_n\| \quad \text{então: } \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda\sigma_t \end{array} \right\} \text{em } \Gamma_c \text{ (2.4 - 9)}$$

com

$$\sigma_t = \sigma(u)n - \sigma_n n$$

$$\sigma_n = \sigma(u)n \cdot n$$

e μ representa o coeficiente de atrito de Coulomb.

Para o problema de valor de contorno em sua forma variacional, o conjunto de soluções cinematicamente admissíveis pode ser escrito como:

$$\mathbb{K} = \{w : w \text{ é suf. regular, } w = 0 \text{ em } \Gamma_u \text{ e } w \cdot n - s \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

A equação do trabalho virtual deve ser satisfeita para todo $v \in \mathbb{K}$ e pode ser escrita como se segue:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) d\Omega &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} (\sigma_n \cdot v_n + \sigma_t \cdot v_t) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.10)$$

Observa-se que a última integral não pode ser calculada, pois não se conhece “a priori” Γ_c , que faz parte da solução. Escrevendo (2.10) também para $v = u$ e subtraindo-se uma da outra, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - u) d\Omega &= \int_{\Omega} b \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v - u) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} [\sigma_n(v_n - u_n) + \sigma_t \cdot (v_t - u_t)] d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.11)$$

As equações (2.8) e (2.9) podem ser representadas pela inequação:

$$\sigma_t \cdot v_t + \mu |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|) \geq \sigma_t \cdot u_t \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.12)$$

Retomando-se (2.11) e levando-se em conta (2.12), escreve-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - u) d\Omega &\geq \int_{\Omega} b \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v - u) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} [\sigma_n(v_n - u_n) - \mu |\sigma_n| (|v_t| - |u_t|)] d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.13)$$

como

$$\begin{aligned} \sigma_n(v_n - u_n) &= \sigma_n(v_n - s) - \sigma_n(u_n - s) \\ &= \sigma_n(v_n - s) \geq 0 \end{aligned}$$

e já que u é solução do problema e $v \in \mathbb{K}$, a inequação que governa o problema pode, então, ser escrita:

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v) d\Omega \\ j(u, v) &= \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma(u)n \cdot n| |v_t| d\Gamma \\ l(v) &= \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma \end{aligned}$$

Mostra-se também [1], que se u satisfaz a inequação (2.14) então u é a solução do problema de valor de contorno (2.1-9).

Toda a formulação apresentada é válida para deformações e deslocamentos infinitesimais e para qualquer relação constitutiva. Mostra-se ainda [1], que u minimiza a energia potencial total

$$F(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma$$

no conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis \mathbb{K} .

2.2.1 O problema de Signorini

Imaginando-se a mesma situação apresentada na seção anterior excetuando-se a consideração do atrito, define-se o problema de Signorini. Neste caso as tensões tangenciais são nulas em Γ_c o que acarreta simplificações substanciais. Assim, tem-se:

$$(\sigma(u)n)_t = 0 \tag{2.15}$$

ou

$$\sigma(u)n = (\sigma(u)n \cdot n)n$$

No contexto da elasticidade infinitesimal tem-se o seguinte problema de valor de contorno:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \sigma(u) + b &= 0 \\ \sigma(u) &= D\varepsilon(u) \\ \varepsilon(u) &= \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) \end{aligned} \right\} \text{em } \Omega \tag{2.16 - 18}$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f \tag{2.19}$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \tag{2.20}$$

$$\left. \begin{aligned} (\sigma(u)n)_t &= 0 \\ r_n = \sigma(u)n \cdot n &\leq 0 \\ u_n - s &\leq 0 \\ r_n(u_n - s) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{em } \Gamma_c \tag{2.21 - 24}$$

Onde D é o tensor de 4.^a ordem constitutivo da Elasticidade Linear e que satisfaz as propriedades usuais de simetria e elipticidade.

A equação constitutiva pode ser escrita:

$$\sigma = D\varepsilon$$

A solução do problema pertence ao conjunto dos campos de deslocamentos cinematicamente admissíveis:

$$\mathbb{K} = \{w : w \text{ é suf. regular, } w = 0 \text{ em } \Gamma_u, \text{ e } w \cdot n - s \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

Usando-se os teoremas dos trabalhos virtuais e da divergência escreve-se:

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v) d\Omega = \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot v d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.25)$$

Admitindo-se u como solução do problema e fazendo-se $v = u$ na equação anterior e subtraindo-se uma da outra tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma \cdot \varepsilon(v - u) d\Omega &= \int_{\Omega} b \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v - u) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_c} \sigma n \cdot (v - u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Respeitando-se a condição de não interpenetração sabe-se que:

$$\begin{aligned} \sigma_n \cdot (v - u) &= r_n(v_n - u_n) = \\ &= r_n(v_n - s) - r_n(u_n - s) = \\ &= r_n(v_n - s) \geq 0 \end{aligned}$$

Assim, sendo u solução do problema de valor de contorno (2.16-24), também deve satisfazer a seguinte inequação variacional:

$$\int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v - u) d\Omega \geq \int_{\Omega} b \cdot (v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v - u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.27)$$

Por outro lado, se u satisfaz a inequação variacional (2.27) então é solução do problema de valor de contorno (2.16-24). De fato, aplicando-se o teorema da divergência em (2.27) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \sigma(u) + b) \cdot (v - u) d\Omega &\leq \int_{\Gamma_f} (\sigma(u)n - f) \cdot (v - u) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma_c} \sigma(u)n \cdot (v - u) d\Gamma \quad \forall v \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Fazendo-se $v = u + w$ com $w \in C_0(\overline{\Omega})$, e:

$$C_0(\overline{\Omega}) = \{h : h \text{ é suf. regular, } h = 0 \text{ em } \Gamma\}$$

tem-se que $v \in \mathbb{K}$ e a equação (2.28) reduz a:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}\sigma(u) + b) \cdot w \, d\Omega \leq 0 \quad \forall w \in C_0(\overline{\Omega})$$

A expressão acima deve ser válida para w e $-w$ já que $C_0(\overline{\Omega})$ é um espaço vetorial e assim:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}\sigma(u) + b) \cdot w \, d\Omega = 0 \quad \forall w \in C_0(\overline{\Omega})$$

e

$$\operatorname{div}\sigma(u) + b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2.29)$$

Procedendo-se como anteriormente e fazendo-se $w \in C'_0(\overline{\Omega})$, sendo:

$$C'_0(\overline{\Omega}) = \{h : h \text{ é suf. regular, } h = 0 \text{ em } \Gamma_u \cup \Gamma_c\}$$

chega-se a:

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f \quad (2.30)$$

Levando-se em conta (2.29) e (2.30) a inequação (2.28) se reduz a:

$$\int_{\Gamma_c} \sigma(u)n \cdot (v - u) \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.31)$$

Admitindo-se, ainda, outro espaço vetorial $C''_0(\overline{\Omega})$ e fazendo-se $v = u + w$, onde $w \in C''_0(\overline{\Omega})$ e

$$C''_0(\overline{\Omega}) = \{h : h \text{ é suf. regular, } h_n = 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

tem-se que $v \in \mathbb{K}$ e

$$\int_{\Gamma_c} (\sigma(u)n)_t \cdot w_t \, d\Gamma \geq 0 \quad \forall w \in C''_0(\overline{\Omega})$$

Como $-w \in C''_0(\overline{\Omega})$, com o mesmo raciocínio do procedimento anterior:

$$(\sigma(u)n)_t = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (2.32)$$

e

$$r = r_n n = \sigma(u)n \quad \text{em} \quad \Gamma_c$$

indicando que as reações em Γ_c devem ser normais à superfície de contato, e a expressão (2.31) fica:

$$\int_{\Gamma_c} r_n (v_n - u_n) d\Gamma \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.33)$$

Agora, fazendo $v = u + w$ com w em $C_0'''(\bar{\Omega})$, tal que:

$$C_0'''(\bar{\Omega}) = \{h : h \text{ é suf. regular, não identicamente nulo, } h_n \leq 0 \text{ em } \Gamma_c\}$$

tem-se que $v \in \mathbb{K}$ e

$$\int_{\Gamma_c} r_n w_n d\Gamma \geq 0 \quad \forall w \in C_0'''(\bar{\Omega})$$

levando a:

$$r_n \leq 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_c \quad (2.34)$$

Adotando-se campos de deslocamentos v^1 e v^2 em (2.33) tais que $v_n^1 = s$ e $v_n^2 = 2u_n - s$, obtém-se:

$$\int_{\Gamma_c} r_n (u_n - s) d\Gamma = 0$$

e, finalmente :

$$r_n (u_n - s) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_c \quad (2.35)$$

As equações (2.29), (2.30), (2.32), (2.34) e (2.35) mostram que, havendo regularidade suficiente, a solução u da inequação variacional (2.27) é também solução do problema de valor de contorno (2.16-24).

2.3 O problema de Duvaut-Lions

Imagine-se um sólido elástico linear com contorno suficientemente regular, que em sua condição indeformada ocupa o domínio $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$, sendo Ω aberto com o contorno dividido em três partes disjuntas Γ_f , Γ_u e Γ_c . Introduce-se, agora, uma prescrição de tensões normais em Γ_c do tipo $\sigma_n = \bar{F}_N$, como mostra a Fig. 2.3. e mantendo-se os mesmos carregamentos como nas situações anteriores.

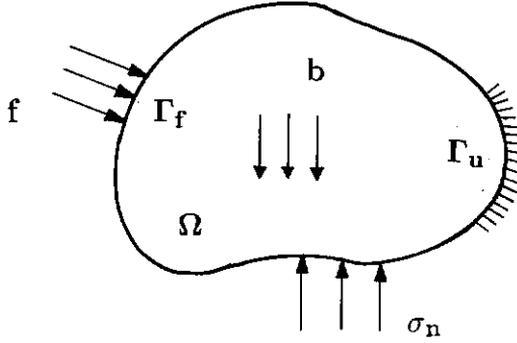


Fig. 2.3

Os deslocamentos tangenciais em Γ_c devem obedecer às condições:

$$\text{se } |\sigma_t| < \mu|\bar{F}_N| \text{ então } u_t = 0$$

$$\text{se } |\sigma_t| = \mu|\bar{F}_N| \text{ então } \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda\sigma_t$$

onde μ representa o coeficiente de atrito. Em sua formulação forte o problema de Duvaut-Lions pode ser representado por:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}\sigma(u) + b &= 0 \\ \sigma(u) &= D\varepsilon(u) \\ \varepsilon(u) &= \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^t) \end{aligned} \right\} \text{ em } \Omega \quad (2.36 - 38)$$

$$u = 0 \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2.39)$$

$$\sigma(u)n = f \quad \text{em } \Gamma_f \quad (2.40)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma(u)n \cdot n &= \bar{F}_N \\ |\sigma_t| < \mu|\bar{F}_N| &\longrightarrow u_t = 0 \\ |\sigma_t| = \mu|\bar{F}_N| &\longrightarrow \exists \lambda \geq 0 : u_t = -\lambda\sigma_t \end{aligned} \right\} \text{ em } \Gamma_c \quad (2.41 - 43)$$

Como na seção anterior, é possível mostrar a equivalência entre o problema de valor de contorno e a inequação variacional:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma(u) \cdot \varepsilon(v - u) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \mu|\bar{F}_N| (|v_t| - |u_t|) d\Gamma &\geq \int_{\Omega} b \cdot (v - u) d\Omega + \\ + \int_{\Gamma_f} f \cdot (v - u) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \bar{F}_N (v_n - u_n) d\Gamma \quad \forall v \in V &\quad (2.44) \end{aligned}$$

onde V é o espaço dos deslocamentos cinematicamente admissíveis:

$$V = \{v : v \text{ é suf. regular, } v = 0 \text{ em } \Gamma_u\}$$

Como no problema de Signorini, também pode-se escrever (2.44) na forma:

$$a(u, v - u) + j_g(v) - j_g(u) \geq l(v - u) + l_{\bar{F}_N}(v - u) \quad \forall v \in \mathbb{K} \quad (2.45)$$

introduzindo-se os funcionais:

$$\begin{aligned} j_g(v) &= \int_{\Gamma_c} g |v_t| d\Gamma \\ l_{\bar{F}_N}(v) &= \int_{\Gamma_c} \bar{F}_N v_n d\Gamma \end{aligned}$$

onde:

$$g = \mu |\bar{F}_N|$$

Se u é solução do problema de valor de contorno (2.36-43), então, pode-se mostrar [3] que u minimiza em V o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} F(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Gamma - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma - \int_{\Gamma_c} \bar{F}_N v_n d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_c} \mu |\bar{F}_N| |v_t| d\Gamma \end{aligned} \quad (2.46)$$

que também pode ser escrito na forma:

$$F(v) = \pi(v) + j_g(v)$$

onde:

$$\pi(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) - l_{\bar{F}_N}(v)$$

As questões relativas à convexidade e diferenciabilidade do funcional são discutidas em [1]. O problema de Duvaut-Lions não é, em essência, um problema de contato, mas sua formulação fará parte de soluções intermediárias de um procedimento iterativo para a solução de problemas de contato com atrito de Coulomb.

2.4 Contato entre dois sólidos deformáveis

Imagine-se dois corpos ocupando os domínios $\bar{\Omega}^a$ e $\bar{\Omega}^b$ em suas configurações indeformadas com Ω^a e Ω^b disjuntos, abertos, limitados e simplesmente conexos com contornos regulares Γ^a e Γ^b . Nos contornos são feitas prescrições de forças de superfície f_a e f_b em Γ_f^a e Γ_f^b , forças de volume q_a e q_b e deslocamentos em Γ_u^a e Γ_u^b , respectivamente, além de um possível contorno de contato Γ_c^a e Γ_c^b , definido para cada corpo.

Analogamente aos casos anteriores tem-se:

$$\Gamma_u^s \cap \Gamma_f^s = \Gamma_u^s \cap \Gamma_c^s = \Gamma_c^s \cap \Gamma_f^s = \emptyset$$

para $s = a, b$.

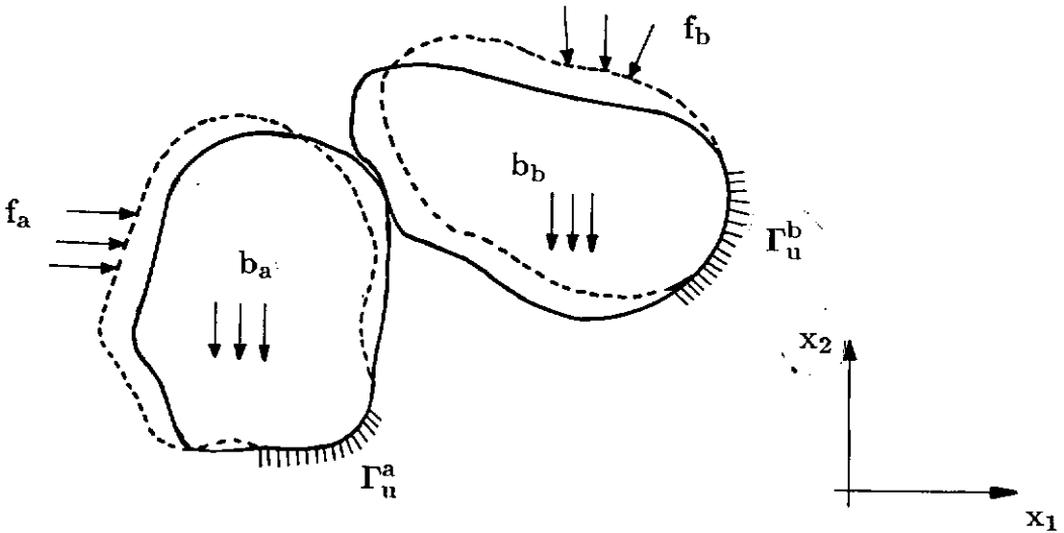


Fig. 2.4

No caso bidimensional, pode-se definir a geometria da região do contato através de duas funções:

$$\begin{aligned} x_2 &= \phi_a(x_1) & , & & (x_1, x_2) \in \Gamma_c^a \\ x_2 &= \phi_b(x_1) & , & & (x_1, x_2) \in \Gamma_c^b \end{aligned}$$

A condição de não interpenetração entre os sólidos pode ser escrita de maneira aproximada como [1]:

$$u_{ab}^r \leq \phi_{ab}^r \quad (2.47)$$

onde:

$$u_{ab}^r = u_i^a n_i^a + u_i^b n_i^b$$

$$\phi_{ab}^r = \phi_a n_2^a + \phi_b n_2^b$$

Admitindo-se a existência do atrito de Coulomb, pode-se escrever o seguinte problema de valor de contorno:

$$\operatorname{div} \sigma^s(u^s) + q^s = 0 \quad \text{em } \Omega^s \quad (2.48)$$

$$\sigma^s(u^s) n^s = f^s \quad \text{em } \Gamma_f^s \quad (2.49)$$

$$u^s = 0 \quad \text{em } \Gamma_u^s \quad (2.50)$$

$$\left. \begin{array}{l} (u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) \sigma_n^s(u^s) = 0 \\ \text{se } u_{ab}^r - \phi_{ab}^r < 0 \quad \text{então:} \\ \quad \sigma_n^s(u^s) = 0 \\ \quad \sigma_t^s(u^s) = 0 \\ \text{se } u_{ab}^r - \phi_{ab}^r = 0 \quad \text{então:} \\ \quad \sigma_n^s(u^s) \leq 0 \\ \text{se } \|\sigma_t^s(u^s)\| < \mu \|\sigma_n^s(u^s)\| \quad \text{então: } u_t^r = 0 \\ \text{se } \|\sigma_t^s(u^s)\| = \mu \|\sigma_n^s(u^s)\| \quad \text{então: } \exists \lambda \geq 0 : u_t^r = -\lambda \sigma_t \end{array} \right\} \text{em } \Gamma_c \quad (2.51 - 56)$$

$s=a, b$ e também:

$$\sigma_n^s(u^s) = \sigma^s(u^s) n^s \cdot n^s$$

$$\sigma_t^s(u^s) = (\sigma^s(u^s) n^s)_t$$

$$u_t^r = u_t^a + u_t^b$$

$$\sigma_t = \sigma_t^a(u^a) = \sigma_t^b(u^b)$$

O conjunto dos deslocamentos cinematicamente admissíveis (v^a, v^b) , pode ser escrito como [1]:

$$\mathbb{K} = \left\{ (v^a, v^b) \in (V^a \times V^b) : v^s = 0 \quad \text{em } \Gamma_u^s \quad \text{e} \quad v_{ab}^r - \phi_{ab}^r \leq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \right\}$$

com V^a e V^b espaços de funções suficientemente regulares em Ω^a e Ω^b , respectivamente.

Denotando por (u^a, u^b) a solução do problema e repetindo procedimentos usados anteriormente, chega-se a:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \varepsilon(v^s - u^s) d\Omega = \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} q^s \cdot (v^s - u^s) d\Omega + \\ & + \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} \sigma^s(u^s) n^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma \quad \forall (v^a, v^b) \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde, usou-se:

$$\sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_c^s} (\cdot) d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} (\cdot) d\Gamma$$

Levando-se em conta que as condições de atrito podem ser escritas na forma:

$$\sigma_t \cdot (v_t^r - u_t^r) + \mu |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (2.58)$$

e também que :

$$\sigma_n(u_{ab}^r - \phi_{ab}^r) = 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (2.59)$$

$$\sigma_n(v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) \geq 0 \quad \text{em } \Gamma_c \quad (2.60)$$

onde:

$$\sigma_n = \sigma_n^a(u^a) = \sigma_n^b(u^b) \quad (2.61)$$

a equação (2.57) se escreve:

$$\begin{aligned} \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \varepsilon(v^s - u^s) d\Omega & \geq \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} q^s \cdot (v^s - u^s) d\Omega + \sum_{s=a,b} \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot (v^s - u^s) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_n| (|v_t^r| - |u_t^r|) d\Gamma \quad \forall (v^a, v^b) \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

e, como anteriormente, a inequação variacional que governa o problema pode apresentar-se como:

$$u = (u^a, u^b) \in \mathbb{K}$$

$$a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq l(v - u) \quad \forall v = (v^a, v^b) \in \mathbb{K} \quad (2.62)$$

onde:

$$a(u, v) = \sum_{s=a,b} \int_{\Omega^s} \sigma^s(u^s) \cdot \varepsilon(v^s) d\Omega$$

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_c} \mu |\sigma_n| |v_t^r| d\Gamma$$

$$l(v) = \sum_{s=a,b} \left[\int_{\Omega^s} q^s \cdot v^s d\Omega + \int_{\Gamma_f^s} f^s \cdot v^s d\Gamma \right]$$

De forma análoga ao já discutido em seções anteriores pode-se mostrar a equivalência entre o problema de valor de contorno (2.48-56) e a inequação (2.62).

2.5 Um procedimento iterativo para o contato com atrito

Descreve-se aqui um procedimento iterativo introduzido por Panagiotopoulos [21] para resolução do problema de contato com atrito. O procedimento apresenta em sua essência uma sequência de problemas anteriormente formulados, chamados sub-problemas $P1$ e $P2$. Eles se definem como:

- $P1$: O problema sem atrito com carregamento adicional de forças prescritas contidas no plano tangente em cada ponto do contorno Γ_c onde pode vir a ocorrer contato;
- $P2$: O problema de Duvaut-Lions correspondente ao atrito de Coulomb no contorno Γ_c onde supõe-se conhecida uma distribuição de forças normais compressivas.

A Fig. 2.5 (a) e (b), representa os dois sub-problemas.

