


ANÁLISE ESTRUTURAL DE DUTOS SUBMARINOS DURANTE A OPERAÇÃO
DE LANÇAMENTO

Diana Wainer Segal

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS
PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM
ENGENHARIA CIVIL.

Aprovada por:



Agustin Juan Ferrante, Ph. D.
(Presidente)



Nelson Francisco F. Ebecken, D.Sc.



Luiz Landau, D.Sc.



Ney Augusto Dumont, Dr. Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1992

SEGAL, DIANA WAINER

Análise Estrutural de Dutos Submarinos Durante a
Operação de Lançamento [Rio de Janeiro] 1992.

XIX, 241 p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia
Civil, 1992).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1 - Análise Estrutural Estática e Dinâmica de Dutos
Submarinos Durante o Lançamento.

I - COPPE/UFRJ II - Título (série).

Aos meus pais, Samuel e Mercedes
e ao meu esposo, Marcelo

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Agustin Juan Ferrante pela objetiva e segura orientação, apoio e estímulo.

A minha família pelo constante apoio.

Aos colegas do Programa de Engenharia Civil da COPPE pelo estímulo e amizade.

Aos Professores Benjamin Ernani Diaz e Eduardo Christo da Silveira Thomaz pelo incentivo.

Ao Salvador Assad pela impressão deste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UF RJ como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.).

ANÁLISE ESTRUTURAL DE DUTOS SUBMARINOS DURANTE A OPERAÇÃO
DE LANÇAMENTO

Diana Wainer Segal

Abril de 1992

Orientador: Agustin Juan Ferrante

Programa : Engenharia Civil

Neste trabalho, o problema estrutural envolvido na operação do lançamento de dutos submarinos é estudado.

Apresenta-se uma formulação de elemento finito para a análise não linear tridimensional estática e dinâmica de dutos submarinos durante o lançamento, considerando-se diversas características específicas dessa estrutura, incluindo-se a dedução das matrizes dos elementos.

Estuda-se a influência do peso próprio, empuxo e da força de tração, aplicada pela máquina tracionadora, sobre o comportamento estrutural do duto. A teoria adotada e o cálculo de forças de onda e corrente são também apresentados.

Descrevem-se detalhadamente os procedimentos numéricos de resolução do problema e os correspondentes algoritmos implementados nos programas computacionais desenvolvidos para os estudos estático e dinâmico.

Analisam-se diversos casos de lançamento de dutos submarinos sujeitos ao peso próprio, empuxo, deslocamentos impostos e às forças de onda e corrente. Resultados obtidos são comparados a outros existentes. Estudam-se também as influências da força de tração, da curvatura do *stinger* e das constantes de mola do solo do fundo do mar.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.).

STRUCTURAL ANALYSIS OF SUBMARINE PIPELINES DURING THE LAYING OPERATION

Diana Wainer Segal

April, 1992

Thesis Superior: Augustin Juan Ferrante

Department : Civil Engineering

In this work, the structural problem involved in the submarine pipelaying operation is studied.

A finite element formulation is presented for the dynamic and estatic nonlinear three-dimensional analysis of submarine pipelaying, considering many specific characteristics of this structure, including the deduction of the element matrices.

The influence of weight, upthrust, and tension applied by the tension machine on the pipeline behavior are studied. The theory adopted and the calculation of current and wave forces are also presented.

The numerical methods for the solution of the problem and the corresponding algorithms implemented in the developed programs for the static and dynamic studies are fully described.

Many cases of laying underwater pipelines subjected to their own weight, upthrust, imposed

displacements and wave and current forces are analyzed. Results obtained are compared to already existing others. The influence of tension, stinger curvature and spring coefficients of the ocean floor are also studied.

Í N D I C E

	PÁG.
. Lista de figuras	xi
. Lista de tabelas	xiv
. Simbologia	xvi
CAPÍTULO I	1
I.1) INTRODUÇÃO	1
I.2) O LANÇAMENTO DE DUTOS SUBMARINOS	7
I.3) PROCEDIMENTOS DE LANÇAMENTO	9
I.4) REVISÃO DA LITERATURA	16
CAPÍTULO II	20
II.1) OS PROBLEMAS ESTRUTURAIS	20
II.2) AS ANÁLISES ESTÁTICA E DINÂMICA	25
II.3) OUTROS PROBLEMAS SEMELHANTES	27
II.4) PROGRAMAS DISPONÍVEIS	32
CAPÍTULO III	33
III.1) A FORMULAÇÃO DO ELEMENTO	33
III.2) DEDUÇÃO DAS MATRIZES CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO	37
III.3) CARGAS ATUANTES	64
CAPÍTULO IV	73
IV.1) MÉTODOS DE RESOLUÇÃO	73
IV.2) ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR	73
IV.3) ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR NO DOMÍNIO DO TEMPO	78

	PÁG.
IV.4) PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS DE SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO	87
CAPÍTULO V	89
V.1) IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	89
V.2) APOIOS ESPECIAIS	89
V.3) CÁLCULO DAS FORÇAS DE ONDA E DE CORRENTE	91
V.4) CÁLCULO DO EMPUXO	92
V.5) ALGORÍTMOS IMPLEMENTADOS	93
CAPÍTULO VI	101
VI.1) EXEMPLOS	101
VI.2) ANÁLISE ESTÁTICA DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 30 m	103
VI.3) ANÁLISES ESTÁTICAS DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 100 m	114
VI.4) ANÁLISE DINÂMICA DE VIGA COM GRANDES DESLOCAMENTOS	157
VI.5) ANÁLISES DINÂMICAS DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 100 m	160
VI.6) ANÁLISE DOS RESULTADOS	164
CAPÍTULO VII	171
VII.1) CONCLUSÕES	171
VII.2) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	177
APÊNDICE I - DEDUÇÕES E TERMOS DAS MATRIZES DO ELEMENTO	185
APÊNDICE II - TEORIA DE ONDA	230

Lista de figuras

	PÁG.
Figura 1 - Método de lançamento com barcaça e stinger	4
Figura 2 - Barcaça de lançamento - estações de trabalho	5
Figura 3 - Lançamento com barcaça - configuração deformada típica do duto	9
Figura 4 - Método de lançamento com duto enrolado em carretel	10
Figura 5 - Método de arraste	12
Figura 6 - Barcaça de lançamento - armazenamento e alimentação de tubos	13
Figura 7 - Barcaças de lançamento com rampas lateral e central	14
Figura 8 - Lançamento com barcaça - stingers reto e articulado	15
Figura 9 - Lançamento com barcaça sem uso de stinger	27
Figura 10 - Término de lançamento ou abandono	28
Figura 11 - Içamento lateral e interligação de dutos	29
Figura 12 - Método de lançamento vertical	30
Figura 13 - Condição típica de um riser	31
Figura 14 - Posição deformada de um elemento genérico AB	36
Figura 15 - Coordenadas de Lagrange Atualizadas - plano XY	39
Figura 16 - Posição deformada de um elemento genérico AB - plano XZ	41

Figura 17 - Elemento finito de pórtico espacial - numeração dos graus de liberdade	49
Figura 18 - Elemento em uma direção qualquer - rotações dos eixos	58
Figura 19 - Elemento vertical - rotações dos eixos ..	59
Figura 20 - Onda no plano $xvzv$	231
Figura 21 - Características da onda - plano $xvzv$	236
Figura 22 - Condições de contorno - teoria linear de Airy	237
Figura 23 - Métodos incrementais linear e não linear	74
Figura 24 - Esquema de configuração deformada da tubulação	106
Figura 25 - Deslocamentos no plano XZ - Lâmina d'água de 30 m	111
Figura 26 - Tensões axiais combinadas - Lâmina d'água de 30 m	112
Figura 27 - Resultados dos programas da tese e "Pipeline" nos gráficos acima e abaixo, respectivamente	113
Figura 28 - Stinger de lançamento - elevação e planta	116
Figura 29 - Deslocamentos no plano XZ - Lâmina d'água de 100 m	119
Figura 30 - Tensões axiais combinadas - Lâmina d'água de 100 m	120
Figura 31 - Resultados dos programas da tese e comercial nos gráficos acima e abaixo, respectivamente	121

Figura 32 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com corrente	137
	PÁG.
Figura 33 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com onda	143
Figura 34 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com corrente e deslocamentos impostos	147
Figura 35 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com onda e deslocamentos impostos	151
Figura 36 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com onda, corrente e deslocamentos impostos	155
Figura 37 - Esquema estrutural da viga	158
Figura 38 - Respostas Dinâmicas - viga sob carga uniformemente distribuída	159
Figura 39 - Variação do período da onda e correspondentes fatores de amplificação dinâmica	162

Lista de tabelas

Tabela 1	- Análise estática - Deslocamentos no plano XZ - Lâmina d'água de 30 m	105
Tabela 2	- Análise estática em lâmina d'água de 30 m - Tensões axiais de extensão e de flexão	107
Tabela 3	- Análise estática em lâmina d'água de 30 m - Tensões axiais combinadas - Valores máximos	109
Tabela 4	- Análise estática - Deslocamentos no plano XZ - lâmina d'água de 100 m	117
Tabela 5	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Tensões axiais combinadas - valores máximos	118
Tabela 6	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Apoios	122
Tabela 7	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Variação da força de tração	124
Tabela 8	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Variação da curvatura do stinger	127
Tabela 9	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Apoios - Variação da constante de mola vertical do solo	129
Tabela 10	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Introdução de deslocamentos prescritos	130
Tabela 11	- Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Corrente na direção Y	133

	pÁa.
Tabela 12 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Corrente na direção X	135
Tabela 13 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Onda na direção Y	139
Tabela 14 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Onda na direção X	141
Tabela 15 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - deslocamentos prescritos e correntes na direção Y	145
Tabela 16 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - deslocamentos prescritos e ondas na direção Y	149
Tabela 17 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - deslocamentos prescritos, correntes e ondas na direção Y	153
Tabela 18 - Deslocamentos na direção Y obtidos de análises estáticas em lâmina d'água de 100 m	156
Tabela 19 - Análise dinâmica em lâmina d'água de 100 m - influência do período da onda na amplificação dinâmica	161

Simbologia

$[K]$	matriz de rigidez
\vec{F}	vetor de forças externas nodais
\vec{U}	vetor de deslocamentos nodais
W_e	trabalho das forças externas
W_i	trabalho das forças internas
x, y, z	eixos do sistema de referência local do elemento
X, Y, Z	eixos do sistema de referência global
u, v, w	deslocamentos nas direções x, y e z , no elemento
C^i	configuração final do elemento no incremento (i)
C^{i+1}	configuração final do elemento no incremento $(i+1)$
$u_1, v_1, w_1, \theta_1, \psi_1, \delta_1$	deslocamentos nodais do elemento na extremidade inicial
$u_2, v_2, w_2, \theta_2, \psi_2, \delta_2$	deslocamentos nodais do elemento na extremidade final
ϵ	deformação específica axial
A	área da seção transversal
τ	tensão axial no elemento
L	comprimento do elemento
E	módulo de elasticidade longitudinal
I_y	momento de inércia em relação ao eixo y
I_z	momento de inércia em relação ao eixo z
I_{yz}	produto de inércia em relação aos eixos y e z
p	força axial
$\vec{N}, \vec{M}, \vec{F}, \vec{H}$	vetores de funções de interpolação que relacionam deslocamentos no interior dos elementos com deslocamentos nodais
$[R]$	matriz de rotação
g	aceleração devida à gravidade

- d profundidade do fundo do mar relativa ao nível de águas tranquilas
- ρ massa específica
- x_w, y_w, z_w coordenadas do sistema de referência da onda
- U_w, V_w, W_w velocidades da partícula fluidas nas direções x_w, y_w e z_w
- η deslocamento vertical da superfície do mar
- t instante qualquer de tempo
- a amplitude da onda
- H altura da onda
- ω frequência angular de oscilação
- k número de onda
- \emptyset função potencial de velocidades
- β ângulo da direção de incidência da onda com o eixo X global
- U_{cor}, V_{cor} velocidades de corrente nas direções dos eixos X e Y globais
- D Diâmetro
- C_D coeficiente de arraste
- C_M coeficiente de inércia
- v_n e a_n componentes normais ao elemento da velocidade e da aceleração da partícula fluida
- Re número de Reynolds
- ν viscosidade cinemática do fluido
- F_x, F_y, F_z componentes nas direções dos eixos globais X, Y e Z da força calculada pela fórmula de Morison
- [M] matriz de massa
- [C] matriz de amortecimento
- Δt intervalo de tempo
- ξ_1, ξ_2 parâmetros de amortecimento crítico

$\vec{R}_{t + \Delta t}$	vetor de cargas nodais externas no instante $(t + \Delta t)$
$\dot{\vec{U}}$	vetor de velocidades nodais
$\ddot{\vec{U}}$	vetor de acelerações nodais
T_n	período natural da estrutura
α, δ	parâmetros do método de Newmark
T	intervalo total de estudo pela análise dinâmica

Convenção adotada

[M]	→ M : matriz
\vec{V}	→ V : vetor
E	→ E : escalar

Sub-índices

\emptyset	inicial
r	incremental
a	acréscimo
L	linear
G	geométrico
xy	plano formado pelos eixos locais x e y
xz	plano formado pelos eixos locais x e z
s	secante
T	tangente
MOL	apoio elástico
eq	equivalente
w	água do mar
n	normal
D	arraste
m	inércia
t	no instante de tempo t
t + Δt	no instante de tempo t + Δt

Superíndices

i	incremento
e	elemento
o	onda
cor	corrente
T	transposto
L	local
G	Global
st	estrutura
k	iteração
ó	estado de tensões

CAPÍTULO I

I.1) INTRODUÇÃO

A instalação de sistemas de escoamento de hidrocarbonetos em águas cada vez mais profundas devida à crescente demanda de petróleo, exige o desenvolvimento de uma tecnologia avançada e de métodos analíticos que permitam o aproveitamento completo dos benefícios desta tecnologia.

Dutos submarinos são um dos meios mais econômicos de transporte de óleo e gás em ambiente marinho. No entanto, se não houver soluções confiáveis e eficientes que garantam a segurança e integridade da estrutura, o rompimento da tubulação significará alto capital e tempo perdidos.

Para a instalação de linhas submarinas, a análise estrutural do duto deve ser feita durante a operação do lançamento e após a tubulação estar assente no terreno do fundo do mar. Na presente tese, concentramos nosso estudo no problema do lançamento.

Operações de lançamento devem ser abandonadas em condições ambientais severas. No entanto, se o duto é abandonado precocemente, perde-se tempo e elevam-se os custos. Por outro lado, demorando-se para abandoná-lo em condições adversas, causam-se excessivas tensões e deformações e até o colapso da estrutura. Assim, é essencial simular condições operacionais seguras e determinar condições de abandono do duto.

Os principais métodos de lançamento podem ser classificados em:

- método com duto enrolado em carretel ("Reel Method");
- método de arraste ("Pull Method");
- método de lançamento vertical ("J. Lay");
- método com barcaça de lançamento ("S. Lay" ou "Lay Barge Method").

O método com duto enrolado em carretel consiste em linhas gerais no enrolamento do duto em um carretel e seu lançamento através de uma embarcação que possua um dispositivo para retificar o duto. No método de arraste, o duto é arrastado pelo fundo, junto ao fundo, a meia água ou na superfície até o local da instalação. O método de lançamento vertical envolve o lançamento da tubulação a partir de uma posição vertical, ou próxima à vertical, sendo especial para águas profundas.

O método com barcaça de lançamento consiste na fabricação do duto a bordo da balsa, através da soldagem dos tubos e no lançamento do duto ao mar, à medida que a barcaça se desloca com auxílio de âncoras. As principais fases de fabricação de dutos são: - o armazenamento dos tubos; alimentação de tubos; o acoplamento; a soldagem; a inspeção radiográfica e a inspeção após lançamento. Este método é largamente utilizado por ser praticamente viável para qualquer diâmetro, por admitir ser lançado em grandes profundidades, admitir tubos com revestimento de concreto e não ter limitação quanto ao comprimento do duto a ser lançado.

Na presente tese, daremos enfoque ao método de lançamento com barcaça ("S. Lay" ou "Lay Barge"), a qual

possui rampa de lançamento e stinger (estrutura acoplada à rampa para diminuir o vão livre do duto). O duto durante o lançamento, assume uma configuração em "S", composta de uma curva na saída da balsa ("over bend") e outra inversa, em seguida ("sag bend"). A figura 1 mostra uma situação típica dessa estrutura. Para reduzir as tensões axiais de flexão no duto devidas ao peso próprio e às demais cargas ambientais a que ele está sujeito e evitar o escoamento do material do tubo e colapso da tubulação, traciona-se o duto através de máquina tracionadora existente na barça. Com uso de máquinas de tração e de stingers curvos (mais curtos que os retos), possibilita-se o lançamento em águas mais profundas. Na figura 2, podem ser vistos alguns detalhes de uma barça de lançamento.

Figura 1 - Método de lançamento com barcaça e stinger.

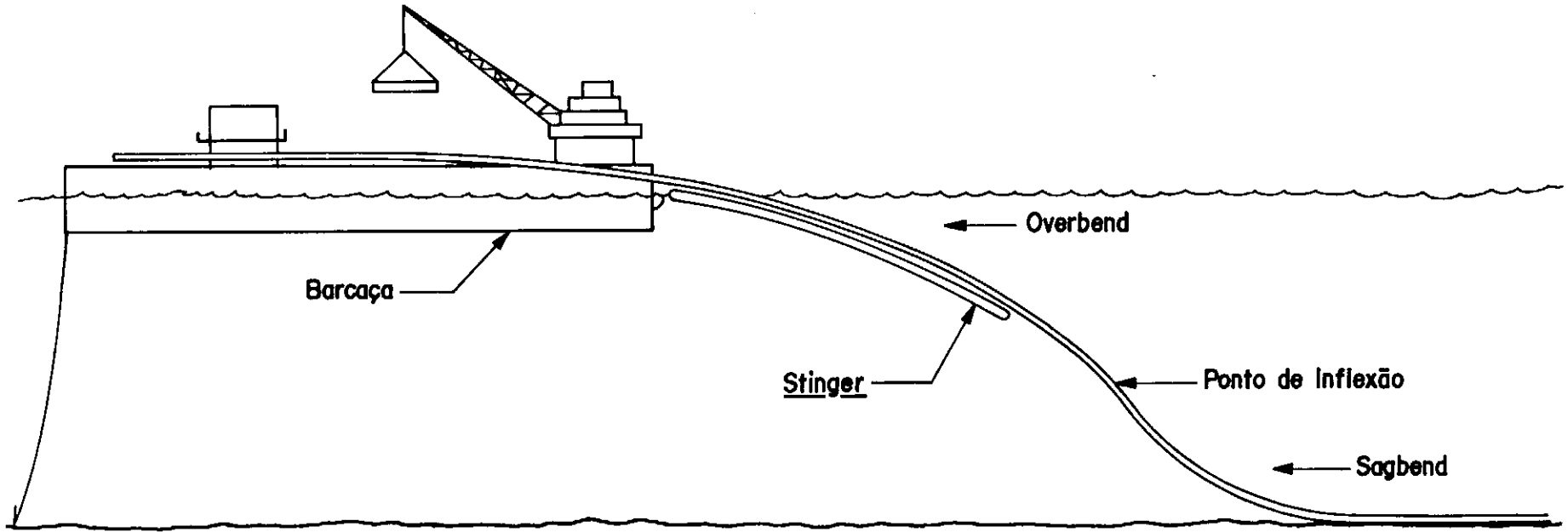
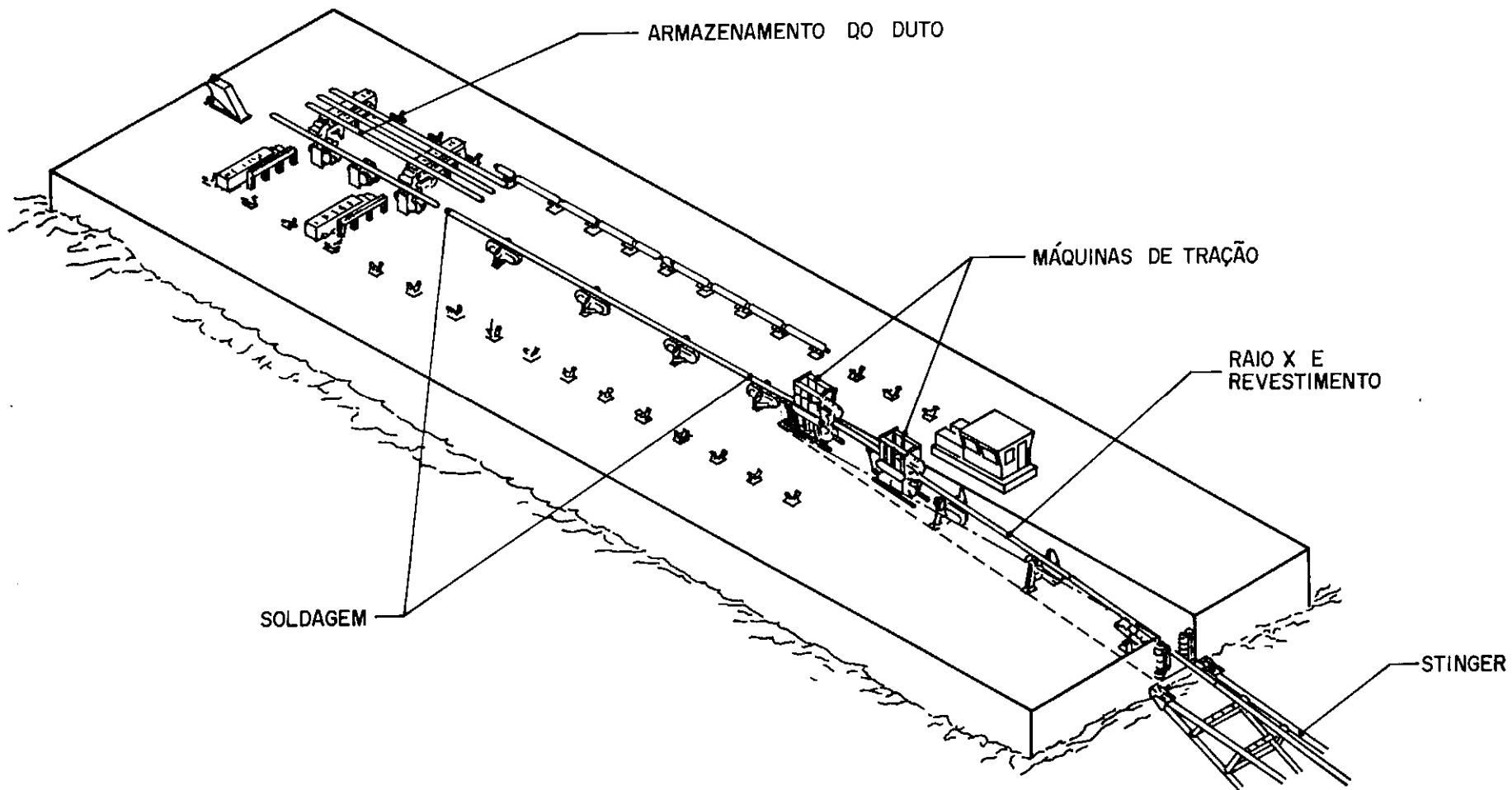


Figura 2 - Barcaça de lançamento - estações de trabalho.



O duto durante o lançamento é submetido a uma grande variedade de ações ambientais, como por exemplo, o peso próprio, o empuxo, as forças de onda e de corrente. Ele é apoiado pelo stinger e pelo terreno do fundo do mar, apresentando um longo comprimento sem apoios. Sobre o duto podem também atuar deslocamentos impostos pela barcaça. Assim, para se prever seu comportamento, que pode ser estático ou dinâmico, é necessário se efetuar uma análise complexa, onde se escolham um modelo matemático realístico e um método numérico apropriado para o problema.

O que caracteriza a análise de dutos submarinos durante o lançamento são os efeitos não lineares inerentes ao problema. As principais fontes de não linearidades são: - a não linearidade geométrica devida a grandes deslocamentos em presença de forças axiais; a não linearidade dos apoios e as interações fluido-estrutura resultantes de forças viscosas. A teoria de onda utilizada no presente trabalho é a linear de Airy e portanto não se constitui em fator de não linearidade na resposta da estrutura.

Para análises estática e dinâmica do problema não linear, tridimensional do lançamento, utiliza-se o método dos elementos finitos devido a sua eficiência e facilidade de implementação. O elemento finito adotado, de pórtico espacial com não linearidade geométrica, tem sua formulação desenvolvida no capítulo III. Na análise estática não linear, aplica-se o método de resolução por etapas de carregamento, incremental, com ou sem iterações de Newton Raphson. A análise dinâmica não linear é feita no domínio do tempo, pelo método implícito de integração

direta de Newmark, envolvendo-se modificações adicionais pois a força hidrodinâmica, calculada pela equação de Morison, não depende somente do instante de tempo t , mas da velocidade relativa entre o fluido e a estrutura. Iterações de Newton Raphson são essenciais nesta análise.

Para tratar do problema de contato do duto com seus apoios (stinger e terreno do fundo do mar), desenvolve-se um método iterativo que permite simular diversas condições de contorno possíveis do problema.

Este trabalho, portanto, tem como principal objetivo permitir o estudo e esclarecimento dos diversos aspectos envolvidos no problema estrutural do lançamento de dutos submarinos. Para isso são desenvolvidos programas computacionais de análise estática e dinâmica onde são implementados os procedimentos numéricos de resolução adequados bem como características específicas do problema.

Através dessas ferramentas computacionais, pode-se simular uma grande variedade de situações de lançamentos, variando-se os diversos parâmetros que influem na análise estrutural.

I.2) O LANÇAMENTO DE DUTOS SUBMARINOS

A instalação de sistemas de escoamento de hidrocarbonetos através de dutos submarinos implica fabricar o duto na superfície, através da soldagem dos tubos a bordo da balsa de lançamento ou em um canteiro de terra e lançá-lo ao mar, segundo uma diretriz pré-estabelecida.

Um método amplamente utilizado no lançamento de dutos submarinos é o da "Balsa de Lançamento" ("Lay Barge" ou "S. Lay"). Consiste no deslizamento do duto para o interior da água, à medida que a embarcação se desloca com auxílio de âncoras.

Como já foi mencionado na introdução, o duto, durante o lançamento, dependendo da profundidade da água, apresenta uma forma de "S" composta de uma curva na saída da balsa ("over bend") e outra inversa logo a seguir ("sag bend"), representada na figura 3.

Para evitar a ocorrência de excessivas deformações nas regiões de "sag bend" e de "over bend", as balsas de lançamento dispõem de equipamento para manter o duto tracionado durante a fase de lançamento ("tension machine"). Em maiores lâminas d'água, isto normalmente não é suficiente, exigindo que o número de apoios ao duto seja aumentado. Para tanto, acopla-se à rampa de lançamento, na popa da balsa, o "stinger" : - estrutura que pode ser constituída de diversas seções articuladas entre si, dependendo da lâmina d'água e do peso do duto a ser lançado. Sua posição relativa à superfície do mar pode ser garantida através da introdução de maior ou menor quantidade de ar comprimido em tanques de flutuação que nele se podem acoplar. A seleção apropriada da geometria do stinger, bem como da tensão de tração a ser aplicada ao duto, contribuem para que as tensões máximas atuantes no duto não ultrapassem as tensões admissíveis do material que o constitui. A incapacidade de manter configurações geométricas adequadas no duto, durante o lançamento, pode causar colapso da estrutura por instabilidade e total

perda do sistema de escoamento.

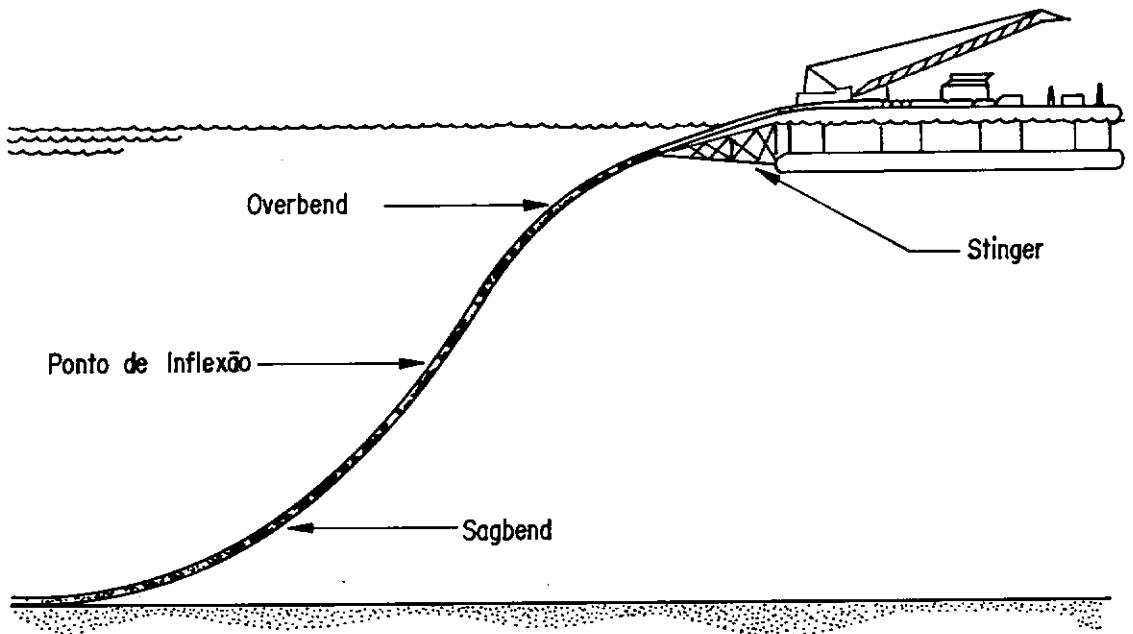


Figura 3 - Lançamento com barcaça - configuração deformada típica do duto.

I.3) PROCEDIMENTOS DE LANÇAMENTO

No passado, quando a instalação de sistemas de escoamento de hidrocarbonetos era executada principalmente em águas rasas, as técnicas utilizadas para o lançamento de dutos em ambiente marinho eram simples e satisfatórias. Atualmente, desenvolvem-se técnicas mais sofisticadas no procedimento de lançamento de dutos, tendo em vista que esta operação se realiza em águas cada vez mais profundas e em ambientes marinhos mais hostis.

Os principais métodos de lançamento de dutos submarinos são apresentados a seguir:

1) Lançamento com o duto enrolado em carretel ("Reel barge").

Consiste na fabricação do duto em um canteiro de obras em terra, enrolamento do mesmo em um carretel e lançamento através de uma embarcação que possua um dispositivo para retificar o duto, à medida em que o mesmo é desenrolado do carretel. A figura 4 mostra uma situação típica deste método.

Este procedimento pode ser utilizado em águas profundas e tem a vantagem de todo o serviço de soldagem e revestimento ser feito em terra. Por outro lado, limita-se a tubos com diâmetros de até cerca de dezesseis polegadas; a tubulação não pode receber revestimento de concreto e tubulações mais longas devem ser lançadas por trechos, havendo necessidade de ser feita posterior conexão.

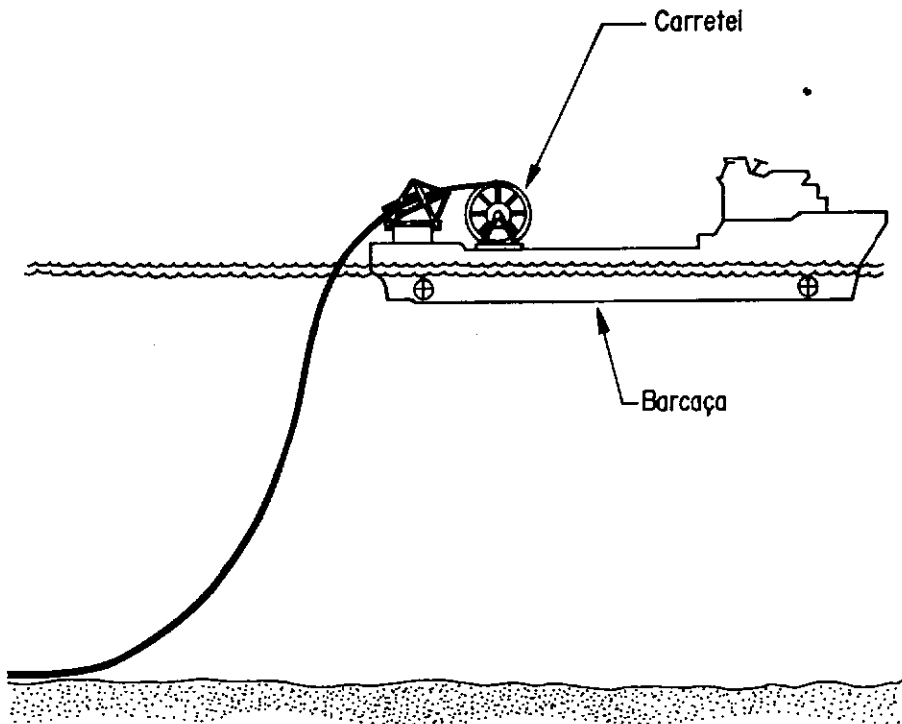


Figura 4 - Método de lançamento com duto enrolado em carretel.

2) Arraste ("Pull")

Consiste na fabricação do duto em um canteiro em terra ou numa balsa, e o arraste do mesmo até o local da instalação. O duto pode ser arrastado pelo fundo, junto ao fundo, a meia água ou na superfície, dependendo de variáveis, tais como, topografia do leito marinho, correntezas de superfície, zona de influência das ondas, congestionamento do local, etc...

Nos métodos de arraste junto ao fundo e a meia água, a manutenção do duto a uma determinada cota do fundo do mar é obtida através de uma relação conveniente entre o empuxo e o peso da tubulação e de correntes nela presas.

As vantagens do método de arraste estão associadas à montagem do duto em terra ou em água rasa e à utilização de rebocadores para a instalação.

Problemas associados a este método são o rompimento do cabo de reboque e o dano da tubulação durante o arraste.

A figura 5 mostra as quatro possibilidades deste procedimento mencionadas.

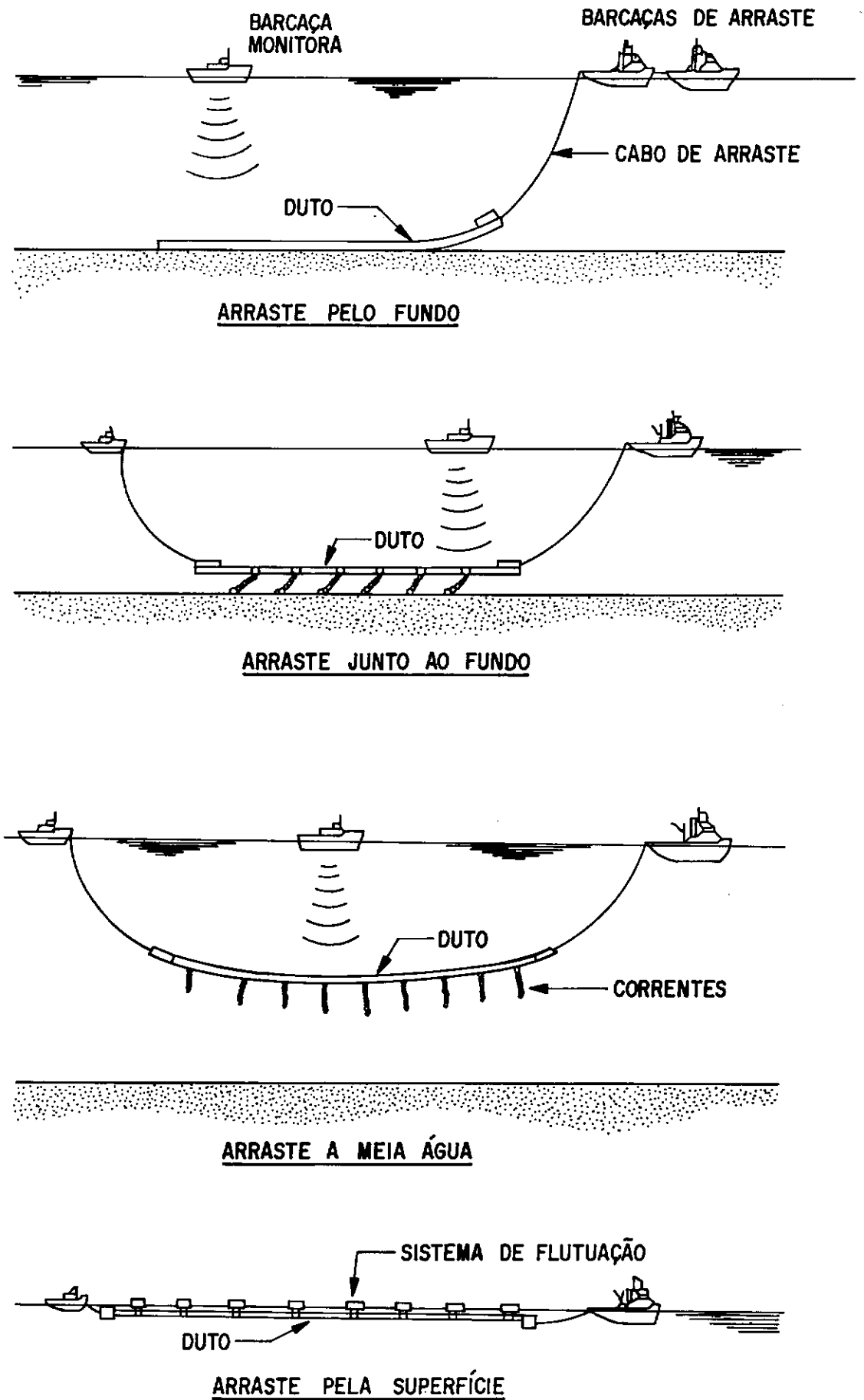


Figura 5 - Método de arraste.

3) Balsa de lançamento ("Lay Barge" ou "S. Lay")

Como já foi mencionado, consiste na fabricação do duto a bordo da balsa através da soldagem dos tubos, à medida que esta se desloca com o auxílio de âncoras, lançando-se o duto ao fundo do mar.

As fases de fabricação do duto são:

- a) Armazenamento dos tubos no convés da barcaça;
- b) Colocação de tubos na esteira de alimentação através de guindaste;
- c) Acoplamento;
- d) Soldagem;
- e) Inspeção radiográfica do cordão da solda;
- f) Revestimento da junta;
- g) Inspeção após lançamento.

A figura 6 apresenta um esquema da barcaça correspondente às etapas a e b de fabricação descritas acima.

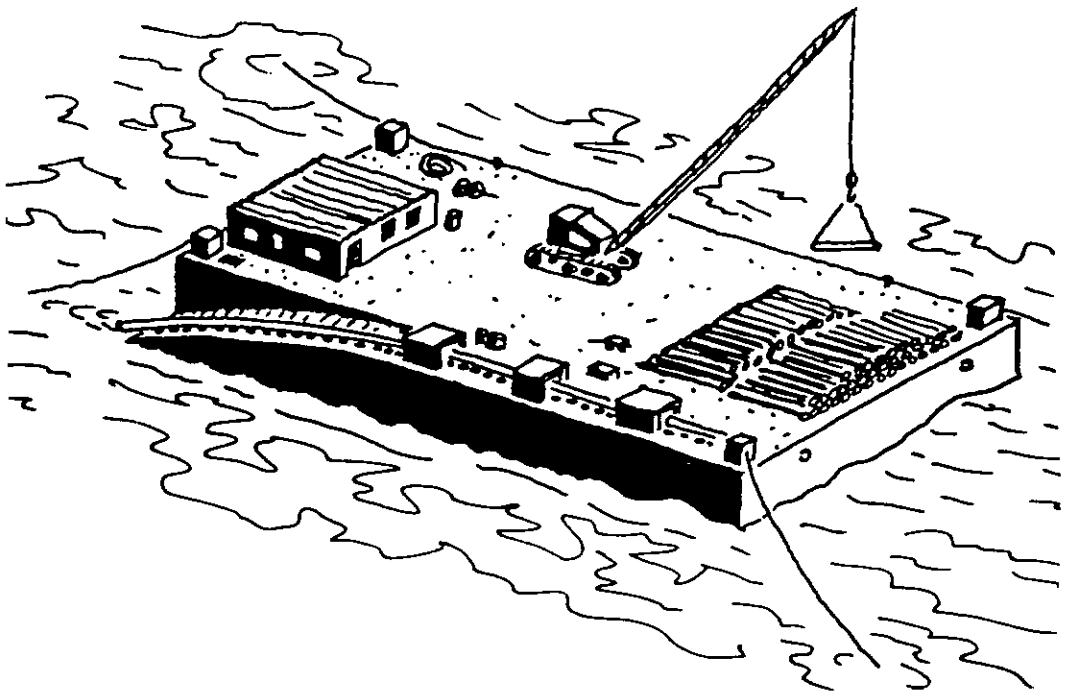


Figura 6 - Barcaça de lançamento - armazenamento e alimentação de tubos.

Os principais equipamentos utilizados são:

. **Embarcação de lançamento com rampa lateral ou central:**

- se move com auxílio de âncoras;
- a rampa de fabricação de dutos é constituída de esteira de alimentação de tubos, cabines de soldagem, cabine de radiografia e cabine de revestimento;
- possui guindastes para manuseio dos tubos;
- possui equipamento para manter o duto tracionado durante o lançamento ("tension machine");
- é equipada com guincho para abandono e recuperação do duto;
- dispõe de alojamento e cozinha.

A figura 7 apresenta esquemas de barcaças com rampa lateral e central.

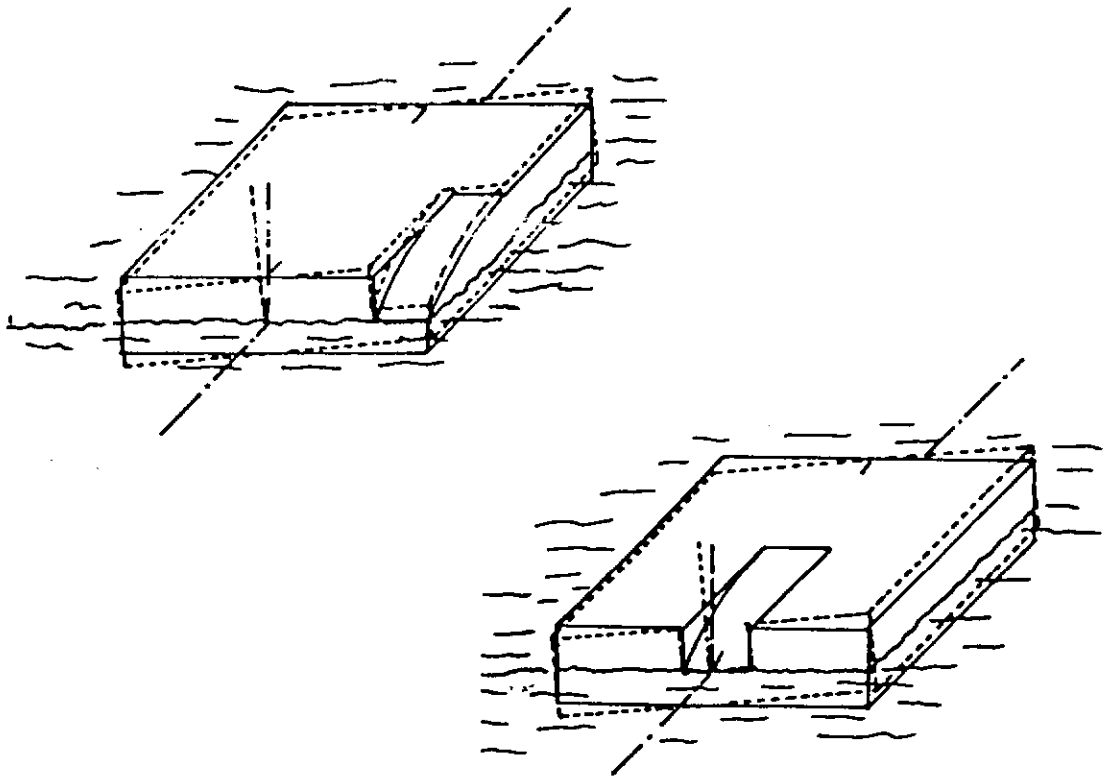


Figura 7 - Barcaças de lançamento com rampas lateral e central.

. Stinger

Estrutura que é acoplada à rampa de lançamento com objetivo de aumentar o número de apoios ao duto.

Pode apresentar as seguintes configurações: reto, curvo com determinado raio de curvatura e articulado.

O stinger reto é limitado normalmente a lançamento em águas rasas. O stinger articulado consiste de diversas seções articuladas entre si, dependendo da lâmina d'água e do peso do duto a ser lançado. O stinger curvo é um caso especial do stinger articulado com geometria específica pré-fixada, normalmente utilizado para uma determinada profundidade de água do mar, não podendo ser utilizado em qualquer outra. A figura 8 mostra exemplos de lançamento com stingers reto e articulado.

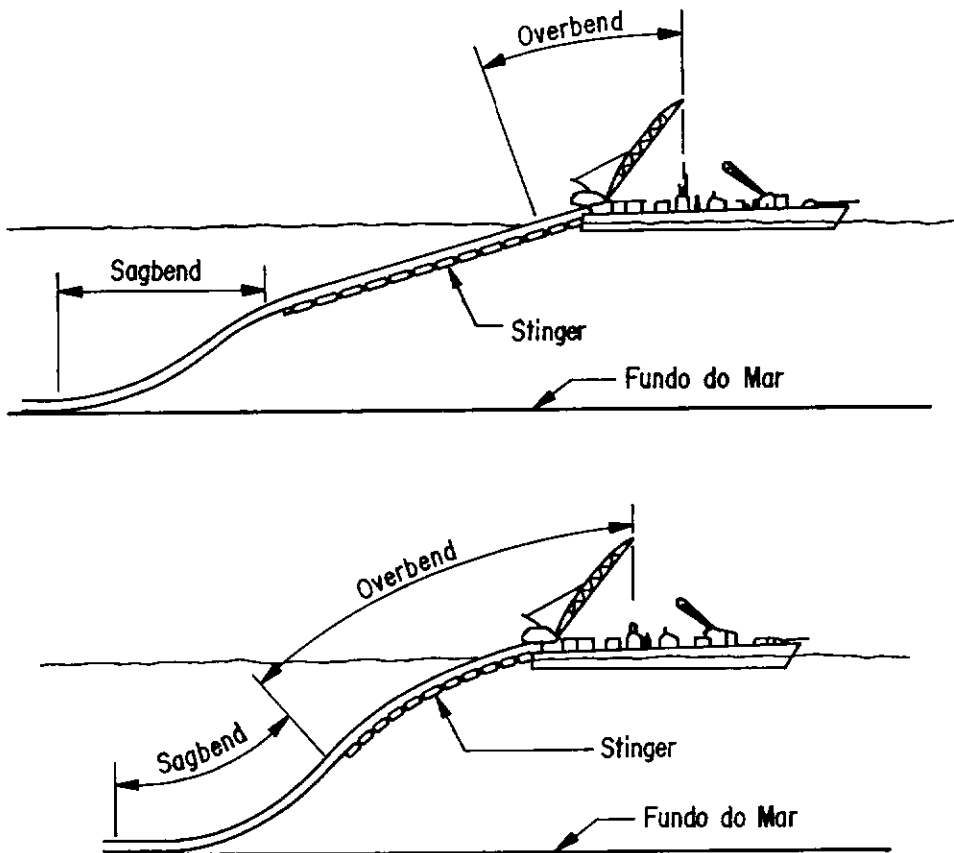


Figura 8 - Lançamento com barcaça - stingers reto e articulado.

Este método é largamente utilizado no lançamento de dutos submarinos e tem as vantagens de ser praticamente viável para qualquer diâmetro, poder ser lançado em grandes profundidades, admitir tubos revestidos com concreto e não ter limitação quanto ao comprimento do duto a ser lançado.

I.4) REVISÃO DA LITERATURA

Diversos métodos numéricos vêm sendo desenvolvidos para solucionar o problema do lançamento de dutos submarinos. A formulação de elementos finitos tem sido utilizada por vários pesquisadores devido as suas características de grande generalidade e precisão nos resultados.

Dixon (1968) publicou um trabalho onde propôs o uso da catenária enrijecida em problemas de lançamento de dutos. A sua geometria é similar à da catenária comum, exceto que as condições de extremidade são modificadas para permitirem a aplicação de condições de contorno de momento, enquanto que a catenária comum não apresenta rigidez à flexão.

Powers e Finn (1969) analisaram o problema estático de pequenos deslocamentos em dutos submarinos durante o lançamento através do método de elementos finitos. Em sua análise, as condições de contorno assumidas inicialmente para o terreno do fundo do mar são modificadas num

procedimento iterativo até que as condições de contorno na barcaça sejam satisfeitas.

Ovune e Mallareddy (1970) resolveram o problema estático de pequenos deslocamentos tridimensionais em dutos submarinos na fase de lançamento através do método de elementos finitos.

Wilkins (1970) incluiu a curvatura não linear no método de diferenças finitas em modelo estático bidimensional para a análise estrutural de dutos submarinos durante a fase de lançamento.

Hall (1975) publicou um trabalho onde estudou o problema estático e dinâmico de um duto submarino sujeito à tensão axial e com um trecho apoiado em uma fundação elástica. Seu trabalho serviu de base para o programa "Sag", para análise estrutural estática e dinâmica de dutos durante o lançamento.

