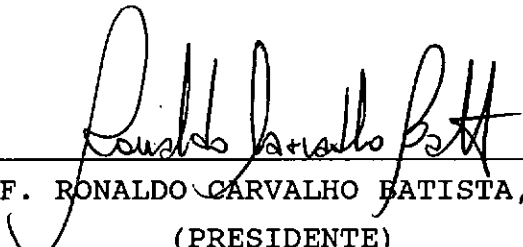


"SHEAR LAG" EM ESTRUTURAS TUBULARES
DE PAREDES DELGADAS


NATHALIE SCHUBERT PFEIL

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

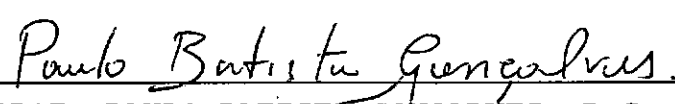
APROVADA POR:



PROF. RONALDO CARVALHO BATISTA, PH.D.
(PRESIDENTE)



PROF. EDUARDO DE MIRANDA BATISTA, D.Sc.



PROF. PAULO BATISTA GONÇALVES, D.Sc.

PFEIL, NATHALIE SCHUBERT

"Shear Lag" em Estruturas Tubulares de Paredes Delgadas [Rio de Janeiro] 1992 x, 150 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1992).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. "Shear Lag"

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Ronaldo Carvalho Batista e a Ricardo Valeriano Alves pelo grande incentivo, enorme paciência e imensa ajuda.

As demais pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada a COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

"SHEAR LAG" EM ESTRUTURAS TUBULARES
DE PAREDES DELGADAS

NATHALIE SCHUBERT PFEIL

Maio 1992

Orientador: Ronaldo Carvalho Batista

Programa : Engenharia Civil

Este trabalho apresenta soluções fechadas das equações analíticas para vigas tubulares de paredes delgadas. As equações são obtidas via método de energia onde são considerados os efeitos de deformação por esforço cortante nas almas e de "shear lag" nos flanges.

Expressões explícitas para deslocamentos e tensões são apresentadas para o caso de viga caixão de seção retangular engastada - livre. No caso mais geral de seções, incluindo aquelas típicas de pontes, as expressões apresentadas têm forma semi-implícita, cobrindo diversas condições de contorno e carregamentos.

A importância do efeito de "shear lag" é demonstrado através de comparações com resultados de teorias clássicas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SHEAR LAG IN TUBULAR THIN WALLED STRUCTURES

NATHALIE SCHUBERT PFEIL

May 1992

Closed form solutions for deflections and stresses in thin-walled tubular beams are presented. The analytical equations are developed within an energy approach where shear strains and shear lag effects are considered.

Explicit expressions for transverse deflections and stresses are given for cantilever box beams. For tubular sections of more general geometries, like bridge sections, semi-explicit expressions are presented to several combinations of boundary and loading conditions.

The importance of shear lag effect is demonstrated through comparisons with classical theoretical results.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
I.1 - Conceituação de "Shear Lag"	1
I.2 - Métodos de Análise	7
I.3 - Descrição da Tese	11
II - MODELO MATEMÁTICO PARA ESTRUTURAS TUBULARES	12
II.1 - Definição do Modelo Estrutural	12
II.2 - Campos de Deslocamentos e Deformações	13
II.3 - Distribuição das Tensões	18
II.3.1 - Tensões Axiais	18
II.3.2 - Tensões Tangenciais	22
II.4 - Energia de Deformação	24
II.4.1 - Energia de Deformação das Almas	24
II.4.2 - Energia de Deformação dos Flanges	26
II.5 - Energia Potencial das Cargas	27
II.6 - Funcional de Energia Potencial Total	28
III - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	30
III.1 - Extremização do Funcional de Energia	30
III.2 - Equações de Equilíbrio	35
III.3 - Equações de Contorno	36
IV - SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA UMA VIGA ENGASTADA E LIVRE	39
IV.1 - Solução do Sistema de Equações de Equilíbrio	39
IV.2 - Definição das Condições de Contorno	42
IV.3 - Carregamento Uniformemente Distribuído	43

IV.4 - Carregamento Distribuido Linearmente	
	Crescente 50
IV.5 - Carregamento Distribuido Linearmente	
	Decrescente 54
IV.6 - Carga Concentrada no Extremo Livre	56
IV.7 - Momento Aplicado no Extremo Livre	57
IV.8 - Automatização do Cálculo	58
V - FORMULAÇÃO PARA SEÇÕES TÍPICAS DE PONTES	59
V.1 - Modelo Estrutural	59
V.2 - Campos de Deslocamentos e Deformações	61
V.3 - Distribuição das Tensões	62
V.4 - Funcional de Energia Potencial Total	64
V.5 - Equações de Equilíbrio e Condições	
	de Contorno 65
V.6 - Solução das Equações de Equilíbrio	68
V.7 - Automatização do Cálculo das Soluções	84
V.8 - Comentários Adicionais	85
VI - APLICAÇÃO DAS FORMULAÇÕES	88
VI.1 - Verificação das Soluções Analíticas	
para Seção Transversal Retangular	88
VI.2 - Estudo da Influência das Características	
Geométricas em Seções Retangulares	91
VI.2.1 - Deslocamento Transversal	93
VI.2.2 - Funções S e S'	96
VI.2.3 - Tensões Axiais nos Flanges	102
VI.3 - Aplicação da Formulação para	
Seções Típicas de Pontes	109
VI.3.1 - Verificação da Formulação	109
VI.3.2 - Estudo das Função S e S' para Diversos	
Carregamentos e Condições de Contorno	111
VI.3.3 - Influência da Consideração do "Shear-Lag"	
no Cálculo dos Deslocamentos em	
Vigas Curtas	117

VII - CONCLUSÕES E SUGESTÕES	123
VII.1 - Conclusões Gerais	123
VII.2 - Sugestões para Continuação do Trabalho	124
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	127
APÊNDICE I - LISTAGEM DO PROGRAMA SHELAG	130
APÊNDICE II - DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO POR INTERMÉDIO DE MUDANÇA DE BASE	133
APÊNDICE III - LISTAGEM DO PROGRAMA SLPONTE	137

SIMBOLOGIA

A	- área da seção transversal
b	- largura do flange
$C_1 \dots C_{10}$	- constantes de integração
E	- módulo de elasticidade longitudinal
G	- módulo de elasticidade transversal
h	- altura da alma
I	- inércia da seção transversal
L	- comprimento da viga
$M(\bar{x})$	- momento aplicado em \bar{x}
$P(\bar{x})$	- carga concentrada aplicada em \bar{x}
$Q(x)$	- carga distribuida
S	- função que indica a intensidade do "shear-lag" ao longo da viga.
t	- espessura
u	- deslocamentos axiais (direção x)
U	- energia de deformação
V	- energia potencial total
x, y, z	- sistema de eixos
w	- deslocamentos transversais (direção z)
α	- fator de forma da seção (relativo ao cisalhamento)
β	- rotação da seção por cisalhamento
γ	- deformação tangencial
ϵ	- deformação axial
Ψ	- rotação da seção por flexão
σ	- tensão axial
τ	- tensão tangencial

SUB-ÍNDICES

- a - relativo às almas
- f - relativo aos flanges
- n - relativo ao número do flange na seção de pontes

ÍNDICES SUPERIORES

- ' - derivada em relação a x
- ~ - valores prescritos
- - expressões na base de autovetores

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - CONCEITUAÇÃO DE "SHEAR LAG"

O fenômeno de "shear lag" pode ser caracterizado a partir da observação do comportamento do modelo estrutural esquematizado na figura I.1.a. Trata-se de uma viga engastada e livre de seção retangular de paredes delgadas, sujeita a um carregamento transversal que não produz torção. É também admitido que os flanges estejam submetidos a um estado plano de tensões. De acordo com a teoria clássica de vigas, os deslocamentos axiais seriam proporcionais à distância da linha neutra [1], conforme a figura I.1.b. Isto decorre da hipótese de que as seções permanecem planas após a deformação. Porém neste caso isto não se verifica, e o que ocorre na verdade é uma distribuição de deslocamentos axiais situada fora de um plano, como ilustrado na figura I.1.c. Esta distribuição não linear do campo de deslocamentos é denominada de "shear lag". Apresenta-se na figura I.1.d a configuração deformada do elemento infinitesimal E, notando-se que o mesmo apresenta uma distorção associada às tensões cisalhantes indicadas, τ_{xy} . Como se pode observar, o deslocamento axial no centro do flange sofre um "atraso" ("lag") em relação ao deslocamento em seus extremos, e a esta forma não linear está associada à tensão cisalhante τ_{xy} ("shear"), daí a origem da denominação do fenômeno de "shear lag". Na versão em português do livro de Teoria da Elasticidade, de S.P. Timoshenko [2], os tradutores sugeriram a denominação de arrasto por esforço cortante.

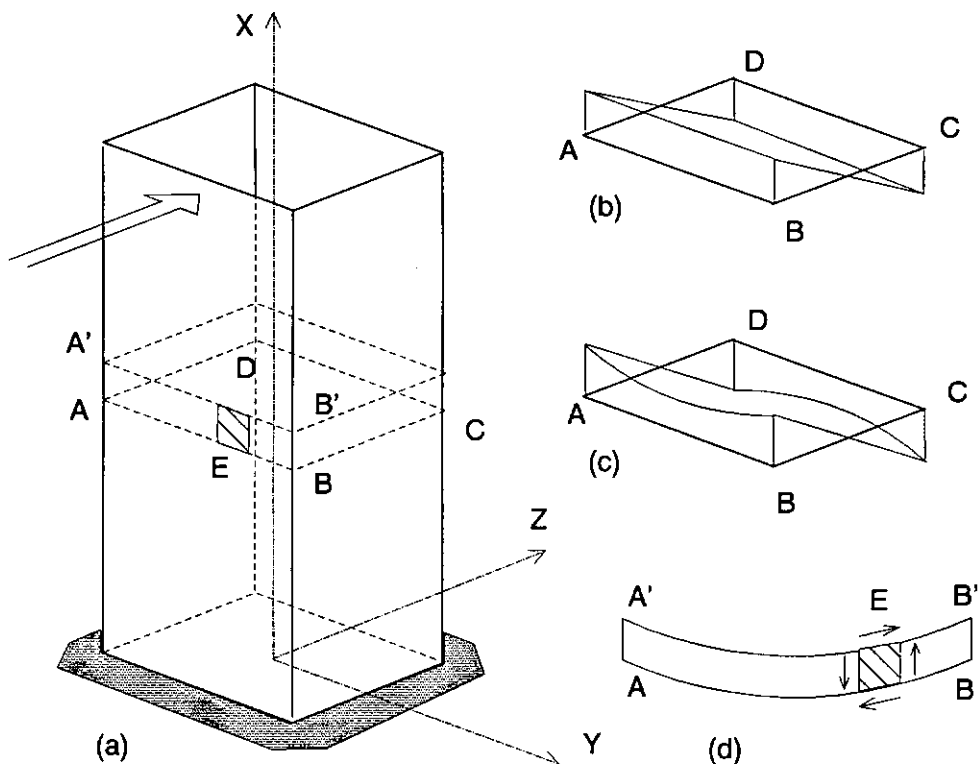


Figura I.1 - (a) Modelo estrutural (b) Deslocamentos axiais segundo a teoria clássica de vigas (c) Deslocamentos axiais reais (d) Configuração deformada de um elemento infinitesimal

Os deslocamentos axiais ao longo das linhas AB e A'B' (figura I.1.a) após a deformação podem assumir, num caso geral, as seguintes configurações : (i) A curvatura de A'B' é a mais pronunciada, (ii) ambas as curvaturas são iguais e (iii) AB apresenta uma curvatura mais acentuada. Estas três situações são ilustradas na figura I.2, juntamente com os diagramas de tensões tangenciais (τ_{xy}) e axiais correspondentes, σ_f .

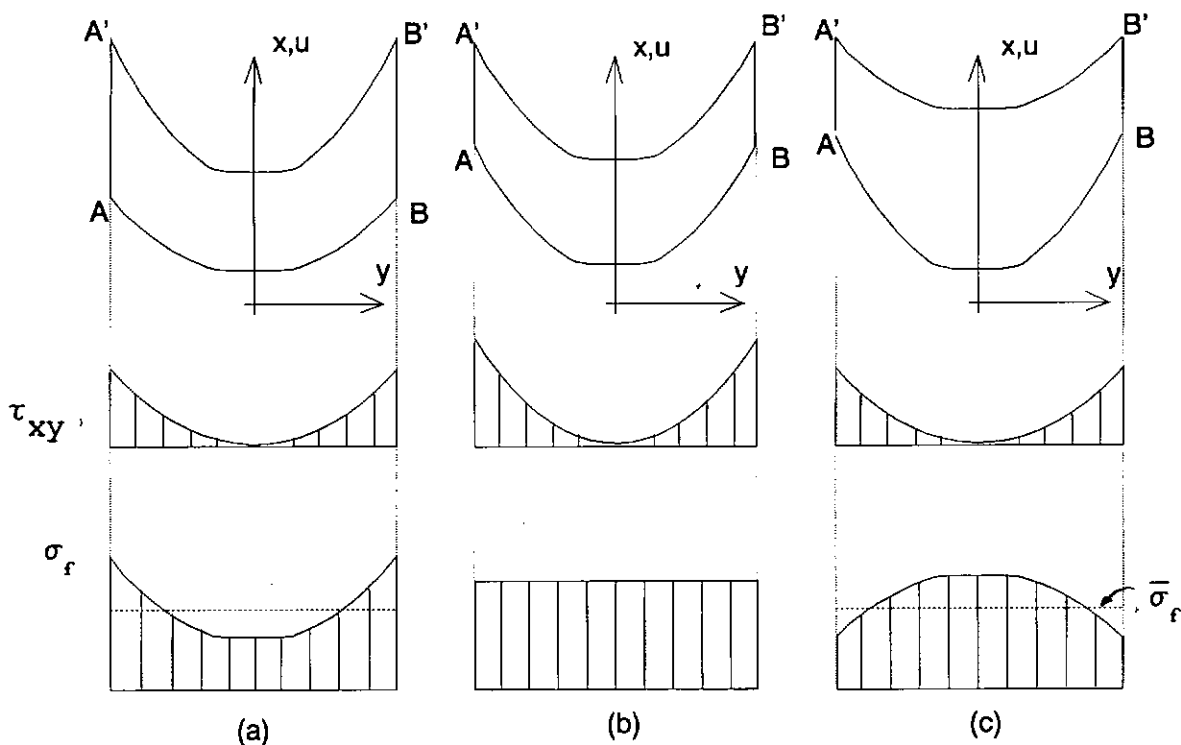


Figura I.2 - Possíveis campos de deslocamentos axiais e distribuição de tensões correspondentes

Na figura I.2 as tensões $\bar{\sigma}_f$ em tracejado indicam os valores fornecidos pela teoria clássica de vigas. Por uma questão de equilíbrio entre os momentos atuante e resistente, o valor de $\bar{\sigma}_f$ estará sempre entre os valores máximo e mínimo de σ_f . Nos casos em que a tensão σ_f é constante, o valor de $\bar{\sigma}_f$ é obviamente coincidente.

É comum encontrar a definição de "shear lag" como sendo a distribuição não linear de tensões axiais [2-7], embora seja amplamente admitido que o "shear lag" é associado as tensões cisalhantes. Segundo esta forma de se definir o fenômeno, seria óbvia a contradição para a situação da figura I.2.b: o "shear lag" seria nulo embora existam tensões cisalhantes. Será ainda demonstrado que na seção em que a tensão axial no flange é constante, as tensões tangenciais assumem valor

máximo. Fica claro então que não é correto conceituar "shear lag" como não linearidade de tensões axiais. Alguns outros autores [8-10] conceituam o fenômeno da forma correta, como aqui apresentado.

Esta questão relativa à definição do "shear lag" é evidentemente muito importante, e parece passar despercebida, ocorrendo com freqüência uma confusão entre não linearidade de tensões e deslocamentos.

O efeito de "shear lag" também pode ser observado no caso de cargas axiais, como por exemplo aqueles apresentados na figura I.3. Entretanto tais casos não serão aqui considerados sendo somente estudados aqueles cujos carregamentos são transversais ao eixo da viga.

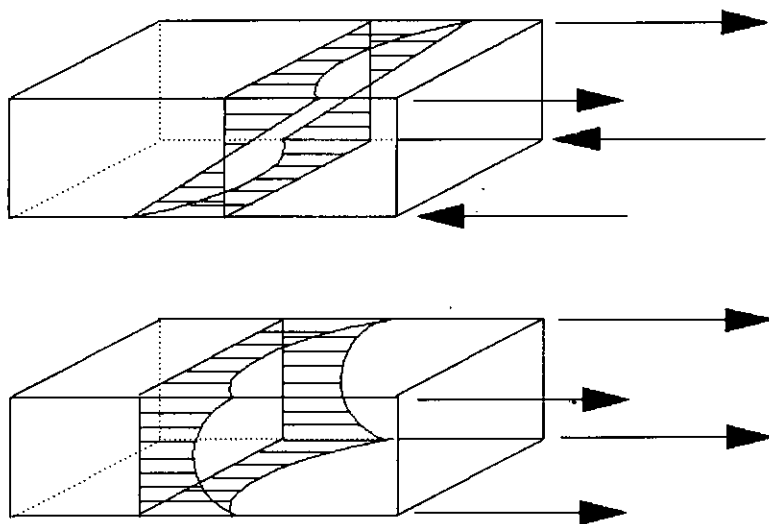


Figura I.3 - Distribuição de tensões no caso de cargas axiais

Uma estrutura sujeita a "shear lag" se analisada segundo a teoria clássica de vigas, pode levar à seguinte incorreção, conforme ilustrado nas figuras I.4: tensões reais σ_f maiores ou menores que a tensão clássica $\bar{\sigma}_f$.

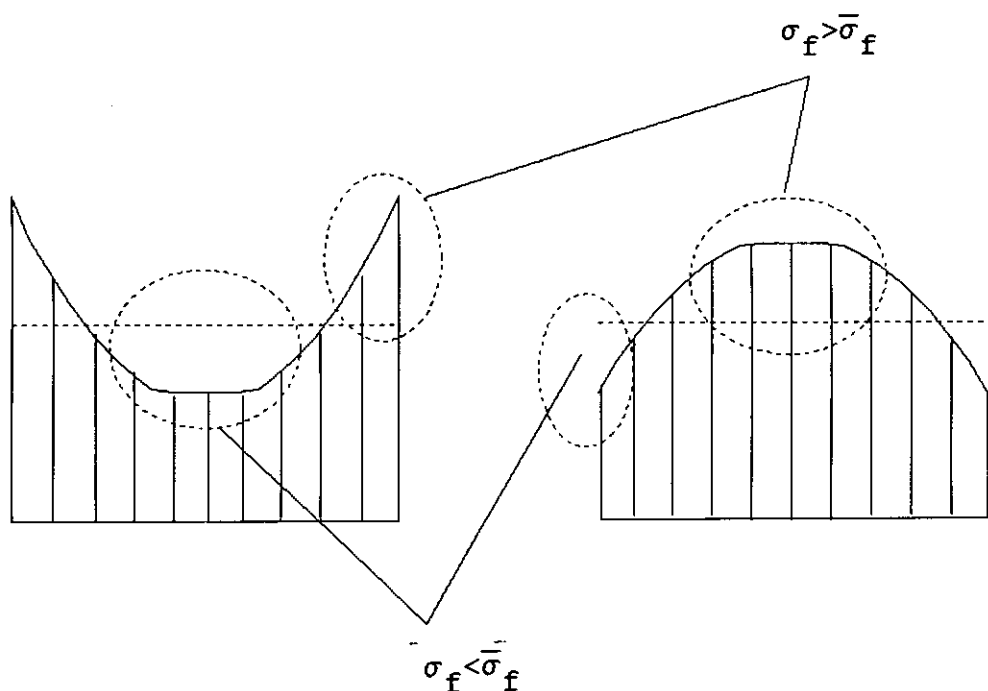


Figura I.4 - Não uniformidade de tensões devido ao "shear lag"

Caso $\sigma_f > \bar{\sigma}_f$, uma avaliação incorreta das tensões atuantes conduz logicamente a um sub-dimensionamento, podendo culminar em ruptura ou flambagem [8].

O estudo do "shear lag" é de particular interesse na análise estrutural de edifícios altos de concepção tubular, pontes de seção caixão, nas construções navais, aeronáuticas etc. A eficiência destes modelos estruturais está diretamente associada às conseqüências do "shear lag", ou seja, distribuição não uniforme de tensão axial. Desta forma existe sempre a preocupação em atenuar estes efeitos indesejáveis. Por exemplo, no caso de edifícios altos existe o sistema modular ou celular [3,11], resultante da aglomeração de duas ou mais estruturas tubulares, conforme ilustrado na figura I.5.

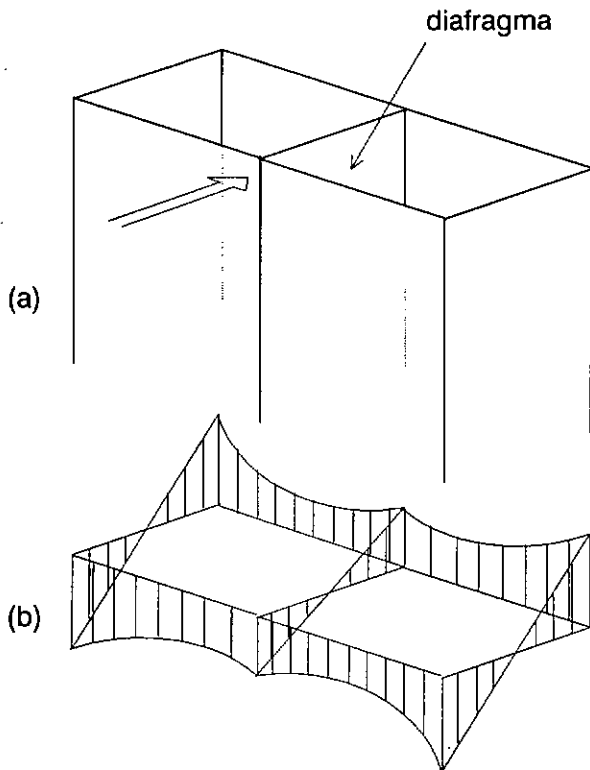


Figura I.5 - (a) Sistema tubular modular
(b) Distribuição de tensões axiais

O diafragma paralelo à direção de atuação da carga absorve parte da tensão cisalhante, minorando o efeito de "shear lag".

Um exemplo bastante conhecido deste tipo de concepção é o "Sears Tower" [12] (figura I.6), na cidade de Chicago, atualmente o edifício mais alto do mundo com 443.5 m de altura. Neste caso foram adotadas nove células e o resultado, em termos de distribuição de tensões, é bastante satisfatório, pois obtém-se praticamente uma distribuição uniforme, conforme ilustrado no detalhe da figura I.6.

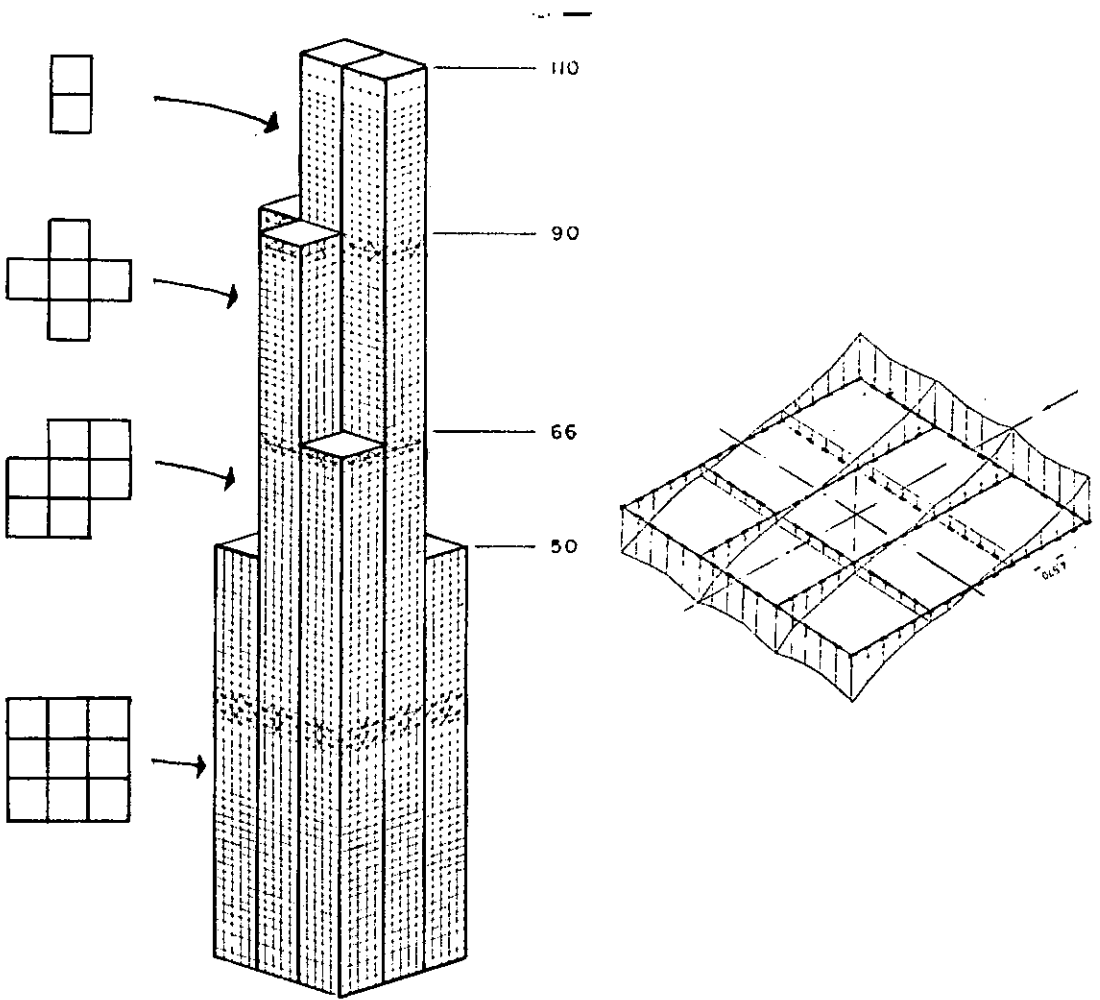


Figura I.6 - (a) "Sears Tower" [12]

(b) distribuição de tensões axiais

Outra forma de atenuar a não uniformidade da distribuição de tensões axiais consiste em aumentar a área das colunas nos bordos dos flanges [13].