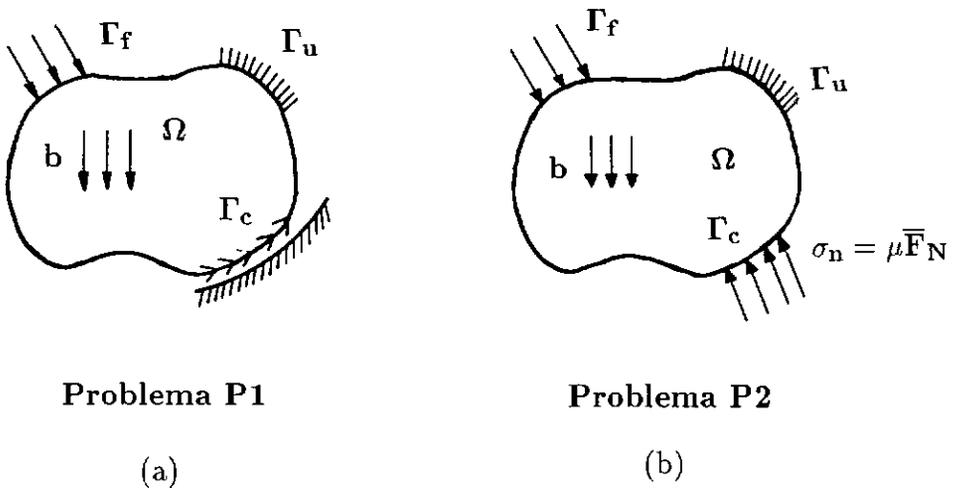


Fig.2.5

Esse processo iterativo cria uma sequência de sub-problemas $P1, P2, P1, P2, \dots$, controlada por um critério de convergência, que pode ser definida pelo seguinte algoritmo:

1. Resolver o problema de contato sem atrito $P1$, com uma dada distribuição de forças tangenciais em Γ_c . Calcular as tensões normais desenvolvidas em Γ_c
2. Resolver o problema de Duvaut-Lions, $P2$, com as tensões normais obtidas em (1) aplicadas como forças externas em Γ_c . Calcular as tensões tangenciais desenvolvidas em Γ_c ;
3. Verificar a convergência do processo. Se não atendida voltar ao passo (1).

Através da introdução do funcional

$$l_{\bar{F}_t}(v) = \int_{\Gamma_c} \bar{F}_t \cdot v \, d\Gamma$$

sendo \bar{F}_t uma dada distribuição de forças tangenciais em Γ_c , pode-se representar o algoritmo anterior por:

1. Dado \bar{F}_t^{k-1} calcule u^k solução de $P1$

$$u^k \in \mathbb{K}$$

$$a(u^k, v - u^k) \geq l(v - u^k) + l_{\bar{F}_t^{k-1}}(v - u^k) \quad \forall v \in \mathbb{K}$$

2. Calcule $\bar{F}_n^k = \sigma_n(u^k)$ e $g = \mu|\sigma_n(u^k)|$

3. Calcule u^* solução de $P2$

$$u^* \in V$$

$$a(u^*, v - u^*) + j_g(v) - j_g(u^*) \geq l(v - u^*) + l_{\bar{F}_n^k}(v - u^*) \quad \forall v \in V$$

4. Calcule $\bar{F}_t^k = \sigma_t(u^*)$

5. Verifique se o critério de convergência $\|\bar{F}_n^k - \bar{F}_n^{k-1}\| \leq \epsilon$ e $\|\bar{F}_t^k - \bar{F}_t^{k-1}\| \leq \epsilon$, foi satisfeito. Se não: $k \leftarrow k + 1$ e volte ao passo 1.

Capítulo 3

Algoritmos de Solução

3.1 Introdução

Os problemas formulados a dimensão infinita, apresentados no capítulo anterior, constituem-se basicamente na resolução de uma inequação variacional, minimização de um funcional ou busca de um ponto de sela. Neste capítulo serão apresentados algoritmos numéricos para obtenção de soluções aproximadas em um espaço a dimensão finita.

Os problemas de contato serão resolvidos através de uma sequência de sub-problemas $P1, P2, P1, P2...$ por meio de um procedimento iterativo, como descrito anteriormente. O problema $P1$ corresponde ao problema sem atrito e o problema $P2$ corresponde ao problema de Duvaut-Lions caracterizado pela introdução de forças normais e consideração de atrito do tipo Coulomb em toda extensão da região passível de contato. A essa situação estão relacionadas restrições na forma de um sistema de inequações lineares. Durante a obtenção da solução será utilizado o algoritmo de Gauss-Seidel com relaxação e projeção (GSRP) com um critério de convergência associado. Os passos de resolução do algoritmo encontram-se detalhados no apêndice A2.

É válido lembrar que nessa etapa podem ser utilizados, também, algoritmos com terminação finita, como o de Lemke [1], que determina o elemento minimizante após um número finito de iterações.

3.2 Aproximações via elementos finitos

Através da formulação clássica dos elementos finitos são apresentadas nessa seção algoritmos para obtenção de soluções aproximadas para o problema de contato entre um sólido e uma superfície rígida e o problema de contato entre dois sólidos deformáveis.

Serão introduzidas funções de interpolação globais, construídas a partir de interpolantes locais (elementos finitos), denotadas por $\phi_i^h(x)$ que geram o espaço de aproximação:

$$V^h = \left\{ v^h : v^h = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h(x), \quad \beta_i \in \mathbb{R}, \quad x \in \Omega^h \right\}$$

3.2.1 Contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida

No caso do problema de Signorini a forma bilinear simétrica $a(\cdot, \cdot)$ e o funcional linear $l(\cdot)$ se aproximam por:

$$a_h(u, v) = \int_{\Omega^h} D\varepsilon(u) \cdot \varepsilon(v) d\Gamma$$
$$l_h(v) = \int_{\Gamma_f^h} f \cdot v d\Gamma + \int_{\Omega^h} b \cdot v d\Omega$$

onde D representa o tensor elasticidade para os materiais lineares homogêneos e isotrópicos em regime das pequenas deformações e deslocamentos.

As expressões anteriores podem ser avaliadas em V^h por:

$$a_h(u^h, v^h) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \int_{\Omega^h} D\varepsilon(\phi_i^h) \cdot \varepsilon(\phi_j^h) d\Omega$$
$$l_h(v^h) = \sum_{j=1}^n \beta_j \left[\int_{\Gamma_f^h} f \cdot \phi_j^h d\Gamma + \int_{\Omega^h} b \cdot \phi_j^h d\Omega \right]$$

sendo

$$K_{ij} = \int_{\Omega^h} D\varepsilon(\phi_i^h) \cdot \varepsilon(\phi_j^h) d\Omega$$

o elemento genérico da matriz de rigidez do problema e

$$f_j = \int_{\Gamma_f^h} f \cdot \phi_j^h d\Gamma + \int_{\Omega^h} b \cdot \phi_j^h d\Omega$$

o vetor de forças nodais equivalentes.

A solução aproximada corresponde ao elemento minimizante do funcional:

$$\pi^h(v^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j K_{ij} - \sum_{j=1}^n \beta_j f_j$$

no conjunto de deslocamentos cinematicamente admissíveis, que garante a condição de não interpenetração entre o corpo e a superfície rígida em m pontos $x_k \in \Gamma_c$:

$$\mathbb{K}^h = \left\{ v^h : v^h = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h \text{ com } \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i^h(x_k) \cdot n^h(x_k) - s^h(x_k) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots, m \right\} \quad (3.1)$$

Os parâmetros β_i ficam então submetidos a restrições lineares do tipo:

$$\sum_{i=1}^n A_{ki} \beta_i \leq b_k \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

Outra alternativa [1], seria encontrar a solução através da busca do ponto de sela (u^h, λ^h) do Lagrangeano com a restrição de não-negatividade sobre ρ :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} D\varepsilon(v) \cdot \varepsilon(v) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v d\Omega - \int_{\Gamma_f} f \cdot v d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \rho(v \cdot n - s) d\Gamma$$

Definindo uma aproximação independente para o multiplicador ρ

$$\rho^h \in T^h = \left\{ \rho^h : \rho^h = \sum_{i=1}^m \gamma_i \phi_i^h(x) \text{ com } \rho^h \geq 0, \quad \gamma_i \in \mathbb{R}, \quad x \in \Gamma_c \right\}$$

o Lagrangeano se aproxima em $V^h \times T^h$ por

$$L^h(v^h, \rho^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j K_{ij} - \sum_{j=1}^n \beta_j f_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \gamma_j \beta_i M_{ij} - \sum_{j=1}^m \gamma_j s_j \quad (3.3)$$

sendo:

$$M_{ij} = \int_{\Gamma_c^h} (\phi_i^h \cdot n^h) \psi_j d\Gamma$$

e

$$s_j = \int_{\Gamma_c^h} \psi_j s^h d\Gamma$$

3.2.2 Contato entre dois sólidos deformáveis

Neste caso, a energia potencial total do sistema:

$$\pi_s^h(v_s^h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^s} \sum_{j=1}^{n^s} \beta_i^s \beta_j^s K_{ij}^s - \sum_{j=1}^{n^s} \beta_j^s f_j^s, \quad s = a, b$$

deve ser minimizada em:

$$\mathbb{K}^h = \left\{ (v_a^h, v_b^h) : v_s^h = \sum_{i=1}^{n^s} \beta_i^s \phi_i^s, \quad s = a, b, \quad \text{com} \quad \sum_{s=a,b} \left[\sum_{i=1}^{n^s} \beta_i^s A_{ik}^s - b_k^s \right] \leq 0 \right\} \quad (3.4)$$

k=1,2,...,m

onde:

$$A_{ik}^s = \phi_i^s(x_k^s) \cdot n^s(x_k^s) \quad \text{e} \quad b_k^s = \phi_s(x_k^s) n_2^s(x_k^s)$$

E se a solução do problema pertence a esse campo de deslocamentos cinematicamente admissíveis, é satisfeita a condição de não interpenetração entre os corpos, já apresentada no capítulo anterior, ou seja:

$$\sum_{s=a,b} [u^s(x_k)^s \cdot n^s(x_k^s) - \phi_s(x_k^s) n_2^s(x_k^s)] \leq 0$$

$$x_k^s \in \Gamma_c^s, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

Outra alternativa, como no problema de Signorini, seria a busca do ponto de sela $[(\alpha_1^a, \alpha_2^a, \dots, \alpha_{n^a}^a, \alpha_1^b, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{n^b}^b), (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m)]$ do Lagrangeano que se escreve:

$$L_n[(v_a^h, v_b^h), \rho^h] = \sum_{s=a,b} \pi_s^h(v_s^h) + \sum_{s=a,b} \sum_{i=1}^{n^s} \sum_{j=1}^m \gamma_j \beta_i^s M_{ij}^s - \sum_{j=1}^m \gamma_j d_{ab}^j \quad (3.5)$$

onde:

$$M_{ij}^s = \int_{\Gamma_c} (\phi_i^s \cdot n^s) \psi_j d\Gamma \quad \text{e} \quad d_{ab}^j = \int_{\Gamma_c} \sum_{s=a,b} \phi_s n_2^s \psi_j d\Gamma \quad (3.6)$$

3.3 Algoritmos Numéricos

3.3.1 Contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida

Nessa seção será detalhado o algoritmo de solução do problema de contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida, já inicialmente comentado na seção

2.2, que utiliza um procedimento iterativo em uma seqüência de sub-problemas $P1, P2, P1, P2, \dots$.

O algoritmo tem, em sua essência, os seguintes passos de resolução:

1. Dado \bar{F}_t^{k-1} calcular u^k solução de

$$\inf_{v \in \mathbb{IK}} \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) - l_{\bar{F}_t^{k-1}}(v)$$

2. Calcular $\bar{F}_n^k = \sigma_n(u^k)$ e $g = \mu |\sigma_n(u^k)|$

3. Calcular u^* solução de

$$\inf_{v \in V} \frac{1}{2} a(v, v) + j_g(v) - l(v) - l_{\bar{F}_n^k}(v)$$

4. Calcular $\bar{F}_t^k = \sigma_t(u^*)$

5. Verificação de convergência. Se não atendida $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao passo 1.

Pode-se mostrar que a primeira etapa é equivalente a busca do ponto de sela:

$$\inf_{v \in V} \sup_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) - l_{\bar{F}_t^{k-1}}(v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_n (v \cdot n - s) d\Gamma \quad (3.7)$$

e a segunda (Problema de Duvaut-Lions) é equivalente a

$$\inf_{v \in V} \sup_{\lambda_t \in \Lambda} \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) - l_{\bar{F}_n^k}(v) + \int_{\Gamma_c} \lambda_t \cdot v_t d\Gamma \quad (3.8)$$

sendo:

$$\Lambda = \left\{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \leq g^2(x), \quad x \in \Gamma_c \right\} \quad (3.9)$$

Nesse ponto, podem ser introduzidas funções de interpolação em uma notação matricial, via M.E.F., para um campo de deslocamentos v e multiplicadores λ_n e λ_t , ou seja:

$$v = \phi q \quad (3.10)$$

$$\lambda_n = \psi p \quad (3.11)$$

$$\lambda_t = \psi t \quad (3.12)$$

onde:

$\phi \longrightarrow$ matriz com as funções de interpolação para v ;

$\psi \longrightarrow$ matriz linha com as funções de interpolação para λ_n e λ_t .

Os multiplicadores de Lagrange introduzidos λ_n e λ_t estão associados às tensões normal e tangencial, respectivamente, devidas ao atrito em Γ_c .

Assim, os problemas (3.7) e (3.8) são aproximados por:

$$\min_q \max_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} q' K q - q' f - q' f_t^{k-1} + q' M p + b' p \quad (3.13)$$

e

$$\min_q \max_{\lambda_t \in \Lambda} \frac{1}{2} q' K q - q' f - q' f_n^k + q' A t \quad (3.14)$$

onde K é a matriz de rigidez do problema, f, f_n e f_t são as cargas nodais equivalentes às ações externas, reações normais e forças tangenciais devidas a presença de atrito na região de contato, respectivamente, onde $'$ denota transposição e as matrizes M e A e o vetor b são definidos por:

$$M = \int_{\Gamma_c^h} \phi' \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \psi d\Gamma \quad (3.15)$$

$$A = \int_{\Gamma_c^h} \phi' \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \psi d\Gamma \quad (3.16)$$

$$b = \int_{\Gamma_c^h} \psi' s d\Gamma \quad (3.17)$$

Como a minimização na variável q é irrestrita, pode-se eliminá-la fazendo uso das condições de estacionaridade e assumindo a matriz de rigidez K como positiva-definida. Tem-se, então:

$$K q - (f + f_t^{k-1}) + M p = 0 \quad (3.18)$$

e

$$K q - (f + F_n^k) + A t = 0 \quad (3.19)$$

As seguintes expressões serão obtidas combinando-se (3.18) com (3.13) e (3.19) com (3.14) :

$$\min_{\lambda_n \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1} \quad (3.20)$$

e

$$\min_{\lambda_t \in \Lambda} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k \quad (3.21)$$

onde:

$$\begin{aligned} P &= M' K^{-1} M \\ T &= A' K^{-1} A \\ d_1^{k-1} &= M' k^{-1} (f + f_t^{k-1} - b) \\ d_2^k &= A' K^{-1} (f + f_n^{k-1}) \end{aligned}$$

Observa-se que os multiplicadores de Lagrange λ_n e λ_t podem interpolados através de funções seccionalmente constantes ao longo dos lados dos elementos em Γ_c^h .

Uma outra alternativa seria considerar multiplicadores de Lagrange concentrados nos pontos nodais ao longo de Γ_c^h , conservando-se a mesma forma para M , A e b contanto que a matriz de interpolação ψ contenha *deltas de Dirac* associados aos nós pertencentes a Γ_c^h .

Além disso, o trabalho virtual de deformação para um dado deslocamento $v = \phi q$ em Γ_c^h é o mesmo tanto para as cargas nodais equivalentes f_n^{k-1} e f_t^k quanto para os multiplicadores λ_n^{k-1} e λ_t^k , estabelecendo-se, assim, uma relação entre os mesmos, e escreve-se:

$$\begin{aligned} q' f_n^{k-1} &= \int_{\Gamma_c} \lambda_n^{k-1} v_n d\Gamma = q' \int_{\Gamma_c} \phi' \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \psi d\Gamma p^{k-1} \\ q' f_t^k &= \int_{\Gamma_c} \lambda_t^k v_t d\Gamma = q' \int_{\Gamma_c} \phi' \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \psi d\Gamma t^k \end{aligned}$$

Com auxílio de (3.15) e (3.16) tem-se que:

$$f_n^{k-1} = M p^{k-1} \quad \text{e} \quad f_t^k = A t^k$$

Em resumo, o problema de contato entre um sólido deformável e uma superfície rígida com atrito de Coulomb fica definido por:

1. Dados os multiplicadores t^{k-1} , encontrar p^k solução de

$$\min_{p \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

sendo $d_1^{k-1} = M' K^{-1} f - b + M' K^{-1} A t^{k-1}$

2. Encontrar os multiplicadores t^k solução de

$$\min_{-\bar{g}^k \leq t \leq \bar{g}^k} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

sendo $d_2^k = A' K^{-1} f + A' K^{-1} M p^k$ e $\bar{g}^k = \mu p^k$

3. Verificar critério de convergência para p e t . Se não atendida $k \leftarrow k + 1$ e volta-se ao passo 1.

É interessante ressaltar que o algoritmo GSRP utilizado na solução dos problemas de minimização acima admite como vetor de partida para o cálculo dos multiplicadores p^k e t^k os vetores obtidos na iteração anterior, ou seja, p^{k-1} e t^{k-1} , facilitando a convergência do processo [1].

3.3.2 Contato entre dois sólidos deformáveis

Identicamente à seção anterior é apresentado um algoritmo numérico para um problema de minimização de um funcional. Utiliza-se o mesmo procedimento iterativo adotado para obtenção das soluções dos problemas estudados nesse trabalho.

O algoritmo se escreve:

1. Dado \bar{F}_t^{k-1} encontrar $u^k = (u_k^a, u_k^b) \in \mathbb{IK}$ solução de

$$\inf_{v \in \mathbb{IK}} \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) - l_{\bar{F}_t^{k-1}}(v) \quad (3.22)$$

2. Calcular $\bar{F}_n^k = \sigma_n^a(u_k^a) = \sigma_n^b(u_k^b)$ e $g = \mu \bar{F}_n^k$

3. Calcular $u^* = (u_*^a, u_*^b)$ solução de

$$\inf_{v \in \mathbb{IK}} \frac{1}{2} a(v, v) + j_g(v) - l(v) - l_{\bar{F}_n^k}(v) \quad (3.23)$$

4. Calcular $\bar{F}_t^k = \sigma_t^a(u_*^a) = \sigma_t^b(u_*^b)$

5. Verificar o critério de convergência. Se não foi atendida, então $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao passo 1.

A primeira etapa, equivalente ao problema (3.22), é o problema sem atrito. O procedimento se inicia pela introdução do seguinte Lagrangeano:

$$L_1 \left[(v^a, v^b), \rho_n \right] = \sum_{s=a,b} \pi^s(v^s) + \int_{\Gamma_c} \rho_n (v_{ab}^r - \phi_{ab}^r) d\Gamma - l_{\bar{F}_t^{k-1}}(v)$$

onde $\pi^s(v^s)$ representa a energia potencial total:

$$\pi^s(v^s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} D\varepsilon(v^s) \cdot \varepsilon(v^s) d\Omega - \int_{\Omega} b \cdot v^s d\Gamma - \int_{\Gamma_f} f \cdot v^s d\Gamma$$

Utilizando-se também interpolações do tipo:

$$v^s = \phi_s q_s, \quad s = a, b \quad (3.24)$$

$$\lambda_n = \psi p \quad (3.25)$$

$$\lambda_t = \psi t \quad (3.26)$$

obtém-se o Lagrangeano em sua forma discreta:

$$L_1^h = (q, p) = \frac{1}{2} q' K_{ab} q - q' f_{ab} + q' M_{ab} p - d'_{ab} p - q' f_t^{k-1}$$

sendo:

$$q = \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \end{bmatrix}, \quad K_{ab} = \begin{bmatrix} K_a & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix}, \quad f_{ab} = \begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix}$$

$$d_{ab} = \begin{bmatrix} d_a \\ d_b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{ab} = \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}$$

e ainda:

$$M_s = \int_{\Gamma_c^h} \phi'_s \begin{bmatrix} n_1^s \\ n_2^s \end{bmatrix} \psi d\Gamma, \quad d_s = \int_{\Gamma_c^h} \psi' \phi_s n_2^s d\Gamma, \quad s = a, b$$

sendo K_a e K_b as matrizes de rigidez dos sólidos a e b , respectivamente, f_a e f_b são os vetores de cargas nodais equivalentes às ações externas atuantes nos dois sólidos

e f_t^{k-1} o vetor de cargas nodais equivalentes às forças tangenciais ao longo de Γ_c^h , obtidas na iteração anterior.

Como no problema de Signorini, a minimização na variável q é irrestrita. Utilizando as condições de estacionaridade e supondo as matrizes K_a e K_b positivas definidas, tem-se:

$$\min_{p \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

sendo:

$$P = [M'_a \quad M'_b] \begin{bmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix}$$

$$d_1^{k-1} = [M'_a \quad M'_b] \begin{bmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{bmatrix} \{f_{ab} + f_t^{k-1}\} - d_{ab}$$

A segunda etapa, referente a expressão (3.23), se inicia pela introdução do Lagrangeano:

$$L_2 [(v^a, v^b), \rho_t] := \sum_{s=a,b} \pi^s (v^s) + \int_{\Gamma_c} \rho_t v_t^r d\Gamma - l_{\overline{F}_n^k}(v)$$

e, com as mesmas funções de interpolação definidas em (3.24, 25 e 26), obtém-se o Lagrangeano em sua forma discreta:

$$L_2^h[q, t] = \frac{1}{2} q' K_{ab} q - q' f + q' A_{ab} t - q' f_n^k$$

sendo:

$$A_{ab} = \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix}, \quad A_s = \int_{\Gamma_c^h} \phi'_s \begin{Bmatrix} t_1^s \\ t_2^s \end{Bmatrix} \psi d\Gamma, \quad s = a, b$$

definindo-se f_n^k como sendo o vetor de forças nodais equivalentes às forças normais em Γ_c^s , obtidas na iteração anterior.

E, novamente, eliminando-se a variável q através das condições de estacionaridade, tem-se:

$$\min_{-\overline{g} \leq t \leq \overline{g}} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

onde:

$$T = [A'_a \quad A'_b] \begin{bmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_a \\ A_b \end{bmatrix}$$

$$d_2^k = [A'_a \quad A'_b] \begin{bmatrix} K_a^{-1} & 0 \\ 0 & K_b^{-1} \end{bmatrix} \{f + f_n^k\}$$

Em resumo, o procedimento iterativo para solução do problema de contato entre dois sólidos com atrito de Coulomb se escreve:

1. Dado o multiplicador t^{k-1} encontrar p^k solução de

$$\min_{p \geq 0} \frac{1}{2} p' P p - p' d_1^{k-1}$$

$$\text{com } d_1^{k-1} = M'_{ab} K_{ab}^{-1} (f_{ab} + A_{ab} t^{k-1}) - d_{ab}$$

2. Encontrar o multiplicador t^k solução de

$$\min_{-\bar{g}^k \leq t \leq \bar{g}^k} \frac{1}{2} t' T t - t' d_2^k$$

$$\text{com } d_2^k = A'_{ab} K_{ab}^{-1} (f_{ab} + M_{ab} p^k) \quad \text{e } \bar{g}^k = \mu p^k$$

3. Verificar critério de convergência. Se atendida encerra-se o processo. Senão:
 $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao passo 1.