Gnone (1975 e 1976) comparou dados experimentais com resultados numéricos obtidos de um modelo tridimensional que considera a não linearidade geométrica dependente das tensões axiais, desprezando as demais não linearidades na análise estática e dinâmica de dutos em águas profundas.

Larsen e Kavlie (1978) trataram do problema estático bidimensional de pequenos deslocamentos em dutos submarinos durante a fase de lançamento, através de minimização da energia potencial. Eles desprezaram a rigidez devida à força axial e se concentraram em resolver as dificuldades relativas à modelagem do terreno do fundo do mar e do stinger através de molas.

Konuk (1982) desenvolveu um modelo estático, tridimensional, não linear para dutos durante o

lançamento. Aspectos de extensibilidade, implementação de condições de contorno e influência de cargas hidrodinâmicas nos deslocamentos não foram discutidos.

Suzuki e Jingu (1982) utilizaram um modelo bidimensional, de pequenos deslocamentos e realizaram uma análise dinâmica no domínio da frequência. Compararam os resultados numéricos obtidos com dados experimentais de dutos submarinos durante o lançamento.

Bryndum, Colquhoun e Verway (1982) utilizaram o método de diferenças finitas para resolver um problema dinâmico linearizado. Adotaram determinados coeficientes para descrever as restrições impostas ao duto pelo terreno do fundo do mar e pelo stinger.

McNamara e Lane (1984) apresentaram um método de análise linear e não linear, estático e dinâmico no domínio do tempo, para sistemas offshore, baseado no Método dos Elementos Finitos, utilizando coordenadas locais que acompanham o elemento (que os autores denominaram coordenadas convectivas) levando em conta grandes deslocamentos.

Oliver e Onate (1985 e 1986) abordaram a análise estática, bidimensional, não linear geométrica, através de uma formulação de elementos finitos de arco, Lagrangeana total. Para a resolução do problema de contato entre o duto e o terreno do fundo do mar, adotaram um método numérico iterativo no qual as condições de contorno eram impostas através de deslocamentos nodais prescritos.

Bernitsas e Vlahopoulos (1990) estudaram o problema estático, tridimensional de grandes deslocamentos. O duto é modelado como uma viga-coluna de paredes finas sujeito à

gravidade, às cargas hidrodinâmicas e às condições de contorno impostas pelo stinger e pelo fundo do mar. O problema é resolvido numericamente através de formulação de elementos finitos não lineares, com aplicação de incrementos de carga e utilizando condensação na resolução dos sistemas de equações.

Como já foi mencionado, as restrições geométricas são impostas ao duto pelo stinger da barcaça e pelo terreno do fundo do mar, caracterizando um problema de contato entre o duto submarino e essas superfícies de contorno, durante a fase de lançamento. Para resolver problemas de contato, têm sido desenvolvidos diversos métodos numéricos. Um trabalho a esse respeito é o de Hughes, Taylor, Sackman, Cernier e Kanoknukulchai (1976), onde eles utilizaram multiplicadores de Lagrange e desenvolveram elementos de contato. Talaslidis e Panagiotopoulos (1980) formularam o problema de contato em inequações variacionais, resolvendo-as através de algoritmos padrões de otimização quadrática. Mahmoud, Salamon e Marks (1982) desenvolveram um método de resolução incremental para dois corpos linearmente elásticos em contato e sujeitos a cargas externas. Stein e Wriggers (1984) utilizaram uma formulação de elementos finitos, Lagrangeana atualizada, para análise estrutural de hastes com restrições unilaterais. Yagawa e Hirayama (1984) desenvolveram elementos de contato inseridos entre duas superfícies. Karacostas, Baniotopoulos e Panagiotopoulos (1986) estudaram o comportamento dinâmico de um cabo submarino restringido pelo terreno do fundo do mar rígido e sem atrito. Formularam um problema de contato

unilateral como uma sequência de desigualdades variacionais solucionadas através de programação quadrática.

CAPÍTULO II

II.1) OS PROBLEMAS ESTRUTURAIS

II.1.1) INTRODUÇÃO

A análise estrutural do "pipeline" é fundamental à segurança da operação de lançamento que se realiza em águas cada vez mais profundas.

A figura 3 apresenta uma configuração deformada típica do duto que será considerada em sua análise estrutural. Como pode ser visto, o duto é apoiado em uma das extremidades pelo stinger da barcaça e na outra pelo fundo do mar, apresentando longo trecho sem apoio. Esta "longa viga contínua", sujeita ao peso próprio, empuxo e às forças de ondas e de correntes marítimas, sofre grandes deslocamentos tridimensionais não lineares.

Esses deslocamentos são reduzidos pelo esforço de tração aplicado ao duto pela máquina de tração da barcaça e pela escolha adequada da geometria do stinger.

Supondo-se que as propriedades do material variem linearmente, o comportamento não linear desse tipo de estrutura pode se dar através da geometria, dos apoios ou de carregamentos não conservativos.

II.1.2) O MODELO MATEMÁTICO DO DUTO

O problema não linear, tridimensional do lançamento do duto é estudado através de um modelo matemático que consiste no modelo do duto submetido às condições de contorno e restrições geométricas impostas pelo terreno do fundo do mar e pelo stinger da barcaça.

O duto é modelado como viga-coluna tubular, esbelta e extensível, sujeita à gravidade, às cargas hidrodinâmicas e ao esforço de tração aplicado pela máquina tracionadora.

As seguintes hipóteses são feitas:

- Assume-se que o material do duto é homogêneo, isótropo e linearmente elástico.
- Embora no âmbito de grandes deslocamentos e rotações, admitem-se deformações específicas pequenas em relação à unidade.
- Os dutos apresentam seção transversal em forma de anel circular e são localmente rígidos.
- As seções transversais planas na geometria inderformada permanecem planas após as deformações.
- Na condição sem carregamento, os dutos são supostos retos e livres de imperfeições.
- As deformações por cisalhamento são desprezadas.
- Os efeitos da torção na tensão axial são desprezados.
- Não há atrito entre o duto e o stinger.
- O fundo do mar é admitido plano.

Utilizando essas hipóteses, podemos desenvolver um modelo matemático não linear, em três dimensões para análise do lançamento do duto.

II.1.3) VANTAGENS DO MODELO TRIDIMENSIONAL

Uma das principais características do desenvolvimento de um projeto confiável e seguro de um duto submarino durante a fase de lançamento é a escolha de um modelo matemático realístico para o problema e de um método numérico apropriado.

Apesar de estruturalmente o duto submarino ser bem simples, os diversos fatores que influenciam a sua resposta, como por exemplo os efeitos de correntes e ondas, obrigam a efetuar uma análise complexa para se prever seu comportamento. Esta análise se torna ainda mais importante à medida que as atividades de perfuração e produção caminham para grandes profundidades.

Em vários trabalhos publicados, assumiu-se um modelo bidimensional para a análise estrutural de dutos durante o lançamento. Adotando-se esse modelo simplificado, obriga-se o duto submarino a permanecer em um plano vertical. As forças de ondas e correntes ficam também limitadas a atuarem somente nesse plano vertical.

A resposta de um duto submarino que está sendo lançado, no entanto, depende dos ângulos de incidência das forças de ondas e correntes. A situação mais desfavorável costuma ser aquela em que ambos, onda e corrente, atuam perpendicularmente ao duto, enquanto que a direção paralela à da barcaça é, em geral, a menos desfavorável.

Na presente tese, adotou-se um modelo matemático tridimensional. A configuração deformada do duto submarino é referida ao sistema global de eixos ortogonais X, Y e Z que definem um espaço tridimensional. O elemento finito utilizado é unidimensional, reto, com

seis graus de liberdade em cada um de seus nós.

O modelo espacial assumido permite a simulação de diversos problemas de lançamento de dutos submarinos ou de quaisquer outros problemas semelhantes devido as suas características de generalidade e precisão nos resultados.

Utilizando-se o modelo em três dimensões, torna-se possível:

- aplicar ao duto forças de ondas e correntes em quaisquer direções;
- impor deslocamentos no trecho superior do duto, em uma direção qualquer, para simular o efeito na estrutura do deslocamento da barcaça;
- introduzir condições de contorno em quaisquer direções através dos apoios generalizados da estrutura;
- estudar os efeitos da torção e da flexão combinados na estrutura.

II.1.4) O PROBLEMA DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

A não linearidade geométrica é consideração fundamental na análise estrutural do duto durante a fase de lançamento. A incapacidade de manter uma configuração deformada adequada durante a instalação pode levar a estrutura ao colapso por instabilidade.

Além de determinar a carga crítica, a solução do problema de estabilidade envolve a construção da curva não linear carga-deflexão da estrutura. No capítulo IV, mostraremos os conceitos básicos e a metodologia empregada

na presente tese para determinação de curvas não lineares, carga-deflexão, pelo método dos elementos finitos.

Os problemas não lineares geométricos diferem dos lineares por ocorrerem grandes deflexões e por existirem tensões axiais que na presença de deslocamentos laterais têm uma influência significativa na rigidez da estrutura.

II.1.5) O PROBLEMA DE CONTATO COM O SOLO

Para a configuração deformada típica da estrutura em forma de "S", o problema de contato entre a extremidade do duto e o solo do fundo do mar deve ser analisado.

Os pontos de apoio ao duto podem variar no decorrer do lançamento. Um certo trecho apoiado no solo, comprimindo-o, poderá se afastar do terreno, ao mesmo tempo que outros trechos do duto podem atingir o fundo do mar, durante o lançamento.

Um método de resolução iterativo será utilizado para o problema de contato do duto com o terreno do fundo do mar. Esse método de simulação do verdadeiro fenômeno será apresentado no capítulo IV.

II.1.6) O STINGER

Originalmente, o duto era suportado pelo stinger em grande parte de sua extensão durante a operação de instalação no fundo do mar.

Esse stinger, inicialmente reto, limitava-se a

lançamentos em pequenas profundidades. Acima de determinado comprimento, tornava-se difícil seu controle e era severamente afetado por correntes marinhas e por ondas moderadas.

Criaram-se, então, os stingers articulados, menos suscetíveis aos danos provocados pelas solicitações ambientais. Na região de "over bend", as tensões podem ser controladas pela geometria do stinger. Isto permitiu o lançamento de dutos em maiores profundidades.

Uma redução no comprimento do stinger pode ser compensada com aumento da tração aplicada pela máquina tracionadora.

II.2) AS ANÁLISES ESTÁTICA E DINÂMICA

Sobre o duto submarino durante o lançamento, podem atuar deslocamentos impostos pela barcaça além de cargas ambientais como o peso próprio, correntes e ondas. As cargas estáticas originam-se da força normal de arraste causada pela corrente marinha e pelo peso próprio. Cargas dinâmicas são causadas basicamente pela ação das ondas.

Em alguns casos, uma análise estática fornecerá bons resultados, desde que os efeitos de amplificação dinâmica não sejam importantes. No entanto, quando a frequência da força atuante, causada pelo mar, for igual ou próxima de uma das primeiras frequências naturais do duto submarino, é necessário fazer uma análise dinâmica para se avaliar a resposta da estrutura. Inicialmente, faz-se uma análise estática, sem atuação de

onda, determinando-se uma configuração deformada do duto, utilizando-a, em seguida, como configuração inicial em sua análise dinâmica.

Os efeitos não lineares são inerentes ao problemas do lançamento. No caso específico da análise dinâmica de dutos submarinos submetidos a ondas, a força de arraste hidrodinâmico, que tem uma influência muito forte na resposta, é proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre o mar e a estrutura e origina, então, uma não linearidade na equação de movimento.

Em princípio, em análise dinâmica, considera-se o equilíbrio estático em um determinado instante de tempo, incluindo os efeitos das forças de inércia e das forças de amortecimento. Em análise estática, desprezam-se os efeitos de inércia e de amortecimento. A hipótese de análise estática, no entanto, deve ser justificada, especialmente quando se trata de análise não linear.

Em análise dinâmica não linear, conforme Bathe (1982), é de se esperar que a convergência seja mais rápida que na estática, devido à contribuição da matriz de massa na formação da matriz de rigidez. Essa contribuição se torna dominante quando o intervalo de tempo é pequeno, de modo que a convergência em análise dinâmica é sempre alcançada, desde que o intervalo de tempo seja pequeno.

II.3) OUTROS PROBLEMAS SEMELHANTES

Os programas de computador desenvolvidos na presente tese podem ser utilizados para as análises estática e dinâmica de vários problemas relativos à instalação de dutos submarinos:

- problemas usuais de lançamento de dutos com stinger. As figuras 1, 3 e 8 apresentam situações típicas destes casos.
- problemas de lançamento onde não é usado o stinger e o duto é apoiado sobre uma rampa na barcaça. A figura 9 apresenta um esquema deste problema.

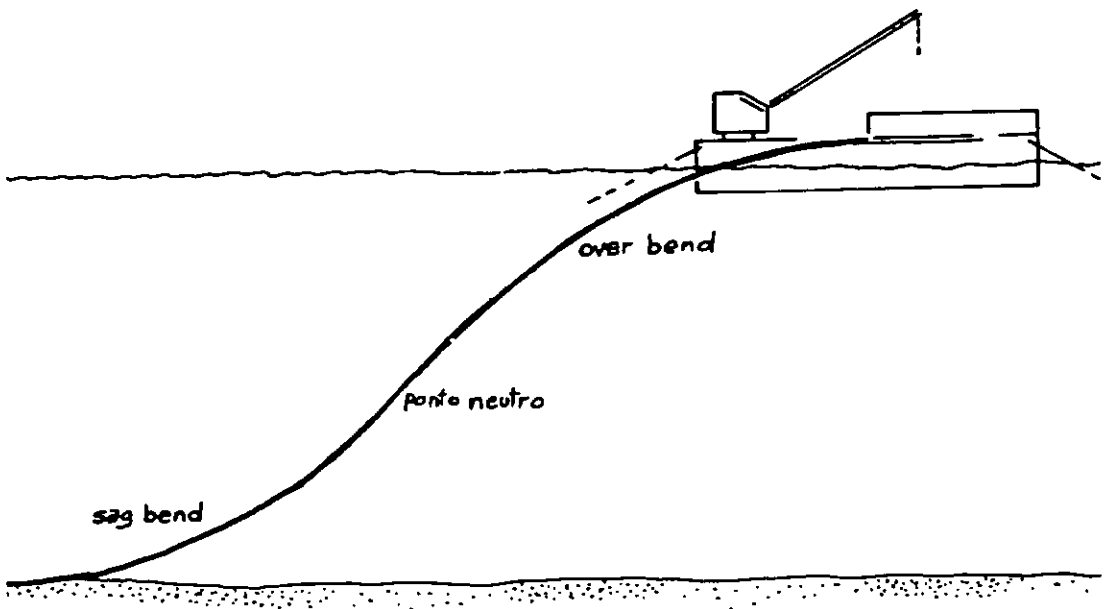


Figura 9 - Lançamento com barcaça sem uso de stinger.

- problemas onde o duto é abandonado, devido às condições ambientais adversas. O término do lançamento tem operação semelhante ao abandono da tubulação. Como pode ser visto na sequência da figura (10), é soldada uma cabeça de abandono ao último tubo. É passado um cabo nesta cabeça que fica preso ao guincho de abandono e recuperação. A barcaça vai se deslocando no sentido do lançamento e o guincho de abandono e recuperação mantém uma tensão de tração semelhante àquela do tensionador durante um lançamento. A tubulação vai sendo abandonada e ao apoiar no fundo, o cabo é abandonado com uma bóia presa em sua extremidade. Está terminado o serviço ou aguarda-se a melhoria das condições do mar para recuperar o tubo através do cabo e reiniciar os serviços.

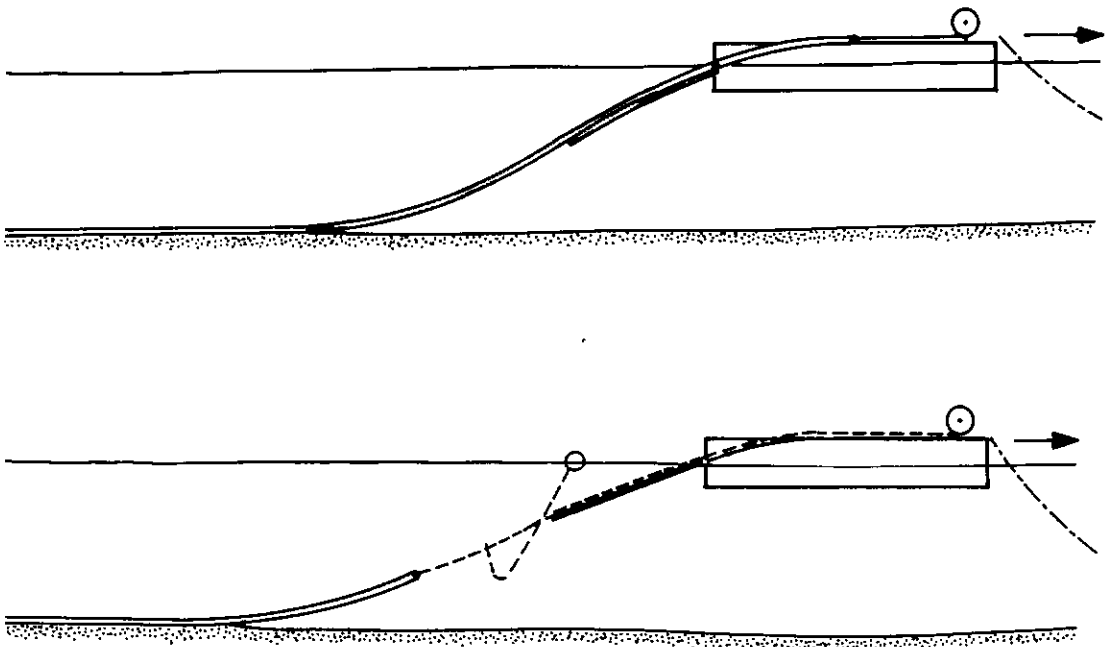


Figura 10 - Término de lançamento ou abandono.

- problemas de recuperação da tubulação. Para recuperação, podemos utilizar o mesmo desenho do abandono, em sentido contrário. Apanha-se a bóia, recolhendo-se a ponta do cabo. Faz-se a união desta ponta do cabo com o cabo do guincho de abandono e recuperação, e movimentando adequadamente a barcaça, puxa-se novamente a tubulação pela rampa, através do tensionador, até a estação de montagem, onde então a cabeça de abandono é cortada, entrando em seu lugar um novo tubo, reiniciando-se a seqüência de trabalho para o lançamento.
- problemas de içamento lateral do duto e execução de interligação ("tie-in"). Consiste em suspender duas pontas de tubulações diferentes que estejam no fundo do mar, após terem sido lançadas, conectá-las através de soldas e devolvê-las ao fundo do mar, conforme os esquemas da figura (11).

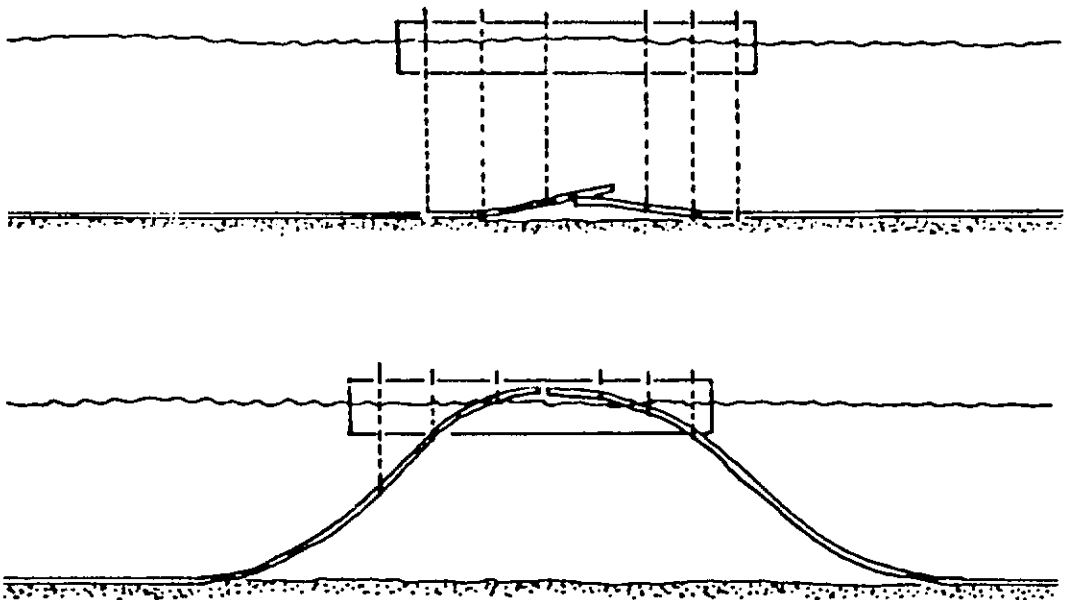


Figura 11 - Içamento lateral e interligação de dutos.

Para estudar os problemas de abandono, recuperação e içamento lateral do duto, basicamente bastaria acrescentar aos programas da presente tese, modificação referente à direção variável da força do cabo.

- problemas de lançamento vertical (J-Lay). Este método envolve o lançamento da tubulação a partir de uma posição vertical, ou próxima a vertical, permitindo assim atingir profundidades superiores ao "S-Lay" (vide figura (12)).

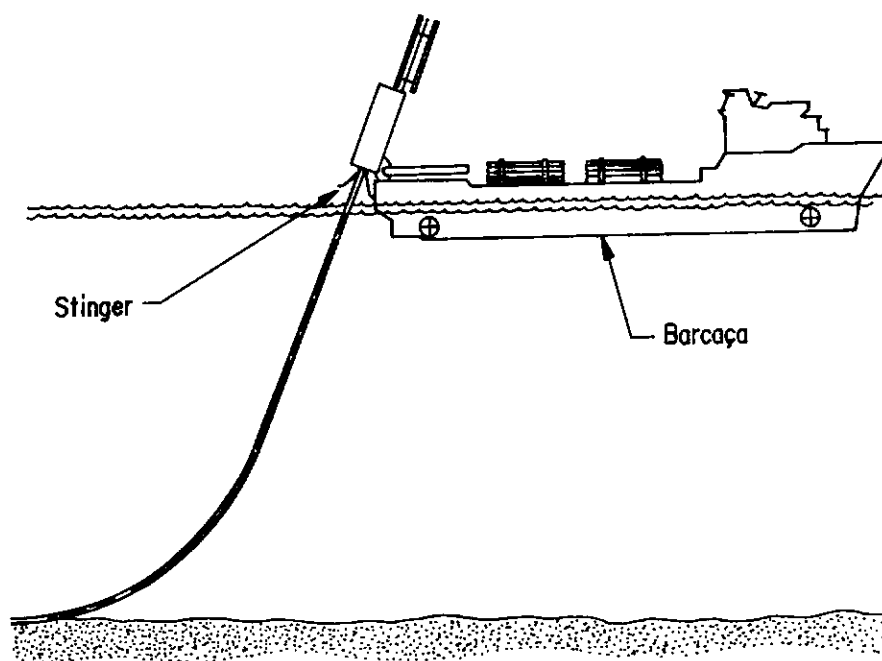


Figura 12 - Método de lançamento vertical.

- problemas de risers. Um importante componente do sistema de exploração dos recursos existentes no subsolo marinho, é o riser: tubulação que liga o poço à unidade flutuante. O riser fica quase na sua totalidade submerso e está sujeito a uma série de ações ambientais, como os

efeitos de força axial, peso próprio, movimentos da embarcação, ondas e correntes. É conectado à unidade flutuante por uma junta telescópica e, no fundo, ao BOP (Blow Out Preventer) por uma junta esférica ou flexível. A figura (13) mostra uma situação típica dessa estrutura. A força aplicada no topo do riser dá-lhe resistência lateral ao carregamento devido ao efeito de viga-coluna. As técnicas de análise numéricas bem como os princípios de modelação implementados nos programas de análise estática e dinâmica da presente tese, permitem o estudo de risers, desde que sejam implementados alguns aspectos especiais que caracterizam a estrutura, tais como a tração efetiva e o flex-joint.

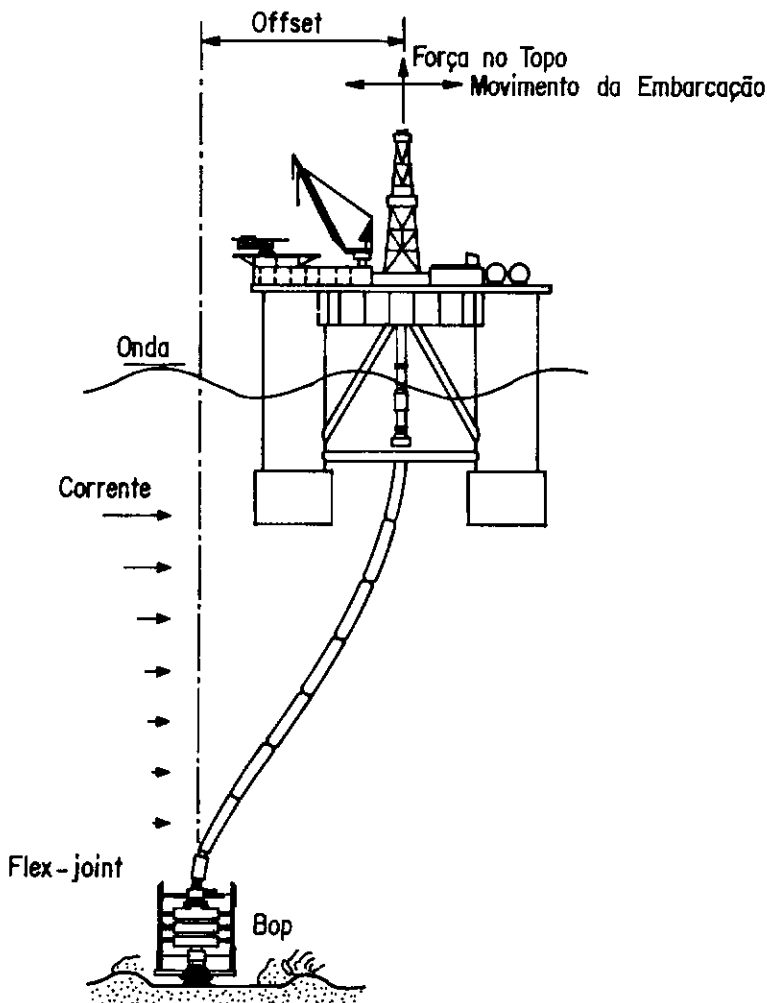


Figura 13 - Condição Típica de um riser.

II.4) PROGRAMAS DISPONÍVEIS

Grande parte dos problemas relativos a estruturas "offshore" apresentam soluções computacionais com variáveis graus de sofisticacões.

Diversos problemas de lançamento de dutos submarinos podem ser simulados através de ferramentas computacionais analíticas. A maioria das análises computacionais são iterativas. Algumas apresentam modelos bidimensionais, outras, tridimensionais. Alguns programas se restringem à análise estática, enquanto outros, incluem a análise dinâmica.

"Sag" é um programa de computador desenvolvido em "Battele's Columbus Laboratories", (1976), para análise estática e dinâmica do trecho do duto submarino abaixo do ponto de inflexão ("sagbend"), durante o procedimento de lançamento. Assume-se um modelo matemático bidimensional para o problema. A região inferior em contato com o terreno do fundo do mar é modelada como uma viga sobre uma fundação elástica semi-infinita. Ambas as rotinas analíticas estática e dinâmica são baseadas no trabalho publicado por Hall (1975).

"Pipelay. Ns. 3D" (Pipeline Laying Nonlinear Static 3 - Dimensional Analysis) é um programa de computador que utiliza o método dos elementos finitos na análise estática, não linear geométrica, tridimensional de dutos durante o lançamento. O algoritmo de solução do problema, implementado neste programa, foi formulado por Bernitsas e Vlahopoulos (1990).

"Pipeline" é um programa disponível na Petrobrás para análise estática não linear geométrica, tridimensional, dos problemas de lançamento de dutos submarinos.

"Batelle" é um sistema disponível na Petrobrás para cálculo estrutural de dutos submarinos na fase de lançamento sendo constituído de subsistemas para: - análise estrutural estática (Batelle/Pipstat); análise estrutural dinâmica devida aos movimentos da barcaça (Batelle/Pipdyn) e traçado de curvas "tensão x deformação" (Batelle/Fit).

Existem outros programas de empresas não divulgados tecnicamente.

CAPÍTULO III

III.1) A FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

III.1.1) INTRODUÇÃO

As não linearidades presentes em um sistema estrutural podem derivar de várias fontes, incluindo as não linearidades geométricas, as não linearidades físicas, apoios não lineares ou descontínuos e carregamentos não-conservativos.

Num problema em que os deslocamentos e rotações não são pequenos, as equações de equilíbrio devem ser estabelecidas com relação à configuração deformada da estrutura, que é de antemão desconhecida. Além disto, os termos de ordem superior nas relações entre deformações

específicas e deslocamentos não podem ser desprezados, gerando efeitos não lineares na formulação do elemento.

Assim, em problemas não lineares geométricos, os termos da matriz de rigidez, $[K]$, que relacionam as forças, \underline{F} , atuantes na estrutura com seus deslocamentos, \underline{U} na equação, $[K] \times \underline{U} = \underline{F}$, dependem dos deslocamentos desconhecidos \underline{U} . Logo, a equação é do tipo $[K(\underline{U})] \times \underline{U} = \underline{F}$.

O estudo de vigas e pórticos com não linearidade geométrica tem sido realizado nos últimos anos de forma intensa. O método dos elementos finitos contribuiu decisivamente para esse fim, tornando-se o principal método empregado nesse tipo de análise, devido a sua eficiência e facilidade de implementação.

Uma análise não linear pelo método dos elementos finitos apresenta três componentes principais: - um modelo para o elemento definido pelas funções de interpolação e pelas relações deformação-deslocamento; um sistema de coordenadas para o elemento e um procedimento de resolução do sistema de equações não lineares de equilíbrio. Na presente tese, adotam-se a interpolação linear para os deslocamentos longitudinais e a cúbica para os transversais, que correspondem ao modelo usado em quase todos os trabalhos publicados sobre elementos finitos não lineares para vigas. Os polinômios assim escolhidos permitem que sejam garantidas as condições de convergência do método dos elementos finitos. Para derivação da matriz de rigidez do elemento, $[K]$, serão definidos adiante, alguns dos diferentes sistemas de coordenadas para o elemento, dentre os quais estão os sistemas de coordenadas Lagrangeanas e o de Euler. Com relação aos procedimentos

de resolução do sistema de equações não lineares, utilizam-se métodos incrementais com ou sem iterações, na presente tese.

A relação incremental força-deslocamento pode ser derivada da teoria convencional de viga-coluna desde que sejam assumidas pequenas rotações das extremidades dos elementos relativos ao segmento que une seus extremos. Grandes rotações e translações nos nós do elemento são permitidas.

III.1.2) SISTEMAS DE COORDENADAS DO ELEMENTO

Há três sistemas de coordenadas que são comumente usados nas formulações de elementos finitos com não linearidade geométrica. Eles se distinguem pela configuração de referência adotada onde são medidas as grandezas físicas.

III.1.2.1) COORDENADAS EULERIANAS

Neste sistema, os graus de liberdade básicos são referidos ao segmento que une as extremidades do elemento na posição deformada, como é mostrado na figura 14. Embora a descrição das grandezas neste sistema seja mais precisa, um grande número de operações matriciais é necessário na transformação da matriz de rigidez deste sistema para o global.

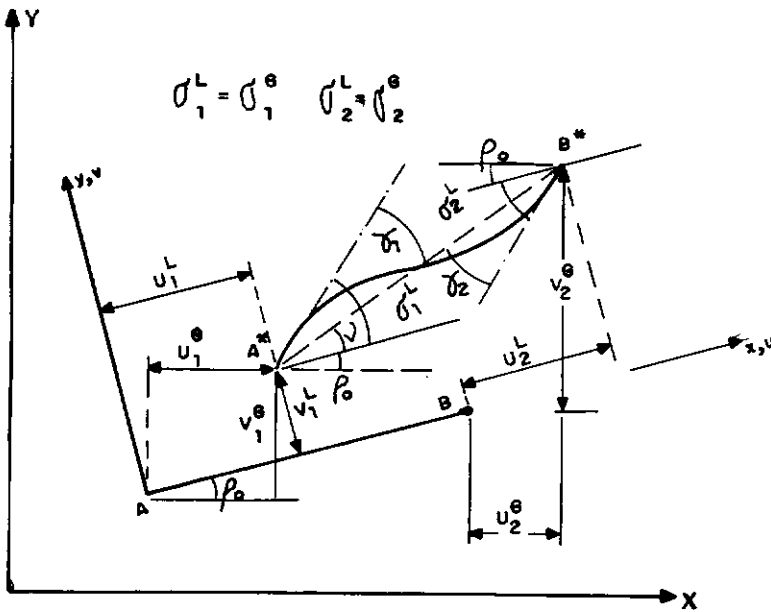


Figura 14 - Posição deformada de um elemento genérico AB.

III.1.2.2) COORDENADAS LAGRANGEANAS TOTAIS

Na formulação Lagrangeana total, a configuração de referência é a original indeformada da estrutura. Apesar da facilidade de implementação do procedimento desta formulação, ele conduz a uma descrição imprecisa, exceto em problemas de pequenos deslocamentos e rotações.

III.1.2.3) COORDENADAS LAGRANGEANAS ATUALIZADAS

Nesta formulação, que também podemos denominar Lagrangeana para pequenas rotações, a última configuração de equilíbrio atingida é tomada como configuração de referência.

Este sistema pode ser adotado em problemas que envolvem grandes deslocamentos e rotações.

A formulação de coordenadas Lagrangenas para pequenas rotações é apropriada para a análise não linear incremental. As coordenadas dos nós dos elementos são atualizadas somente no início de cada incremento. Essa formulação tem a vantagem computacional de que as transformações das matrizes de rigidez para o referencial global não variam no procedimento iterativo que busca o equilíbrio.

Adotaremos, portanto, este sistema na presente tese, cuja descrição detalhada será apresentada mais adiante.

III.2) DEDUÇÃO DAS MATRIZES CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO

III.2.1) PRELIMINARES

A relação força-deflexão para um elemento de pórtico espacial geometricamente não linear pode ser determinada a partir da aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais. Ele estabelece que se as tensões estão em equilíbrio com as forças aplicadas, o trabalho virtual realizado pelas forças externas (δW_e), será igual ao trabalho virtual realizado pelas forças internas (δW_i), ou seja:

$$\delta W_e = \delta W_i \quad (1)$$

Reescrevendo-se a equação acima em notação matricial e expressando-a em função dos deslocamentos nodais do elemento, chega-se, através da aplicação do cálculo variacional, à relação força-deslocamento desejada:

$$\underline{F}^e = [K^e] \times \underline{u}^e \quad (2)$$

III.2.2) MATRIZ DE RIGIDEZ INCREMENTAL

A matriz de rigidez incremental do elemento, $[K_I^e]$, pode ser interpretada como sendo o limite da taxa

$$\frac{\text{acr\u00e9scimo de for\u00e7a}}{\text{acr\u00e9scimo de deslocamentos}} = \frac{\delta F^e}{\delta u^e} = [K_I^e] \quad (3)$$

O limite desta taxa pode ser representado geometricamente pela tangente em um ponto da curva de equil\u00edbrio que relaciona a for\u00e7a ao deslocamento.

Sabemos que o trabalho virtual das for\u00e7as internas \u00e9 igual ao produto das for\u00e7as pelos deslocamentos incrementais, isto \u00e9:

$$\delta W_i = F^e \times \delta u^e \quad (4)$$

A partir das express\u00f5es (3) e (4), a matriz de rigidez incremental do elemento, $[K_I^e]$, ou mais precisamente, a matriz de rigidez incremental tangente do elemento, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\boxed{[K_I^e] = \frac{\delta F^e}{\delta u^e} = \frac{\delta^2 W_i}{\delta u^{e2}}} \quad (5)$$

No restante deste cap\u00edtulo, omite-se o super\u00edndice "e", ficando ele subentendido, pois todas as

grandezas estudadas são tomadas em relação ao sistema local de eixos do elemento.

Como já foi mencionado, a matriz de rigidez do elemento será deduzida utilizando-se o sistema de coordenadas Lagrangeanas atualizadas.

Denominaremos as configurações finais do elemento nos incrementos (i) e $(i+1)$ por C^i e C^{i+1} , respectivamente. A figura 15 apresenta as projeções destas configurações no plano XY de um espaço tridimensional, cujos eixos X , Y e Z , do sistema global de coordenadas, têm sentidos definidos pela regra da mão direita.

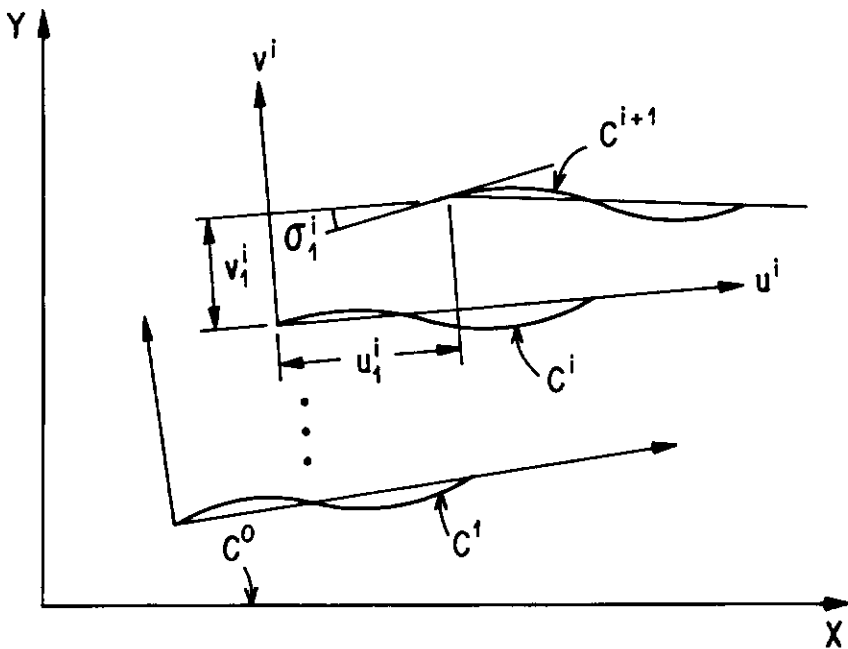


Figura 15 - Coordenadas de Lagrange Atualizadas - plano XY.

Sejam x , y e z os eixos do sistema de referência local do elemento. Denominamos de u , v e w os deslocamentos na direção dos eixos x , y e z respectivamente; e de ϕ , ψ e σ , as rotações em torno dos eixos x , y e z , respectivamente.

Na passagem da configuração C^i para C^{i+1} , a primeira deve ser considerada como fixa. As componentes dos deslocamentos e rotações do elemento em C^{i+1} são medidas com relação ao segmento que une os extremos do elemento em C^i . Nas extremidades do elemento elas valem:

$$u_1^i, v_1^i, w_1^i, \phi_1^i, \psi_1^i, \sigma_1^i \text{ e } u_2^i, v_2^i, w_2^i, \phi_2^i, \psi_2^i, \sigma_2^i.$$

Normalmente em uma configuração C^i , embora os deslocamentos medidos neste novo referencial sejam nulos, as deformações específicas não são nulas.

Sejam ε_a^{i+1} a deformação específica axial correspondente a C^{i+1} e ε_a^i a deformação específica axial correspondente a C^i , supostamente conhecida, o acréscimo de deformações ε_a vale:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_a^{i+1} - \varepsilon_a^i \quad (6)$$

O trabalho das forças internas é dado por:

$$W_i = \int_0^L \int_A \left[\int_{\varepsilon_a^i}^{\varepsilon_a^i + \varepsilon_a} \tau d\varepsilon \right] dA dx \quad (7)$$

onde: A é a área da seção transversal do elemento;

L é o comprimento do elemento;

Utilizando-se a Lei Constitutiva do material e, integrando-se em relação a ε , tem-se:

$$W_i = \int_0^L \int_A E \varepsilon_{\alpha}^i \varepsilon_{\alpha} dA dx + \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \varepsilon_{\alpha}^2 dA dx \quad (8) ,$$

onde: E é o módulo de elasticidade longitudinal do elemento.

As figuras 15 e 16 apresentam as projeções de um elemento nos planos XY e XZ, respectivamente no espaço tridimensional formado pelos eixos X, Y e Z do sistema global de referência.

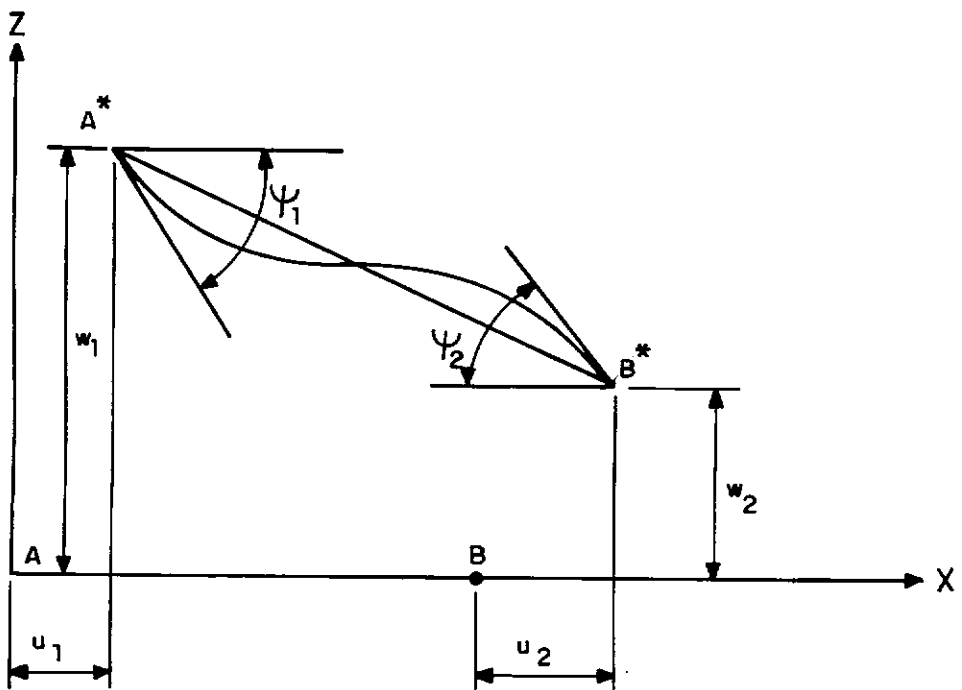


Figura 16 - Posição deformada de um elemento genérico AB - plano XZ.

Para a análise por elementos finitos, usaremos as seguintes funções de interpolação usuais para os deslocamentos transversais e longitudinais do elemento e que valem também para os deslocamentos incrementais:

$$u = a_1 + a_2 x$$

$$v = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3$$

$$w = a_7 + a_8 x + a_9 x^2 + a_{10} x^3 \quad (9)$$

Utilizando-se as condições de contorno das extremidades dos elementos:

$$\text{Em } x = 0: u = u_1, v = v_1, w = w_1, \frac{dv}{dx} = \sigma_1 \text{ e}$$

$$- \frac{dw}{dx} = \psi_1 \quad (10)$$

$$\text{Em } x = L: u = u_2, v = v_2, w = w_2, \frac{dv}{dx} = \sigma_2 \text{ e}$$

$$- \frac{dw}{dx} = \psi_2 \quad (11)$$

obtem-se as seguintes funções a partir das expressões (9):

$$u = \left[1 - \frac{x}{L} \right] u_1 + \frac{x}{L} u_2$$

$$v = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \right] v_1 + \left[x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \sigma_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{9 x^2}{L^2} - \frac{2 x^3}{L^3} \right) v_2 + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \sigma_2 \\
w = & \left(1 - \frac{9 x^2}{L^2} + \frac{2 x^3}{L^3} \right) w_1 - \left(x - \frac{2 x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \psi_1 + \\
& + \left(\frac{9 x^2}{L^2} - \frac{2 x^3}{L^3} \right) w_2 - \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \psi_2 \quad (12)
\end{aligned}$$

A contribuição dos deslocamentos transversais do elemento em sua deformação específica axial será avaliada na presente tese, através de um modelo no qual a relação deformação-deslocamento é a clássica da teoria da elasticidade não linear. No trabalho publicado por Wen (1983), utilizou-se um outro modelo em que se determina uma contribuição média, ao longo do comprimento do elemento, dos deslocamentos transversais, para a deformação axial específica. Resultados numéricos demonstraram que o elemento finito resultante, no trabalho publicado por Wen (1983), é menos rígido que o elemento finito obtido no presente trabalho.

III.2.3) MODELO COM RELAÇÃO DEFORMAÇÃO-DESLOCAMENTO DA TEORIA DA ELASTICIDADE NÃO LINEAR

A relação deformação-deslocamento para um elemento de viga coluna tridimensional é:

$$\epsilon_a = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{du}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (13)$$

sendo pequeno o valor de $\frac{du}{dx}$, o termo $\left[\frac{du}{dx} \right]^2$ é desprezível. Assim, a expressão (13) resulta em:

$$\epsilon_a = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (14)$$

Uma vez que ϵ_a é uma variação na deformação axial específica, u , v e w representam correspondentes variações nos deslocamentos e não deslocamentos totais.

Substituindo-se a equação (14) em (8)

obtem-se:

$$\begin{aligned} W_i = & \int_0^L \int_A E \epsilon_a^2 \times \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 + \right. \\ & \left. - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right] dAdx + \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left[\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right]^2 dAdx \quad (15) \end{aligned}$$

Efetuando-se o quadrado do integrando da segunda parcela e integrando-se ao longo da seção transversal, resulta:

$$\begin{aligned}
W_1 = & \int_0^L p(x) \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{dw}{dx} \right]^2 \right\} dx + \\
& + \frac{E}{2} \int_0^L \left[A \left\{ \frac{du}{dx} \right\}^2 + I_z \left\{ \frac{d^2v}{dx^2} \right\}^2 + I_y \left\{ \frac{d^2w}{dx^2} \right\}^2 + \right. \\
& + I_{yz} \frac{d^2v}{dx^2} \frac{d^2w}{dx^2} + A \frac{du}{dx} \left\{ \frac{dv}{dx} \right\}^2 + A \frac{du}{dx} \left\{ \frac{dw}{dx} \right\}^2 + \\
& \left. + \frac{A}{4} \left\{ \frac{dv}{dx} \right\}^4 + \frac{A}{4} \left\{ \frac{dw}{dx} \right\}^4 + \frac{A}{2} \left\{ \frac{dv}{dx} \right\}^2 \left\{ \frac{dw}{dx} \right\}^2 \right\} dx
\end{aligned}
\tag{16}$$

onde: I_{yz} é o produto de inércia em relação aos eixos locais y e z .

I_y e I_z são os momentos de inércia da seção em relação aos eixos locais y e z , respectivamente.

$p(x) = \varepsilon_0^i(x) \times E \times A$ é a força axial no elemento, no início do incremento, cuja distribuição será considerada linear ao longo do elemento.

III.2.4) MATRIZ DE RIGIDEZ INCREMENTAL

A expressão (16) pode ser escrita como:

$$W_1 = W_L + W_G + W_1 + W_2 \tag{17}, \text{ onde:}$$

$$W_L = \frac{E}{2} \int_0^L \left\{ A \times \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + I_z \times \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + I_y \times \left(\frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 + I_{yz} \times \left(\frac{d^2v}{dx^2} \times \frac{d^2w}{dx^2} \right) \right\} dx \quad (18)$$

$$W_G = \int_0^L p(x) \times \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (19)$$

$$W_1 = \frac{EA}{2} \times \int_0^L \left\{ \frac{du}{dx} \times \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{du}{dx} \times \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (20)$$

$$W_2 = \frac{EA}{4} \times \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \times \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{dw}{dx} \right)^4 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \times \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (21)$$

As matrizes de rigidez obtidas a partir das expressões de W_L , W_G , W_1 e W_2 através da aplicação do princípio dos deslocamentos virtuais são denominadas, respectivamente, de $[K_L]$, $[K_G]$, $EA[K_1]$ e $EA[K_2]$.

A matriz de rigidez incremental tangente do elemento, que relaciona os acréscimos de deslocamento aos acréscimos de força, é formada pela soma de quatro parcelas:

$$[K_I] = [K_L] + [K_G] + EA[K_1] + EA[K_2] \quad (22)$$

onde: $[K_L]$ é a matriz de rigidez linear usual, cujos termos dependem apenas das características físicas e geométricas da seção transversal do elemento. Não apresenta acoplamento entre os termos de rigidez axial e de flexão.

$[K_g]$ é a matriz de rigidez normalmente conhecida como matriz de tensões iniciais ou matriz geométrica. Ela dá uma aproximação de primeira ordem para a interação entre a força axial, p , e os deslocamentos transversais. Seus termos são funções lineares de p existente no início do incremento.

$EA[K_1]$ - Matriz de rigidez cujos termos são funções lineares dos acréscimos de deslocamentos do elemento.

$EA[K_2]$ - Matriz de rigidez que contém termos que são funções quadráticas dos acréscimos de deslocamentos do elemento. Na dedução dessas matrizes, adotaremos as seguintes notações para primeira e segunda derivadas:

$$f_x = \frac{df}{dx}$$

$$f_{xx} = \frac{d^2f}{dx^2},$$

onde f é uma função de x .