I.2 - MÉTODOS DE ANÁLISE

A análise de estruturas sujeitas ao efeito de "shear lag" pode ser efetuada através do método dos elementos finitos (MEF). Para uma boa avaliação das conseqüências do "shear lag"

normalmente é necessário um certo grau de refinamento da malha, o que em geral não se justifica numa fase preliminar de projeto. O método das faixas finitas [14], se adapta muito bem a estes tipos de problema, resultando num sistema de equações bastante reduzido, se comparado com o procedimento convencional do MEF. Mesmo assim este método não pode ser considerado como uma solução imediata, pois sempre restarão as etapas de discretização, entrada de dados e análise dos resultados. A figura I.7 apresenta uma discretização típica em elementos finitos e faixas finitas. Nas etapas da concepção estrutural e de ante-projeto, costuma-se então recorrer aos métodos aproximados ou a soluções analíticas, normalmente para casos simples que possam ser associados a componentes tubulares.

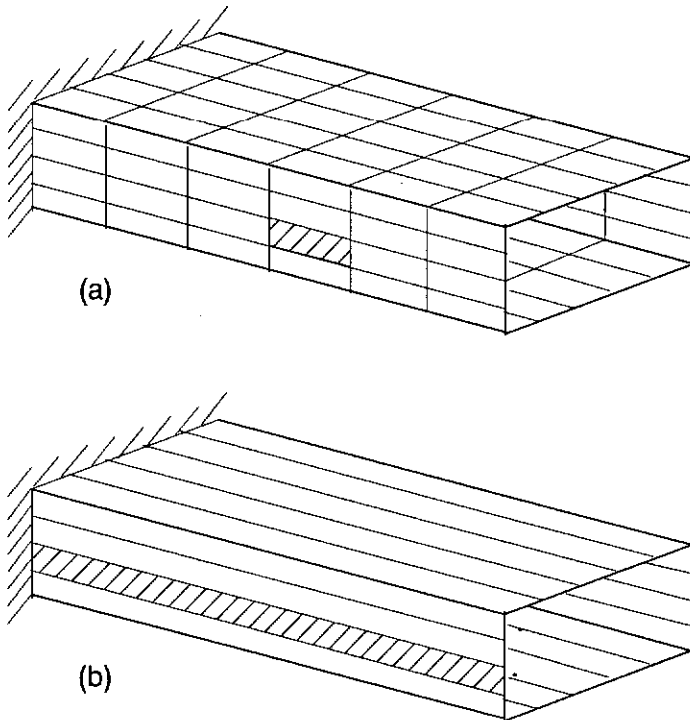


Figura I.7 - Discretização típica em (a) elementos finitos e (b) faixas finitas

Os primeiros trabalhos a respeito de "shear lag" são atribuídos a REISSNER [15-17]. Objetivando analisar os problemas observados na indústria aeronáutica, REISSNER utilizou uma função parabólica para aproximar o campo de deslocamentos axiais, num modelo de energia. Em seus artigos, não é considerada a deformação das almas por esforço cortante, o que pode gerar resultados insatisfatórios nos casos de vigas curtas. As soluções analíticas por ele apresentadas só foram possíveis nos casos em que a distribuição de momentos fletores era previamente conhecida; um artifício para substituir as condições de contorno essenciais por naturais foi utilizado para simplificar a solução das equações diferenciais de equilíbrio. Este tipo de enfoque do problema (extremização do funcional de energia potencial total) mostrou-se eficiente e vem sendo utilizado com algumas modificações. Destacam-se as publicações de FOUTCH [18] e DEZI [19] que introduzem as deformações por esforço cortante, segundo a teoria de vigas de Timoshenko, e aplicam corretamente as condições de contorno. Com isto a solução das equações diferenciais de equilíbrio torna-se mais complexa e em [18] os autores optaram pelo método numérico de Runge-Kutta.

Outra forma de análise consiste em substituir a viga por uma associação de chapas e barras [2,20], conforme ilustrado na figura I.8.

Por hipótese, as barras absorvem apenas os esforços axiais enquanto as chapas resistem ao cisalhamento (figura I.7.c). Por considerações de compatibilidade e de equilíbrio são obtidas as equações diferenciais que governam o problema. A medida que esta modelagem vai sendo refinada com a introdução de novas barras e chapas, os resultados tendem a melhorar, aumentando também o grau de complexidade do sistema de equações diferenciais.

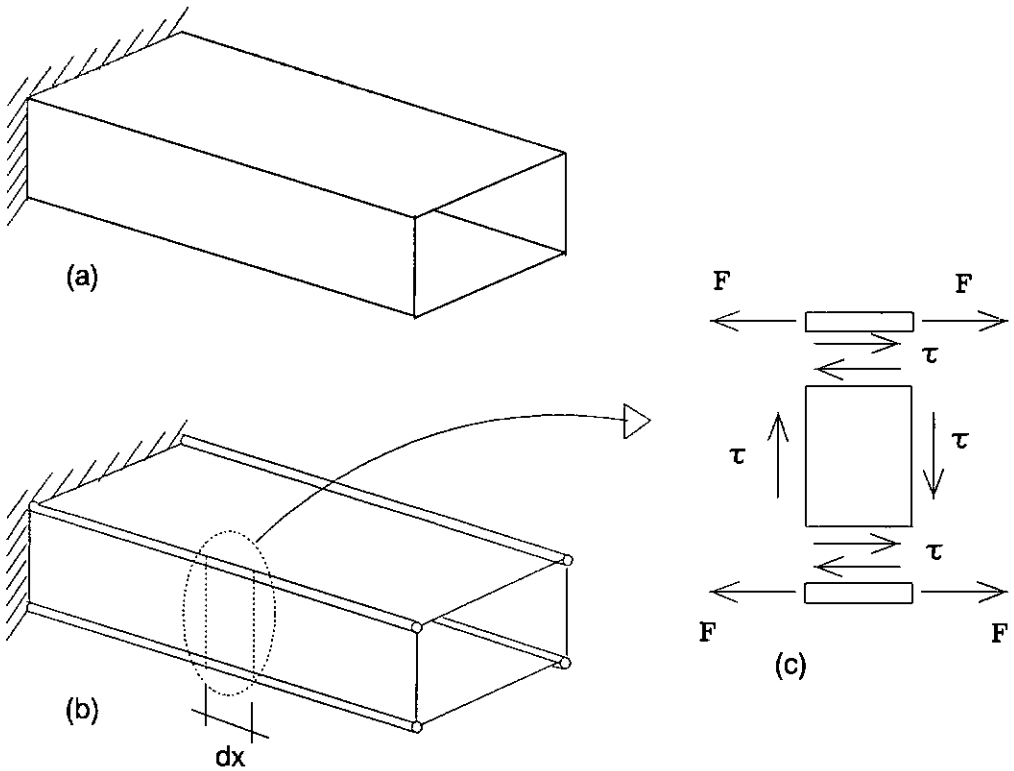


Figura I.8 - (a) Estrutura real (b) simulação com barras e chapas (c) Forças e tensões atuantes numa faixa infinitesimal

Os métodos até agora descritos envolvem a solução de sistemas de equações diferenciais, ou sistemas com grande número de equações algébricas como no caso do MEF. Como forma de se evitar tais dificuldades, adota-se com frequência na prática o método da largura efetiva. Este método consiste em considerar que certos trechos da seção transversal tenham uma largura menor do que a real, de forma que a tensão calculada pela teoria clássica forneça o valor máximo correto. A definição das larguras efetivas baseia-se em resultados experimentais e numéricos (geralmente com o MEF), e depende da forma da seção transversal, das condições de contorno e do carregamento.

I.3 - DESCRIÇÃO DA TESE

As formulações apresentadas no presente trabalho são baseadas no princípio da energia potencial total estacionária, de forma análoga às publicações de FOUTCH [18] e DEZI [19]. Porém aqui, o desenvolvimento é ampliado, sendo obtidas diversas soluções analíticas, com as quais é possível uma melhor compreensão do "shear lag" e de suas conseqüências. As soluções analíticas permitem o cálculo de tensões e deslocamentos em qualquer ponto da estrutura e são facilmente programáveis, mesmo em calculadoras, sendo portanto de grande interesse prático.

No capítulo II apresenta-se o modelo matemático para uma viga de seção caixão considerando as deformações por esforço cortante e o efeito de "shear lag" na forma proposta por REISSNER [17]. As equações de equilíbrio para este modelo são deduzidas a partir da extremização do funcional de energia e são mostradas no capítulo III. O capítulo IV destina-se a solução de tais equações de equilíbrio para uma viga engastada e livre sujeita a diversos tipos de carregamento. Os resultados encontrados neste capítulo podem ser utilizados para uma análise preliminar global de edifícios altos de concepção tubular. No capítulo V segue-se a mesma metodologia para uma formulação destinada a seções típicas de pontes. As aplicações das formulações desenvolvidas são apresentadas no capítulo VI. O capítulo VII contém as conclusões a respeito do trabalho apresentado e sugestões de continuidade.

CAPÍTULO II

MODELO MATEMÁTICO PARA ESTRUTURAS TUBULARES

Apresenta-se neste capítulo o modelo matemático para uma estrutura tubular do tipo viga de seção caixão retangular de paredes delgadas, considerando-se as deformações por esforço cortante. As energias de deformação elástica das almas e dos flanges e a energia potencial das cargas, cuja soma constitui a energia potencial total, são deduzidas separadamente e apresentadas de forma explícita.

II.1 - DEFINIÇÃO DO MODELO ESTRUTURAL

Com o objetivo de se obter informações básicas sobre o fenômeno do "shear lag", optou-se inicialmente pelo caso considerado mais simples. Trata-se de uma viga com seção retangular de paredes delgadas, conforme esquema apresentado na figura II.1, submetida a carregamentos transversais. Deve-se lembrar que foram adotadas as hipóteses de que os flanges estão submetidos a um estado plano de tensões e que os carregamentos transversais não produzem torção.

Na figura II.1 estão indicadas as dimensões necessárias para a definição das características geométricas da viga e o sistema de eixos utilizado.

Como a definição das condições de contorno só se torna

necessária na etapa de solução das equações diferenciais de equilíbrio, as mesmas só serão consideradas mais adiante.

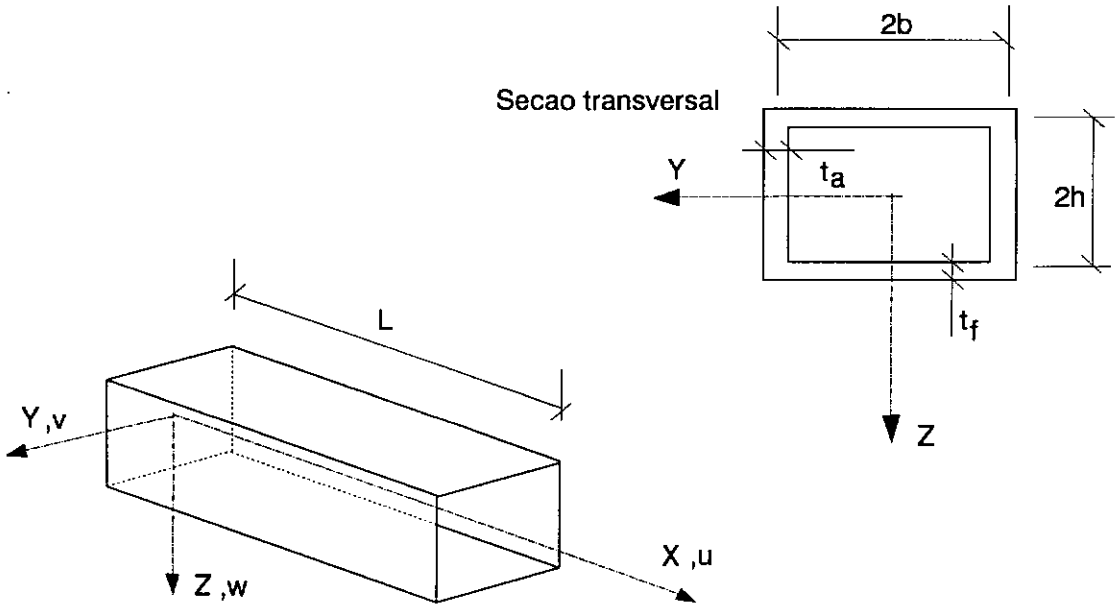


Figura II.1 - Modelo estrutural

Quanto ao carregamento, são considerados os seguintes tipos:

$M(\bar{x})$ - momento concentrado aplicado em \bar{x}

$P(\bar{x})$ - carga concentrada transversal, aplicada em \bar{x}

$Q(x)$ - carga transversal distribuída ao longo da viga, segundo uma determinada função

II.2 - CAMPOS DE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

Inicialmente são definidos os campos de deslocamentos transversal e axial e, a seguir, as expressões das deformações nos flanges e nas almas.

Sabendo que as deformações devidas ao cisalhamento são relevantes em estruturas de paredes delgadas, as mesmas deverão ser consideradas nas relações deformação-deslocamento. Assim sendo, será utilizada a teoria de vigas de Timoshenko [21], apresentada a seguir.

Para definição das hipóteses básicas, será estudado o trecho entre duas seções vizinhas, S1 e S2, na viga esquematizada na figura II.2, onde a mesma se apresenta deformada pela ação de um certo carregamento transversal (não interessando as condições de contorno).

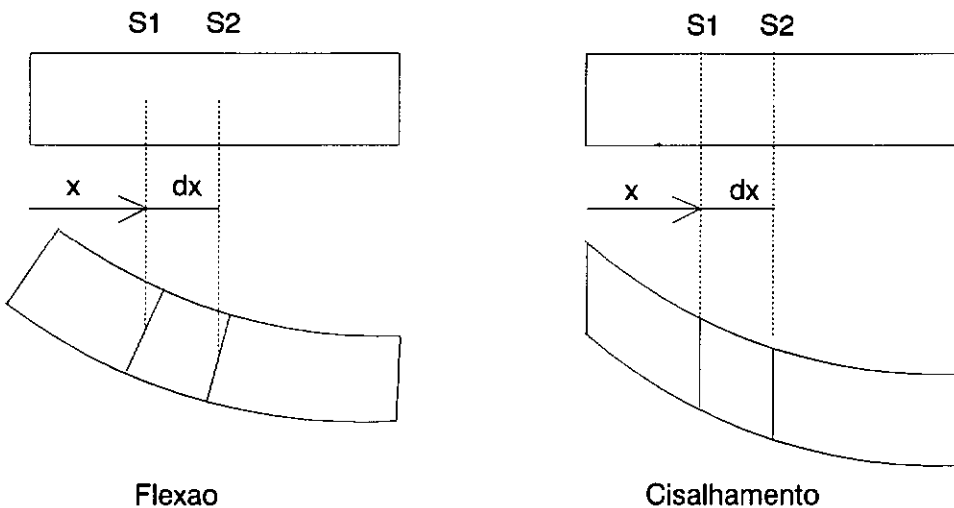


Figura II.2 - Modelo deformado

De acordo com a teoria de vigas de Timoshenko, os deslocamentos transversais devem ser considerados como resultantes de duas parcelas, uma exclusivamente devida aos esforços de flexão, e outra aos de cisalhamento. Na figura II.3 está apresentada a forma como o diferencial do deslocamento transversal, dw , é composto.

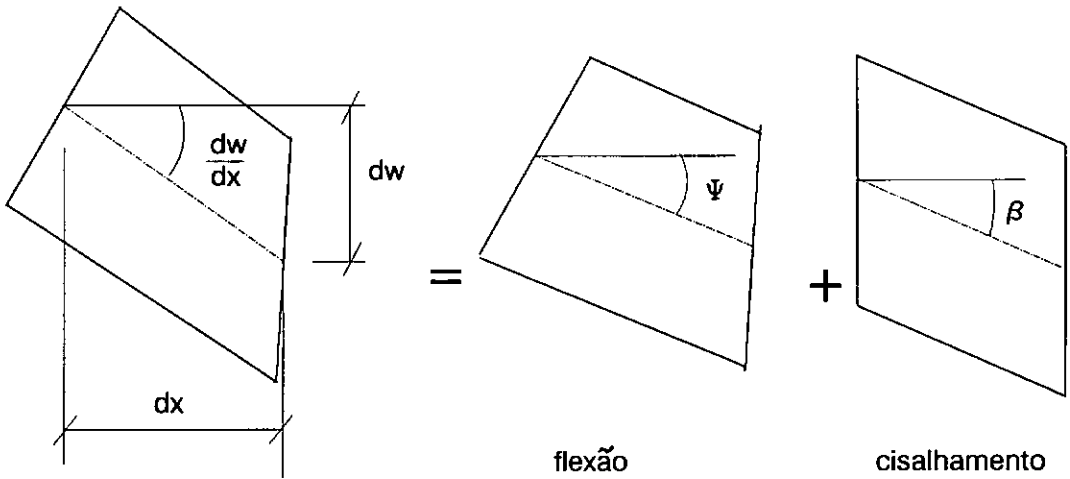


Figura II.3 - Deslocamento transversal em função das rotações

Assim, a rotação total pode ser expressa como a soma das rotações por flexão e por cisalhamento,

$$\frac{dw}{dx} = w' = \psi(x) + \beta(x) \quad (\text{II.1})$$

Deve-se notar, entretanto, que a deformação por cisalhamento $\beta(x)$, referida a um plano passando pela linha neutra da seção, como mostrada na figura II.3, é uma representação simplificada do que ocorre na realidade ao longo da altura da seção transversal da viga.

Observando a distorção dos elementos 1 e 2 esquematizados na figura II.4, conclui-se que, na verdade, o ângulo β , e conseqüentemente a tensão tangencial, são variáveis ao longo da altura da viga. Para levar em conta a não uniformidade da tensão cisalhante, será introduzido mais adiante o fator κ , que é a razão entre a tensão cisalhante na linha neutra e a tensão cisalhante média.

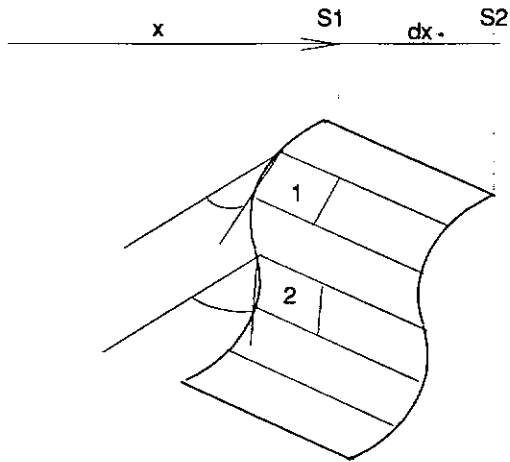


Figura II.4 - Deformação real por cisalhamento

Uma vez conhecida a equação diferencial relativa ao deslocamento transversal, os deslocamentos axiais podem ser determinados.

Observando-se a figura II.5, pode-se escrever o deslocamento axial na alma da seguinte forma:

$$u_a(x,z) = -z (w' - \beta) \quad (\text{II.2})$$

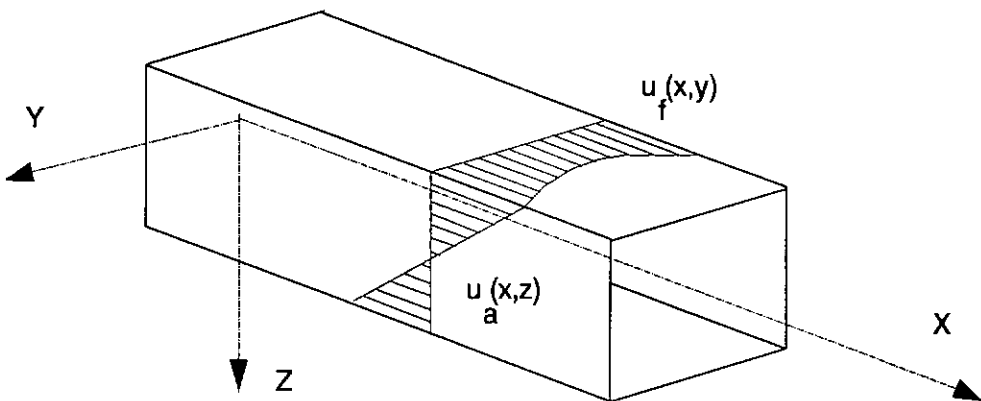


Figura II.5 - Deslocamentos axiais.

Sabendo-se que é esperada uma distribuição não linear de tensões axiais no flange, REISSNER [17] propôs a seguinte aproximação para o deslocamento axial:

$$u_f(x,y) = \pm h \left[(w' - \beta) + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) S \right] \quad (\text{II.3})$$

O termo $h(w' - \beta)$ da expressão (II.3) corresponde ao deslocamento resultante da teoria de vigas de Timoshenko. A parcela restante tem a finalidade de permitir deslocamentos não lineares ("shear lag"), aproximados aqui por uma distribuição parabólica. O campo de deslocamentos assim aproximado é esquematizado na figura II.6.

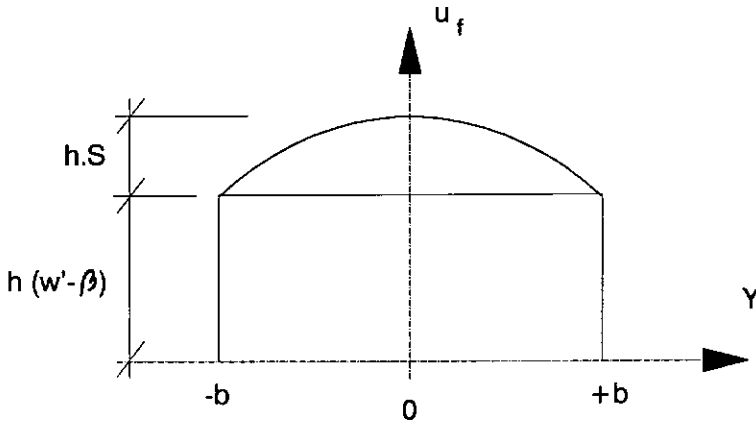


Figura II.6 - Campo de deslocamento axial no flange.

Na expressão (II.3), S tem o objetivo de considerar a variação da intensidade do "shear lag" ao longo do eixo da viga. Sendo assim, S é uma função exclusiva de x .

Nota-se que a compatibilidade de deslocamentos na linha de junção do flange com a alma é satisfeita pelas equações (II.2) e (II.3), para qualquer valor de x .

$$u_f(y=\pm b) = u_a(z=-h) = h (w' - \beta) \quad (\text{II.4.a})$$

$$u_f(y=\pm b) = u_a(z=h) = -h (w' - \beta) \quad (\text{II.4.b})$$

Conhecidos os campos de deslocamentos, a definição das deformações é imediata. Com a equação (II.3), as componentes de deformações do flange podem ser escritas como

$$\epsilon_f = \frac{d(u_f)}{dx} = \pm h \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) S' \right] \quad (\text{II.5})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial(u_f)}{\partial y} + \frac{\partial(v_f)}{\partial x} = \frac{2 h y}{b^2} S \quad (\text{II.6})$$

e com a equação (II.2) as deformações da alma são dadas por

$$\epsilon_a = \frac{d(u_a)}{dx} = -z (w'' - \beta') = -z \Psi' \quad (\text{II.7})$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial(u_a)}{\partial z} + \frac{\partial(w_a)}{\partial x} = - (w' - \beta) + w' = \beta \quad (\text{II.8})$$

II.3 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES

Neste ítem são apresentadas as expressões que definem as distribuições das tensões axiais e tangenciais ao longo da viga. Comparando-se tais expressões com as da teoria clássica de vigas, podem ser notadas as melhorias decorrentes do emprego da teoria de vigas de Timoshenko e da consideração da variação do deslocamento axial nos flanges (efeito de "shear lag"). É também estabelecida a relação direta entre as tensões tangenciais nos flanges e a função S, indicativa da intensidade do "shear lag" ao longo da viga.

II.3.1 - TENSÕES AXIAIS

Assumindo-se um comportamento linear elástico para um material isotrópico, a expressão da tensão axial pode ser escrita da seguinte forma,

$$\sigma = E \varepsilon \quad (\text{II.9})$$

Substituindo-se as expressões de deformação axial do flange (II.5) e da alma (II.7) em (II.9), ficam definidas as respectivas expressões das tensões axiais.

$$\sigma_f = \pm E h \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) S' \right] \quad (\text{II.10})$$

e

$$\sigma_a = -E z (w'' - \beta') = -E z \Psi' \quad (\text{II.11})$$

Seguindo-se as orientações dos tensores de tensão e deformação da Teoria da Elasticidade, os valores positivos correspondem a tração.

Observando a expressão (II.10) e sabendo-se que $w'' - \beta'$ é constante para cada seção transversal, conclui-se que a intensidade da variação da tensão ao longo dos flanges é dada pelo valor da derivada em relação a x da função S na seção. Assim o sinal de S' indica o sentido da curvatura do diagrama de tensões nos flanges para cada seção transversal, e o ponto onde esta derivada se anula indica a seção em que o diagrama de tensões axiais é linear.

Embora a distribuição de tensões axiais nas almas apresente a mesma forma linear da teoria clássica de vigas, as magnitudes de tais tensões não coincidem, devido a consideração da deformação por esforço cortante (teoria de vigas de Timoshenko) e ao efeito de "shear lag" nos flanges. Excepcionalmente porém, nas seções onde a derivada da função S é nula as tensões axiais nos flanges e nas almas são idênticas àquelas calculadas segundo a teoria clássica.

A figura II.7 apresenta os diagramas de tensões axiais em três seções caracterizadas pelo valor da derivada da função S . As tensões segundo a teoria clássica de vigas são apresentadas em tracejado, notando-se que para $S'=0$ existe uma

coincidência da distribuição.