Capítulo 4

Estimativa de erro e refinamento adaptativo

4.1 Introdução

Em problemas resolvidos através de soluções numéricas aproximadas, o erro é, uma característica inerente ao procedimento. O erro é a soma de várias parcelas que podem ser, por exemplo, aquelas provenientes das simplificações do modelo matemático, erros de truncamento em processos iterativos, na precisão da máquina e em alguns casos na discretização do domínio em análise.

Devido a ocorrência do erro são criadas estimativas para avaliá-lo. Em uma malha de elementos finitos, um dos objetivos das estimativas é procurar uma indicação local, em cada elemento, e global, em todo o domínio, da ocorrência do erro. Em função dessa indicação consegue-se visualizar em quais regiões a discretização não é a adequada.

Após essa informação utiliza-se uma estratégia de refinamento para tornar essa discretização mais próxima da adequada. Procura-se uma malha ótima. Uma forma de avaliar esse refinamento se faz pelo controle do erro global estimado, em comparação com limites requeridos, e, localmente, através de uma boa distribuição do erro, ou seja, deseja-se que o erro esteja distribuído pelos elementos da forma mais uniforme possível.

No desenvolvimento desse trabalho, será utilizada uma estimativa de erro *a posteriori* proposta por Zienkiewicz e Zhu [5], [6],[7], [8] e [9], amplamente difundida na literatura.

4.2 Estimativa de erro em problemas de elasticidade plana

Seja um problema de elasticidade linear plana representado por suas equações de equilíbrio e condições de contorno:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\sigma(u) + b &= 0 & \text{em } \Omega \\ \sigma n &= f & \text{em } \Gamma_f \\ u &= 0 & \text{em } \Gamma_u\end{aligned}$$

onde u representa o campo de deslocamentos admissíveis e ε as deformações que podem ser expressas por:

$$\varepsilon = Bu$$

sendo B o operador deformação.

As tensões podem ser obtidas por:

$$\sigma = DBu$$

onde D é a matriz de elasticidade.

Soluções aproximadas obtidas através do método dos elementos finitos podem ser representadas por:

$$u_h = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad (4.1)$$

onde N_i são as funções de interpolação utilizadas correntemente pelo M.E.F. e u_i são as incógnitas do problema a resolver.

O erro é dado pela diferença existente entre a solução exata e a solução aproximada de um certo problema:

$$e = u - u_h \quad (4.2)$$

ou, no caso das tensões:

$$e_\sigma = \sigma - \sigma_h \quad (4.3)$$

onde u_h e σ_h representam os deslocamentos e tensões, respectivamente, obtidos por um método aproximado.

Na verdade, grande parte dos problemas não apresentam solução analítica exata, fazendo com que se aproxima a expressão (4.2) por:

$$e^* \approx u_h^* - u_h \quad (4.4)$$

ou ainda, no caso das tensões:

$$e_\sigma^* \approx \sigma_h^* - \sigma_h \quad (4.5)$$

onde σ_h^* e u_h^* , são campos de tensões e deslocamentos, respectivamente, obtidos por um processo de suavização. As soluções obtidas para as tensões, formam, em geral, um campo descontínuo.

No intuito de se obter uma solução mais próxima da exata procede-se a uma suavização desse campo descontínuo de tensões. A suavização segundo [5], [6] e [7], pode ser obtida por diferentes processos. Destacam-se aqui, dois:

1. O campo de tensões suavizadas pode ser encontrado por projeção fazendo-se:

$$\sigma_h^* = N\bar{\sigma}_h^* \quad (4.6)$$

onde N são as funções de interpolação contínuas, da mesma ordem das funções do M.E.F. . Requerendo-se, ainda, que:

$$\int_{\Omega} N^T (\sigma_h^* - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (4.7)$$

e substituindo (4.6) em (4.7), vem:

$$\int_{\Omega} N^T (N\bar{\sigma}_h^* - \sigma_h) d\Omega = \int_{\Omega} (N^T N\bar{\sigma}_h^* - N^T \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

e

$$\bar{\sigma}_h^* = A^{-1} \int_{\Omega} N^T \sigma_h d\Omega \quad (4.9)$$

onde:

$$A = \int_{\Omega} N^T N d\Omega$$

é uma matriz quadrada simétrica. Para utilização desse processo de projeção sugere-se que a matriz A seja diagonalizada para redução do custo computacional na resolução do sistema de equações (4.9).

2. Um outro critério seria o da obtenção das tensões suavizadas por média dos valores nodais dos elementos concorrentes em cada nó.

O processo adotado nesse texto será o segundo, que oferece resultados satisfatórios e que não degrada procedimentos posteriores [5], [6] e [7].

Na norma da energia, o erro pode se escrito por:

$$\|e\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

e é aproximado por:

$$\|e^*\| = \left[\int_{\Omega} (\sigma_h^* - \sigma_h)^T D^{-1} (\sigma_h^* - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

onde T significa transposição.

Outras normas, como aquelas obtidas em L_2 , podem também ser escritas:

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (u - u_h)^T (u - u_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2} = \left[\int_{\Omega} (\sigma - \sigma_h)^T (\sigma - \sigma_h) d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

Procedendo-se a uma avaliação local do erro em cada elemento $\|e^*\|_i$, o erro global é dado pela simples soma dessas parcelas locais:

$$\|e^*\|_{\Omega}^2 = \sum_{i=1}^N \|e^*\|_i^2 \quad (4.14)$$

4.3 Refinamento tipo h

Após a obtenção do erro global estimado, mostrado na seção anterior e através de critérios estabelecidos pelo usuário, analisam-se os limites de precisão requerida para o problema. Obviamente, se os valores encontrados para o erro satisfazem esses

limites, dá-se por encerrado o processo, caso contrário, estabelece-se um critério de refinamento.

Aplica-se aqui uma estratégia de refinamento do tipo h [7], [8], [9] e [11], que se mostra a seguir.

O método h é caracterizado pelo refinamento da malha em regiões onde existe uma maior concentração de erro através da diminuição do tamanho dos elementos. A diminuição dos tamanhos pode ser feita por uma subdivisão dos elementos ou uma nova geração da malha. A simples subdivisão da malha pode ser executada sem a necessidade de um gerador de malhas. A convergência é alcançada mais rapidamente na existência de um gerador automático capaz de receber informações que contenham dados sobre os novos tamanhos de elementos [5].

Aqui, se executará uma regeneração da malha com a utilização do gerador automático de malhas ARANHA, [14], que dispõe de uma interface que pode ser aproveitada para métodos adaptativos.

4.3.1 Medidas de erro

É muito comum a determinação de algumas medidas que avaliam os resultados dos estimadores e o próprio processo escolhido. A seguir apresentam-se as principais.

Define-se como percentual relativo η ou erro relativo na norma da energia a razão:

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \times 100\% \quad (4.15)$$

que pode ser estimado através da expressão:

$$\bar{\eta} = \frac{\|e^*\|}{(\|e^*\|^2 + \|u_h\|^2)^{\frac{1}{2}}} \times 100\% \quad (4.16)$$

Para cada iteração do processo adaptativo um valor para η ou $\bar{\eta}$ é analisado através de uma simples comparação com o limite estabelecido pelo analista. É comum limitar para $\bar{\eta}$ um valor em torno de 5 % para problemas usuais em engenharia [16]. Dessa forma, se $\eta > \bar{\eta}$ continua-se o refinamento.

Chama-se índice de efetividade a razão entre o erro estimado e o erro exato:

$$\theta = \frac{\|e^*\|}{\|e\|} \quad (4.17)$$

com limites razoáveis de variação entre 0.8 e 1.1 [5] para muitas situações práticas e observando-se que θ deve tender para 1 quando o número de elementos tende para infinito.

Considera-se uma boa distribuição de erros numa determinada malha quando esses estão próximos de um mesmo valor em todos os elementos. Uma maneira de avaliar essa distribuição se faz pela introdução do cálculo do erro médio definido por:

$$\bar{e}_m = \left(\frac{\|u_h\|^2 + \|e^*\|^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{\eta} \quad (4.18)$$

onde:

$$\begin{aligned} \bar{e}_m &\longrightarrow \text{erro médio;} \\ \|u_h\| &\longrightarrow \text{norma do deslocamento;} \\ m &\longrightarrow \text{número de elementos.} \end{aligned}$$

De posse do erro médio \bar{e}_m , determina-se a relação entre esse e o erro local em cada elemento $\|e_i\|$:

$$\xi_i = \frac{\|e\|_i}{\bar{e}_m} \quad (4.19)$$

Devem ser refinados os elementos que não satisfaçam a condição:

$$\xi_i < 1 \quad (4.20)$$

Admitindo-se a seguinte taxa de convergência, que não leva em conta a presença de singularidades:

$$\|e\|_i = Ch_i^p \quad (4.21)$$

onde p representa o grau do polinômio das funções de aproximação, pode-se determinar uma expressão que calcule o novo tamanho do elemento:

$$h = \xi_i^{-\frac{1}{p}} h_i \quad (4.22)$$

sendo h_i o tamanho antigo do elemento.

Em regiões próximas às singularidades, com uma nova taxa de convergência, os tamanhos dos elementos podem ser obtidos por:

$$h = \xi_i^{-\frac{1}{\lambda}} h_i \quad (4.23)$$

Geralmente, valores usuais para λ , se encontram no intervalo $0.5 < \lambda < 1$ e segundo sugestão de [17], pode-se adotar $\lambda = 0.5$ com obtenção de resultados satisfatórios e sem grande custo computacional.

Para uma sequência de malhas obtidas por uma estratégia de refinamento, o erro pode ser limitado por:

$$\|e\| \leq CN^{-\frac{1}{2}\min(p,\lambda)} \quad (4.24)$$

onde C é uma constante positiva, N é o número de elementos, p é a ordem do polinômio das funções de interpolação e λ representa o peso das singularidades. O expoente de N , pode também ser definido como razão assintótica de convergência ligado à solução exata e a malha de elementos finitos.

A expressão (4.24), pode ser aproximada por:

$$\|e\| \leq \bar{C}h^{\min(p,\lambda)} \quad (4.25)$$

e com um valor para λ sempre menor do que 1, chega-se a:

$$\|e\| \leq CN^{-\frac{p}{2}} \approx \bar{C}h^p \quad (4.26)$$

4.4 Técnicas adaptativas

As estimativas de erro fornecem o erro em cada elemento, o erro global em todo o domínio e a indicação da necessidade ou não de refinamento em cada elemento.

Basta, então, através dessas informações, estabelecer uma estratégia de refinamento e um critério de parada para o processo adaptativo. Mas, nesse ponto, depara-se com várias dificuldades e uma delas seria: de posse dessas informações, qual seria a melhor forma de se executar esse refinamento?

Para essa questão, existem hoje duas linhas básicas de tratamento: a primeira se refere a uma simples subdivisão de elementos que precisam ser refinados e a segunda, a geração de uma nova malha através de geradores automáticos capazes de receber informações do refinamento proposto.

Várias técnicas de refinamento tipo h apoiadas em critérios de subdivisão são encontradas na literatura e a seguir comenta-se sobre algumas delas. Discute-se em [18] padrões de subdivisão de elementos quadrilaterais e triangulares com opção de suavização da malha. Em [19] sugere-se um critério de subdivisão de elementos

quadrilaterais e um processo adaptativo com convergência controlada por um nível máximo de refinamento e um custo computacional pré-estabelecido. Além desses trabalhos, encontram-se algumas variações dessas idéias básicas. Pode-se encontrar em [20], por exemplo, uma estratégia baseada na subdivisão do domínio em regiões e não a subdivisão de elementos. Essas regiões contêm elementos triangulares com tamanhos próximos de um mesmo valor e calculados pela indicação da estimativa.

Quando se dispõe de um gerador automático capaz de receber informações sobre a indicação do refinamento é conveniente a sua utilização dentro do processo adaptativo e a convergência para limites requeridos deve ser alcançada mais rapidamente [5].

Em função da disponibilidade do gerador automático de malhas *ARANHA* [14] e [15], que dispõe de uma interface conveniente para estratégias adaptativas, decidiu-se nesse trabalho pelo desenvolvimento de um refinamento tipo h com utilização desse gerador.

A utilização do gerador automático *ARANHA* foi muito conveniente nessa etapa. Por intermédio dele, gera-se elementos com tamanhos calculados por interpolação a partir de funções seccionalmente lineares que controlam os tamanhos dos elementos em uma determinada região (tamanho médio do elemento). Nota-se que essa característica é uma vantagem para procedimentos adaptativos, principalmente do tipo h . Isto porque, se se dispõe de indicações locais de tamanhos dos elementos, essas podem, facilmente, serem informadas a esse gerador.

Partindo-se dessa vantagem oferecida, criou-se uma interface entre os resultados obtidos na estimativa de erro e à nova geração.

É importante ressaltar um das características principais do gerador. A malha de elementos finitos triangulares ou quadráticos é sempre gerada a partir de uma malha de parâmetros que é uma simples malha de elementos finitos triangulares lineares. A cada nó dessa malha estão associadas as suas coordenadas, tamanho médios dos elementos, fator de estiramento e ângulo de estiramento. Com esses dados define-se o tamanho e uma medida da forma que deverá ter um triângulo em certa região da malha. Mais detalhes sobre o gerador automático *ARANHA* se encontram no Apêndice 2. Basta, então, informar a essa malha de parâmetros qual a distribuição dos tamanhos dos elementos que se deseja ao longo do domínio.

Observa-se que o tamanho médio de elemento é fornecido a partir de cada nó da malha [14] e [15]. Em função dessa característica houve a necessidade de se determinar um valor que representasse a distribuição dos tamanhos indicada pela estimativa, também a partir de cada nó. Assim, imaginou-se fazer com que a primeira malha de elementos finitos gerada pelo ARANHA fosse a malha de parâmetros para a próxima geração e assim sucessivamente.

Resultados da estimativa de erro podem indicar uma subdivisão como mostra a Fig. 4.1. Torna-se complexa a inserção desses tamanhos em uma nova malha. Decidiu-se, então, calcular a média desses tamanhos e fornecer esse valor para a malha de parâmetros da próxima geração. Com isso, o trecho apresentado na Fig. 4.1, provavelmente, terá o aspecto mostrado na Fig. 4.2. A opção de se calcular uma média para os novos tamanhos dos elementos pode ser justificada por uma outra característica do gerador. Caso se queira, a malha gerada pelo ARANHA pode apresentar uma suavização (regularização) em todo o domínio, fazendo com que os elementos concorrentes em um determinado nó tenham tamanhos próximos de um mesmo valor. É feita uma *regularização Laplaciana* que tenta situar o nó no centro de gravidade do polígono formado pelos elementos concorrentes nesse nó. Consequentemente, é de se esperar que, se a malha é regular em todo domínio, os novos tamanhos dos elementos calculados devam, também, estar próximos de um mesmo valor.

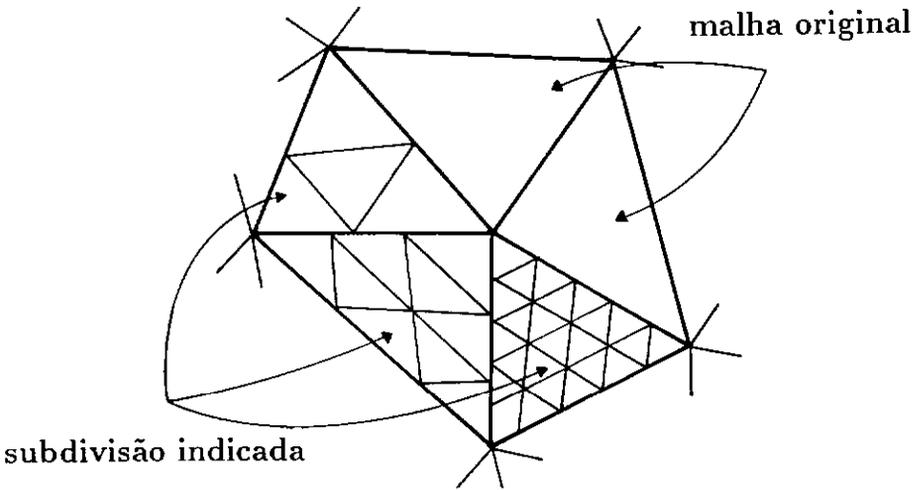


Fig. 4.1

A média nodal dos novos tamanhos pode ser escrita:

$$h_{\text{médio}}^N = \frac{h_1^N + h_2^N + h_3^N + \dots + h_{m_N}^N}{m_N} \quad (4.27)$$

sendo:

- h_i^N → novo tamanho do i-ésimo elemento concorrente no nó N;
- $h_{\text{médio}}^N$ → média dos novos tamanhos de elementos concorrentes no nó N;
- m_N → número de elementos concorrentes no nó N.

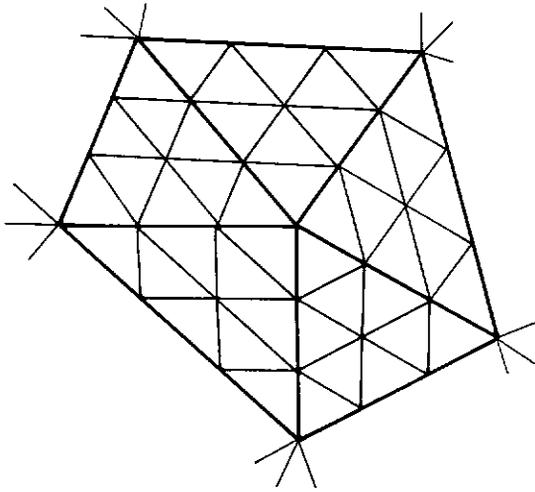


Fig. 4.2

As vantagens desse procedimento também se identificam com um possível desrefinamento pois se existe em um determinado nó uma média de tamanhos novos superior a média de tamanhos antigos, automaticamente serão amplificados os tamanhos próximos a esse nó.

Pode-se definir uma variável, que é controlada pelo usuário, identificada como fator de amplificação máxima ou *ampmax*. Esse fator foi criado para estabelecer um critério de amortecimento visando o controle do tamanho máximo do elemento a ser gerado em uma região que deve ser desrefinada. Isto porque, pode-se atingir um valor de tamanho de elemento superior a uma dimensão do domínio o que provocará uma falha na geração. O fator de amplificação máxima dependerá de cada problema e das malhas geradas para a solução. A sua escolha deve ser criteriosa e o seu valor pode ser alterado durante a sequência de malhas do processo adaptativo de um dado

problema.

Um algoritmo global pode ser estabelecido para os procedimentos básicos de estimativa de erro e adaptatividade considerando-se o critério anteriormente apresentado:

1. construir malha de parâmetros;
2. gerar malha de elementos finitos;
3. obter solução do problema de contato:
 - (a) estimativa de erro;
 - (b) cálculo dos novos tamanhos dos elementos;
 - (c) cálculo da média nodal dos novos tamanhos dos elementos;
 - (d) cálculo do erro global.

se o erro global for menor que o desejado então encerrar o processo, se não:

4. geração de nova malha de parâmetros para o gerador automático e voltar ao passo 2;

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo serão apresentados os resultados numéricos obtidos pela formulação anteriormente desenvolvida. Na análise de alguns exemplos foram utilizados micro-computadores da linha IBM-PC com processadores, 80286, 80386 e 80486 e para problemas de maior porte, foram utilizadas estações de trabalho Sun Sparcstation +1, sendo equipamentos disponíveis no LNCC/CNPq e parte deles na U.F.J.F..

As malhas de elementos finitos foram geradas pelo gerador automático ARANHAe são constituídas por elementos triangulares lineares.

5.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo corresponde a um semi-cilindro circular longo de raio $R = 8$ apoiado sobre uma superfície horizontal rígida. Na face superior do cilindro atua uma carga vertical uniforme de intensidade $q = 3.75$, com efeito de compressão sobre o mesmo, como mostra a Fig. 5.1. O semi-cilindro é constituído por material isotrópico homogêneo com módulo de Young $E = 1000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Adota-se para o problema um estado plano de deformações e despreza-se o atrito. Faz-se uso da simetria do sólido para obtenção das malhas de elementos finitos. Adotou-se a metade do arco de circunferência para o contorno de contato Γ_c .

Nas figuras 5.2, 5.3 e 5.5 encontra-se uma sequência de malhas referentes ao refinamento adaptativo para este exemplo. Nas figuras 5.4 e 5.6 estão detalhes ampliados (zoom) das regiões próximas ao contato correspondentes, respectivamente à segunda e terceira malhas.

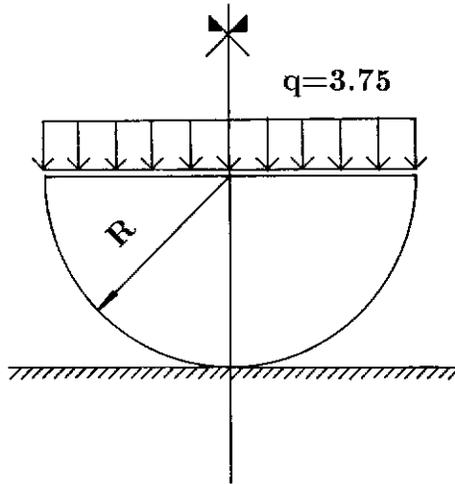


Fig. 5.1 - Exemplo 1

As características referentes a estimativa de erro são apresentadas na Tabela 5.1 que inclui, também, o número de graus de liberdade unilaterais n_{glu} gerados na região passível de contato Γ_c , bem como o número de nós que entraram em contato n_{nc} . Ainda, nessa tabela, encontra-se o número de iterações necessárias para verificação do critério de convergência para solução do problema de contato. No procedimento adaptativo foi requerida uma taxa de erro da ordem de 5%.