III.2.4.1) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ $[K_1]$

A expressão (20) pode ser escrita como:

$$W_1 = W_{1(xy)} + W_{1(xz)} \quad (23)$$

onde:

$$W_{1(xy)} = \frac{EA}{2} \int_0^L u_x \times \left(v_x \right)^2 dx \quad (24)$$

$$W_{1(xz)} = \frac{EA}{2} \int_0^L u_x \times \left(w_x \right)^2 dx \quad (25)$$

A parcela $W_{1(xy)}$ é função das derivadas dos deslocamentos u e v . O deslocamento w não contribui para essa parcela. Assim, ela dará origem a uma parcela da matriz de rigidez $[K_1]$ cujos termos são funções lineares dos acréscimos dos deslocamentos no plano xy e que chamaremos $[K_1]_{(xy)}$.

Analogamente, a parcela da matriz de rigidez $[K_1]$ cujos termos são funções lineares dos acréscimos dos deslocamentos no plano xz , será originada a partir de $W_{1(xz)}$ e a chamaremos $[K_1]_{(xz)}$.

Portanto, a matriz de rigidez $[K_1]$ será obtida pela soma das duas parcelas:

$$[K_1] = [K_1]_{(xy)} + [K_1]_{(xz)} \quad (26)$$

Essa simplificação na dedução de $[K_1]$ foi possível por não haver acoplamento entre as derivadas dos deslocamentos transversais v e w na expressão de W_1 .

III.2.4.1.1) OBTENÇÃO DE $[K_1]_{(xz)}$

No apêndice I, determina-se a matriz $[K_1]_{(xz)}$ a partir da parcela $W_1(xz)$, através da aplicação do cálculo variacional e com base no princípio dos trabalhos virtuais.

Note-se que o sub-índice "xz" se refere ao plano xz do espaço tridimensional formado pelos eixos x, y e z do sistema de referência local do elemento.

A figura (17) apresenta um elemento finito de pórtico espacial cujos graus de liberdade estão numerados de forma usual. Os termos da matriz $(K_1)_{(xz)}$ correspondem aos graus de liberdade ímpares, ou seja, os do plano xz.

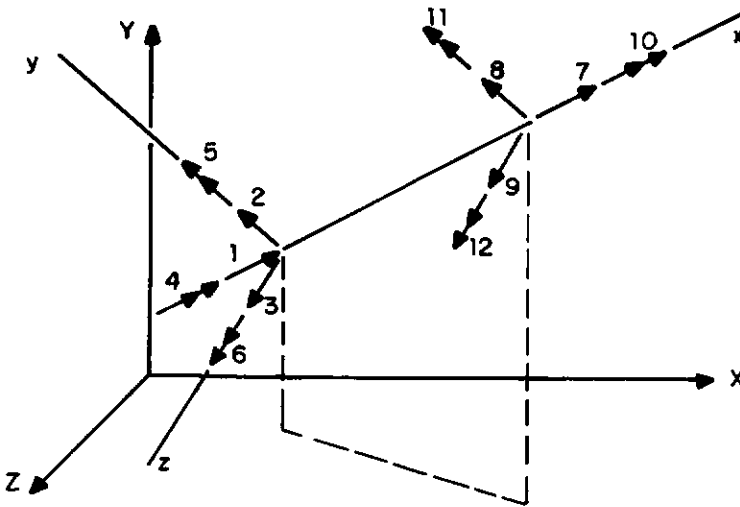


Figura 17 - Elemento finito de pórtico espacial - numeração dos graus de liberdade.

III.2.4.1.2) OBTENÇÃO DE $[K_1]_{(xy)}$

A matriz $[K_1]_{(xy)}$ é obtida analogamente. Seus termos serão apresentados no apêndice I. Eles correspondem aos graus de liberdade 1, 2, 6, 7, 8 e 12 da figura (17).

A matriz $[K_1]_{xy}$ calculada é também apresentada no trabalho publicado por Gonzalez (1990).

Convém observar que a matriz $[K_1]_{(xy)}$ é o dobro das matrizes $[k_1]$, apresentada por Chajes (1987), e $[K^1]$, por Ebner (1972). Isto está de acordo com a equação (40), já que as matrizes de rigidez desses dois trabalhos publicados são incrementais secantes, enquanto a da presente tese e a do trabalho de Gonzalez (1990) são incrementais tangentes.

III.2.4.1.3) MATRIZ $[K_1]$

Os termos (52) e (53) do apêndice I, formam a matriz de rigidez $[K_1]$ desejada. Esta matriz é também apresentada no trabalho publicado por Wen (1983).

III.2.4.2) DETERMINAÇÃO DA MATRIZ $[K_0]$

Sejam \underline{u}^0 o vetor de deslocamentos nodais do elemento e \underline{N} o vetor de funções de interpolação que relaciona \underline{u} com \underline{u}^0 definidos a seguir:

$$\tilde{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \phi_1 \\ \psi_1 \\ \sigma_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \phi_2 \\ \psi_2 \\ \sigma_2 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

$$\tilde{N} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & -\frac{x}{L} \end{bmatrix} \right) 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{x}{L} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right\} \quad (55)$$

podemos, escrever:

$$\tilde{u} = \tilde{N} \times \tilde{u}_0 \quad (56)$$

derivando-se a equação (56), obtemos:

$$\tilde{u}_x = \tilde{N}_x \times \tilde{u}_0 = \tilde{u}_0^T \times \tilde{N}_x^T \quad (57)$$

Substituindo-se as expressão (57) em (19),

obtem-se:

$$W_G = \int_0^L \left\{ p(x) \times \left[\tilde{u}^T \times \tilde{N}_x^T + \frac{1}{2} \times (v_x)^2 + \frac{1}{2} \times (w_x)^2 \right] \right\} dx \quad (58)$$

A primeira variação de W_G será:

$$\delta W_G = \int_0^L \left\{ p(x) \times \left[\delta \tilde{u}^T \times \tilde{N}_x^T + \frac{1}{2} \times \delta (v_x)^2 + \frac{1}{2} \times \delta (w_x)^2 \right] \right\} dx \quad (59)$$

Como já foi dito, a matriz $[K_G]$ dá uma primeira aproximação do efeito dos esforços axiais nos deslocamentos transversais. Assim, no cálculo de δW_G , só há variação de deslocamentos devidos à flexão do elemento e portanto, o produto $[\delta \tilde{u}^T \times \tilde{N}_x^T]$ dessa expressão é igual a zero. A expressão (59) então fica:

$$\delta W_G = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ p(x) \times \left[\delta (v_x)^2 + \delta (w_x)^2 \right] \right\} dx \quad (60)$$

A expressão (60) pode ser escrita como:

$$\delta W_G = \delta W_{G(xy)} + \delta W_{G(xz)} \quad (61)$$

onde:

$$\delta W_{G(xy)} = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) \times \delta \left(v_x \right)^2 dx \quad (62)$$

e

$$\delta W_{G(xz)} = \frac{1}{2} \int_0^L p(x) \times \delta \left(w_x \right)^2 dx \quad (63)$$

A parcela $\delta W_{G(xy)}$ é função de v_x e não depende de w_x . Assim, ela originará uma parcela da matriz $[K_G]$ que dará uma primeira aproximação entre o esforço axial e o deslocamento transversal "v" e que denominaremos $[K_G]_{xy}$. Da mesma forma, $\delta W_{G(xz)}$ originará outra parcela da matriz $[K_G]$ que dará aproximação de 1^a ordem entre o esforço axial e o deslocamento transversal "w" e que chamaremos de $[K_G]_{xz}$. A matriz de rigidez $[K_G]$ será a obtida pela soma dessas duas parcelas:

$$\left[K_G \right] = \left[K_G \right]_{(xy)} + \left[K_G \right]_{(xz)} \quad (64)$$

Essa simplificação na dedução de $\left[K_G \right]$ foi possível por não haver acoplamento entre v_x e w_x em (60).

III.2.4.2.1) OBTENÇÃO DE $\left[K_G \right]_{(xz)}$ E DE $\left[K_G \right]_{(xy)}$

No apêndice (I), é feita a dedução de $\left[K_G \right]_{(xz)}$, cujos termos correspondem aos graus de liberdade ímpares da figura (17), a partir de $\delta W_{G(xz)}$ com base no princípio dos trabalhos virtuais.

A matriz $\left[K_G \right]_{xy}$ é obtida analogamente e seus

termos corresponderão aos graus de liberdade 1, 2, 6, 7, 8 e 12 da figura (17).

III.2.4.2.2) MATRIZ [K_0]

Somando-se as matrizes [K_0]_{xy} e [K_0]_{xz}, obtém-se, então, a matriz [K_0], simétrica, cujos termos não nulos são apresentados no apêndice (I).

As matrizes geométricas obtidas nos trabalhos publicados por Wen (1983) e Alkoush (1978) diferem da obtida na presente tese, pois aquelas consideram $p_{(x)}$ constante e igual a p . O trabalho publicado por Gardner (1976) apresenta, para o caso plano, os acréscimos devidos à consideração da carga $p_{(x)}$ linear, aos termos da matriz geométrica calculada considerando $p_{(x)}$ constante e igual a p .

III.2.4.3) DETERMINAÇÃO DE [K_2]

Devido à existência de acoplamento entre as derivadas dos deslocamentos transversais v e w no termo $v_x^2 w_x^2$ do integrando da expressão (21), esta não poderá ser simplificada em duas parcelas, correspondentes aos planos xy e xz , portanto, a expressão (21) será escrita como a soma de 3 parcelas:

$$W_2 = W_{2(xy)} + W_{2(xyz)} + W_{2(xz)} \quad (71) ,$$

onde:

$$W_{2(xy)} = \frac{EA}{4} \int_0^L \frac{1}{2} x v_x^4 dx \quad (72)$$

$$W_{2(xyz)} = \frac{EA}{4} \int_0^L v_x^2 x w_x^2 dx \quad (73)$$

$$W_{2(xz)} = \frac{EA}{4} \int_0^L \frac{1}{2} x w_x^4 dx \quad (74)$$

Denominaremos de $[K_2]_{(xy)}$, $[K_2]_{(xyz)}$ e $[K_2]_{(xz)}$, as parcelas da matriz de rigidez $[K_2]$ determinadas a partir das parcelas (72), (73) e (74), respectivamente.

Assim, a matriz $[K_2]$ será obtida pela soma de três parcelas:

$$[K_2] = [K_2]_{(xy)} + [K_2]_{(xyz)} + [K_2]_{(xz)} \quad (75)$$

III.2.4.3.1) OBTENÇÃO DE $[K_2]_{(xyz)}$, $[K_2]_{(xz)}$ E $[K_2]_{(xy)}$

No apêndice (I), determina-se $[K_2]_{(xyz)}$ a partir de $W_{2(xyz)}$ através da aplicação do cálculo variacional e com base no princípio dos trabalhos virtuais e apresentam-se seus termos não nulos.

Determina-se também $[K_2]_{(xz)}$ a partir de $W_{2(xz)}$, através do cálculo variacional e com base no princípio dos trabalhos virtuais e apresentam-se seus termos não nulos. Eles correspondem aos graus de liberdade ímpares da figura (17).

Como $W_{2(xz)}$ é função de w_x e não depende

de v_x , os termos de $[K_2]_{(xz)}$ serão funções quadráticas dos acréscimos de deslocamentos no plano xz .

A matriz simétrica $[K_2]_{(xy)}$ é obtida de forma análoga à que determinamos $[K_2]_{(xz)}$. Os termos de $[K_2]_{(xy)}$ são funções quadráticas dos acréscimos de deslocamentos no plano xy . Eles correspondem aos graus de liberdade 1, 2, 6, 7, 8 e 12 da figura (17). Seus valores não nulos são apresentados no apêndice (I).

Os termos calculados da matriz $[K_2]_{(xy)}$ mostrados em (114), são também apresentados na Tese de Gonzalez (1990).

Convém lembrar que $[K_2]_{(xy)}$ é o triplo das matrizes $[k_2]$ apresentada Chajes (1987) e $[K^2]$, por Ebner (1972). Isto confere com a equação (89), já que as matrizes de rigidez desses dois trabalhos publicados são incrementais secantes, enquanto que a da presente tese e a do trabalho de Gonzalez (1990) são incrementais tangentes.

III.2.4.3.2) MATRIZ $[K_2]$

Reunindo-se os termos de (103), (113) e (114) do apêndice I, forma-se, então, a matriz de rigidez $[K_2]$.

III.2.4.4) DETERMINAÇÃO DE $[K_L]$

No apêndice (I), apresentam-se os termos da matriz de rigidez linear, simétrica, cuja simples dedução dispensa maiores comentários.

A matriz $[K_L]$ é também apresentada no trabalho publicado por Wen (1983).

III.2.4.5) MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Nos casos em que os efeitos não lineares devidos às variações dos esforços e deformações ocorridas durante o incremento de carga são muito pequenos se comparados com o efeito da não-linearidade das forças internas e deformações que existem no início do incremento, as matrizes $[K_1]$ e $[K_2]$ podem ser desprezadas e a matriz de rigidez do elemento resulta:

$$[K_1] = [K_T] = [K_L] + [K_G] \quad (116)$$

Como $[K_T]$ só depende das forças internas e deformações existentes no início do incremento de carga, ela é usualmente denominada de matriz de rigidez tangente do elemento.

III.2.4.6) MATRIZ DE ROTAÇÃO

Para transformar as grandezas referidas do sistema global de coordenadas para o sistema local de coordenadas do elemento, utiliza-se a matriz de rotação $[R^e]$.

As matrizes de rigidez deduzidas anteriormente, referem-se ao sistema local de coordenadas do elemento. para transformá-las para o sistema global, usa-se a seguinte relação:

$$[K^G] = [R^e]^T \times [K^L] \times [R^e] \quad (117)$$

onde:

K^L é a matriz de rigidez do elemento no sistema local de coordenadas;

K^G é a matriz de rigidez do elemento no sistema global de coordenadas.

Na transformação do vetor de forças do elemento do sistema local para o global, usa-se a matriz de rotação transposta $[R^G]^T$. Essa transformação apresenta a seguinte forma:

$$\tilde{F}_G^G = [R^G]^T \times F_L^L \quad (118) ,$$

onde:

F_L^L é o vetor de forças do elemento no sistema local de coordenadas;

F_G^G é o vetor de forças do elemento no sistema global de coordenadas.

Seja o elemento em uma direção qualquer, exceto a direção vertical, representado na figura (18) a seguir:

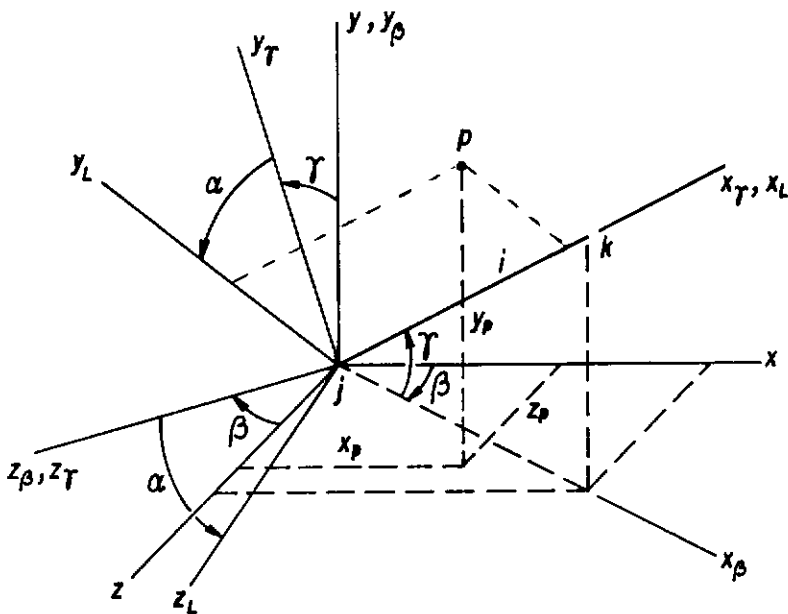


Figura 18 - Elemento em uma direção qualquer - rotações dos eixos.

Os termos não nulos da matriz de rotação desse elemento, $[R^*]$ 12×12 , são apresentados no apêndice (I).

Para o elemento vertical, conforme os casos mostrados na figura (19), os termos da matriz de rotação dos elementos são também apresentados no apêndice I.

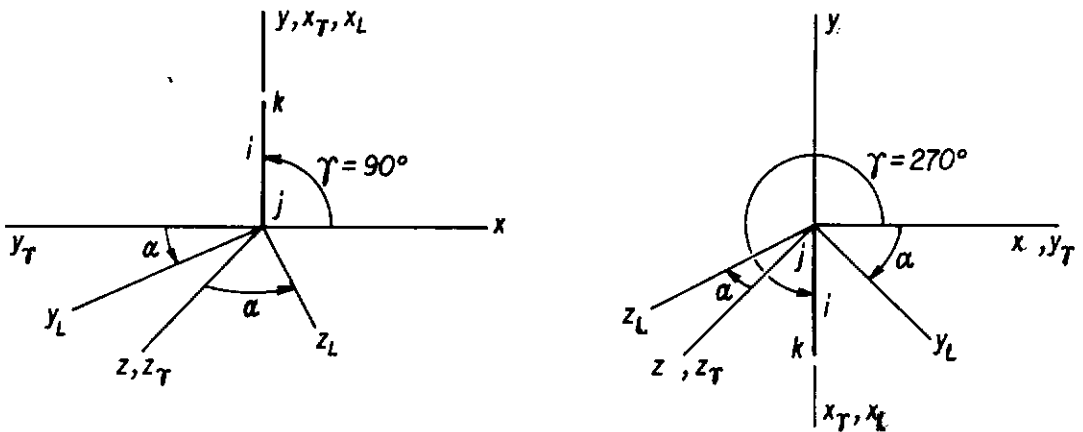


Figura 19 - Elemento vertical - rotações dos eixos.

A transformação da matriz de rigidez associada ao nó do contorno da estrutura que possui apoio elástico, do referencial local para o global é também do tipo:

$$[K_{mol}^g] = [R]^T [K_{mol}^L] [R] \quad (120)$$

$[K_{mol}^L]$ é a matriz de rigidez associada ao nó que possui apoio elástico referida ao sistema local de coordenadas;

$[R]$ é a matriz de rotação associada ao nó que possui apoio elástico;

$[K_{mol}^g]$ é a matriz de rigidez associada ao nó que possui

apoio elástico referida ao sistema global de coordenadas.

Os termos não nulos da matriz [R] são apresentados no apêndice (I). Os ângulos α , β , e γ desses termos estão representados na figura (18).

No caso da seção transversal do elemento ser circular, pode-se tomar a rotação α igual a zero, pois qualquer eixo no plano da seção é eixo principal de inércia.

III.2.4.7) A MATRIZ DE MASSA

A matriz de massa da estrutura é necessária a sua análise dinâmica. Ela é obtida a partir da soma da matriz de massa consistente com a matriz de massa adicional. A massa adicional do sistema é a que se deve à aceleração normal relativa entre as partículas fluidas e a estrutura.

III.2.4.7.1) MATRIZ DE MASSA CONSISTENTE

Pode-se determinar a matriz de massa consistente do elemento do pórtico espacial a partir da seguinte expressão utilizada para membros prismáticos:

$$[M_c]^e = \int_0^L \int_A \rho^e \times \underline{\underline{H}}^T \times \underline{\underline{H}} \, dA dx \quad (122), \text{ onde:}$$

ρ^e é a massa específica por unidade de volume do elemento.

\tilde{H} é o vetor de funções de interpolação dos deslocamentos do elemento em termos dos deslocamentos e rotações de seus nós.

Integrando-se a expressão (122) ao longo da área, A, da seção transversal do elemento, considerando-se o valor de ρ^e constante, obtém-se:

$$[M_c^e] = \rho^e \times A \times \int_0^L \tilde{H}^T \tilde{H} dx \quad (123)$$

No apêndice (I), determina-se a matriz $[M_c^e]$ a partir da expressão (123).

III.2.4.7.2) MATRIZ DE MASSA ADICIONAL

No presente trabalho, as forças hidrodinâmicas são calculadas através da fórmula de Morison, a qual contém parcelas de inércia e de arraste. Considerando-se a parcela de inércia da equação de Morison no sistema local de coordenadas, a força por unidade de comprimento pode ser escrita como:

$$q = M_a^e \ddot{u}_n \quad (137) \text{ , onde}$$

\ddot{u}_n é a aceleração transversal local do membro;

M_a^e é a massa adicional do elemento por unidade de comprimento.

A definição matemática de M_a^e é a seguinte:

$$M_a^e = 0.25 \times (Cm - 1) \times \rho \times \pi \times D^2 \quad (138), \text{ onde:}$$

Cm é o coeficiente de inércia;

D é o diâmetro externo correspondente ao elemento.

A matriz de massa adicional $[M_a^e]$ pode ser obtida a partir da seguinte expressão:

$$[M_a^e] = M_a^e \int_0^L \tilde{G}^T \times \tilde{G} \, dx \quad (139), \text{ onde}$$

\tilde{G} é o vetor de funções de interpolação dos deslocamentos transversais do elemento em termos dos deslocamentos e rotações de seus nós.

A obtenção da matriz $[M_a^e]$ a partir da expressão (139), encontra-se no apêndice (I).

A soma da matriz de massa consistente, cujos termos foram obtidos em (128), (132) e (136), no apêndice I, com a matriz de massa adicional, obtida em (141), também no apêndice I, resultará na matriz de massa total do elemento.

III.2.4.8) MATRIZ DE AMORTECIMENTO

Tendo em vista que a determinação do amortecimento viscoso ao longo do elemento é muito difícil e às vezes impraticável, utiliza-se, no presente trabalho, a matriz de amortecimento proporcional, $[C]$, que é representada por:

$$[C] = \bar{\alpha} \times [M] + \bar{\beta} \times [K] \quad (142)$$

Dados dois parâmetros de amortecimento crítico modais, ξ_1 e ξ_2 , correspondentes a duas frequências naturais diferentes do duto, ω_1 e ω_2 , é possível determinarmos os coeficientes $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, a partir do seguinte sistema de equações representado sob a forma indicial:

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta}\omega_i^2 = 2\omega_i \xi_i \quad (143)$$

Resolvendo o sistema (143) para os pares (ω_1, ξ_1) , (ω_2, ξ_2) , obtêm-se as seguintes expressões para $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$:

$$\bar{\alpha} = \frac{2\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1) \quad (144)$$

$$\bar{\beta} = \frac{2(\omega_2 \xi_2 - \omega_1 \xi_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (145)$$

Devido à presença da parcela de arraste na equação de Morison, que depende do quadrado da velocidade relativa entre o fluido e a estrutura, há o amortecimento hidrodinâmico. Sua contribuição ao amortecimento total do sistema estrutural pode ser computada através de iterações sobre a velocidade do duto, como será visto adiante, no procedimento de resolução do sistema de equações dinâmicas.

III.3) CARGAS ATUANTES

A avaliação das cargas atuantes no duto durante a fase de lançamento é essencial para sua análise estrutural. Nessa fase, ele está sujeito ao esforço de tração aplicado pela máquina tracionadora e às ações ambientais. Essas ações precisam ser bem entendidas a fim de se evitar problemas, como por exemplo o mal tensionamento do duto e erros no cálculo das tensões limites, o que poderia provocar sérias perdas.

As principais cargas ambientais atuantes no duto durante o lançamento são o peso próprio, o empuxo e as de onda e de corrente.

III.3.1) PESO PRÓPRIO

Durante o lançamento, um valor alto de peso específico do duto, implica grandes deformações em suas regiões de "sag bend" e "over bend". Em contrapartida, quando o duto atingir o fundo do mar, um grande peso específico se torna desejável por contribuir para sua estabilidade.

Assim, no dimensionamento da espessura da parede do duto, procura-se obter um peso próprio que evite deformações excessivas e ao mesmo tempo garanta a estabilidade do duto quando ele estiver no fundo do mar.

Muitas vezes com intuito de aumentar o peso próprio do duto para que fique estável no fundo do mar, sem alterar as dimensões do mesmo, usa-se revestimento, normalmente de concreto, que também pode ser utilizado

para proteção contra corrosão no duto de aço. O peso próprio do revestimento deve ser somado ao peso próprio do duto.

III.3.2) O EMPUXO

O princípio básico de Arquimedes afirma que um corpo totalmente ou parcialmente submerso em um líquido sofre a ação de uma força igual e contrária ao peso do fluido deslocado.

Portanto, à medida que o duto vai sendo lançado ao mar, atuam sobre sua extensão submersa, forças de pressão distribuídas cuja resultante é o empuxo.

Durante o lançamento, o empuxo atuante no trecho submerso do duto, contribui para a diminuição das deformações nas regiões de "sag bend" e de "over bend" da tubulação, por atuar em sentido contrário ao peso.

III.3.3) CARGAS DE ONDA E DE CORRENTE

III.3.3.1) PRELIMINARES

Na determinação das forças devidas à onda e à corrente sobre a estrutura, são necessárias as velocidades e acelerações da partícula fluida.

Uma vez adotado um perfil de distribuição de velocidades de corrente ao longo da direção vertical, desde o fundo até a superfície do mar, calculam-se, através da fórmula de Morison, as forças distribuídas devidas às ações simultâneas de onda e de corrente, somando-se vetorialmente as velocidades de onda e de corrente.

Com intuito de desenvolver um modelo matemático para o estudo da cinemática da onda, utilizaremos a teoria linear de Airy.

A hipótese básica da teoria de Airy é que a amplitude da onda seja muito menor que o comprimento da onda. Esta suposição é normalmente verificada no caso de águas profundas.

A teoria de onda utilizada na presente tese é descrita no apêndice (II).

Para o cálculo das forças de onda e de corrente é importante se ter um entendimento claro dos diversos sistemas de referência usados no processo, que são o sistema de referência global da estrutura, o sistema de referência local do elemento e o sistema de referência da onda.

O sistema de referência global da estrutura é definido quando especificadas as coordenadas dos pontos nodais da estrutura. O eixo Z coincide com a direção vertical, enquanto os eixos X e Y coincidem com direções relevantes do plano horizontal.

O sistema de referência local é definido para cada elemento da estrutura. O eixo x coincide com a linha baricêntrica do elemento orientado do nó inicial para o nó final do elemento, definido quando especificadas as incidências do elemento. Os eixos y e z no caso de seção transversal circular, podem ser escolhidos arbitrariamente.

No sistema de referência usado para onda, o eixo z_v coincide com o eixo Z global. O eixo x_v é horizontal mas normalmente não coincide com o eixo global X. Assim, um

Ângulo β é necessário para referir a direção de incidência da onda ao eixo global X.

A origem do sistema de referência da onda é usualmente localizada no nível de águas tranquilas e na direção da crista. A origem desse sistema normalmente não coincide com a origem do sistema de referência global. Assim, é necessário especificar-se um valor de "offset".

III.3.3.2) CÁLCULO DAS FORÇAS NA ESTRUTURA

Através da fórmula de Morison, calculam-se as forças distribuídas na tubulação, a partir das velocidades e acelerações das partículas fluidas.

A fórmula de Morison é aplicável quando a forma da onda incidente é pouco afetada pela presença do duto.

Na literatura são encontradas várias proposições para aplicação da fórmula de Morison.

Na técnica aplicada a seguir, é proposto que somente ao componentes normais de velocidade e aceleração produzam forças, desprezando-se as componentes axiais.

Considerando-se o elemento de seção transversal em forma de anel circular, a força total por unidade de comprimento resulta na seguinte expressão:

$$\underline{F} = C_D \times \rho \times \frac{D}{2} \times \left| \underline{v}_n \right| \times \underline{v}_n + C_M \rho \pi \frac{D^2}{4} \times \underline{a}_n \quad (175)$$

onde a primeira parcela corresponde à força de arraste enquanto a segunda, corresponde à força inercial, em que: \underline{v}_n e \underline{a}_n são as componentes normais ao elemento, da

velocidade e da aceleração totais, respectivamente;

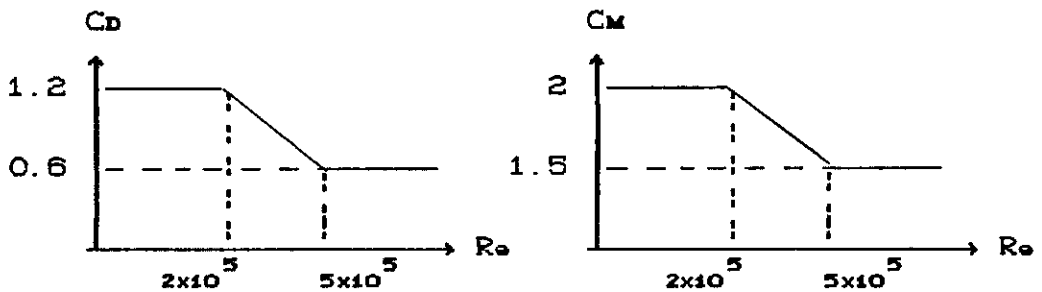
ρ - é a massa específica do fluido

D - é o diâmetro externo do duto

C_D - é o coeficiente de arraste

C_M - é o coeficiente de inércia

Os coeficientes C_M e C_D são funções do número de Reynolds, Re . Assim, uma das formas de determiná-los é através dos seguintes gráficos:



onde ,

$$Re = \frac{|\vec{v}_n| \times D}{\nu} \quad (176),$$

em que ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Para utilizarmos a fórmula de Morison (175), torna-se necessário o cálculo das componentes normais ao elemento, \vec{v}_n e \vec{a}_n .

Sejam os vetores:

$$\vec{v}_n = \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \quad (153) \text{ e}$$

$$\vec{a}_n = \begin{Bmatrix} \dot{u}_n \\ \dot{v}_n \\ \dot{w}_n \end{Bmatrix} \quad (177) ,$$

referidos ao sistema global de coordenadas. As componentes da força \vec{F} , normal ao elemento, F_x , F_y e F_z , nas direções X, Y e Z do sistema de referência global, respectivamente, valerão:

$$F_x = C_D \times \rho \times \frac{D}{2} \times |\vec{v}_n| \times u_n + C_m \rho \frac{\pi D^2}{4} \times \dot{u}_n \quad (178)$$

$$F_y = C_D \times \rho \times \frac{D}{2} \times |\vec{v}_n| \times v_n + C_m \rho \frac{\pi D^2}{4} \times \dot{v}_n \quad (179)$$

$$F_z = C_D \times \rho \times \frac{D}{2} \times |\vec{v}_n| \times w_n + C_m \rho \frac{\pi D^2}{4} \times \dot{w}_n \quad (180)$$

portanto, a força normal será

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (181)$$

A seguir adotaremos a técnica de Borgman (1958), onde somente as componentes de velocidade e de aceleração das partículas fluidas normais ao elemento contribuem para as forças de onda e de corrente.

A partir das coordenadas das extremidades de um elemento, obtem-se o vetor unitário, \underline{c} , em sua direção:

$$\underline{c} = Cx\hat{i} + Cy\hat{j} + Cz\hat{k} \quad (182)$$

onde Cx , Cy e Cz são os cossenos diretores do elemento.

Verifica-se que a componente normal ao elemento do vetor de velocidade, $\underline{v} = vx\hat{i} + vy\hat{j} + vz\hat{k}$, pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$\underline{v}_n = \underline{c} \times [\underline{v} \times \underline{c}] \quad (183)$$

que desenvolvida resulta em:

$$\underline{v}_n = (vx - CxR)\hat{i} + (vy - CyR)\hat{j} + (vz - CzR)\hat{k} \quad (184),$$

onde $R = Cxvx + Cyvy + Czvz$

Analogamente, obtém-se:

$$\underline{a}_n = (ax - CxS)\hat{i} + (ay - CyS)\hat{j} + (az - CzS)\hat{k} \quad (185)$$

onde $S = axCx + ayCy + azCz$

Verifica-se ainda que

$$|\underline{v}_n| = \sqrt{vx^2 + vy^2 + vz^2 - R^2} \quad (186)$$

Substituindo-se (184), (185) e (186) na equação de Morison apresentada em (175), tem-se, finalmente a expressão vetorial procurada:

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = C_m \rho \pi \frac{D^2}{4} \begin{bmatrix} a_x - C_x S \\ a_y - C_y S \\ a_z - C_z S \end{bmatrix} + \\ + C_d \times \rho \times \frac{D}{2} \left[v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - R^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \begin{bmatrix} v_x - C_x R \\ v_y - C_y R \\ v_z - C_z R \end{bmatrix} \quad (187)$$

As forças de onda e corrente podem, portanto, ser calculadas pela fórmula de Morison. Sua expressão mais geral, nos eixos locais, é dada por:

$$F = C_D \times \rho \times \frac{D}{2} |v_n^o + v_n^{cor} - v_n^{st}| \times (v_n^o + v_n^{cor} - v_n^{st}) + \\ + \rho \pi \frac{D^2}{4} [C_m a_n^o - (C_m - 1) \times a_n^{st}] \quad (188), \text{ onde}$$

Os superíndices "o", "cor" e "st" significam onda corrente e estrutura, respectivamente.

A fórmula de Morison acima considera também a velocidade e a aceleração de um fluido em relação à estrutura, que também está em movimento. Se desprezarmos o movimento da estrutura, os termos " v_n^{st} " e " a_n^{st} " se anulam e a fórmula (188) recai na (175).

A partir da fórmula (188), observa-se que a parcela de arraste é proporcional ao quadrado da velocidade relativa entre as partículas de água e a estrutura e, por isso, é não linear.

A parte inercial da equação (188), por sua vez, é composta de duas parcelas, $C_m \rho \pi \frac{D^2}{4} \times \ddot{a}_n^o$ que representa a força aplicada pela massa de um fluido acelerado em um cilindro fixo, e $\rho \pi \frac{D^2}{4} (C_m - 1) \ddot{a}_n^{at}$, que corresponde à força inercial causada por um cilindro acelerado em um fluido em repouso. A primeira é uma ação aplicada à estrutura, enquanto a segunda é uma resistência inercial. Esta resistência pode ser entendida como uma massa adicional de água acelerada juntamente com a massa do cilindro.

O coeficiente $C_m - 1$ que multiplica \ddot{a}_n^{at} está de acordo com o trabalho publicado por Garrison (1980), onde ele concluiu que o coeficiente de inércia de um fluxo acelerado sobre um cilindro fixo excede de 1 o coeficiente de inércia de um cilindro acelerado em um fluido em repouso.

CAPÍTULO IV

IV.1) MÉTODOS DE RESOLUÇÃO UTILIZADOS

Neste capítulo, descrevemos os procedimentos numéricos que foram implementados nas análises estática e dinâmica da presente tese.

IV.2) ANÁLISE ESTÁTICA NÃO LINEAR

Nessa análise, utilizamos o método incremental sem iterações e o método incremental com iterações, denominados de método incremental linear e método incremental não linear, respectivamente.

Em ambos os procedimentos, a carga é aplicada em uma sequência de pequenos incrementos calculando-se, em cada um deles, o incremento de deslocamento. A diferença entre os dois métodos é a forma como neles se determinam os incrementos de deslocamentos. Enquanto, no método incremental linear, utiliza-se a matriz de rigidez tangente da estrutura e se faz uma análise linear em cada incremento de carga, no método incremental não linear, utiliza-se a matriz de rigidez incremental da estrutura e se aplica um procedimento iterativo em que se checa a convergência. A figura (23) mostra como cada um desses dois métodos aproxima a verdadeira curva carga-deflexão. Os algoritmos desses métodos são apresentados no capítulo V.

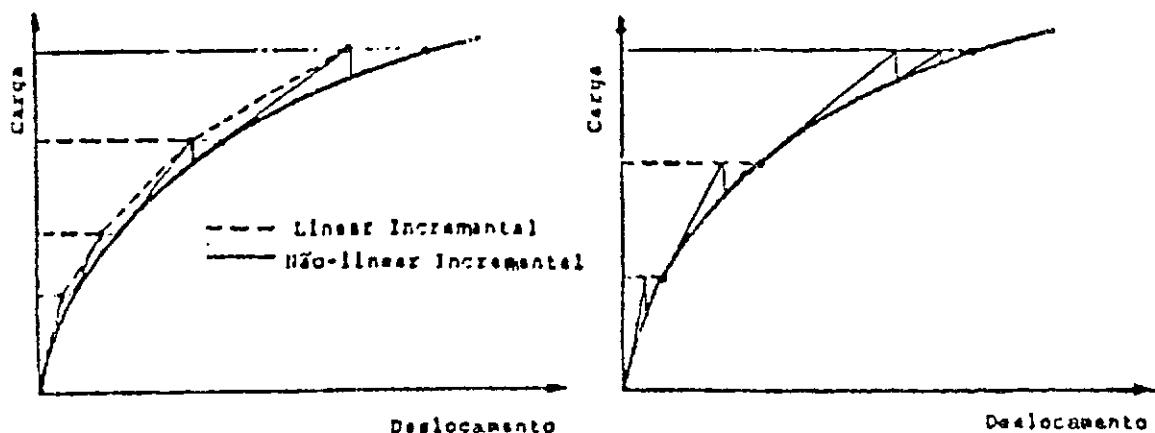


Figura 23 - Métodos incrementais linear e não linear

Como o princípio da superposição de efeitos só é válido para estruturas que apresentem comportamento linear, implementaram-se nesses métodos de resolução as etapas de cargas, isto é, as cargas podem não ser aplicadas simultaneamente e a solução final correspondente a uma etapa pode servir de ponto de partida para outra. Nos próximos parágrafos e nos algoritmos desses métodos, consideraremos uma etapa de carga genérica, tornando-se desnecessário um índice para identificá-la.

A configuração inicial da estrutura que se adota é de grande importância na convergência desses dois métodos. Na presente tese, assume-se que o duto se encontra inicialmente horizontal, em um nível próximo ao das águas tranquilas.

IV.2.1) MÉTODO INCREMENTAL SEM ITERAÇÕES (LINEAR)

Neste método, para calcular os deslocamentos incrementais, utiliza-se a matriz de rigidez tangente da estrutura, $[K_T]$. Como já foi visto anteriormente, esta matriz é obtida pela soma das matrizes de rigidez linear, $[K_L]$ e geométrica, $[K_G]$ e seus termos só dependem dos esforços internos e deformações existentes no início do incremento de carga, permanecendo constantes durante o incremento.

No início de cada incremento de carga, atualiza-se a matriz de rigidez tangente, a partir da geometria deformada e dos esforços internos existentes. Os esforços internos são usados para formar a matriz de rigidez geométrica, enquanto a estrutura deformada é usada para atualizar a matriz de rotação e o comprimento do elemento.

Obtida a nova matriz de rigidez da estrutura, calculam-se os deslocamentos incrementais, através da resolução da equação $[K_T] \Delta U = \Delta F$, que representa em notação matricial, um sistema de equações algébricas lineares, onde $[K_T]$ é a matriz de rigidez tangente da estrutura; ΔU é o vetor de deslocamentos nodais incrementais e ΔF é o vetor de cargas nodais incrementais. Estes deslocamentos incrementais obtidos são então usados para calcular os acréscimos nos esforços internos. Novos valores de deslocamentos, reações e esforços internos são então determinados, somando-se as quantidades incrementais aos valores totais previamente existentes. A partir destes valores atualizados de esforços e deslocamentos totais, forma-se a matriz de rigidez tangente para o próximo incremento de carga.

A vantagem deste método é que em cada incremento de carga aplicado, a resolução do sistema de equações só é necessária uma única vez. Por outro lado, como a matriz de rigidez tangente não considera os efeitos das variações nas deformações e forças internas que ocorrem ao longo dos incrementos, para que a solução numérica se aproxime da solução exata, devem-se usar incrementos de carga menores, ao se aplicar o método.

IV.2.2) MÉTODO INCREMENTAL COM ITERAÇÕES (NÃO LINEAR)

Este método utiliza a matriz de rigidez incremental da estrutura, $[K_I]$, na determinação dos deslocamentos incrementais. Como já foi visto, esta matriz é determinada pela soma de quatro parcelas: $[K_I] = [K_L] + [K_a] + [K_1] + [K_2]$. Seus termos dependem dos deslocamentos e esforços internos que ocorrem durante a atuação do incremento de carga. Como esses deslocamentos e esforços internos são desconhecidos no início do incremento de carga, um procedimento iterativo é necessário para se atualizar continuamente a matriz $[K_I]$.

Na presente tese, utilizaremos o método iterativo de Newton-Raphson cuja principal vantagem é a eficiência na obtenção de uma solução convergente.

O primeiro passo, no método incremental não linear, é semelhante ao método incremental linear: a partir da geometria deformada e dos esforços internos existentes no início do incremento de carga, formam-se as matrizes $[K_L]$ e $[K_a]$ da estrutura. Os termos de $[K_1]$ e $[K_2]$ são zerados. A matriz $[K_I] = [K_L] + [K_a]$ é então usada para determinar

uma primeira estimativa dos deslocamentos incrementais correspondentes ao incremento de carga aplicado. Inicia-se, então, o procedimento iterativo de Newton-Raphson, através do qual a matriz de rigidez incremental da estrutura é continuamente atualizada.

Os termos da matriz de rotação não se alteram durante as iterações. Eles só são atualizados no início do incremento de carga aplicada. O procedimento de Newton-Raphson consiste na determinação das diferenças entre as cargas externas e as forças internas que existem nos nós dos elementos, no final de cada iteração. Essas forças desequilibradas são então usadas para se calcularem acréscimos aos deslocamentos incrementais obtidos.

Quando os valores das forças desequilibradas forem desprezíveis, o procedimento iterativo é finalizado. Os deslocamentos incrementais então obtidos, são usados no cálculo dos incrementos aos esforços internos. Essas quantidades incrementais de esforços internos e deslocamentos são somadas aos valores de esforços internos e deslocamentos previamente existentes, respectivamente, obtendo-se os valores totais atualizados, a partir dos quais formam-se $[K_L]$ e $[K_G]$ para o próximo incremento.

IV.3) ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR NO DOMÍNIO DO TEMPO

As equações de equilíbrio que governam a resposta dinâmica de um sistema estrutural discretizado por elementos finitos, em um determinado instante $t + \Delta t$, são:

$$[M] \ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} + [C] \dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} + [K] \tilde{U}_{t+\Delta t} = \tilde{R}_{t+\Delta t} \quad (189), \text{ onde:}$$

$[M]$, $[C]$ e $[K]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez, respectivamente, deduzidas no capítulo (III) para o elemento;

$\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$, $\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$, $\tilde{U}_{t+\Delta t}$ são vetores de acelerações, de velocidades e de deslocamentos, respectivamente, dos nós do elemento no instante $t+\Delta t$.

$\tilde{R}_{t+\Delta t}$ é o vetor de cargas nodais atuantes no instante $t+\Delta t$.

Associam-se às equações (189) as seguintes condições iniciais:

$$\tilde{U}_{t=0} = \tilde{U}_0 \quad \text{e} \quad \dot{\tilde{U}}_{t=0} = \dot{\tilde{U}}_0 \quad (190)$$

As parcelas $[M]\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$, $[C]\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$ e $[K]\tilde{U}_{t+\Delta t}$, são os vetores de forças de inércia, de forças de amortecimento e de força elásticas (reações), nos nós do elemento, no instante $t+\Delta t$, respectivamente.

Em análise dinâmica, portanto, considera-se o equilíbrio estático em um determinado instante, incluindo-se os efeitos das forças de inércia e das forças de amortecimento.

Matematicamente, a expressão (189) representa um sistema de equações diferenciais de segunda ordem. Em análise por elementos finitos, a solução dessas equações pode ser obtida por dois métodos: o de integração direta e o de superposição modal.

No método numérico de integração direta, as equações (189) são integradas passo a passo. O termo "direto" significa que nenhuma transformação inicial das equações (189) é necessária.

Em essência, o método de integração direta é baseado em dois princípios:

- Primeiro, ao invés de tentar satisfazer as equações (189) em qualquer instante de tempo t , seu objetivo é satisfazê-las apenas em alguns instantes, com intervalos de tempo Δt . Isto significa que o equilíbrio é procurado em pontos discretos do intervalo de tempo analisado. Assim, as técnicas utilizadas para análise estática podem ser utilizadas nesse método.
- Segundo, assume-se uma variação de deslocamentos, velocidades e acelerações em cada intervalo de tempo Δt .

Os procedimentos de integração direta nos quais a solução das equações no instante $t+\Delta t$, é baseada em condições de equilíbrio no instante t , são denominados métodos de integração explícita. O método das diferenças centrais é o seu operador de integração mais comum. Por outro lado, os métodos de integração direta que utilizam as condições de equilíbrio no instante $t+\Delta t$ são chamados de métodos de integração implícita e neles se enquadram os métodos de Houbolt, Wilson e Newmark.

Considerando-se a estabilidade do método de integração, os procedimentos podem ser condicionalmente ou incondicionalmente estáveis. Um método de integração é dito incondicionalmente estável, se a solução, para quaisquer condições iniciais, não crescer ilimitadamente para qualquer intervalo de tempo Δt . Um procedimento de integração é condicionalmente estável quando o mesmo só ocorre para Δt menor que um determinado valor, usualmente chamado de limite de estabilidade. O método de diferenças centrais é condicionalmente estável, enquanto os métodos de Houboldt, Wilson e Newmark são incondicionalmente estáveis.

No método de superposição modal, modificam-se as equações de equilíbrio através da transformação a seguir, que nada mais é que uma mudança de base:

$$\underline{U}(t) = [P] \underline{X}(t) \quad (101), \text{ onde:}$$

$\underline{U}(t)$ são os deslocamentos nodais

$[P]$ é uma matriz de transformação

$\underline{X}(t)$ são os deslocamentos generalizados

O objetivo desta transformação é reduzir o esforço computacional. Um exemplo de matriz de transformação é a que utiliza os modos de vibrações livres da estrutura.

A escolha de um método de integração direta apropriado vai determinar a precisão, estabilidade e o custo da solução.

A limitação do uso do método de diferenças centrais para problemas de vibração estrutural é devida à necessidade de restrição do intervalo de tempo Δt , para que haja estabilidade. O valor de Δt deve ser menor do que T_n/π , onde T_n é o período natural da estrutura.

Em análise não linear, o período natural, T_n , não é constante, uma vez que a matriz de rigidez varia durante os cálculos, o que dificulta ainda mais o atendimento a esta restrição.

Na presente tese, utiliza-se o método implícito de integração direta de Newmark, comumente adotado em análise dinâmica não linear, por ser incondicionalmente estável e eficiente na resolução de equações dinâmicas não lineares.

IV.3.1) MÉTODO IMPLÍCITO DE INTEGRAÇÃO DIRETA DE NEWMARK COM MODIFICAÇÕES ADICIONAIS

O procedimento geral do método de integração direta consiste em se dividir o intervalo de tempo em estudo, de 0 a T, em n incrementos de tempo Δt iguais a T/n . Através da integração numérica no tempo, obtém-se uma solução aproximada nos instantes 0, Δt , $2\Delta t$, $3\Delta t$, ..., t, $t+\Delta t$, ..., T. O algoritmo, apresentado no capítulo V, calcula a solução no instante de tempo seguinte a partir das soluções nos instantes anteriores, ou seja, conhecendo-se as soluções nos instantes 0, Δt , $2\Delta t$, ..., t, obtém-se a

solução no instante $t+\Delta t$.

Visando-se atingir a convergência para a configuração de equilíbrio, tendo em vista a não linearidade do problema, utiliza-se o método iterativo de Newton-Raphson.

A equação de equilíbrio dinâmico para o problema de lançamento pode ser escrita da seguinte forma:

$$[M]\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} + [C]\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} + [K]U_{t+\Delta t} = F(t+\Delta t, U_{t+\Delta t}, \dot{U}_{t+\Delta t})$$

associada as condições iniciais $U_{t=0} = U_0$ e $\dot{U}_{t=0} = \dot{U}_0$

(192), onde:

$F(t+\Delta t, U_{t+\Delta t}, \dot{U}_{t+\Delta t})$ é o vetor de cargas atuantes no instante $t+\Delta t$ e que depende do deslocamento e da velocidade da estrutura.

O procedimento de Newmark é geralmente aplicado quando o vetor F depende somente de t . Como no caso de estruturas offshore, a força hidrodinâmica depende da velocidade relativa entre o fluido e a estrutura, uma modificação envolvendo iterações adicionais se faz necessária ao método, já que ele não se aplica diretamente ao problema aqui estudado.

Inicialmente, precisa-se fazer algumas suposições para resolver o sistema de equações dinâmicas, pois os deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura são desconhecidos no instante $t+\Delta t$. As suposições usadas nesse método são as seguintes:

$$\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} = \dot{\tilde{U}}_t + \left[(1 - \delta) \ddot{\tilde{U}}_t + \delta \ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t \quad (193)$$

$$\tilde{U}_{t+\Delta t} = \tilde{U}_t + \dot{\tilde{U}}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{\tilde{U}}_t + \alpha \ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (194)$$

onde α e δ são parâmetros que influem na precisão e estabilidade da integração. O método de integração é incondicionalmente estável para $\delta \geq 0.5$ e $\alpha \geq 0.25 (\delta + 0.5)^2$.