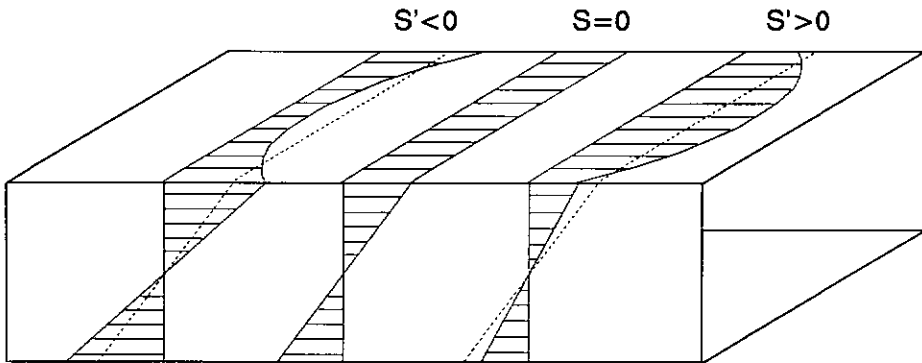


Figura II.7 - Diagramas de tensões axiais

A forma mais intuitiva de distribuição das tensões axiais nos flanges é aquela correspondente a $S' < 0$, sendo esta invariavelmente apresentada na literatura quando o fenômeno do "shear lag" é definido. Porém para certa combinação de condições de contorno e carregamento pode surgir a distribuição correspondente a $S' > 0$ em certo trecho da viga. Este fato foi ressaltado por FOUTCH e CHANG [18], que o denominaram de anomalia ("shear lag anomaly") justamente por não coincidir com o comportamento esperado.

É necessário ressaltar algumas particularidades a respeito do comportamento das funções S e S' , associadas respectivamente aos deslocamentos e tensões axiais nos flanges. A figura II.8.a apresenta uma distribuição da função S e a figura II.8.c sua derivada S' . Nestes gráficos podem ser observadas todas as possíveis situações de distribuição de tensões e deslocamentos axiais.

De acordo com o valor de S , estão esquematizadas na figura II.8.b as diversas formas do campo de deslocamentos axiais nos flanges. O ponto A define a reversão do "shear lag", caracterizado pelo valor nulo de S e conseqüente

distribuição constante de deslocamentos.

Na figura II.8.d são apresentados os diagramas de tensão axial nos flanges em função do valor de S' . A partir de $S'=0$ (ponto B), ocorre a inversão de curvatura do diagrama de tensões. Observando a figura II.8 é importante notar que embora interdependentes, as distribuições de deslocamentos e tensões axiais nos flanges se apresentam de forma distinta e principalmente que, a reversão do "shear lag" e a inversão da curvatura do diagrama de tensões são fenômenos independentes.

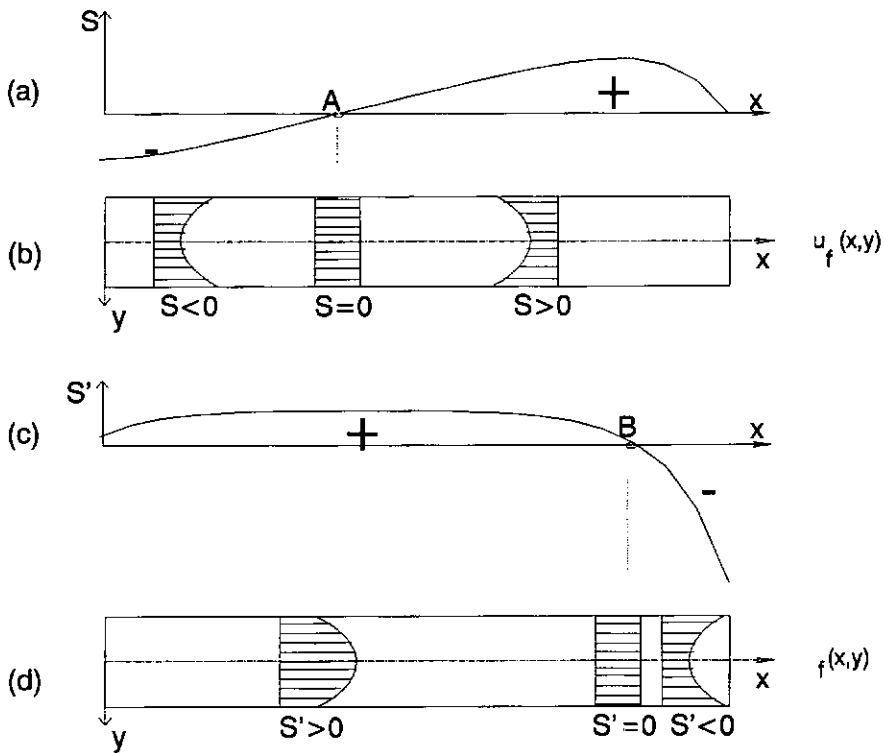


Figura II.8 - (a) Função S (b) deslocamento axial no flange
(c) Função S' (d) tensão axial no flange

Conforme a definição do "shear lag" apresentada no capítulo I, e da própria função S , não é correto o significado que alguns autores [18,19] atribuem ao que é, também por eles,

denominado de reversão do "shear lag". A reversão a qual estes autores se referem é, na verdade, a inversão da curvatura do diagrama de tensões axiais nos flanges (mudança do sinal de S') que, conforme demonstrado, é diferente da situação em que o "shear lag" inverte seu sentido (troca do sinal de S). Esta confusão talvez seja induzida pelo fato de que a maioria dos exemplos apresentados em artigos são para casos de viga engastada e livre, para as quais não ocorre a inversão de sinais da função S .

II.3.2 - TENSÕES TANGENCIAIS

Analogamente ao que foi assumido para as tensões axiais, tem-se para as tensões tangenciais que

$$\tau = G \gamma \quad (\text{II.12})$$

Substituindo as expressões das distorções do flange (II.6) e da alma (II.8) em (II.12) respectivamente, obtemos as seguintes expressões das tensões tangenciais

$$\tau_{xy} = \frac{2 G h y}{b^2} S \quad (\text{II.13})$$

$$\tau_{xz} = G \beta \quad (\text{II.14})$$

Para uma determinada seção, enquanto a tensão tangencial nas almas (τ_{xz}) é constante, nos flanges a variação de τ_{xy} é linear no sentido transversal (direção y), assumindo valores máximos nas extremidades ($y=\pm b$). A variação longitudinal da tensão tangencial nos flanges depende exclusivamente da função S , sendo diretamente proporcional a este valor. Fica assim estabelecida a relação direta entre a função S e a tensão tangencial nos flanges, τ_{xy} .

Deve-se observar que por se tratar de uma viga de seção com paredes delgadas, as tensões cisalhantes transversais às paredes são desprezadas.

A figura II.9 apresenta a distribuição típica de tensões tangenciais e o fluxo de cisalhamento (produto de τ pela espessura) em uma seção transversal.

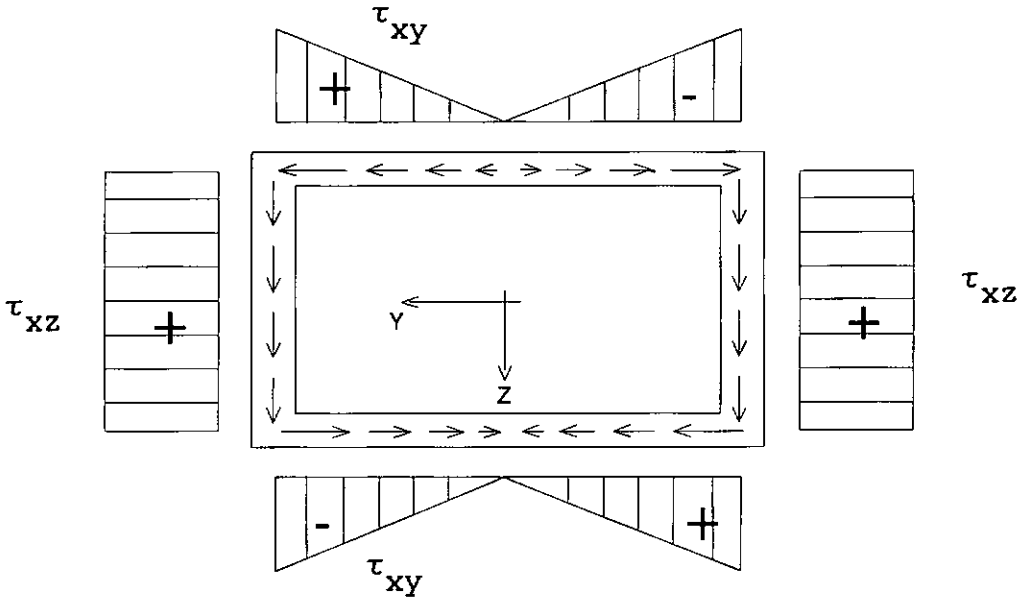


Figura II.9 - Tensões tangenciais e fluxo de cisalhamento

Observando-se a figura II.9 poderia se supor que a formulação aqui desenvolvida gerou uma aproximação inferior para a distribuição das tensões tangenciais nas almas pois, como se sabe, para uma viga com estas características, tal distribuição obedece a seguinte lei parabólica:

$$\tau_{xz} = \frac{V E_y(z)}{I(2 t_a)} \quad (\text{II.15})$$

onde V é o esforço cortante, E_y é o momento estático em relação ao eixo y em função de z e I é o momento de inércia da seção.

Porém a expressão (II.15) é obtida por considerações de equilíbrio de forças em duas seções vizinhas submetidas a momento fletor, e não a partir do campo de deslocamentos como foi deduzida a expressão (II.14).

Deduzindo-se as distorções γ_{xz} a partir do campo de deslocamentos da teoria clássica de vigas ($u = -z w'$) obtém-se

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = w' + \frac{\partial(-z w')}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.16})$$

Logo as tensões tangenciais assim obtidas seriam nulas, o que comprova a superioridade da formulação adotada.

II.4 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Neste ítem são desenvolvidas as expressões da energia de deformação relativa ao modelo estrutural em estudo, supondo-se que este apresente um comportamento característico de uma viga, ou seja, esteja sujeito à flexão e a esforço cortante.

II.4.1 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DAS ALMAS

Para uma placa fina sujeita a carregamento em seu plano médio, a energia de deformação é [1]

$$U = \int_V \left[\int_0^\varepsilon \sigma \, d\varepsilon + \int_0^\gamma \tau \, d\gamma \right] dv \quad (\text{II.17})$$

Substituindo (II.9) e (II.12) em (II.17),

$$U = \int_V \left[\int_0^\varepsilon E \, \varepsilon \, d\varepsilon + \int_0^\gamma G \, \gamma \, d\gamma \right] dv \quad (\text{II.18})$$

e a integração de (II.18) no decorrer das deformações, resulta em

$$U = \int_V \left[\frac{E}{2} \varepsilon^2 + \frac{G}{2} \gamma^2 \right] dv \quad (\text{II.19})$$

Substituindo-se as equações (II.7) (II.8) em (II.19), chega-se a seguinte expressão para a energia de deformação das almas:

$$U_a = 2 \frac{1}{2} \int_0^L \int_{b-\frac{ta}{2}}^{b+\frac{ta}{2}} \int_{-h}^h \left[E z^2 (\Psi')^2 + G \beta^2 \right] dz dy dx \quad (\text{II.20})$$

Agora, deveria ser introduzindo o fator κ para levar em conta a variação da tensão tangencial ao longo da altura. Porém, ficou demonstrado na expressão (II.14), que a tensão cisalhante é constante em toda a alma, o que leva κ a assumir o valor unitário.

Integrando-se ao longo da altura da seção,

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{b-\frac{ta}{2}}^{b+\frac{ta}{2}} \left[E \frac{4}{3} h^3 (\Psi')^2 + 4 G \beta^2 h \right] dy dx \quad (\text{II.21.a})$$

e integrando ao longo da largura da seção, tem-se que,

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E \frac{4}{3} h^3 t_a (\Psi')^2 + 4 G \beta^2 h t_a \right] dx \quad (\text{II.21.b})$$

Substituindo

$$\Psi' = (w' - \beta)' \quad (\text{II.22})$$

em (II.21.b), chega-se a expressão final da energia de deformação das almas:

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E I_a (w'' - \beta')^2 + G \beta^2 A_a \right] dx \quad (\text{II.23})$$

onde

$$I_a = \frac{4}{3} h^3 t_a \quad (\text{II.24.a})$$

é a inércia das almas, e

$$A_a = 4 h t_a \quad (\text{II.24.b})$$

a área das almas.

II.4.2 - ENERGIA DE DEFORMAÇÃO DOS FLANGES

Analogamente ao item anterior, a energia de deformação do flange é obtida substituindo-se o campo de deslocamentos do flange (II.5) e (II.6) na expressão (II.19).

$$U_f = 2 \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b}^b \int_{h-t_f}^{\frac{h+t_f}{2}} \left\{ E h^2 \left[w'' - \beta' + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) s' \right]^2 + \frac{4 G h^2 y^2}{b^4} s^2 \right\} dz dy dx \quad (\text{II.25})$$

Separando por partes para o cálculo das integrais, o primeiro termo da equação (II.25) tem, após desenvolvimento, a seguinte forma,

$$U_{f1} = 2 \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b}^b E h^2 t_f \left[w''^2 + \beta'^2 + \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right)^2 s'^2 - 2 w'' \beta' + 2 w'' \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) s' - 2 \beta' \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) s' \right] dy dx \quad (\text{II.26.a})$$

Integrando (II.26.a) ao longo da largura da seção, tem-se

$$U_{f1} = 2 \frac{1}{2} \int_0^L E h^2 t_f \left\{ y (w''^2 + \beta'^2 - 2 w'' \beta') \Big|_{-b}^b + 2 w'' \left(y - \frac{y^3}{3b^2} \right) s' \Big|_{-b}^b - 2 \beta' \left(y - \frac{y^3}{3b^2} \right) s' \Big|_{-b}^b + \left(y - \frac{2y^3}{3b^2} + \frac{y^5}{5b^4} \right) s'^2 \Big|_{-b}^b \right\} \quad (\text{II.26.b})$$

que resulta em,

$$U_{f1} = 2 \frac{1}{2} \int_0^L E h^2 t_f \left[2 b (w''^2 + \beta'^2 - 2 w'' \beta') + \frac{8}{3} w'' b s' + \frac{8}{3} \beta' b s' + \frac{16}{15} b s'^2 \right] dx \quad (\text{II.26.c})$$

ou ainda numa forma mais compacta, em

$$U_{f1} = \frac{1}{2} \int_0^L E I_f \left[(w'' + \beta')^2 + \frac{4}{3} S' (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S'^2 \right] dx \quad (\text{II.26.d})$$

onde

$$I_f = 4 b t_f h^2 \quad (\text{II.27})$$

é a inércia dos flanges.

Desenvolvendo-se o segundo termo da equação da energia de deformação do flange (II.25), tem-se que:

$$U_{f2} = \int_0^L \int_{-b}^b \left(\frac{4 G h^2 y^2}{b^4} S^2 t_f \right) dy dx \quad (\text{II.28.a})$$

Integrando ao longo da largura da seção e substituindo-se a expressão para I_f , chega-se a

$$U_{f2} = \int_0^L \left(\frac{4 G I_f}{3 b^2} S^2 \right) dx \quad (\text{II.28.b})$$

Somando-se as parcela (II.26.d) e (II.28.b) a energia de deformação do flange é finalmente dada por

$$U_f = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I_f \left[(w'' + \beta')^2 + \frac{4}{3} S' (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S'^2 \right] + \frac{4 G I_f S^2}{3 b^2} \right\} dx \quad (\text{II.29})$$

II.5 - ENERGIA POTENCIAL DAS CARGAS

Para os tipos de carga já definidos no item II.1, os deslocamentos generalizados correspondentes estão ilustrados na figura II.10.

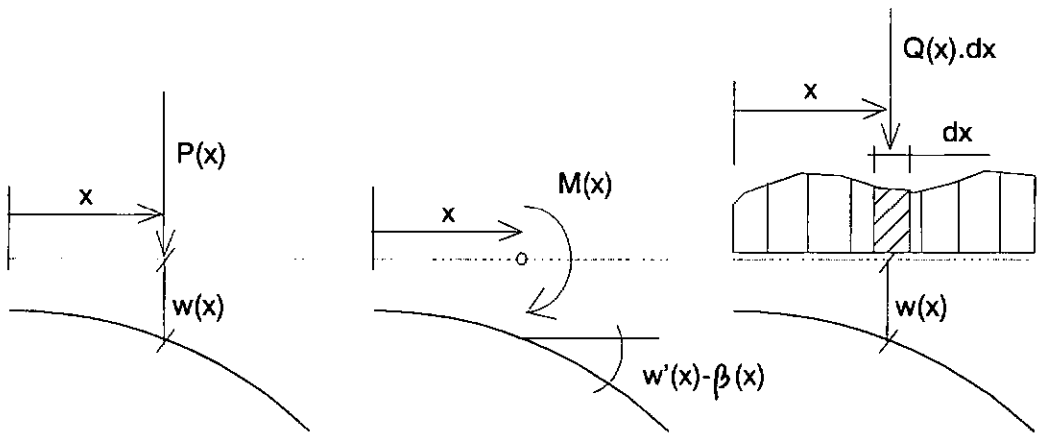


Figura II.10 - tipos de carregamentos e deslocamentos correspondentes

Observando a figura II.10 tem-se que o potencial de cargas será,

$$\Omega = - M(\bar{x}) [w'(\bar{x}) - \beta(\bar{x})] - P(\bar{x}) w(\bar{x}) - \int_0^L Q w dx \quad (\text{II.30})$$

II.6 - FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL

O funcional de energia potencial total é dado pela soma das parcelas de energia de deformação elástica das almas e dos flanges e da energia potencial das cargas.

$$V = U_f + U_a + \Omega \quad (\text{II.31})$$

que com (II.23), (II.29), e (II.30) tem a seguinte forma explícita,

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I_f \left[(w'' - \beta')^2 + \frac{4}{3} S' (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S'^2 \right] \right. \\
 \left. + \frac{4 G I_f S^2}{3 b^2} + \left[E I_a (w'' - \beta')^2 + G \beta^2 A_a \right] \right. \\
 \left. - Q w \right\} dx - M(\bar{x}) [w'(\bar{x}) - \beta(\bar{x})] - P(\bar{x}) w(\bar{x})
 \end{aligned} \tag{II.32}$$

Sendo

$$I = I_a + I_f \tag{II.33}$$

a inércia da seção transversal, a energia potencial total se torna então:

$$\begin{aligned}
 V = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I (w'' - \beta')^2 + G A_a \beta^2 \right. \\
 \left. + E I_f \left[\frac{4}{3} S' (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S'^2 + \frac{4 G S^2}{3 E b^2} \right] - Q w \right\} dx \\
 - M(\bar{x}) [w'(\bar{x}) - \beta(\bar{x})] - P(\bar{x}) w(\bar{x})
 \end{aligned} \tag{II.34}$$

Vale observar que, se a energia de deformação devido ao cisalhamento fosse deduzida para a seção transversal como um todo [18], o segundo termo da Energia Potencial Total seria

$$\kappa G A \beta^2 \tag{II.35}$$

onde A é a área da seção total da seção transversal e κ poderia ser tomado como A_a/A para este tipo de seção [1], resultando portanto na mesma expressão.

CAPÍTULO III

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Neste capítulo são definidas as equações de equilíbrio e as equações correspondentes às condições de contorno. Para isto, o princípio de estacionaridade é aplicado, estudando-se a variação total do funcional de energia.

III.1 - EXTREMIZAÇÃO DO FUNCIONAL DE ENERGIA

Utilizando-se o procedimento convencional do cálculo variacional, será estudado o efeito de pequenas variações dos campos de deslocamentos. Tais variações são admitidas infinitesimais e compatíveis com as vinculações. Assim, a energia potencial total (E.P.T.) em um ponto vizinho a $V(\beta, S, w)$ será dada a partir da expressão (II.34) como:

$$\begin{aligned}
V(\beta+\delta\beta, S+\delta S, w+\delta w) &= V(\beta, S, w) + \Delta V = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I ((w+\delta w)'' - (\beta+\delta\beta)')^2 + G A_a (\beta+\delta\beta)^2 \right. \\
&\quad + E I_f \left[\frac{4}{3} (S+\delta S)' ((w+\delta w)'' - (\beta+\delta\beta)') \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{8}{15} (S+\delta S)'^2 + \frac{4 G (S+\delta S)^2}{3 E b^2} \right] - Q (w+\delta w) \right\} dx \\
&- M(\bar{x}) \left[(w'(\bar{x}) + \delta w'(\bar{x})) - (\beta(\bar{x}) + \delta\beta(\bar{x})) \right] - P(\bar{x}) (w(\bar{x}) + \delta w(\bar{x})) \\
&\hspace{15em} \text{(III.1)}
\end{aligned}$$

onde ΔV corresponde à variação total do funcional de energia.

Desenvolvendo-se separadamente os termos do integrando de (III.1), tem-se:

$$\begin{aligned}
((w+\delta w)'' - (\beta+\delta\beta)')^2 &= (w'' - \beta')^2 + 2(w'' - \beta')(\delta w'' - \delta\beta') \\
&\quad + (\delta w'' - \delta\beta')^2 \hspace{10em} \text{(III.2.a)}
\end{aligned}$$

$$(\beta+\delta\beta)^2 = \beta^2 + 2\beta\delta\beta + \delta\beta^2 \hspace{10em} \text{(III.2.b)}$$

$$\begin{aligned}
(S+\delta S)' ((w+\delta w)'' - (\beta+\delta\beta)') &= (w'' - \beta')S' + (\delta w'' - \delta\beta')S' \\
&\quad + (w'' - \beta')\delta S' + (\delta w'' - \delta\beta')\delta S' \\
&\hspace{15em} \text{(III.2.c)}
\end{aligned}$$

$$(S+\delta S)'^2 = S'^2 + 2S'\delta S' + \delta S'^2 \hspace{10em} \text{(III.2.d)}$$

$$(S+\delta S)^2 = S^2 + 2S\delta S + \delta S^2 \hspace{10em} \text{(III.2.e)}$$

Com as expressões (III.2), pode-se escrever (III.1) como a soma de três parcelas, correspondentes respectivamente aos termos independentes, lineares (1ª ordem) e quadráticos (2ª ordem), com respeito as variações.

$$V(\beta+\delta\beta, S+\delta S, w+\delta w) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I (w'' - \beta')^2 + G A_a \beta^2 \right. \\ & \left. + E I_f \left[\frac{4}{3} S' (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S'^2 + \frac{4 G S^2}{3 E b^2} \right] - Q w \right\} dx \\ & - M(\bar{x}) (w'(\bar{x}) - \beta(\bar{x})) - P(\bar{x}) w(\bar{x}) \end{aligned}} \quad V$$

$$\boxed{\begin{aligned} & + \int_0^L \left\{ E I (w'' - \beta') (\delta w'' - \delta \beta') + G A_a \beta \delta \beta \right. \\ & \quad + E I_f \left[\frac{2}{3} (\delta w'' - \delta \beta') S' + \frac{2}{3} (w'' - \beta') \delta S \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{8}{15} S' \delta S' + \frac{4 G S \delta S}{3 E b^2} \right] - Q \delta w \right\} dx \\ & - M(\bar{x}) (\delta w'(\bar{x}) - \delta \beta(\bar{x})) - P(\bar{x}) \delta w(\bar{x}) \end{aligned}} \quad \delta V$$

$$\boxed{\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I (\delta w'' - \delta \beta')^2 + G A_a \delta \beta^2 \right. \\ & \left. + E I_f \left[\frac{4}{3} \delta S' (\delta w'' - \delta \beta') + \frac{8}{15} \delta S'^2 + \frac{4 G \delta S^2}{3 E b^2} \right] \right\} dx \end{aligned}} \quad \delta^2 V$$

(III.3)

A variação total, ΔV , é então composta por duas parcelas correspondentes à primeira e segunda variações do funcional, ou seja:

$$V(\beta+\delta\beta, S+\delta S, w+\delta w) - V(\beta, S, w) = \Delta V = \delta V + \delta^2 V \quad (III.4)$$

Lembrando que as variações são infinitesimais, a condição de estacionaridade para o funcional é definida por:

$$\delta V = 0 \quad (III.5)$$

A expressão de δV será agora desenvolvida, aplicando-se integração por partes nos termos que apresentam diferenciais das variações. Este procedimento visa reduzir a ordem da diferenciação de tais termos, até que sejam obtidas as próprias variações lineares. Como consequência deste processo, as diferenciais das funções incógnitas sofrerão aumento de sua ordem.

Assim, integrando por partes duas vezes o primeiro termo do integrando de δV em (III.3), tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left[E I (w'' - \beta') \delta w'' \right] dx = \\
 & = E I (w'' - \beta') \delta w' \Big|_0^L - \int_0^L \left[E I (w'' - \beta')' \delta w' \right] dx = \\
 & = E I (w'' - \beta') \delta w' \Big|_0^L - E I (w'' - \beta')' \delta w \Big|_0^L \\
 & + \int_0^L \left[E I (w'' - \beta')'' \delta w \right] dx \qquad \qquad \qquad \text{(III.6.a)}
 \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo procedimento para os demais termos,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left[E I (w'' - \beta') \delta \beta' \right] dx = \\
 & = E I (w'' - \beta') \delta \beta \Big|_0^L - \int_0^L \left[E I (w'' - \beta')' \delta \beta \right] dx \qquad \text{(III.6.b)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \frac{2}{3} E I_f \delta w'' S' dx = \\
 & = \frac{2}{3} E I_f S' \delta w' \Big|_0^L - \frac{2}{3} E I_f S'' \delta w \Big|_0^L + \int_0^L \frac{2}{3} E I_f S''' \delta w dx \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{(III.6.c)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \frac{2}{3} E I_f \delta \beta' S' dx = \\
 & = \frac{2}{3} E I_f S' \delta \beta \Big|_0^L - \int_0^L \frac{2}{3} E I_f S'' \delta \beta dx \qquad \qquad \qquad \text{(III.6.d)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta') \delta S' dx = \\
& = \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta') \delta S \Big|_0^L - \int_0^L \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta')' \delta S dx
\end{aligned} \tag{III.6.e}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \frac{8}{15} E I_f S' \delta S' dx = \\
& = \frac{8}{15} E I_f S' \delta S \Big|_0^L - \int_0^L \frac{8}{15} E I_f S'' \delta S dx
\end{aligned} \tag{III.6.f}$$

Observando as expressões (III.6), pode-se reescrever δV na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta V = & \int_0^L \left(E I (w'' - \beta')'' \delta w + E I (w'' - \beta')' \delta \beta \right. \\
& + G A_a \beta \delta \beta + \frac{2}{3} E I_f S''' \delta w - \frac{2}{3} E I_f S'' \delta \beta \\
& - \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta')' \delta S - \frac{8}{15} E I_f S'' \delta S + \frac{4 G S \delta S}{3 E b^2} \\
& \left. - Q \delta w \right) dx \\
& + E I (w'' - \beta') \delta w' \Big|_0^L - E I (w'' - \beta')' \delta w \Big|_0^L \\
& - E I (w'' - \beta') \delta \beta \Big|_0^L + \frac{2}{3} E I_f S' \delta w' \Big|_0^L - \frac{2}{3} E I_f S'' \delta w \Big|_0^L \\
& - \frac{2}{3} E I_f S' \delta \beta \Big|_0^L + \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta') \delta S \Big|_0^L - \frac{8}{15} E I_f S' \delta S \Big|_0^L \\
& - P(\bar{x}) \delta w(\bar{x}) - M(\bar{x}) [\delta w'(\bar{x}) - \delta \beta(\bar{x})]
\end{aligned} \tag{III.7}$$

Nota-se que o integrando da expressão (III.7) não apresenta diferenciais das variações, as quais só aparecem nos valores de contorno. Esta característica, resultante do processo de integração por partes, permite a obtenção direta das equações de equilíbrio.