Neste exemplo particular, a distribuição das tensões normais dada pela teoria de Hertz [1], constitui uma boa aproximação para a solução exata e é então feita uma comparação com os resultados obtidos na sequência de malhas como mostra a Figura 5.7. A obtenção das tensões nos nós que entraram em contato com a superfície rígida se faz por média das tensões dos elementos concorrentes em cada nó.

No gráfico da Fig. 5.8 de $\log(n) \times \log \bar{\eta}$ é avaliada a convergência do processo adaptativo para esse caso.

Durante a resolução do problema de contato utilizou-se no processo iterativo (GSRP), um valor de $w = 1.8$. O fator de amplificação máxima teve o seu limite fixado em 4.0 devido a não capacidade de geração de uma nova malha com valores acima desse. Esse valor foi mantido em toda a sequência de malhas.

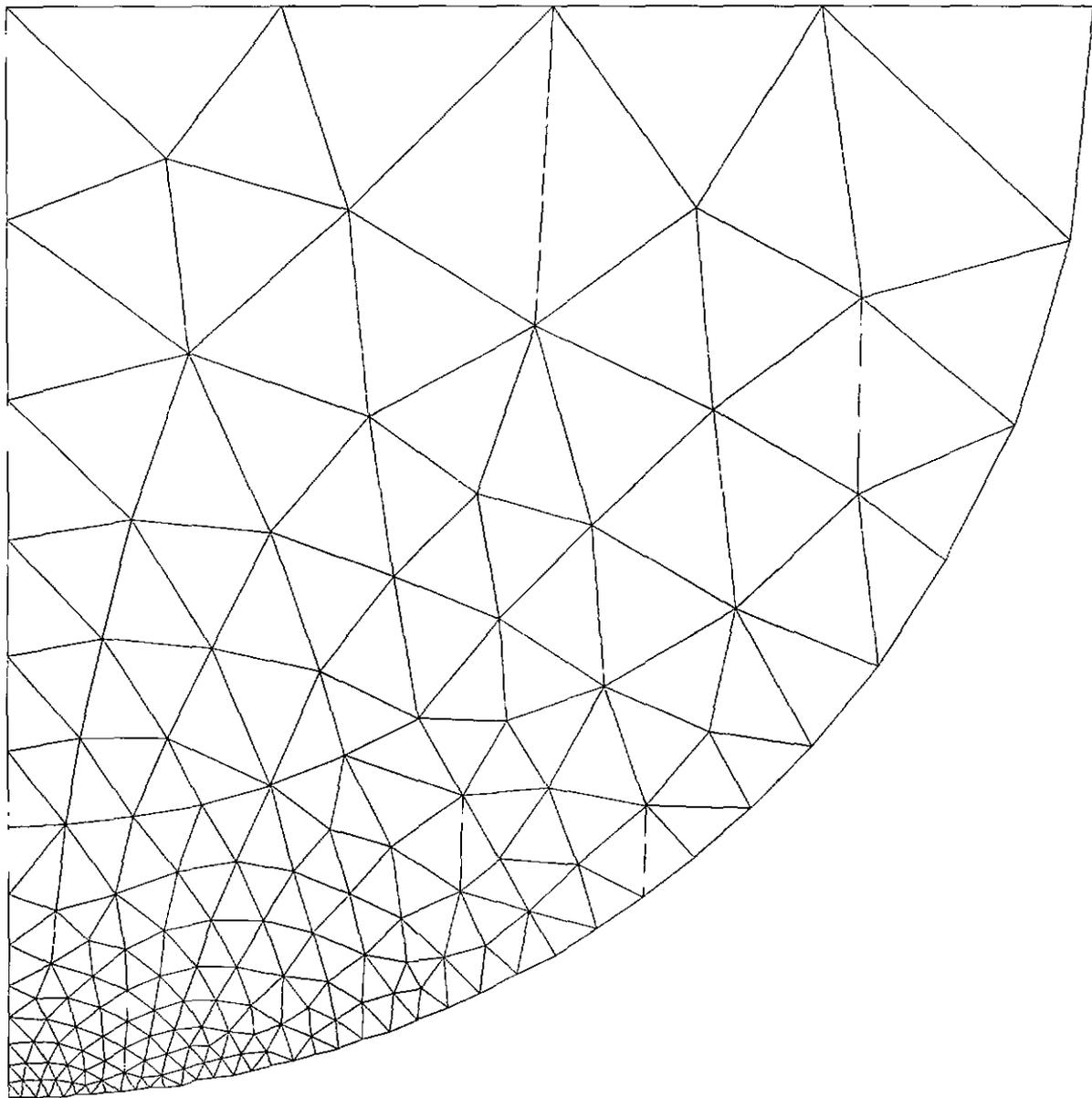


Fig. 5.2 - Malha 1.

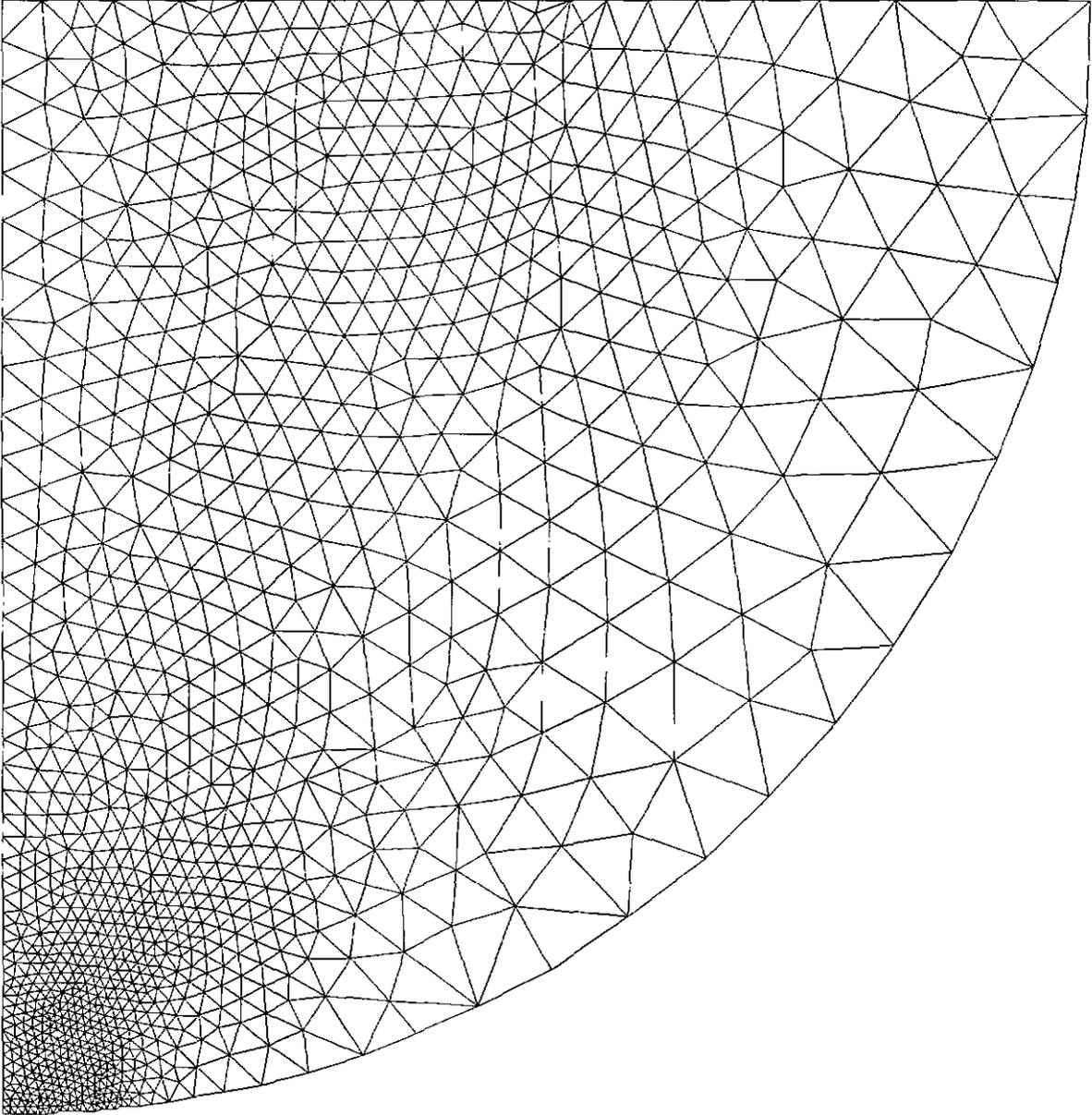


Fig. 5.3 - Malha 2.

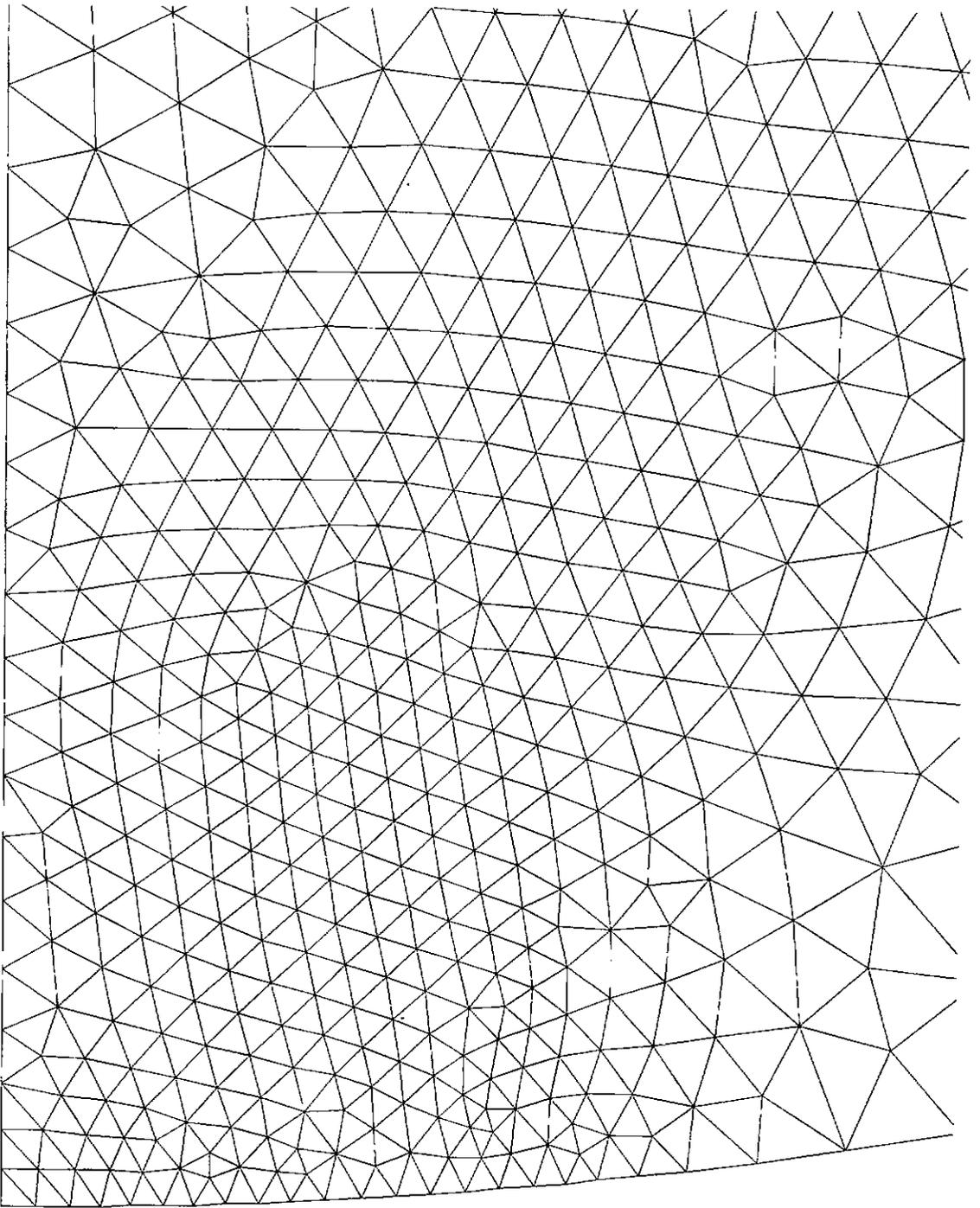


Fig. 5.4 - Malha 2 - Região ampliada próxima ao contato.

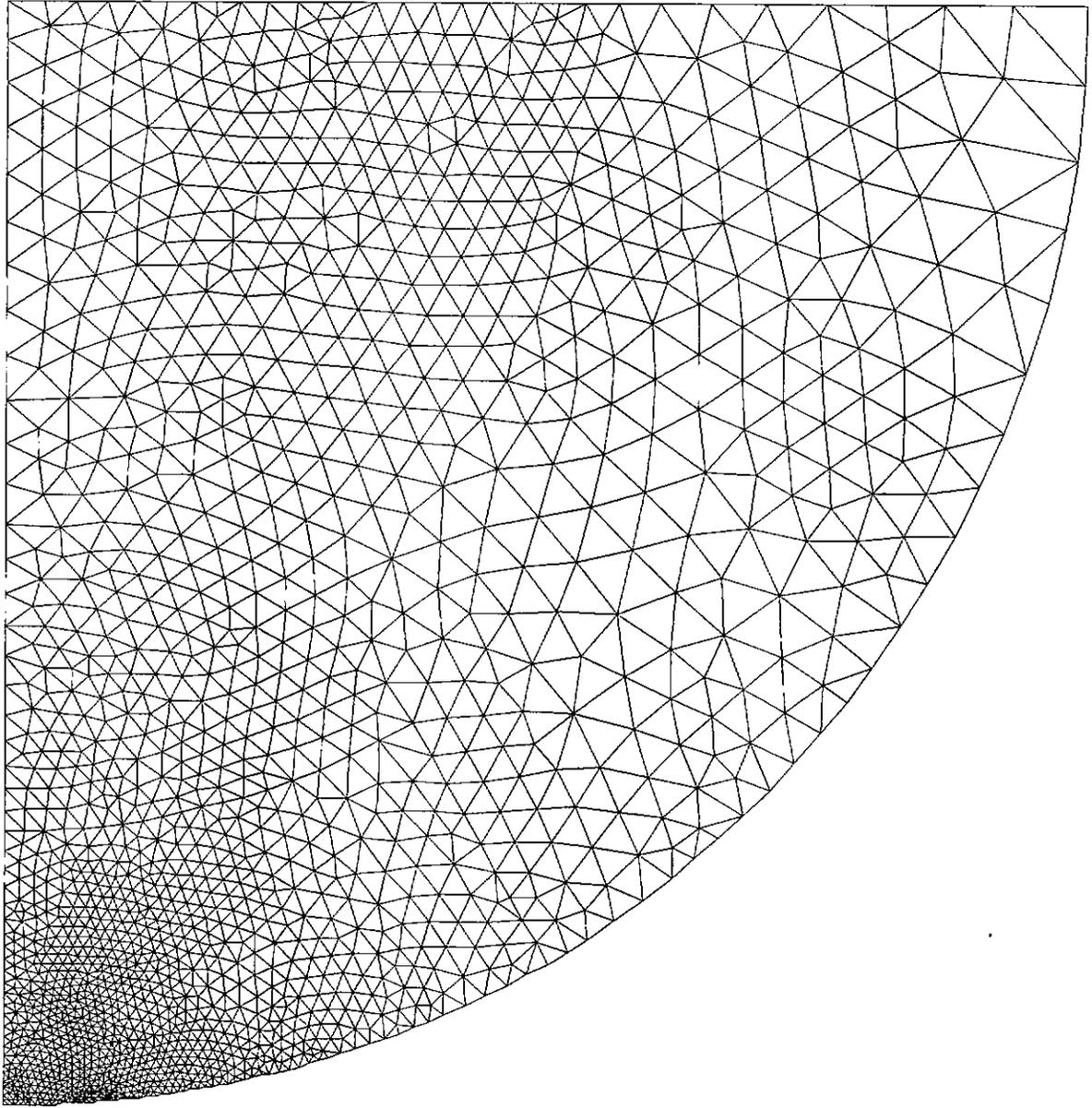


Fig. 5.5 - Malha 3.

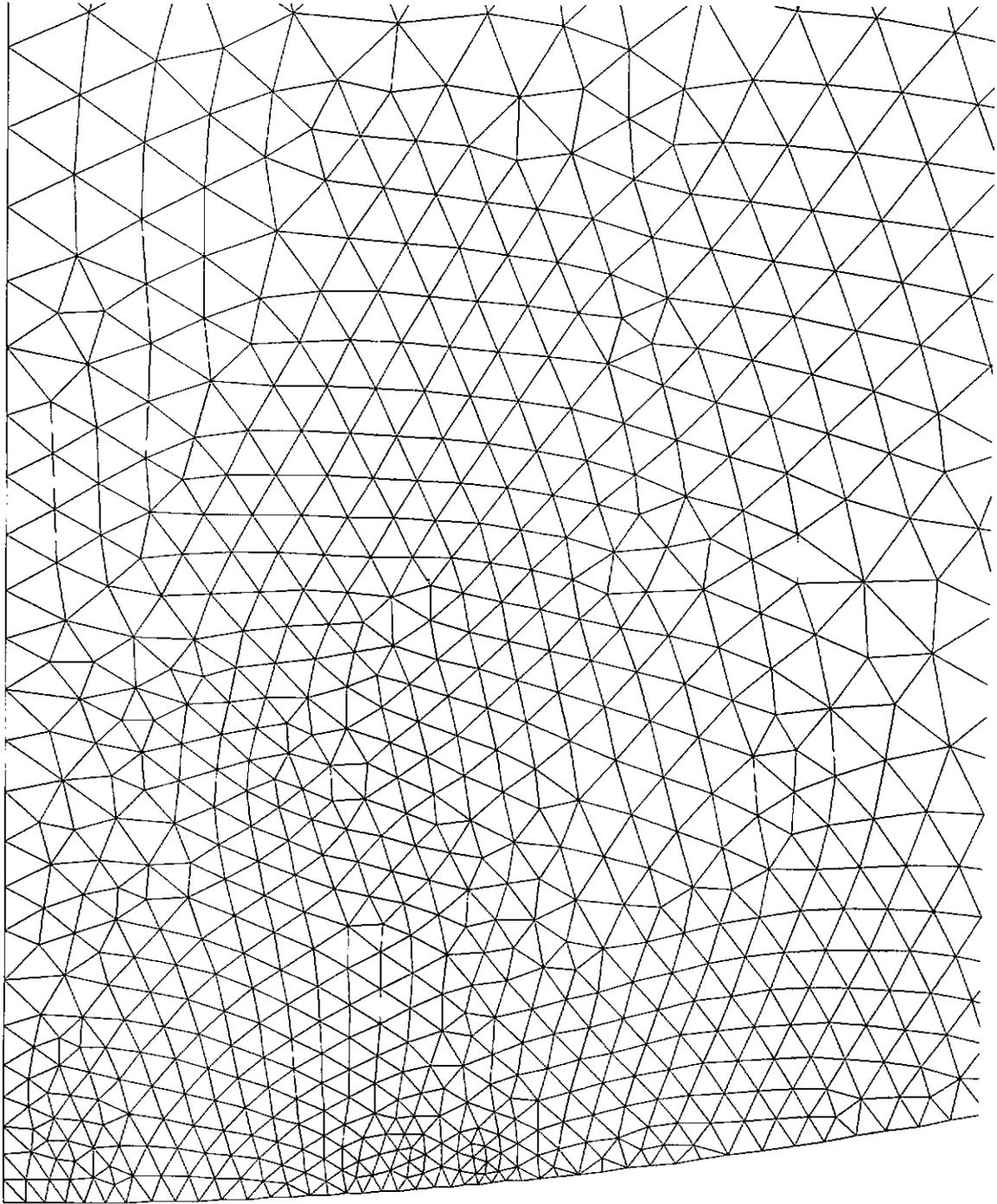


Fig. 5.6 - Malha 3 - Região ampliada próxima ao contato.