Através de algumas manipulações algébricas, nas equações (192), (193) e (194), obtêm-se as seguintes expressões para $\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$ e $\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$ em função dos deslocamentos

$\tilde{U}_{t+\Delta t}$:

$$\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} = a_0 \times (\tilde{U}_{t+\Delta t} - \tilde{U}_t) + a_1 \dot{\tilde{U}}_t + a_2 \ddot{\tilde{U}}_t \quad (195)$$

$$\ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t} = a_3 \times (\tilde{U}_{t+\Delta t} - \tilde{U}_t) + a_4 \dot{\tilde{U}}_t + a_5 \ddot{\tilde{U}}_t \quad (196)$$

onde:

$$a_0 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}, \quad a_1 = 1 - \frac{\delta}{\alpha}, \quad a_2 = \left(1 - \frac{\delta}{2\alpha} \right) \Delta t \quad (197)$$

$$a_3 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}, \quad a_4 = -\frac{1}{\alpha \Delta t}, \quad a_5 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$$

Utilizando o método iterativo de Newton-Raphson, a equação (192) pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} [M] \ddot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}^{(k)} + [C] \dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}^{(k)} + [K_I]_t \Delta U_{t+\Delta t}^{(k)} &= F(t+\Delta t, \tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k)}, \dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}^{(k)}) + \\ &- [K_I] \tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (198)$$

onde:

$\Delta \tilde{U}^{(k)} = \tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k)} - \tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k-1)}$ (199), em que o índice k representa o número da iteração.

Combinando-se as relações (195), (196) e (199) e substituindo-se em (198), obtém-se a equação final de equilíbrio dinâmico:

$$[K_{eq}] \times \Delta \tilde{U}^{(k)} = \tilde{F}_{eq} \quad (200), \text{ onde:}$$

$$[K_{eq}] = [K]_{I t} + a_0 [C] + a_3 [M] \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{eq} = & \tilde{F}(t + \Delta t, \tilde{U}_{t+\Delta t}, \dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}) - [K]_{I t} \tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k-1)} + \\ & - [C] [a_0 (\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k-1)} - \tilde{U}_t) + a_1 \dot{\tilde{U}}_t + a_2 \ddot{\tilde{U}}_t] + \\ & - [M] [a_3 (\tilde{U}_{t+\Delta t}^{(k-1)} - \tilde{U}_t) + a_4 \dot{\tilde{U}}_t + a_5 \ddot{\tilde{U}}_t] \end{aligned} \quad (202)$$

A equação (200) de análise dinâmica não linear iterativa apresenta a mesma forma que a equação (2) utilizada na análise estática não linear. Sendo assim, pode-se concluir que as técnicas iterativas para análise estática podem ser também aplicadas para a análise dinâmica. No entanto, a análise dinâmica não linear exige um maior rigor nas iterações que a análise estática, pois qualquer erro cometido em um determinado instante do processo de resolução afetará todas as demais soluções que vierem a ser obtidas nos intervalos subseqüentes.

Como \tilde{F}_{eq} é função não linear da velocidade da estrutura $\dot{\tilde{U}}_{t+\Delta t}$ desconhecida no instante $t+\Delta t$, são

necessárias iterações adicionais referentes à velocidade da estrutura, $\dot{\underline{U}}_{t+\Delta t}$. O processo se inicia com a determinação de $\underline{U}_{t+\Delta t}$, através da fórmula (195), que será usada no cálculo das forças de onda e corrente. Obtido o vetor $\Delta \underline{U}^{(k)}$, calcula-se o vetor de deslocamentos e compara-se este vetor com o obtido na iteração adicional anterior. Se a diferença entre eles for menor que a tolerância estabelecida, avança-se para o próximo intervalo de tempo; caso contrário, atualiza-se o vetor de velocidades da estrutura introduzindo o novo vetor de deslocamentos na equação (195) e reinicia-se o processo.

Obtido $\underline{U}_{t+\Delta t}$, calculam-se os vetores de velocidade e aceleração através das expressões (195) e (196) e parte-se para o intervalo de tempo seguinte.

Uma questão importante é a escolha de um intervalo de tempo Δt apropriado. Ele deve ser pequeno o suficiente para se obter uma solução precisa, mas não deve ser menor que o necessário, pois encarece a solução.

A convergência em análise dinâmica é sempre alcançada, desde que o intervalo seja suficientemente pequeno, uma vez que a contribuição da matriz de massa na formação da matriz de rigidez efetiva, torna-se dominante.

IV.3.2) ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES

Na presente tese, desenvolveu-se também um programa que determina as frequências naturais e os modos de vibrações livres de estruturas espaciais de barras sob tensões iniciais considerando não linearidade geométrica, pelo método dos elementos finitos.

A análise de vibrações livres de um sistema estrutural submetido a um estado de tensões iniciais $\underline{\delta}$, consiste na resolução do problema de autovalor.

$$\left\{ \left[K_T \right] \left(\underline{U}^\delta \right) - \omega^2 \left[M \right] \right\} \underline{U} = \underline{0} , \quad (203)$$

sendo que ω corresponde às frequências naturais, $[M]$ à matriz de massa, \underline{U} aos autovetores ou modos de vibração e $[K_T]$ à matriz tangente.

As matrizes $[M]$ e $[K_T]$ já foram deduzidas no capítulo III e seus termos se encontram no apêndice I.

Para resolução do problema de autovalores e autovetores da equação (203), implementou-se a subrotina de Jacobi do livro do Bathe, ao programa.

A análise de frequências naturais é feita a partir dos resultados finais da análise estática do lançamento do duto. O procedimento é o seguinte: ao final da análise estática, guardam-se a configuração deformada da estrutura bem como seus esforços internos e reações em um determinado arquivo. Ao se iniciar a análise de frequências, a primeira tarefa é a leitura deste arquivo para recuperação dessas grandezas e daí se poder calcular a matriz de rigidez da estrutura. Em seguida, procede-se ao cálculo de frequências naturais e modos de vibração da estrutura.

IV.4) PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS DE SIMULAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTATO

Estes procedimentos permitem que as condições de contorno do problema sejam modificadas no final de cada incremento de carga aplicado, através da utilização dos seguintes tipos de apoios especiais nos nós do contorno da estrutura:

- a) Apoio elástico, descontínuo em uma determinada direção, que só se torna efetivo quando a coordenada nesta direção do nó em que está conectado, atingir um valor previamente definido. Isto representa que foi estabelecido contato em uma região do contorno da estrutura, nesta direção;
- b) Apoio semelhante ao anterior, mas que só funciona à compressão. No caso de tração, o deslocamento do nó em que está conectado, na direção de descontinuidade deste apoio, fica sem restrições.

O procedimento numérico referente ao apoio elástico descontínuo consiste em se comparar a nova coordenada do nó do contorno da estrutura, na direção de descontinuidade, obtida da correção de coordenadas no final do incremento de carga, à coordenada previamente definida que representa um limite ao deslocamento nodal, em função do problema que se está analisando. Associa-se então, à direção cujo limite for atingido ou ultrapassado, a constante elástica do apoio, previamente definida para essa direção de descontinuidade.

No caso do apoio elástico descontínuo que só funciona à compressão, verificamos se a reação na direção

da descontinuidade no nó a ele conectado, calculada no final do incremento de carga aplicado, é de natureza trativa ou compressiva. O grau de liberdade correspondente à direção de descontinuidade tracionada deixa de ser restringido. Verifica-se também, em cada iteração, a natureza da reação, aplicando-a, com sinal contrário, à configuração deformada da iteração imediatamente anterior, liberando, em seguida, o grau de liberdade correspondente.

Para que a restrição ao deslocamento nodal, em uma determinada direção seja praticamente total, podemos atribuir ao apoio elástico descontínuo uma grande rigidez. É o que se faz no caso dos apoios elásticos correspondentes ao terreno do fundo do mar, suposto rígido, que apoia o duto.

CAPÍTULO V

V.1) IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

V.1.1) INTRODUÇÃO

Baseado no trabalho descrito nas seções anteriores, desenvolveram-se dois programas de computador para as análises estruturais estática e dinâmica tridimensionais de dutos durante a fase de lançamento. Através deles, é possível a determinação das curvas carga-deflexão aproximadas, bem como da carga crítica de instabilidade da estrutura. Além de toda a implementação necessária ao elemento finito de pórtico tridimensional com não linearidade geométrica, introduziram-se no programa características específicas do problema a ser estudado e que serão apresentados no presente capítulo.

V.2) APOIOS ESPECIAIS

No capítulo anterior, descreveu-se o procedimento numérico de simulação do problema tridimensional de contato no contorno da estrutura e apresentaram-se os apoios elásticos descontínuos úteis a essa finalidade.

A direção de um apoio elástico descontínuo é definida por três ângulos que permitem a formação da matriz de rotação, $[R]$, obtida em (121), no apêndice I, correspondente ao nó em que o apoio está conectado.

A constante de mola correspondente ao apoio pode ser de deslocamento ou de rotação. Se a mola que representa o

apoio elástico for do tipo linear, a sua rigidez é constante.

Associamos ao nó que possui apoio elástico descontínuo uma matriz de rigidez diagonal, $[K_{mol}]$, apresentada a seguir:

$$\begin{bmatrix} L \\ K_{mol} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x & & & & & \\ & K_y & & & & \\ & & K_z & & & \\ & & & K_{xx} & & \\ & 0 & & & K_{yy} & \\ & & & & & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (204)$$

onde

K_x , K_y e K_z são as constantes de mola de deslocamento das direções x , y e z , respectivamente, do sistema de referência local.

K_{xx} , K_{yy} e K_{zz} são as constantes de mola de rotação em torno dos eixos x , y e z , respectivamente, do sistema de referência local.

Para implementar o apoio descontínuo elástico, fazemos inicialmente a transformação da matriz $\begin{bmatrix} L \\ K_{mol} \end{bmatrix}$ do sistema local para o sistema global de coordenadas apresentada em (120) e que repetiremos a seguir:

$$\begin{bmatrix} G \\ K_{mol} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} L \\ K_{mol} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R \end{bmatrix} \quad (120)$$

Em seguida, acrescentamos os termos da matriz $\begin{bmatrix} G \\ K_{mol} \end{bmatrix}$ obtida, aos termos da matriz de rigidez da

estrutura correspondentes aos graus de liberdade de $[K_{mol}^a]$.

V.3) CÁLCULO DAS FORÇAS DE ONDA E DE CORRENTE

Para o cálculo das forças de onda e de corrente através da formula de Morison, implementamos a técnica publicada por Borgman (1958), na qual, conforme já foi dito no capítulo III, somente as componentes de velocidade e de aceleração das partículas fluidas normais ao elemento contribuem para essas forças.

Na avaliação das forças de onda e de corrente, determina-se inicialmente se o elemento está seco, totalmente molhado ou parcialmente molhado. No primeiro caso, não se computam forças. No último caso, o ponto de interseção entre o elemento e a água do mar é determinado. Nos dois últimos casos, as intensidades de força, F_x , F_y e F_z , podem ser avaliadas em quantos pontos se desejar. No presente trabalho adotamos cinco pontos que dividam cada elemento em quatro partes iguais e utilizamos interpolação linear para essa carga distribuída.

Calculam-se, então, as cargas nodais equivalentes para os membros que, por sua vez, são devidamente computadas no vetor de cargas nodais que será utilizado na análise.

Os programas de análises estática e dinâmica desenvolvidos no presente trabalho utilizam as fórmulas de Morison (175) e (188), respectivamente, para calcular as forças de ondas e de correntes.

Implementaram-se, no programa de análise estática, as seguintes possibilidades para ações de ondas e correntes:

- ação do peso próprio, em uma primeira etapa, e então, à configuração deformada do duto atingida, aplicam-se as forças de corrente e/ou onda, em uma segunda etapa;
- ação de forças de corrente, além do peso próprio, na primeira etapa e sobre a configuração alcançada pelo duto, introduzem-se as forças de onda, na segunda etapa;
- uma única etapa de cargas incluindo as ações simultâneas do peso próprio e das forças de corrente e/ou onda.

V.4) CÁLCULO DO EMPUXO

Foi previsto também o cálculo automático do empuxo.

Uma vez determinado se o elemento está seco, molhado ou parcialmente molhado procede-se da seguinte maneira: Se o elemento estiver seco, não se calcula empuxo; se ele estiver totalmente molhado, calcula-se o empuxo por unidade de comprimento do elemento; se estiver parcialmente molhado, calcula-se o empuxo por unidade de comprimento do trecho submerso do elemento.

Os valores de empuxo calculados, são descontados do peso distribuído, obtendo-se um peso efetivo atuante.

Na presente tese, para simular o lançamento, adotamos uma configuração inicial para o duto, horizontal, próxima ao nível das águas tranquilas, e aplicamos a carga através de sucessivos pequenos incrementos. Assim, não utilizamos o cálculo automático do empuxo, nos exemplos

estudados, nos quais descontamos o empuxo do peso antes de iniciarmos a análise.

V.5) ALGORÍTMOS IMPLEMENTADOS

Descrevem-se, a seguir, os algoritmos utilizados nos programas de computador referentes às análises estática e dinâmica que foram explicados anteriormente.

V.5.1) ANÁLISE ESTÁTICA

V.5.1.1) MÉTODO INCREMENTAL LINEAR

- 1- Leitura dos dados
- 2- Formação do vetor $\Delta \underline{F}_1$ de incrementos de cargas aplicadas diretamente aos nós
- 3- INC = 0
- 4- Incremento INC: INC = INC + 1
- 5- Cálculo do vetor $\Delta \underline{F}_2$ de incrementos de cargas nodais equivalentes às cargas de membro devidas ao peso próprio, à onda e à corrente, etc...
- 6- Formação do vetor $\Delta \underline{F}$ de incrementos de cargas a partir da soma $\Delta \underline{F} = \Delta \underline{F}_1 + \Delta \underline{F}_2$
- 7- Formação da matriz de rigidez linear de cada elemento, $\left[\overset{\circ}{K}_L \right]$
- 8- Formação da matriz de rigidez geométrica de cada elemento, $\left[\overset{\circ}{K}_G \right]$, a partir da geometria e esforços internos existentes
- 9- Determinação da matriz de rigidez tangente do elemento, utilizando-se a equação $\left[\overset{\circ}{K}_T \right] = \left[\overset{\circ}{K}_L \right] + \left[\overset{\circ}{K}_G \right]$

- 10- Formação da matriz de rotação de cada elemento
- 11- Transformação da matriz de rigidez tangente de cada elemento do sistema de referência local para o global
- 12- Montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura, $[K_T]$, no sistema global de coordenadas
- 13- Introdução das condições de contorno
- 14- Procedimento da resolução do sistema de equações representado pela notação matricial $[K_T] \times \Delta \underline{D} = \Delta \underline{F}$, onde $\Delta \underline{D}$ é o vetor de deslocamentos incrementais
- 15- Teste do sinal dos termos da diagonal principal das matrizes de rigidez. Se houver sinal negativo, significa que se atingiu a carga crítica e então, imprimem-se resultados e interrompe-se a execução do programa; caso contrário, prossegue-se
- 16- Determinação dos incrementos de esforços internos e dos incrementos de reações nodais pela soma das variações de esforços internos e de reações, calculadas a partir de $\Delta \underline{D}$, aos incrementos de esforços de engastamento perfeito referidos ao sistema local e global de coordenadas, respectivamente
- 17- Cálculo dos novos deslocamentos, esforços internos e reações totais através da soma das quantidades incrementais obtidas aos valores previamente existentes
- 18- Atualização das coordenadas e das condições de contorno
- 19- Retorno ao passo 4 até que a carga total seja aplicada
- 20- Impressão dos resultados finais após aplicação da carga total

V.5.1.2) MÉTODO NÃO LINEAR INCREMENTAL

- 1- Leitura dos dados
- 2- Formação do vetor ΔF_1 de incrementos de cargas aplicadas diretamente nos nós
- 3- INC = 0
- 4- incremento INC: INC = INC + 1
- 5- Cálculo do vetor ΔF_2 de incrementos de cargas nodais equivalentes às cargas de membro devidas ao peso próprio, à onda e à corrente, etc...
- 6- Formação do vetor ΔF de incrementos de cargas a partir da soma $\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2$
- 7- Formação da matriz de rigidez linear de cada elemento, $[K_L]$
- 8- Formação da matriz de rigidez geométrica de cada elemento, $[K_G]$, a partir da geometria e esforços internos existentes
- 9- Determinação da matriz de rigidez do elemento, utilizando-se a equação $[K_I] = [K_T] = [K_L] + [K_G]$
- 10- Formação da matriz de rotação de cada elemento
- 11- Transformação da matriz de rigidez de cada elemento, $[K_I]$, do sistema de referência local para o global
- 12- Montagem da matriz de rigidez da estrutura, $[K_I]$, no sistema global de coordenadas
- 13- Introdução das condições de contorno
- 14- IT = 0
- 15- Iteração IT: IT = IT + 1
- 16- Procedimento da resolução do sistema de equações representado pela notação matricial $[K_I] \times [\Delta d] = \Delta F$

- 17- Teste do sinal dos termos da diagonal principal das matrizes de rigidez. Se houver sinal negativo significa que se atingiu a carga crítica e então, imprimem-se resultados e interrompe-se a execução do programa; caso contrário, prossegue-se
- 18- Atualização do vetor de deslocamentos incrementais, $\Delta \underline{D}$, através da soma: $\Delta \underline{D} = \Delta \underline{D} + \Delta \underline{d}$
- 19- Formação das matrizes $\left[\overset{\circ}{K}_1 \right]$ e $\left[\overset{\circ}{K}_2 \right]$ de cada elemento a partir do vetor de deslocamentos incrementais atualizados, $\Delta \underline{D}$.
- 20- Formação da matriz $\left[\overset{\circ}{K}_I \right]$ de cada elemento, a partir da soma $\left[\overset{\circ}{K}_I \right] = \left[\overset{\circ}{K}_L \right] + \left[\overset{\circ}{K}_G \right] + \left[\overset{\circ}{K}_1 \right] + \left[\overset{\circ}{K}_2 \right]$
- 21- Transformação da matriz $\left[\overset{\circ}{K}_I \right]$ de cada elemento do referencial local para global com utilização da matriz de rotação de cada elemento, calculada no passo 10
- 22- Determinação dos vetores de acréscimos de esforços internos de cada elemento, $\Delta \underline{e}_{if}$, e de acréscimos de reações nodais, $\Delta \underline{r}_{ea}$, a partir do vetor $\Delta \underline{d}$, com utilização das matrizes $\left[\overset{\circ}{K}_I \right]$, obtidas no passo 20
- 23- Formação da matriz de rigidez incremental tangente da estrutura, $\left[K_I \right]$, no sistema global de coordenadas
- 24- Introdução de condições de contorno
- 25- Cálculo do vetor de cargas nodais desequilibradas, descontando-se o vetor de acréscimos de reações nodais, $\Delta \underline{r}_{ea}$, do vetor de incrementos de carga, $\Delta \underline{F}$; usado no passo 16, ou seja, $\Delta \underline{F} = \Delta \underline{F} - \Delta \underline{r}_{ea}$
- 26- Adaptação do vetor $\Delta \underline{F}$, obtido no passo 25, às condições de contorno introduzidas no passo 24

27- Atualização dos vetores de variações de esforços internos de cada elemento, $\Delta_{\sim\text{ESF}}$, e de variações de reações nodais, $\Delta_{\sim\text{REA}}$, através das somas:

$$\Delta_{\sim\text{ESF}} = \Delta_{\sim\text{ESF}} + \Delta_{\sim\text{esf}} \quad \text{e} \quad \Delta_{\sim\text{REA}} = \Delta_{\sim\text{REA}} + \Delta_{\sim\text{rea}}$$

respectivamente

28- Determinação dos vetores de incrementos de esforços internos de cada elemento e de incrementos de reações nodais pela soma de $\Delta_{\sim\text{ESF}}$ e de $\Delta_{\sim\text{REA}}$ aos vetores de incrementos de esforços de engastamento perfeito nos referenciais local e global, respectivamente

29- Repetem-se os passos 15 a 28 até que a convergência seja atingida

30- Cálculo dos novos deslocamentos, esforços internos e reações totais através da soma das quantidades incrementais obtidas, aos valores previamente existentes

31- Atualização das coordenadas e de condições de contorno

32- Retorno ao passo 4 até que a carga total seja aplicada

33- Impressão dos resultados finais após aplicação da carga total

V.5.2) ANÁLISE DINÂMICA

V.5.2.1) MÉTODO DE NEWMARK COM ITERAÇÕES DE NEWTON-RAPHSON

1- Leitura dos dados

2- Cálculo das constantes de integração (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5)

3- $\text{TMP} = 0$

4- Tempo TMP: $\text{TMP} = \text{TMP} + \Delta t$

- 5- Formação das matrizes de rotação, de massa, de amortecimento, de rigidez linear e geométrica de cada elemento
- 6- ITBAS = 0
- 7- Iteração ITBAS: ITBAS = ITBAS + 1
- 8- Se ITBAS = 1, o vetor de velocidades \underline{VEL} correspondente ao instante TMP é igualado ao vetor de velocidades do instante anterior, \underline{VELT}
- 9- Se ITBAS \neq 1, o vetor \underline{VEL} é calculado pela fórmula (195)
- 10- Formação do vetor de carregamento \underline{DF}_1 com as cargas nodais estáticas e/ou dinâmicas
- 11- Cálculo do vetor \underline{DF}_2 de cargas nodais equivalentes às cargas de membro devidas ao peso próprio, à onda e à corrente, etc...
- 12- Formação do vetor \underline{DF} a partir da soma $\underline{DF} = \underline{DF}_1 + \underline{DF}_2$
- 13- ITINT = 0
- 14- Se ITBAS = 1, formação da matriz global de rigidez equivalente da estrutura sem as parcelas $[K_1]$ e $[K_2]$:

$$[K_{eq}] = [K_L] + [K_G] + a_0 [C] + a_3 \times [M]$$
- 15- Iteração ITINT: ITINT = ITINT + 1
- 16- Determinação das parcelas de \underline{F}_{eq} relacionadas às matrizes $[M]$ e $[C]$
- 17- Cálculo do vetor de cargas nodais desequilibradas, \underline{F}_{eq} , a partir da fórmula (202)
- 18- Se ITBAS = ITINT = 1, introdução das condições de contorno
- 19- Se ITBAS > 1 e ITINT = 1, formação da matriz global de rigidez equivalente da estrutura, sem as parcelas $[K_1]$ e $[K_2]$:

$$[K_{eq}] = [K_L] + [K_G] + a_0 [C] + a_3 \times [M]$$

- 20- Se $ITINT > 1$, formação da matriz global de rigidez equivalente da estrutura, com as parcelas $[K_1]$ e $[K_2]$:
- $$[K_{eq}] = [K_L] + [K_G] + [K_1] + [K_2] + a_0[C] + a_3 \times [M]$$
- 21- Se $ITBAS > 1$ ou $ITINT > 1$, introdução das condições de contorno
- 22- Procedimento de resolução do sistema de equações representado pela notação matricial: $[K_{eq}] \times \Delta U = F_{eq}$
- 23- Teste do sinal dos termos da diagonal principal das matrizes de rigidez. Se houver sinal negativo, significa que se atingiu a carga crítica e então imprimem-se os resultados e interrompe-se a execução do programa; caso contrário, prossegue-se
- 24- Atualização do vetor de incrementos de deslocamentos nodais totais, \underline{DD} , no intervalo de tempo em questão, através da soma: $\underline{DD} = \underline{DD} + \Delta U$, onde ΔU é o vetor de deslocamentos obtidos da solução do sistema de equações (passo 22)
- 25- Formação das Matrizes $[K_1^e]$ e $[K_2^e]$ de cada elemento a partir do vetor \underline{DD}
- 26- Atualização dos esforços de extremidade de membro e das reações nodais através da soma das quantidades incrementais obtidas aos valores previamente existentes
- 27- Repetição dos passos 14 a 26 até que a convergência seja atingida
- 28- Se $ITBAS = 1$: retorno ao passo 7; caso contrário: comparação entre o vetor de deslocamentos obtidos na iteração $ITBAS$ com o obtido na iteração $ITBAS - 1$. Se a diferença for menor que a tolerância estabelecida: atualização dos vetores de deslocamentos, velocidades

e acelerações totais da estrutura acumulados até o instante TMP, a partir do vetor \underline{DD} , obtido no passo 24, e retorna-se ao passo 4 até que se chegue ao fim do intervalo de tempo analisado; caso contrário: retorno ao passo 7.

CAPÍTULO VI

VI.1) EXEMPLOS

Apresentam-se a seguir, os principais exemplos numéricos analisados com objetivo de demonstrar e avaliar a capacidade e precisão dos programas computacionais desenvolvidos, bem como de estudar o lançamento de dutos submarinos. A apresentação de resultados é feita através de gráficos e tabelas.

No primeiro exemplo, analisa-se um problema real de lançamento. Trata-se de um duto com diâmetro externo de 0.9144 m, revestido de concreto, instalado com utilização de barcaça e stinger de lançamento em uma lâmina d'água de 30 m. Os resultados da análise estática do duto sob ação do peso próprio, empuxo e tração são comparados com os apresentados no manual do programa comercial "Pipeline". Este programa não foi acessado.

No segundo exemplo, estuda-se um outro caso real de lançamento de um duto com diâmetro nominal de 0.4064 m revestido de concreto, em uma lâmina d'água de 100 m. Foram feitas diversas análises, variando-se os principais parâmetros do problema: força axial, deslocamento imposto, corrente, onda, constante de mola do solo e curvatura do stinger. Comparam-se resultados da análise do duto sob ação do peso próprio, empuxo e tração com outros existentes obtidos por programa comercial. Também não houve acesso a este programa.

No terceiro exemplo, é feita análise dinâmica de uma viga engastada num extremo e livre no outro, sob carga uniformemente distribuída. O objetivo desta análise é

testar a implementação do método de integração direta de Newmark para o estudo do problema dinâmico não linear da presente tese. Também se faz uma comparação entre as soluções linear e não linear do problema. Os resultados obtidos são comparados com outros existentes na literatura (Bathe, 1976).

O quarto caso é uma extensão do segundo. São feitas análises dinâmicas a partir de configurações deformadas e esforços internos obtidos de análises estáticas do segundo exemplo, escolhidas de forma a permitir um estudo adequado da influência da onda de Airy na análise.

As tensões axiais máximas são obtidas, no programa, através da soma das tensões axiais de extensão com as de flexão. São comparadas ao valor da tensão de escoamento do material que constitui o duto (critério de projeto tradicionalmente utilizado na área de estruturas offshore).

A análise dos resultados obtidos nesses exemplos e comparações são feitas no item VI.6.

VI.2) ANÁLISE ESTÁTICA DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 30 m

Apresenta-se a seguir, a análise do lançamento de um duto de diâmetro externo de 0.9144 m com 0.0159 m de espessura e 300 m de comprimento, vazio, em uma lâmina d'água de 30 m de profundidade, com utilização de barcaça e stinger de lançamento ("S-Lay").

O duto apresenta duas camadas de revestimento:

- A primeira, com diâmetro externo de 0.9244 m, compõe-se de material de peso específico de 11.05 kN/m^3 .
- A segunda, de 1.0904 m de diâmetro externo é constituída por material com peso específico de 30.44 kN/m^3 .

O aço que constitui o duto tem peso específico de 78.5 kN/m^3 e módulo de elasticidade de $2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$. Sua tensão de escoamento é de $413 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$.

A massa específica da água do mar é de 1025 kg/m^3 .

A força de tração aplicada pela máquina tracionadora é de 360 kN.

O stinger de lançamento apresenta um raio de curvatura de 457.2 m e comprimento de 98.05 m.

O ângulo inicial que o stinger forma com a horizontal é igual a soma do ângulo da rampa relativo à barcaça cujo valor é 4.5° com o ângulo que a barcaça forma com a horizontal, ajustado neste caso para o valor de 0° .

Utilizaram-se 120 incrementos de carga e em cada incremento foram necessárias de 2 a 3 iterações de equilíbrio.

- O duto é discretizado em 50 elementos com comprimentos aproximadamente iguais entre si. A numeração de nós e elementos é sequencial, a partir de 1;

- Adotam-se para as direções horizontal e vertical, as direções dos eixos X e Z do sistema de referência global, respectivamente. O sentido positivo do eixo X é definido do nó 1 ao último extremo do duto. O sentido positivo de eixo Z é definido como sendo para cima, com origem no terreno do fundo do mar;

- Considera-se uma configuração inicial horizontal para o duto correspondente a coordenada vertical Z de localização da máquina tracionadora na barcaça cujo valor é 33.20 m;

- As translações do nó 1 são impedidas. O nó 1 portanto, corresponderá ao extremo superior do duto. A figura 24 apresenta um esquema do sistema estrutural numa configuração deformada;

- O stinger é modelado através de molas inclinadas em relação a vertical, que apresentam descontinuidade em suas rigidezes e só funcionam à compressão. Essas molas só se acoplam aos nós do duto quando eles atingem coordenadas pré-fixadas, definidas a partir do ângulo de saída, do comprimento e do raio de curvatura do stinger.

- O terreno do fundo do mar é modelado por molas verticais com descontinuidade em suas rigidezes. Tais molas só se acoplam aos nós do duto quando eles alcançam as coordenadas do terreno do fundo do mar. Essas molas só funcionam à compressão.

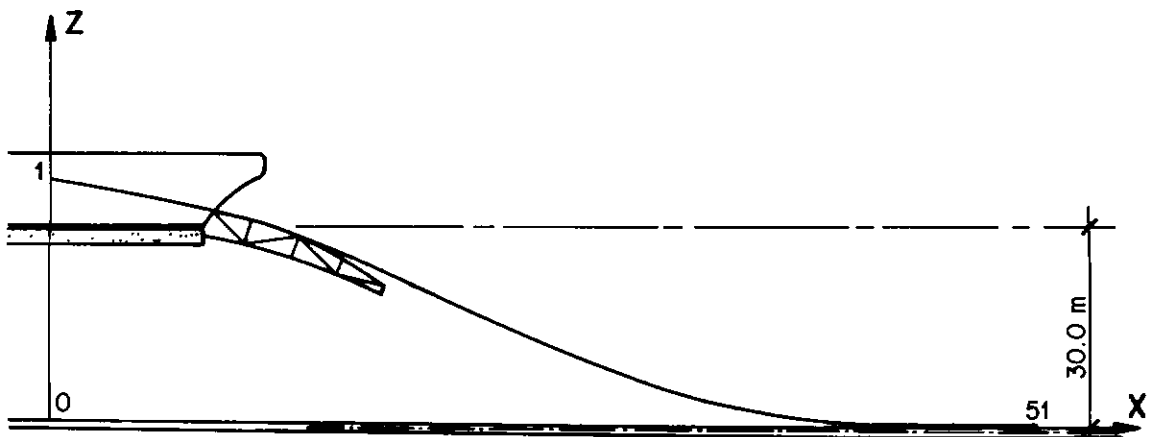


Figura 24 - Esquema de configuração deformada da tubulação.

O método utilizado foi o de análise incremental não linear. Os resultados finais obtidos são apresentados nas tabelas 1 a 3.

Programa da Tese				Programa "Pipeline"		
coordenadas (m)				coordenadas (m)		
Nó	X (horiz.)	Y (horiz.)	Z (vert.)	X (horiz.)	Y (horiz.)	Z (vert.)
01	-10.05	0.00	33.20	-10.05	0.00	33.20
02	- 4.07	0.00	32.75	- 4.07	0.00	32.74
03	1.93	0.00	32.25	1.92	0.00	32.25
04	7.91	0.00	31.72	7.90	0.00	31.72
05	13.88	0.00	31.10	13.87	0.00	31.10
06	19.84	0.00	30.41	19.83	0.00	30.41
07	25.80	0.00	29.64	25.79	0.00	29.64
08	31.75	0.00	28.79	31.73	0.00	28.79
09	37.68	0.00	27.87	37.66	0.00	27.87
10	43.61	0.00	26.86	43.58	0.00	26.86
11	49.52	0.00	25.78	49.49	0.00	25.78
12	55.41	0.00	24.62	55.38	0.00	24.62
13	61.28	0.00	23.38	61.25	0.00	23.38

Programa da Tese				Programa "Pipeline"		
coordenadas (m)				coordenadas (m)		
Nó	X (Choriz.)	Y (Choriz.)	Z (vert.)	X (Choriz.)	Y (Choriz.)	Z (vert.)
14	67.15	0.00	22.06	67.11	0.00	22.06
15	72.99	0.00	20.67	72.95	0.00	20.67
16	78.82	0.00	19.22	78.77	0.00	19.21
17	84.64	0.00	17.72	84.59	0.00	17.72
18	90.45	0.00	16.21	90.40	0.00	16.22
19	96.26	0.00	14.70	96.21	0.00	14.72
20	102.07	0.00	13.22	102.03	0.00	13.24
21	107.90	0.00	11.78	107.86	0.00	11.81
22	113.74	0.00	10.40	113.70	0.00	10.43
23	119.59	0.00	9.08	119.56	0.00	9.12
24	125.47	0.00	7.84	125.44	0.00	7.89
25	131.36	0.00	6.69	131.33	0.00	6.74
26	137.27	0.00	5.64	137.24	0.00	5.69
27	143.19	0.00	4.68	143.17	0.00	4.74
28	149.13	0.00	3.83	149.11	0.00	3.89
29	155.09	0.00	3.09	155.07	0.00	3.14
30	161.06	0.00	2.45	161.04	0.00	2.50
31	167.04	0.00	1.92	167.01	0.00	1.97
32	173.02	0.00	1.49	173.00	0.00	1.53
33	179.01	0.00	1.15	178.99	0.00	1.18
34	185.01	0.00	0.89	184.99	0.00	0.93
35	191.01	0.00	0.72	190.99	0.00	0.74
36	197.01	0.00	0.61	196.99	0.00	0.63
37	203.01	0.00	0.56	203.00	0.00	0.57
38	209.01	0.00	0.54	209.00	0.00	0.54
39	215.01	0.00	0.56	215.00	0.00	0.53
40	221.01	0.00	0.58	221.01	0.00	0.54
41	227.01	0.00	0.63	227.01	0.00	0.54
42	233.01	0.00	0.70	233.01	0.00	0.54
43	239.01	0.00	0.77	239.02	0.00	0.55
44	245.02	0.00	0.82	245.02	0.00	0.55
45	251.02	0.00	0.85	251.02	0.00	0.55
46	257.02	0.00	0.83	257.02	0.00	0.55
47	263.02	0.00	0.74	263.03	0.00	0.55
48	269.01	0.00	0.55	269.03	0.00	0.55
49	275.00	0.00	0.55	275.03	0.00	0.55
50	280.99	0.00	0.55	281.04	0.00	0.55
51	286.99	0.00	0.55	287.04	0.00	0.55

Tabela 1 - Análise estática - Deslocamentos no plano XZ -
lâmina d'água de 30 m.

Apresenta-se comparação entre os resultados obtidos através do programa desenvolvido na presente tese e os do programa comercial "Pipeline".

Nó	Programa da Tese		Programa "Pipeline"	
	Tensão axial extensão (MPa)	Tensão axial flexão (MPa)	Tensão axial extensão (MPa)	Tensão axial flexão (MPa)
01	8.11	0.00	7.97	0.00
02	7.98	-52.02	7.80	-66.82
03	7.83	-128.42	7.60	-139.77
04	7.66	-244.86	7.37	-198.12
05	7.50	-207.92	7.16	-213.52
06	7.32	-209.28	6.98	-214.79
07	7.11	-205.40	6.86	-210.98
08	7.06	-210.24	6.82	-210.46
09	7.01	-220.64	6.78	-210.03
10	6.96	-213.27	6.73	-212.15
11	6.90	-211.20	6.67	-214.14
12	6.83	-215.08	6.61	-216.56
13	6.76	-216.25	6.57	-214.63
14	6.70	-197.32	6.54	-201.47
15	6.64	-186.59	6.55	-167.24
16	6.58	-111.91	6.57	-105.54
17	6.52	-45.82	6.55	-42.21
18	6.46	14.37	6.48	16.85
19	6.39	67.30	6.39	68.51
20	6.32	113.46	6.28	113.67
21	6.26	153.50	6.15	152.80
22	6.19	187.72	6.02	186.28
23	6.13	216.46	5.90	214.40
24	6.07	239.98	5.79	237.46
25	6.02	258.47	5.67	255.60
26	5.97	272.08	5.58	269.00
27	5.92	280.91	5.54	277.71
28	5.89	284.99	5.47	281.79
29	5.86	284.33	5.43	281.25
30	5.83	278.91	5.44	276.05
31	5.81	268.62	5.43	266.08
32	5.80	253.37	5.45	251.28
33	5.79	232.96	5.49	231.43
34	5.78	207.21	5.54	206.37
35	5.78	175.84	5.60	175.82
36	5.79	138.55	5.66	139.41
37	5.79	94.97	5.71	97.74
38	5.78	74.05	5.75	55.05
39	5.78	67.11	5.77	20.39
40	5.78	53.45	5.76	2.62
41	5.78	32.65	5.78	-3.16
42	5.78	4.53	5.78	-3.30
43	5.77	-3.21	5.76	-2.35
44	5.77	-7.49	5.76	-1.59
45	5.76	-12.70	5.78	-0.98
46	5.74	-18.80	5.76	-0.54
47	5.71	-25.85	5.76	-0.24
48	5.82	-33.91	5.80	-0.07
49	5.82	-12.33	5.76	0.00

Nó	Programa da Tese		Programa "Pipeline"	
	Tensão axial extensão (MPa)	Tensão axial flexão (MPa)	Tensão axial extensão (MPa)	Tensão axial flexão (MPa)
50	5.82	4.20	5.74	0.02
51	5.82	0.00	5.82	0.00

Tabela 2 - Análise estática em lâmina d'água de 30 m -
Tensões axiais de extensão e de flexão.

Apresenta-se comparação entre as tensões axiais obtidas do programa desenvolvido na presente tese e as do programa comercial "Pipeline". Convenção de sinais para as tensões: negativo para compressão; positivo para tração.

Programa da Tese			Programa "Pipeline" -	
	tensão axial combinada (Mpa)	% tensão escoamento	tensão axial combinada (Mpa)	% tensão escoamento
01	8.11	2	7.97	2
02	60.01	15	74.62	18
03	132.25	33	147.37	36
04	252.52	61	205.49	50
05	215.42	52	220.68	53
06	216.60	52	221.77	54
07	212.52	51	217.84	53
08	217.30	53	217.28	53
09	227.64	55	216.81	52
10	220.23	53	218.88	53
11	218.09	53	220.81	53
12	221.90	54	223.17	54
13	223.01	54	221.20	54
14	204.02	49	208.01	50
15	193.22	47	173.79	42
16	118.49	29	112.11	27
17	52.35	13	48.76	12
18	20.83	5	23.33	6
19	73.69	18	74.90	18
20	119.79	29	119.95	29
21	159.76	39	158.95	38
22	193.92	47	192.30	47
23	222.59	54	220.30	53
24	246.05	60	243.25	59
25	264.49	64	261.27	63
26	278.05	67	274.58	66
27	286.83	69	283.25	69
28	290.87	70	287.26	70
29	290.19	70	286.68	69
30	284.74	69	281.49	68
31	274.43	66	271.51	66
32	259.16	63	256.73	62
33	238.75	58	236.92	57
34	212.99	52	211.91	51
35	181.62	44	181.42	44
36	144.34	35	145.07	35
37	100.76	24	103.45	25
38	79.83	19	60.80	15
39	72.90	18	26.16	6
40	59.23	14	8.38	2
41	38.43	9	8.94	2
42	10.30	2	9.08	2
43	8.98	2	8.11	2
44	13.26	3	7.35	2
45	18.46	4	6.76	2
46	24.54	6	6.30	2
47	31.56	8	6.00	1
48	39.73	10	5.87	1
49	18.15	4	5.76	1

Programa da Tese			Programa "Pipeline"	
Nó	tensão axial combinada (MPa)	% tensão escoamento	tensão axial combinada (MPa)	% tensão escoamento
50	10.02	2	5.76	1
51	5.82	1	5.82	1

Tabela 3 - Análise estática em lâmina de 30 m - Tensões axiais combinadas - Valores máximos.

Apresenta-se comparação entre os resultados do programa desenvolvido no presente trabalho e os do programa comercial "Pipeline".

Visando melhorar a compreensão dos resultados obtidos, foram traçadas as curvas de deslocamentos no plano XZ, de valores máximos de tensões axiais do duto e de percentuais da tensão de escoamento do aço do duto, apresentadas nas figuras 25, 26 e 27, respectivamente, para os resultados obtidos pelo programa desenvolvido nesta tese e pelo programa comercial "Pipeline".

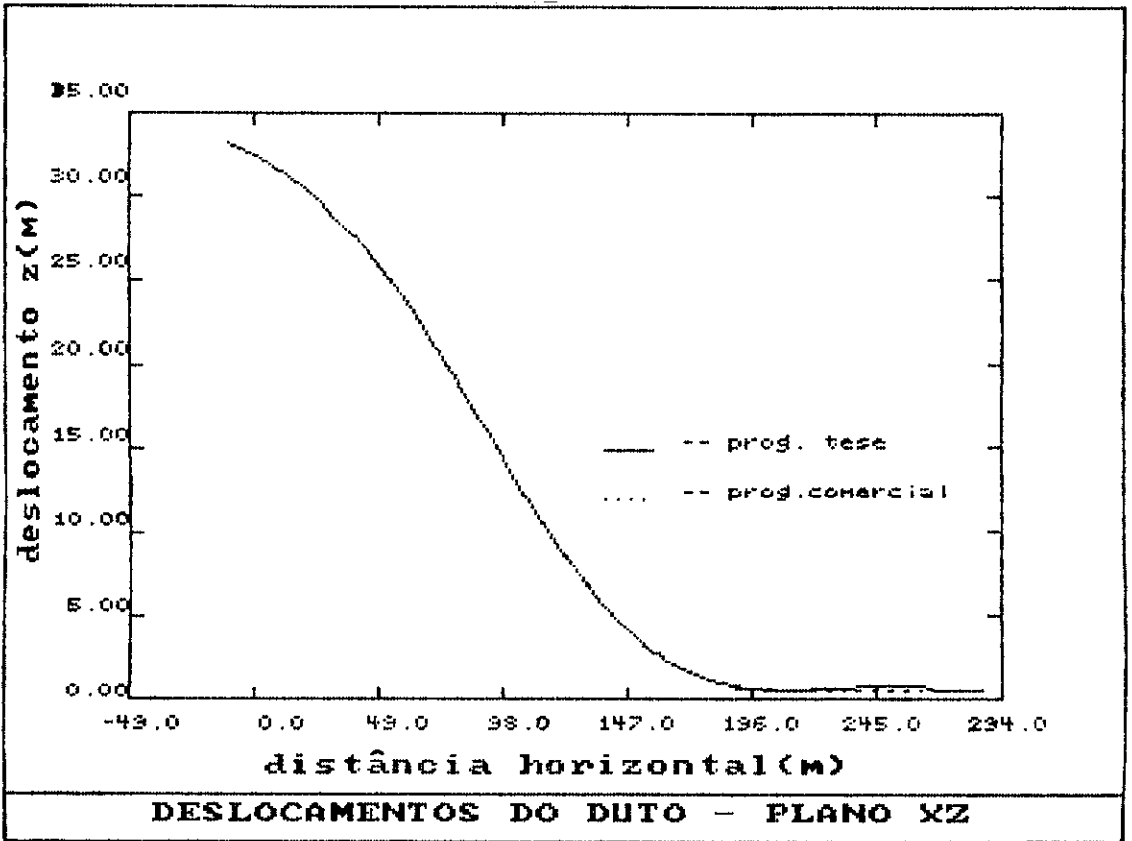


Figura 25 - Deslocamentos no plano XZ - Lâmina d'água de 30 m.

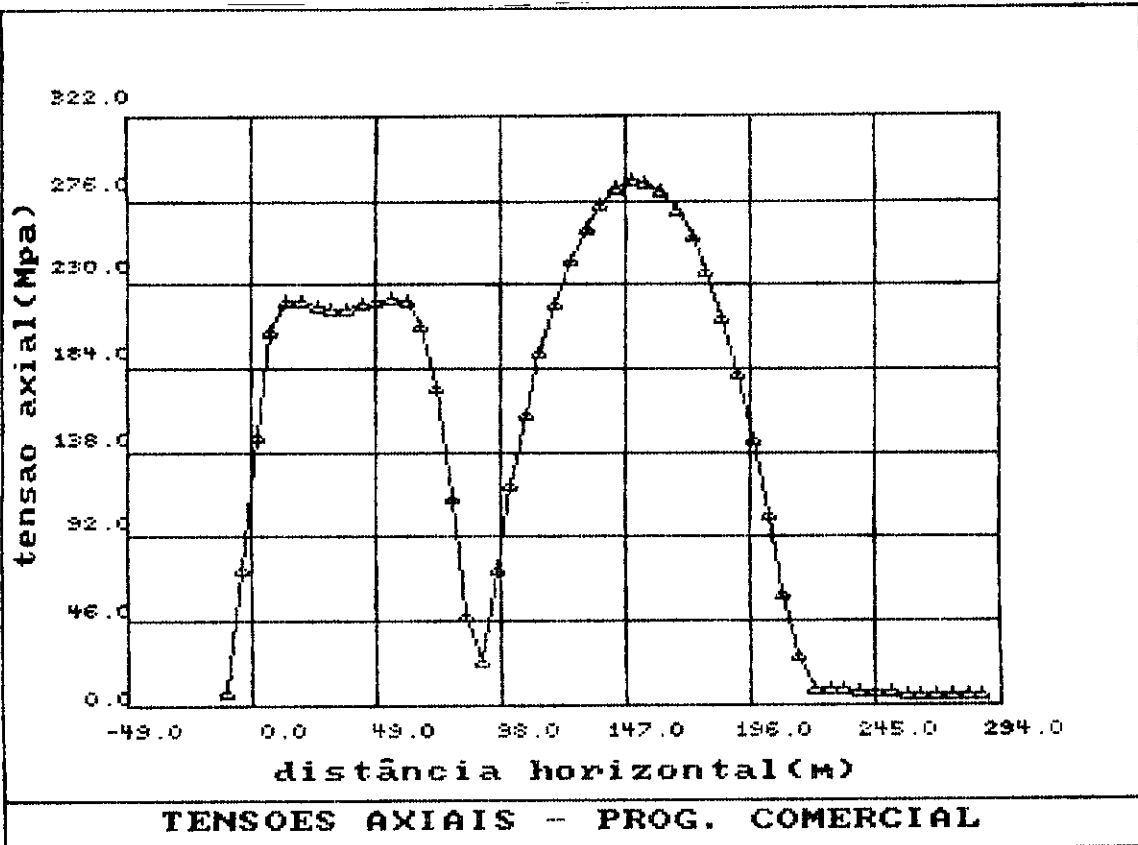
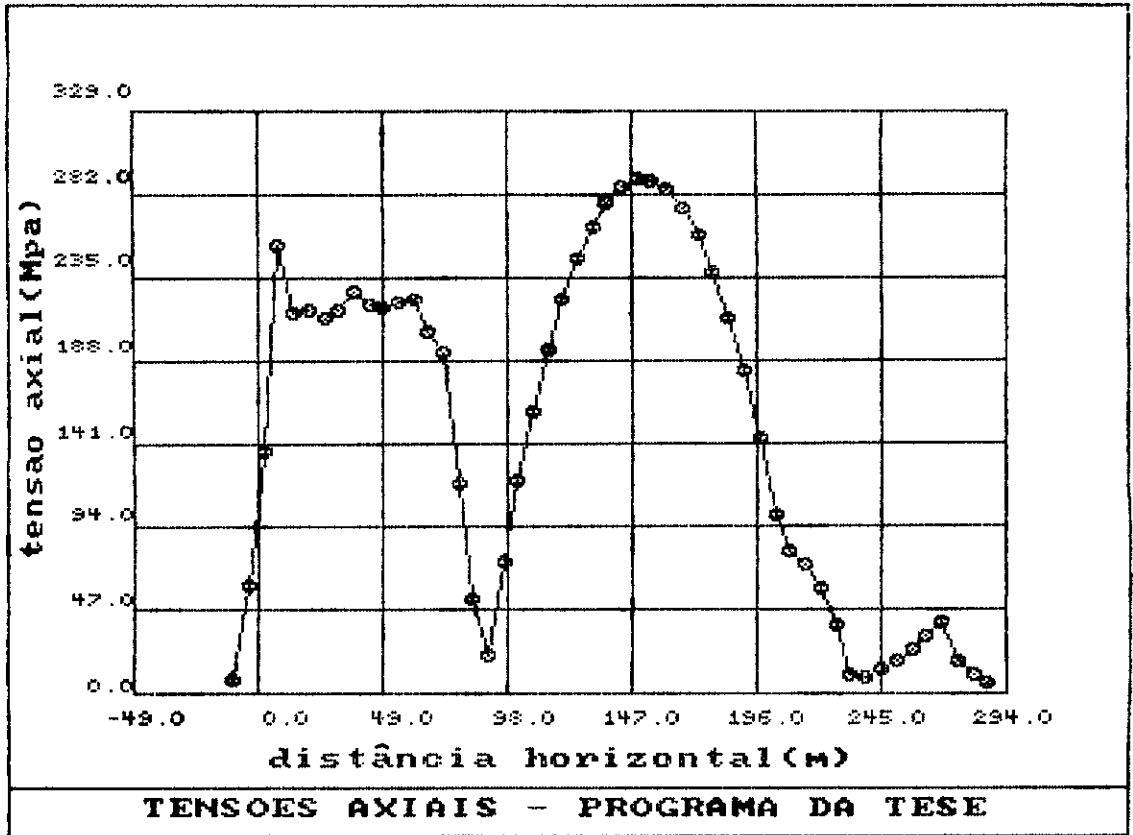


Figura 26 - Tensões axiais combinadas - Lâmina d'água de 30 m.