III.2 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Dispondo-se da expressão da 1ª variação do funcional de energia, já desenvolvida adequadamente eliminando-se as diferenciais das variações, basta aplicar a condição de estacionaridade (III.5) para obtenção das equações de equilíbrio e condições de contorno. Inicialmente porém, a expressão (III.7) será reescrita, agrupando-se os termos em função das variações.

$$\begin{aligned}
 \delta V = & \int_0^L \left(E I (w'' - \beta')'' + \frac{2}{3} E I_f S'''' - Q \right) \delta w \, dx \\
 & + \int_0^L \left(E I (w'' - \beta')' + G A_a \beta + \frac{2}{3} E I_f S'' \right) \delta \beta \, dx \\
 & + \int_0^L \left(-\frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta')' + \frac{4 G I_f S}{3 b^2} - \frac{8}{15} E I_f S' \right) \delta S \, dx \\
 & + \left[E I (w'' - \beta') + \frac{2}{3} E I_f S' \right] \delta [w' - \beta] \Big|_0^L \\
 & - \left[E I (w'''' - \beta'') + \frac{2}{3} E I_f S'' \right] \delta w \Big|_0^L \\
 & + \left[\frac{8}{15} E I_f S' + \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta') \right] \delta S \Big|_0^L \\
 & - P(\bar{x}) \delta w(\bar{x}) - M(\bar{x}) [\delta w'(\bar{x}) - \delta \beta(\bar{x})] = 0 \quad (III.8)
 \end{aligned}$$

Notando-se que cada termo da expressão (III.8) é formado por um produto de dois fatores, conclui-se que cada expressão se anulará quando um de seus fatores for igual a zero. Portanto para variações quaisquer não nulas ao longo da viga, tem-se, para cada integrando, que:

para $\delta w \neq 0$

$$E I (w'' - \beta')'' + \frac{2}{3} E I_f S'''' - Q = 0 \quad (III.9)$$

para $\delta \beta \neq 0$

$$E I (w'' - \beta')' + G A_a \beta + \frac{2}{3} E I_f S'' = 0 \quad (III.10)$$

para $\delta S \neq 0$

$$-\frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta')' + \frac{4 G I_f S}{3 b^2} - \frac{8}{15} E I_f S'' = 0 \quad (\text{III.11})$$

ou melhor,

$$\frac{2}{3} E (w'' - \beta')' - \frac{4 G S}{3 b^2} + \frac{8}{15} E S'' = 0 \quad (\text{III.12})$$

As expressões (III.9), (III.10) e (III.12) constituem o sistema de equações de equilíbrio.

III.3 - EQUAÇÕES DE CONTORNO

Deve-se notar que a consideração de cargas e momentos concentrados (P e M) em pontos \bar{x} diferentes dos pontos extremos ($\bar{x}=0$ e $\bar{x}=L$) dificultaria, ou mesmo impossibilitaria a obtenção de uma solução fechada do problema. Com base nesta observação, a partir deste ponto, as cargas P e M serão admitidas aplicadas somente no contorno. Assim, equações de contorno oriundas de (III.8) são escritas como:

$$\left(E I (w'' - \beta') + \frac{2}{3} E I_f S' - M \right) \delta[w' - \beta] \Big|_0^L = 0 \quad (\text{III.13})$$

$$\left(- E I (w''' - \beta'') - \frac{2}{3} E I_f S'' - P \right) \delta w \Big|_0^L = 0 \quad (\text{III.14})$$

$$\left(\frac{8}{15} E I_f S' + \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta') \right) \delta S \Big|_0^L = 0 \quad (\text{III.15})$$

Para que (III.13) seja satisfeita, uma das duas seguintes condições de contorno deve ser utilizada nos extremos:

$$\delta[w' - \beta] = 0 \quad (\text{III.16})$$

ou

$$-E I (w'' - \beta') - \frac{2}{3} E I_f S' - M = 0 \quad (\text{III.17})$$

Para que a primeira variação de $(w' - \beta)$ seja nula, basta que seu valor seja uma constante. Logo a condição (III.16) se resume em definir esta rotação, podendo então ser reescrita na seguinte forma:

$$w' - \beta = \tilde{\Psi} \quad (\text{III.18})$$

onde o símbolo \sim passa a significar um valor prescrito em um dos extremos.

Analogamente, a partir da equação (III.14) obtém-se os seguintes pares de condições de contorno:

$$w = \tilde{w} \quad (\text{III.19})$$

ou

$$-E I (w'''' - \beta'') - \frac{2}{3} E I_f S'' - P = 0 \quad (\text{III.20})$$

A partir da equação (III.15), tem-se:

$$s = \tilde{s} \quad (\text{III.21})$$

ou

$$\frac{8}{15} S' + \frac{2}{3} (w'' - \beta') = 0 \quad (\text{III.22})$$

A definição de um valor prescrito do tipo (III.21), estaria associada a um campo de deslocamentos axiais nos flanges variando parabolicamente. Esta situação não será considerada, portanto \tilde{s} será sempre nulo quando esta condição for aplicada.

As expressões (III.17), (III.18), (III.19), (III.20), (III.21) e (III.22) constituem as condições de contorno do problema. As condições (III.17), (III.20), (III.22), são as chamadas condições de contorno de força (ou naturais) e estão associadas às forças aplicadas nos extremos. As condições (III.18), (III.19) e (III.21) são as condições de contorno geométricas (ou essenciais) e estão associadas à geometria

deformada (vinculações). É importante observar que as condições de contorno geométricas correspondem a derivadas de ordem mais baixa que as condições de força, devendo portanto ter prioridade sobre estas últimas. As condições de contorno de força só devem então ser aplicadas quando não for possível a definição das condições geométricas.

Observa-se que na condição de contorno (III.22) não existe nenhum termo que leve em consideração a aplicação de um carregamento no extremo. Isto se deve ao fato de que nesta formulação não é levado em conta o carregamento axial, que seria a força associada a esta condição de contorno.

FOUTCH e CHANG [18], seguindo procedimento análogo, obtiveram as mesmas equações de equilíbrio e contorno, resolvendo-as através de integração numérica.

CAPÍTULO IV

SOLUÇÕES DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA UMA VIGA
ENGASTADA E LIVRE

Apresenta-se neste capítulo a solução fechada do sistema de equações de equilíbrio para as condições de contorno de uma viga engastada e livre. As funções solução são obtidas através de álgebra simbólica computacional [22].

IV.1 - SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Inicialmente são feitas operações algébricas nas equações de equilíbrio, compostas pelas expressões (III.9), (III.10), (III.12) para que o sistema possa ser resolvido analiticamente. Neste ítem, estas operações são efetuadas até o ponto em que seja necessária a definição do carregamento, obtendo-se portanto, as equações gerais para o caso de uma viga engastada e livre.

Diferenciando-se a expressão (III.10) em relação a x , e subtraindo-a de (III.9), obtém-se uma equação em termos de uma única função incógnita.

$$G A_a \beta' = - Q(x) \quad (IV.1)$$

a qual pode ser obtida por integração direta,

$$\beta = - \int \frac{Q(x)}{G A_a} dx \quad (\text{IV.2})$$

A expressão de β depende portanto da função de carga $Q(x)$ ao longo da viga. Para a viga engastada e livre são adotados três tipos de carregamentos que serão analisados nos itens subseqüentes, fornecendo a expressão explícita de β para cada caso.

A seguir são efetuadas operações algébricas com as equações de equilíbrio que fornecem a expressão de S .

Multiplicando a expressão (III.12) por (3I)/2 e subtraindo de (III.10), chega-se a :

$$\left(\frac{4}{5} E I - \frac{2}{3} E I_f \right) S''' - \frac{2 G I S}{b^2} = G A_a \beta \quad (\text{IV.3})$$

que expressa S como função de β , já conhecido.

O novo sistema fica então formado pelas equações (IV.1), (IV.3) e (III.12).

Substituindo-se (IV.2) em (IV.3), chega-se a seguinte equação diferencial:

$$\left(\frac{4}{5} E I - \frac{2}{3} E I_f \right) S''' - \frac{2 G I S}{b^2} = - \int \frac{Q(x)}{G A_a} dx \quad (\text{IV.4})$$

que resolvida, fornecerá a expressão de S .

Chamando,

$$K_1 = \frac{4}{5} E I - \frac{2}{3} E I_f \quad (\text{IV.5})$$

$$K_2 = \frac{2 G I}{b^2} \quad (\text{IV.6})$$

a equação diferencial fica:

$$K_1 S'' - K_2 S = - \int \frac{Q(x)}{G A_a} dx \quad (\text{IV.7})$$

A equação diferencial (IV.7) também é dependente da integração da função de carga, permitindo no momento, somente a solução homogênea da equação, ficando a solução particular para ser resolvida nos itens correspondentes a cada carregamento.

A forma da solução da equação homogênea associada é :

$$S_h = e^{rx} \quad (\text{IV.8.a})$$

que tem como derivadas

$$S'_h = r e^{rx} \quad (\text{IV.8.b})$$

$$S''_h = r^2 e^{rx} \quad (\text{IV.8.c})$$

Com as equações (IV.8) tem-se a equação característica:

$$K_1 r^2 - K_2 = 0 \quad (\text{IV.9})$$

que resolvida fornece

$$r^2 = \frac{K_2}{K_1} \quad (\text{IV.10.a})$$

$$r = \pm \xi \quad (\text{IV.10.b})$$

onde

$$\xi = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \quad (\text{IV.11})$$

Assim, a solução da equação homogênea é:

$$S_h = C_2 e^{\xi x} + C_3 e^{-\xi x} \quad (\text{IV.12})$$

Obtidas as expressões de β e S para cada caso de carga,

pode-se chegar a expressão de w a partir de (III.12), que rearrumada fornece:

$$w'''' = \beta'' - \frac{4}{5} S'' + \frac{2 G S}{E b^2} \quad (\text{IV.13})$$

Substituindo as derivadas em relação a x de β e S em (IV.13) e integrando a expressão sucessivamente, obtém-se a expressão de w , para cada caso de carga.

IV.2 - DEFINIÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

No extremo engastado deve-se empregar as condições de contorno geométricas, correspondentes aos seguintes deslocamentos impedidos em $x=0$.

$$\text{- rotação nula} \quad w' - \beta = 0 \quad (\text{IV.14})$$

$$\text{- deslocamento transversal nulo} \quad w = 0 \quad (\text{IV.15})$$

$$\text{- deslocamento longitudinal nulo, impedindo o "shear lag"} \quad S = 0 \quad (\text{IV.16})$$

No bordo livre da viga não se aplicam as condições de contorno geométricas pois a configuração deformada é desconhecida. São aplicadas então as condições de contorno de força em $x = L$. Com (III.17), (III.20) e (III.22) definem-se as seguintes condições de contorno:

$$E I (w'' - \beta') + \frac{2}{3} E I_f S' - M(L) = 0 \quad (\text{IV.17})$$

associada ao momento eventualmente aplicado em L ,

$$-E I (w'''' - \beta''') - \frac{2}{3} E I_f S'' - P(L) = 0 \quad (\text{IV.18})$$

associada à carga eventualmente aplicada em L .

$$\frac{8}{15} E I_f S' + \frac{2}{3} E I_f (w'' - \beta') = 0 \quad (\text{IV.19})$$

associada a carga axial eventualmente aplicada em L

A seguir as equações (IV.2), (IV.4) e (IV.13) são integradas para três casos de carga.

IV.3 - CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDO

Para este caso a carga $Q(x)$ distribuída é constante e igual a q , como mostra a figura IV.1.

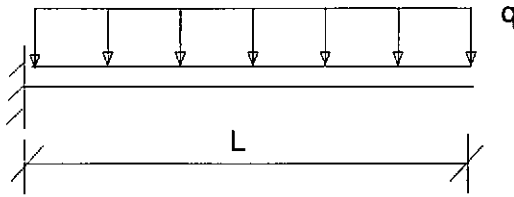


Figura IV.1 - Viga engastada e livre com carga uniforme

De (IV.2) obtém-se diretamente a expressão de β .

$$\beta = - \int \frac{q}{G A_a} dx = - \frac{q x}{G A_a} + \frac{C_1}{G A_a} \quad (\text{IV.20})$$

Para o caso de carga distribuída constante, a expressão (IV.4) fica:

$$\left(\frac{4}{5} E I - \frac{2}{3} E I_f \right) S'' - \frac{2 G I S}{b^2} = - q x + C_1 \quad (\text{IV.21})$$

Da mesma forma a expressão (IV.7) se torna

$$K_1 S'' - K_2 S = - q x + C_1 \quad (\text{IV.22})$$

De posse da solução da equação homogênea (IV.12), resta obter a solução particular da equação diferencial (IV.22).

A solução particular correspondente ao termo independente é do tipo:

$$S_p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad (\text{IV.23.a})$$

cujas derivadas são:

$$S'_p = a_1 + 2 a_2 x \quad (\text{IV.23.b})$$

$$S''_p = 2 a_2 \quad (\text{IV.23.c})$$

as quais substituídas na equação (IV.22) fornecem

$$K_1 (2 a_2) - K_2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = -q x + C_1 \quad (\text{IV.24})$$

obtendo-se assim

$$a_0 = - \frac{C_1}{K_2} \quad (\text{IV.25.a})$$

$$a_1 = \frac{q}{K_2} \quad (\text{IV.25.b})$$

$$a_2 = 0 \quad (\text{IV.25.c})$$

A solução particular da equação (IV.22) é, então,

$$S_p = \frac{q x}{K_2} - \frac{C_1}{K_2} \quad (\text{IV.26})$$

e a solução da equação diferencial (IV.7) é, portanto,

$$S = C_2 e^{\xi x} + C_3 e^{-\xi x} + \frac{b^2}{2 G I} (q x - C_1) \quad (\text{IV.27})$$

Substituindo-se as derivadas em relação a x das expressões de β , (IV.20) e S , (IV.27) em (IV.13), e integrando sucessivamente, a expressão de w pode ser obtida.

$$w'''' = 2 \left(C_2 e^{\xi x} + C_3 e^{-\xi x} \right) \left(\frac{G}{E b^2} - \frac{2}{5} \xi^2 \right) + \frac{2 G}{E K_2 b^2} (q x - C_1) \quad (\text{IV.28})$$

$$w''' = 2 \frac{1}{\xi} \left(C_2 e^{\xi x} - C_3 e^{-\xi x} \right) \left(\frac{G}{E b^2} - \frac{2}{5} \xi^2 \right) + \frac{G}{E K_2 b^2} (q x^2 - 2 C_1 x) + C_4 \quad (\text{IV.29})$$

$$w' = - \frac{2 I_f}{3 I} \left(C_2 e^{\xi x} + C_3 e^{-\xi x} \right) + \frac{G}{E K_2 b^2} \left(\frac{q x^3}{3} - C_1 x^2 \right) + C_4 x + C_5 \quad (\text{IV.30})$$

integrando novamente e substituindo K_2 (IV.6),

$$w = - \frac{2 I_f}{3 I \xi} \left(C_2 e^{\xi x} - C_3 e^{-\xi x} \right) + \frac{1}{2 E I} \left(\frac{q x^4}{12} - \frac{C_1 x^3}{3} \right) + \frac{C_4 x^2}{2} + C_5 x + C_6 \quad (\text{IV.31})$$

Com as expressões de S , β e w , as condições de contorno do problema, dadas no ítem IV.2, são aplicadas para que as constantes de integração C_1 a C_6 , sejam obtidas.

Para as condições de contorno em $x=0$, tem-se da expressão (IV.14),

$$- \frac{C_1}{G A_a} - \frac{2 I_f}{3 I} (C_2 + C_3) + C_5 = 0 \quad (\text{IV.32})$$

Da expressão (IV.15) tem-se a seguinte equação:

$$- \frac{2 I_f}{3 I \xi} (C_2 - C_3) + C_6 = 0 \quad (\text{IV.33})$$

Da mesma forma da expressão (IV.16), tem-se

$$- \frac{C_1 b^2}{2 G I} + C_2 + C_3 = 0 \quad (\text{IV.34})$$

Da equação (IV.17), para $M(L)=0$, e dividindo a equação por E , tem-se para $x = L$,

$$I w'' - I \beta' + \frac{2}{3} I_f S' = 0 \quad (\text{IV.35})$$

que fornece

$$- C_1 L + C_4 E I + q \left(\frac{E I}{G A_a} + \frac{L^2}{2} + \frac{E I_f b^2}{3 G I} \right) \quad (\text{IV.36})$$

Sabendo que para este caso estudado não foi considerada carga concentrada em $x=L$ e dividindo a expressão (IV.18) por E , tem-se,

$$I w''' - I \beta'' + \frac{2}{3} I_f S'' = 0 \quad (\text{IV.37})$$

que fornece

$$C_1 = L q \quad (\text{IV.38})$$

Dividindo a expressão (IV.19) por $E I_f$, chega-se à última condição de contorno,

$$\frac{2}{3} (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S' = 0 \quad (\text{IV.39})$$

donde se obtém

$$4 \xi \left(\frac{I_f}{9 I} - \frac{2}{15} \right) \left(-C_2 e^{\xi L} + C_3 e^{-\xi L} \right) - \frac{2 L C_1}{3 E I} + \frac{2 C_4}{3} + \frac{q}{3} \left(\frac{4 b^2}{15 G I} + \frac{L^2}{E I} + \frac{2}{A_a G} \right) = 0 \quad (\text{IV.40})$$

Substituindo-se C_1 nas condições de contorno (IV.32),

(IV.34), (IV.36), (IV.40), forma-se um sistema de equações algébricas lineares, cujas incógnitas são as constantes C_2 a C_6 .

O sistema de equações a ser resolvido pode ser representado na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_1 & 0 & 1 & 0 \\ -F_2 & F_2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI & 0 & 0 \\ F_3 & F_4 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_5 \\ 0 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.41.a})$$

ou escrita na forma compacta,

$$\underline{F} \cdot \underline{C} = \underline{B} \quad (\text{IV.41.b})$$

onde F_1 a F_8 são dadas por

$$F_1 = - \frac{2 I_f}{3 I} \quad (\text{IV.42.a})$$

$$F_2 = \frac{2 I_f}{3 I \xi} \quad (\text{IV.42.b})$$

$$F_3 = - 4 \xi \left(\frac{I_f}{9 I} - \frac{2}{15} \right) e^{\xi L} \quad (\text{IV.42.c})$$

$$F_4 = 4 \xi \left(\frac{I_f}{9 I} - \frac{2}{15} \right) e^{-\xi L} \quad (\text{IV.42.d})$$

$$F_5 = \frac{q L}{G A_a} \quad (\text{IV.42.e})$$

$$F_6 = \frac{q L b^2}{2 G I} \quad (\text{IV.42.f})$$

$$F_7 = -q \left(\frac{E I}{G A_a} - \frac{L^2}{2} + \frac{E I_f b^2}{3 G I} \right) \quad (\text{IV.42.g})$$

$$F_8 = -\frac{q}{3} \left(-\frac{L^2}{E I} + \frac{4 b^2}{15 G I} + \frac{2}{A_a G} \right) \quad (\text{IV.42.h})$$

O sistema é resolvido invertendo-se a matriz F , e multiplicando-a pela matriz B , com auxílio do programa de álgebra simbólica DERIVE [22]; obtendo-se,

$$C_2 = \frac{q b^2 (L \xi e^{-\xi L} - 1)}{4 G I \xi \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.43.a})$$

$$C_3 = \frac{q b^2 (L \xi e^{\xi L} + 1)}{4 G I \xi \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.43.b})$$

$$C_4 = -q \left(\frac{I_f b^2}{3 G I^2} - \frac{L^2}{2 E I} + \frac{1}{A_a G} \right) \quad (\text{IV.43.c})$$

$$C_5 = q \left(\frac{I_f b^2 L}{3 G I^2} + \frac{L}{A_a G} \right) \quad (\text{IV.43.d})$$

$$C_6 = \frac{-q b^2 I_f (L \xi \sinh(\xi L) + 1)}{3 G I^2 \xi^2 \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.43.e})$$

Finalmente substituindo as constantes C_1 a C_6 nas expressões (IV.20), (IV.27) e (IV.31), obtem-se a solução fechada para uma viga engastada e livre submetida a um carregamento uniformemente distribuído..

$$\beta = \frac{q}{G A_a} (L - x) \quad (\text{IV.44})$$

$$S = \frac{q b^2}{2 G I} \left(\frac{L \xi \cosh(\xi L - \xi x) - \sinh(\xi x)}{\xi \cosh(\xi L)} - L + x \right) \quad (\text{IV.45})$$

$$\begin{aligned}
 w = & - \frac{q b^2 I_f \left\{ L \xi \left[\sinh(\xi L) - \sinh(\xi L - \xi x) \right] - \cosh(\xi x) + 1 \right\}}{3 G I^2 \xi^2 \cosh(\xi L)} \\
 & - q \left(\frac{1}{2 G A_a} + \frac{I_f b^2}{6 G I^2} \right) (x^2 - 2 L x) \\
 & + \frac{q x^2 (x^2 - 4 L x + 6 L^2)}{24 E I} \tag{IV.46}
 \end{aligned}$$

O primeiro termo da expressão do deslocamento transversal (IV.46), corresponde a parcela devida ao efeito de "shear lag". O segundo termo decorre da consideração da deformação por esforço cortante, conforme a teoria de vigas de Timoshenko. O terceiro termo é a solução da equação diferencial de quarta ordem $w^{IV} = q/EI$, deduzida a partir da hipótese de seções planas (teoria de Euler-Bernoulli).

Uma vez conhecidas as expressões de w , β e S , nota-se que podem ser facilmente obtidas as expressões dos deslocamentos, deformações, rotações e tensões.