TENSÕES DE CONTATO NORMALIZADAS

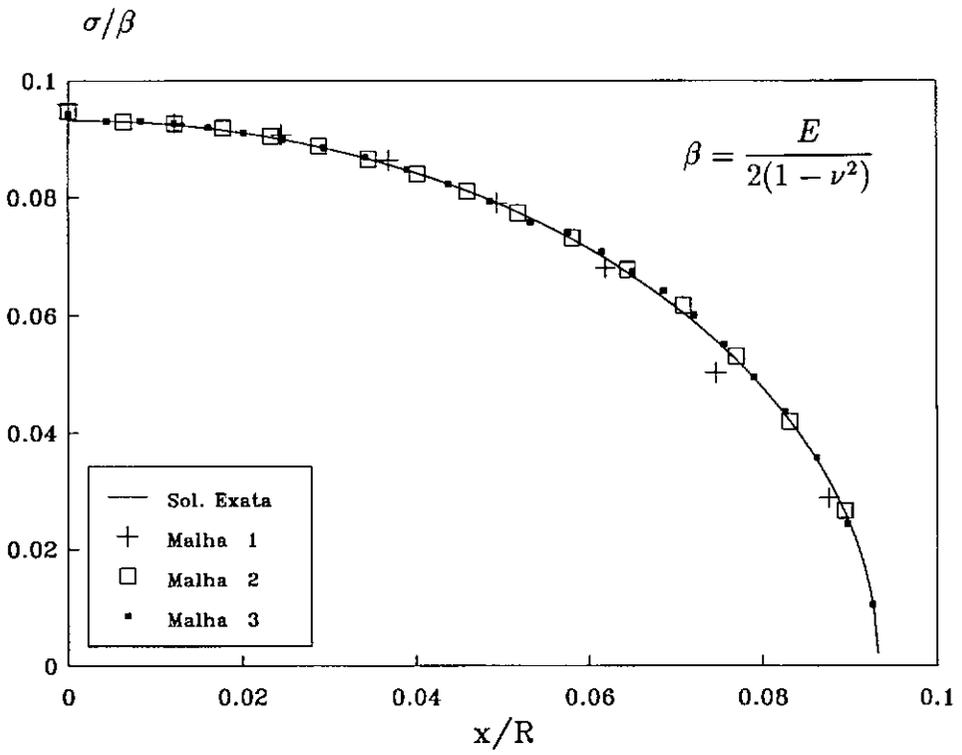


Fig. 5.7

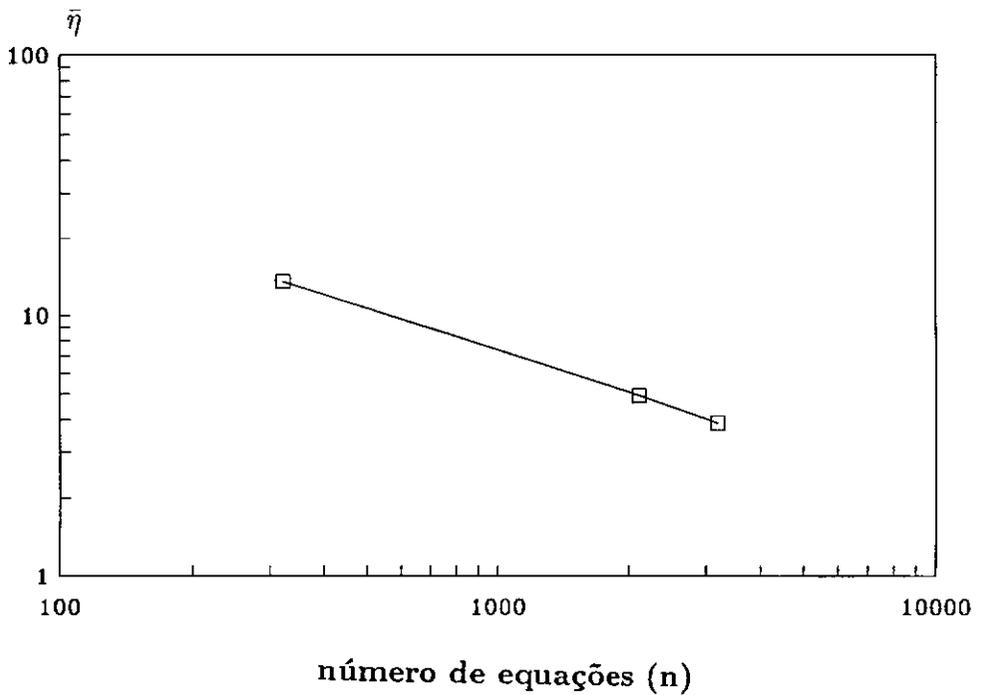


Fig. 5.8

malha	n_{glu}	n_{nc}	n	iterações	$\ u_h\ $	$\ e^*\ $	$\bar{\eta}(\%)$
1	27	8	322	206	1.800927	0.24615090	13.542
2	30	16	2109	363	1.808587	0.08937141	4.928
3	69	24	3187	503	1.812042	0.07001140	3.861

Tabela 5.1 - Convergência do processo adaptativo.

5.2 Exemplo 2

O segundo exemplo é uma placa longa apoiada sobre fundação rígida. A placa tem uma espessura $e = 10$ e um comprimento $l = 80$ e está submetida a um carregamento uniformemente distribuído em sua região central de valor $q = 40000$ como mostra a Fig. 5.9. Seu material é isotrópico homogêneo com módulo de Young $E = 10^7$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Assume-se um estado plano de deformações e despreza-se o atrito. Faz-se uso da simetria da placa para a discretização em elementos finitos.

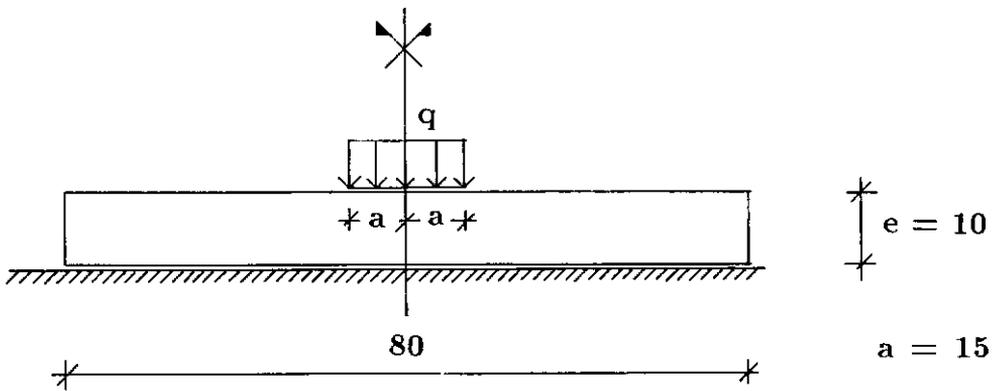


Fig. 5.9 - Exemplo 2.

Para o contorno Γ_c escolheu-se um comprimento de 17.5 medidos a partir do eixo de simetria da placa. Nas figuras 5.10, 5.11, 5.12 e 5.13 encontra-se a sequência de malhas que acompanha o refinamento adaptativo. Nessas figuras, além das ma-

lhas propriamente ditas, e para uma melhor visualização, apresentam-se detalhes ampliados das regiões com alta densidade de elementos.

Nesse exemplo foi considerada uma singularidade situada no nó que recebe a última parcela de carga nodal equivalente, que pode ser justificada pela diferente ordem de grandeza das tensões pertencentes a elementos concorrentes nesse nó. Na Fig. 5.14 está a deformada correspondente a quarta malha. Na tabela 5.2 mostram-se valores que representam a estimativa de erro na sequência de malhas onde foi requerido um erro da ordem de 5 %. Na Fig. 5.15 encontra-se a solução para o problema de contato onde são analisadas as tensões de contato entre a placa e a fundação rígida. Essas tensões são obtidas por média nodal nos nós pertencentes ao contorno Γ_c . Na Fig. 5.16 encontra-se o gráfico que mostra a convergência do processo.

Para o segundo exemplo adotou-se $w = 1.8$ e o número de iterações para a verificação do critério de convergência, em cada malha, está na Tab. 5.2. O fator de amplificação máxima teve seu valor fixado em 1.5 o que possibilitou o desrefinamento sem dificuldades. Esse valor foi mantido em toda a sequência de malhas.

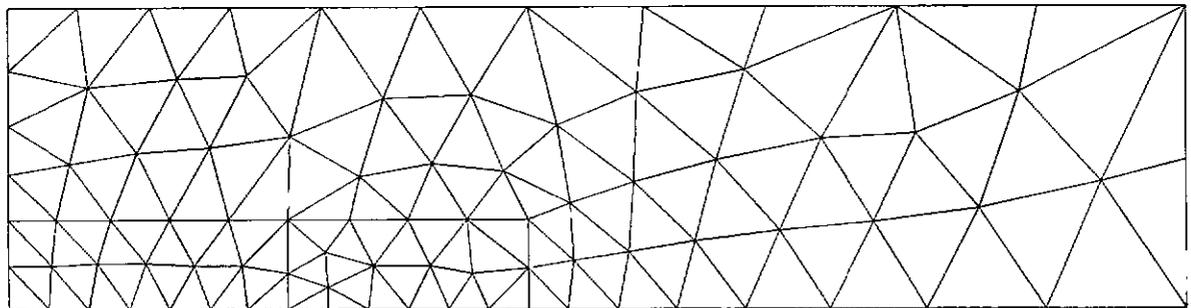
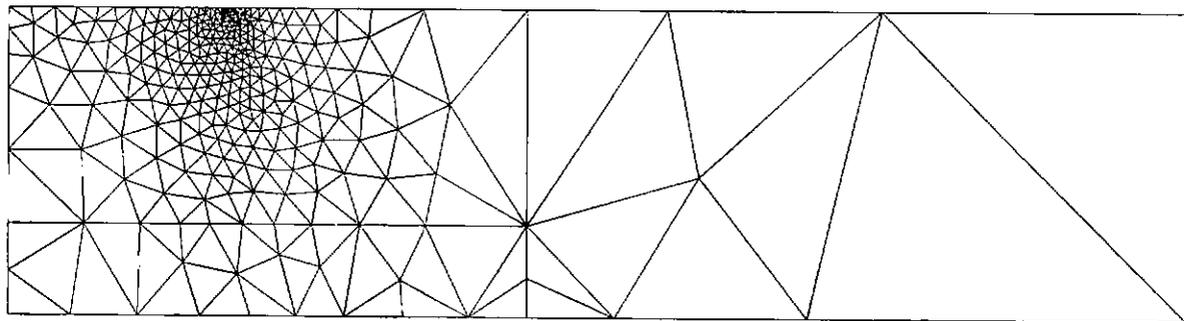
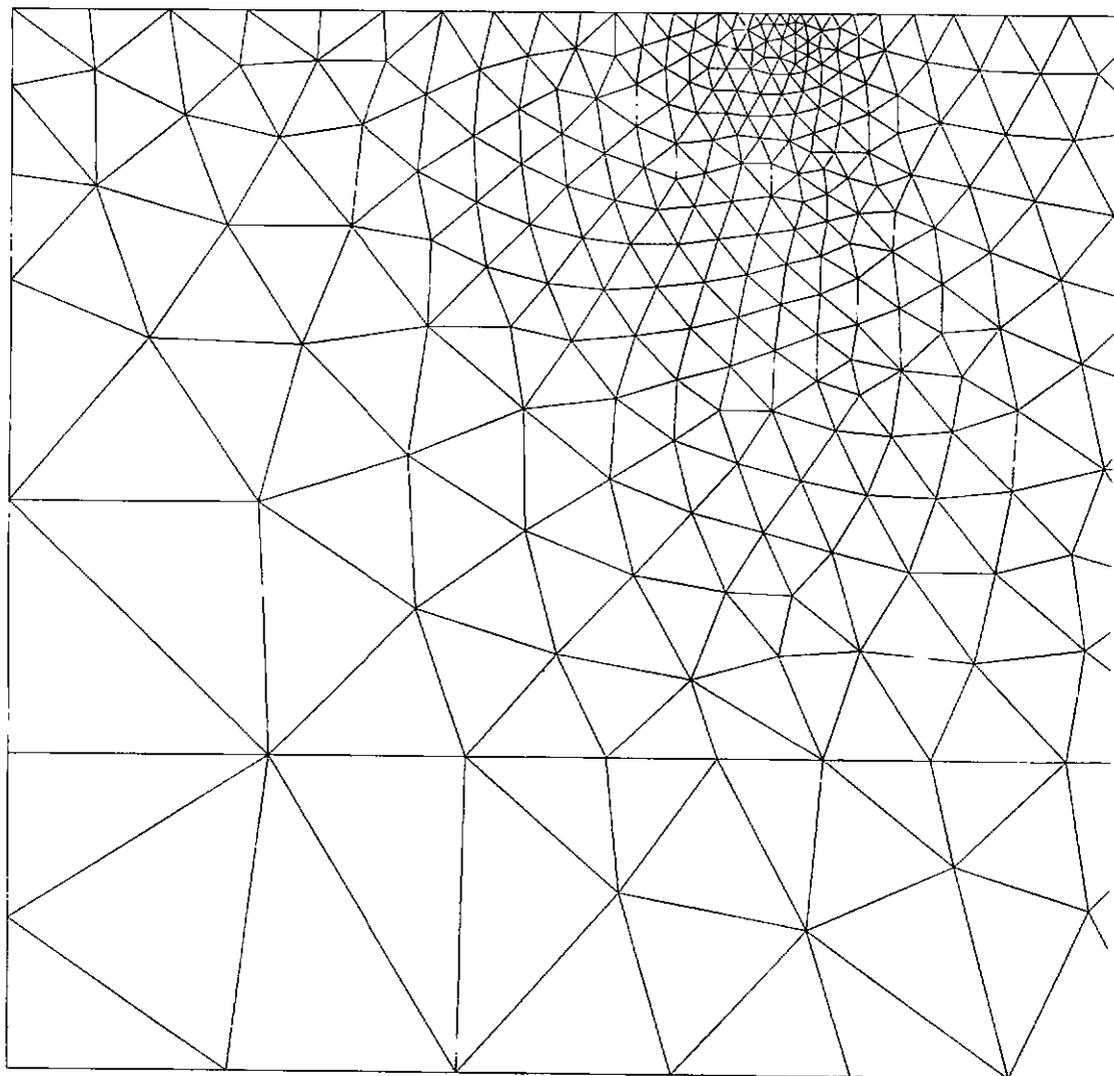


Fig. 5.10 - Malha 1.

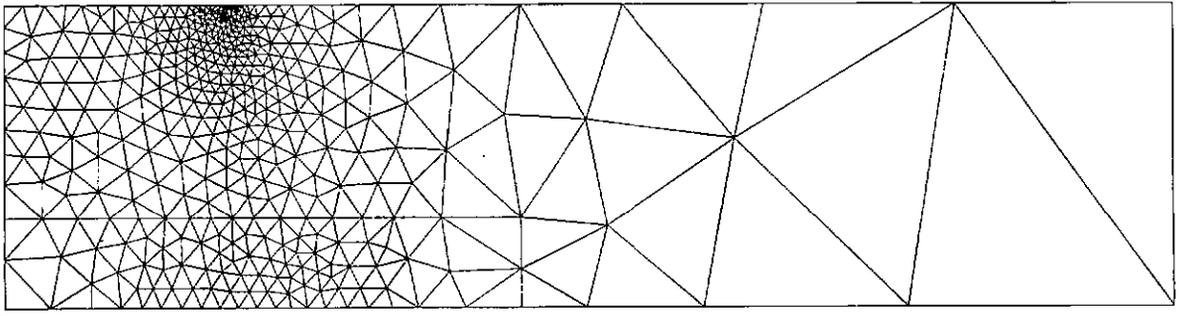


(a)

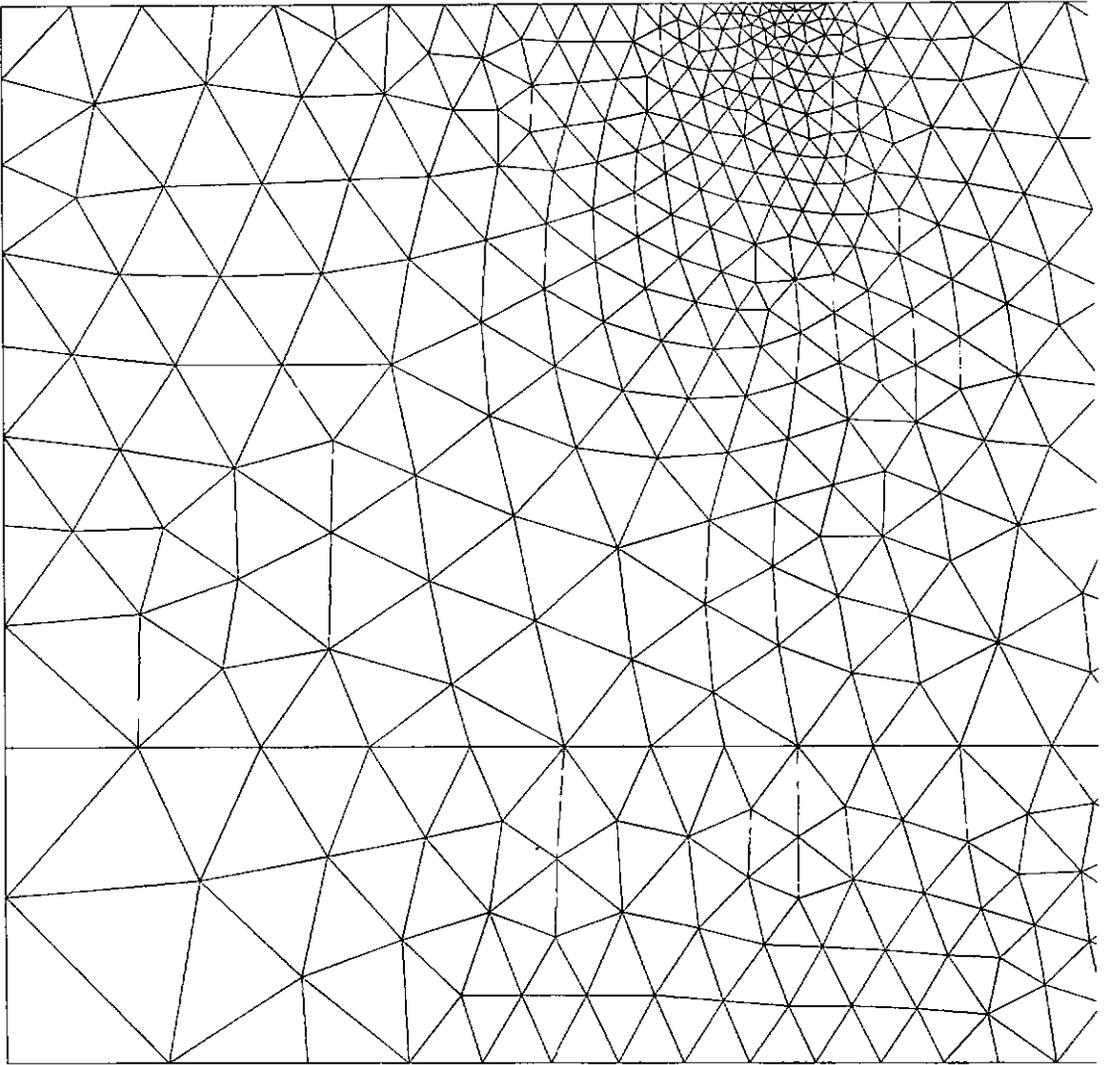


(b)

Fig. 5.11 - (a) Malha 2 - (b) Região ampliada próxima ao contato.

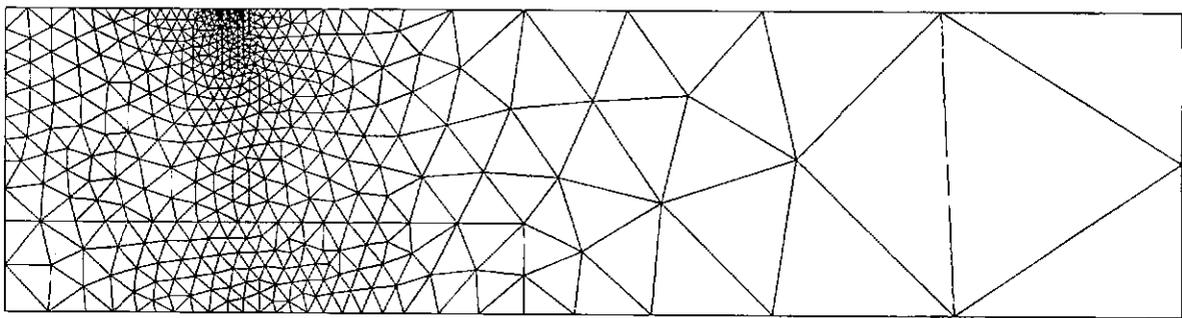


(a)

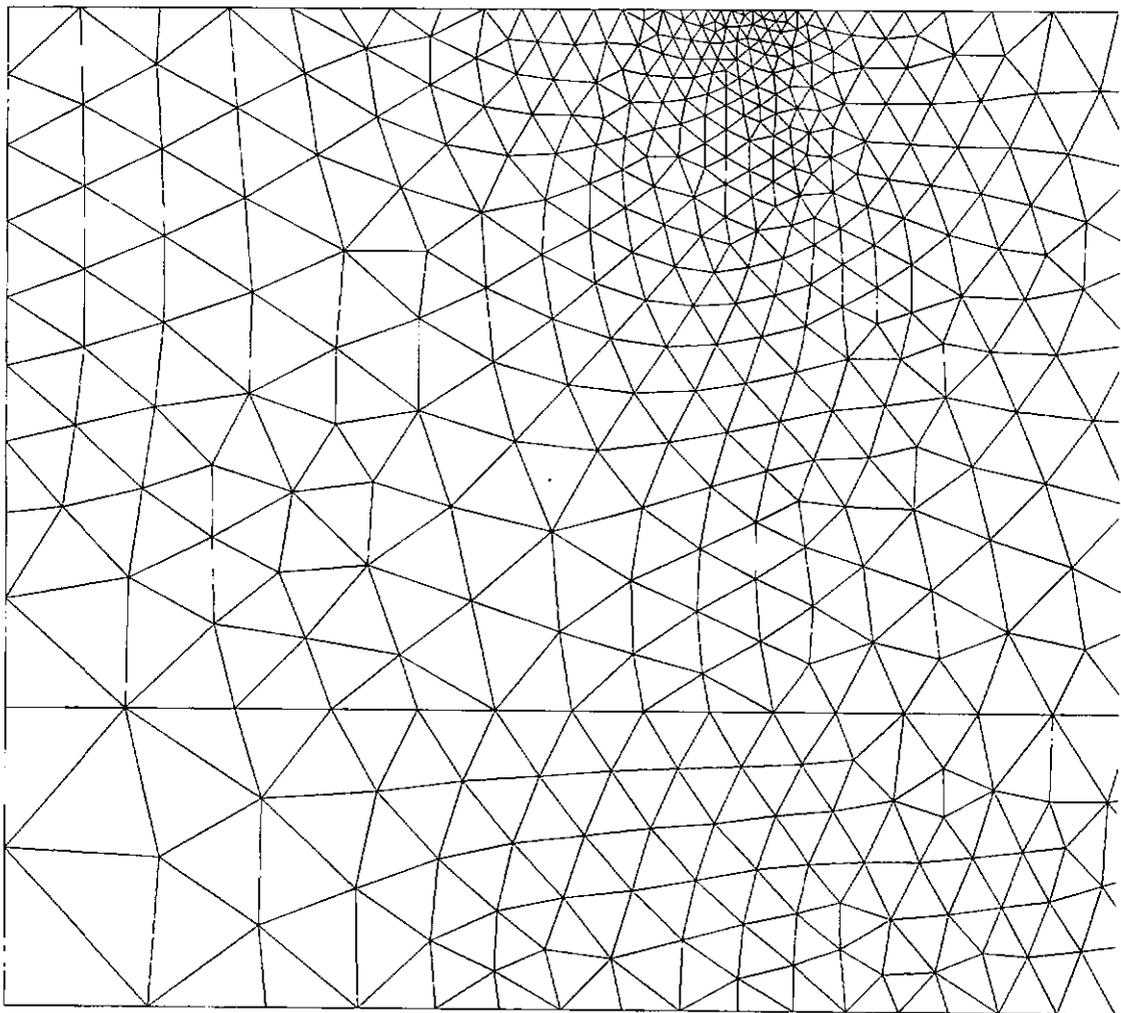


(b)

Fig. 5.12 - (a) Malha 3 - (b) Região ampliada próxima ao contato.