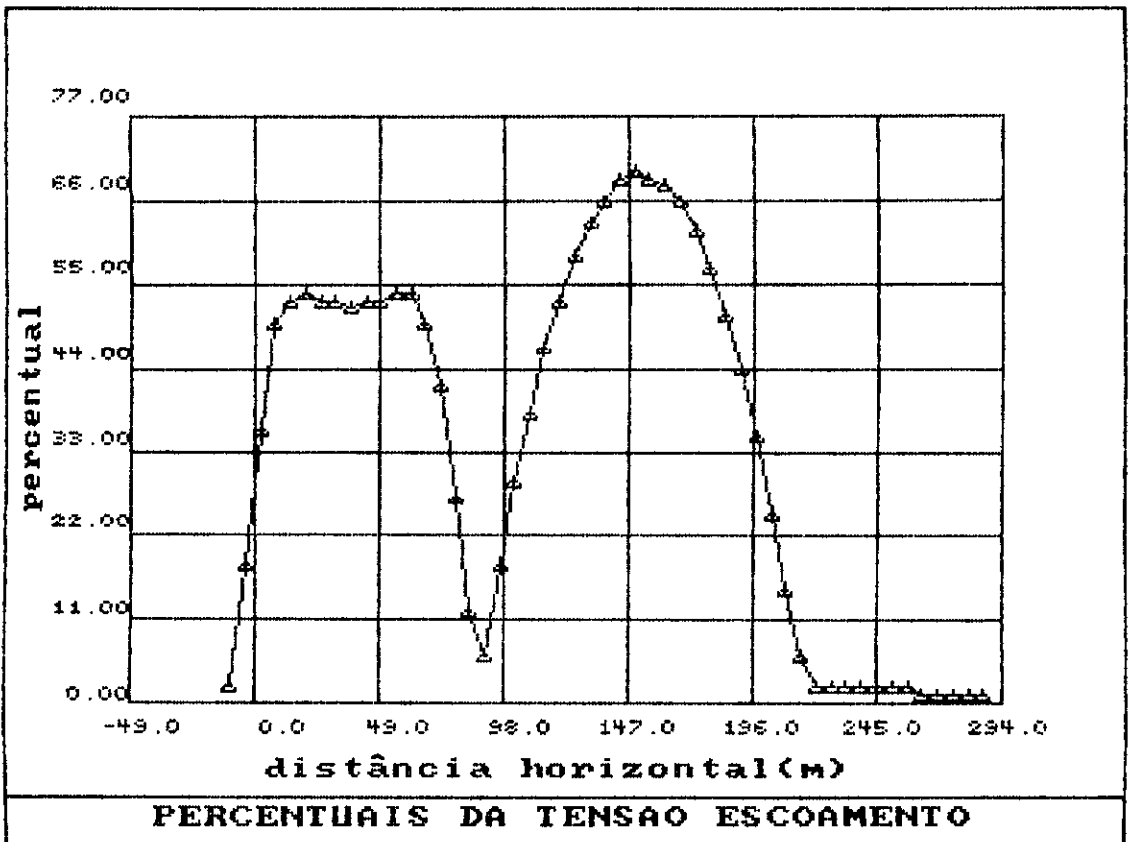
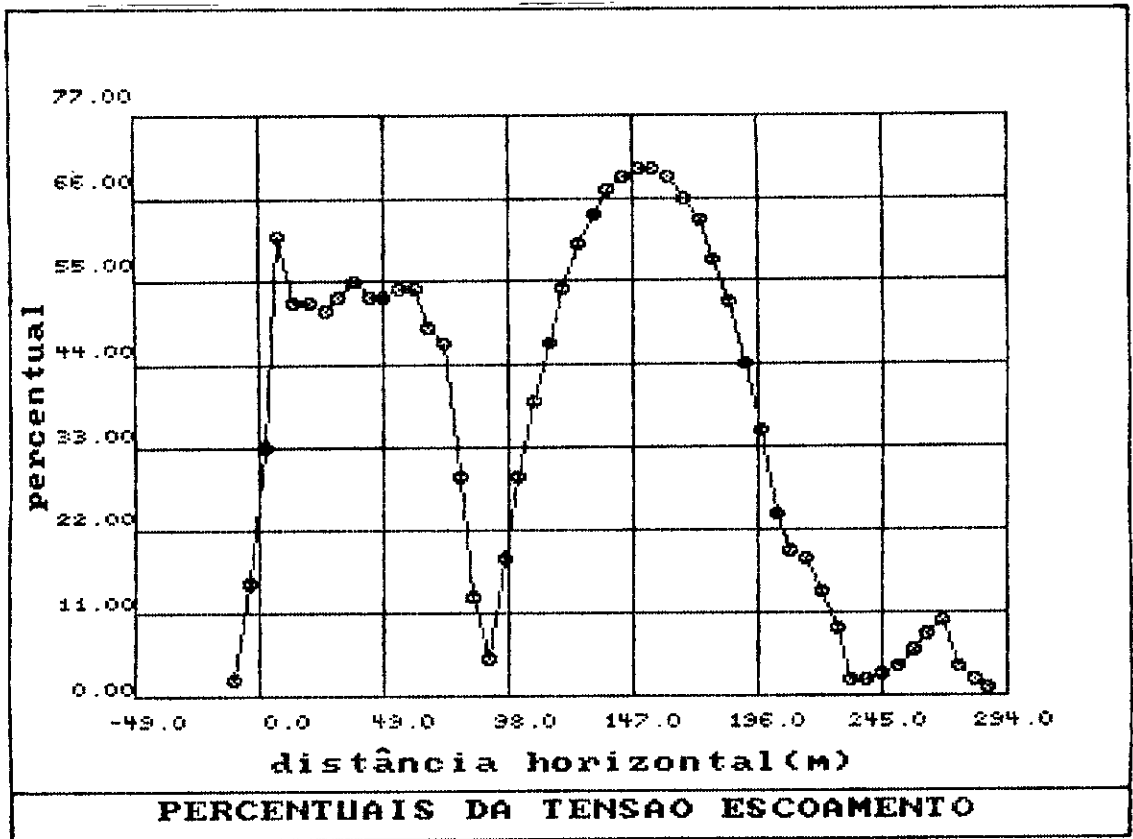


Figura 27 - Resultados dos programas da tese e "Pipeline" nos gráficos acima e abaixo, respectivamente.

VI.3) ANÁLISE ESTÁTICA DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 100 m

Neste exemplo, resultados de 40 análises estáticas são apresentados a seguir:

VI.3.1) LANÇAMENTO SOB AÇÕES DE PESO PRÓPRIO, EMPUXO E FORÇA DE TRAÇÃO

Este exemplo trata de um duto com 0.4064 m de diâmetro externo, de 0.0127 m de espessura, lançado, vazio, em lâmina d'água de 100 m de profundidade, com barcaça e stinger.

O peso por metro linear do duto revestido é de 3.62 kN/m ao ar livre e de 1.44 kN/m, quando submerso.

O módulo de elasticidade do aço que constitui o duto é de 2.1×10^8 kN/m². Sua tensão de escoamento é de 422×10^3 kN/m².

A força de tração aplicada pela máquina tracionadora é de 600 kN.

A figura 28 apresenta o stinger de lançamento utilizado.

Foram utilizados 200 incrementos de carga e em cada incremento foram necessárias 2 iterações de equilíbrio.

Na modelagem do sistema estrutural são feitas as seguintes considerações:

- O duto é discretizado em 60 elementos de comprimentos aproximadamente iguais entre si. A numeração dos elementos é sequencial, a partir de 1.

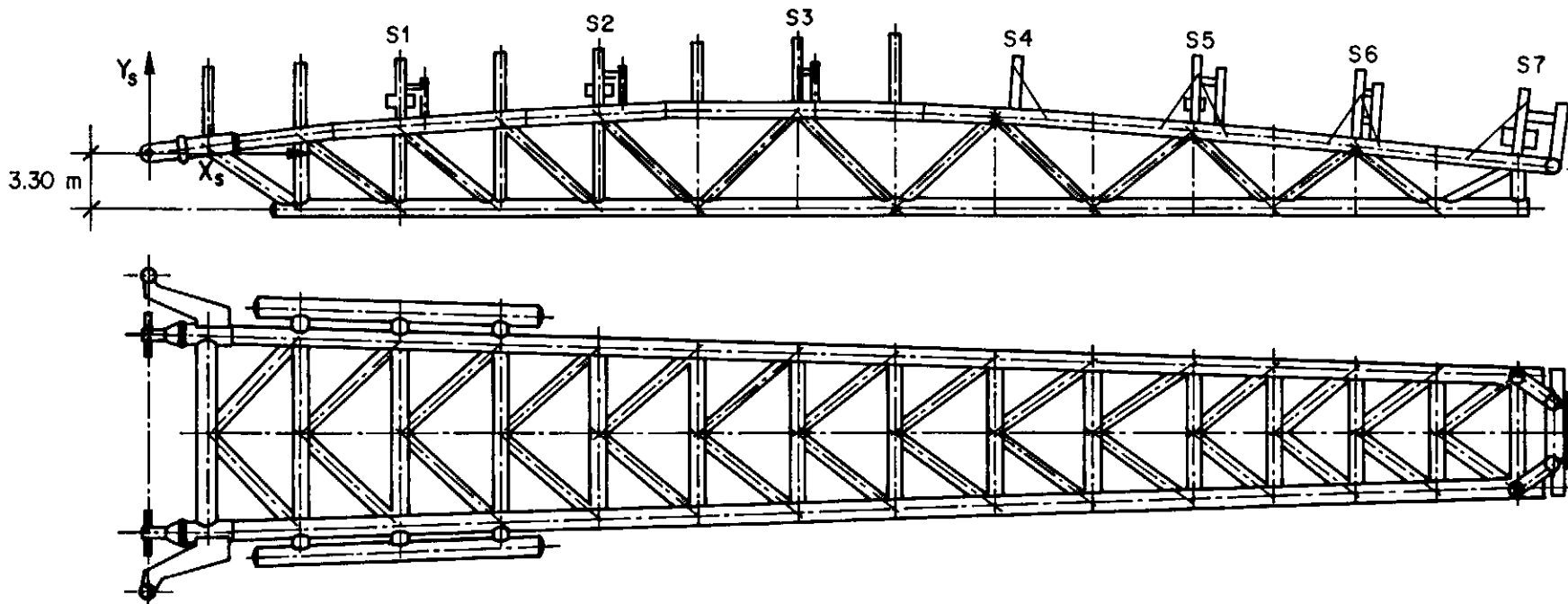
- A configuração inicial do duto é horizontal na cota vertical $Z = 108.32$ m.

- O nó 1 tem suas translações impedidas.

- O stinger é modelado através de molas inclinadas com rigidezes descontínuas, que se tornam efetivas quando os nós do duto correspondentes às molas atingem coordenadas pré-estabelecidas. Tais rigidezes se anulam quando há tração nesses nós.

- O terreno do fundo do mar é modelado por molas verticais com rigidezes também descontínuas. Essas molas só funcionam à compressão.

STINGER 83 m



APÓIOS	S 1	S 2	S 3	S 4	S 5	S 6	S 7
X_s (m)	15	27	39	51	63	73	83
Y_s (m)	3.84	4.46	4.57	4.23	3.46	2.41	0.85

Figura 28 - Stinger de lançamento - elevação e planta.

Utilizou-se o método de análise incremental não linear. Os resultados finais obtidos são apresentados nas tabelas 4 a 6.

Programa da Tese			Programa Comercial		
coordenadas (m)			coordenadas (m)		
Nó	X (horiz.)	Y (horiz.)	Z (vert.)	X (horiz.)	Z (vert.)
01	0.00	0.00	108.32	0.00	108.32
03	6.40	0.00	108.28	6.40	108.28
05	22.40	0.00	108.20	22.40	108.20
07	28.80	0.00	108.16	28.80	108.16
09	35.12	0.00	108.13	35.12	108.13
11	45.60	0.00	108.12	45.60	108.07
13	53.80	0.00	107.87	53.80	107.87
15	61.26	0.00	107.41	61.25	107.41
17	69.85	0.00	106.51	69.85	106.51
19	83.20	0.00	104.40	83.20	104.40
21	94.42	0.00	101.89	94.40	101.89
24	112.83	0.00	96.13	112.80	96.13
26	123.98	0.00	91.62	123.93	91.62
28	134.91	0.00	86.65	134.86	86.65
30	145.66	0.00	81.27	145.59	81.27
32	156.26	0.00	75.55	156.14	75.50
34	164.86	0.00	70.32	164.76	70.32
36	173.38	0.00	64.83	173.26	64.83
38	183.46	0.00	58.30	183.31	58.27
39	193.65	0.00	51.93	193.47	51.89
40	203.99	0.00	45.83	203.80	45.78
41	214.51	0.00	40.03	214.29	39.96
42	225.20	0.00	34.55	224.97	34.48
43	236.06	0.00	29.43	235.81	29.35
44	247.08	0.00	24.67	246.83	24.58
45	258.26	0.00	20.29	258.00	20.19
46	269.59	0.00	16.30	269.31	16.21
47	281.05	0.00	12.73	280.77	12.63
48	292.64	0.00	9.59	292.35	9.49
49	304.33	0.00	6.89	304.04	6.78
50	316.12	0.00	4.63	315.83	4.53
51	327.99	0.00	2.83	327.69	2.74
52	339.91	0.00	1.49	339.62	1.41
53	351.88	0.00	0.61	351.59	0.55
54	363.88	0.00	0.14	363.58	0.10
55	375.88	0.00	0.00	375.58	-0.02
56	387.88	0.00	0.00	387.58	-0.02
58	411.88	0.00	0.00	411.58	-0.02
60	435.88	0.00	0.00	435.58	-0.02
61	447.87	0.00	0.00	447.58	-0.02

Tabela 4 - Análise estática - Deslocamentos no plano XZ -
lâmina d'água de 100 m.

Apresenta-se comparação entre os resultados obtidos na presente tese e os do programa comercial.

Nó	Programa da Tese		Programa Comercial	
	tensão axial combinada (MPa)	% tensão escoamento	tensão axial combinada (MPa)	% tensão escoamento
1	38.5	9	0.0	0
3	46.4	11	51.6	12
5	45.5	11	60.9	14
7	38.7	9	34.1	8
9	66.1	16	48.0	11
11	71.6	17	151.5	36
13	352.8	84	268.5	64
15	315.4	75	279.8	66
17	259.5	62	262.7	62
19	328.2	78	287.9	68
21	335.7	80	304.4	72
24	347.3	82	304.5	72
26	183.0	46	174.8	42
28	192.9	46	183.7	44
30	126.0	30	160.1	38
32	317.2	75	208.2	49
34	147.1	35	207.4	49
36	50.1	12	44.3	11
38	93.9	22	92.0	22
39	122.0	29	116.3	28
40	133.7	32	126.2	30
41	139.8	33	131.5	31
42	144.1	34	135.3	32
43	147.7	35	138.6	33
44	151.0	36	141.6	34
45	154.1	37	144.5	34
46	157.0	37	147.3	35
47	159.7	38	149.8	36
48	162.0	38	152.0	36
49	164.0	39	154.0	37
50	165.3	39	155.3	37
51	165.4	39	155.5	37
52	162.7	39	153.3	36
53	153.3	36	145.0	34
54	126.3	30	120.0	29
55	53.4	13	50.5	12
56	38.0	9	33.1	8
58	54.4	13	31.0	7
60	56.1	13	30.4	7
61	27.4	6	30.4	7

Tabela 5 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -

Tensões axiais combinadas - Valores máximos.

Apresenta-se comparação entre as tensões axiais obtidas no programa desenvolvido na presente tese e as do programa comercial.

Para a visualização dos resultados obtidos, foram traçadas as curvas de deslocamentos no plano XZ, de valores máximos de tensões axiais do duto e de percentuais da tensão de escoamento do material do duto, apresentadas nas figuras 29, 30 e 31, respectivamente, para o programa da tese e para o programa comercial.

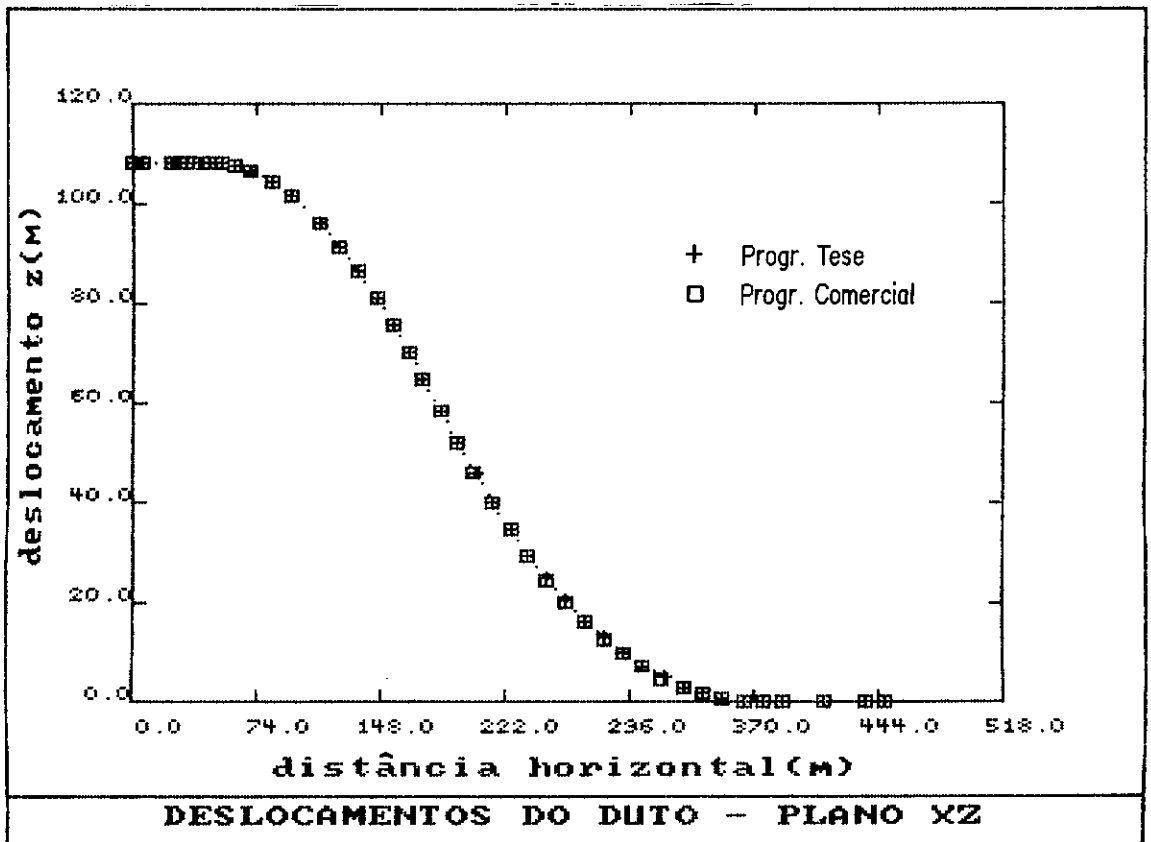


Figura 29 - Deslocamentos no plano XZ - Lâmina d'água de 100 m.

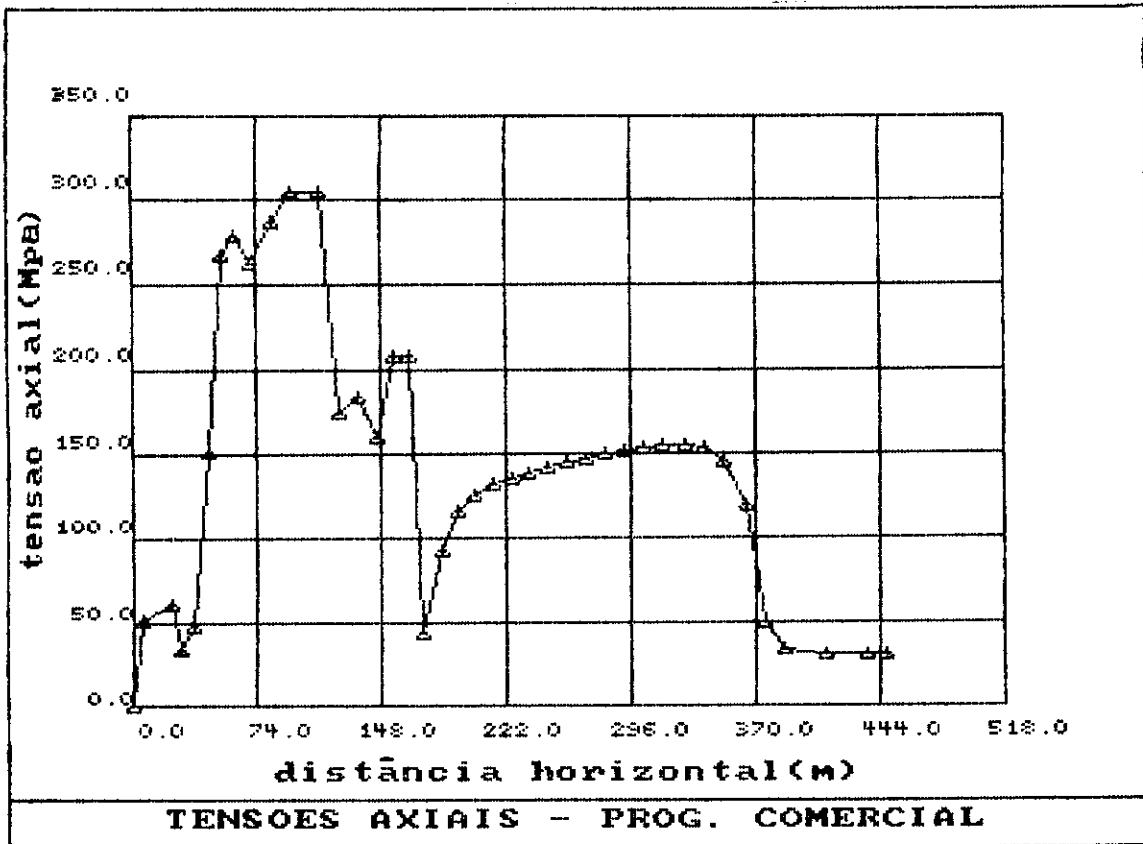
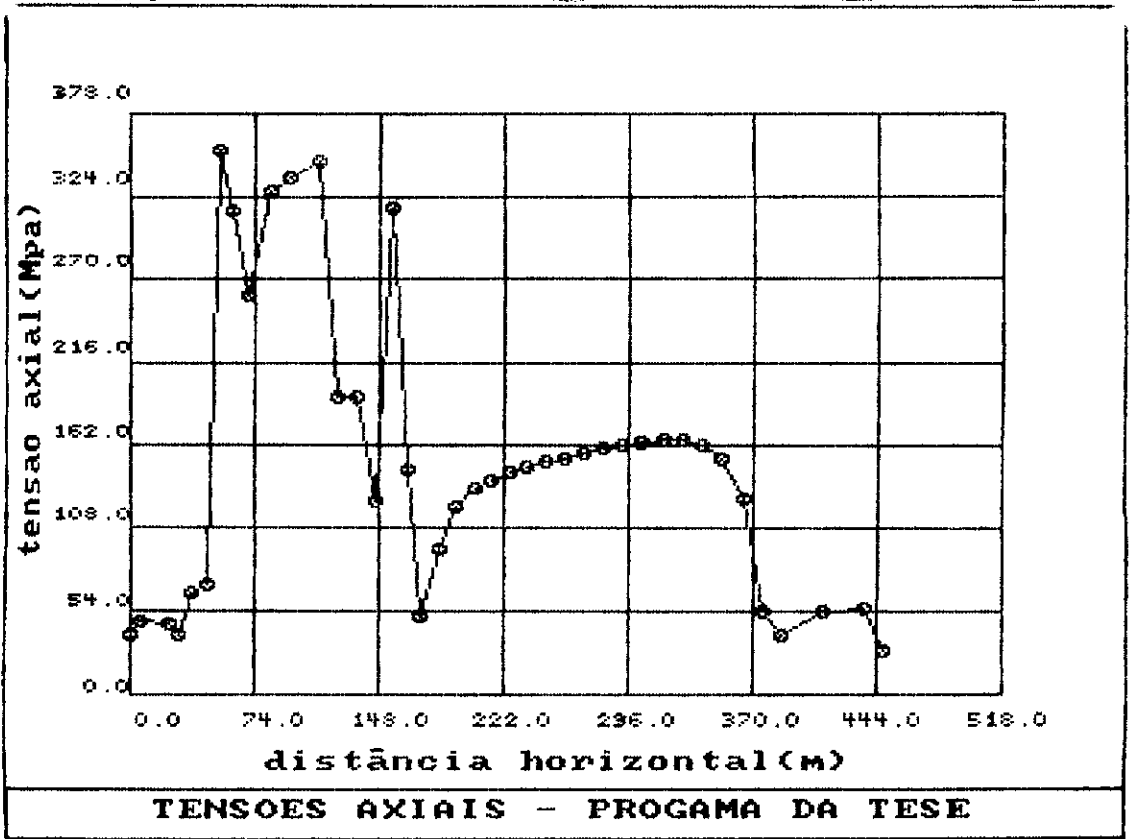


Figura 30 - Tensões axiais combinadas - Lâmina d'água de 100 m.

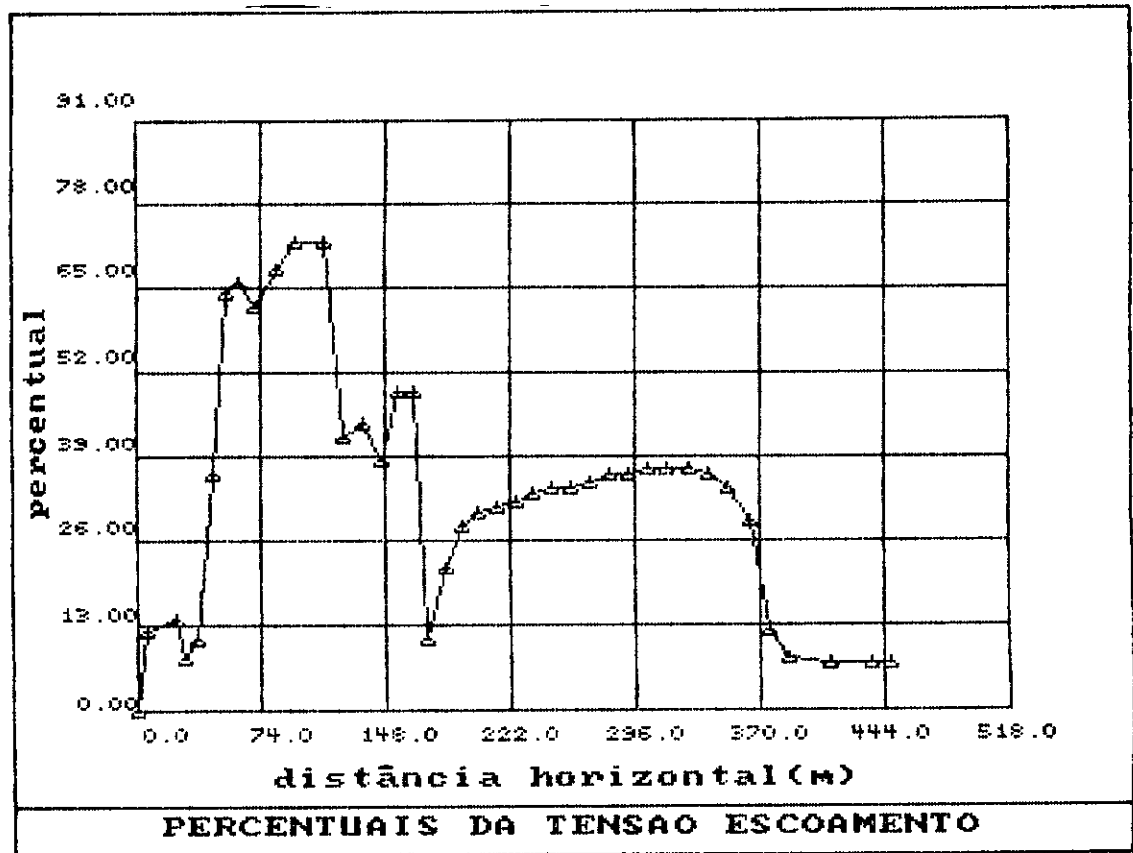
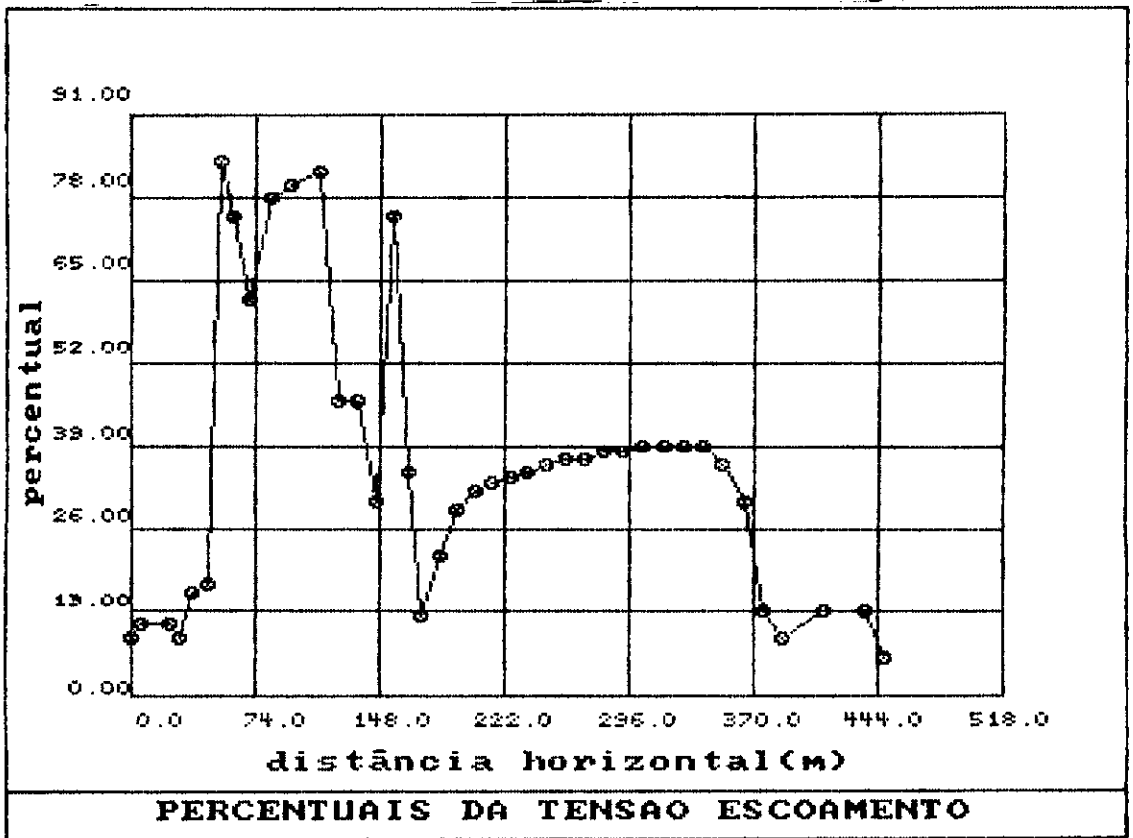


Figura 31 - Resultados dos programas da tese e comercial nos gráficos acima e abaixo, respectivamente.

Nó	apoio	Programa da tese		Programa Comercial	
		condição	separação em Z (m)	condição	separação em Z (m)
3	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
5	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
7	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
9	stinger	aberto	0.001	fechado	0.000
11	stinger	aberto	0.045	fechado	0.000
13	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
15	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
17	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
19	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
21	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
24	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
26	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
28	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
30	stinger	aberto	0.001	fechado	0.000
32	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
34	stinger	fechado	0.000	fechado	0.000
36	stinger	fechado	0.000	aberto	0.017
55	solo	fechado	0.000	fechado	0.000
56	solo	fechado	0.000	fechado	0.000
57	solo	fechado	0.000	fechado	0.000
58	solo	fechado	0.000	fechado	0.000
59	solo	fechado	0.000	fechado	0.000
60	solo	fechado	0.000	fechado	0.000
61	solo	fechado	0.000	fechado	0.000

Tabela 6 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -

Apoios.

Apresenta-se comparação entre as condições de contorno finais do programa da tese e do programa comercial.

VI.3.2) ESTUDO DA INFLUÊNCIA DA FORÇA DE TRAÇÃO

Neste sub-item, são feitas análises, variando-se a intensidade da força de tração aplicada pela máquina tracionadora, mantendo-se invariantes os demais parâmetros da análise do exemplo anterior.

São aplicadas forças de tração menores e maiores que a do exemplo anterior, comparando-se os valores máximos das tensões axiais obtidos das análises com a tensão de escoamento do material do duto, buscando-se um valor ótimo de força de tração correspondente a tensões axiais mínimas.

Determinou-se o valor da força de tração mínima para não se atingir a tensão de escoamento do material do duto. Buscou-se também o valor da força de tração para a qual ocorre flambagem na estrutura.

Os resultados obtidos são apresentados a seguir, na tabela 7.

O valor ótimo da força de tração obtido correspondeu ao valor da força aplicada no exemplo VI.3.1 (600 kN).

A força de tração mínima que deve ser aplicada ao duto para que não atinja a tensão de escoamento é de 520 kN.

A flambagem da estrutura ocorreu para a força de tração de 280 kN.

A força de tração foi aumentada até 1050 kN. Para este valor, a tensão máxima atingiu a de escoamento do material do duto.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$							
Força de tração aplicada (kN)							
Nó	310	400	500	520	600	700	1050
01	5	6	8	8	9	11	17
02	7	8	9	9	11	12	17
03	6	8	10	11	11	14	19
04	6	9	11	10	12	14	19
05	8	8	8	10	11	12	19
06	6	6	9	8	9	11	17
07	5	6	8	8	9	11	18
08	6	7	9	9	9	11	19
09	5	10	14	10	16	16	24
10	7	16	18	16	16	15	22
11	15	17	9	9	17	23	26
12	20	7	26	25	43	51	55
13	17	28	59	55	84	93	104
14	8	62	106	95	72	67	76
15	31	108	78	87	75	58	69
16	75	89	63	69	59	57	63
17	137	81	67	70	62	77	83
18	81	49	46	45	48	49	53
19	62	53	66	58	78	67	80
20	54	56	59	59	61	62	67
21	68	86	82	89	80	93	102
22	49	53	52	55	50	55	57
23	51	48	52	52	53	53	57
24	71	60	75	71	82	79	96
25	51	49	49	48	53	52	58
26	44	55	42	43	46	48	55
27	32	38	37	38	37	39	40
28	30	36	47	48	46	48	47
29	28	30	31	32	31	34	23
30	24	35	29	29	30	37	19
31	25	33	39	40	43	42	24
32	36	44	66	66	75	66	26
33	55	43	45	45	48	36	27
34	83	51	37	36	35	18	28
35	124	71	39	36	20	12	28
36	181	105	51	48	12	19	28
37	113	57	23	21	15	24	28
38	66	27	7	9	22	26	28
39	10	17	25	26	29	29	28
40	27	32	33	33	32	30	28
41	44	41	36	36	33	31	29
42	57	46	39	38	34	31	29
43	67	50	41	40	35	32	29
44	76	53	42	41	36	32	29
45	84	56	43	42	37	33	29
46	91	59	45	44	37	33	29
47	96	61	46	45	38	34	29
48	99	62	47	45	38	34	29
49	98	63	47	46	39	34	29
50	92	62	47	46	39	35	29
51	79	58	46	45	39	35	29
52	57	49	43	42	39	35	29

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$							
Força de tração aplicada (kN)							
Nó	310	400	500	520	600	700	1050
53	18	30	34	35	36	35	29
54	52	14	14	16	30	34	30
55	167	92	44	39	13	32	30
56	66	27	6	6	9	25	30
57	15	7	6	5	12	10	30
58	3	24	10	8	13	11	29
59	24	17	6	10	46	9	29
60	14	16	39	7	13	29	26
61	2	3	5	5	6	8	14

Tabela 7 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Variação da força de tração.

Apresentam-se percentuais de tensão de escoamento do material do duto atingidos para cada força de tração aplicada. Estão destacados os valores que ultrapassam 100%.

VI.3.3) INFLUÊNCIA DA CURVATURA DO STINGER

Foram feitas 5 análises variando-se a curvatura do stinger de lançamento para valores menores e maiores que a da análise do exemplo VI.3.1, mantendo-se constantes os demais parâmetros.

A configuração geométrica do stinger foi aproximada por uma parábola do segundo grau, obtida a partir das coordenadas dos pontos da curva da figura 28, onde estão representados os eixos X_s e Y_s de referência.

A equação da parábola obtida é:

$Y_s = - 0.00156 X_s^2 + 0.112 X_s + 2.57$, com Y_s e X_s em metros.

O coeficiente angular da equação da parábola foi variado de forma a se determinar a curvatura ótima do stinger, correspondente às tensões axiais mínimas.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela 8.

A curvatura ótima obtida correspondeu à curvatura do stinger do exemplo VI.3.1 (coeficiente angular de -0.00156 m^{-1}).

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$					
Coeficiente angular da parábola (m^{-1})					
Nó	-0.00078	-0.00109	-0.00156	-0.00203	-0.00312
01	9	9	9	9	9
02	11	11	11	11	11
03	11	11	11	11	11
04	12	12	12	12	12
05	11	11	11	11	11
06	9	9	9	10	10
07	9	9	9	9	10
08	9	9	9	9	9
09	16	16	16	16	16
10	16	16	16	16	16
11	17	17	17	17	17
12	43	43	43	43	43
13	84	84	84	84	84
14	72	72	72	71	71
15	76	76	75	74	74
16	58	58	59	60	60
17	58	58	62	65	65
18	51	51	48	44	44
19	89	89	78	65	66
20	44	44	61	80	79
21	29	29	80	130	132
22	42	41	50	67	66
23	83	79	53	38	39
24	51	53	82	29	31
25	42	49	53	33	38
26	52	67	46	49	58
27	34	37	37	43	101
28	32	24	46	56	69
29	19	23	31	51	63
30	16	36	30	68	82
31	10	22	43	42	41
32	13	20	75	33	18
33	22	22	48	30	10
34	38	32	35	37	18
35	65	53	20	18	23
36	110	89	12	10	26
37	57	45	15	19	29
38	27	19	22	25	30
39	17	20	29	30	32
40	27	28	32	32	33
41	31	32	33	33	34
42	33	33	34	34	35
43	34	34	35	35	35
44	35	35	36	36	36
45	36	36	37	37	37
46	37	37	37	37	38
47	37	37	38	38	38
48	38	38	38	39	39
49	38	39	39	39	39

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$					
Coeficiente angular da parábola (m^{-1})					
Nó	-0.00078	-0.00109	-0.00156	-0.00203	-0.00312
50	39	39	39	39	39
51	39	39	39	39	39
52	39	39	39	38	38
53	38	38	36	36	35
54	36	35	30	28	25
55	29	27	13	9	12
56	10	8	9	9	9
57	11	8	12	11	9
58	9	10	13	10	8
59	8	11	46	31	12
60	18	7	13	14	13
61	6	6	6	6	6

Tabela 8 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Variação da curvatura do stinger.

Apresentam-se percentuais da tensão de escoamento do aço do duto atingidos para cada configuração de stinger considerada. Destacam-se os valores maiores que 100%.

VI.3.4) INFLUÊNCIA DA RIGIDEZ DAS MOLAS VERTICAIS DO SOLO

Analisaram-se 3 casos correspondentes a diferentes valores de constante de mola vertical do solo, sem variações nos demais parâmetros do exemplo VI.3.1.

Para esses valores de constante de mola vertical do solo de 10^5 kN/m a 10^7 kN/m, praticamente não houve variação nos resultados de tensões e deformações do duto. Os percentuais da tensão de escoamento do aço do duto portanto, resultaram iguais nos três casos.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela 9.

		Constante de mola vertical do solo (kN/m)					
		10^5		10^6		10^7	
Nó	apoio	condi- ção	separa- ção em Z (m)	condi- ção	separa- ção em Z (m)	condi- ção	separa- ção em Z (m)
55	solo	fechado	0.00000	fechado	0.00000	fechado	0.00000
56	solo	fechado	0.00000	fechado	0.00000	fechado	0.00000
57	solo	fechado	0.00000	fechado	0.00000	fechado	0.00000
58	solo	aberto	0.01313	aberto	0.01313	aberto	0.01314
59	solo	fechado	0.00000	fechado	0.00000	fechado	0.00000
60	solo	aberto	0.05608	aberto	0.05618	aberto	0.05619
61	solo	aberto	0.07767	aberto	0.07774	aberto	0.07775

Tabela 9 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - Apoios - Variação da constante de mola vertical do solo.

Apresenta-se comparação entre as condições de contorno correspondentes aos solos dos diferentes casos analisados.

VI.3.5) LANÇAMENTOS SOB AÇÕES DE PESO PRÓPRIO, EMPUXO, FORÇA DE TRAÇÃO E DESLOCAMENTOS IMPOSTOS NO TRECHO SUPERIOR DO DUTO.

Neste exemplo, introduzem-se deslocamentos no trecho superior do duto na direção Y do sistema global de referência. Eles são aplicados de forma incremental simultaneamente às ações dos incrementos de peso próprio, empuxo.

Estes deslocamentos são devidos ao movimento da barcaça e são aplicados nos 20 primeiros nós do duto, partindo-se de um valor máximo no nó 1, do topo, para o valor zero no nó 21, de forma linear.

São feitas 5 análises, variando-se a intensidade dos deslocamentos, mantendo-se constantes os demais parâmetros da análise do exemplo VI.3.1. Comparam-se os valores máximos das tensões axiais obtidos das análises com a tensão de escoamento do material do duto.

Os resultados obtidos são apresentados a seguir, na tabela 10.

Nó	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.
1	1.00	9	2.00	9	3.00	9	4.00	9	5.00	9
2	0.97	13	1.93	15	2.9	17	3.86	18	4.83	20
3	0.93	12	1.87	14	2.8	15	3.73	17	4.67	18
4	0.85	13	1.70	14	2.54	15	3.39	16	4.24	17
5	0.76	12	1.53	13	2.29	14	3.06	15	3.82	16
6	0.73	12	1.46	14	2.19	17	2.92	20	3.65	23
7	0.70	12	1.39	16	2.09	19	2.79	23	3.48	26
8	0.66	12	1.33	14	1.99	17	2.65	19	3.32	22
9	0.63	16	1.26	17	1.89	18	2.52	19	3.15	19
10	0.57	16	1.15	17	1.73	18	2.30	18	2.88	19

Nó	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.
11	0.52	19	1.04	20	1.56	22	2.08	23	2.60	25
12	0.48	44	0.95	45	1.43	46	1.90	46	2.38	47
13	0.43	84	0.87	84	1.30	84	1.73	84	2.16	83
14	0.39	73	0.79	75	1.18	77	1.58	79	1.97	81
15	0.35	76	0.71	77	1.06	79	1.42	80	1.77	82
16	0.31	60	0.62	62	0.93	63	1.24	65	1.55	67
17	0.26	62	0.53	62	0.79	62	1.05	62	1.32	62
18	0.19	48	0.38	48	0.58	49	0.77	49	0.96	49
19	0.12	81	0.24	84	0.36	86	0.48	90	0.60	92
20	0.06	70	0.12	78	0.18	87	0.24	94	0.30	103
21	0.00	84	0.00	89	0.00	94	0.00	97	0.00	102
22	0.00	53	0.00	55	0.00	57	0.00	60	0.00	62
23	0.00	54	0.00	55	0.00	56	0.00	60	0.00	61
24	0.00	83	0.00	83	0.00	83	0.00	89	0.00	89
25	0.00	53	0.00	53	0.00	53	0.00	51	0.00	51
26	0.00	46	0.00	46	0.00	46	0.00	36	0.00	36
27	0.00	38	0.00	38	0.00	38	0.00	36	0.00	37
28	0.00	46	0.00	46	0.00	47	0.00	53	0.00	53
29	0.00	31	0.00	31	0.00	32	0.00	35	0.00	35
30	0.00	30	0.00	31	0.00	31	0.00	32	0.00	33
31	0.00	44	0.00	44	0.00	44	0.00	45	0.00	45
32	0.00	75	0.00	77	0.00	75	0.00	76	0.00	77
33	0.00	48	0.00	48	0.00	49	0.00	48	0.00	48
34	0.00	35	0.00	33	0.00	36	0.00	34	0.00	32
35	0.00	20	0.00	19	0.00	20	0.00	19	0.00	18
36	0.00	12	0.00	12	0.00	11	0.00	12	0.00	12
37	0.00	16	0.00	15	0.00	16	0.00	16	0.00	16
38	0.00	22	0.00	22	0.00	23	0.00	23	0.00	23
39	0.00	29	0.00	29	0.00	29	0.00	30	0.00	30
40	0.00	32	0.00	32	0.00	32	0.00	32	0.00	33
41	0.00	33	0.00	33	0.00	34	0.00	34	0.00	34
42	0.00	34	0.00	35	0.00	35	0.00	35	0.00	35
43	0.00	35	0.00	35	0.00	36	0.00	36	0.00	36
44	0.00	36	0.00	36	0.00	36	0.00	37	0.00	37
45	0.00	37	0.00	37	0.00	37	0.00	37	0.00	37
46	0.00	37	0.00	38	0.00	38	0.00	38	0.00	38
47	0.00	38	0.00	38	0.00	38	0.00	39	0.00	39
48	0.00	39	0.00	39	0.00	39	0.00	39	0.00	39
49	0.00	39	0.00	39	0.00	39	0.00	40	0.00	40
50	0.00	39	0.00	40	0.00	40	0.00	40	0.00	40
51	0.00	39	0.00	40	0.00	40	0.00	40	0.00	40
52	0.00	39	0.00	39	0.00	39	0.00	39	0.00	40
53	0.00	37	0.00	37	0.00	37	0.00	37	0.00	37
54	0.00	30	0.00	31	0.00	31	0.00	31	0.00	31
55	0.00	13	0.00	14	0.00	14	0.00	14	0.00	14
56	0.00	9	0.00	11	0.00	11	0.00	12	0.00	12

Nó	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.	Desl imp. (m)	% da tens de esc.
57	0.00	12	0.00	12	0.00	12	0.00	7	0.00	7
58	0.00	13	0.00	13	0.00	13	0.00	8	0.00	8
59	0.00	46	0.00	46	0.00	46	0.00	46	0.00	46
60	0.00	13	0.00	13	0.00	13	0.00	13	0.00	16
61	0.00	6	0.00	6	0.00	6	0.00	6	0.00	6

Tabela 10 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Introdução de deslocamentos prescritos.

Apresentam-se percentuais da tensão de escoamento do material do duto, de 422×10^9 kN/m², atingidos para 5 casos de deslocamentos impostos aos 20 primeiros nós. Estão destacados os valores que ultrapassam 100%.

VI.3.6) LANÇAMENTOS SOB AÇÕES DE PESO PRÓPRIO, EMPUXO, FORÇA DE TRAÇÃO E CORRENTE

Este exemplo é uma extensão do exemplo VI.3.1. Introduce-se ação de corrente em uma segunda etapa de carregamento, ou seja, aplicam-se as forças de corrente, de forma incremental, a partir da configuração deformada, esforços internos e reações devidos ao peso próprio, empuxo e força de tração aplicados em uma primeira etapa de carregamento.

Isto é possível pois foi implementada no programa de análise estática, a opção de carregamentos por etapas.

São feitas 6 análises variando-se separadamente a velocidade e direção da corrente, mantendo-se invariantes os demais parâmetros da análise do

exemplo VI.3.1. Os valores máximos das tensões axiais obtidos são comparados com a tensão de escoamento do material do duto.

Os perfis das velocidades de correntes são lineares variando de zero, no fundo do mar, até um valor máximo na superfície.

Os resultados obtidos são mostrados nas tabelas 11 e 12.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Velocidade de corrente na direção Y (normal) na superfície d'água			
Nó	1 m/s	2 m/s	3 m/s
01	9	9	9
02	11	11	11
03	11	11	11
04	12	12	13
05	11	11	11
06	9	9	10
07	9	10	11
08	9	9	10
09	16	16	17
10	16	17	18
11	17	18	17
12	43	44	42
13	84	84	82
14	72	73	72
15	75	77	78
16	59	61	62
17	62	64	65
18	49	50	50
19	78	79	78
20	62	62	61
21	80	80	81
22	51	54	59
23	55	60	69
24	84	51	103
25	55	62	75
26	48	56	72
27	40	47	60
28	48	55	69
29	33	39	51
30	32	38	49
31	45	51	60
32	77	82	92
33	50	55	65
34	37	43	57

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Velocidade de corrente na direção Y (normal) na superfície d'água			
Nó	1 m/s	2 m/s	3 m/s
35	21	27	39
36	14	20	34
37	17	21	27
38	24	28	34
39	30	35	41
40	33	37	43
41	34	38	43
42	35	38	43
43	36	39	42
44	37	39	42
45	37	40	42
46	38	40	42
47	39	40	42
48	39	41	43
49	39	41	43
50	40	41	43
51	40	41	43
52	39	40	42
53	37	38	40
54	30	31	33
55	13	15	19
56	10	13	19
57	16	24	38
58	21	46	88
59	48	54	65
60	14	15	18
61	6	6	6

Tabela 11 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Corrente na direção Y.