Na análise do efeito de "shear lag", e no dimensionamento prático de vigas, a tensão axial no flange é de grande importância, sendo portanto sua expressão dada a seguir. Substituindo as derivadas das expressões (IV.44), (IV.45) e (IV.46) em (II.10), obtém-se,

$$\begin{aligned}
 \sigma_f = & \pm E h \left\{ \frac{q}{2 E I} (x - L)^2 + \right. \\
 & \left. \left[\frac{2 I_f}{3 I} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{q b^2}{2 G I} \left(\frac{\xi L \sinh(\xi L - \xi x) + \cosh(\xi x)}{2 \xi \cosh(\xi L)} - 1 \right) \right] \right\} \tag{IV.47}
 \end{aligned}$$

A derivada em relação a x da função S também é de interesse pois, como foi demonstrado, seu valor está associado ao sentido da curvatura do diagrama de tensões axiais nos

flanges. Sua expressão neste caso é dada por

$$s' = - \frac{q b^2}{2 G I} \left(\frac{\xi L \sinh(\xi L - \xi x) + \cosh(\xi x)}{2 G I \cosh(\xi L)} - 1 \right) \quad (\text{IV.48})$$

IV.4 - CARREGAMENTO DISTRIBUIDO LINEARMENTE CRESCENTE

Neste caso, a carga é distribuída linearmente, conforme ilustrado na figura IV.2. A função que expressa este carregamento é,

$$Q(x) = \frac{q x}{L} \quad (\text{IV.49})$$

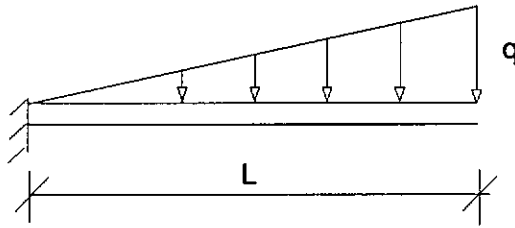


Figura IV.2 - Viga engastada e livre com carga linearmente crescente

Substituindo-se a expressão (IV.49) em (IV.2) tem-se diretamente a expressão de β .

$$\beta = - \int \frac{q x}{G A_a L} dx = - \frac{q x^2}{2 G A_a L} + \frac{C_1}{G A_a L} \quad (\text{IV.50})$$

A equação diferencial (IV.4), cuja solução fornece a expressão de $S(x)$, é mostrada a seguir para o presente caso de carga.

$$\left(\frac{4}{5} E I - \frac{2}{3} E I_f \right) S'' - \frac{2 G I S}{b^2} = - \frac{1}{L} \left(\frac{q x^2}{2} + C_1 \right) \quad (\text{IV.51})$$

Da mesma forma a expressão (IV.7) se torna

$$K_1 S'' - K_2 S = - \frac{1}{L} \left(\frac{q x^2}{2} + C_1 \right) \quad (\text{IV.52})$$

Adotando o mesmo procedimento do ítem IV.3, pode-se chegar a solução particular da equação diferencial para este caso de carga. Somando a solução particular com a solução homogênea (IV.13), obtém-se a seguinte expressão para S,

$$S = C_2 e^{\xi x} + C_3 e^{-\xi x} + \frac{b^2}{2 G I L} \left(- \frac{q x^2}{2} - \frac{q}{\xi^2} + C_1 \right) \quad (\text{IV.53})$$

Substituindo as derivadas das expressões de S e β em (IV.13) e integrando sucessivamente, chega-se a expressão de w.

$$\begin{aligned} w = & - \frac{2 I_f}{3 I \xi} \left(C_2 e^{\xi x} - C_3 e^{-\xi x} \right) \\ & + \frac{1}{6 E I L} \left[\frac{q x^5}{20} + x^3 \left(\frac{q}{\xi^2} - C_1 \right) \right] \\ & - q x^3 \left(\frac{2}{15 K_2 L} + \frac{1}{6 G A_a} \right) + \frac{C_4 x^4}{2} + C_5 x + C_6 \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

Para as condições de contorno em $x=0$, tem-se da expressão (IV.14):

$$- \frac{C_1}{G A_a L} - \frac{2 I_f}{3 I} (C_2 + C_3) + C_5 = 0 \quad (\text{IV.55})$$

Aplicando igualmente à (IV.15) e (IV.16) respectivamente, obtém-se

$$- \frac{2 I_f}{3 I \xi} (C_2 - C_3) + C_6 = 0 \quad (\text{IV.56})$$

$$- \frac{C_1}{K_2 L} + C_2 + C_3 + \frac{q}{K_2 \xi^2 L} = 0 \quad (\text{IV.57})$$

Aplicando as condições de contorno em $x = L$, em (IV.17), (IV.18) e (IV.19), chega-se respectivamente a

$$- 6 C_1 + 6 E I C_4 + q L^2 = 0 \quad (\text{IV.58})$$

$$C_1 = \frac{q L^2}{2} \quad (\text{IV.59})$$

$$4 \left(-C_2 e^{\xi L} + C_3 e^{-\xi L} \right) \left(\frac{I_f}{9 I} - \frac{2}{15} \right) \xi -$$

$$\frac{2 C_1}{3 E I} + \frac{2 C_4}{3} + \frac{2 q}{3} \left(\frac{4}{5 K_2} + \frac{L^2 G}{E K_2 b^2} + \frac{1}{A_a G} \right) = 0 \quad (\text{IV.60})$$

Substituindo-se C_1 , dada por (IV.59) em (IV.58), tem-se que

$$C_4 = \frac{q L^2}{3 E I} \quad (\text{IV.61})$$

As demais constantes são obtidas a partir da solução do sistema formado pelas quatro equações restantes.

$$C_2 = \frac{q b^2 \left[\eta_1 e^{-\xi L} - 2 \xi L \right]}{8 \xi^2 G I L \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.62})$$

$$C_3 = \frac{q b^2 \left[\eta_1 e^{\xi L} - 2 \xi L \right]}{8 \xi^2 G I L \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.63})$$

$$C_5 = q \left(\frac{L}{2 G A_a} - \frac{I_f b^2}{3 \xi^2 G I^2 L} + \frac{I_f L b^2}{6 G I^2} \right) \quad (\text{IV.64})$$

$$C_6 = - \frac{I_f q b^2 \left[\eta_1 \sinh(\xi L) + 2 \xi L \right]}{8 \xi^2 G I L \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.65})$$

sendo

$$\eta_1 = \xi^2 L^2 - 2 \quad (\text{IV.66})$$

Substituindo as constantes C_1 a C_6 nas expressões (IV.50), (IV.53) e (IV.54), obtém-se a solução fechada para o carregamento distribuído linearmente crescente,

$$\beta = \frac{q (L^2 - x^2)}{2 G A_a L} \quad (\text{IV.67})$$

$$S = \frac{q b^2}{4 G I L} \left[\frac{\eta_1 \cosh(\xi L - \xi x) - 2 L \xi \sinh(\xi x)}{\xi^2 \cosh(\xi L)} + x^2 - L^2 + \frac{2}{\xi^2} \right] \quad (\text{IV.68})$$

$$w = \frac{I_f q b^2 \left[\eta_1 (\sinh(\xi L - \xi x) - \sinh(\xi L)) + 2 \xi L \cosh(\xi x) - 2 \xi L \right]}{6 \xi^3 G I^2 L \cosh(\xi L)} + \frac{q x^5}{120 E I L} - q x^3 \left(\frac{1}{6 G A_a L} + \frac{L}{12 E I} + \frac{b^2}{15 G I L} + \frac{1}{6 \xi^2 E I L} \right) + \frac{q L^2 x^2}{6 E I} + q x \left(\frac{I_f b^2 \eta_1}{6 \xi^2 G I^2 L} + \frac{L}{2 G A_a} \right) \quad (\text{IV.69})$$

Uma vez conhecidas as expressões de w , β , e S , a expressão da tensão axial no flange (II.10) pode ser escrita da seguinte forma,

$$\sigma_f = \pm E h \left\{ \frac{q}{E I} \left(\frac{x^3}{6 L} - \frac{x L}{2} + \frac{L^2}{3} \right) + \left[\frac{2 I_f}{3 I} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{q b^2}{2 G I L} \left(\frac{\eta_1 \sinh(\xi L - \xi x) + 2 \xi L \cosh(\xi x)}{2 \xi \cosh(\xi L)} - x \right) \right] \right\} \quad (\text{IV.70})$$

A derivada da função S é dada por,

$$S' = - \frac{q b^2}{2 G I L} \left(\frac{\eta_1 \sinh(\xi L - \xi x) + 2 \xi L \cosh(\xi x)}{2 \xi \cosh(\xi L)} - x \right) \quad (\text{IV.71})$$

IV.5 - CARREGAMENTO DISTRIBUIDO LINEARMENTE DECRESCENTE

Para este caso a carga é distribuída linearmente, conforme ilustrado na figura IV.3. A função correspondente ao carregamento é,

$$Q(x) = \frac{q}{L} (L - x) \quad (\text{IV.72})$$

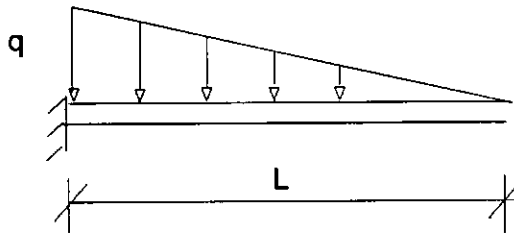


Figura IV.3 - Viga engastada e livre com carga linearmente decrescente

Seguindo-se o mesmo procedimento dos itens anteriores, são obtidas as seguintes soluções para este caso de carga:

$$\beta = \frac{q}{2 G A_a} \frac{(x - L)^2}{L} \quad (\text{IV.73})$$

$$s = \frac{q b^2}{4 G I L} \left(\frac{\eta_2 \cosh(\xi L - \xi x)}{\xi^2 \cosh(\xi L)} - (x - L)^2 - \frac{2}{\xi^2} \right) \quad (\text{IV.74})$$

$$\begin{aligned}
w = & \frac{I_f q b^2 \eta_2 [\sinh(\xi L - \xi x) - \sinh(\xi L)]}{6 G I^2 L \xi^3 \cosh(\xi L)} - \frac{q x^5}{120 E I L} \\
& + \frac{q x^2}{24 E I} (x^2 - 2 L x + 2 L^2) \\
& + \frac{q x}{6 G L} \left(\frac{I_f b^2}{3 I^2} + \frac{1}{A_a} \right) (x^2 - 3 L x + 3 L^2) \\
& + \frac{q x E I_f b^4}{45 G^2 I^3 L} (6 I - 5 I_f) \tag{IV.75}
\end{aligned}$$

sendo,

$$\eta_2 = \xi^2 L^2 + 2 \tag{IV.76}$$

A expressão da tensão axial no flange é dada por

$$\begin{aligned}
\sigma_f = & \pm E h \left\{ \frac{q}{E I} \left(-\frac{x^3}{6 L} + \frac{x^2}{2} - \frac{x L}{2} + \frac{L^2}{6} \right) \right. \\
& \left. + \left[\frac{2 I_f}{3 I} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right] \left[\frac{q b^2}{2 G I L} \left(\frac{\eta_2 \sinh(\xi L - \xi x)}{2 \xi \cosh(\xi L)} + x - L \right) \right] \right\} \tag{IV.77}
\end{aligned}$$

e a derivada da função S por,

$$S' = - \frac{q b^2}{2 G I L} \left(\frac{\eta_2 \sinh(\xi L - \xi x)}{2 \xi \cosh(\xi L)} + x - L \right) \tag{IV.78}$$

Sabendo-se que as respostas do primeiro caso de carga (carga uniforme) devem ser idênticas a soma de duas cargas linearmente variáveis crescente e decrescente, correspondentes aos dois últimos casos de carga, todas as expressões puderam ser verificadas analiticamente, ficando assim assegurada a exatidão de todas as expressões apresentadas.

IV.6 - CARGA CONCENTRADA NO EXTREMO LIVRE

Para este caso de carga representado na figura IV.4, seguindo procedimento análogo aos itens anteriores, têm-se as expressões a seguir.

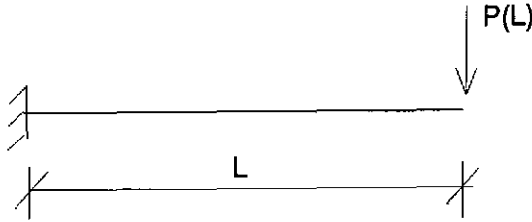


Figura IV.4 - carga concentrada P aplicada no extremo livre

$$\beta = \frac{P(L)}{G A_a} \quad (\text{IV.79})$$

$$S = \frac{b^2 P(L)}{2 G I} \left(\frac{\cosh(\xi L - \xi x)}{\cosh(\xi L)} - 1 \right) \quad (\text{IV.80})$$

$$w = P(L) \left[\frac{I_f b^2}{3 G I^2} \left(\frac{\sinh(\xi L - \xi x) - \sinh(\xi L)}{\xi \cosh(\xi L)} + x \right) - \frac{x^3}{6 E I} + \frac{x^2 L}{2 E I} + \frac{x}{G A_a} \right] \quad (\text{IV.81})$$

A expressão da tensão axial no flange é dada por

$$\sigma_f = \pm \frac{P(L) h}{I} \left[\frac{b^2 \xi E}{2 G I} \left(\frac{2 I_f}{3 I} - 1 + \frac{y^2}{b^2} \right) \left(\frac{\sinh(\xi L - \xi x)}{\cosh(\xi L)} + (L-x) \right) \right] \quad (\text{IV.82})$$

$$S' = - \frac{P(L) b^2 \xi \sinh(\xi L - \xi x)}{2 G I \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.83})$$

IV.7 - MOMENTO APLICADO NO EXTREMO LIVRE

Para este caso de carga, representado na figura IV.5 têm-se as soluções dadas a seguir.

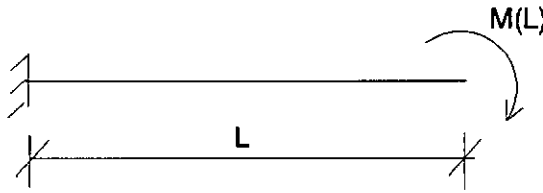


Figura IV.5 - Momento concentrado \$M\$ aplicado no extremo livre

$$\beta = 0 \quad (\text{IV.84})$$

$$S = - \frac{15}{2} \frac{M(L)}{E \xi} \frac{\sinh(\xi x)}{(6I - 5I_f) \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.85})$$

$$w = \frac{M(L)}{E I} \left(\frac{5 I_f (\cosh(\xi x) - 1)}{\xi^2 (6I - 5I_f) \cosh(\xi L)} + \frac{x^2}{2} \right) \quad (\text{IV.86})$$

$$\sigma_f = \pm M(L) h \left[\frac{15 \cosh(\xi x)}{2 (6I - 5I_f) \cosh(\xi L)} \left(\frac{2 I_f}{3 I} - 1 + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{1}{I} \right] \quad (\text{IV.87})$$

$$S' = - \frac{15}{2} \frac{M(L)}{E} \frac{\cosh(\xi x)}{(6I - 5I_f) \cosh(\xi L)} \quad (\text{IV.88})$$

Caso se deseje superpor duas ou mais cargas, basta somar as respectivas expressões de cada carregamento.

IV.8 - AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO

O processo de cálculo, utilizando as soluções analíticas aqui obtidas, foi automatizado, dando origem a cinco programas para microcomputador, correspondentes a cada um dos tipos de carregamento analisados nos itens anteriores. O programa relativo a carga distribuída uniforme encontra-se no APÊNDICE I. Os demais programas apresentam a mesma seqüência. As respostas são escritas diretamente em arquivos, facilitando assim a tarefa de confecção dos gráficos indicativos das variações dos deslocamentos, tensões e da função S .

O deslocamento transversal w , a função S e sua derivada S' são calculados em várias seções convenientemente espaçadas ao longo da viga, de forma a se obter uma boa resolução para os gráficos. As tensões axiais nos flanges são calculadas em diversos pontos ao longo de uma seção transversal desejada.

CAPÍTULO V

FORMULAÇÃO PARA SEÇÕES TÍPICAS DE PONTES

Neste capítulo é apresentada uma formulação para análise de vigas com seção caixão, típica de pontes. Para isto segue-se o mesmo procedimento empregado anteriormente, ou seja, as equações de equilíbrio são obtidas a partir da análise do funcional de energia potencial total. As etapas de definição e extremização do funcional de E.P.T. são apresentadas de forma sucinta, pois trata-se basicamente de uma extensão do que está demonstrado nos capítulos II e III.

V.1 - MODELO ESTRUTURAL

O efeito de "shear lag" também pode ser verificado de forma significativa em seções típicas de pontes de paredes delgadas.

Uma seção transversal típica de pontes é mostrada na figura V.1, onde pode-se observar as diferenças em relação a seção caixão simples. Os flanges superior e inferior têm dimensões diferentes, um terceiro flange em balanço é adicionado e as almas podem ser inclinadas.

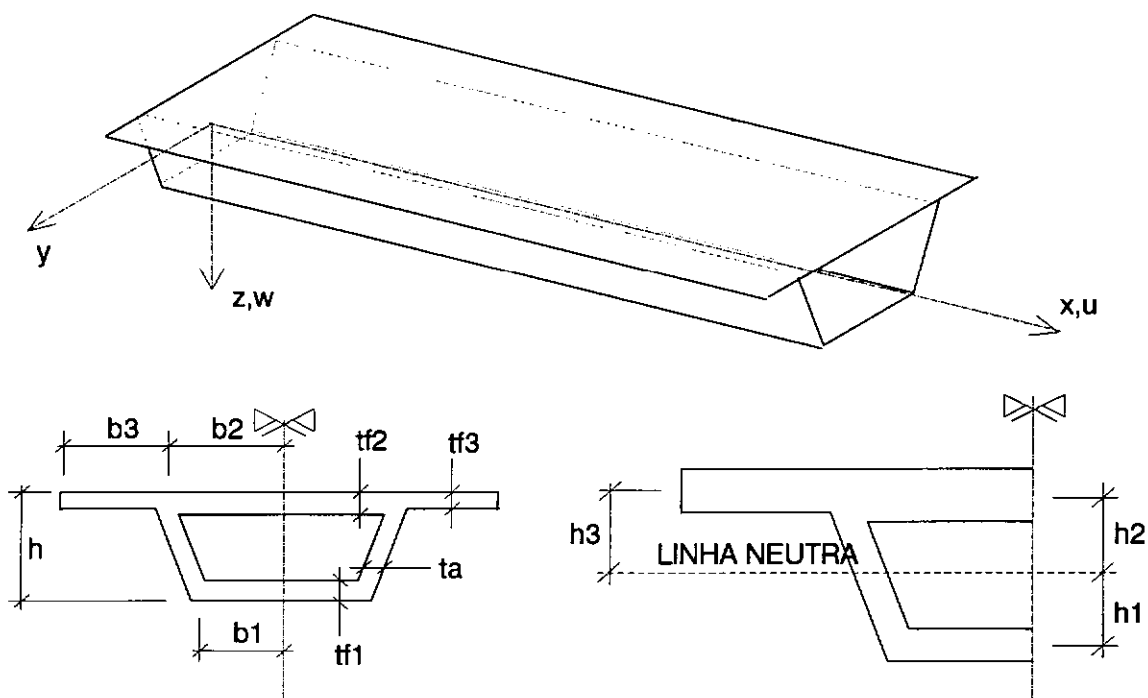


Figura V.1 - Modelo Estrutural

Na figura V.1 estão indicadas também as dimensões necessárias para definição das características geométricas da viga e o sistema de eixos utilizado.

Quanto ao carregamento, são considerados mais uma vez os seguintes tipos:

$M(\bar{x})$ - momento concentrado aplicado em \bar{x}

$P(\bar{x})$ - carga concentrada transversal, aplicada em \bar{x}

$Q(x)$ - carga transversal distribuída ao longo da viga, segundo uma determinada função

V.2 - CAMPOS DE DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

Inicialmente são definidos o campo de deslocamento longitudinal e as expressões das deformações referentes às almas e, a seguir, aos flanges.

O deslocamento axial das almas é dado por

$$u_a(x, z) = -z (w' - \beta) \quad (V.1)$$

a partir do qual são definidas as deformações nas almas

$$\varepsilon_a = \frac{d(u_a)}{dx} = -z (w'' - \beta') \quad (V.2)$$

e

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial(u_a)}{\partial z} + \frac{\partial(w_a)}{\partial x} = \beta \quad (V.3)$$

O deslocamento axial em cada um dos dos flanges é novamente assumido variando segundo uma parábola do 2º grau, o que conduz às seguintes expressões:

para $-b_1 \leq y \leq b_1$

$$u_{f1}(x, y) = -h_1 \left[(w' - \beta) + \left(1 - \frac{y^2}{b_1^2} \right) S_1 \right] \quad (V.4.a)$$

para $-b_2 \leq y \leq b_2$

$$u_{f2}(x, y) = h_2 \left[(w' - \beta) + \left(1 - \frac{y^2}{b_2^2} \right) S_2 \right] \quad (V.4.b)$$

para $-b_3 \leq \bar{y} \leq 0$, sendo $\bar{y} = y - (b_2 + b_3)$

$$u_{f3}(x, y) = h_3 \left[(w' - \beta) + \left(1 - \frac{\bar{y}^2}{b_3^2} \right) S_3 \right] \quad (V.4.c)$$

Pode-se notar que a compatibilidade de deslocamentos nas linhas de junção dos flanges com as almas é satisfeita, como mostram as expressões (V.5).

$$u_{f1}(y=\pm b_1) = u_a(z=h_1) = -h_1 (w' - \beta) \quad (\text{V.5.a})$$

$$u_{f2}(y=\pm b_2) = u_a(z=-h_2) = h_2 (w' - \beta) \quad (\text{V.5.b})$$

$$u_{f3}(y=\pm b_3) = u_a(z=-h_3) = h_3 (w' - \beta) \quad (\text{V.5.c})$$

Com as expressões (V.4) as componentes de deformações axiais nos flanges podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{f1} = \frac{d(u_{f1})}{dx} = -h_1 \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b_1^2} \right) S'_1 \right] \quad (\text{V.6.a})$$

$$\varepsilon_{f2} = \frac{d(u_{f2})}{dx} = h_2 \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b_2^2} \right) S'_2 \right] \quad (\text{V.6.b})$$

$$\varepsilon_{f3} = \frac{d(u_{f3})}{dx} = h_3 \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b_3^2} \right) S'_3 \right] \quad (\text{V.6.c})$$

e as deformações tangenciais, como

$$\gamma_{xy_n} = \frac{\partial(u_{fn})}{\partial y} + \frac{\partial(v_{fn})}{\partial x} = \frac{2 h_n y}{b_n^2} S_n \quad (\text{V.7})$$

onde o sub-índice n varia de 1 a 3, indicando a qual dos flanges as deformações são referidas.

V.3 - DISTRIBUIÇÃO DAS TENSÕES

Substituindo-se em (II.9) as deformações já definidas em (V.6) e (V.2), obtém-se que as tensões axiais nos flanges e nas almas são dadas por:

$$\sigma_{f1} = -E h_1 \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b_1^2} \right) S'_1 \right] \quad (\text{V.8.a})$$

$$\sigma_{f2} = E h_2 \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b_2^2} \right) S'_2 \right] \quad (\text{V.8.b})$$

$$\sigma_{f3} = E h_3 \left[(w'' - \beta') + \left(1 - \frac{y^2}{b_3^2} \right) S'_3 \right] \quad (\text{V.8.c})$$

$$\sigma_a = -E z (w'' - \beta') = -E z \Psi' \quad (\text{V.9})$$

A forma de distribuição das tensões axiais em função do valor de S' é ilustrada na figura V.2.

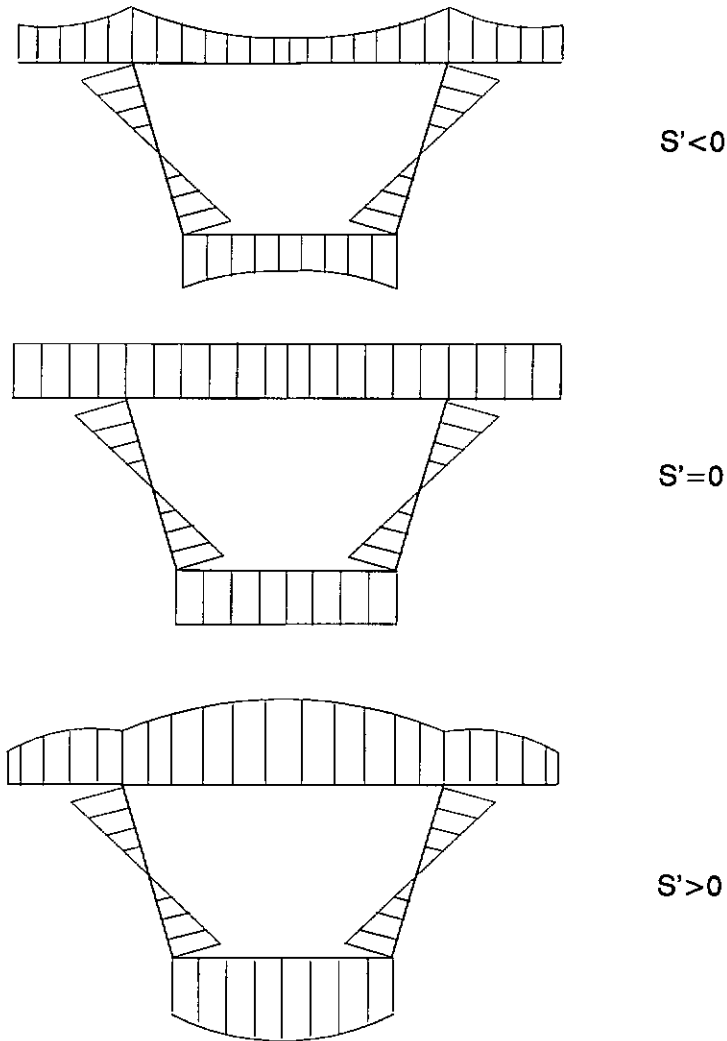


Figura V.2 - Distribuições típicas de tensões axiais

Substituindo as expressões das distorções, (V.7) e (V.3) em (II.12) tem-se respectivamente as tensões tangenciais nos flanges e nas almas.

$$\tau_{xy_n} = \frac{2 G h_n y}{b_n^2} S_n \quad (V.10)$$

$$\tau_{xz} = G \beta \quad (V.11)$$

V.4 - FUNCIONAL DE ENERGIA POTENCIAL TOTAL

A partir das expressões (V.2) e (V.3) a energia de deformação das almas pode ser obtida de forma inteiramente análoga à que foi desenvolvida para a seção retangular, obtendo-se assim,

$$U_a = \frac{1}{2} \int_0^L \left[E I_a (w'' - \beta')^2 + G \beta^2 A_a \right] dx \quad (V.12)$$

onde

$$I_a = \frac{2}{3} (h_1^3 + h_4^3) t_a \quad (V.13)$$

é a inércia das almas, sendo

$$h_4 = (h_2 + h_3) / 2 \quad (V.14)$$

e

$$A_a = 2 (h_1 + h_4) t_a \quad (V.15)$$

a área das almas.

A energia de deformação dos flanges é obtida substituindo-se as deformações dos flanges (V.6) e (V.7) na expressão (II.19) e efetuando-se as integrações na seção, resultando em

$$U_{fn} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I_{fn} \left[(w'' + \beta')^2 + \frac{4}{3} S'_n (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S_n'^2 \right] + \frac{4 G I_{fn} S_n^2}{3 b_n^2} \right\} dx \quad (V.16)$$

sendo

$$I_{fn} = 2 b_n t_{fn} h_n^2 \quad (V.17)$$

e n variando de 1 a 3.

O funcional de energia potencial total é constituído pelas energias de deformação elástica das almas (V.12) e dos flanges (V.16), e da energia potencial das cargas (II.30), sendo escrito explicitamente da seguinte forma,

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E I (w'' - \beta')^2 + G A_a \beta^2 + E I_{fn} \left[\frac{4}{3} S'_n (w'' - \beta') + \frac{8}{15} S_n'^2 + \frac{4 G S_n^2}{3 E b_n^2} \right] - Q w \right\} dx - M(\bar{x}) [w'(\bar{x}) - \beta(\bar{x})] - P(\bar{x}) w(\bar{x}) \quad (V.18)$$

sendo

$$I = I_a + I_{f1} + I_{f2} + I_{f3} \quad (V.19)$$

a inércia da seção transversal.

V.5 - EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Aplicando o princípio de estacionaridade ao funcional de energia potencial total tem-se que:

$$\begin{aligned}
\delta V = & \int_0^L \left(E I (w''' - \beta')''' + \frac{2}{3} E \sum (I_{fn} S_n''') - Q \right) \delta w \, dx \\
& + \int_0^L \left(E I (w''' - \beta')' + G A_a \beta + \frac{2}{3} E \sum (I_{fn} S_n'') \right) \delta \beta \, dx \\
& + \sum \int_0^L \left(-\frac{2}{3} E I_{fn} (w''' - \beta')' + \frac{4 G I_{fn} S_n}{3 b_n^2} - \frac{8}{15} E I_{fn} S_n' \right) \delta S_n \, dx \\
& + \left[E I (w''' - \beta') + \frac{2}{3} E \sum (I_{fn} S_n') \right] \delta [w' - \beta] \Big|_0^L \\
& - \left[E I (w'''' - \beta'') + \frac{2}{3} E \sum (I_{fn} S_n'') \right] \delta w \Big|_0^L \\
& + \sum \left[\frac{8}{15} E I_{fn} S_n' + \frac{2}{3} E I_{fn} (w''' - \beta') \right] \delta S_n \Big|_0^L \\
& - P(\bar{x}) \delta w(\bar{x}) - M(\bar{x}) [\delta w'(\bar{x}) - \delta \beta(\bar{x})] = 0 \quad (V.20)
\end{aligned}$$

onde os somatórios são sempre efetuados para n variando de 1 a 3.