(a)



(b)

Fig. 5.13 - (a) Malha 4 - (b) Região ampliada próxima ao contato.

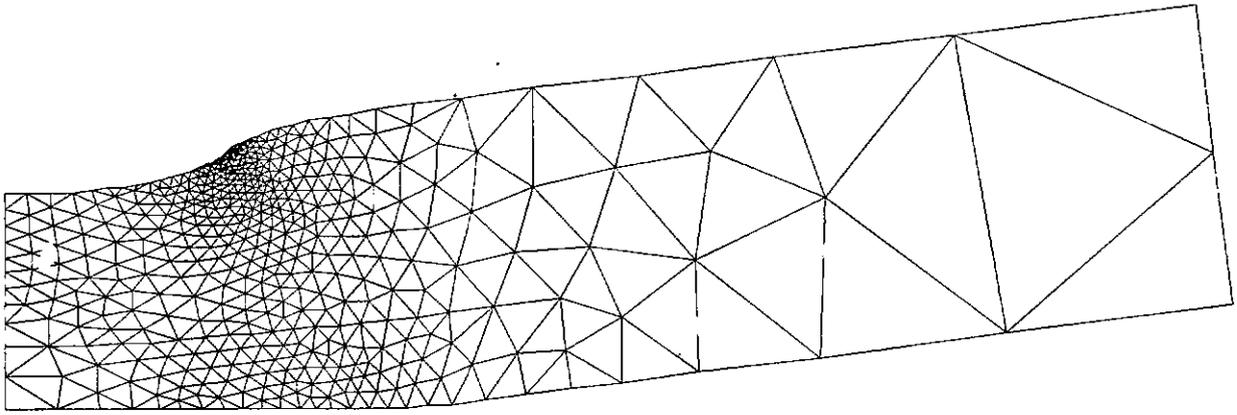


Fig. 5.14 - Deformada referente a Malha 4 (50 vezes ampliada).

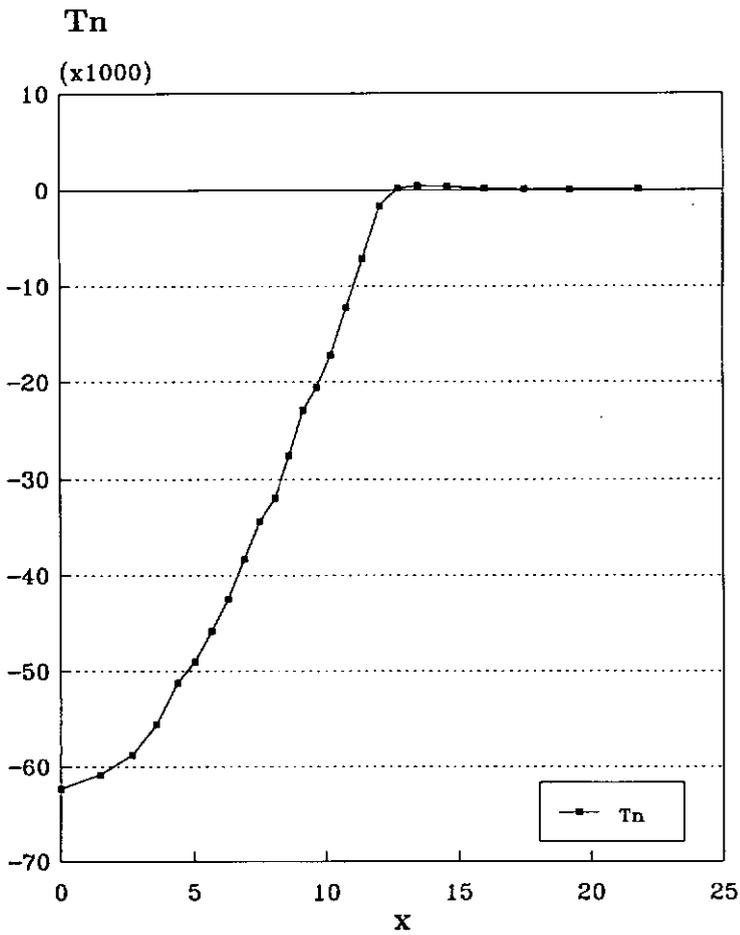


Fig. 5.15 - Tensões normais de contato.

malha	n_{glu}	n_{nc}	n	iterações	$\ u_h\ $	$\ e^*\ $	$\bar{\eta}(\%)$
1	13	10	112	289	95.06973	15.72620	16.320
2	9	7	575	199	97.28593	6.478742	6.645
3	20	16	812	435	155.9564	7.045469	4.513
4	22	17	933	455	155.9803	6.515711	4.174

Tabela 5.2 - Convergência do processo adaptativo.

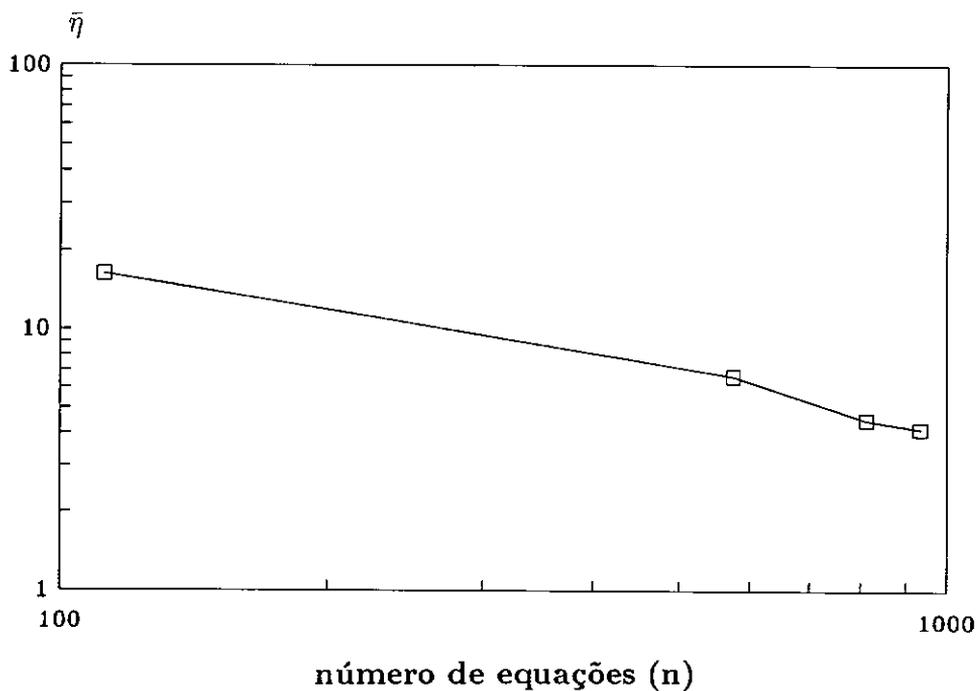


Fig. 5.16

5.3 Exemplo 3

Nesse exemplo analisa-se dois corpos em contato, ambos com as mesmas dimensões e mesmas características elásticas, ou seja, material homogêneo e isotrópico, módulo de Young $E = 1000$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. No corpo que se encontra na parte superior está aplicada uma carga uniformemente distribuída de valor $q = 4$, como mostra a Fig 5.17. É desprezado o atrito entre os corpos, adota-se um estado plano de tensões com espessura igual a 1 para ambos os corpos, e faz-se uso da simetria da peça para a discretização em elementos finitos.

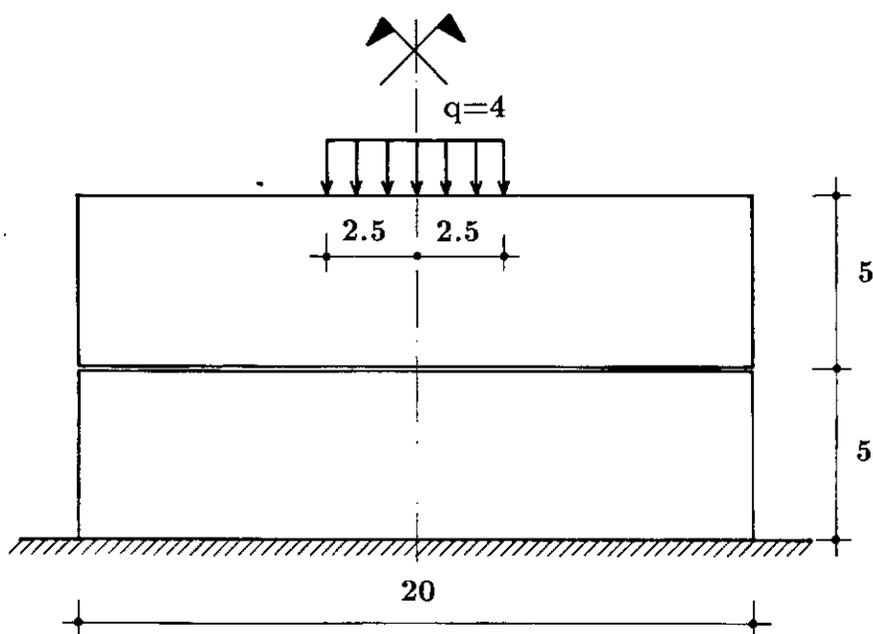


Fig. 5.17 - Exemplo 3

Para esse exemplo o contorno de contato Γ_c foi considerado como toda extensão horizontal de interface entre os corpos

Nas figuras 5.18, 5.19 e 5.20, encontram-se, respectivamente, as malhas obtidas no processo adaptativo e na Fig. 5.21 está a deformada referente a malha 3.

A respeito do procedimento iterativo para a obtenção da solução do problema de contato, encontram-se na Tab. 5.3 as iterações para a verificação da convergência em cada malha. Foi utilizado $w = 1.2$ para o algoritmo GSRP.

Para a obtenção da segunda malha utilizou-se um fator de 1.5. Nesse exemplo verificou-se que o erro relativo na norma da energia, calculado na terceira iteração, não atingiu a porcentagem requerida com um fator de amplificação igual a 1.5, mesmo sendo menor que o obtido na iteração anterior. Foi adotado para a geração da terceira malha um fator igual a 1.0. Essa diminuição no fator de amplificação pode ser justificada pela tentativa de se acelerar a convergência do processo adaptativo, sem prejuízos na eficiência do mesmo.

Na Fig. 5.22 são mostradas as tensões normais de contato entre os corpos, na última malha, obtidas por média nodal das tensões dos elementos concorrentes em cada nó pertencente a Γ_c . Na tabela 5.3 estão representados os valores das normas do erro dessa sequência, observando-se que foi requerida uma porcentagem de 5% para o erro estimado. Na Fig. 5.23, está a análise da convergência.

Vale lembrar que os multiplicadores de Lagrange são os mesmos para ambos os corpos, o que não necessariamente deve ser satisfeito para as tensões de contato (calculadas a partir do campo de deslocamentos), desenvolvidas em cada um isoladamente. Observa-se entretanto, a qualidade da solução quando essas tensões são comparadas na Fig. 5.22.

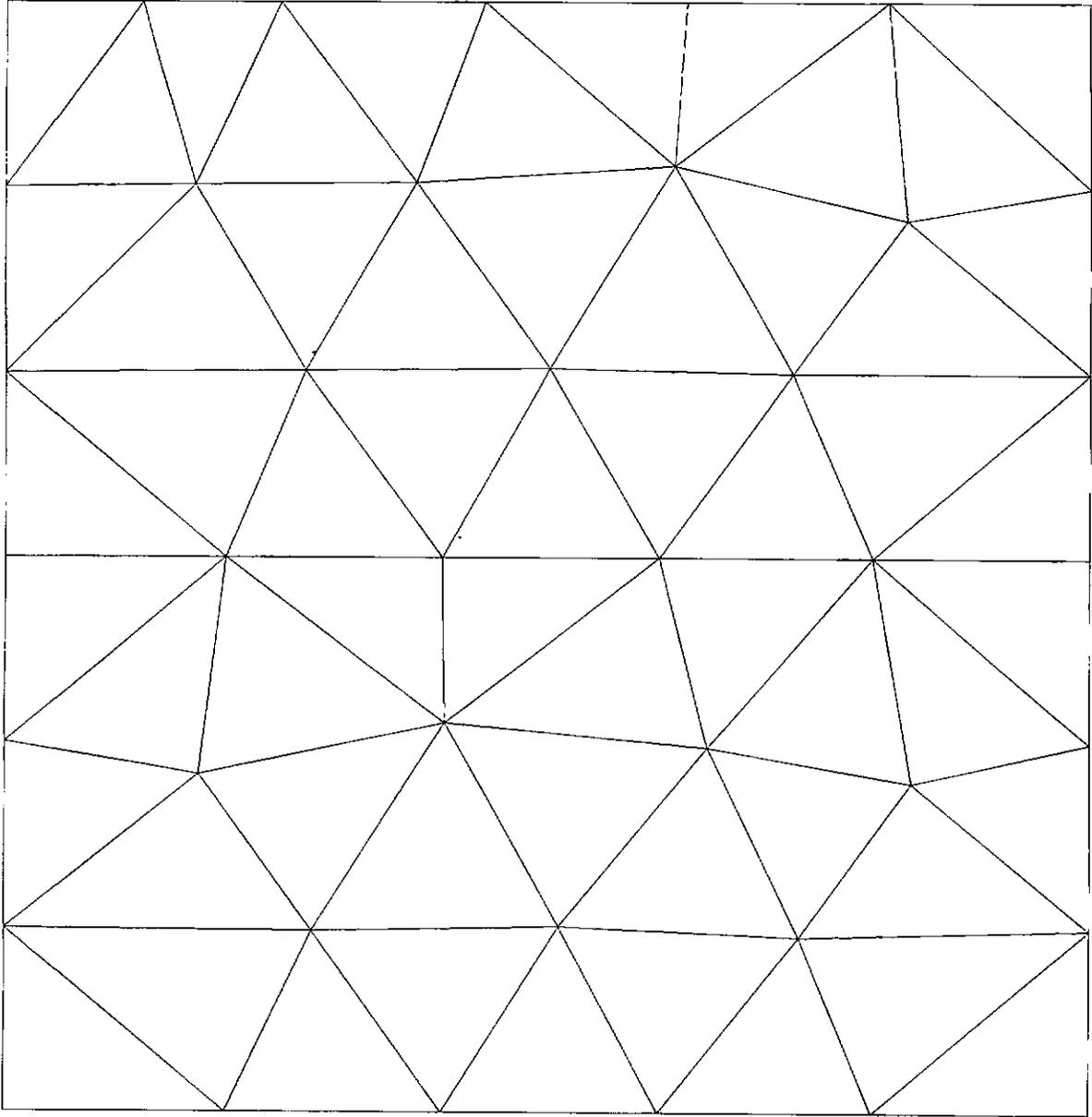


Fig. 5.18 - Malha 1.

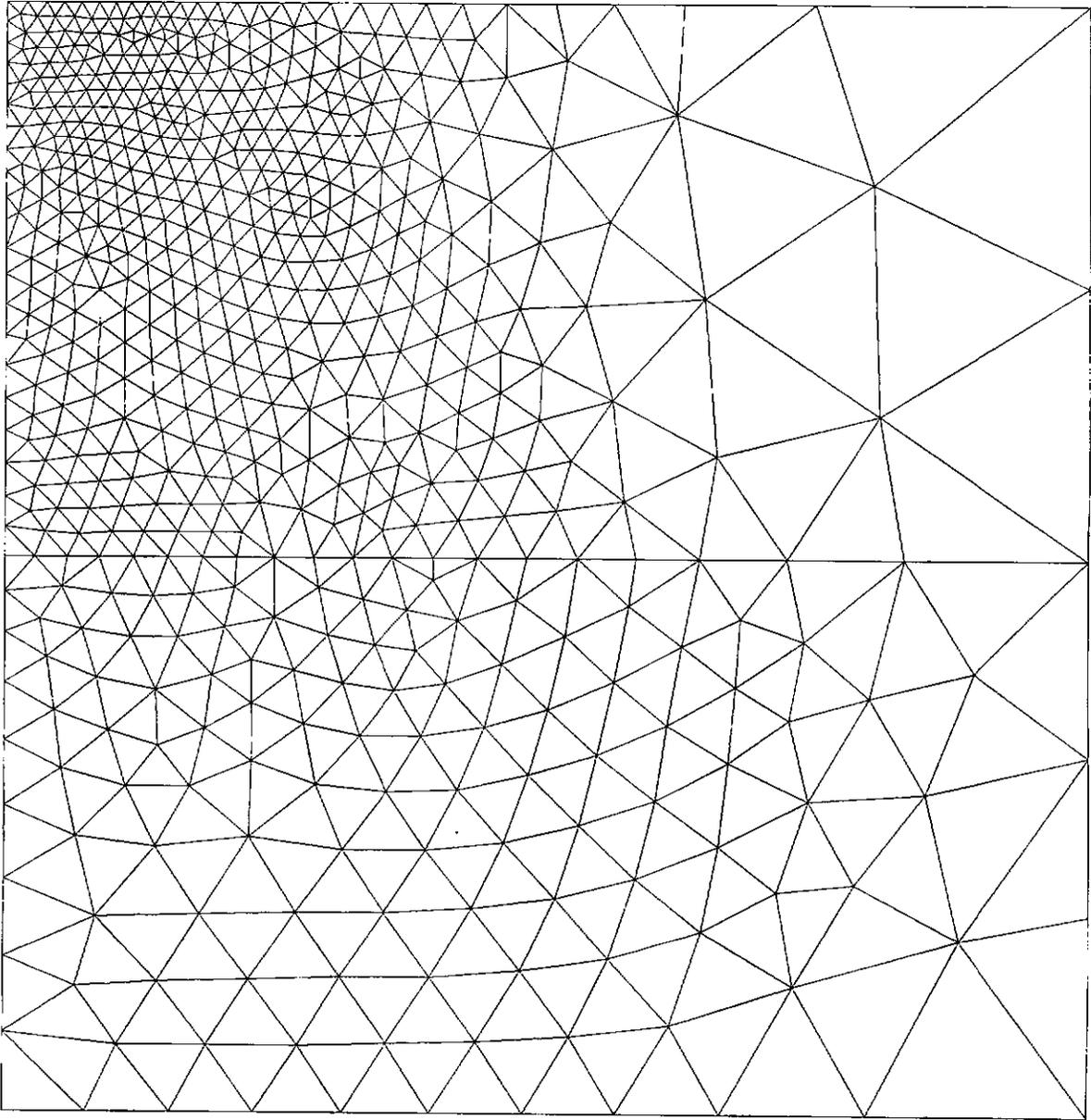


Fig. 5.19 - Malha 2.

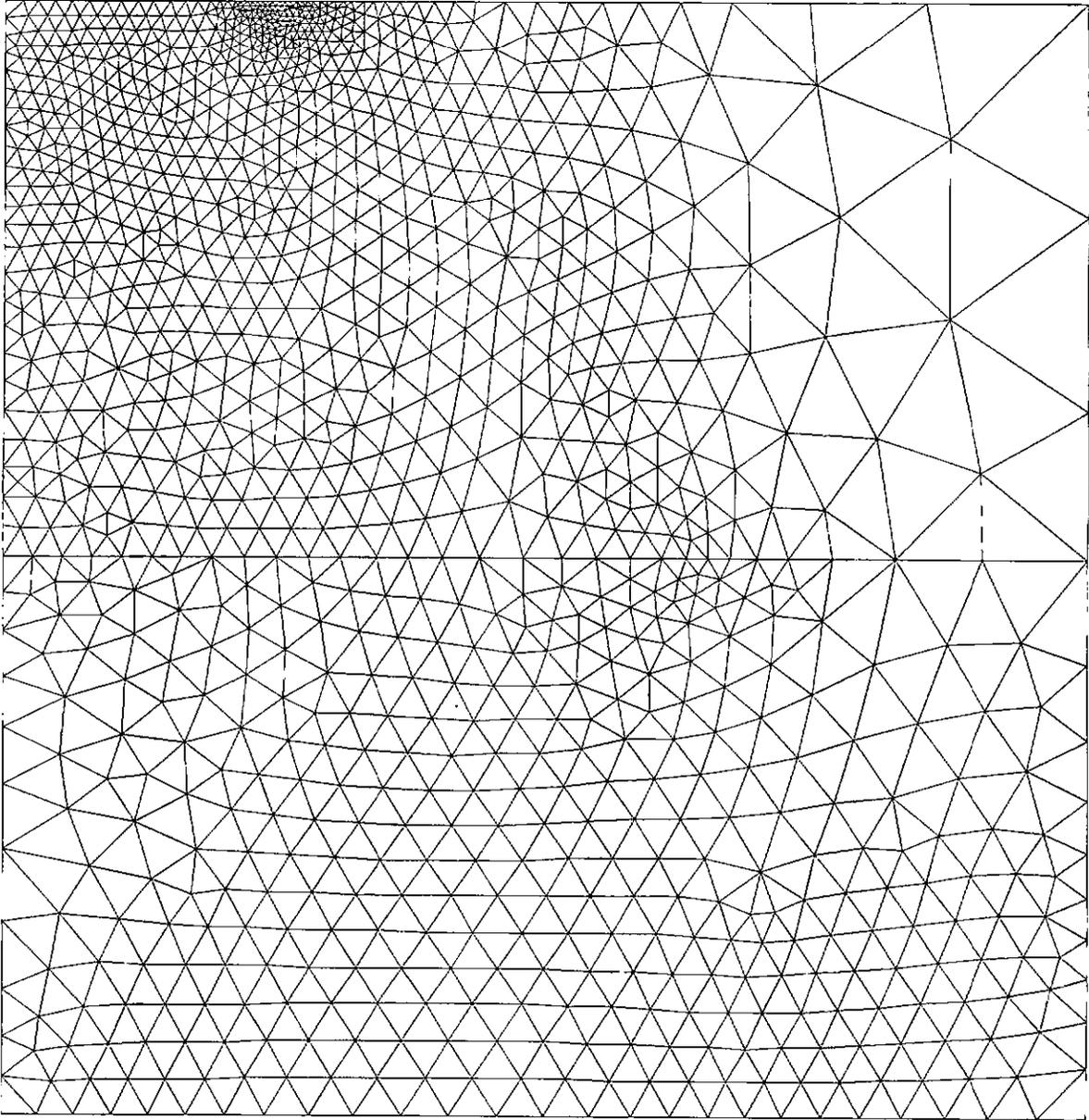


Fig. 5.20 - Malha 3.