São apresentados percentuais de tensão de escoamento atingidos para cada corrente aplicada. Estão destacados os valores maiores que 100%.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Nó	Velocidade de corrente na direção X (paralela) na superfície d'água		
	13 m/s	14 m/s	14.5 m/s
1	10	10	11
2	12	12	13
3	12	12	12
4	13	14	14
5	12	12	12
6	10	11	11
7	10	10	11
8	10	11	11
9	16	16	17
10	17	17	17
11	18	17	18
12	44	43	44
13	86	85	87
14	71	76	73
15	71	83	74
16	66	50	34
17	82	35	13
18	22	22	36
19	26	38	45
20	35	43	46
21	35	41	41
22	22	26	26
23	13	11	11
24	24	23	23
25	32	30	30
26	37	36	37
27	41	40	40
28	43	43	43
29	46	47	47
30	48	49	49
31	50	52	52
32	51	54	55
33	52	56	57
34	51	57	59
35	50	56	59
36	49	56	59
37	47	54	58
38	43	52	56
39	37	46	52
40	29	39	46
41	20	31	38
42	12	22	29
43	11	13	20
44	17	10	11
45	23	17	12
46	27	22	18

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Nó	Velocidade de corrente na direção X (paralela) na superfície d'água		
	13 m/s	14 m/s	14.5 m/s
47	30	26	23
48	33	30	27
49	35	32	30
50	36	34	32
51	37	36	34
52	38	37	36
53	39	38	37
54	39	39	39
55	40	41	42
56	42	47	50
57	46	61	72
58	59	99	130
59	58	68	76
60	16	18	20
61	6	6	6

Tabela 12 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Corrente na direção X.

Apresentam-se os percentuais da tensão de escoamento obtidos para cada corrente introduzida. Destacam-se os valores maiores ou iguais a 100%.

A figura 32 apresenta os deslocamentos do duto no plano horizontal XY devidos às ações de correntes na direção Y do sistema global.

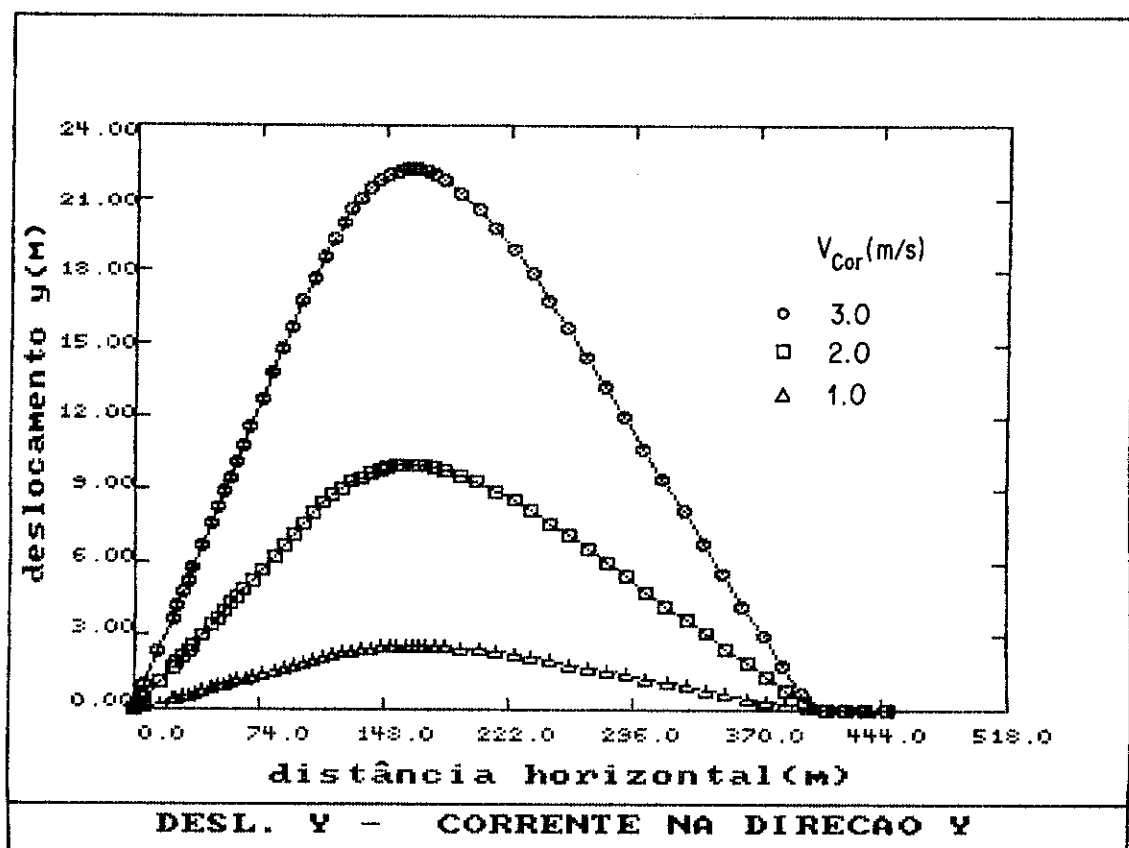


Figura 32 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com corrente.

VI.3.7) Lançamentos sob ações de peso próprio, empuxo, força de tração e onda

Este exemplo é também uma extensão do exemplo VI.3.1. São aplicadas as forças de onda, de forma incremental, em uma segunda etapa de carregamento, após a aplicação do peso próprio, empuxo e força de tração em uma primeira etapa de carregamento.

São feitas 6 análises variando-se separadamente a altura e direção da onda, mantendo-se constantes os demais parâmetros do estudo do exemplo VI.3.1.

Adotaram-se, nas análises estáticas com ações de forças hidrodinâmicas, coeficientes de inércia e de arraste, de 2.0 e 1.0, respectivamente. O período da onda utilizado nessas análises foi fixado em 8 s.

Os valores máximos das tensões axiais obtidos são comparados com a tensão de escoamento do material do duto.

Os resultados obtidos são apresentados nas tabelas 13 e 14.

Foi feita também, análise para uma amplitude de onda de 1 m, na direção Y. Os deslocamentos na direção Y dos nós 2,25 a 28 e 31 a 35 são apresentados na tabela 18 do item VI.3.11 para comparações.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Nó	Amplitude de onda na direção Y (normal)		
	2 m	3 m	4 m
1	9	9	9
2	11	11	11
3	11	11	11
4	12	12	13
5	11	11	11
6	9	10	10
7	9	10	10
8	9	10	10
9	16	17	17
10	16	17	18
11	18	19	20
12	44	45	46
13	85	86	87
14	73	75	76
15	76	78	80
16	60	62	64
17	63	64	66
18	49	49	150
19	78	79	80
20	62	68	73
21	83	91	100
22	54	62	73
23	57	64	74
24	87	92	100
25	56	60	66
26	48	52	58
27	39	41	45
28	48	49	52
29	31	32	34
30	30	30	31
31	43	44	44
32	76	77	76
33	49	49	51
34	35	36	36
35	20	21	22
36	13	14	17
37	15	15	15
38	23	23	24
39	30	31	32
40	33	34	36
41	34	36	38
42	35	37	39
43	36	38	40
44	37	39	40
45	38	39	41
46	38	40	42
47	39	41	42

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Nó	Amplitude de onda na direção Y (normal)		
	2 m	3 m	4 m
48	39	41	43
49	40	42	43
50	40	42	44
51	40	42	44
52	39	41	43
53	37	38	40
54	30	31	33
55	13	13	14
56	10	11	12
57	14	18	22
58	19	29	43
59	47	50	53
60	14	14	15
61	6	6	6

Tabela 13 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Onda na direção Y.

Apresentam-se os percentuais da tensão de escoamento obtidos para cada onda introduzida. Destacam-se os valores maiores ou iguais a 100%.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Nó	Amplitude de onda na direção X (paralela)		
	8 m	9 m	10 m
1	9	9	9
2	11	12	12
3	11	10	11
4	12	11	9
5	11	11	11
6	9	9	9
7	9	9	9
8	9	9	9
9	16	16	16
10	16	16	16
11	17	17	17
12	43	43	43
13	84	84	84
14	72	71	71
15	75	73	73
16	58	61	61
17	60	68	69
18	49	39	37
19	83	96	100
20	55	56	56
21	83	82	82
22	52	52	53
23	55	54	55
24	71	66	61
25	57	59	61
26	47	50	53
27	40	41	42
28	40	37	34
29	30	29	28
30	31	30	31
31	44	44	44
32	75	75	75
33	48	48	48
34	35	35	35
35	20	20	20
36	14	14	15
37	15	15	15
38	23	23	23
39	30	30	30
40	32	32	32
41	33	33	33
42	34	34	34
43	35	35	35
44	36	36	36
45	36	36	36
46	37	37	37

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$			
Nó	Amplitude de onda na direção X (paralela)		
	8 m	9 m	10 m
47	38	38	38
48	38	38	38
49	39	39	39
50	39	39	39
51	39	39	39
52	39	39	39
53	36	36	36
54	30	30	30
55	13	13	13
56	9	9	9
57	12	12	12
58	13	13	13
59	46	46	46
60	13	13	13
61	6	6	6

Tabela 14 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m -
Onda na direção X.

São apresentados os percentuais de tensão de escoamento atingidos para cada onda aplicada. São destacados os valores iguais ou superiores a 100%.

A figura 33 mostra os deslocamentos do duto no plano horizontal XY devidos às forças de onda na direção Y do sistema global.

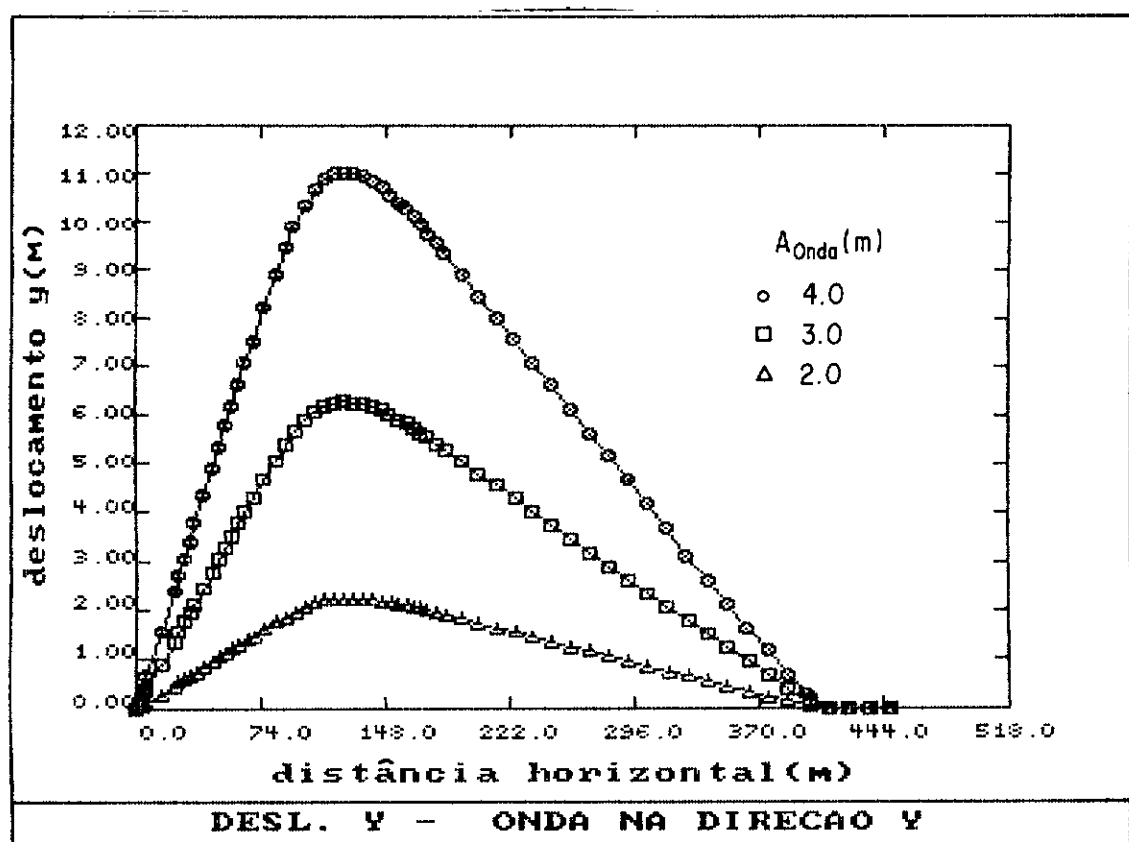


Figura 33 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com onda.

VI.3.8) LANÇAMENTO SOB AÇÕES DE PESO PRÓPRIO, EMPUXO, FORÇA DE TRAÇÃO, DESLOCAMENTOS IMPOSTOS NO TRECHO SUPERIOR DO DUTO E CORRENTE

Neste exemplo, o carregamento é aplicado em duas etapas. Na primeira etapa, aplicam-se os incrementos de peso próprio, empuxo, e deslocamentos prescritos na direção Y do sistema global de referência. Na segunda etapa, introduzem-se os incrementos de forças de corrente também na direção Y.

São feitas 3 análises, variando-se apenas o perfil de velocidades de correntes, mantendo-se constantes os demais parâmetros da análise do exemplo VI.3.1. Os deslocamentos impostos no trecho superior do duto também permanecem invariantes. Eles são devidos ao movimento da barcaça.

Os perfis das velocidades de correntes são lineares, variando de zero, no fundo do mar, até um valor máximo na superfície.

Os valores máximos de tensões axiais são comparados com a tensão de escoamento do material do duto.

Os resultados são apresentados na tabela 15.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$				
Nó	Deslocamento Imposto (cm)	Velocidade de corrente na direção Y (normal) na superfície d'água		
		1.0 m/s	2.0 m/s	3.0 m/s
01	1.00	9	9	9
02	0.97	13	13	13
03	0.93	12	12	13
04	0.85	13	13	14
05	0.76	12	12	11
06	0.73	12	12	12
07	0.70	12	13	13
08	0.66	12	12	13
09	0.63	16	16	17
10	0.58	16	17	19
11	0.52	18	17	16
12	0.48	44	45	44
13	0.43	84	85	83
14	0.39	73	71	71
15	0.35	77	78	79
16	0.31	60	59	60
17	0.26	62	64	65
18	0.19	49	50	51
19	0.12	80	78	76
20	0.06	70	71	70
21	0.00	84	84	81
22	0.00	52	51	56
23	0.00	54	59	68
24	0.00	84	90	103
25	0.00	55	62	75
26	0.00	48	56	72
27	0.00	40	47	60
28	0.00	48	55	69
29	0.00	33	40	51
30	0.00	32	39	51
31	0.00	45	51	61
32	0.00	77	82	92
33	0.00	50	55	65
34	0.00	37	43	56
35	0.00	21	27	39
36	0.00	14	20	33
37	0.00	17	21	27
38	0.00	24	28	34
39	0.00	30	35	41
40	0.00	33	37	43
41	0.00	34	38	43
42	0.00	35	38	43
43	0.00	36	39	42
44	0.00	37	39	42
45	0.00	37	39	42
46	0.00	38	40	42
47	0.00	38	40	42
48	0.00	39	41	43

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$				
Nó	Deslocamento Imposto (m)	Velocidade de corrente na direção Y (normal) na superfície d'água		
		1.0 m/s	2.0 m/s	3.0 m/s
49	0.00	39	41	43
50	0.00	40	41	43
51	0.00	40	41	43
52	0.00	39	40	42
53	0.00	37	38	39
54	0.00	30	31	32
55	0.00	13	15	19
56	0.00	10	13	19
57	0.00	16	24	38
58	0.00	21	46	88
59	0.00	48	54	65
60	0.00	14	15	18
61	0.00	6	6	6

Tabela 15 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - deslocamentos prescritos e correntes na direção Y.

São apresentados percentuais da tensão de escoamento do material do duto obtidos para os três casos. Destacam-se os valores que ultrapassam 100%.

A figura 34 mostra os deslocamentos do duto no plano horizontal XY devidos às ações na direção Y do sistema global de referência, das correntes e dos deslocamentos prescritos provocados pelo movimento da barcaça.

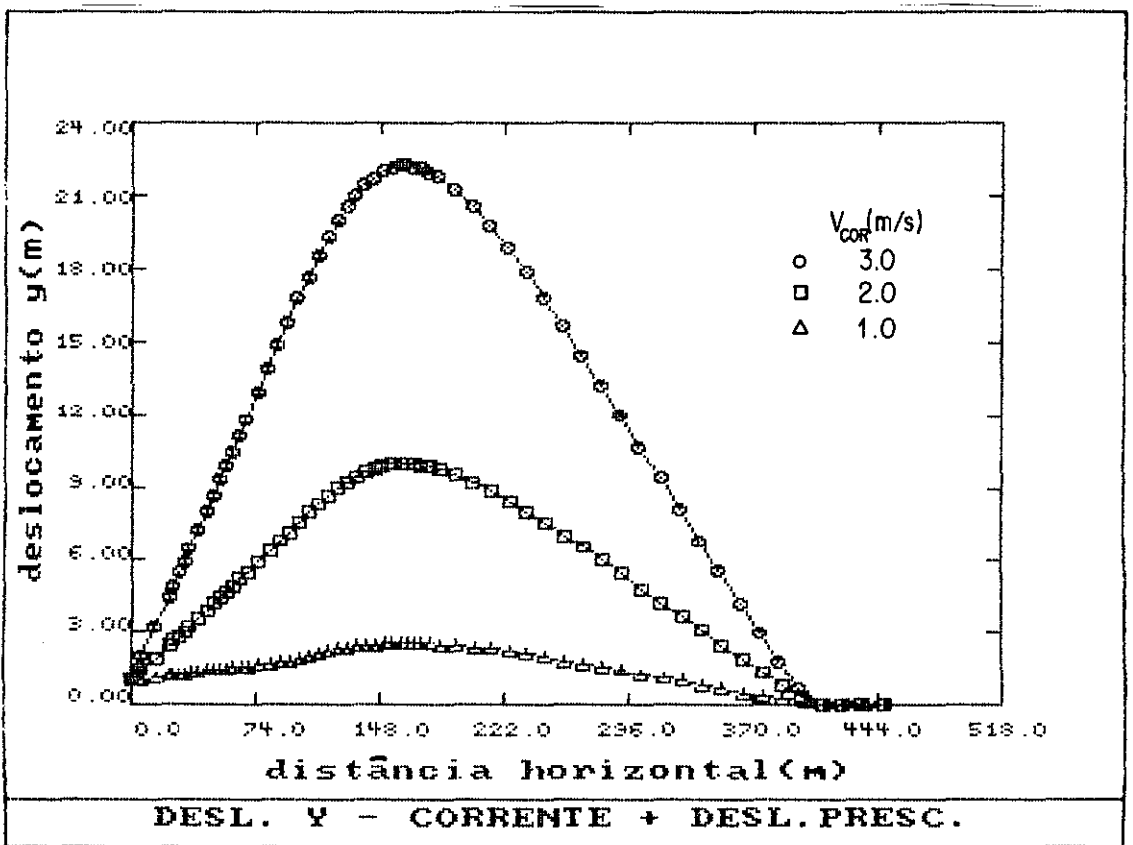


Figura 34 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com corrente e deslocamentos impostos.

VI.3.9) LANÇAMENTOS SOB AÇÕES DE PESO PRÓPRIO, EMPUXO, FORÇA DE TRAÇÃO, DESLOCAMENTOS IMPOSTOS NO TRECHO SUPERIOR DO DUTO E ONDA

Neste exemplo, o carregamento é também aplicado em duas etapas. A primeira etapa é semelhante a do exemplo anterior. Na segunda etapa, introduzem-se os incrementos de forças de onda na direção Y do sistema de referência global.

São feitas 3 análises, variando-se somente a altura de onda, mantendo-se invariantes os demais parâmetros da primeira etapa do exemplo VI.3.8.

Os valores máximos de tensões axiais obtidos são comparados com a tensão de escoamento do material do duto.

Apresentam-se os resultados na tabela 16.

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$

Amplitude de onda na direção Y (normal)				
Nó	Deslocamento Imposto (m)	2.0 m	3.0 m	4.0 m
01	1.00	9	9	9
02	0.97	13	13	13
03	0.93	12	12	13
04	0.85	13	13	14
05	0.76	12	12	12
06	0.73	12	12	12
07	0.70	12	12	12
08	0.66	12	12	13
09	0.63	16	16	17
10	0.58	17	18	20
11	0.52	18	18	20
12	0.48	45	46	47
13	0.43	85	86	87
14	0.39	72	73	74
15	0.35	77	80	83
16	0.31	59	61	63
17	0.26	63	65	66
18	0.19	49	50	150
19	0.12	80	82	84
20	0.06	69	64	63
21	0.00	83	86	99
22	0.00	52	59	68
23	0.00	56	63	72
24	0.00	87	92	100
25	0.00	56	60	66
26	0.00	49	52	57
27	0.00	39	42	46
28	0.00	48	49	51
29	0.00	32	32	34
30	0.00	31	31	32
31	0.00	44	43	44
32	0.00	76	76	76
33	0.00	48	49	51
34	0.00	35	36	36
35	0.00	20	21	22
36	0.00	13	14	17
37	0.00	15	16	16
38	0.00	23	23	24
39	0.00	30	31	32
40	0.00	33	34	36
41	0.00	34	36	38
42	0.00	35	37	39
43	0.00	36	38	40
44	0.00	37	38	40
45	0.00	37	39	40
46	0.00	38	40	42
47	0.00	39	40	42
48	0.00	39	41	43
49	0.00	40	41	43

Percentuais da tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$				
Amplitude de onda na direção Y (normal)				
Nó	Deslocamento Imposto (m)	2.0 m	3.0 m	4.0 m
50	0.00	40	42	44
51	0.00	40	42	44
52	0.00	39	41	43
53	0.00	37	38	39
54	0.00	30	31	29
55	0.00	13	13	13
56	0.00	10	11	9
57	0.00	15	18	13
58	0.00	19	29	16
59	0.00	47	50	47
60	0.00	14	14	13
61	0.00	6	6	6

Tabela 16 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - deslocamentos prescritos e ondas na direção Y.

Apresentam-se percentuais da tensão de escoamento do material do duto obtidos para as três análises. São destacados os valores maiores ou iguais a 100%.

A figura 35 apresenta os deslocamentos do duto no plano horizontal XY devidos às ações na direção Y, das ondas e dos deslocamentos prescritos provocados pelo movimento da barcaça.

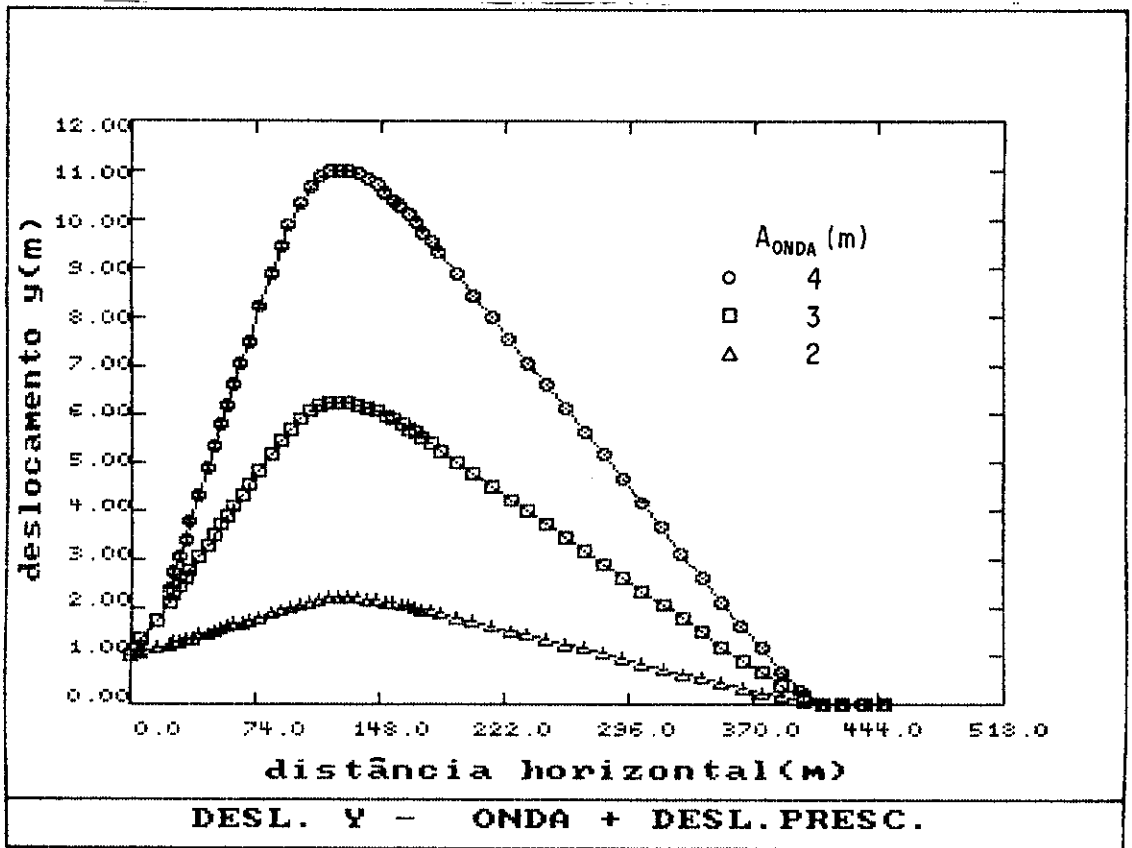


Figura 35 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com onda e deslocamentos impostos.

VI.3.10) LANÇAMENTO SOB AÇÕES DE PESO PRÓPRIO, EMPUXO, FORÇA DE TRAÇÃO, DESLOCAMENTOS IMPOSTOS NO TRECHO SUPERIOR DO DUTO, CORRENTE E ONDA

No presente exemplo, aplica-se o carregamento também em duas etapas. A primeira etapa é semelhante à do exemplo VI.3.8. Na segunda etapa, introduzem-se os incrementos de forças de onda e corrente na direção Y do sistema de referência global.

Comparam-se os valores máximos de tensões axiais obtidos com a tensão de escoamento do material do duto.

Os resultados obtidos são mostrados na tabela 17.

O deslocamento máximo obtido na direção do eixo Y do sistema de referência global foi de 4.73 m, nos nós 31 e 32 do modelo do duto na região do stinger próxima a sua extremidade inferior. Este valor será utilizado para comparação no exemplo VI.5.2 de análise dinâmica.

Os deslocamentos na direção Y dos nós 2, 25 a 28 e 31 a 35 serão representados na tabela 18 do item VI.3.11, para comparações.

Velocidade de corrente (na superfície) = 1 m/s; amplitude de onda = 1 m (direção Y)			
Nó	Deslocamento Imposto (m)	% tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	Deslocamento Y (horizontal) (m)
01	1.00	9	1.00
02	0.97	13	1.09
03	0.93	12	1.18
04	0.85	13	1.40
05	0.76	12	1.62
06	0.73	12	1.71
07	0.70	12	1.80
08	0.66	12	1.89
09	0.63	16	1.97
10	0.58	17	2.12
11	0.52	18	2.27
12	0.48	45	2.39
13	0.43	85	2.50
14	0.39	72	2.61
15	0.35	78	2.71
16	0.31	59	2.84
17	0.26	63	2.96
18	0.19	50	3.15
19	0.12	79	3.34
20	0.06	70	3.50
21	0.00	84	3.67
22	0.00	51	3.87
23	0.00	57	4.06
24	0.00	88	4.24
25	0.00	59	4.37
26	0.00	51	4.49
27	0.00	43	4.57
28	0.00	50	4.64
29	0.00	35	4.69
30	0.00	34	4.72
31	0.00	46	4.73
32	0.00	78	4.73
33	0.00	51	4.72
34	0.00	37	4.70
35	0.00	22	4.66
36	0.00	15	4.62
37	0.00	17	4.57
38	0.00	24	4.51
39	0.00	31	4.37
40	0.00	34	4.20
41	0.00	35	4.02
42	0.00	36	3.82
43	0.00	37	3.61
44	0.00	37	3.38
45	0.00	38	3.15
46	0.00	39	2.91
47	0.00	39	2.66
48	0.00	40	2.41

Velocidade de corrente (na superfície) = 1 m/s; amplitude de onda = 1 m (direção Y)			
Nó	Deslocamento Imposto (m)	% tensão de escoamento de $422 \times 10^3 \text{ kN/m}^2$	Deslocamento Y (horizontal) (m)
49	0.00	40	2.15
50	0.00	40	1.89
51	0.00	40	1.63
52	0.00	40	1.37
53	0.00	37	1.11
54	0.00	30	0.85
55	0.00	13	0.59
56	0.00	11	0.35
57	0.00	18	0.13
58	0.00	28	0.00
59	0.00	50	0.00
60	0.00	14	0.00
61	0.00	06	0.00

Tabela 17 - Análise estática em lâmina d'água de 100 m - deslocamentos prescritos, corrente e onda na direção Y.

Apresentam-se os percentuais de tensão de escoamento do material do duto e os deslocamentos na direção Y obtidos neste exemplo.

A figura 36 apresenta os deslocamentos do duto no plano horizontal XY devidos às ações na direção Y, dos deslocamentos prescritos, onda e corrente.

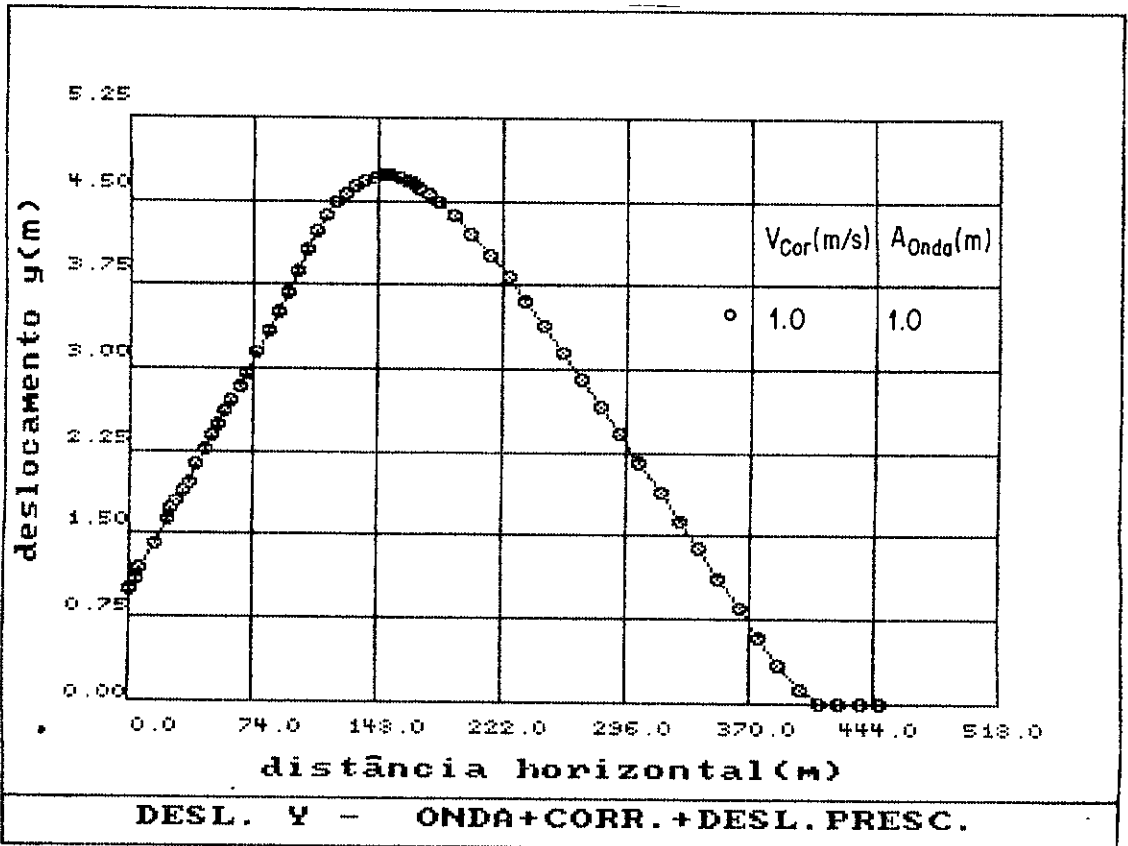


Figura 36 - Deslocamentos no plano XY - Lâmina d'água de 100 m - com onda, corrente e deslocamentos impostos.

VI.3.11) COMPARAÇÕES ENTRE DESLOCAMENTOS DO DUTO OBTIDOS EM LÂMINA D'ÁGUA DE 100 m

Neste item, apresentam-se deslocamentos máximos do duto na direção Y devidos às solicitações isoladas e simultâneas, na direção Y, de onda com amplitude de 1 m do exemplo VI.3.7, de corrente com velocidade de 1 m/s na superfície do mar do exemplo VI.3.6 e de deslocamentos impostos no trecho superior do duto com valor de 1 m em seu topo do exemplo VI.3.5.

O objetivo é comparar a soma dos deslocamentos das solicitações isoladas aos das mesmas solicitações simultâneas.

Escolheram-se os nós do modelo da estrutura onde os deslocamentos foram maiores.

Os resultados obtidos são mostrados na tabela 18.

Nó	Deslocamentos na direção Y (m)			
	Desl. presc. no topo = 1 m	Corrente V = 1 m/s (superfície)	Onda a = 1 m	Desl. presc. + corr. + onda
02	0.97	0.06	0.02	1.09
25	0.00	2.23	0.54	4.37
26	0.00	2.31	0.54	4.49
27	0.00	2.38	0.54	4.57
28	0.00	2.43	0.54	4.64
31	0.00	2.54	0.52	4.73
32	0.00	2.56	0.51	4.73
33	0.00	2.57	0.51	4.72
34	0.00	2.57	0.50	4.70
35	0.00	2.57	0.49	4.66

Tabela 18 - Deslocamentos na direção Y obtidos de análises estáticas em lâmina d'água de 100 m.

Apresentam-se deslocamentos na direção Y devidos a solicitações isoladas e simultâneas, para comparações.

VI.4) ANÁLISE DINÂMICA DE VIGA COM GRANDES DESLOCAMENTOS

Este exemplo trata de um viga engastada em uma extremidade e livre na outra, sob carga uniformemente distribuída, \bar{p} , ao longo do seu comprimento, conforme esquema da figura 37.

A viga apresenta um comprimento, L , de 10 in e seção transversal de 1 in x 1 in. O módulo de elasticidade do material da viga é de 1.2×10^4 lb/in². A sua massa específica por metro de comprimento é de 10^{-6} lb x s²/in⁴. A carga aplicada é de 2.85 lb/in.

A viga foi discretizada em dois elementos de iguais comprimentos e foram feitas análises linear e não linear com iterações de Newton-Raphson.

No instante de tempo inicial, $t = 0$, assumiram-se valores nulos para deslocamentos, velocidades e acelerações dos nós do modelo. O tempo total de integração utilizado foi de 90 s. Para análise dinâmica não linear, adotaram-se os seguintes intervalos de tempo:

$$\Delta t_1 = T_F / 126$$

$\Delta t_2 = T_F/42$, onde $T_F = 57.3 \times 10^{-4}$ s é o período fundamental da viga.

Para análise dinâmica linear, adotou-se o intervalo de tempo Δt_2 .

Adotaram-se, para os parâmetros α e δ de Newmark, os valores de 0.25 e 0.5, respectivamente.

Os resultados obtidos são apresentados nos gráficos da figura 38.

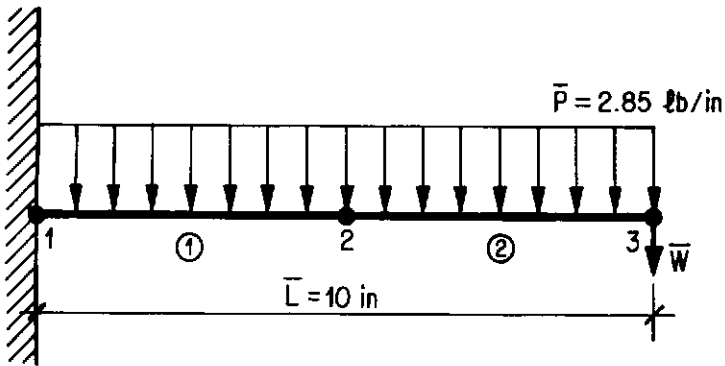


Figura 37 - Esquema estrutural da viga.

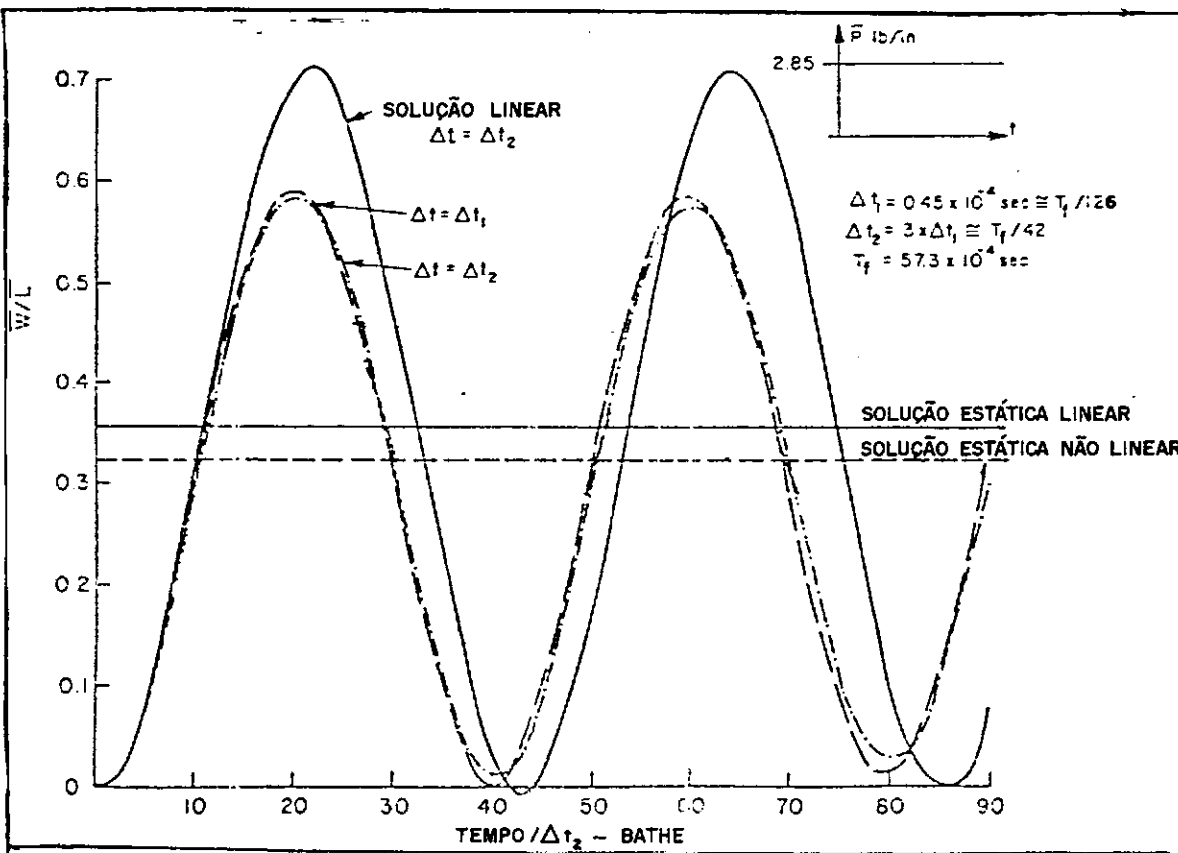
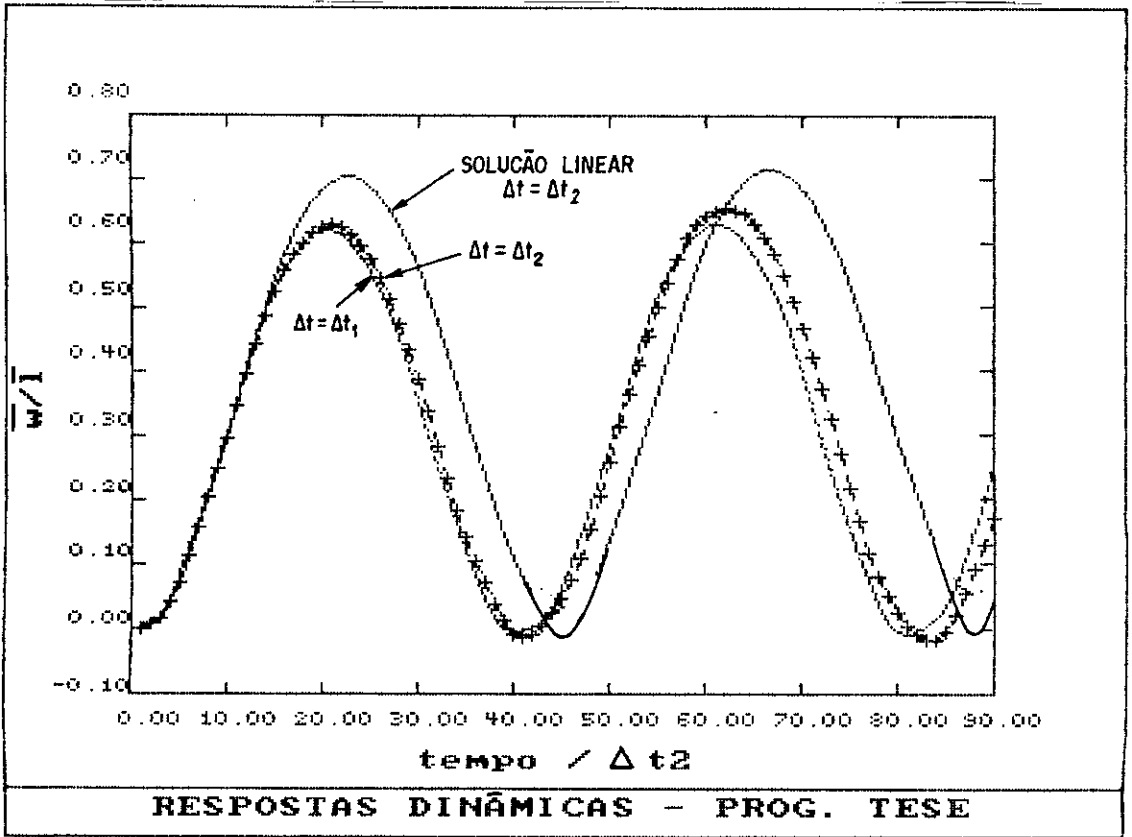


Figura 38 - Respostas Dinâmicas - viga sob carga uniformemente distribuída.

VI.5) ANÁLISES DINÂMICAS DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 100 m

As análises dinâmicas são feitas a partir dos resultados finais das análises estáticas.

O procedimento é o seguinte: ao final da análise estática, guardam-se a configuração geométrica da estrutura seus esforços e reações em um arquivo que é lido pelo programa de análise dinâmica. A partir dessas grandezas, pode-se calcular a matriz de rigidez da estrutura.

Os períodos naturais da estrutura foram calculados através do programa de análise de frequências desenvolvido na presente tese. Neste programa também é lido o arquivo que guarda os resultados finais da análise estática. Os valores obtidos para os primeiro e segundo períodos foram de 24.8 s e de 12.9 s, respectivamente.

O tempo total de integração e o intervalo de tempo, Δt , utilizados na análise foram de 320 s e 0.1 s, respectivamente. Adotaram-se, para os parâmetros α e δ de Newmark, os valores de 0.25 e 0.5, respectivamente.

Para o cálculo da força hidrodinâmica, foram adotados coeficiente de inércia de 2.0 e coeficiente de arraste de 1.0. Para massa específica da água do mar utilizou-se o valor de 1025 kg/m^3 .

Consideraram-se valores de 5% e 3% para valores dos parâmetros de amortecimento correspondentes às primeira e segunda frequências naturais do dutos, respectivamente.

VI.5.1) ESTUDO DA INFLUÊNCIA DO PERÍODO DA ONDA NA AMPLIFICAÇÃO DINÂMICA

Neste item, as análises dinâmicas são feitas a partir dos resultados finais da análise estática do exemplo VI.3.1, valendo, portanto, os mesmos dados de entrada.

Para avaliação da influência do período da onda na amplificação dinâmica foram feitas 4 análises dinâmicas e 4 análises estáticas correspondentes, mantendo-se a amplitude da onda constante, igual a 1 m e variando-se o período da onda.

Os resultados obtidos são apresentados na tabela 19. O nó 32 foi escolhido por apresentar predominantemente maiores deslocamentos na direção Y.

Deslocamentos máximos do nó 32 na direção Y			
Período da onda (s)	Deslocamentos na direção Y (m)		Fator de amplificação dinâmica
	Análise estática	Análise dinâmica	
12	0.28	0.17	0.61
16	0.31	0.23	0.74
20	0.38	0.40	1.05
24	0.42	0.77	1.83

Tabela 19 - Análise dinâmica em lâmina d'água de 100 m - influência do período da onda na amplificação dinâmica.

Apresentam-se os deslocamentos do nó 32 na direção Y obtidos pelas análises estática e dinâmica para cada período de onda e os correspondentes fatores de amplificação dinâmica.

A figura 39 permite a visualização do crescimento do fator de amplificação dinâmica, à medida que o período da onda se aproxima do período fundamental da estrutura.

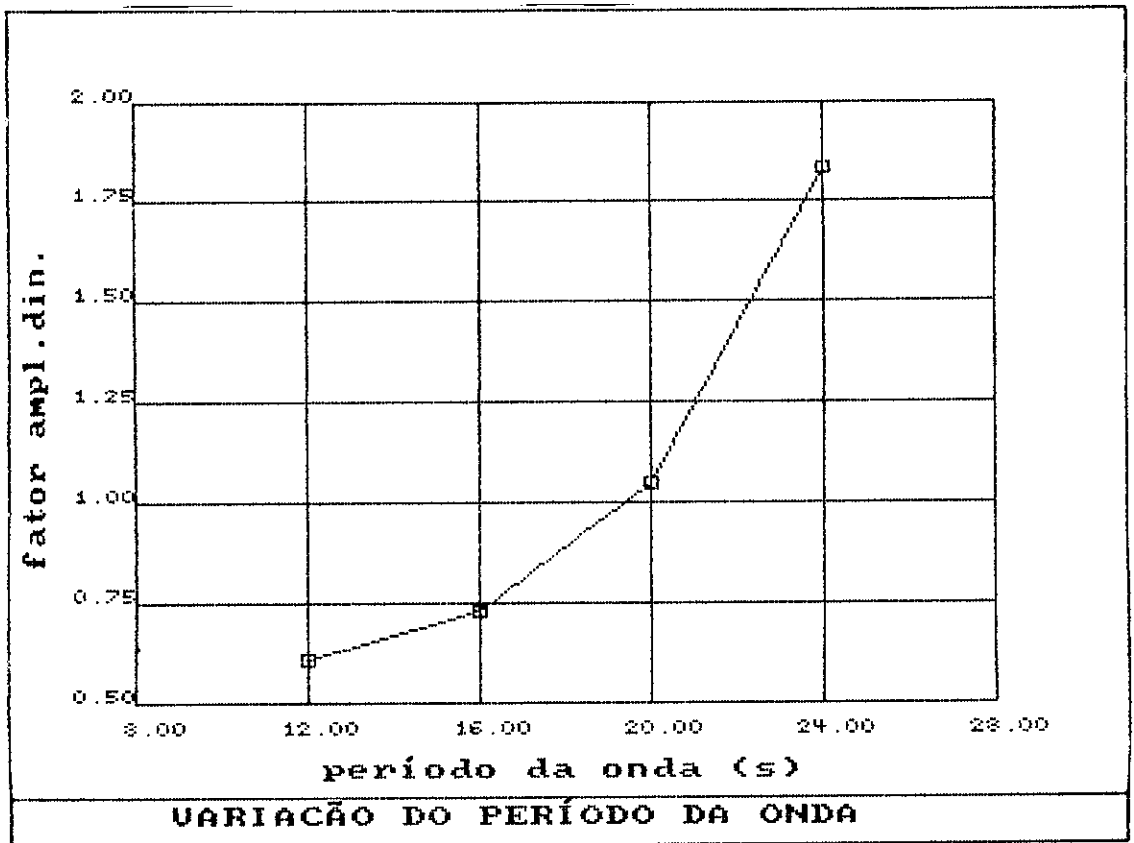


Figura 39 - Variação do período da onda e correspondentes fatores de amplificação dinâmica.

VI.5.2) ANÁLISE DINÂMICA DE UM DUTO DURANTE O LANÇAMENTO EM LÂMINA D'ÁGUA DE 100 m SOB A AÇÃO DE ONDA, CORRENTE E DESLOCAMENTOS IMPOSTOS NO TRECHO SUPERIOR DO DUTO, NA DIREÇÃO Y

Neste item, a análise dinâmica é feita a partir dos resultados finais da análise estática do exemplo VI.3.5 correspondente aos deslocamentos impostos no trecho superior do duto com valor de 1 m em seu topo. São válidos, portanto, os mesmos dados de entrada do exemplo VI.3.5.

A amplitude de onda adotada é de 1 m e o seu período de 8 s. A velocidade na superfície do mar, do perfil de velocidades de corrente considerado, é de 1 m/s.

Um dos objetivos deste exemplo é a realização de uma análise completa do problema do lançamento, incluindo as etapas estática e dinâmica e aplicando-se as diversas cargas ao duto.