Para variações não nulas ao longo da viga, tem-se para cada integrando que:

se $\delta w \neq 0$

$$E I (w''' - \beta')''' + \frac{2}{3} E (I_{f1} S_1'''' + I_{f2} S_2'''' + I_{f3} S_3''') - Q = 0 \quad (V.21.a)$$

se $\delta \beta \neq 0$

$$E I (w''' - \beta')' + G A_a \beta + \frac{2}{3} E (I_{f1} S_1'' + I_{f2} S_2'' + I_{f3} S_3'') = 0 \quad (V.21.b)$$

se $\delta S_1 \neq 0$

$$-\frac{2}{3} E (w''' - \beta')' + \frac{4 G S_1}{3 b_1^2} - \frac{8}{15} E S_1'' = 0 \quad (V.21.c)$$

se $\delta S_2 \neq 0$

$$-\frac{2}{3} E (w''' - \beta')' + \frac{4 G S_2}{3 b_2^2} - \frac{8}{15} E S_2'' = 0 \quad (V.21.d)$$

se $\delta S_3 \neq 0$

$$-\frac{2}{3} E (w'' - \beta')' + \frac{4 G S_3}{3 b_3^2} - \frac{8}{15} E S_3'' = 0 \quad (\text{V.21.e})$$

As expressões (V.21) constituem o sistema de equações de equilíbrio.

Novamente admite-se que as cargas P e M são aplicadas somente no contorno ($x=0$ e $x=L$).

As condições de contorno geométricas são dadas pelos seguintes valores prescritos para cada extremo:

$$w' - \beta = \tilde{\Psi} \quad (\text{V.22.a})$$

$$w = \tilde{w} \quad (\text{V.22.b})$$

$$S_1 = \tilde{S}_1 \quad (\text{V.22.c})$$

$$S_2 = \tilde{S}_2 \quad (\text{V.22.d})$$

$$S_3 = \tilde{S}_3 \quad (\text{V.22.e})$$

Lembrando que só serão considerados valores prescritos nulos para as funções S_n .

As respectivas condições de contorno de força são mostradas a seguir:

$$-E I (w'' - \beta') - \frac{2}{3} E (I_{f1} S_1' + I_{f2} S_2' + I_{f3} S_3') - M = 0 \quad (\text{V.23.a})$$

$$E I (w'''' - \beta''') + \frac{2}{3} E (I_{f1} S_1'' + I_{f2} S_2'' + I_{f3} S_3'') - P = 0 \quad (\text{V.23.b})$$

$$\frac{8}{15} S_1' + \frac{2}{3} (w'' - \beta') = 0 \quad (\text{V.23.c})$$

$$\frac{8}{15} S_2' + \frac{2}{3} (w'' - \beta') = 0 \quad (\text{V.23.d})$$

$$\frac{8}{15} S_3' + \frac{2}{3} (w'' - \beta') = 0 \quad (\text{V.23.e})$$

DEZI e MENTRASTI [19] seguindo procedimento análogo,

obtiveram as mesmas equações de equilíbrio, e indicaram como estas poderiam ser solucionadas.

É possível que as soluções obtidas sob a hipótese inicial de linha neutra passando pelo centro de gravidade da seção, violem algumas condições de equilíbrio locais e globais podendo conduzir a uma resultante de tensão axial, σ_x , não nula [19]. Isto porque a posição da linha neutra é, na verdade, variável ao longo da viga, sendo dependente da distribuição de tensões. Acredita-se porém que este efeito possa ser desconsiderado, dentro da ordem das aproximações adotadas. Este problema não ocorre para seções retangulares (capítulo IV) pois este caso apresenta dupla simetria, e a linha neutra passa pelo centro de gravidade da seção, mesmo para uma distribuição não linear de tensões nos flanges.

V.6 - SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Apresenta-se neste ítem o procedimento para obtenção da solução fechada do sistema de equações de equilíbrio para algumas condições de contorno, e um carregamento uniformemente distribuído. As funções solução são obtidas através de álgebra simbólica computacional [22] e programadas em TURBO PASCAL.

As soluções não serão apresentadas na forma de funções explícitas das características geométricas e elásticas como foram as soluções dos casos analisados nos capítulos anteriores. Isto porque para o tipo de seção em questão o desenvolvimento algébrico se torna extremamente laborioso, mesmo utilizando-se um programa que opera com álgebra simbólica. Além disso, as expressões finais seriam bastante complexas e extensas. Por estas razões, em certas etapas da solução, serão definidas variáveis em função das já conhecidas, como forma de viabilizar a sequência do processo de obtenção de soluções analíticas. Ao final serão obtidas as

soluções fechadas em função destes parâmetros, na forma de funções implícitas das características que definem o problema.

Diferenciando-se a expressão (V.23.b) em relação a x , e subtraindo-a de (V.23.a), obtém-se uma equação em termos de uma única função incógnita.

$$G A_a \beta' = - Q \quad (V.24)$$

a qual substituindo-se a função para carregamento distribuído uniforme

$$Q(x) = q \quad (V.25)$$

pode ser obtida por integração direta,

$$\beta = - \int \frac{Q}{G A_a} dx = \frac{-q x - C_1}{G A_a} \quad (V.26)$$

Com (V.26) as equações de equilíbrio restantes podem ser reescritas da seguinte forma:

$$E I w'''' + \frac{2}{3} E (I_{f1} S_1'' + I_{f2} S_2'' + I_{f3} S_3'') - q x - C_1 = 0 \quad (V.27.a)$$

$$\frac{2}{3} E w'''' + \frac{8}{15} E S_1''' - \frac{4 G}{3 b_1^2} S_1 = 0 \quad (V.27.b)$$

$$\frac{2}{3} E w'''' + \frac{8}{15} E S_2''' - \frac{4 G}{3 b_2^2} S_2 = 0 \quad (V.27.c)$$

$$\frac{2}{3} E w'''' + \frac{8}{15} E S_3''' - \frac{4 G}{3 b_3^2} S_3 = 0 \quad (V.27.d)$$

A partir de (V.27.a) tem-se,

$$w'''' = \frac{1}{E I} \left[- \frac{2}{3} E (I_{f1} S_1'' + I_{f2} S_2'' + I_{f3} S_3'') + q + C_1 \right] \quad (V.28)$$

Substituindo (V.28) em (V.27.b), (V.27.c) e (V.27.d) obtém-se após simplificação:

$$\begin{aligned}
 E S_1'' \left(\frac{4}{5} - \frac{2 I_{f1}}{3 I} \right) - \frac{2 E}{3 I} \left(I_{f2} S_2'' + I_{f3} S_3'' \right) - \frac{2 G S_1}{b_1^2} &= \\
 &= \frac{1}{I} (-q x - C_1) \quad (\text{V.29.a})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E S_2'' \left(\frac{4}{5} - \frac{2 I_{f2}}{3 I} \right) - \frac{2 E}{3 I} \left(I_{f1} S_1'' + I_{f3} S_3'' \right) - \frac{2 G S_2}{b_2^2} &= \\
 &= \frac{1}{I} (-q x - C_1) \quad (\text{V.29.b})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E S_3'' \left(\frac{4}{5} - \frac{2 I_{f3}}{3 I} \right) - \frac{2 E}{3 I} \left(I_{f1} S_1'' + I_{f2} S_2'' \right) - \frac{2 G S_3}{b_3^2} &= \\
 &= \frac{1}{I} (-q x - C_1) \quad (\text{V.29.c})
 \end{aligned}$$

Agora o sistema de equações de equilíbrio pode ser escrito sob forma matricial. Multiplicando-se todas as equações do sistema por $5/(4E)$, tem-se:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} 1 - \frac{5 i_1}{6} & -\frac{5 i_2}{6} & -\frac{5 i_3}{6} \\ -\frac{5 i_1}{6} & 1 - \frac{5 i_2}{6} & -\frac{5 i_3}{6} \\ -\frac{5 i_1}{6} & -\frac{5 i_2}{6} & 1 - \frac{5 i_3}{6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1'' \\ S_2'' \\ S_3'' \end{Bmatrix} - \frac{5 G}{2 E} \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b_3^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \\
 &= -\frac{5}{4 E I} (q x + C_1) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.30.a})
 \end{aligned}$$

ou escrita na forma compacta,

$$\tilde{A} \tilde{S}'' - \frac{5 G}{2 E} \tilde{B} \tilde{S} = \tilde{C} \quad (\text{V.30.b})$$

sendo

$$i_1 = \frac{I_{f1}}{I} \quad (\text{V.31.a})$$

$$i_2 = \frac{I_{f2}}{I} \quad (\text{V.31.b})$$

$$i_3 = \frac{I_{f3}}{I} \quad (\text{V.31.c})$$

Pré-multiplicando o sistema pela inversa da matriz \underline{A} ,

$$\underline{A}^{-1} \underline{A} \underline{S}'' - \frac{5}{2} \frac{G}{E} \underline{A}^{-1} \underline{B} \underline{S} = \underline{A}^{-1} \underline{C} \quad (\text{V.32})$$

ou melhor

$$\underline{S}'' - \frac{5}{2} \frac{G}{E} \underline{D} \underline{S} = \underline{H} \quad (\text{V.33})$$

onde

$$\underline{D} = \underline{A}^{-1} \underline{B} \quad (\text{V.34.a})$$

e

$$\underline{H} = \underline{A}^{-1} \underline{C} \quad (\text{V.34.b})$$

Realizando-se os produtos matriciais tem-se a forma explícita da expressão (V.33),

$$\begin{Bmatrix} S_1'' \\ S_2'' \\ S_3'' \end{Bmatrix} - \frac{5}{2} \frac{G}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{b_1^2} + F_1 & F_2 & F_3 \\ F_1 & \frac{1}{b_2^2} + F_2 & F_3 \\ F_1 & F_2 & \frac{1}{b_3^2} + F_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{Bmatrix} = \frac{15(q \cdot x + C_1)}{2 E I j} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{V.35})$$

$$\text{onde } j = (5i_1 + 5i_2 + 5i_3 - 6) \quad (\text{V.36})$$

$$F_1 = - \frac{5 i_1}{b_1^2 j} \quad (\text{V.37.a})$$

$$F_2 = - \frac{5 i_2}{b_2^2 j} \quad (\text{V.37.b})$$

$$F_3 = - \frac{5 i_3}{b_3^2 j} \quad (\text{V.37.c})$$

O sistema (V.35) é formado por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, lineares a coeficientes constantes, sendo que não existem termos em derivada de primeira ordem das incógnitas S_1 , S_2 e S_3 . Com o intuito de se obter uma solução analítica, o sistema (V.35) será inicialmente desacoplado, utilizando-se para isto uma transformação de base. No APÊNDICE II está demonstrado que a nova base que diagonaliza o sistema de equações é formada pelos autovetores do seguinte problema de autovalor associado a matriz \underline{D} ,

$$(\underline{D} - \lambda \underline{I}) \underline{M} = 0 \quad (\text{V.38})$$

Da condição de determinante nulo tem-se a equação característica para cálculo dos autovalores,

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (\text{V.39})$$

onde

$$A_1 = - \frac{1}{b_1^2} - \frac{1}{b_2^2} - \frac{1}{b_3^2} - F_1 - F_2 - F_3 \quad (\text{V.40.a})$$

$$A_2 = \frac{F_1 (b_2^2 + b_3^2)}{b_2^2 b_3^2} + \frac{F_2 (b_1^2 + b_3^2)}{b_1^2 b_3^2} + \frac{F_3 (b_1^2 + b_2^2)}{b_1^2 b_2^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \quad (\text{V.40.b})$$

$$A_3 = - \frac{F_1}{b_2^2 b_3^2} - \frac{F_2}{b_1^2 b_3^2} - \frac{F_3}{b_1^2 b_2^2} - \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3^2} \quad (\text{V.40.c})$$

A solução da equação característica fornece os seguintes autovalores

$$\lambda_1 = 2 A - \frac{A_1}{3} \quad (\text{V.41.a})$$

$$\lambda_2 = - A - \frac{A_1}{3} - B\sqrt{3} \quad (\text{V.41.b})$$

$$\lambda_3 = -A - \frac{A_1}{3} + B\sqrt{3} \quad (\text{V.41.c})$$

onde

$$A = \sqrt{-R_1} \cos \left(\frac{\theta}{3} \right) \quad (\text{V.42.a})$$

$$B = \sqrt{-R_1} \operatorname{sen} \left(\frac{\theta}{3} \right) \quad (\text{V.42.b})$$

sendo

$$R_1 = \frac{3 A_2 - A_1^2}{9} \quad (\text{V.43})$$

$$R_2 = \frac{9 A_1 A_2 - 27 A_3 - 2 A_1^3}{54} \quad (\text{V.44})$$

$$\theta = \operatorname{acos} \frac{R_2}{\sqrt{-R_1}^3} \quad (\text{V.45})$$

Com os autovalores determina-se a base formada pelos autovetores, que dispostos matricialmente segundo as colunas formam

$$M = \begin{bmatrix} 1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & 1 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{V.46})$$

onde

$$M_{12} = - \frac{b_1^2 F_2 (b_3^2 \lambda_2 - 1)}{b_1^2 \left[b_3^2 \lambda_2 (F_1 + F_3 - \lambda_2) + \lambda_2 - F_1 \right] - \left[b_3^2 (F_3 - \lambda_2) + 1 \right]} \quad (\text{V.47.a})$$

$$M_{13} = - \frac{b_1^2 F_3 (b_2^2 \lambda_3 - 1)}{b_1^2 \left[b_2^2 \lambda_3 (F_1 + F_2 - \lambda_3) + \lambda_3 - F_1 \right] - \left[b_2^2 (F_2 - \lambda_3) + 1 \right]} \quad (\text{V.47.b})$$

$$M_{21} = - \frac{b_2^2 F_1 (b_3^2 \lambda_1 - 1)}{b_2^2 \left[b_3^2 \lambda_1 (F_2 + F_3 - \lambda_1) + \lambda_1 - F_2 \right] - \left[b_3^2 (F_3 - \lambda_1) + 1 \right]} \quad (\text{V.47.c})$$

$$M_{23} = - \frac{b_2^2 F_3 (b_1^2 \lambda_3 - 1)}{b_1^2 \left[b_2^2 \lambda_3 (F_1 + F_2 - \lambda_3) + \lambda_3 - F_1 \right] - \left[b_2^2 (F_2 - \lambda_3) + 1 \right]} \quad (\text{V.47.d})$$

$$M_{31} = - \frac{b_3^2 F_1 (b_2^2 \lambda_1 - 1)}{b_2^2 \left[b_3^2 \lambda_1 (F_2 + F_3 - \lambda_1) + \lambda_1 - F_2 \right] - \left[b_3^2 (F_3 - \lambda_1) + 1 \right]} \quad (\text{V.47.e})$$

$$M_{32} = - \frac{b_3^2 F_2 (b_1^2 \lambda_2 - 1)}{b_1^2 \left[b_3^2 \lambda_2 (F_1 + F_3 - \lambda_2) + \lambda_2 - F_1 \right] - \left[b_3^2 (F_3 - \lambda_2) + 1 \right]} \quad (\text{V.47.f})$$

Adotando-se esta base, tem-se as seguintes relações:

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\bar{H}}} \quad (\text{V.48.a})$$

$$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} \quad (\text{V.48.b})$$

que conduzem a,

$$\underline{\underline{\bar{S}}}'' - \frac{5}{2} \frac{G}{E} \underline{\underline{\bar{D}}} \cdot \underline{\underline{\bar{S}}} = \underline{\underline{\bar{H}}} \quad (\text{V.49})$$

sendo que nas expressões anteriores, a barra (-) sobre os símbolos indica que os vetores e matrizes estão definidos em relação à base de autovetores.

De acordo com as propriedades desta base de autovetores, a matriz $\underline{\underline{\bar{D}}}$ é uma matriz diagonal formada pelos autovalores, do problema (V.38), logo

$$\underline{\underline{\bar{D}}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{V.50})$$

Desta forma, o novo sistema torna-se desacoplado, constando das seguintes equações diferenciais:

$$\underline{\underline{\bar{S}}}'_1 - \frac{5}{2} \frac{G}{E} \lambda_1 \cdot \underline{\underline{\bar{S}}}_1 = n_1 (q x + C_1) \quad (\text{V.51.a})$$

$$\bar{S}'_2 - \frac{5 G}{2 E} \lambda_2 \bar{S}_2 = n_2 (q x + C_1) \quad (\text{V.51.b})$$

$$\bar{S}'_3 - \frac{5 G}{2 E} \lambda_3 \bar{S}_3 = n_3 (q x + C_1) \quad (\text{V.51.c})$$

que podem ser integradas facilmente, fornecendo

$$\bar{S}_1 = C_2 e^{\Lambda_1 x} + C_3 e^{-\Lambda_1 x} - \frac{n_1}{\Lambda_1^2} (q x + C_1) \quad (\text{V.52.a})$$

$$\bar{S}_2 = C_4 e^{\Lambda_2 x} + C_5 e^{-\Lambda_2 x} - \frac{n_2}{\Lambda_2^2} (q x + C_1) \quad (\text{V.52.b})$$

$$\bar{S}_3 = C_6 e^{\Lambda_3 x} + C_7 e^{-\Lambda_3 x} - \frac{n_3}{\Lambda_3^2} (q x + C_1) \quad (\text{V.52.c})$$

onde

$$n_1 = \frac{15 (M_{12}(M_{23}-1) + M_{13}(M_{32}-1) + 1 - M_{23} M_{32})}{2 \det M E I j} \quad (\text{V.53.a})$$

$$n_2 = \frac{15 (M_{13}(M_{21}-M_{31}) + M_{23}(M_{31}-1) + 1 - M_{21})}{2 \det M E I j} \quad (\text{V.53.b})$$

$$n_3 = - \frac{15 (M_{12}(M_{21}-M_{31}) + (M_{31}+M_{32}-1) - M_{21} M_{32})}{2 \det M E I j} \quad (\text{V.53.c})$$

$$\Lambda_1 = \sqrt{\frac{5 G \lambda_1}{2 E}} \quad (\text{V.54.a})$$

$$\Lambda_2 = \sqrt{\frac{5 G \lambda_2}{2 E}} \quad (\text{V.54.b})$$

$$\Lambda_3 = \sqrt{\frac{5 G \lambda_3}{2 E}} \quad (\text{V.54.c})$$

e sendo

$$\det M = -M_{12}(M_{21}-M_{23} M_{31}) + (M_{13}(M_{21} M_{32} - M_{31})+1-M_{23} M_{32}) \quad (\text{V.55})$$

o determinante da matriz \tilde{M} .

Estas soluções estão referidas a base de autovetores, portanto as mesmas devem ser transformadas para a base original, recorrendo-se à relação (V.48.b). Após tal transformação são obtidos as expressões finais de S_1 , S_2 e S_3 .

$$S_1 = \bar{S}_1 + M_{12} \bar{S}_2 + M_{13} \bar{S}_3 \quad (\text{V.56.a})$$

$$S_2 = M_{21} \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + M_{23} \bar{S}_3 \quad (\text{V.56.b})$$

$$S_3 = M_{31} \bar{S}_1 + M_{32} \bar{S}_2 + \bar{S}_3 \quad (\text{V.56.c})$$

que explicitamente têm a seguinte forma

$$S_1 = C_2 e^{\Lambda_1 x} + C_3 e^{-\Lambda_1 x} + C_4 M_{12} e^{\Lambda_2 x} + C_5 M_{12} e^{-\Lambda_2 x} \\ + C_6 M_{13} e^{\Lambda_3 x} + C_7 M_{13} e^{-\Lambda_3 x} - g_1 (q x + C_1) \quad (\text{V.57.a})$$

$$S_2 = C_2 M_{21} e^{\Lambda_1 x} + C_3 M_{21} e^{-\Lambda_1 x} + C_4 e^{\Lambda_2 x} + C_5 e^{-\Lambda_2 x} \\ + C_6 M_{23} e^{\Lambda_3 x} + C_7 M_{23} e^{-\Lambda_3 x} - g_2 (q x + C_1) \quad (\text{V.57.b})$$

$$S_3 = C_2 M_{31} e^{\Lambda_1 x} + C_3 M_{31} e^{-\Lambda_1 x} + C_4 M_{32} e^{\Lambda_2 x} \\ + C_5 M_{32} e^{-\Lambda_2 x} + C_6 e^{\Lambda_3 x} + C_7 e^{-\Lambda_3 x} - g_3 (q x + C_1) \quad (\text{V.57.c})$$

sendo

$$g_1 = \frac{M_{12} n_2}{\Lambda_2^2} + \frac{M_{13} n_3}{\Lambda_3^2} + \frac{n_1}{\Lambda_1^2} \quad (\text{V.58.a})$$

$$g_2 = \frac{M_{21} n_1}{\Lambda_1^2} + \frac{M_{23} n_3}{\Lambda_3^2} + \frac{n_2}{\Lambda_2^2} \quad (\text{V.58.b})$$

$$g_3 = \frac{M_{31} n_1}{\Lambda_1^2} + \frac{M_{32} n_2}{\Lambda_2^2} + \frac{n_3}{\Lambda_3^2} \quad (\text{V.58.c})$$

Substituindo as expressões de S em (V.28) e integrando sucessivamente tem-se a expressão do deslocamento transversal,

$$\begin{aligned}
w = & t_1 \left(-C_2 e^{\Lambda_1 x} + C_3 e^{-\Lambda_1 x} \right) + t_2 \left(-C_4 e^{\Lambda_2 x} + C_5 e^{-\Lambda_2 x} \right) \\
& + t_3 \left(-C_6 e^{\Lambda_3 x} + C_7 e^{-\Lambda_3 x} \right) + \frac{q x^4}{24 E I} + \frac{C_1 x^3}{6 E I} + \frac{C_8 x^2}{2} \\
& + C_9 x + C_{10}
\end{aligned} \tag{V.59}$$

onde

$$t_1 = \frac{2 (I_{f1} + I_{f2} M_{21} + I_{f3} M_{31})}{3 I \Lambda_1} \tag{V.60.a}$$

$$t_2 = \frac{2 (I_{f1} M_{12} + I_{f2} + I_{f3} M_{32})}{3 I \Lambda_2} \tag{V.60.b}$$

$$t_3 = \frac{2 (I_{f1} M_{13} + I_{f2} M_{23} + I_{f3})}{3 I \Lambda_3} \tag{V.60.c}$$

Substituindo (V.57.a), (V.57.b), (V.57.c), (V.26) e (V.59) em (V.8.a), (V.8.b) e (V.8.c) são obtidas as seguintes expressões para as tensões axiais nos flanges,

$$\begin{aligned}
\sigma_{f1} = & - C_1 \frac{h_1 x}{I} \\
& + E h_1 \left\{ \Lambda_1 \left(t_1 \Lambda_1 - 1 + \frac{Y^2}{b_1^2} \right) \left(C_2 e^{\Lambda_1 x} - C_3 e^{-\Lambda_1 x} \right) \right. \\
& + \Lambda_2 \left(t_2 \Lambda_2 - M_{12} + M_{12} \frac{Y^2}{b_1^2} \right) \left(C_4 e^{\Lambda_2 x} - C_5 e^{-\Lambda_2 x} \right) \\
& + \Lambda_3 \left(t_3 \Lambda_3 - M_{13} + M_{13} \frac{Y^2}{b_1^2} \right) \left(C_6 e^{\Lambda_3 x} - C_7 e^{-\Lambda_3 x} \right) \\
& \left. - C_8 - q \left(\frac{1}{G A_a} + \frac{x^2}{2 E I} - g_1 + g_1 \frac{Y^2}{b_1^2} \right) \right\} \tag{V.61.a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{f2} = & C_1 \frac{h_2 x}{I} \\
& + E h_2 \left\{ \Lambda_1 \left(t_1 \Lambda_1 - M_{21} + M_{21} \frac{y^2}{b_2^2} \right) \left(-C_2 e^{\Lambda_1 x} + C_3 e^{-\Lambda_1 x} \right) \right. \\
& + \Lambda_2 \left(t_2 \Lambda_2 - 1 + \frac{y^2}{b_2^2} \right) \left(-C_4 e^{\Lambda_2 x} + C_5 e^{-\Lambda_2 x} \right) \\
& + \Lambda_3 \left(t_3 \Lambda_3 - M_{23} + M_{23} \frac{y^2}{b_2^2} \right) \left(-C_6 e^{\Lambda_3 x} + C_7 e^{-\Lambda_3 x} \right) \\
& \left. + C_8 - q \left(\frac{1}{G A_a} + \frac{x^2}{2 E I} - g^2 + g^2 \frac{y^2}{b_2^2} \right) \right\} \quad (V.61.b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{f3} = & C_1 \frac{h_3 x}{I} \\
& + E h_3 \left\{ \Lambda_1 \left(t_1 \Lambda_1 - M_{31} + M_{31} \frac{\bar{y}^2}{b_3^2} \right) \left(-C_2 e^{\Lambda_1 x} + C_3 e^{-\Lambda_1 x} \right) \right. \\
& + \Lambda_2 \left(t_2 \Lambda_2 - M_{32} + M_{32} \frac{\bar{y}^2}{b_3^2} \right) \left(-C_4 e^{\Lambda_2 x} + C_5 e^{-\Lambda_2 x} \right) \\
& + \Lambda_3 \left(t_3 \Lambda_3 - 1 + \frac{\bar{y}^2}{b_3^2} \right) \left(-C_6 e^{\Lambda_3 x} + C_7 e^{-\Lambda_3 x} \right) \\
& \left. + C_8 + q \left(\frac{1}{G A_a} + \frac{x^2}{2 E I} - g^3 + g^3 \frac{\bar{y}^2}{b_3^2} \right) \right\} \quad (V.61.c)
\end{aligned}$$

Podem ser explicitadas também as derivadas das funções

S_1 , S_2 e S_3 :

$$\begin{aligned}
S'_1 = & C_2 \Lambda_1 e^{\Lambda_1 x} - C_3 \Lambda_1 e^{-\Lambda_1 x} \\
& + C_4 \Lambda_2 M_{12} e^{\Lambda_2 x} - C_5 \Lambda_2 M_{12} e^{-\Lambda_2 x} \\
& + C_6 \Lambda_3 M_{13} e^{\Lambda_3 x} - C_7 \Lambda_3 M_{13} e^{-\Lambda_3 x} - g_1 q
\end{aligned}$$

(V.62.a)

$$\begin{aligned}
S'_2 = & C_2 \Lambda_1 M_{21} e^{\Lambda_1 x} - C_3 \Lambda_1 M_{21} e^{-\Lambda_1 x} \\
& + C_4 \Lambda_2 e^{\Lambda_2 x} - C_5 \Lambda_2 e^{-\Lambda_2 x} \\
& + C_6 \Lambda_3 M_{23} e^{\Lambda_3 x} - C_7 \Lambda_3 M_{23} e^{-\Lambda_3 x} - g_2 q
\end{aligned}
\tag{V.62.b}$$

$$\begin{aligned}
S'_3 = & C_2 \Lambda_1 M_{31} e^{\Lambda_1 x} - C_3 \Lambda_1 M_{31} e^{-\Lambda_1 x} \\
& + C_4 \Lambda_2 M_{32} e^{\Lambda_2 x} - C_5 \Lambda_2 M_{32} e^{-\Lambda_2 x} \\
& + C_6 \Lambda_3 e^{\Lambda_3 x} - C_7 \Lambda_3 e^{-\Lambda_3 x} - g_3 q
\end{aligned}
\tag{V.62.c}$$

Para que as soluções ficassem determinadas de forma fechada, restaria ainda que fossem definidas as constantes de integração de C_1 a C_{10} . Para isto devem ser aplicadas as condições de contorno correspondentes a cada caso em questão.