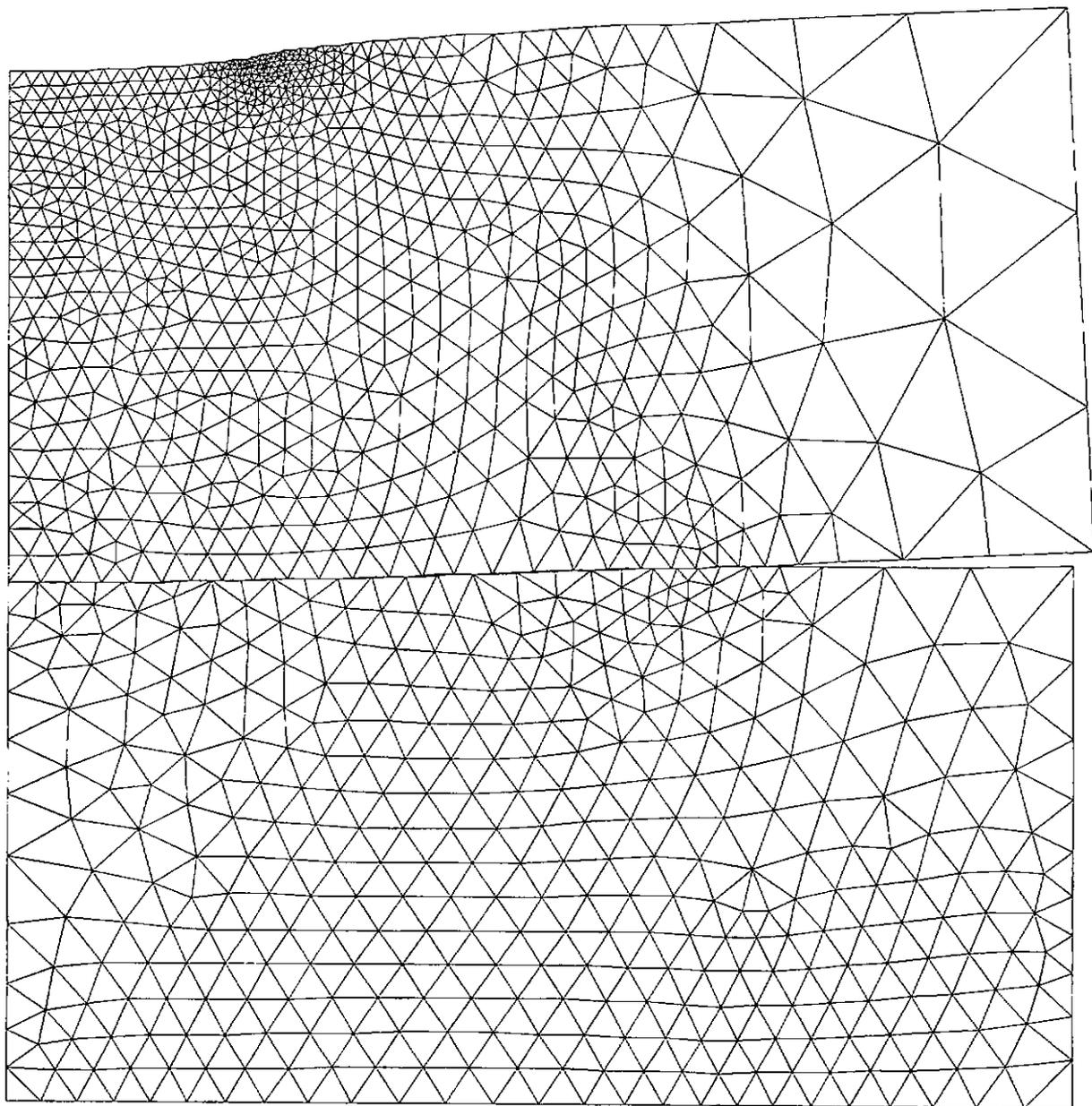


Fig. 5.21 - Deformada referente a Malha 3 (18 vezes ampliada).

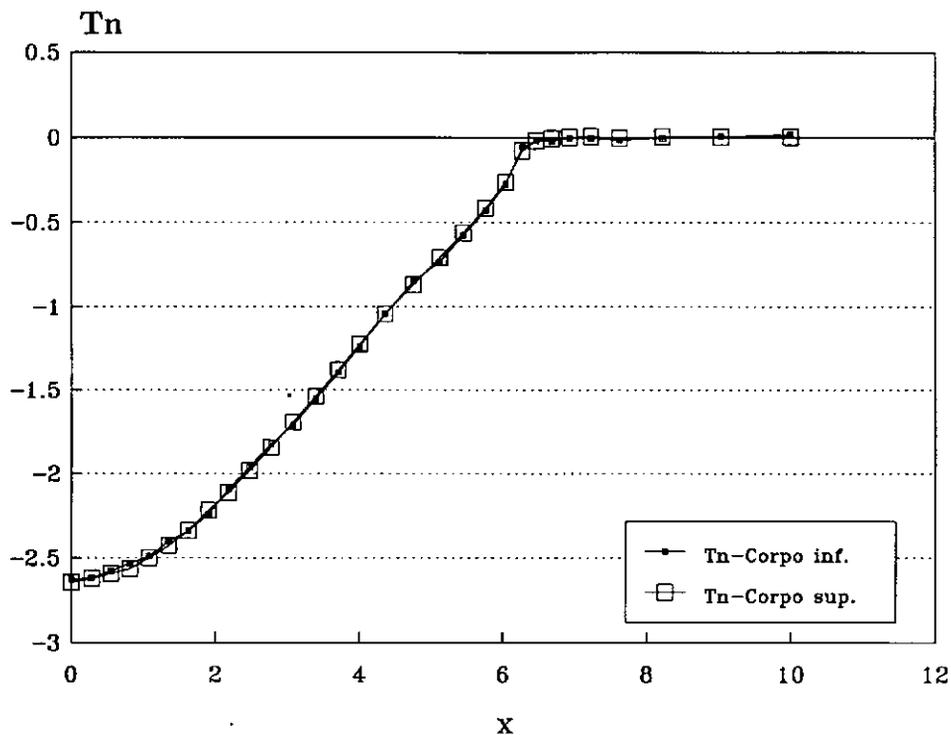


Fig. 5.22 - Tensões normais de contato em cada corpo.

malha	n_{glu}	n_{nc}	n	iterações	$\ u_h\ $	$\ e^*\ $	$\bar{\eta}(\%)$
1	6	4	75	24	0.4798459	0.1191029	24.090
2	21	17	1129	126	0.5008626	0.0327921	6.533
3	30	22	2248	156	0.5016330	0.0204009	4.061

Tabela 5.3 - Convergência do processo adaptativo.

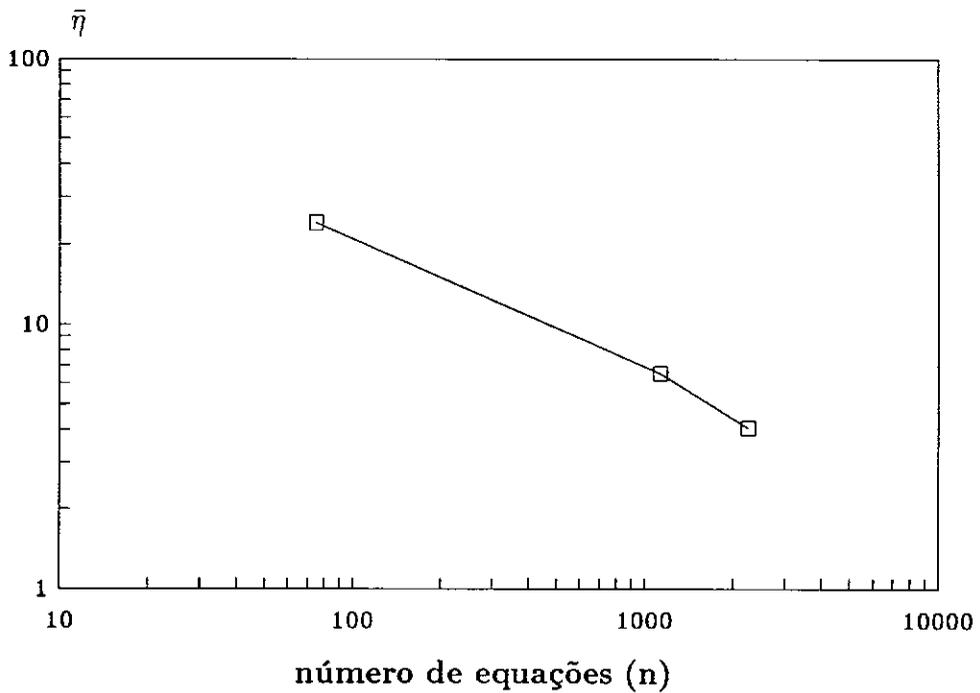


Fig. 5.23

5.4 Exemplo 4

Considera-se um corpo deformável com o formato próximo ao de uma cunha simétrica contido por duas superfícies rígidas em suas laterais, como mostra a Fig. 5.24. O material do corpo é isotrópico e homogêneo com módulo de Young $E = 1000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Para essa situação considerou-se um coeficiente de atrito no valor de $\mu = 0.25$ e obteve-se a discretização em elementos finitos somente em uma parte simétrica. Assume-se um estado plano de tensões com espessura igual a 1 para o cunha. Na menor de suas faces paralelas foi imposto um campo uniforme de deslocamentos na direção horizontal de valor $\delta = 0.5$.

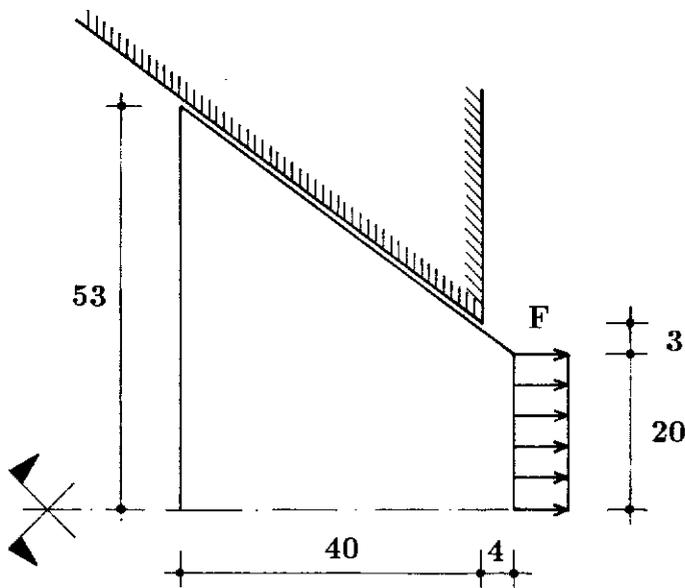


Fig. 5.24 - Exemplo 4.

A região passível de entrar em contato foi tomada como sendo toda a extensão da cunha paralela a superfície rígida.

Para essa situação considerou-se $w = 1.5$ na utilização do algoritmo GSRP durante o procedimento iterativo. Para a geração da segunda malha da sequência foi utilizado um fator de amplificação máxima igual a 3.0. Esse valor foi adotado para permitir essa geração e constatou-se que em uma tentativa de se aumentar esse limite não se obteve sucesso. Na Fig. 5.25 está a primeira malha e a seguir na Fig. 5.26 a segunda e última malha da sequência, acompanhada de uma ampliação da região com alta densidade de elementos. Na tabela 5.4 encontram-se resultados referentes às normas do erro e, na Fig. 5.28, mostra-se a convergência do processo adaptativo. Observa-se que o erro relativo obtido na segunda malha, apesar de próximo, foi um pouco superior ao limite requerido de 5%. Consequentemente, haveria a necessidade de se continuar com o processo adaptativo para se alcançar esse limite. Na verdade, não foi possível a geração da terceira malha por um problema apresentado pelo gerador. Optou-se por admitir como satisfatória a solução do problema obtida na segunda malha, que pode ser analisada na Fig. 5.27. Estão representadas graficamente as tensões normais e tangenciais em Γ_c , consideradas como a solução do problema de contato.

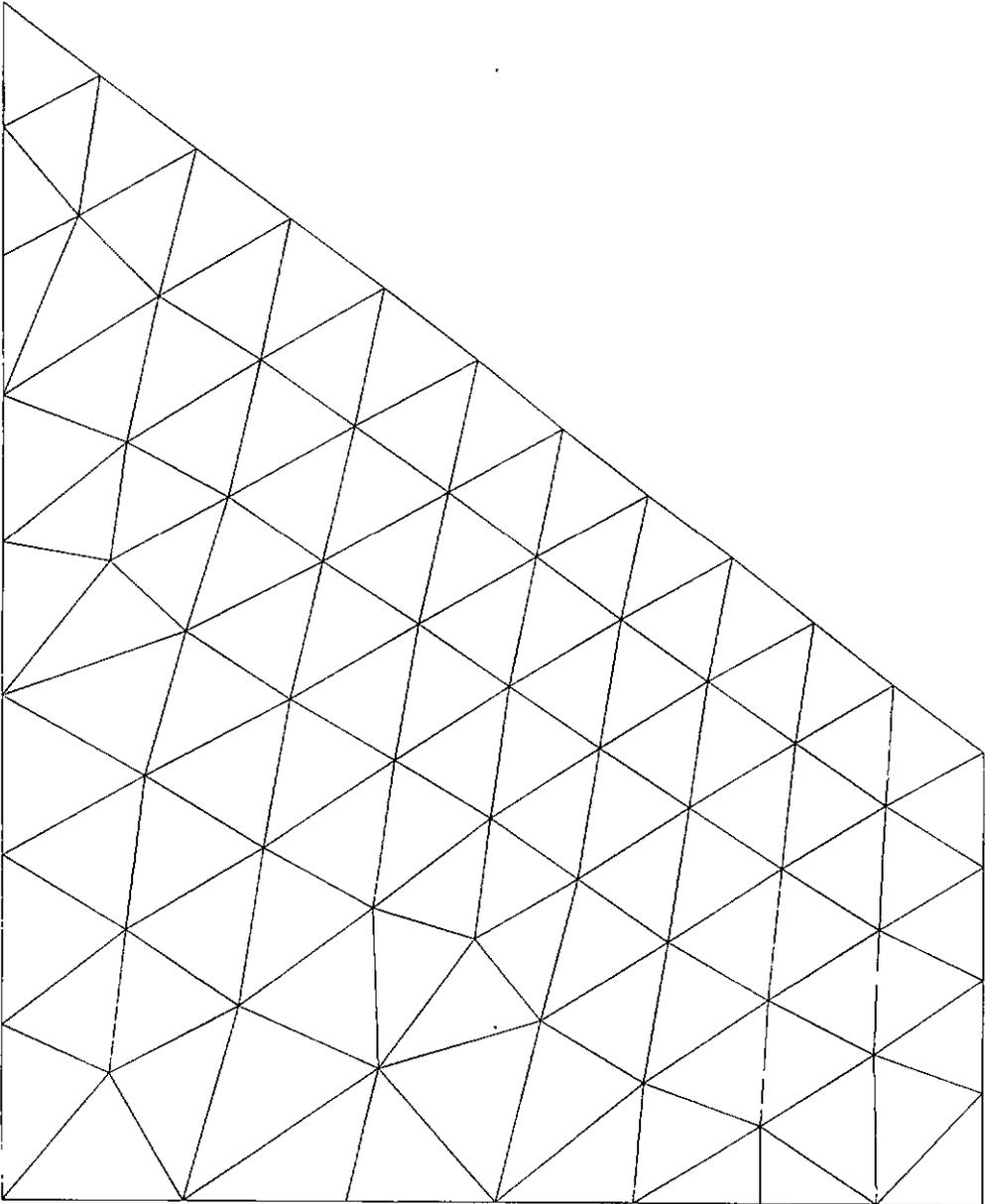


Fig. 5.25 - Malha 1.

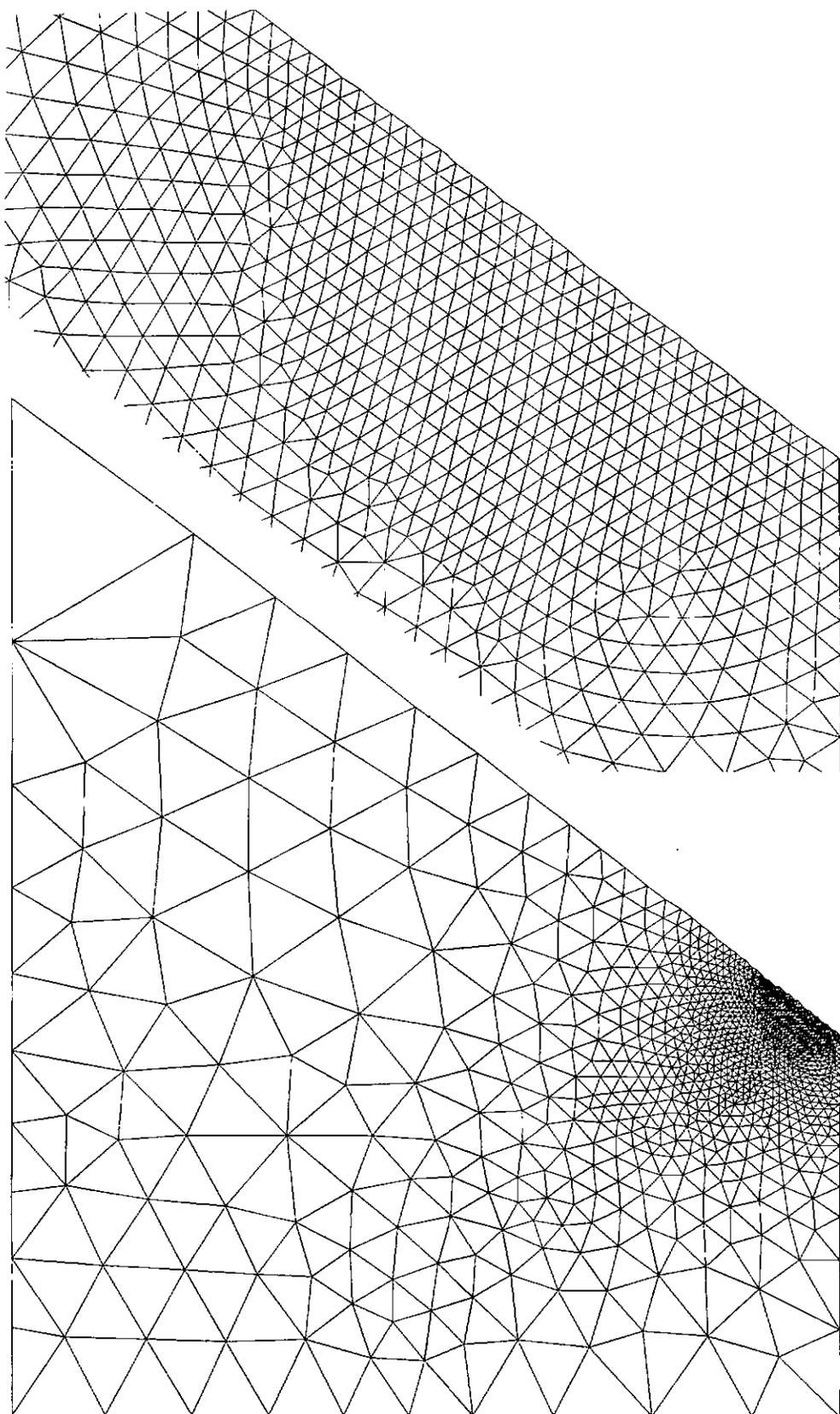


Fig. 5.26 - Malha 2 e ampliação da região com alta densidade de elementos.

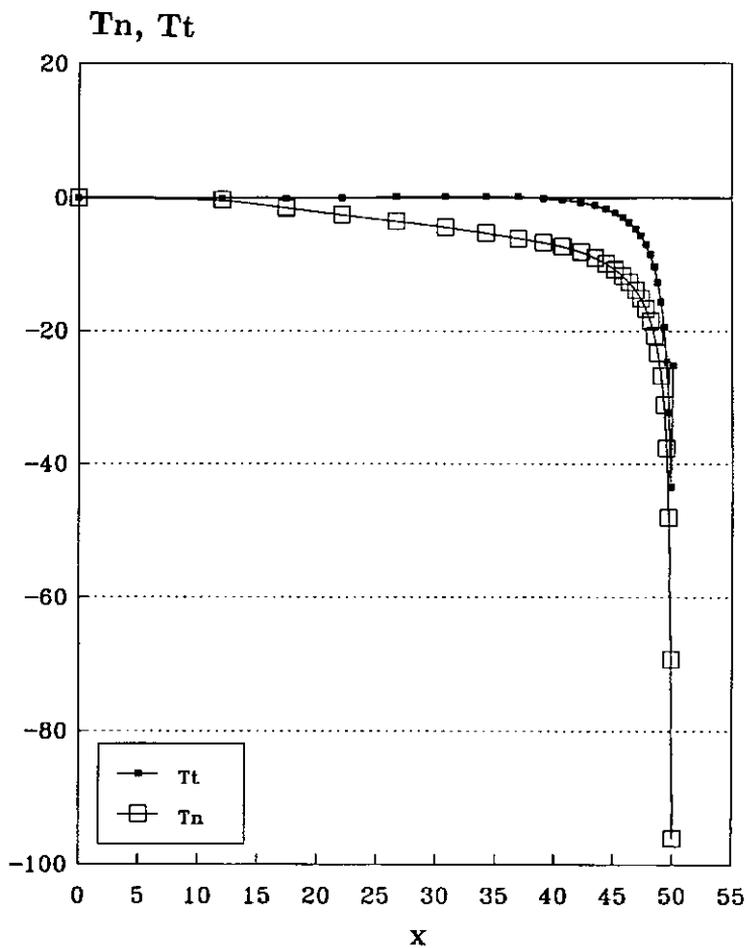


Fig. 5.27 - Tensões normais e tangenciais no contato.

malha	n_{glu}	n_{nc}	n	$\ u_h\ $	$\ e^*\ $	$\bar{\eta}(\%)$
1	11	8	130	9.924582	3.571672	33.862
2	28	27	2385	9.378414	0.8170862	8.68

Tabela 5.4 - Convergência do processo adaptativo.