Outro objetivo deste item é comparar o deslocamento máximo obtido na análise estática do exemplo VI.3.10, na direção Y, nos nós 31 e 32 do modelo do duto, com o deslocamento obtido no presente exemplo correspondente a um destes dois nós (o que possuir o maior deslocamento).

Os valores obtidos para os deslocamentos na direção Y do nó 32, correspondentes às análises estática e dinâmica foram de 4.73 m e 3.18 m, respectivamente.

VI.6) ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os resultados obtidos dos diversos exemplos estudados demonstraram a adequação da formulação apresentada na presente tese para analisar o problema do lançamento de dutos submarinos.

No primeiro exemplo, houve uma boa concordância entre os resultados determinados a partir do programa de análise estática da presente tese e os resultados obtidos através do programa comercial "Pipeline". Nos trechos apoiados do duto, houve pequenas diferenças entre os resultados de tensões axiais desses programas. Essas diferenças podem ser explicadas pelo fato de se estarem utilizando modelos de discretização para o stinger e para o terreno do fundo do mar, diferentes dos utilizados pelo programa "Pipeline" e podem ser diminuídas através da utilização de malha de elementos finitos mais refinada.

No item VI.3.1. do segundo exemplo, houve também boa concordância entre os resultados conseguidos com o programa implementado nesta tese e os determinados pelo programa comercial. Dentre os fatores que podem ter influenciado nas desigualdades entre os resultados de tensões axiais desses dois programas na região do stinger, estão: as formas distintas de aplicação da força de tração pela máquina tracionadora, os modelos de discretização também distintos considerados para o stinger e a aproximação de sua configuração geométrica através de uma parábola do segundo grau, no presente trabalho. Os diferentes modelos considerados nos programas para

discretização do terreno do fundo do mar podem ter ocasionado as pequenas diferenças também existentes entre as tensões axiais na região do duto em contato com o solo. A utilização de malha de elementos finitos mais refinada permite reduzir essas diferenças.

No exemplo VI.3.2, variou-se a intensidade da força de tração aplicada pela máquina tracionadora para se estudar sua influência. Através da tabela apresentada no item VI.3.2, pode-se verificar que aumentando a intensidade da força de tração, as tensões axiais combinadas diminuem até um determinado ponto, passando a crescer a partir dele. Para valores pequenos da força de tração, tensões axiais de flexão são altas. À medida que a força de tração aumenta, o duto se enrijece, as tensões axiais de flexão diminuem e as tensões axiais de extensão aumentam. O efeito final nas tensões axiais combinadas é de redução. Acima de um certo valor, no entanto, a força de tração se torna grande o suficiente para que a tensão axial de extensão seja significativa, resultando em aumento da tensão axial combinada. Assim, pode-se concluir que para um determinado duto e profundidade de lâmina d'água, existe uma força de tração ótima associada a mínimas tensões axiais combinadas e que pode ser obtida através do programa desta tese. No exemplo VI.3.2 a força de tração ótima obtida foi de 600 kN. Observou-se também no exemplo VI.3.2, que a força de tração é máxima junto à máquina tracionadora, decrescendo no sentido do fundo do mar.

No exemplo VI.3.3, estudou-se a influência da curvatura do stinger na análise do lançamento. Variou-se o coeficiente angular da parábola do segundo grau, que aproxima a configuração geométrica do stinger. Concluiu-se que existe uma curvatura ótima para o stinger, correspondente a mínimas tensões axiais de flexão e que pode ser obtida através do programa desta tese. A medida que a curvatura do stinger é desviada de seu valor ótimo, as tensões axiais de flexão aumentam. A geometria do stinger domina a distribuição de tensões ao longo do trecho do duto apoiado pelo stinger.

No caso VI.3.4, variaram-se as constantes de mola do solo em uma faixa da 10^5 a 10^7 kN/m. As tensões e deformações obtidas praticamente não variaram. As condições dos apoios correspondentes ao stinger também não variaram. Verificou-se que quanto mais rígido o terreno do fundo do mar, maior a separação vertical nos nós de apoios descontínuos do duto correspondentes ao solo que permanecem abertos.

No exemplo VI.3.5, introduziram-se deslocamentos prescritos no trecho superior do duto, na direção perpendicular ao plano do lançamento, aumentando-se seus valores até se atingir a tensão de escoamento do material do duto em alguma seção. Esses deslocamentos são devidos ao movimento da barçaa. Verificou-se que as tensões axiais máximas ocorreram no trecho do duto apoiado pelo stinger.

No item VI.3.6, estudou-se o efeito de correntes paralelas e perpendiculares ao duto lançado. Direção paralela, neste caso, é aquela que coincide com a orientação da barcaça de lançamento. Este estudo comparativo só foi possível devido ao modelo matemático tridimensional adotado na presente tese. Nas tabelas 12 e 13, pode-se verificar a influência, nas tensões axiais, de valores crescentes de força de corrente. A velocidade de corrente paralela, para qual a tensão de escoamento do aço foi ultrapassada em alguns pontos do duto, foi 4.8 vezes a velocidade de corrente na direção perpendicular em que a tensão de escoamento do aço do mesmo duto foi ultrapassada, o que demonstra a importância de um estudo tridimensional para o problema do lançamento. A implementação das etapas de carga foi também de suma importância nos estudos deste exemplo, uma vez que as forças de correntes puderam ser aplicadas em uma segunda etapa. A aplicação destas forças na primeira etapa, causaria deslocamentos no duto bem maiores, irrealis, já que praticamente toda extensão do duto ficaria sujeita às forças de corrente maiores, próximas à superfície do mar, em um grande número de incrementos de cargas, tendo em vista que o duto parte de uma configuração inicial horizontal, próxima à superfície do mar, adotada no presente trabalho.

No caso VI.3.7, analisou-se a influência de ondas paralelas e perpendiculares ao duto. A altura de onda aplicada na direção paralela para a qual a tensão de escoamento do aço do duto foi ultrapassada em algumas

seções correspondeu a 2.5 vezes a altura de onda na direção perpendicular em que a tensão de escoamento do material do mesmo duto foi superada. Da mesma forma que no exemplo VI.3.6, demonstrou-se a importância de um estudo tridimensional para o problema do lançamento. A possibilidade de aplicação das forças de onda em uma segunda etapa de carga foi também de grande valia neste exemplo.

No exemplo VI.3.8, foi possível o estudo da influência de correntes perpendiculares ao duto lançado no caso de também ter sofrido ação de deslocamentos perpendiculares ao seu trecho superior devidos ao movimento da barça. Mantiveram-se constantes os valores de deslocamentos prescritos, variando-se somente a velocidade de corrente. Comparando-se os gráficos das figuras 34 e 32, nota-se que houve variações de deslocamentos do duto no trecho inicial correspondente ao stinger, sendo praticamente coincidentes os demais deslocamentos. A tensão de escoamento do material do duto foi atingida em uma seção da região do stinger.

No item VI.3.9, conseguiu-se analisar o efeito de ações de ondas perpendiculares ao duto lançado no caso de também ter sofrido ação de deslocamentos perpendiculares ao seu trecho superior devidos à embarcação. Mantiveram-se constantes os valores de deslocamentos impostos, variando-se somente a altura de onda. A partir dos gráficos das figuras 33 e 35, nota-se que houve variações nos deslocamentos do duto no trecho inicial do stinger,

praticamente coincidindo, os demais. A tensão de escoamento do aço do duto ocorreu em uma seção na região do stinger.

No exemplo VI.3.10, analisou-se a influência da ação simultânea de corrente e onda perpendiculares ao duto lançado no caso de também ter sofrido ação de deslocamentos perpendiculares em seu trecho superior. Fez-se, portanto uma análise estática completa, isto é, incluindo os diversos parâmetros que influem no problema do lançamento. Resultados deste exemplo são usados em comparações nos exemplos VI.3.11 e VI.5.2.

No exemplo VI.3.11, avaliando-se os resultados obtidos, concluiu-se que a resposta da análise no caso de ondas e correntes agindo simultaneamente é diferente da soma das respostas das análises com ondas e correntes agindo isoladamente. Isto é devido ao comportamento não linear da resposta da análise estrutural do duto durante a fase de lançamento. Resultados obtidos demonstram que deflexões laterais devidas à ação conjunta de onda e corrente são maiores que a soma das deflexões laterais devidas à onda e corrente agindo separadamente.

No exemplo VI.4, houve concordância satisfatória entre os resultados obtidos através do programa desenvolvido nesta tese e os resultados apresentados por Bathe (1976), demonstrando-se e aferindo-se a capacidade do programa do presente trabalho para um estudo dinâmico com grandes deslocamentos. Este exemplo mostra também que

a solução por análise linear se afasta da solução por análise não linear, para problemas estruturais com grandes deslocamentos.

No item VI.5.1, constatou-se que à medida que o período da onda se aproxima do período fundamental da estrutura, de aproximadamente 24.8 s, o fator de amplificação dinâmica aumenta.

No item VI.5.2, conseguiu-se realizar um estudo completo do problema do lançamento, incluindo-se os inúmeros parâmetros e aplicando-se as diversas cargas atuantes na análise estrutural do duto, com suas etapas estática e dinâmica. Neste exemplo, constatou-se também que para o caso da onda com período de 8 s, de aproximadamente 30% do período fundamental da estrutura, os deslocamentos obtidos através da análise estática são maiores que os determinados por análise dinâmica.

CAPÍTULO VII

VII.1) CONCLUSÕES

O presente trabalho foi desenvolvido com o objetivo principal de se ampliar conhecimentos sobre o problema estrutural do lançamento de dutos submarinos.

Visando-se analisar o problema tridimensional, fortemente não linear geométrico, envolvido pelo lançamento de dutos, em águas cada vez mais profundas, estudou-se uma formulação de elementos finitos adequada, descrita no capítulo III.

O elemento finito de pórtico espacial formulado é capaz de levar em conta as não linearidades geométricas presentes na análise do lançamento.

O sistema de coordenadas Lagrangeanas atualizadas foi adotado, devido à existência de grandes deslocamentos, sendo indispensável a atualização de coordenadas no decorrer da análise.

Estudaram-se também, dois procedimentos incrementais de resolução de sistemas de equações não lineares, com ou sem iterações. No método incremental linear, deve-se usar incrementos de carga menores para que a solução numérica se aproxime da exata. No método incremental não linear, o equilíbrio é garantido através das iterações de Newton Raphson.

Partindo-se de um programa de análise estática não linear geométrica de pórtico plano, modificaram-se rotinas existentes e acrescentaram-se outras, transformando-o, inicialmente, em um programa de análise não linear geométrica de pórtico espacial.

Através da resolução de exemplos existentes na literatura, demonstrou-se a adequação do método de análise não linear geométrica deste trabalho para problemas tridimensionais de grandes deslocamentos. Os resultados numéricos obtidos foram substancialmente precisos, quando comparados com os dos exemplos publicados em trabalhos anteriores.

Introduziram-se no programa, características específicas à fase de lançamento de dutos submarinos, possibilitando um estudo adequado do problema.

Descreveu-se um método numérico capaz de simular satisfatoriamente o problema de contato do duto com o terreno do fundo do mar e com o stinger de lançamento. Mostrou-se como foram implementados apoios especiais descontínuos permitindo que as condições de contorno do problema se modifiquem durante a análise. O apoio elástico descontínuo só se torna efetivo quando a coordenada do nó em que está conectado atinge um valor previamente definido. Isto significa que se estabeleceu contato em uma região do contorno da estrutura. Na subrotina que introduz as condições de contorno ao sistema de equações, associam-se ao nó com apoio descontínuo uma matriz de rotação formada a partir dos três ângulos que definem a direção do apoio e uma matriz de rigidez diagonal, cujos termos são as constantes de mola de deslocamentos e de rotações. Transforma-se a matriz de rigidez diagonal do referencial local para o global e acrescentam-se os termos da matriz obtida à matriz de rigidez da estrutura. Se o apoio descontínuo for exclusivamente de compressão, o grau de liberdade na direção de descontinuidade do nó apoiado

fica sem restrição, se houver tração.

Introduziu-se uma subrotina para o cálculo de forças de onda e corrente através da fórmula de Morison, apropriada ao problema tridimensional do lançamento. Implementou-se a técnica publicada por Borgman (1958), em que só contribuem para essas forças as componentes normais de velocidade e aceleração das partículas fluidas.

Implementou-se também ao programa, a aplicação de cargas por etapas, possibilitando uma análise não linear geométrica mais precisa, uma vez que o princípio da superposição de efeitos não é válido para este tipo de análise. Assim, as cargas de corrente e de onda só são aplicadas em uma segunda etapa, após a aplicação do peso próprio, empuxo e da força de tração da máquina tracionadora.

Estudou-se a influência na análise estrutural de dutos durante o lançamento, das diversas cargas atuantes, como o esforço de tração aplicado pela máquina tracionadora e as ações ambientais de peso próprio, empuxo, corrente e onda. Analisou-se a influência da intensidade e da direção das forças de onda e corrente. Com relação à direção de incidência de onda e corrente, concluiu-se que o caso mais desfavorável é aquele em que ambos, onda e corrente, atuam perpendicularmente ao plano do lançamento do duto.

Estudou-se também o efeito de grandezas como curvatura do stinger, altura da lâmina d'água, deslocamentos impostos no trecho superior do duto devidos ao movimento da barcaça e constantes de mola relativas ao solo do fundo do mar, no cálculo de deslocamentos e

esforços do duto na fase de lançamento.

Para se esclarecer a influência das diversas grandezas mencionadas nos parágrafos anteriores na análise estrutural do duto durante o lançamento, rodou-se uma série de exemplos, onde foram variados e combinados entre si os diversos parâmetros do problema. A análise de resultados numéricos obtidos é apresentada no capítulo VI. Em todos os exemplos estáticos considerados, os resultados obtidos foram satisfatórios. Através do programa, podem-se determinar valores ótimos da força de tração aplicada pela máquina tracionadora e da curvatura do stinger, correspondentes a tensões axiais mínimas.

Desenvolveu-se ainda, um programa de cálculo das frequências naturais de pórticos espaciais, implementando-se a subrotina de Jacobi do livro do Bathe (1982). Considerou-se o efeito dos esforços axiais no cálculo da matriz de rigidez da estrutura. Permitiu-se, portanto, a determinação das frequências naturais da estrutura a partir de sua configuração deformada e dos esforços axiais obtidos da análise estática.

Concluiu-se que os períodos de ondas comumente admissíveis durante o lançamento são normalmente menores que os primeiros períodos naturais que se obtêm para os dutos lançados, pois para ondas mais altas que aquelas, procede-se a operação de abandono do lançamento. Isto se torna mais evidente em águas profundas, onde normalmente é maior a flexibilidade da estrutura.

Partiu-se de um programa de análise dinâmica não linear para pórticos planos, sobre o qual foram feitas diversas modificações, tanto alterando rotinas já

existentes, como introduzindo outras. Transformou-se, então, o programa original em um programa de análise dinâmica não linear, tridimensional de dutos durante a fase de lançamento.

A análise dinâmica foi feita por um método implícito de integração direta no domínio do tempo, utilizando-se o método de Newmark para resolução dos sistemas de equações do problema. Uma modificação envolvendo iterações internas adicionais se fez necessária pois a força hidrodinâmica é função da velocidade relativa fluido-estrutura e a velocidade da estrutura faz parte da resolução do sistema de equações.

Partindo-se da configuração deformada e dos esforços internos obtidos da análise estática do lançamento do duto, faz-se então análise dinâmica através do programa desenvolvido.

Estudou-se a influência na amplificação dinâmica do período da onda. Nos casos usuais de ondas com períodos bem menores que os períodos fundamentais da estrutura, a análise estática é conservadora, uma vez que os deslocamentos e esforços resultantes são maiores que os obtidos por análises dinâmicas. Nesses casos, um estudo dinâmico possibilita um projeto econômico. Por outro lado, quando as características da onda influenciam uma amplificação dinâmica significativa nas respostas, o estudo dinâmico é indispensável à segurança da operação de lançamento.

Limites operacionais para diversas combinações de cargas ambientais podem ser determinados através das ferramentas computacionais desenvolvidas na presente tese.

Isto torna possível se prever quando uma operação pode começar e quando deve ser abandonada.

Pelo que foi descrito, acredita-se que os objetivos básicos do presente trabalho foram plenamente atingidos.

Podem-se sugerir os seguintes assuntos para estudos futuros:

- . Implementação de stinger flexível;
- . Operações de abandono e recuperação do duto;
- . Operações de tie-in;
- . Lançamento vertical ou J-Lay;
- . Estudo da influência das forças dinâmicas devidas aos movimentos da barcaça de lançamento.

VII.2) REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1- ALKOUSH, E. A., TORIDIS, T. G., KHOZEIMH, K. E HUANG, H. K. (1978), "Bifurcation, Pre-and Post-Buckling Analysis of Frame Structures", Computers & Structures, Vol. 8, pp. 667-678.
- 2- AZAR, R. (1978), "Curso sobre Engenharia Offshore para Petrobrás", Universidade de Oklahoma, Tulsa, OK
- 3- BATHE, K. J. (1976), " Static an Dynamic Geometric and Material Nonlinear Analysis Using Adina", Massachussetts Institute of Technology, Report 82448-2, Cambridge, Massachussets.
- 4- BATHE, K. J. (1982), "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Massachussetts, Institute of Technology.
- 5- BATHE, K. J. e BOLOURCHI, S. (1979), "Large Displacement Analysis of Three Dimensional Beam Structures", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 14, pp. 961-986.
- 6- BENJAMIN, A. C. (1982), "Análise Não-Linear Geométrica de Pórticos Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ.

- 7- BENJAMIN, A. C., MOURELLE, M. M., JACOB, B. P. e EBECKEN, N. F. F. (1988), "Coupled and Uncoupled Solutions for the Nonlinear Dynamic Behavior of Guyed Deep Water Platforms", Advances in Engineering Software, Vol. 10, N^o 1, pp. 2-7.
- 8- BERNITSAS, M. M. e VLAHOPOULOS, N. (1990), "Three-Dimensional Nonlinear Statics of Pipelaying Using Condensation in an Incremental Finite Element Algorithm", Computer & Structures, Vol. 35, N^o 3, pp. 195-214.
- 9- BORGMAN, E. L. (1958), "Computation of Ocean Wave Forces in Inclined Cylinders", Trans-American Geophysical Union, pp. 885-888.
- 10- BREBBIA, C. A. e WALKER, S. (1979), "Dynamic Analysis of Offshore Structures", Newnes-Butterworths, London, UK.
- 11- BRYNDUM, M. B., COLQUHOUN, R. S. e VERWAY, A. (1982), "Dynamic Lay Stresses for Pipelines", Proceedings of Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC Paper 4267, pp. 469-478.
- 12- CHAJES, A. e CHURCHILL, J. E. (1987), "Nonlinear Frame Analysis by Finite Element Methods", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 113, N^o 6, pp. 1221-1235.

- 13- DIXON, D. A. e RUTLIDGE, D. R. (1968), "Stiffened Catenary Calculation in Pipeline Lay Problems", *Journal of Engineering for Industry, Transactions ASME, Series B, Vol. 90*, pp. 153-160.
- 14- EBECKEN, N. F. F., JACOB, B. P. e MOURELLE, M. M. (1987), "Offshore Engineering", Proceedings of the 6th International Symposium on Offshore Engineering, COPPE/UFRJ, Vol. 6, pp. 385-401.
- 15- EBNER, A. M. e UCCIFERRO, J. J. (1972), "A Theoretical and Numerical Comparison of Elastic Nonlinear Finite Element Methods", Computers & Structures, Vol. 2, pp. 1043-1061.
- 16- FERRANTE, A. J. e BREBBIA, C. A. (1979), "Computational Methods for the Solution of Engineering Problems", Pentech Press, Londres.
- 17- GARDNER, T. N. e KOTCH, M. A. (1976), "Dynamic Analysis of Risers and Caissons by the Finite Element Method", Offshore Technology Conference, Dallas, Texas, Paper N^o 2651, Vol. 3, pp. 405-421.
- 18- GARRISON, C. J. (1980), "A Review of Drag and Inertia Forces on Circular Cylinders", Offshore Technology Conference, Houston, Texas, Paper N^o 3760, Vol. 2, pp. 205-218.

- 19- GNONE, E., GRECA, A. D. e BOMBASSEI, G. (1976), "Experimental and Theoretical Data Correlation of Sealines during Laying", Proceedings of Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC, Paper 2599, pp. 779-793.
- 20- GNONE, E., SIGNORELLI, P. e GIULIANO, V. (1975), "Three Dimensional Static and Dinamic Analysis of Deep Water Sealines and Risers", Proceedings of Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC, Paper 2326, pp. 799-812.
- 21- GONZALEZ, E. C. (1990), "Análise Estrutural de Risers para Águas Profundas", Tese M.Sc., COPPE/UFRJ.
- 22- HALL, J. E. (1975), "Mathematical Modeling of Marine Pipelines, Ph.D. Thesis, The University of Texas at Austin.
- 23- HUGHES, T. J. R., TAYLOR, R. L., SACKMAN, J. L., CERNIER, A. e KANOKNUKULCHAI, W. (1976), "A Method for a Class of Contact-Impact Problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 8, pp. 249-276.
- 24- JACOB, B. P. (1990), "Estratégias Computacionais para Análise Não-Linear Dinâmica de Estruturas Complacentes para Águas Profundas", Tese D.Sc., COPPE/UFRJ.

- 25- JENNINGS, A. (1968), "Frame Analysis Including Change of Geometry", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 94, N^o ST3, pp. 627-644.
- 26- KARACOSTAS, C. Z., BANIOTOPOULOS, C. C. e PANAGIOTOPOULOS, P. D. (1986), "Seabed Structure Interaction for Submarine Cables", Computers & Structures, Vol. 22, pp. 213-224.
- 27- KASSIMALI, A. e ABBASNIA, R. (1991), "Large Deformation Analysis of Elastic Space Frames", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, N^o 7, pp. 2069-2087.
- 28- KONUK, I. (1982), "Application of an Adaptive Numerical Technique to 3-D Pipeline Problems with Strong Nonlinearities", Journal Energy Resources Technology, Trans. ASME, Vol. 104, pp. 58-62.
- 29- LARSEN, C. M. e KAVLIE, D. (1978), "Nonlinear Analysis of Oil Pipelines by Potential Minimization", Computer & Structures, Vol. 8, pp. 733-747.
- 30- LIMA, E. C. P., COUTINHO, A. L. G. A., ALVES, J.L. D., LANDAU L. e EBECKEN, N. F. F. (1987), "Direct Integration of the Steady State Solution in Time Domain", Proceedings of the 6th International Symposium on Offshore Engineering, Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, pp. 463-473.

- 31- MAHMOUD, F. F., SALAMON, N. J. e MARKS, W. R. (1982), "A Direct Automated Procedure for Frictionless Contact Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 245-257.
- 32- McNAMARA, J. F. e LANE, M. (1984), "Practical Modeling for Articulated Risers and Loading Columns", Journal of Energy Resources Technology, Vol. 106, N^o 4, pp. 444-450.
- 33- MEEK, J. L. e TAN, H. S. (1984), "Geometrically Nonlinear Analysis os Space Frames by an Incremental Iterative Technique", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 47, pp. 261-282.
- 34- OLIVER, J. e ONATE, E. (1985), "A Finite Element Formulation for the Analysis of Marine Pipelines During Laying Operations", Journal of Pipelines, Vol. 5, pp. 15-35.
- 35- OLIVER, J e ONATE, E. (1986), "A Total Lagrangean Formulation for the Geometrically Nonlinear Analysis of Structures Using Finite Elements. Part II: Arches, Frames and Axisymmetric Shells", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 23, pp. 253-274.

- 36- ORAN, C. (1973), "Tangent Stiffness in Space Frames", Journal of the Structural Division, Vol. 99, N^o ST6, pp. 987-1001.
- 37- OVUNE, B. e MALLAREDDY, H. (1970), "Stress Analysis of Offshore Pipelines", Proceedings of Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC Paper 1222, Vol. 1, pp. 727-734.
- 38- POWELL, G. H. (1969), "Theory of Nonlinear Elastic Structures", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, pp. 2687-2701.
- 39- POWERS, J. T. e FINN, L. D. (1969), "Stress Analysis of Offshore Pipelines During Instalation", Proceedings of Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC Paper 1071, Vol. 2, pp. 9-22.
- 40- RIBEIRO, F. L. B., MARQUES, O. A. e KARAN, V. J. (1988), "Vibrações Livres de Estruturas Planas de Barras sob Tensões Iniciais Considerando Não-Linearidade Geométrica", IX Congresso Latino-Americano sobre Métodos Computacionais para Eng., Cordoba, Argentina.
- 41- STEIN, E. e WRIGGERS, P. (1984), "Stability of Rods with Unilateral Constraints, a Finite Element Solution", Computers & Structures, VVol. 19, pp. 205-211.

- 42- SUZUKI, N. e JINGU, N. (1982), "Dynamic Behavior of Submarine Pipelines Under Laying Operation", Journal Energy Resources Technology, Trans. ASME, Vol. 104, pp. 313-318.
- 43- TALASLIDIS, D. e PANAGIOTOPOULOS, P. D. (1980), "A Linear Analysis Approach to the Solution of Certain Classes of Variational Inequality Problems in Structural Analysis", International Journal of Solids Structures, Vol. 16, pp. 991-1005.
- 44- WEN, R. K. e RAHIMZADEH, J. (1983), "Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 109, N^o 8, Paper N^o 18188, pp. 1952-1971.
- 45- WILKINS, J. R. (1970), "Offshore Pipeline Stress Analysis", Proceedings of Offshore Technology Conference, Houston, TX, OTC Paper 1227, Vol. 2, pp. 11-20.
- 46- WONG, M. B. e LOI, T. F. (1990), "Geometrically Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures", Computers & Structures, Vol. 34, N^o 4, pp. 633-640.
- 47- YAGAWA, G. e HIRAYAMA, H. (1984), "A Finite Element Method for Contact Problems Related to Fracture Mechanics", International Journal for Numeric Methods in Engineering, Vol. 20, pp. 2175-2195.

Apêndice I

DEDUÇÃO DE $[K_1]_{(xz)}$

Com intuito de desenvolver a expressão (25) do item III.2.4.1, definem-se os seguintes vetores:

$$\underline{u}_{(xz)}^{\circ} = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \psi_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\underline{N}_{(xz)} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L} \right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\underline{M}_{(xz)} = \begin{bmatrix} 0 \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) & - \left(x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) & 0 \\ \left(3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right) & - \left(- \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde: $\underline{u}_{(xz)}^{\circ}$ é o vetor dos deslocamentos nodais no plano xz

$\underline{N}_{(xz)}$ é o vetor de funções de interpolação que relaciona \underline{u} com \underline{u}°

$\underline{M}_{(xz)}$ é o vetor de funções de interpolação que relaciona \underline{w} com \underline{u}°

Por simplificação, omitiremos o sub-índice xz, ficando ele subentendido nesta dedução.

Assim, as expressões de \underline{u} e \underline{w} podem ser escritas como:

$$\underline{u} = \underline{N} \times \underline{u}^{\circ} \quad (30)$$

$$\underline{w} = \underline{M} \times \underline{u}^{\circ} \quad (31)$$

Obtemos, em seguida, as expressões de \underline{u}_x e \underline{w}_x , derivando-se as equações (30) e (31), respectivamente:

$$\underline{u}_x = \underline{N}_x \times \underline{u}^{\circ} = \underline{u}^{\circ T} \times \underline{N}_x^T \quad (32)$$

onde o superíndice "T" significa "transposto"

$$\underline{w}_x = \underline{M}_x \times \underline{u}^{\circ} \quad (33)$$

Elevando-se a equação (33) ao quadrado, chega-se a:

$$\underline{w}_x^2 = \underline{u}^{\circ T} \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^{\circ} \quad (34)$$

Substituindo-se as expressões (32), e (34) em (25), tem-se:

$$W_{1(xz)} = \frac{EA}{2} \int_0^L \underline{u}^{\circ T} \times \underline{N}_x^T \times \underline{u}^{\circ T} \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^{\circ} dx \quad (35)$$

A primeira variação de $W_{1(xz)}$ vale:

$$\begin{aligned} \delta \left(W_1 \right)_{(xz)} &= \frac{EA}{2} \int_0^L \delta \left(\underline{u}^{\circ T} \times \underline{N}_x^T \times \underline{u}^{\circ T} \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^{\circ} \right) dx \\ &= \frac{EA}{2} \int_0^L \left\{ \delta \underline{u}^{\circ T} \times \underline{N}_x^T \times \underline{u}^{\circ T} \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^{\circ} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \times \delta \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x \underline{\underline{u}}^{\circ} + \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \times \\
& \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x \times \delta \underline{\underline{u}}^{\circ} \} dx = \\
& = \frac{EA}{2} \times \int_0^L \left\{ \delta \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x \times \underline{\underline{u}}^{\circ} + \right. \\
& + \delta \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x \times \underline{\underline{u}}^{\circ} + \\
& \left. + \delta \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x \times \underline{\underline{u}}^{\circ} \times \underline{\underline{N}}_x \times \underline{\underline{u}}^{\circ} \right\} dx = \\
& = \frac{EA}{2} \int_0^L \left\{ \delta \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \left(\underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x + \right. \right. \\
& \left. \left. + \underline{\underline{N}}_x^T \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x + \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \right) \times \underline{\underline{u}}^{\circ} \right\} dx = \\
& = \delta \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \frac{EA}{2} \left[\int_0^L \underline{\underline{M}}_x^T \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \underline{\underline{N}}_x^T \times \underline{\underline{M}}_x + \underline{\underline{N}}_x^T \times \underline{\underline{u}}^{\circ T} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x + \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{N}_x^T dx \right] \times \tilde{u}^{\circ} \quad (36)$$

A expressão (36) pode ser sintetizada em:

$$\delta (W_1)_{(xz)} = \delta u^{\circ T} \times [K_{1s}]_{(xz)} \times u^{\circ} \quad (37)$$

onde:

$$\begin{aligned} [K_{1s}]_{(xz)} &= \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\tilde{M}_x^T \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{N}_x^T \times \tilde{M}_x + \tilde{N}_x^T \times \tilde{u}^{\circ T} \times \right. \\ &\quad \left. \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x + \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{N}_x^T \right] dx \quad (38) \end{aligned}$$

em que $[K_{1s}]_{(xz)}$ é a parcela, correspondente ao grau de liberdade do plano xz , da matriz de rigidez incremental "secante" cujos termos são funções lineares dos acréscimos de deslocamentos. O sub-índice "s", portanto, significa secante.

Enquanto a matriz de rigidez secante no incremento é obtida a partir da primeira variação do trabalho das forças internas, a matriz de rigidez incremental tangente do elemento é a obtida pela segunda variação do trabalho das forças internas, como já foi demonstrado no item III.2.2 do capítulo III.

A partir das expressões (5) e (20) dos itens III.2.2 e III.2.4, respectivamente, é possível se verificar que:

$$[K_1] = 2 \times [K_{1s}] \quad (39)$$

e portanto,

$$[K_1]_{(xy)} = 2 \times [K_{1s}]_{(xy)} \quad (40)$$

$$[K_1]_{(xz)} = 2 \times [K_{1s}]_{(xz)} \quad (41)$$

Substituindo-se a expressão (38) em (41),
obtem-se:

$$[K_1]_{(xz)} = EA \times \int_0^L \left[\begin{aligned} & \underline{M}_x^T \times \underline{u}^{\circ T} \times \underline{N}_x^T \times \underline{M}_x + \\ & + \underline{N}_x^T \times \underline{u}^{\circ T} \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x + \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^{\circ T} \times \underline{N}_x^T \end{aligned} \right] dx \quad (42)$$

Os termos de \underline{N}_x e \underline{M}_x são obtidos a partir da derivação dos termos das expressões (28) e (29) respectivamente, assim:

$$\underline{N}_x = \left[-\frac{1}{L} \ 0 \ 0 \ \frac{1}{L} \ 0 \ 0 \right] \quad (43)$$

$$\underline{M}_x = \left[0 \ M_2 \ M_3 \ 0 \ M_5 \ M_6 \right] \quad (44)$$

onde:

$$M_2 = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$

$$M_3 = -\left[1 - 4\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right]$$

$$M_5 = 6\frac{x}{L^2} - 6\frac{x^2}{L^3}$$

$$M_6 = -\left[-2\frac{x}{L} + 3\frac{x^2}{L^2} \right] \quad (45)$$

Em seguida, calcula-se o integrando da expressão (42). Para simplificar as operações, recomenda-se obter primeiramente os seguintes produtos:

$$\tilde{N}_x \times \tilde{u}^e = \tilde{u}^{eT} \times \tilde{N}_x^T = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (46)$$

$$\tilde{M}_x \times \tilde{u}^e = \tilde{u}^{eT} \times \tilde{M}_x^T = w_1 \times M_2 + \psi_1 \times M_3 + w_2 \times M_5 + \psi_2 \times M_6 \quad (47)$$

A seguir obtém-se:

$$\tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & M_2M_3 & 0 & M_2M_5 & M_2M_6 \\ 0 & M_2M_3 & M_3^2 & 0 & M_3M_5 & M_3M_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2M_5 & M_3M_5 & 0 & M_5^2 & M_5M_6 \\ 0 & M_2M_6 & M_3M_6 & 0 & M_5M_6 & M_6^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$M_x^T \times N_x = N_x^T \times M_x = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 0 & -M_2 & -M_3 & 0 & -M_5 & -M_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & M_3 & 0 & M_5 & M_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Substituindo-se as expressões (46), (47), (48) e (49) em (42), efetuando-se os produtos e as somas, resulta:

$$\left[K_1 \right]_{xz} = \frac{EA}{L} \times \int_0^L \begin{bmatrix} 0 & k_{1,3} & k_{1,5} & 0 & k_{1,\rho} & k_{1,11} \\ & k_{3,3} & k_{3,5} & k_{3,7} & k_{3,\rho} & k_{3,11} \\ & & k_{5,5} & k_{5,7} & k_{5,\rho} & k_{5,11} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & 0 & k_{7,\rho} & k_{7,11} \\ & & & & k_{\rho,\rho} & k_{\rho,11} \\ & & & & & k_{11,11} \end{bmatrix} dx ,$$

onde:

$$k_{1,3} = - \left[w_1 M_2^2 + \psi_1 M_2 M_3 + w_2 M_2 M_5 + \psi_2 M_2 M_6 \right]$$

$$k_{1,5} = - \left[w_1 M_2 M_3 + \psi_1 M_3^2 + w_2 M_3 M_5 + \psi_2 M_3 M_6 \right]$$

$$k_{1,\rho} = - \left[w_1 M_2 M_5 + \psi_1 M_3 M_5 + w_2 M_5^2 + \psi_2 M_5 M_6 \right]$$

$$k_{1,11} = - \left[w_{12} M_2 M_6 + \psi_{13} M_3 M_6 + w_{25} M_5 M_6 + \psi_{26} M_6^2 \right]$$

$$k_{3,3} = M_2^2 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{3,5} = M_2 M_3 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{3,7} = - k_{1,3}$$

$$k_{3,9} = M_2 M_5 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{3,11} = M_2 M_6 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{5,5} = M_3^2 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{5,7} = - k_{1,5}$$

$$k_{5,9} = M_3 M_5 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{5,11} = M_3 M_6 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{7,9} = - k_{1,9}$$

$$k_{7,11} = - k_{1,11}$$

$$k_{9,9} = M_5^2 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{9,11} = M_5 M_6 \left(u_2 - u_1 \right)$$

$$k_{11,11} = M_6^2 \left(u_2 - u_1 \right)$$

A seguir, efetuam-se as integrais dos termos da matriz obtida em (50). Para facilitar essas operações, calculam-se determinadas integrais que aparecem mais de uma vez, cujos resultados são os seguintes:

$$\int_0^L M_2^2 dx = \frac{6}{5L}$$

$$\int_0^L M_3^2 dx = \frac{2}{15} \times L$$

$$\int_0^L M_5^2 dx = \frac{6}{5L}$$

$$\int_0^L M_6^2 dx = \frac{2}{15} \times L$$

$$\int_0^L M_2 M_3 dx = \frac{-1}{10}$$

$$\int_0^L M_2 M_5 dx = \frac{-6}{5L}$$

$$\int_0^L M_2 M_6 dx = \frac{-1}{10}$$

$$\int_0^L M_3 M_5 dx = \frac{1}{10}$$

$$\int_0^L M_3 M_6 dx = \frac{-L}{30}$$

$$\int_0^L M_5 M_6 dx = \frac{1}{10} \quad (51)$$

Substituindo-se os resultados das integrais (51) em (50), obtém-se a matriz $[K_1]_{(xz)}$, simétrica, cujos termos não nulos são apresentados a seguir.

TERMOS NÃO NULOS DE $[K_1]_{(xz)}$

$$K_1(4, 3) = K_1(7, 9) = -K_1(1, 9) = -K_1(3, 7) = \frac{\sigma}{5L^2} (w_2 - w_1) + \frac{1}{10L} (\psi_1 + \psi_2)$$

$$K_1(4, 5) = -K_1(5, 7) = \frac{1}{10L} (w_1 - w_2) + \frac{1}{30} (\psi_2 - 4\psi_1)$$

$$K_1(4, 11) = -K_1(7, 11) = \frac{1}{10L} (w_1 - w_2) + \frac{1}{30} (\psi_1 - 4\psi_2)$$

$$K_1(3, 3) = K_1(9, 9) = -K_1(3, 9) = \frac{\sigma}{5L^2} (u_2 - u_1)$$

$$K_1(3, 5) = K_1(3, 11) = \frac{-1}{10L} (u_2 - u_1)$$

$$K_1(5, 5) = K_1(11, 11) = \frac{2}{15}(u_2 - u_1)$$

$$K_1(5, 9) = K_1(9, 11) = \frac{1}{10L}(u_2 - u_1)$$

$$K_1(5, 11) = \frac{-1}{30}(u_2 - u_1) \quad (52)$$

A matriz $[K_1]_{(xy)}$ é obtida analogamente.

TERMOS NÃO NULOS DE $[K_1]_{(xy)}$

$$K_1(1, 2) = K_1(7, 8) = -K_1(1, 8) = -K_1(2, 7) = \frac{6}{5L^2}(v_2 - v_1) +$$

$$- \frac{1}{10L}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$K_1(1, 6) = -K_1(6, 7) = \frac{1}{10L}(v_2 - v_1) - \frac{1}{30}(\sigma_2 - 4\sigma_1)$$

$$K_1(1, 12) = -K_1(7, 12) = \frac{1}{10L}(v_2 - v_1) - \frac{1}{30}(\sigma_1 - 4\sigma_2)$$

$$K_1(2, 2) = K_1(8, 8) = -K_1(2, 8) = \frac{6}{5L^2}(u_2 - u_1)$$

$$K_1(6, 6) = K_1(12, 12) = \frac{2}{15}(u_2 - u_1)$$

$$K_1(6, 12) = -\frac{1}{30}(u_2 - u_1)$$

$$K_1(8, 12) = K_1(6, 8) = -K_1(2, 6) = -K_1(2, 12) =$$

$$= -\frac{1}{10L} (u_2 - u_1) \quad (53)$$

Os termos (52) e (53) formam a matriz $[K_1]$

DEDUÇÃO DE $K_{G(xz)}$

Sejam os vetores $\underline{u}_{(xz)}^o$ e $\underline{M}_{(xz)}$ definidos em (27) e (29), respectivamente. Por simplificação omitiremos o sub-índice "xz", ficando ele subentendido nesta dedução.

Substituindo-se a expressão (34) em (63) do item III.2.4.2, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{G(xz)} &= \frac{1}{2} \int_0^L p_{(x)} \times \delta \left[\underline{u}^o{}^T \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^o \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L p_{(x)} \left[\delta \underline{u}^o{}^T \underline{M}_x^T \underline{M}_x \underline{u}^o + \underline{u}^o{}^T \underline{M}_x^T \underline{M}_x \delta \underline{u}^o \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L p_{(x)} \left[\delta \underline{u}^o{}^T \underline{M}_x^T \underline{M}_x \underline{u}^o + \delta \underline{u}^o{}^T \underline{M}_x^T \underline{M}_x \underline{u}^o \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L p_{(x)} \times 2 \times \delta \underline{u}^o{}^T \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^o dx = \\ &= \delta \underline{u}^o{}^T \times \left[\int_0^L p_{(x)} \underline{M}_x^T \underline{M}_x dx \right] \times \underline{u}^o \quad (65) \end{aligned}$$

A expressão (65) pode ser sintetizada em:

$$\delta W_{G(xz)} = \delta \underline{u}^e{}^T \times \left[K_G \right] \times \underline{u}^e \quad (66) ,$$

onde:

$$\left[K_G \right] = \int_0^L p_{(x)} \begin{matrix} \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} M_x^T \begin{matrix} \sim \\ \sim \\ \sim \end{matrix} M_x dx \quad (67)$$

Note-se que desta vez não há diferença entre as matrizes incrementais de rigidez secante e a tangente, pois $\left[K_G \right]$ não varia ao longo do incremento de carga.

Substituindo-se a expressão (48) em (67), obtém-se:

$$\left[K_G \right]_{(xz)} = \int_0^L p_{(x)} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_2^2 & M_2 M_3 & 0 & M_2 M_5 & M_2 M_6 \\ & & M_3^2 & 0 & M_3 M_5 & M_3 M_6 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & & M_5^2 & M_5 M_6 \\ & & & & & M_6^2 \end{bmatrix} dx \quad (68)$$

Sejam T_0 e T_L os valores de $p_{(0)}$ e $p_{(L)}$, respectivamente. Partindo-se da hipótese adotada de que $p_{(x)}$ é linear em x , obtém-se:

$$p_{(x)} = \frac{(T_L - T_0)}{L} x + T_0 \quad (69)$$

Substituindo-se a expressão (69) em (68) e integrando-se, obtém-se $\left[K_G \right]_{(xz)}$. A matriz $\left[K_G \right]_{(xy)}$ é obtida analogamente.

TERMOS NÃO NULOS DE $[K_G]$

$$K_G(2, 2) = K_G(3, 3) = K_G(8, 8) = K_G(9, 9) = -K_G(2, 8) = \\ = -K_G(3, 9) = \frac{6}{5L} \times T_0 + \frac{6}{10L} (T_L - T_0)$$

$$K_G(2, 6) = K_G(5, 9) = -K_G(3, 5) = -K_G(6, 8) = \frac{1}{10} \times T_0 + \\ + \frac{1}{10} \times (T_L - T_0)$$

$$K_G(2, 12) = K_G(9, 11) = -K_G(3, 11) = \frac{1}{10} \times T_0$$

$$K_G(5, 5) = K_G(6, 6) = \frac{2}{15} \times T_0 \times L + \frac{1}{30} \times (T_L - T_0) \times L$$

$$K_G(11, 11) = K_G(12, 12) = \frac{2}{15} \times T_0 \times L + \frac{1}{10} (T_L - T_0) \times L$$

$$K_G(8, 12) = -\frac{1}{10} \times T_0$$

$$K_G(5, 11) = K_G(6, 12) = -\frac{1}{30} \times T_0 \times L - \frac{1}{60} (T_L - T_0) \times L$$

(70)

DEDUÇÃO DE $[K_2]_{(xyz)}$

Para desenvolvermos a expressão (73) do item III.2.4.3, utilizaremos o vetor de deslocamentos nodais \underline{u}^e apresentado em (54) do item III.2.4.2 e definiremos os seguintes vetores:

$$\tilde{F} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & F_6 & 0 & F_8 & 0 & 0 & 0 & F_{12} \end{array} \right],$$

onde:

$$F_2 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$F_6 = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$F_8 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$F_{12} = - \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

(76)

$$\tilde{M} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & M_3 & 0 & M_5 & 0 & 0 & 0 & M_7 & 0 & M_{11} & 0 \end{array} \right]$$

onde:

$$M_3 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$M_5 = - \left[x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right]$$

$$M_7 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$M_{11} = - \left[- \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right]$$

(77)

onde :

$\underline{\tilde{v}}$ é o vetor de funções de interpolação que relaciona \underline{v} com \underline{u}^e .

$\underline{\tilde{w}}$ é o vetor de funções de interpolação que relaciona \underline{w} com \underline{u}^e .

Podemos então escrever:

$$\underline{\tilde{v}} = \underline{\tilde{F}} \times \underline{u}^e \quad (78)$$

$$\underline{\tilde{w}} = \underline{\tilde{M}} \times \underline{u}^e \quad (79)$$

Determinamos, em seguida, as expressões de \underline{v}_x e \underline{w}_x , derivando-se as equações (78) e (79), respectivamente:

$$\underline{\tilde{v}}_x = \underline{\tilde{F}}_x \times \underline{u}^e \quad (80)$$

$$\underline{\tilde{w}}_x = \underline{\tilde{M}}_x \times \underline{u}^e \quad (81)$$

Elevando-se às equações (80) e (81) ao quadrado, obtêm-se:

$$\underline{v}_x^2 = \underline{u}^{eT} \underline{F}_x^T \underline{F}_x \underline{u}^e \quad (82)$$

$$\underline{w}_x^2 = \underline{u}^{eT} \underline{M}_x^T \underline{M}_x \underline{u}^e \quad (83)$$

Substituindo-se as expressões (82), (83) em (73) do item III.2.4.3, tem-se:

$$W_{z(xyz)} = \frac{EA}{4} \int_0^L \left[\left(\begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \right) \right] dx \quad (84)$$

A primeira variação de $W_{z(xyz)}$ vale:

$$\begin{aligned} \delta \left(W_{z(xyz)} \right) &= \frac{EA}{4} \int_0^L \left[\delta \left(\begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \right) \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \right] dx = \\ &= \frac{EA}{4} \times \int_0^L \left[\delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} + \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \right. \\ &\quad \times \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o \\ \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o \\ \tilde{u}^o \end{matrix} + \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o \\ \tilde{u}^o \end{matrix} + \\ &\quad \left. + \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o \\ \tilde{u}^o \end{matrix} \right] dx = \\ &= \frac{EA}{4} \int_0^L \left[\delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} + \right. \\ &\quad + \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o \\ \tilde{u}^o \end{matrix} + \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \\ &\quad \left. \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} + \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \right] dx = \\ &= \frac{EA}{4} \int_0^L \delta \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T \\ \tilde{u}^o \end{matrix} \times \left[\begin{matrix} \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} + \begin{matrix} \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} + \right. \\ &\quad \left. + \begin{matrix} \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} + \begin{matrix} \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ & \tilde{u}^o \end{matrix} \times \begin{matrix} \tilde{u}^o{}^T & \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ & & \tilde{u}^o \end{matrix} \right] \times \begin{matrix} \tilde{u}^o \\ \tilde{u}^o \end{matrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \frac{EA}{4} \times \left\{ \int_0^L 2 \times \left[\tilde{F}_x^T \tilde{F}_x \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T \tilde{M}_x + \right. \right. \\
&\left. \left. + \tilde{M}_x^T \tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{F}_x^T \tilde{F}_x \right] dx \right\} \times \tilde{u}^{\circ} \quad (85)
\end{aligned}$$

A expressão (85) pode ser sintetizada em:

$$\delta \left[W_{2(xyZ)} \right] = \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \left[K_{2S} \right]_{(xyz)} \times \tilde{u}^{\circ} \quad (86)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\left[K_{2S} \right]_{(xyz)} &= \frac{EA}{2} \int_0^L \left[\tilde{F}_x^T \tilde{F}_x \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T \tilde{M}_x + \right. \\
&\left. + \tilde{M}_x^T \tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{F}_x^T \tilde{F}_x \right] dx \quad (87) ,
\end{aligned}$$

em que $[K_{2S}]_{(xyz)}$ é parcela da matriz de rigidez incremental secante, $[K_{2S}]$.

De acordo com o item III.2.2 do capítulo III, a matriz de rigidez incremental tangente é obtida pela segunda variação do trabalho das forças internas. A partir das expressões (5) e (21) dos itens III.2.2 e III.2.4, respectivamente, verifica-se que:

$$\left[K_2 \right] = 3 \times \left[K_{2S} \right] \quad (88)$$

e portanto:

$$\left[K_2 \right]_{(xy)} = 3 \times \left[K_{2s} \right]_{(xy)} \quad (89)$$

$$\left[K_2 \right]_{(xyz)} = 3 \times \left[K_{2s} \right]_{(xyz)} \quad (90)$$

$$\left[K_2 \right]_{(xz)} = 3 \times \left[K_{2s} \right]_{(xz)} \quad (91)$$

Substituindo-se a expressão (87) em (90), vem:

$$\begin{aligned} \left[K_2 \right]_{(xyz)} = 3 \frac{EA}{2} \int_0^L & \left[\begin{array}{cc} \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ \tilde{u}^0 & \tilde{u}^{0T} \end{array} \begin{array}{cc} \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ + & \end{array} \right. \\ & \left. + \begin{array}{cc} \tilde{M}_x^T & \tilde{M}_x \\ \tilde{u}^0 & \tilde{u}^{0T} \end{array} \begin{array}{cc} \tilde{F}_x^T & \tilde{F}_x \\ \end{array} \right] dx \quad (92) \end{aligned}$$

Os termos de \tilde{F}_x e \tilde{M}_x são determinados a partir da derivação dos termos das expressões (76) e (77), respectivamente.