A seguir, são definidas explicitamente as 20 equações de contorno possíveis (5 condições de força e 5 geométricas para cada extremo). Substituindo o deslocamento transversal e as funções S nas expressões (V.22) tem-se as seguintes condições de contorno geométricas :

em $x=0$

de (V.22.a)

$$\begin{aligned}
\frac{C_1}{G A_a} - \Lambda_1 t_1(C_2 + C_3) - \Lambda_2 t_2(C_4 + C_5) - \Lambda_3 t_3(C_6 + C_7) \\
+ C_9 = \tilde{\Psi}(0)
\end{aligned}
\tag{V.63.a}$$

de (V.22.b)

$$t_1 (-C_2 + C_3) + t_2 (-C_4 + C_5) + t_3 (-C_6 + C_7) + C_{10} = \tilde{w}(0)
\tag{V.63.b}$$

de (V.22.c), sendo $\tilde{S}_1=0$

$$-C_1 g_1 + C_2 + C_3 + M_{12} (C_4 + C_5) + M_{13} (C_5 + C_6) = 0
\tag{V.63.c}$$

de (V.22.d), sendo $\tilde{S}_2=0$

$$-C_1 g_2 + M_{21} (C_2 + C_3) + C_4 + C_5 + M_{23} (C_5 + C_6) = 0 \quad (\text{V.63.d})$$

de (V.22.e), sendo $\tilde{S}_3=0$

$$-C_1 g_3 + M_{31} (C_2 + C_3) + M_{32} (C_4 + C_5) + C_5 + C_6 = 0 \quad (\text{V.63.e})$$

e em $x=L$ respectivamente,

$$\begin{aligned} & C_1 \left(\frac{1}{G A_a} + \frac{L^2}{2 E I} \right) - \Lambda_1 t_1 (C_2 e^{\Lambda_1 L} + C_3 e^{-\Lambda_1 L}) \\ & - \Lambda_2 t_2 (C_4 e^{\Lambda_2 L} + C_5 e^{-\Lambda_2 L}) - \Lambda_3 t_3 (C_6 e^{\Lambda_3 L} + C_7 e^{-\Lambda_3 L}) \\ & + C_9 = \tilde{\Psi}(L) \end{aligned} \quad (\text{V.64.a})$$

$$\begin{aligned} & C_1 \frac{L^3}{6 E I} + t_1 (-C_2 e^{\Lambda_1 L} + C_3 e^{-\Lambda_1 L}) \\ & + t_2 (-C_4 e^{\Lambda_2 L} + C_5 e^{-\Lambda_2 L}) + t_3 (-C_6 e^{\Lambda_3 L} + C_7 e^{-\Lambda_3 L}) \\ & + C_8 \frac{L^2}{2} + C_9 L + C_{10} + \frac{q L^4}{24 E I} = \tilde{w}(L) \end{aligned} \quad (\text{V.64.b})$$

$$\begin{aligned} & -C_1 g_1 + C_2 e^{\Lambda_1 L} + C_3 e^{-\Lambda_1 L} + M_{12} (C_4 e^{\Lambda_2 L} + C_5 e^{-\Lambda_2 L}) \\ & + M_{13} (C_6 e^{\Lambda_3 L} + C_7 e^{-\Lambda_3 L}) - g_1 L q = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.64.c})$$

$$\begin{aligned} & -C_1 g_2 + M_{21} (C_2 e^{\Lambda_1 L} + C_3 e^{-\Lambda_1 L}) + C_4 e^{-\Lambda_2 L} + C_5 e^{-\Lambda_2 L} \\ & + M_{23} (C_6 e^{-\Lambda_3 L} + C_7 e^{-\Lambda_3 L}) - g_2 L q = 0 \end{aligned} \quad (\text{V.64.d})$$

$$\begin{aligned}
 & -C_1 g_3 + M_{31} \left(C_2 e^{\Lambda_1 L} + C_3 e^{-\Lambda_1 L} \right) \\
 & + M_{32} \left(C_4 e^{\Lambda_2 L} + C_5 e^{-\Lambda_2 L} \right) + C_5 e^{\Lambda_3 L} + C_6 e^{-\Lambda_3 L} \\
 & - g_3 L q = 0 \qquad \qquad \qquad (V.64.e)
 \end{aligned}$$

Analogamente as condições de contorno de força são:

em $x=0$

de (V.23.a)

$$C_8 = -\frac{q}{G A_a} + \frac{M(0)}{E I} + 2 q \frac{(g_1 I_{f1} + g_2 I_{f2} + g_3 I_{f3})}{3 I} \qquad (V.65.a)$$

de (V.23.b)

$$C_1 = -P(0) \qquad \qquad \qquad (V.65.b)$$

de (V.23.c)

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \Lambda_1 (4 - 5 \Lambda_1 t_1)}{15} \quad (C_2 - C_3) \\
 & + \frac{2 \Lambda_2 (4 M_{12} - 5 \Lambda_2 t_2)}{15} \quad (C_4 - C_5) \\
 & + \frac{2 \Lambda_3 (4 M_{13} - 5 \Lambda_3 t_3)}{15} \quad (C_6 - C_7) \\
 & + \frac{2}{3} C_8 - \frac{8 g_1 q}{15} + \frac{2 q}{G A_a} = 0 \qquad \qquad \qquad (V.65.c)
 \end{aligned}$$

de (V.23.d)

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \Lambda_1 (4 M_{21} - 5 \Lambda_1 t_1)}{15} \quad (C_2 - C_3) \\
 & + \frac{2 \Lambda_2 (4 - 5 \Lambda_2 t_2)}{15} \quad (C_4 - C_5) \\
 & + \frac{2 \Lambda_3 (4 M_{23} - 5 \Lambda_3 t_3)}{15} \quad (C_6 - C_7) \\
 & + \frac{2}{3} C_8 - \frac{8 g_2 q}{15} + \frac{2 q}{G A_a} = 0 \qquad \qquad \qquad (V.65.d)
 \end{aligned}$$

de (V.23.e)

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \Lambda_1 (4 M_{31} - 5 \Lambda_1 t_1)}{15} (C_2 - C_3) \\
 & + \frac{2 \Lambda_2 (4 M_{32} - 5 \Lambda_2 t_2)}{15} (C_4 - C_5) \\
 & + \frac{2 \Lambda_3 (4 - 5 \Lambda_3 t_3)}{15} (C_6 - C_7) \\
 & + \frac{2}{3} C_8 - \frac{8 g_3 q}{15} + \frac{2 q}{G A_a} = 0
 \end{aligned} \tag{V.65.e}$$

em $x=L$, respectivamente

$$C_1 L + C_8 E I - M(L)$$

$$+ q \left(\frac{E I}{G A_a} - \frac{2 E (g_1 I_{f1} + g_2 I_{f2} + g_3 I_{f3})}{3 I} + \frac{L^2}{2} \right) = 0 \tag{V.66.a}$$

$$C_1 = - q L - P(L) \tag{V.66.b}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \Lambda_1 (4 - 5 \Lambda_1 t_1)}{15} (C_2 e^{\Lambda_1 L} - C_3 e^{-\Lambda_1 L}) \\
 & + \frac{2 \Lambda_2 (4 M_{12} - 5 \Lambda_2 t_2)}{15} (C_4 e^{\Lambda_2 L} - C_5 e^{-\Lambda_2 L}) \\
 & + \frac{2 \Lambda_3 (4 M_{13} - 5 \Lambda_3 t_3)}{15} (C_6 e^{\Lambda_3 L} - C_7 e^{-\Lambda_3 L}) \\
 & + \frac{2}{3} C_8 + q \left(- \frac{8 g_3}{15} + \frac{2}{G A_a} + \frac{L^2}{3 E I} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{V.66.c}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \Lambda_1 (4 M_{21} - 5 \Lambda_1 t_1)}{15} (C_2 e^{\Lambda_1 L} - C_3 e^{-\Lambda_1 L}) \\
 & + \frac{2 \Lambda_2 (4 - 5 \Lambda_2 t_2)}{15} (C_4 e^{\Lambda_2 L} - C_5 e^{-\Lambda_2 L}) \\
 & + \frac{2 \Lambda_3 (4 M_{23} - 5 \Lambda_3 t_3)}{15} (C_6 e^{\Lambda_3 L} - C_7 e^{-\Lambda_3 L}) \\
 & + \frac{2}{3} C_8 + q \left(- \frac{8 g_2}{15} + \frac{2}{G A_a} + \frac{L^2}{3 E I} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{V.66.d}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \Lambda_1 (4 M_{31} - 5 \Lambda_1 t_1)}{15} \left(C_2 e^{\Lambda_1 L} - C_3 e^{-\Lambda_1 L} \right) \\
+ & \frac{2 \Lambda_2 (4 M_{32} - 5 \Lambda_2 t_2)}{15} \left(C_4 e^{\Lambda_2 L} - C_5 e^{-\Lambda_2 L} \right) \\
+ & \frac{2 \Lambda_3 (4 - 5 \Lambda_3 t_3)}{15} \left(C_6 e^{\Lambda_3 L} - C_7 e^{-\Lambda_3 L} \right) \\
+ & \frac{2}{3} C_8 + q \left[-\frac{8 g_3}{15} + \frac{2}{G A_a} + \frac{L^2}{3 E I} \right] = 0 \quad (V.66.e)
\end{aligned}$$

A partir das expressões (V.63), (V.64), (V.65) e (V.66), são definidas as equações para os seguintes tipos de condições de contorno em cada extremo

em $x=0$

engaste (V.63.a), (V.63.b), (V.63.c), (V.63.d) e (V.63.e)

apoio (V.65.a), (V.63.b), (V.65.c), (V.65.d) e (V.65.e)

livre (V.65.a), (V.65.b), (V.65.c), (V.65.d) e (V.65.e)

em $x=L$

engaste (V.64.a), (V.64.b), (V.64.c), (V.64.d) e (V.64.e)

apoio (V.66.a), (V.64.b), (V.66.c), (V.66.d) e (V.66.e)

livre (V.66.a), (V.66.b), (V.66.c), (V.66.d) e (V.66.e)

Desejando-se impor algum deslocamento ou rotação prescritos, basta definir os valores de $\check{\Psi}$ e \check{w} .

Com as condições de contorno em $x=0$ e $x=L$, obtém-se 10 expressões, 5 para cada extremo, formando assim um sistema de equações algébricas lineares cujas incógnitas são as constantes de integração. A solução analítica deste sistema, é

obviamente, uma tarefa complexa, optando-se portanto pela solução numérica desta etapa final, através do processo de triangularização de Gauss.

V.7 - AUTOMATIZAÇÃO DO CÁLCULO DAS SOLUÇÕES

Para aplicação da formulação apresentada, foi desenvolvido um programa para microcomputador na linguagem TURBO PASCAL, denominado SLPONTE. A automatização do cálculo se fez de forma imediata, pois cada uma das etapas é, na verdade, uma simples programação de expressões já definidas. Isto é, o cálculo das características geométricas, da base de autovetores, a formação do sistema de equações de contorno, as funções incógnitas e as tensões, são definidas analiticamente, restando apenas a aplicação do algoritmo de Gauss para cálculo das constantes de integração. Encontra-se no APÊNDICE III o programa desenvolvido, cuja sequência é a seguinte:

* ENTRADA DE DADOS

São definidos os valores das características geométricas elásticas (E e G) e geométricas (H, L, t_a , b_1, b_2, b_3 , t_{f1} , t_{f2} , t_{f3}), o carregamento e as condições de contorno.

* CÁLCULO DAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS

São calculadas as áreas e inércias da seção transversal e de cada um de seus componentes (flanges e almas).

* CÁLCULO DOS AUTOVALORES

É formada e resolvida a equação característica associada ao problema de autovalor (V.38).

* DEFINIÇÃO DA BASE DE AUTOVETORES

Nesta etapa são formados os três autovetores que definem a nova base, de acordo com as expressões (V.47).

* FORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONTORNO

Em função das condições de contorno, são formadas 5 equações para cada um dos extremos, sendo escritas matricialmente na forma dos coeficientes de cada uma das constantes de integração. Os termos independentes formam um vetor de 10 posições

* SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

O sistema formado na etapa anterior é resolvido através do algoritmo de Gauss, obtendo-se as constantes de integração C_1 a C_{10} .

* APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Como resultados são obtidos ao longo da viga, o deslocamento transversal, as funções S_1 , S_2 , S_3 e suas derivadas. São ainda apresentadas as tensões axiais nos flanges em qualquer ponto.

V.8 - COMENTÁRIOS ADICIONAIS

Na formulação apresentada é resolvido um problema de autovalor (V.38), cuja solução é desenvolvida considerando-se que os autovalores (V.41) são todos diferentes e não nulos ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$), resultando em um sistema de três equações (V.51) e três incógnitas (S_1 , S_2 e S_3). Os casos em que esta condição ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq 0$) não se verifica não foram previstos na programação, ocasionando problemas numéricos. Sabendo-se que cada autovalor está diretamente ligado à largura do flange correspondente (λ_1 com b_1 , etc), a consideração de larguras de flanges iguais e/ou nulas, é a origem deste tipo de problema numérico. Este problema pode ser solucionado utilizando-se valores muito próximos dos desejados, por exemplo com 0,5% de diferença do valor real. O mais correto porém, seria definir o sistema diferencial para cada caso, conforme mostrado na figura V.3.

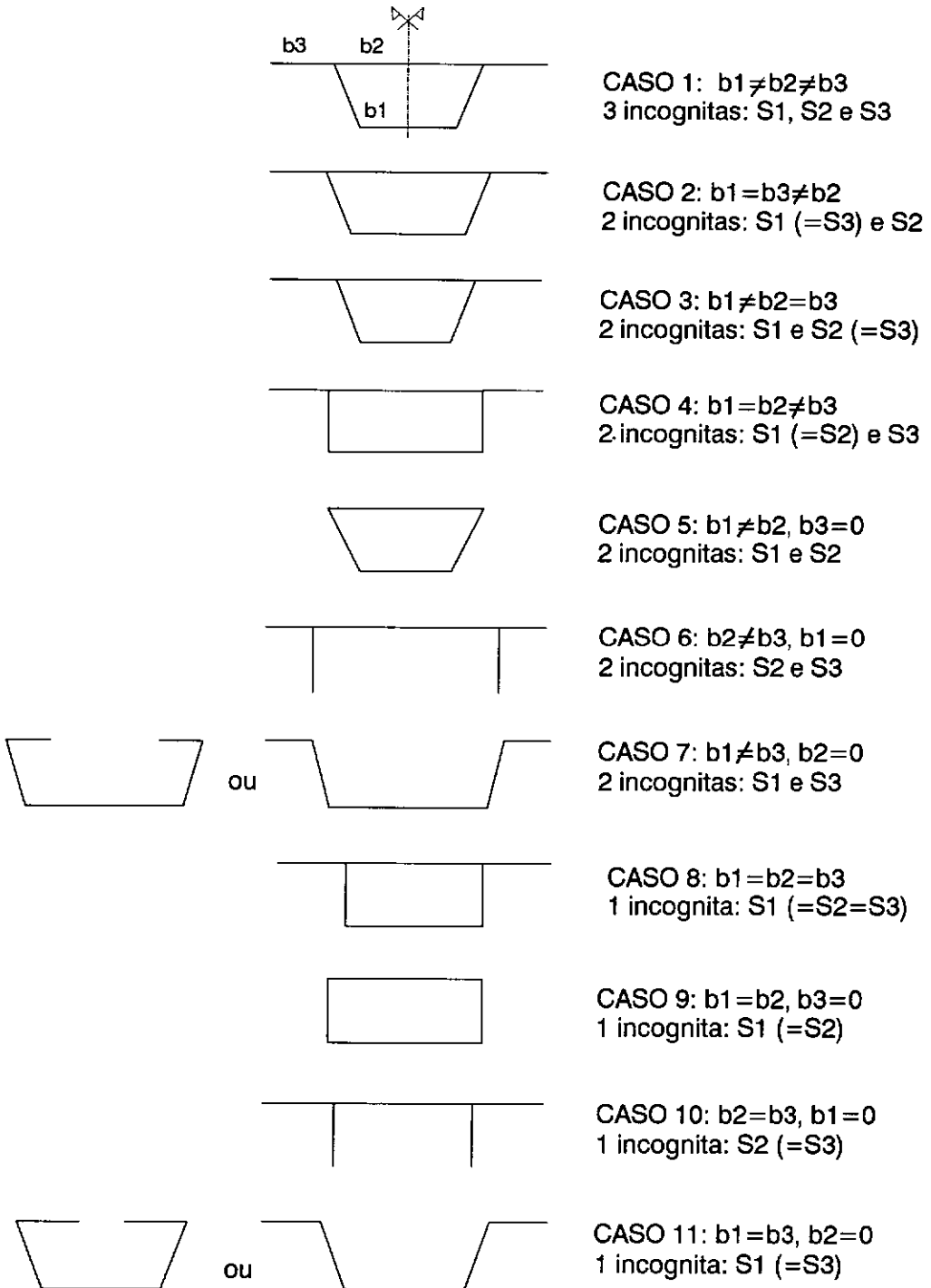


Figura V.3 - Modelo geral (CASO 1) e casos particulares

O caso 9 da figura V.3, foi tratado nos capítulos II, III e IV, e por ser um caso particular da seção típica de pontes, também pode ser analisado pelo programa SLPONTE. As soluções fechadas deduzidas para este caso também podem ser utilizadas para o caso 8, modificando-se apenas a inércia dos flanges (II.27), que passaria a ser:

$$I_f = 6 b t_f h^2 \quad (II.27)'$$

CHANG e ZHENG [23] analisaram o caso 8, para uma viga engastada e livre sujeita às cargas distribuída uniforme e concentrada no extremo livre. As expressões para as tensões axiais nos flanges publicada por estes autores coincidem com as apresentadas no capítulo IV. Porém CHANG e ZHENG não utilizaram a teoria de vigas de Timoshenko, que não influencia as expressões das tensões axiais e da função S para os casos de carga considerados, mas pode produzir grandes diferenças nos deslocamentos transversais os quais não foram apresentados no artigo.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÃO DAS FORMULAÇÕES

Iniciamente a formulação desenvolvida nos capítulos II, III e IV é verificada através de alguns exemplos. Em seguida é estudada a influência da geometria da seção transversal no comportamento de estruturas de seção caixão retangular. Finalmente são apresentadas algumas aplicações da formulação desenvolvida para seções típicas de pontes.

VI.1 - VERIFICAÇÃO DAS SOLUÇÕES ANALÍTICAS PARA SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR

Para a verificação da formulação, foi escolhido o exemplo publicado no artigo de FOUTCH e CHANG [18], no qual segue-se um procedimento idêntico ao que foi aqui desenvolvido, porém suas equações diferenciais de equilíbrio foram resolvidas numericamente utilizando-se o algoritmo de Runge-Kutta. As soluções assim obtidas foram então comparadas com os resultados do mesmo modelo discretizado em elementos finitos. Este exemplo, mostrado na figura VI.1, é uma viga engastada e livre com seção transversal retangular de paredes delgadas e carga uniformemente distribuída q .

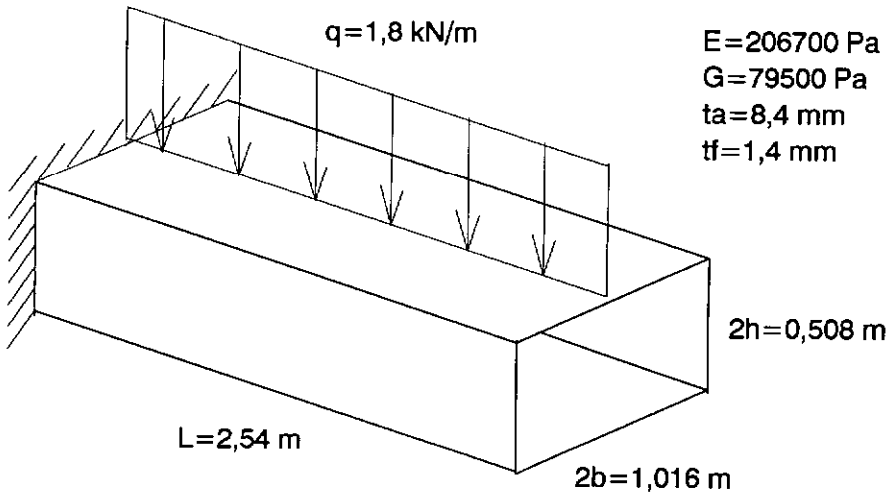


Figura VI.1 - Exemplo do artigo de FOUTCH e CHANG

O deslocamento transversal w , as tensões axiais nos flanges, a função S e sua derivada S' , foram calculadas respectivamente segundo as expressões (IV.46), (IV.47), (IV.45) e (IV.48) e todos os resultados coincidiram com os apresentados no artigo de FOUTCH e CHANG, ficando assim verificadas todas as expressões relativas à carga uniforme.

Sabendo-se que, pelo princípio da superposição, as respostas para a carga uniforme devem ser iguais a soma daquelas correspondentes às cargas linearmente crescentes e decrescentes, para o mesmo valor q , estas últimas podem também ser verificadas. Assim, o mesmo exemplo foi analisado para os três tipos de carga, e as respostas das funções S e suas derivadas são apresentadas na figura VI.2. Estas respostas juntamente com os deslocamentos transversais e tensões axiais mostraram-se corretas. Desta forma ficam também verificadas as fórmulas deduzidas para estes dois últimos tipos de carregamento.

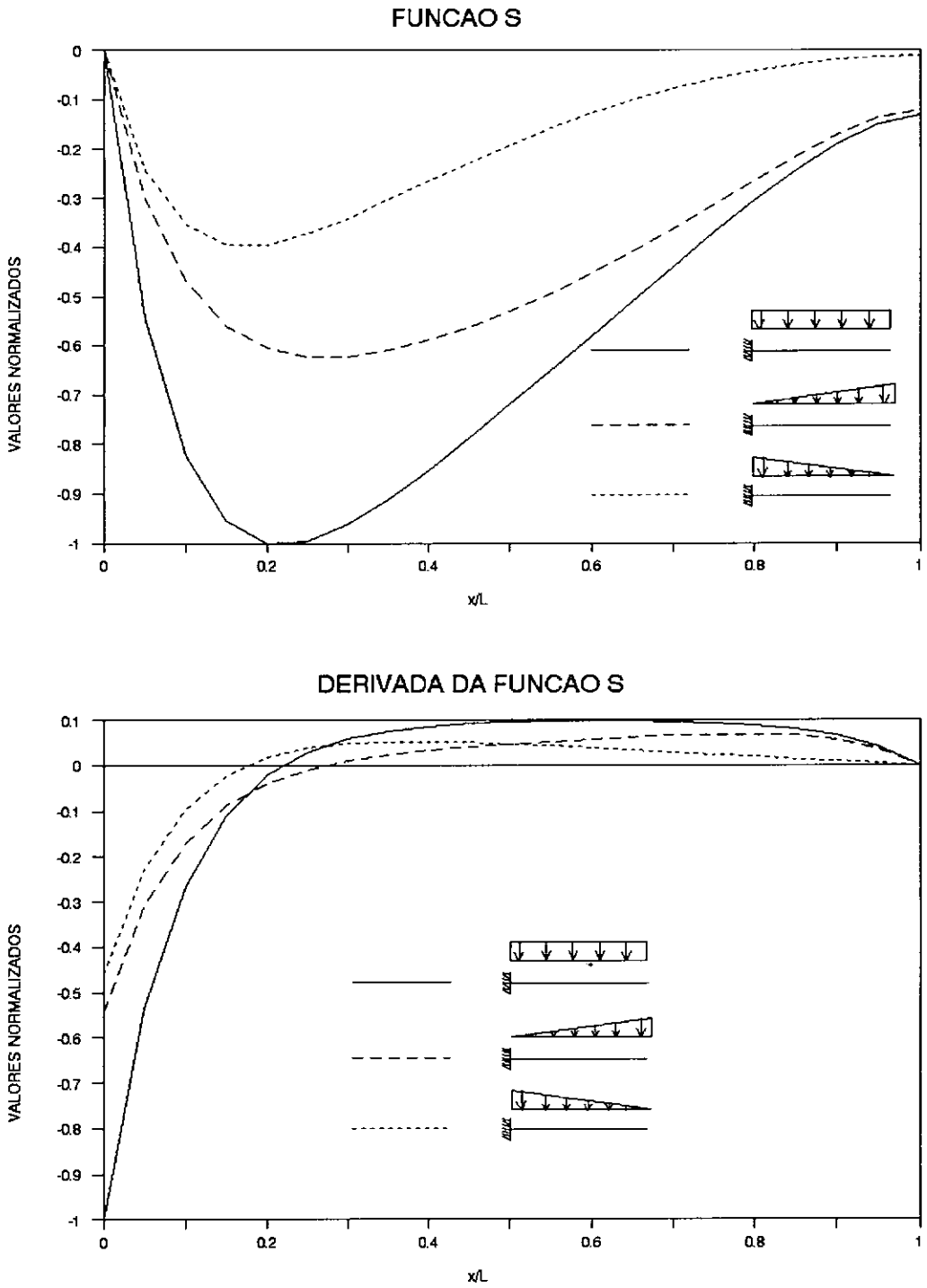


Figura VI.2 - Funções S e S' para carga uniforme, linear crescente e decrescente (exemplo da figura VI.1)

VI.2 - ESTUDO DA INFLUÊNCIA DAS CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS EM SEÇÕES RETANGULARES

Neste ítem é feita uma análise inicial da influência da geometria da seção transversal no comportamento de uma viga engastada e livre, avaliando a forma como variam as tensões, deslocamentos e funções S e S' . Para isto optou-se por um exemplo básico, a partir do qual um parâmetro de interesse é variado, mantendo-se todos os outros constantes. As características geométricas do exemplo básico são definidas na figura VI.3. Este exemplo pode ser considerado como sendo a simulação do comportamento de um edifício alto de concepção tubular sujeito a cargas horizontais de vento.