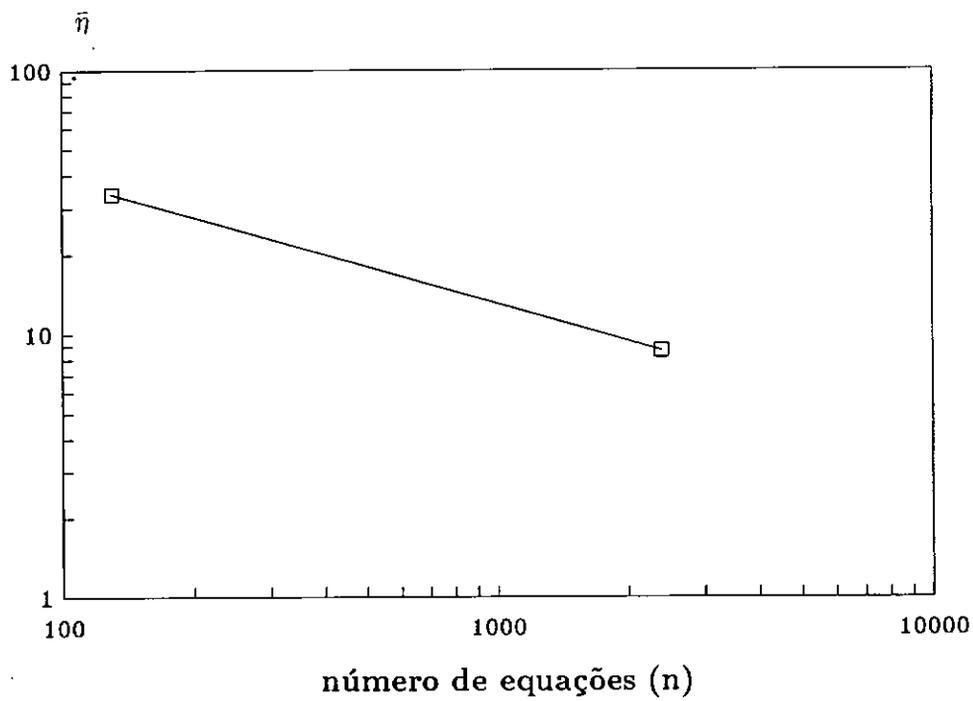


Fig. 5.28

Capítulo 6

Conclusões

Foram estudados neste texto problemas de contato em elasticidade plana, com e sem atrito, entre um sólido deformável e uma superfície rígida e entre dois sólidos deformáveis e utilizou-se um procedimento iterativo [21] para solução do problema com atrito. Os algoritmos para resolução desses problemas estão amplamente discutidos em [1].

A esses problemas foi aplicado um estimador de erro com análise “*a posteriori*” proposto por Zienkiewicz e Zhu, com divulgação bastante difundida na literatura. Procedeu-se ao refinamento por uma técnica adaptativa do tipo h . A geração das malhas durante o processo adaptativo foi feita através de um gerador automático. A eficiência do processo foi verificada na obtenção de resultados numéricos satisfatórios. Observou-se um processo adaptativo com convergência rápida, geralmente em poucas iterações, para limites de erro pré-fixados. Isso se deveu em parte às facilidades oferecidas pelo gerador. A sua interface para desenvolvimento de estratégias adaptativas se mostrou bastante versátil. Uma das vantagens está na qualidade das informações fornecidas ao gerador e o dado mais importante é a forma conveniente da distribuição de novos tamanhos de elementos ao longo da malha.

Durante o desenvolvimento da técnica adaptativa aqui utilizada, fez-se necessário definir um parâmetro que controlasse o máximo tamanho dos elementos a serem gerados. Criou-se, então um fator de amplificação máxima, estipulado pelo usuário, que pode variar durante o processo adaptativo e cuja utilização deve ser criteriosa. Essa medida limita a geração de elementos que podem vir a ter

tamanhos superiores a algumas dimensões do próprio domínio o que, obviamente, impossibilita uma nova geração. Observou-se, também, que pode-se acelerar a convergência do processo adaptativo, quando esse aproxima-se dos valores requeridos, fazendo-se com que o fator de amplificação máxima seja unitário. Isto pode ser justificado, sabendo-se que não mais haverá desrefinamento e sim refinamento de elementos onde for necessário. Os elementos possíveis de serem gerados são os triangulares lineares e quadráticos. Em função dessa capacidade foi implementado no código o elemento triangular linear.

Algumas linhas de trabalho devem ser prosseguidas em futuras pesquisas como as que se seguem:

- Verificou-se que em regiões próximas às singularidades foram gerados elementos extremamente pequenos. Em cada iteração constatava-se a necessidade de diminuição desses elementos. A presença de singularidades é muito inconveniente, pois tendem a direcionar o refinamento para as regiões onde estão localizadas, prejudicando a obtenção de uma melhor solução em outras regiões da malha. Uma forma de contornar esse problema seria limitar os tamanhos mínimos de elementos a serem gerados [29] e [30]. Assim, os elementos com tamanhos iguais ou menores que o mínimo devem ser expurgados do cálculo do erro global, encerrando a contribuição das parcelas de erro dos elementos próximos às singularidades.
- A implementação de um elemento mais refinado, como o triangular quadrático deve ser estudada visando uma convergência mais rápida.
- Por fim, técnicas mistas de refinamento devem ser testadas, em especial, as combinações h - p e r - h . Pode-se aplicar, por exemplo, nas iterações iniciais a técnica h e em seguida a técnica p .

Bibliografia

- [1] BARBOSA, H.J.C., "Algoritmos Numéricos para Problemas de Contato em Elasticidade", Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1986.
- [2] KIKUCHI, N.; ODEN, J.T., "Contact Problems in Elasticity - A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods", Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1988.
- [3] DUVAUT, G.; LIONS, J.L., "Les Inéquations en Mécanique et en Physique", Dunod, Paris, 1972.
- [4] PANAGIOTOPOULOS, P.D., "Inequality Problems in Mechanics and Applications" Kirkäuser, Boston, 1985.
- [5] ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z., "The Three R's of Engineering Analysis and Error Estimation and Adaptivity", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 82, 95-113, 1990.
- [6] ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z., "A simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 24, 337-357, 1987.
- [7] ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z.; LIU, Y.C.; MORGAN, K.; PERAIRE, J., "Error Estimates and Adaptivity from Elasticity to High Speed Compressible Flow", *The Mathematics of Finite Element and Applications VI*, 481-512, 1987.
- [8] ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z.; CRAIG, A.W., "Adaptive Techniques in Finite Element Analysis", *Inst. for Numer. Meth. in Eng.*, 1987.

- [9] CRAIG, A.W.; AINSWORTH, M.; ZHU, J.Z.; ZIENKIEWICZ, O.C., “h and h-p Version Error Estimation and Adaptive Procedures from Theory to Practice”, *Engineering with Computers*, Vol.5, 221-234, 1989.
- [10] BABUSKA, I.; RHEINBOLDT, W.C. “A-posteriori Error Estimates for The Finite Element Method.”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 12, 1597-1615, 1978.
- [11] CAREY, G.F. “A Mesh-Refinement Scheme for Finite Element Computations”, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 7, 93-105, 1976.
- [12] KELLY, D.W.; GAGO, J.P. DE S.R.; ZIENKIEWICZ, O.C.; BABUSKA, I. “A-posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in The Finite Element Method. Part I - Error Analysis, Part II - Adaptive Mesh Refinement”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 19, 1593-1619, 1621-1656, 1983.
- [13] KIKUCHI, N.; TORIGAKI, T., “Adaptive Finite Element Method in Computer Aided Engineering”, IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Florianópolis, SC, 39-61, 1987.
- [14] FANCELLO, E.A; SALGADO, A.C.; FEIJÓO, R.A., “Aranha- Gerador de Malhas 2D para Elementos Finitos Triangulares de 3 e 6 nós”, *Relatórios de Pesquisa e Desenvolvimento*, N.º 021/90, LNCC/CNPq, 1990.
- [15] BALLESTÉ, A.O.; FANCELLO, E.A.; GUIMARÃES, A.C.S., “Aranha - Manual do Usuário”, *Relatório de Software*, N.º 02/90, LNCC/CNPq, 1990.
- [16] ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L., “The Finite Element Method - Basic Formulation and Linear Problems”, Vol. 1, McGraw-Hill, 1989.
- [17] SZABO, B.A.; BABUSKA, I, “Computation of the Amplitude of Stress Singular Terms for Cracks and Re-entrant Corners”, Center for Comput. Mech. Washington University, 1986.
- [18] RIBEIRO, F.L.B., “Estratégia h-p de Refinamento para o Método dos Elementos Finitos”, Tede de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1991.
- [19] SILVA, R.S., “Métodos Adaptativos Aplicados à Resolução de Problemas de Transporte Predominantemente Convectivos”, Tese de Mestrado, Universi-

dade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1991.

- [20] PORTELA, J.C.S., "Análise Adaptativa por Regeneração da Malha", Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1991.
- [21] PANAGIOTOPOULOS, P.D., "A non-linear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in the theory of elasticity", *Ing. Archiv* 44, 421-432, 1975.
- [22] DIAZ, R.A.; KIKUCHI, N.; TAYLOR, J.E., "A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 41, 29-45, 1983.
- [23] MAMIYA, E.N.; MATTOS, H.S.C.; RAOUS, M.; SAMPAIO, R., "Solução Numérica de Problemas de Contato Unilateral com Atrito. Aplicação a uma Placa Apoiada Sobre Solo Rígido.", *Rev. Bras. de Ciências Mecânicas.*, Vol. X, N.º 1, 45-69, 1988.
- [24] BARBOSA, H.J.C.; FEIJÓO, R.A., "A Numerical Algorithm for Signorini's Problem with Coulomb Friction.", *Proceedings of the second meeting on Unilateral Problems in Structural Analysis*, Prescudin, Italy, 33-46, 1985.
- [25] HUGHES, T.J.R., "The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis", Prentice-Hall International Editions, 1987.
- [26] BATHE, K.J., "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Inc., 1982.
- [27] TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N., "Teoria da Elasticidade", 3.ª edição Ed. Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, R.J., 1980.
- [28] AINSWORTH, M., ZHU, J.Z., CRAIG, A.W. AND ZIENKIEWICZ, O.C., "Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-posteriori Error Estimator in The Finite Element Method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 28, 2161-2174, 1989.
- [29] LYRA, P.R.M. "Uma Estratégia de Refinamento Auto-adaptativo Versão h do Método dos Elementos Finitos Aplicado a Problemas Bi-dimensionais Regidos pela Equação de Campo, Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, 1988.

- [30] LYRA, P.R.M.; SAMPAIO, P.A.B. “ Equações de Navier-Stokes Incompressíveis em Regime Permanente: Soluções Empregando um Esquema Adaptativo para Redefinição das Malhas”, *Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional*, 490-497, Belo Horizonte, M.G., Brasil, U.F.M.G., 1991.
- [31] ZIENKIEWICZ, O.C.; ZHU, J.Z.; CONG, N.G. “ Effective and Practical h-p Version Adaptive Analysis Procedures for The Finite Element Method”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 28, 879-891, 1989.

Apêndice 1

Algoritmo de Gauss-Seidel com relaxação e projeção

É o algoritmo usado para a resolução de problemas de programação quadrática com restrições da forma $a \leq u \leq b$, ou seja,

$$\min_{a \leq u \leq b} \frac{1}{2} u' K u - u' f$$

e consiste em:

1. Inicialização

(a) escolha $u^0 \in \mathbb{K} : a \leq u^0 \leq b$

(b) escolha $\omega \in (0, 2)$

2. Iteração

Repita para $k = 0, 1, 2, \dots$

para $i = 1, 2, \dots, n$ faça:

$$u_i^* = \frac{1}{K_{ii}} \left\{ f_i - \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij} u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n K_{ij} u_j^k \right\}$$
$$u_i^{k+1} = P_i \left[(1 - \omega) u_i^k + \omega u_i^* \right]$$

até que

$$\|u^{k+1} - u^k\| \leq \epsilon$$

Com as seguintes definições:

- $P_i[\alpha] = \min[b_i, \max(a_i, \alpha)]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, chamado operador de projeção sobre o intervalo $[a_i, b_i]$;
- ω é o parâmetro de relaxação do método:
 $0 < \omega < 1 \longrightarrow$ sub-relaxação
 $1 < \omega < 2 \longrightarrow$ sobre-relaxação
- ϵ é uma tolerância pré-estabelecida pelo usuário.

O critério de convergência pode ser também implementado como:

$$\frac{\|u^{k+1} - u^k\|}{\|u^k\|} \leq \epsilon$$

onde $\|\cdot\|$ denota uma norma em \mathbb{R}^n como, por exemplo:

$$\|u\|_2 = (u'u)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |u_i|$$

Observações:

1. Quando se faz $\omega = 1$ e elimina-se a operação de projeção $[P_i]$, tem-se a forma clássica do algoritmo iterativo de Gauss-Seidel utilizado para resolução do sistema de equações lineares $Ku = f$.
2. O parâmetro ω não tem uma determinação trivial “*a priori*”, sendo interessante a obtenção de um valor ótimo durante o procedimento iterativo.

Apêndice 2

O Gerador de malhas ARANHA

Nesse tópico encontra-se uma síntese sobre o funcionamento do gerador ARANHA, desenvolvido no LNCC, baseada em relatórios de pesquisa [14] e manuais de utilização [15], onde são encontradas informações mais detalhadas sobre o mesmo.

Consiste em um gerador capaz de criar malhas de elementos triangulares em domínios bidimensionais. A geração das malhas se faz através de técnicas de avanço frontal e o critério de geração se baseia em técnicas de triangularização ou também chamadas técnicas não estruturadas, devido a não necessidade de uma direção preferencial na orientação dos elementos dentro da malha. Tem-se a vantagem de um custo computacional exclusivamente ligado ao número de elementos gerados e totalmente independente da complexidade do domínio a ser gerado.

A definição do corpo pode ser feita através de contornos retos, circulares, elípticos, b-spline, etc, e é possível também a divisão dos domínios em regiões se houver necessidade.

As etapas de geração são:

i) define-se, primeiramente, o domínio a ser discretizado através de contornos e regiões como mostrado na Fig. A.1;

ii) em seguida, define-se uma malha de parâmetros, que é uma simples malha de elementos finitos triangulares que deve envolver todo o domínio. Observa-se que a malha de parâmetros pode ocupar trechos onde não serão gerados elementos mas, no entanto, deve conter todo o domínio como mostrado na Fig. A.2;

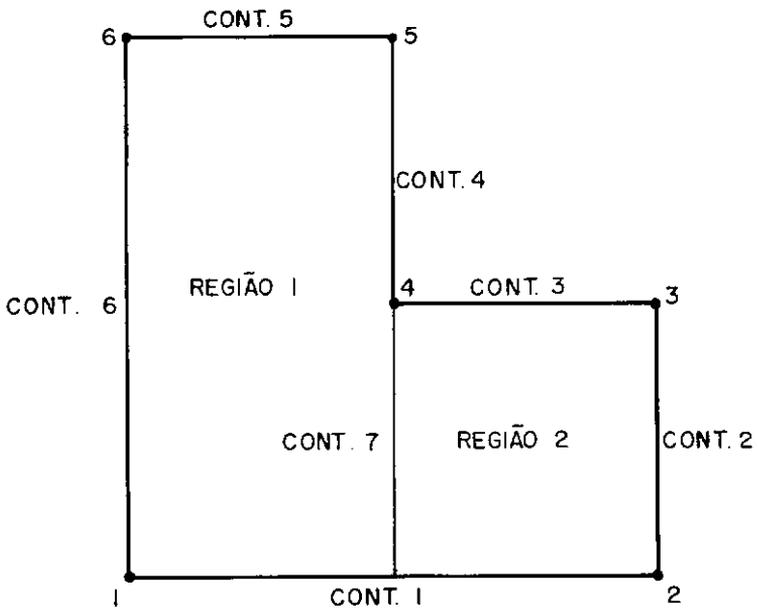


Fig. A.1

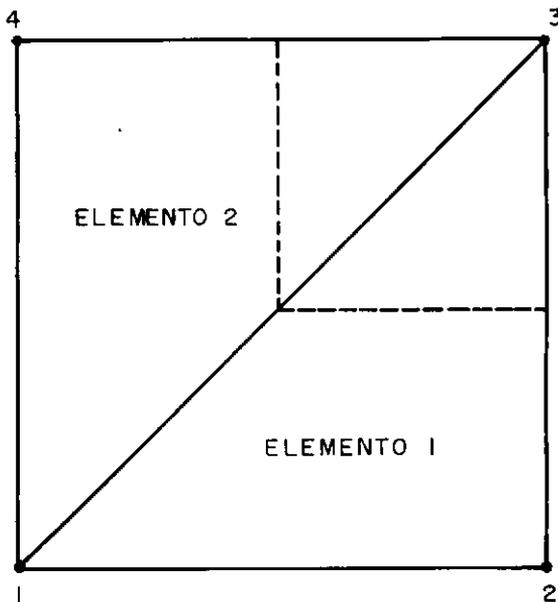


Fig. A.2

A cada nó devem ser associadas suas coordenadas, o tamanho médio de cada elemento (δ), o fator de estiramento (s), o ângulo de estiramento (α), além do número de elementos e incidência da malha de parâmetros.

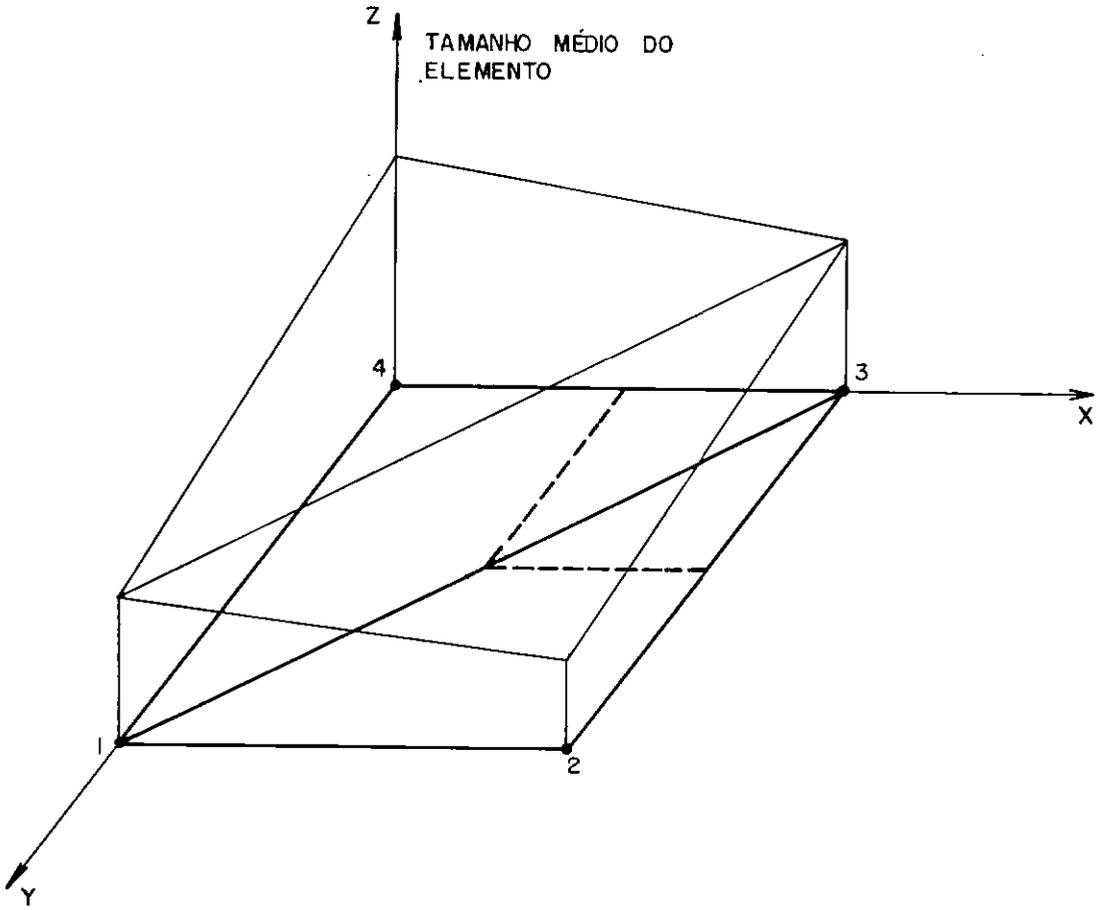


Fig. A.3

Serão gerados elementos com as características mostradas na Fig. A.4.

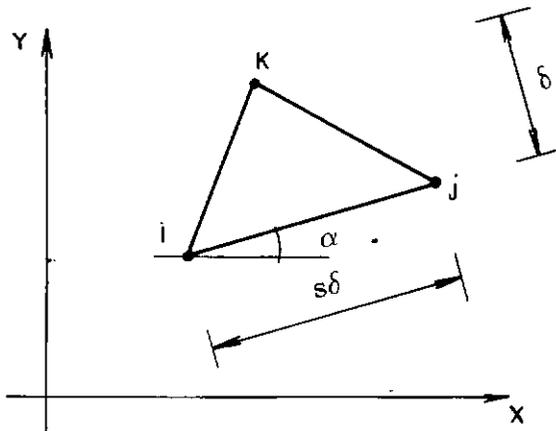


Fig. A.4

Após a geração de nós no contorno e triangularização dos elementos no domínio é possível uma regularização da malha chamada *regularização Laplaciana* com o posicionamento do nó no centro de gravidade do polígono formado pelos elementos concorrentes neste nó. Além disso é possível uma renumeração dos nós com o intuito de diminuir a largura de banda da matriz de rigidez a ser criada pelo método dos elementos finitos.

Uma das facilidades oferecidas pelo gerador são as saídas criadas, ou seja, arquivos que contêm além das coordenadas dos nós, incidência de elementos por grupos e lista de nós pertencentes a cada contorno. Graficamente, existe uma etapa executada na tela (microcomputadores e/ou estações de trabalho), com uma perfeita visualização da malha gerada e são disponíveis, também, utilitários integrados, na mesma linha do ARANHA (Pregraf2, Promalha, Campovet, etc), capazes de desenhar as malhas geradas, deformadas, trechos com efeito *zoom*, visualização da numeração dos nós e elementos, etc.