Para simplificar os cálculos a serem efetuados, serão utilizadas as mesmas igualdades definidas em (44), repetidas a seguir:

$$M_2 = -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3}$$

$$M_3 = -\left[1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right]$$

$$M_5 = \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} = -M_2$$

$$M_{\sigma} = - \left[-\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \right] \quad (45)$$

portanto as expressões de \tilde{F}_x e de \tilde{M}_x podem ser escritas como:

$$\tilde{F}_x = \left[0 \ M_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -M_3 \ 0 \ -M_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ -M_{\sigma} \right] \quad (93)$$

$$\tilde{M}_x = \left[0 \ 0 \ M_2 \ 0 \ M_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ -M_2 \ 0 \ M_{\sigma} \ 0 \right] \quad (94)$$

Em seguida, efetua-se o cálculo do integrando da expressão (92). Para simplificar as operações, sugere-se obter, primeiramente, os seguintes produtos:

$$\tilde{F}_x \tilde{u}^{\circ} = \tilde{u}^{\circ T} \tilde{F}_x^T = v_1 M_2 + \alpha_1 (-M_3) + v_2 (-M_2) + \alpha_2 (-M_{\sigma}) \quad (95)$$

$$\tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} = \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T = w_1 M_2 + \psi_1 M_3 + w_2 (-M_2) + \psi_2 (M_{\sigma}) \quad (96)$$

Por simplificação, sejam:

$$a = \tilde{F}_x \tilde{u}^{\circ} = \tilde{u}^{\circ T} \tilde{F}_x^T$$

$$b = \tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} = \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T \quad (97)$$

logo:

$$a \times b = \tilde{F}_x \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T = \tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{F}_x^T \quad (98)$$

A seguir, obtém-se:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{x}}^T \times \tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}} = \left(\tilde{\mathbf{F}}_{\mathbf{x}}^T \times \tilde{\mathbf{M}}_{\mathbf{x}} \right)^T =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 & 0 & 0 & -M_2 M_3 & 0 & -M_2^2 & 0 & 0 & 0 & -M_2 M_\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 M_3 & 0 & 0 & 0 & -M_3^2 & 0 & -M_2 M_3 & 0 & 0 & 0 & -M_3 M_\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M_2^2 & 0 & 0 & 0 & M_2 M_3 & 0 & M_2^2 & 0 & 0 & 0 & M_2 M_\sigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 M_\sigma & 0 & 0 & 0 & -M_3 M_\sigma & 0 & -M_2 M_\sigma & 0 & 0 & 0 & -M_\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

Substituindo-se as expressões (98) e (99) em

(92), resulta:

$$\left[K_2 \right]_{(xyz)} = \frac{3}{2} EA \times \int_0^L a \times b \times dx$$

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & M_2^2 & 0 & M_2 M_3 & 0 & 0 & 0 & -M_2^2 & 0 & M_2 M_\sigma & 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & 0 & -M_2 M_3 & 0 & -M_2^2 & 0 & 0 & 0 & -M_2 M_\sigma \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & -M_3^2 & 0 & -M_2 M_3 & 0 & 0 & 0 & -M_3 M_\sigma \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & M_2 M_3 & 0 & -M_3 M_\sigma & 0 \\
 & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & M_2^2 & 0 & -M_2 M_\sigma & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & M_2 M_\sigma \\
 & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & -M_\sigma^2 \\
 & & & & & & & & & & & 0
 \end{bmatrix} dx$$

SIMÉTRICA

(100)

Efetutando-se o produto (a x b) da expressão

(98), chega-se a:

$$\begin{aligned}
 a \times b = & \left[v_1 - v_2 \right] \times \left[w_1 - w_2 \right] \times M_2^2 + \left[\psi_1 \times \left[v_1 - v_2 \right] + \right. \\
 & - \sigma_1 \times \left[w_1 - w_2 \right] \times M_2 \times M_3 + \left[\psi_2 \times \left[v_1 - v_2 \right] + \right. \\
 & \left. \left. - \sigma_2 \times \left[w_1 - w_2 \right] \right] \times M_2 \times M_\sigma - \left[\sigma_1 \times \psi_2 + \sigma_2 \times \psi_1 \right] \times \right. \\
 & \left. \times M_3 \times M_\sigma - \sigma_1 \times \psi_1 \times M_3^2 - \sigma_2 \times \psi_2 \times M_\sigma^2 \right. \quad (101)
 \end{aligned}$$

Substituiremos a expressão (101) em (100), e

em seguida efetuaremos as integrais dos termos da matriz obtida. Para facilitar, calcularemos determinadas integrais que se repetem nessas operações, cujos resultados são:

$$\int_0^L M_2^4 dx = \frac{1}{L^3} \times \frac{72}{35}$$

$$\int_0^L M_2^3 \times M_3 dx = \frac{1}{L^2} \times \left(\frac{-9}{35} \right)$$

$$\int_0^L M_2^3 \times M_6 dx = \frac{1}{L^2} \times \left(\frac{-9}{35} \right)$$

$$\int_0^L M_2^2 \times M_3 \times M_6 dx = 0$$

$$\int_0^L M_2^2 \times M_3^2 dx = \frac{1}{L} \times \frac{3}{35}$$

$$\int_0^L M_2^2 \times M_6^2 dx = \frac{1}{L} \times \frac{3}{35}$$

$$\int_0^L M_2 \times M_3^2 \times M_6 dx = \frac{-1}{140}$$

$$\int_0^L M_2 \times M_3^3 dx = \frac{1}{140}$$

$$\int_0^L M_2 \times M_3 \times M_6^2 dx = \frac{-1}{140}$$

$$\int_0^L M_2 \times M_6^3 dx = \frac{1}{140}$$

$$\int_0^L M_3^3 \times M_6 dx = \frac{-1}{140} \times L$$

$$\int_0^L M_3^4 dx = \frac{2}{35} \times L$$

$$\int_0^L M_3^2 \times M_6^2 dx = \frac{1}{210} \times L$$

$$\int_0^L M_3 \times M_6^3 dx = \frac{-1}{140} \times L$$

$$\int_0^L M_6^4 dx = \frac{2}{35} \times L \quad (102)$$

Substituindo-se os resultados das integrais (102) em (100), obtém-se a matriz simétrica $[K_2]_{(xyz)}$ cujos termos não nulos são apresentados a seguir. Note-se que eles apresentam acoplamento entre os deslocamentos

transversais v e w.

$$K_2(2, 3) = K_2(8, \rho) = -K_2(2, \rho) = -K_2(3, 8) = \frac{1}{70} \times \left[216 \times \frac{g}{L^2} + \right. \\ \left. - 27 \times \frac{(H + I)}{L^2} + \rho \times \frac{(K + ND)}{L} \right]$$

$$K_2(2, 5) = K_2(6, \rho) = -K_2(3, \rho) = -K_2(5, 8) = \frac{1}{280} \times \\ \times \left[-108 \times \frac{g}{L^2} + 36 \times \frac{H}{L} - 3 \times (J - K + N) \right]$$

$$K_2(2, 11) = K_2(\rho, 11) = -K_2(3, 12) = -K_2(8, 11) = \frac{1}{280} \times \\ \times \left[-108 \times \frac{g}{L^2} + \frac{36 \times I}{L} - 3 \times (J + K - N) \right]$$

$$K_2(5, \rho) = \frac{-1}{280} \times \left[36 \times \frac{g}{L} + 3 \times (H - I) + \left(24 \times K - 3 \times J + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \times N \right) \times L \right]$$

$$K_2(5, 12) = K_2(6, 11) = \frac{-1}{280} \times \left\{ 3 \times (H + I) + \left[2 \times J - 3 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (K + ND) \right] \times L \right\}$$

$$K_2(11, 12) = \frac{-1}{280} \times \left[36 \times \frac{g}{L} + 3 \times (I - HD) + \left(2 \times K + \right. \right.$$

$$+ 24 \times N - 3 \times J \times L \Big]$$

onde:

$$G = \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \psi_1 \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \end{bmatrix} - \sigma_1 \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \end{bmatrix}$$

$$I = \psi_2 \begin{bmatrix} v_1 & -v_2 \end{bmatrix} - \sigma_2 \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \end{bmatrix}$$

$$J = - \left[\sigma_1 \times \psi_2 + \sigma_2 \times \psi_1 \right]$$

$$K = - \sigma_1 \times \psi_1$$

$$N = - \sigma_2 \times \psi_2 \tag{103}$$

DEDUÇÃO DE $[K_2]_{(xz)}$

Para desenvolvermos a expressão (74) do item III.2.4.3, utilizaremos os vetores \underline{u}_{xz}^o e \underline{M}_{xz} definidos em (27) e (29), respectivamente.

Omitiremos aqui também o sub-índice "xz", ficando ele subentendido.

Elevando-se a expressão (34) ao quadrado, obtém-se:

$$\underline{w}_x^4 = \underline{u}^o \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^o \times \underline{u}^o \times \underline{M}_x^T \times \underline{M}_x \times \underline{u}^o \tag{104}$$

Substituindo-se a expressão (104) em (74), tem-se:

$$W_2(xz) = \frac{EA}{4} \int_0^L \frac{1}{2} \times \left[\tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T \tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_x^T \tilde{M}_x \tilde{u}^{\circ} \right] dx \quad (105)$$

A primeira variação de $W_2(xz)$ vale:

$$\begin{aligned} \delta W_2(xz) &= \frac{EA}{4} \times \int_0^L \left\{ \frac{1}{2} \delta \left[\tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} \right] \right\} dx = \\ &= \frac{EA}{4} \int_0^L \frac{1}{2} \left[\delta \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} + \right. \\ &\quad + \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \delta \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} + \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \\ &\quad \times \tilde{u}^{\circ} \times \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} + \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \\ &\quad \left. \times \tilde{M}_x \times \delta \tilde{u}^{\circ} \right] dx = \\ &= \frac{EA}{4} \int_0^L \frac{1}{2} \left[\delta \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} + \right. \\ &\quad \left. + \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_x^T \times \tilde{M}_x \times \tilde{u}^{\circ} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_X^T \times \tilde{M}_X \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_X^T \tilde{M}_X \times \tilde{u}^{\circ} + \\
& + \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_X^T \times \tilde{M}_X \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \tilde{M}_X^T \times \tilde{M}_X \times \tilde{u}^{\circ} \Big] dx = \\
& = \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \frac{EA}{4} \times \left[\int_0^L \frac{1}{2} \times 4 \times \tilde{M}_X^T \times \tilde{M}_X \times \tilde{u}^{\circ} \times \tilde{u}^{\circ T} \times \right. \\
& \left. \times \tilde{M}_X^T \times \tilde{M}_X dx \right] \times \tilde{u}^{\circ} \tag{106}
\end{aligned}$$

A expressão (106) pode ser sintetizada em:

$$\delta \left[W_2(xz) \right] = \delta \tilde{u}^{\circ T} \times \left[K_{2s} \right]_{(xz)} \times \tilde{u}^{\circ} \tag{107} ,$$

onde:

$$\left[K_{2s} \right]_{(xz)} = \frac{EA}{2} \int_0^L \tilde{M}_X^T \tilde{M}_X \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_X^T \tilde{M}_X dx \tag{108} ,$$

em que o sub-índice "s" significa "secante".

Substituindo-se a expressão (108) em (91)

obtem-se:

$$\left[K_2 \right]_{(xz)} = \frac{3}{2} EA \int_0^L \tilde{M}_X^T \tilde{M}_X \tilde{u}^{\circ} \tilde{u}^{\circ T} \tilde{M}_X^T \tilde{M}_X dx \tag{109}$$

Partindo-se da expressão (47) anteriormente

obtida, seja:

$$b = \underline{M}_x \times \underline{u}^o = \underline{u}^{\text{eT}} \underline{M}_x^T = w_1 M_2 + \psi_1 M_3 + w_2 \times \left[-M_2 \right] + \psi_2 \times M_6 \quad (110)$$

logo,

$$\begin{aligned} b^2 = & \left(w_1 - w_2 \right)^2 \times M_2^2 + 2 \times \psi_1 \times \left(w_1 - w_2 \right) M_2 \times M_3 + \\ & + 2 \times \psi_2 \times \left(w_1 - w_2 \right) \times M_2 \times M_6 + \psi_1^2 \times M_3^2 + \psi_2^2 \times M_6^2 + \\ & + 2 \times \psi_1 \times \psi_2 \times M_3 \times M_6 \end{aligned} \quad (111)$$

Substituindo-se as expressões (110) e (48) em (109), chega-se a:

$$\left[K_2 \right]_{(xz)} = \frac{3}{2} EA \times \int_a^L b^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & M_2^2 & M_2 M_3 & 0 & -M_2^2 & M_2 M_6 \\ & & M_3^2 & 0 & -M_2 M_3 & M_3 M_6 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & & M_2^2 & -M_2 M_6 \\ & & & & & M_6^2 \end{bmatrix} dx \quad (112)$$

Em seguida, substitue-se a expressão (111) em (112) e efetuam-se as integrações dos termos da matriz obtida, utilizando-se os resultados das integrais (102). Obtém-se, então, a matriz simétrica $\left[K_2 \right]_{(xz)}$ cujos termos não nulos são apresentados a seguir.

$$K_2(3, 3) = K_2(\rho, \rho) = -K_2(3, \rho) = \frac{1}{70} \times \left[216 \times \frac{C}{L^3} - 27 \times \right. \\ \left. \times \frac{(E + Q)}{L^2} + \rho \times \frac{(R + S)}{L} \right]$$

$$K_2(3, 5) = -K_2(5, \rho) = \frac{1}{280} \times \left[-108 \times \frac{C}{L^2} + 36 \times \frac{E}{L} + 3 \times \right. \\ \left. \times (R - S + Z) \right]$$

$$K_2(3, 11) = -K_2(\rho, 11) = \frac{1}{280} \times \left[-180 \times \frac{C}{L^2} + 36 \times \frac{Q}{L} + \right. \\ \left. + 3 \times (S - R - Z) \right]$$

$$K_2(5, 5) = \frac{1}{280} \times \left[36 \times \frac{C}{L} + 3 \times (E - Q) + (2 \times S + \right. \\ \left. + 24 \times R - 3 \times Z) \times L \right]$$

$$K_2(5, 11) = \frac{1}{280} \times \left\{ -3 \times (E + Q) + \left[2 \times Z - 3 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (R + S) \right] \times L \right\}$$

$$K_2^{(11,11)} = \frac{1}{280} \times \left[36 \times \frac{C}{L} + 3 \times (Q - E) + (2 \times R + \right. \\ \left. + 24 \times S - 3 \times Z) \times L \right],$$

onde:

$$C = (w_1 - w_2)^2$$

$$D = 2 \times \psi_1 \times (w_1 - w_2)$$

$$Q = 2 \times \psi_2 \times (w_1 - w_2)$$

$$R = \psi_1^2$$

$$S = \psi_2^2$$

$$Z = 2 \times \psi_1 \times \psi_2 \tag{113}$$

A matriz $[K_2]_{(xy)}$ é obtida de forma análoga à que determinamos $[K_2]_{(xz)}$

TERMOS NÃO NULOS DE $[K_2]_{(xy)}$

$$K_2^{(2,2)} = -K_2^{(8,8)} = -K_2^{(2,8)} = \frac{1}{140} \times \left[18 \times \frac{\sigma_1^2}{L} + \right. \\ \left. + 18 \frac{\sigma_2^2}{L} + \frac{432}{L^3} (v_2 - v_1)^2 - \frac{180}{L^2} (v_2 - v_1) (\sigma_1 + \sigma_1) \right]$$

$$K_2(2, 6) = -K_2(6, 8) = \frac{1}{280} \times \left[-3\sigma_1^2 + 3\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_2 + \right. \\ \left. + \frac{108}{L^2} (v_2 - v_1)^2 - 72 \frac{\sigma_1}{L} (v_2 - v_1) \right]$$

$$K_2(2, 12) = -K_2(8, 12) = \frac{1}{280} \times \left[3\sigma_1^2 - 3\sigma_2^2 + 6\sigma_1\sigma_2 + \right. \\ \left. + \frac{108}{L^2} (v_2 - v_1)^2 - 72 \frac{\sigma_2}{L} (v_2 - v_1) \right]$$

$$K_2(6, 6) = \frac{1}{140} \times \left[12 \times L \times \sigma_1^2 + L\sigma_2^2 - 3L\sigma_1\sigma_2 + \right. \\ \left. + \frac{18}{L} (v_2 - v_1)^2 + 3 (v_2 - v_1) (\sigma_1 - \sigma_2) \right]$$

$$K_2(6, 12) = \frac{1}{280} \times \left[-3L\sigma_1^2 - 3L\sigma_2^2 + 4L\sigma_1\sigma_2 \right. \\ \left. - 6 (v_2 - v_1) (\sigma_1 - \sigma_2) \right]$$

$$K_2(12, 12) = \frac{1}{140} \times \left[L\sigma_1^2 + 12L\sigma_2^2 - 3L\sigma_1\sigma_2 + \right. \\ \left. + \frac{18}{L} (v_2 - v_1)^2 + 3 \times (v_2 - v_1) \times (\sigma_2 - \sigma_1) \right]$$

(114)

Os termos (103), (113) e (114) formam $[K_2]$

TERMOS NÃO NULOS DE $[K_L]$

$$K_L(1,1) = K_L(7,7) = -K_L(1,7) = \frac{EA}{L}$$

$$K_L(2,2) = K_L(8,8) = -K_L(2,8) = \frac{12 \times E \times I_z}{L^3}$$

$$K_L(2,6) = K_L(2,12) = -K_L(6,8) = -K_L(8,12) = \frac{6 \times E \times I_z}{L^2}$$

$$K_L(3,3) = K_L(9,9) = -K_L(3,9) = \frac{12 \times E \times I_y}{L^3}$$

$$K_L(3,5) = K_L(3,11) = -K_L(9,11) = -K_L(5,9) = -\frac{6 \times E \times I_y}{L^2}$$

$$K_L(4,4) = K_L(10,10) = -K_L(4,10) = \frac{6 \times I_x}{L}$$

$$K_L(5,5) = K_L(11,11) = \frac{4 \times E \times I_y}{L}$$

$$K_L(5,11) = \frac{2 \times E \times I_y}{L}$$

$$K_L(6,6) = K_L(12,12) = \frac{4 \times E \times I_z}{L}$$

$$K_L(6,12) = \frac{2 \times E \times I_z}{L} \quad (115)$$

TERMOS NÃO NULOS DE $[R^e]$

$$R^e(1,1) = R^e(4,4) = R^e(7,7) = R^e(10,10) = Cx$$

$$R^{\circ}(1, 2) = R^{\circ}(4, 5) = R^{\circ}(7, 8) = R^{\circ}(10, 11) = Cy$$

$$R^{\circ}(1, 3) = R^{\circ}(4, 6) = R^{\circ}(7, 9) = R^{\circ}(10, 12) = Cz$$

$$R^{\circ}(2, 1) = R^{\circ}(5, 4) = R^{\circ}(8, 7) = R^{\circ}(11, 10) =$$

$$= - \frac{(\cos \alpha \times Cy + \operatorname{sen} \alpha \times Cx \times Cz)}{\sqrt{Cx^2 + Cy^2}}$$

$$R^{\circ}(2, 2) = R^{\circ}(5, 5) = R^{\circ}(8, 8) = R^{\circ}(11, 11) =$$

$$= \frac{(\cos \alpha \times Cx - \operatorname{sen} \alpha \times Cy \times Cz)}{\sqrt{Cx^2 + Cy^2}}$$

$$R^{\circ}(2, 3) = R^{\circ}(5, 6) = R^{\circ}(8, 9) = R^{\circ}(11, 12) = \operatorname{sen} \alpha \times \sqrt{Cx^2 + Cy^2}$$

$$R^{\circ}(3, 1) = R^{\circ}(6, 4) = R^{\circ}(9, 7) = R^{\circ}(12, 10) =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \alpha \times Cy - \cos \alpha \times Cx \times Cz}{\sqrt{Cx^2 + Cy^2}}$$

$$R^{\circ}(3, 2) = R^{\circ}(6, 5) = R^{\circ}(9, 8) = R^{\circ}(12, 11) = -$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} \alpha \times Cx + \cos \alpha \times Cy \times Cz)}{\sqrt{Cx^2 + Cy^2}}$$

$$R^{\circ}(3, 3) = R^{\circ}(6, 6) = R^{\circ}(9, 9) = R^{\circ}(12, 12) = \cos \alpha \times \sqrt{Cx^2 + Cy^2},$$

onde:

$$C_x = \frac{X_2 - X_1}{L}$$

$$C_y = \frac{Y_2 - Y_1}{L}$$

$$C_z = \frac{Z_2 - Z_1}{L} \quad (119)$$

Para o caso do elemento na direção vertical conforme apresentado na figura (19), os termos não nulos da matriz de rotação são:

$$R^{(1,3)} = R^{(4,6)} = R^{(7,9)} = R^{(10,12)} = C_z$$

$$R^{(2,1)} = R^{(5,4)} = R^{(8,7)} = R^{(11,10)} = -\text{sen } \alpha \times C_z$$

$$R^{(2,2)} = R^{(5,5)} = R^{(8,8)} = R^{(11,11)} = \text{cos } \alpha$$

$$R^{(3,1)} = R^{(6,4)} = R^{(9,7)} = R^{(12,10)} = -\text{cos } \alpha \times C_z$$

$$R^{(3,2)} = R^{(6,5)} = R^{(9,8)} = R^{(12,11)} = -\text{sen } \alpha \quad (119a)$$

TERMOS NÃO NULOS DE [R]

$$R_{(1,1)} = R_{(4,4)} = \text{cos } \beta \text{ cos } \gamma$$

$$R_{(1,2)} = R_{(4,5)} = \text{cos } \gamma \text{ sen } \beta$$

$$R_{(1,3)} = R_{(4,6)} = \text{sen } \gamma$$

$$R_{(2,1)} = R_{(5,4)} = -(\text{cos } \alpha \times \text{sen } \beta + \text{sen } \alpha \times \text{sen } \gamma \times \text{cos } \beta)$$

$$R_{(2,2)} = R_{(5,5)} = \text{cos } \alpha \times \text{cos } \beta - \text{sen } \alpha \times \text{sen } \gamma \times \text{sen } \beta$$

$$R(2, 3) = R(5, 6) = \sin \alpha \times \cos \gamma$$

$$R(9, 1) = R(6, 4) = \sin \alpha \times \sin \beta - \cos \alpha \times \sin \gamma \times \cos \beta$$

$$R(9, 2) = R(6, 5) = -(\sin \alpha \times \cos \beta + \cos \alpha \times \sin \gamma \times \sin \beta)$$

$$R(3, 3) = R(6, 6) = \cos \alpha \times \cos \gamma \quad (121)$$

DEDUÇÃO DE $[M_C^e]$

A expressão (123) do item III.2.4.7.1 da matriz $[M_C^e]$ pode ser escrita como a soma de quatro parcelas:

$$\begin{aligned} [M_C^e] = & \rho^e \times A \int_0^L \underline{N}^T \underline{N} \, dx + \rho^e \times A \int_0^L \underline{F}^T \underline{F} \, dx + \\ & + \rho^e \times A \int_0^L \underline{M}^T \underline{M} \, dx + \rho^e \times A \int_0^L \underline{I}^T \underline{I} \, dx \quad (124) \end{aligned}$$

onde os vetores \underline{N} , \underline{F} e \underline{M} são de funções que interpolam os deslocamentos u , v e w do interior do elemento, respectivamente, em termos de seus deslocamentos e rotações nodais.

Os vetores \underline{N} , \underline{F} e \underline{M} já foram apresentados na dedução da matriz de rigidez do elemento. Sua expressões são repetidas a seguir:

$$\underline{N} = \left[\left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{x}{L} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (55)$$

$$\underline{F} = \left[0 \quad \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \left(x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \quad 0 \right]$$

$$\left[3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right] \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \left[-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \underline{M} = & \left[0 \quad 0 \quad \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) \quad 0 \quad -\left(x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right. \\ & \left. \left(3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3} \right) \quad 0 \quad -\left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \right] \quad (77) \end{aligned}$$

A expressão do vetor \underline{T} em função de \underline{N} é:

$$\underline{T} = \frac{I_y + I_z}{A} \times \underline{N} \quad (125)$$

Para a obtenção dos termos correspondentes às primeira e quarta parcelas da expressão (124), faremos a seguinte simplificação no vetor \underline{N} , passando a chamá-lo de \bar{N} :

$$\underline{N} = [N_1 \quad N_7] \quad , \quad \text{onde:}$$

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L}$$

$N_7 = \frac{x}{L}$ (126), em que os números 1 e 7 correspondem aos graus de liberdade na direção longitudinal do elemento, conforme aparecem na figura (17).

Assim, o produto $\bar{N}^T \times \bar{N}$ será:

$$\bar{N}^T \times \bar{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_7 \end{bmatrix} [N_1 \quad N_7] = \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_7 \\ N_1 N_7 & N_7^2 \end{bmatrix} \quad (127)$$

Em seguida, efetuam-se as integrais dos termos da matriz (127) obtida, ao longo do comprimento do elemento, cujos resultados são:

$$\int_0^L N_1^2 dx = \frac{140 L}{420}$$

$$\int_0^L N_1 N_7 dx = \frac{70 L}{420}$$

$$\int_0^L N_7^2 dx = \frac{140 L}{420} \quad (128)$$

A partir dos resultados das integrais (128), obtêm-se os seguintes termos da matriz de massa consistente:

$$M_c(1,1) = M_c(7,7) = \rho^e \times \frac{A \times L}{420} \times 140$$

$$M_c(1,7) = M_c(7,1) = \rho^e \times \frac{A \times L}{420} \times 70$$

$$M_c(4,4) = M_c(10,10) = \frac{I_y + I_z}{A} \times M_c(1,1)$$

$$M_c(4,10) = M_c(10,4) = \frac{I_y + I_z}{A} \times M_c(1,7) \quad (129)$$

Para obtermos a segunda parcela da expressão (124), que corresponde aos graus de liberdade do elemento no plano xy, simplificaremos o vetor \underline{F} , chamando-o de \underline{F}_{xy} :

$$\underline{F}_{xy} = [F_1 \ F_2 \ F_6 \ F_7 \ F_8 \ F_{12}] \quad , \text{ onde}$$

$$F_1 = F_7 = 0$$

$$F_2 = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$F_6 = x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$F_8 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3}$$

$$F_{12} = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (130), \text{ em que os números 2, 6, 8 e 12}$$

correspondem aos graus de liberdade na direção de v_1 , σ_1 , v_2 , σ_2 , respectivamente, como pode ser visto na figura (17).

O produto $\underline{F}_{xy}^T \times \underline{F}_{xy}$, então, será:

$$\underline{F}_{xy}^T \times \underline{F}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_2^2 & F_2 F_6 & 0 & F_2 F_8 & F_2 F_{12} \\ & & F_6^2 & 0 & F_6 F_8 & F_6 F_{12} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & F_8^2 & F_8 F_{12} \\ & & & & & F_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Em seguida, calculam-se as integrais dos termos da matriz (131) obtida ao longo do comprimento do elemento, cujos resultados são:

$$\int_0^L F_z^2 dx = \int_0^L F_B^2 dx = \frac{156 \times L}{420}$$

$$\int_0^L F_z F_\sigma dx = - \int_0^L F_B F_{12} dx = \frac{22 \times L^2}{420}$$

$$\int_0^L F_z F_B dx = \frac{54 \times L}{420}$$

$$\int_0^L F_z F_{12} dx = - \int_0^L F_\sigma F_B dx = - \frac{13 \times L^2}{420}$$

$$\int_0^L F_\sigma^2 dx = \int_0^L F_{12}^2 dx = \frac{4 \times L^3}{420}$$

$$\int_0^L F_\sigma F_{12} dx = - \frac{3 \times L^3}{420} \quad (132)$$

A partir dos resultados das integrais, (132), obtêm-se os seguintes termos da matriz de massa consistente:

$$M_c(2, 2) = M_c(8, 8) = \frac{\rho^e \times A \times L}{420} \times 156$$

$$M_c(2, \sigma) = M_c(\sigma, 2) = - M_c(8, 12) = - M_c(12, 8) = \frac{\rho^e \times A \times L}{420} \times$$

$$\times 22 \times L$$

$$M_c(2, 8) = M_c(8, 2) = \frac{\rho^e \times A \times L}{420} \times 54$$

$$M_c(2, 12) = M_c(12, 2) = -M_c(6, 8) = -M_c(8, 6) = -\frac{\rho^e \times A \times L}{420}$$

$$\times 13 \times L$$

$$M_c(6, 6) = M_c(12, 12) = \frac{\rho^e \times A \times L}{420} \times 4 \times L^2$$

$$M_c(6, 12) = M_c(12, 6) = -\frac{\rho^e \times A \times L}{420} \times 3 \times L^2 \quad (133)$$

Para determinarmos a terceira parcela da expressão (124), correspondente aos graus de liberdade do plano xz, simplificaremos o vetor \underline{M} , denominando-o de \underline{M}_{xz} :

$$\underline{M}_{xz} = [M_1 \ M_3 \ M_5 \ M_7 \ M_9 \ M_{11}] \quad (134),$$

A partir das expressões (76), (77) e (130), chega-se a:

$$M_1 = M_7 = 0$$

$$M_3 = F_2$$

$$M_5 = -F_6$$

$$M_9 = F_8$$

$$M_{11} = -F_{12}$$

(134a)

O produto $\overset{T}{M}_{xz} \times \overset{T}{M}_{xz}$, portanto, será:

$$\overset{T}{M}_{xz} \times \overset{T}{M}_{xz} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & F_2^2 & -F_2 F_\sigma & 0 & F_2 F_B & -F_2 F_{12} \\ & & F_\sigma^2 & 0 & -F_\sigma F_B & F_\sigma F_{12} \\ \text{SIMÉTRICA} & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & F_B^2 & -F_B F_{12} \\ & & & & & F_{12}^2 \end{bmatrix} \quad (135)$$

A partir dos resultados das integrais, (132), obtêm-se os termos restantes não nulos da matriz de massa consistente:

$$M_c(3,3) = M_c(2,2)$$

$$M_c(3,5) = M_c(5,3) = -M_c(2,\sigma)$$

$$M_c(3,\rho) = M_c(\rho,3) = M_c(2,B)$$

$$M_c(3,11) = M_c(11,3) = -M_c(2,12)$$

$$M_c(5,5) = M_c(\sigma,\sigma)$$

$$M_c(5,\rho) = M_c(\rho,5) = -M_c(\sigma,B)$$

$$M_c(5,11) = M_c(11,5) = M_c(\sigma,12)$$

$$M_c(\varnothing, \varnothing) = M_c(8, 8)$$

$$M_c(\varnothing, 11) = M_c(11, \varnothing) = -M_c(8, 12)$$

$$M_c(11, 11) = M_c(12, 12) \quad (136)$$

Os termos (129), (133) e (136) formam $[M_c^e]$

DEDUÇÃO DE $[M_a^e]$

A expressão (139) da matriz $[M_a^e]$ pode ser escrita como a soma das 2^a e 3^a parcelas da expressão (124) divididas pelo coeficiente $\rho^e \times A$ e multiplicada por M_a^e .

$$[M_c^e] = M_a^e \times \int_0^L \tilde{F}^T \tilde{F} dx + M_a^e \times \int_0^L \tilde{M}^T \times \tilde{M} dx \quad (140)$$

Os termos não nulos da matriz de massa adicional simétrica, portanto, serão:

$$M_a(2, 2) = M_a(8, 8) = M_a(3, 3) = M_a(\varnothing, \varnothing) = M_a^e \times \frac{156 \times L}{420}$$

$$M_a(2, \varnothing) = -M_a(8, 12) = -M_a(3, 5) = M_a(\varnothing, 11) = M_a^e \times \frac{22 \times L^2}{420}$$

$$M_a(2, 8) = M_a(3, \varnothing) = M_a^e \times \frac{54 \times L}{420}$$

$$M_a(2, 12) = -M_a(\varnothing, 8) = -M_a(3, 11) = M_a(5, \varnothing) =$$

$$= -M_a^e \times \frac{13 \times L^2}{420}$$

$$M_a(6,6) = M_a(12,12) = M_a(5,5) = M_a(11,11) = M_a^e \times \frac{4 \times L^3}{420}$$

$$M_a(6,12) = M_a(5,11) = -M_a^e \times \frac{3 \times L^3}{420} \quad (141)$$

Apêndice II

TEORIA DE ONDA

Consideremos o problema de uma onda no plano $x_v z_v$ como mostrado na figura (20), onde:

U_v , V_v e W_v são as velocidades da partícula fluida nas direções x_v , y_v e z_v , respectivamente;

d é a profundidade do fundo do mar em relação ao nível de águas tranquilas (N.A.);

η é o deslocamento vertical da superfície do mar em relação ao N.A.;

x_w e z_w são coordenadas do sistema de referência da onda.

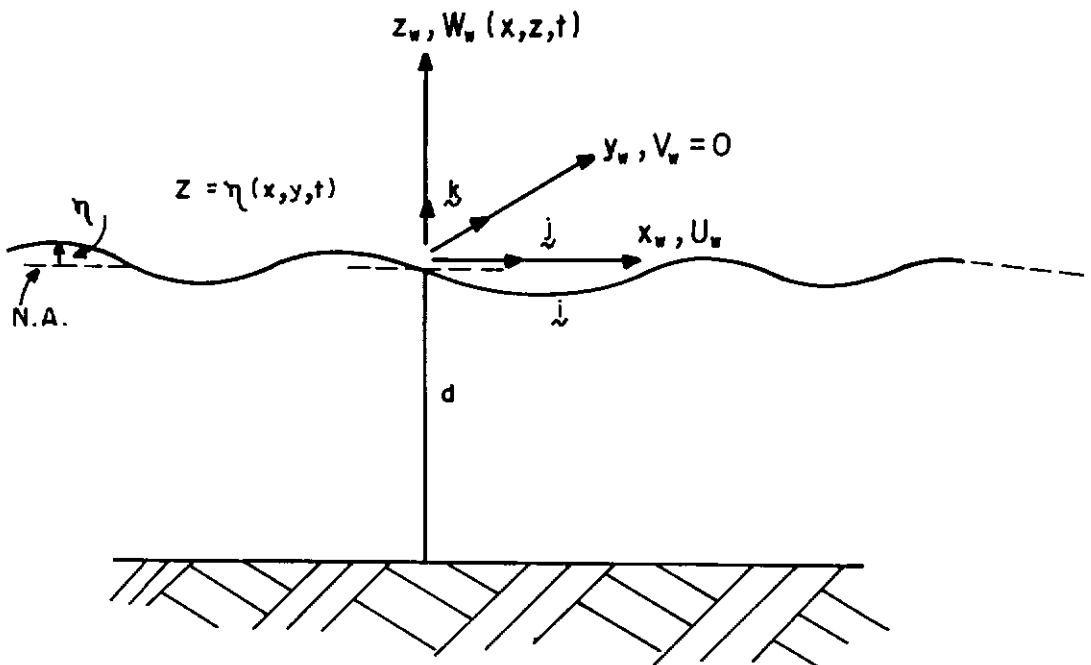


Figura 20 - Onda no plano $x_v z_v$

As equações fundamentais que governam esse problema são a de continuidade para fluidos incompressíveis (conservação da massa) e a de Bernoulli (relaciona campo de pressões à cinemática do fluido). A equação de continuidade tem o seguinte aspecto:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (146)$$

A partir da equação de continuidade e da condição de irrotacionalidade das partículas fluidas, pode-se definir uma função escalar $\phi(x,y,z,t)$, contínua e diferenciável, denominada função potencial de velocidades, tal que

$$\frac{\gamma \phi}{\gamma x} = U_v \quad (147)$$

$$\frac{\gamma \phi}{\gamma z} = W_v \quad (148)$$

a qual introduzida na equação de continuidade, assumindo-se que $V_v = 0$, conduz a:

$$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0, \text{ ou}$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (149)$$

que é conhecida como equação de Laplace.

A equação de Bernoulli pode ser escrita como:

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[U_v^2 + W_v^2 \right] + gz + \frac{p}{\rho} = 0 \quad (150),$$

onde g é a aceleração da gravidade

p é a pressão

ρ é a massa específica constante no meio fluido.

Para obter uma definição matemática completa do problema da onda representado pela equação de Laplace, são necessárias as condições de contorno do problema.

A condição de contorno cinemática estabelece que uma partícula fluida pertencente à superfície livre, não pode deixá-la em nenhum instante.

Definindo-se a equação da superfície livre $S(x, z, t) = \eta(x, t) - z = 0$ e tomando-se a derivada de S em relação a t , tem-se:

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\delta S}{\delta t} + U \frac{\delta S}{\delta x} + W \frac{\delta S}{\delta z} = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{\delta \eta}{\delta t} + U \frac{\delta \eta}{\delta x} - \frac{\delta \theta}{\delta z} = 0 \quad \therefore$$

$$\boxed{\frac{\delta \theta}{\delta z} = \frac{\delta \eta}{\delta t} + u \frac{\delta \eta}{\delta x}} \quad (151)$$

A condição de contorno dinâmica assume que a superfície livre encontra-se à pressão atmosférica. Aplicando-se a equação de Bernoulli (150) na superfície livre e igualando-se a pressão atmosférica a zero, tem-se:

$$\boxed{\frac{\delta \theta}{\delta t} + \frac{1}{2} \left(U^2 + W^2 \right) + g\eta(x, t) = 0} \quad (152)$$

A condição de contorno no fundo do mar supõe um fundo horizontal, impermeável e portanto a velocidade vertical W_v é nula, isto é:

$$W_v(x, (z = -d), t) = \frac{\delta\theta}{\delta z}(x, (z = -d), t) = 0 \quad (153)$$

Teoria Linear de AIRY

Na tentativa de obter a solução exata para o problema descrito, aparecem duas dificuldades. A primeira dificuldade é que as condições de contorno são estabelecidas na superfície móvel $z = \eta$ a qual é inicialmente desconhecida. A segunda está relacionada à não-linearidade dessa superfície.

Utilizando-se a hipótese de amplitude de onda muito pequena quando comparada ao comprimento de onda, de Airy, o problema pode ser linearizado, determinando-se uma solução analítica. A figura (21) mostra as variáveis em questão, onde:

a é a amplitude da onda ($a = H / 2$);

H é a altura da onda;

L é o comprimento de onda.

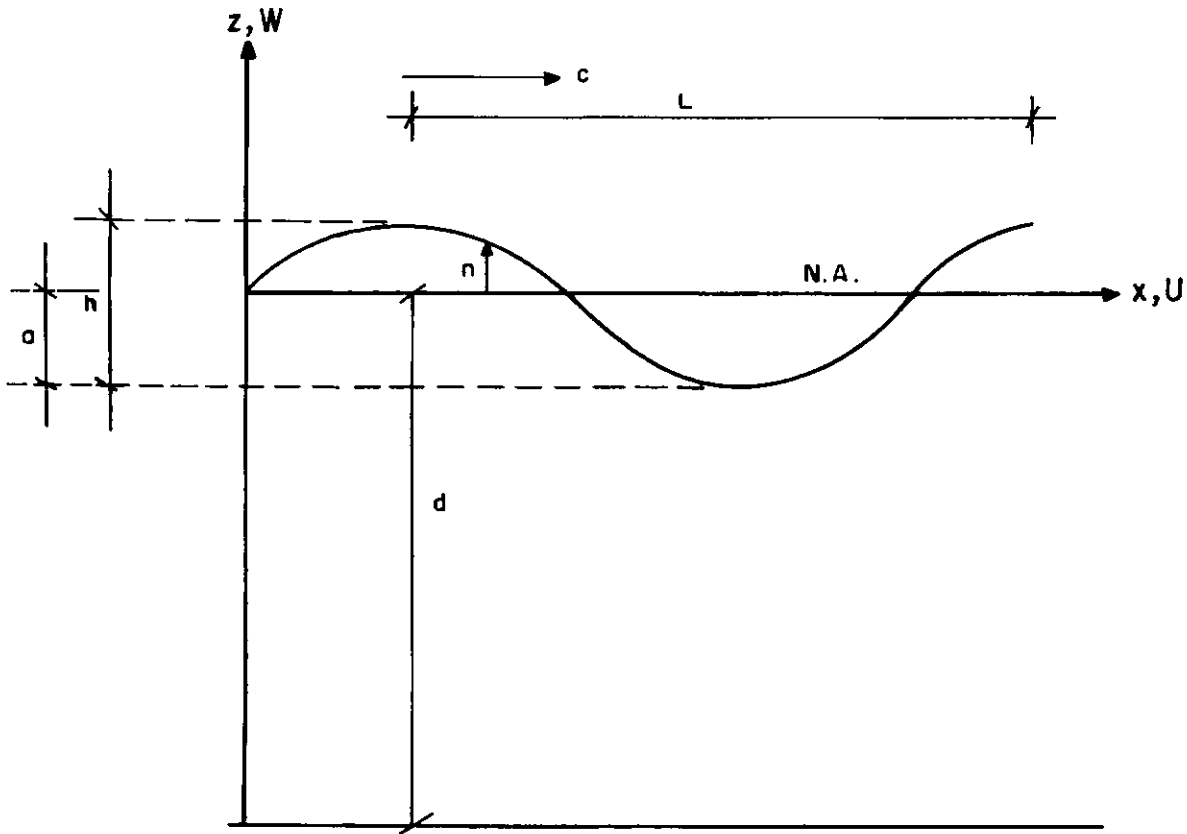


Figura 21 - Características da onda - plano $x_v z_v$

Considerando-se a expansão de ϕ através da série de Taylor:

$$\phi \Big|_{z=\eta} = \phi \Big|_{z=\phi} + \eta \frac{\delta\phi}{\delta z} + o(\eta^2) \quad (154)$$

Introduzindo-se a hipótese simplificadora de Airy de que a amplitude da onda é muito menor que seu comprimento de onda, os termos da série (154), a partir do segundo, tornam-se desprezíveis, chegando-se a:

$$\phi \Big|_{z=\eta} \cong \phi \Big|_{z=0} \quad (155)$$

Assim, as condições de contorno cinemática e dinâmica podem ser estabelecidas para $z = 0$.

Além disso, os termos não lineares presentes nas condições de contorno cinemática e dinâmica, que estão relacionados com a não linearidade da superfície η , podem ser desprezados também, a partir da hipótese de que o comprimento de onda é bem maior que a amplitude de onda. Assim, na condição de contorno cinemática (151), $\frac{\delta\eta}{\delta x} \rightarrow 0$, enquanto na condição de contorno dinâmica (152),

$$Uv^2 + Wv^2 \rightarrow 0$$

Desta forma, tem-se o seguinte problema de valores de contorno a ser resolvido, representado na figura (22):

$$\nabla^2 \phi = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \phi}{\delta z^2} = 0 \quad (156)$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta t} + g \eta = 0 \quad (z = 0) \quad (157)$$

$$\frac{\delta\eta}{\delta t} - \frac{\delta\phi}{\delta z} = 0 \quad (z = 0) \quad (158)$$

$$\frac{\delta\phi}{\delta z} = 0 \quad (z = -d) \quad (159)$$

Combinando-se (157) e (158), tem-se:

$$\frac{1}{g} \frac{\delta^2 \phi}{\delta t^2} + \frac{\delta \phi}{\delta z} = 0 \quad (z = 0) \quad (160)$$

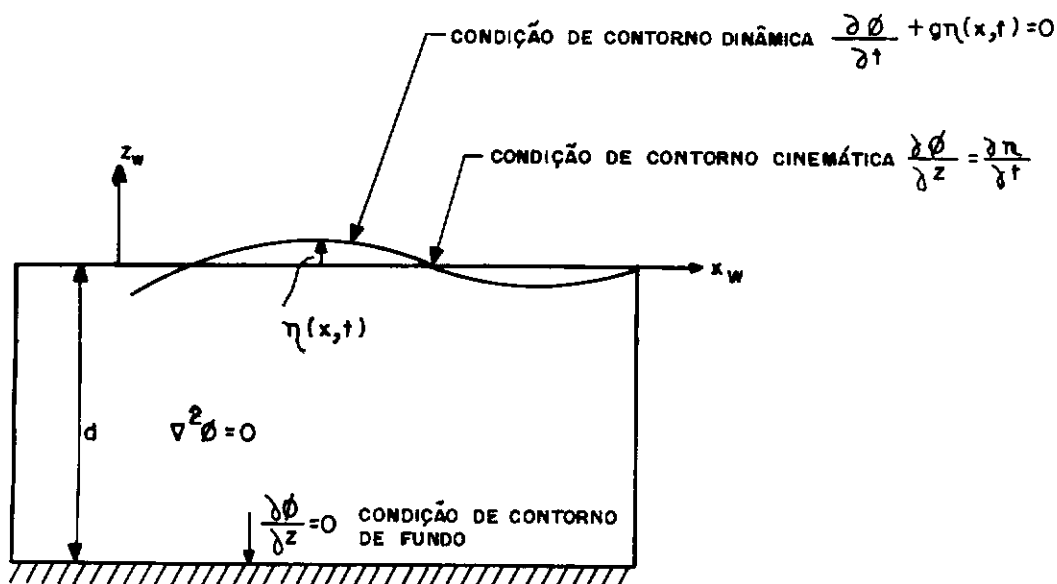


Figura 22 - Condições de contorno - teoria linear de Airy.

Aplicando-se o método da separação de variáveis e as condições de contorno, podemos chegar a duas expressões de potencial, de velocidades correspondentes a ondas estacionárias (não progressivas). Como a equação de Laplace e as condições de contorno são lineares, a superposição é válida. Somando-se as duas expressões de potencial de velocidades, obtém-se finalmente, uma expressão de potencial de velocidades correspondentes a uma onda progressiva:

$$\phi(x, z, t) = \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd} \times \sin h k(x - \omega t) \quad (161)$$

onde,

$\omega \rightarrow$ é a frequência angular de oscilação

$k \rightarrow$ é o número da onda

Aplicando-se a expressão (157) em (161), obtém-se a expressão do deslocamento da superfície do mar na direção vertical:

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (162)$$

Examinando-se a expressão (162), verifica-se que essa onda se propaga para a direita com o tempo, e portanto é a solução desejada, na qual a amplitude da onda permanece constante e a onda se propaga com uma velocidade constante (celeridade) igual λ/τ , onde τ é o período.

Partindo-se da condição de contorno (160), chega-se a:

$$\omega^2 = g k \tanh(kd) \quad (163)$$

denominada equação de dispersão.

Resolvendo-se a equação (163) por iterações sucessivas, determina-se o número de onda, k .

Em águas profundas, normalmente $kd \gg 1$, de forma que $\tanh(kd) = 1$. Neste caso, é possível a determinação imediata de forma aproximada do valor de k , pois a expressão (163) fica:

$$\omega^2 = g \times k \quad (164)$$

Substituindo-se k nas expressões (161) e (162), obtém-se $\phi(x, z, t)$ e $\eta(x, z, t)$, respectivamente.

Velocidades e Aceleração de onda

Uma vez obtida a expressão de $\phi(x, z, t)$, calculam-se as velocidades horizontal, U_w e vertical, W_w da partícula fluida no sistema local da onda a partir de (147) e (148), respectivamente. Assim,

$$U_w = \frac{\delta\phi}{\delta x} = a \omega \frac{\cosh k(z + d)}{\cosh kh} \cos(kx - \omega t) \quad (165)$$

$$W_w = \frac{\delta\phi}{\delta z} = a \omega \frac{\sinh k(z + d)}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t) \quad (166)$$

Como na teoria linear de Airy o termo convectivo da aceleração total é desprezível, as acelerações horizontal e vertical da partícula fluida, no sistema de referência da onda, podem ser obtidas através das derivadas parciais de U_w e W_w em relação ao tempo, respectivamente. Assim:

$$\dot{U}_w = a \omega^2 \frac{\cosh(z + d)}{\sinh kd} \sin(kx - \omega t) \quad (167)$$

$$\dot{W}_w = a \omega^2 \frac{\sinh k(z + d)}{\sinh kd} \cos(kx - \omega t) \quad (168)$$

Um ponto de coordenadas X , Y e Z referidas ao sistema global, apresentará as seguintes coordenadas em relação ao sistema da onda:

$$x_w = \text{offset} + X \cos \beta + Y \sin \beta$$

$$z_w = Z - d \quad (169)$$

As coordenadas x_w e z_w são então usadas para o cálculo das velocidades U_w e W_w e das acelerações \dot{U}_w e \dot{W}_w , nas direções x_w e z_w do sistema de referência da onda, respectivamente. Para transformar as velocidades e aceleração da partícula fluida do referencial da onda para o referencial global, usam-se as seguintes relações:

$$U = U_w \cos \beta \quad \dot{U} = \dot{u}_w \cos \beta$$

$$V = U_w \sin \beta \quad \dot{V} = \dot{v}_w \sin \beta$$

$$W = W_w \quad (170) \quad \dot{W} = \dot{w}_w \quad (171)$$

onde as velocidades U , V e W e as acelerações \dot{U} , \dot{V} e \dot{W} correspondem às direções X , Y e Z do sistema global de coordenadas, respectivamente.

Portanto, o vetor de velocidades \underline{U} e o de aceleração $\dot{\underline{U}}$ de onda no referencial global, serão:

$$\underline{U} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (172)$$

$$\dot{\underline{U}} = \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} \quad (173)$$

Dispondo-se de um perfil de distribuição de velocidades de corrente ao longo da profundidade, adicionam-se, vetorialmente as velocidades de corrente às de onda, ambas referidas ao sistema de coordenadas globais.

Sejam U_{cor} e V_{cor} as componentes do vetor de velocidades de corrente, nas direções X e Y do sistema global de coordenadas, respectivamente. O vetor de velocidades totais, no sistema de referência global, será:

$$\vec{v} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}, \text{ onde}$$

$$v_x = U + U_{cor}$$

$$v_y = V + V_{cor}$$

$$v_z = W$$

(174)