A distribuição das tensões tangenciais nas almas não será estudada mais detalhadamente. Basta observar sua expressão (IV.8) para concluir que tais tensões apresentam um comportamento bastante simples, pois são diretamente proporcionais a função β , que assume uma forma linear (caso de carga uniforme), parabólica (carga linearmente variável), constante (carga concentrada no extremo livre) ou nula (momento no extremo livre) e a única característica geométrica influente é a área da alma. Portanto não se justifica um estudo da influência da geometria da seção transversal para estas tensões tangenciais.

Não houve aqui a preocupação de se estabelecer proporções que representassem fielmente um caso real, porém existem estudos [24] que permitem que o edifício tubular, formado de pilares e vigas, possa ser modelado como um meio contínuo.

A variação das características geométricas segue a tabela VI.1 na qual pode ser observado que foram efetuadas cinco variações para cada parâmetro, sendo sempre de dois valores abaixo e três acima a partir da dimensão básica. Por exemplo, para a variação dos flanges, os parâmetros $2h$, t_a e t_f têm valores constantes mostrados na primeira linha da

tabela. O parâmetro $2b$, variável, assume no primeiro exemplo o valor de 50 m, no segundo 75 m e assim sucessivamente, conforme os valores mostrados na tabela VI.1.

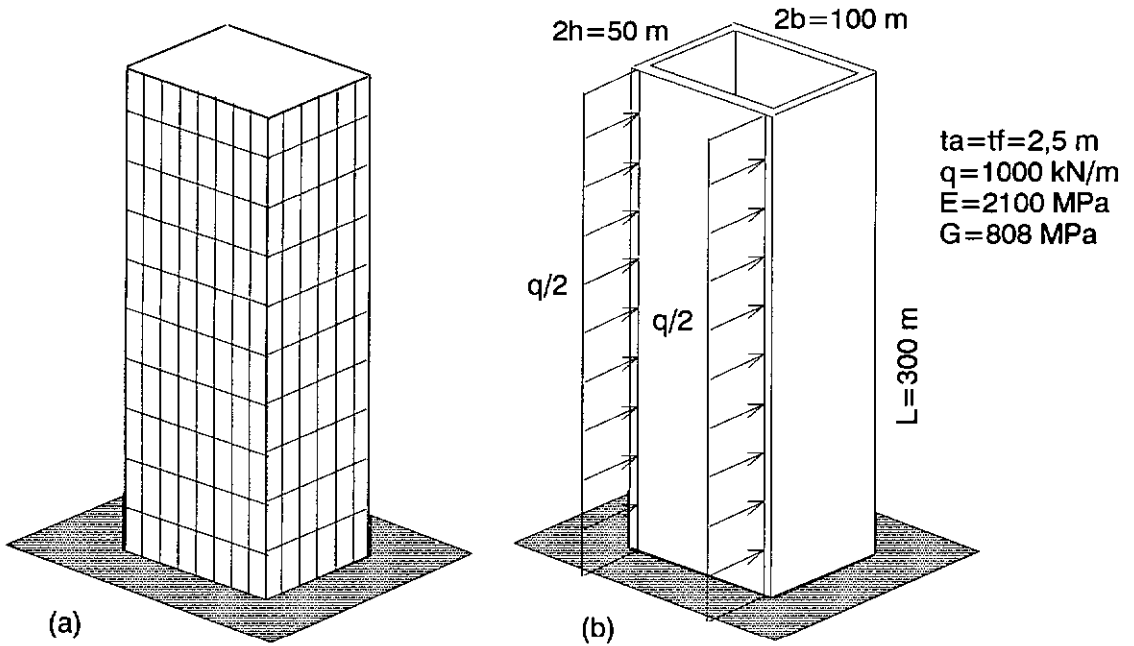


Figura VI.3 - Exemplo básico (a) Estrutura real
(b) Modelo equivalente

Vigas com flanges e almas formados por chapas enrijecidas, também podem ser simulados por um contínuo. Desta forma, o aumento das espessuras equivaleria ao aumento da quantidade ou tamanho dos enrijecedores, assim como para o edifício equivaleria ao aumento do número ou área dos pilares.

Deve-se notar que este estudo não visa obter conclusões de caráter geral, pois para isto seria necessário que se efetuasse uma análise dimensional do problema.

	2b (m)	2h (m)	t_a (m)	t_f (m)
variação da largura dos flanges	50 75 100 125 150 175	50	2,5	2,5
variação da altura das almas	100	30 40 50 60 70 80	2,5	2,5
variação da espessura das almas	100	50	0,5 1,5 2,5 3,5 4,5 5,5	2,5
variação da espessura dos flanges	100	50	2,5	0,5 1,5 2,5 3,5 4,5 5,5
variação simultanea da espessura dos flanges e das almas	100	50	0,5 1,5 2,5 3,5 4,5 5,5 $t_a = t_f$	

Tabela VI.1- Variação dos parâmetros geométricos

VI.2.1 - DESLOCAMENTO TRANSVERSAL

Neste ítem são apresentadas as influências que a variação de cada uma das características geométricas acarreta no deslocamento transversal w .

Os resultados são sempre comparados com os que seriam obtidos utilizando-se a teoria clássica de vigas (Euler-Bernoulli), que são referidas por w_{EB} .

As elásticas obtidas com a presente formulação, expressão (IV.46) e a teoria linear são, logicamente, muito semelhantes em sua forma. A figura VI.4 mostra um comportamento típico, notando-se que a resposta segundo a teoria clássica é sempre mais rígida.

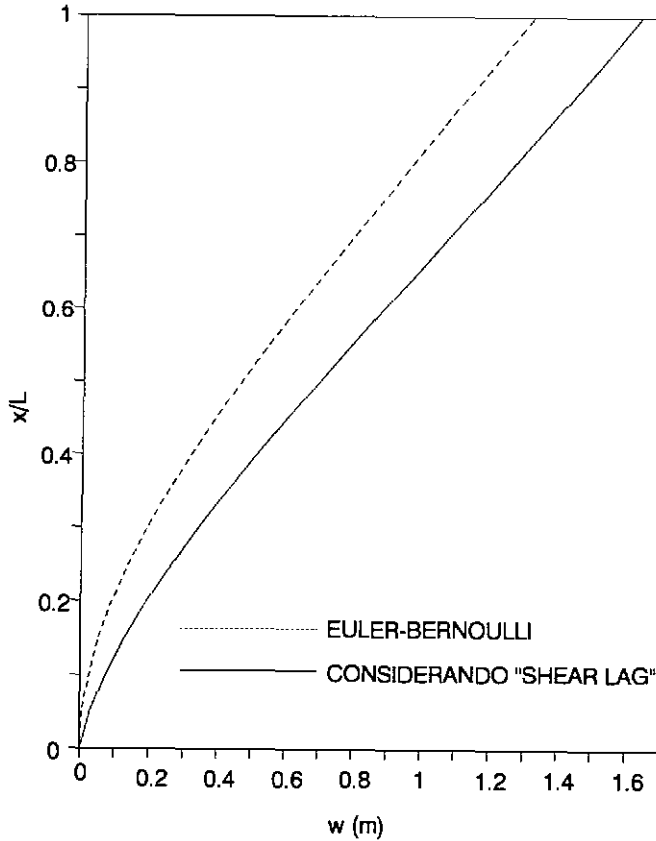


Figura VI.4 - Deslocamento transversal para exemplo básico

A diferença entre as duas formulações pode então ser sintetizada pelo valor do deslocamento máximo. Assim o estudo é feito a partir da relação w/w_{EB} na seção do extremo livre, para a variação de cada parâmetro. Os gráficos obtidos são apresentados na figura VI.5, onde se nota que, com a consideração do "shear lag", a variação das espessuras do flange e da alma simultaneamente não afetam a razão w/w_{EB} , que se mantém constante em 1,23. Já com a variação da espessura da alma, esta relação é decrescente e muito influenciada para espessuras muito pequenas, chegando a valores superiores a 1,8. Para os demais parâmetros variados, a relação w/w_{EB} é sempre crescente, variando entre 1,1 e 1,5.

Para que os gráficos possam ser comparados mais facilmente, os mesmos foram apresentados na mesma escala vertical.

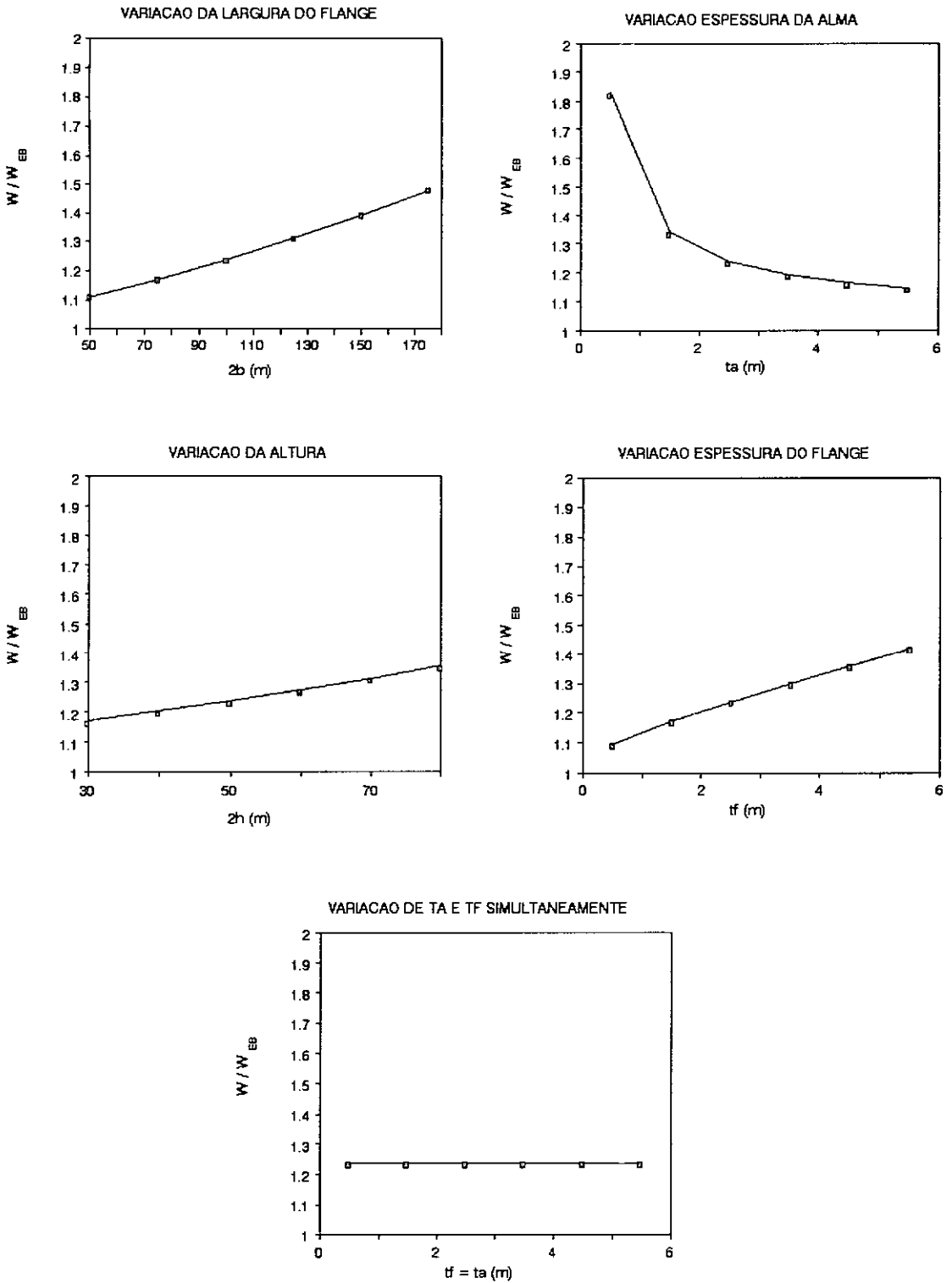


Figura VI.5 - Razão w/w_{EB} no extremo livre para a variação de cada parâmetro.

VI.2.2 - FUNÇÕES S e S'

São apresentados agora os gráficos da função S e sua derivada S' ao longo da viga, para a variação de cada parâmetro.

Basicamente existem dois aspectos a serem observados nos gráficos de variação da função S , que são sua magnitude e seu ponto de máximo (em valor absoluto). A magnitude da função S além de indicar a intensidade do "shear lag", é também diretamente proporcional à tensão cisalhante no flange ao longo da viga. O interesse no ponto de máximo da função S é duplo, já que nesta seção ocorre: (i) a inversão da curvatura do diagrama de tensões axiais no flange e (ii) valores máximos de "shear lag" e de tensão tangencial no flange.

A localização do ponto de máximo da função S pode ser ainda melhor identificada nos gráficos da derivada da função S pelo ponto onde S' é nulo. O objetivo principal dos gráficos de S' é apresentar a variação de intensidade da componente parabólica das tensões axiais nos flanges ao longo da viga, como pode-se notar na expressão (II.10).

As figuras VI.6 a VI.10 apresentam os gráficos das funções S e S' , onde as setas indicam o sentido crescente do parâmetro em questão. Nestes gráficos pode-se observar que os parâmetros mais influentes sobre a intensidade de "shear lag" são a espessura da seção (variação das espessuras das almas e dos flanges simultaneamente), seguidos pela altura da viga e espessura do flange, cujas famílias de curvas apresentam variações pronunciadas. Por outro lado, a variação da largura do flange tem uma influência moderada sobre o "shear lag", mas seu valor cresce com o aumento deste parâmetro, ao contrário dos demais. O efeito da variação da espessura da alma é praticamente desprezível quando comparado ao efeito dos demais parâmetros. Observa-se ainda que a intensidade do "shear lag" no extremo livre da viga é independente da espessura da alma.

Nos gráficos de S' pode se observar inicialmente, que o ponto de inversão da curvatura das tensões axiais não é

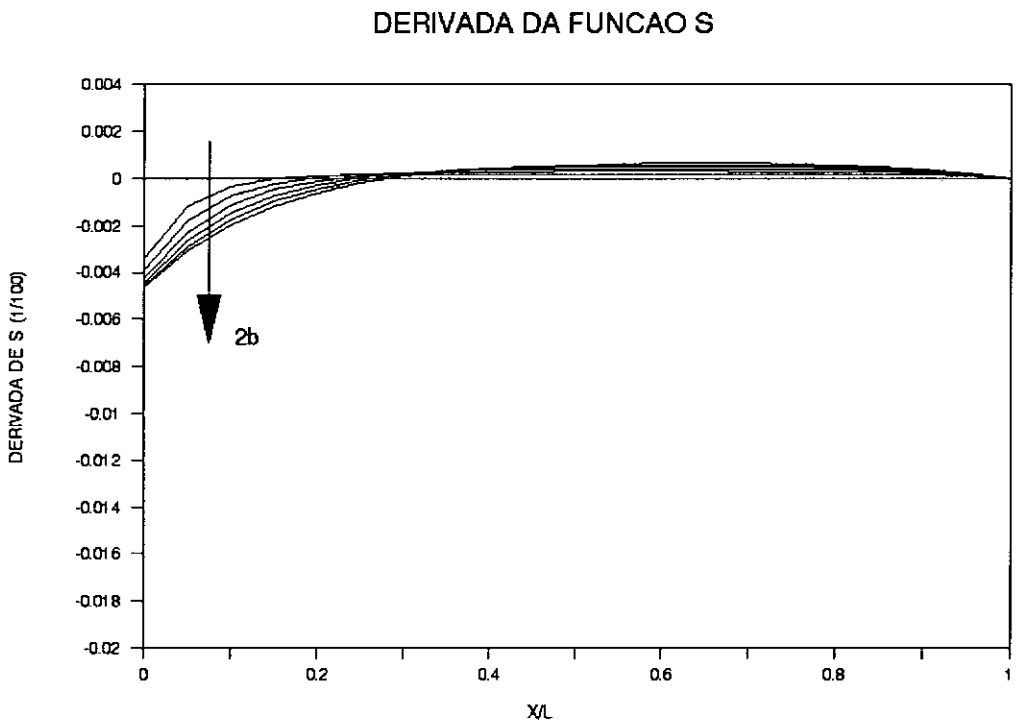
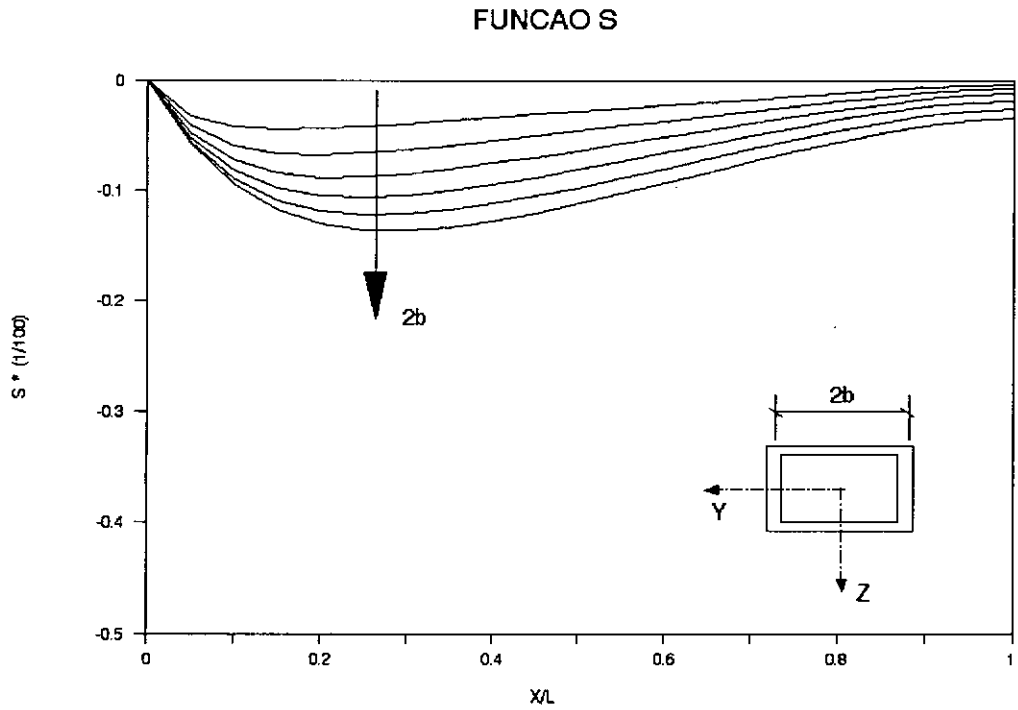


Figura VI.6 - Efeito da variação da largura do flange

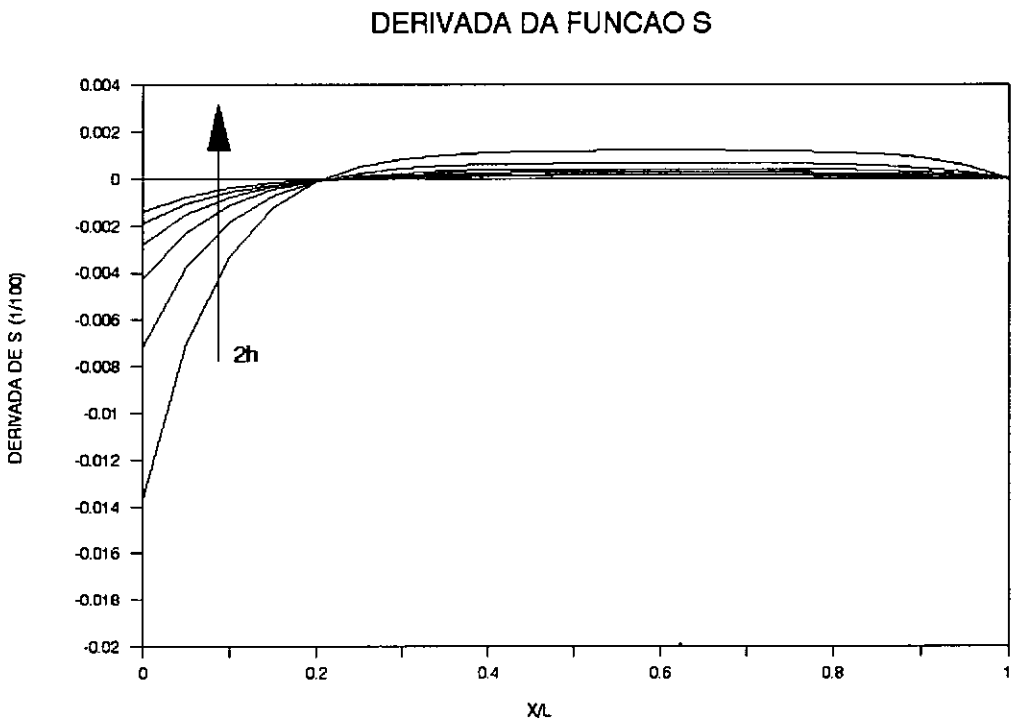
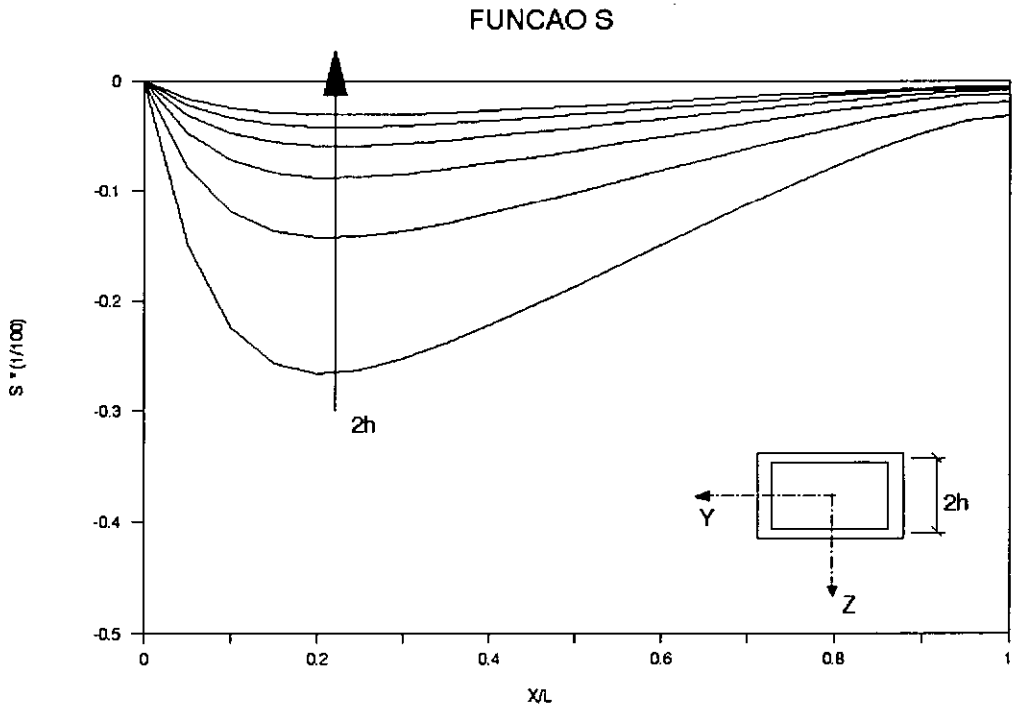
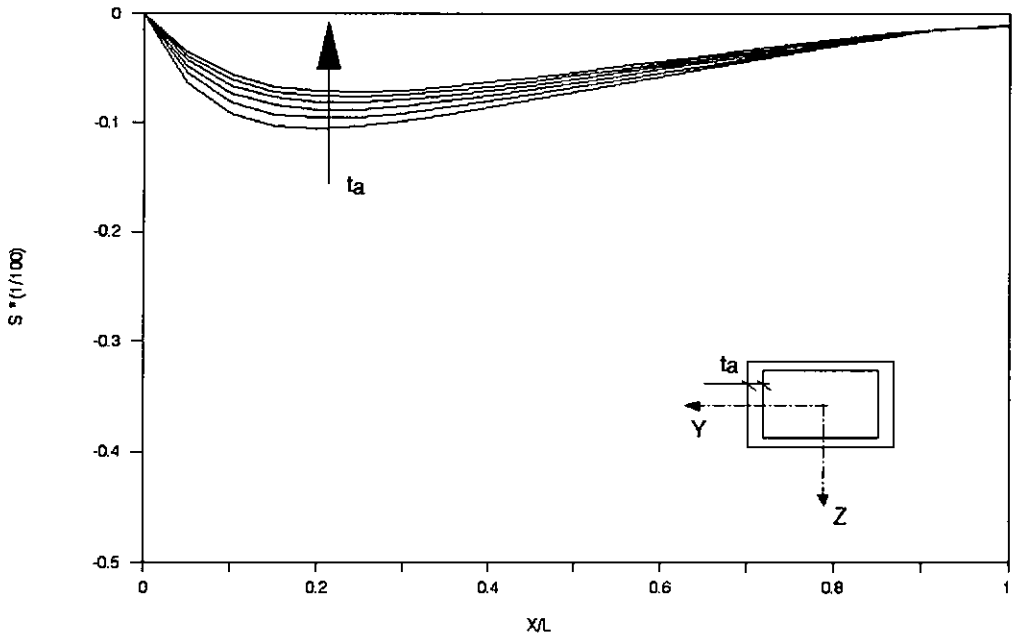


Figura VI.7 - Efeito da variação da altura da alma

FUNCAO S



DERIVADA DA FUNCAO S

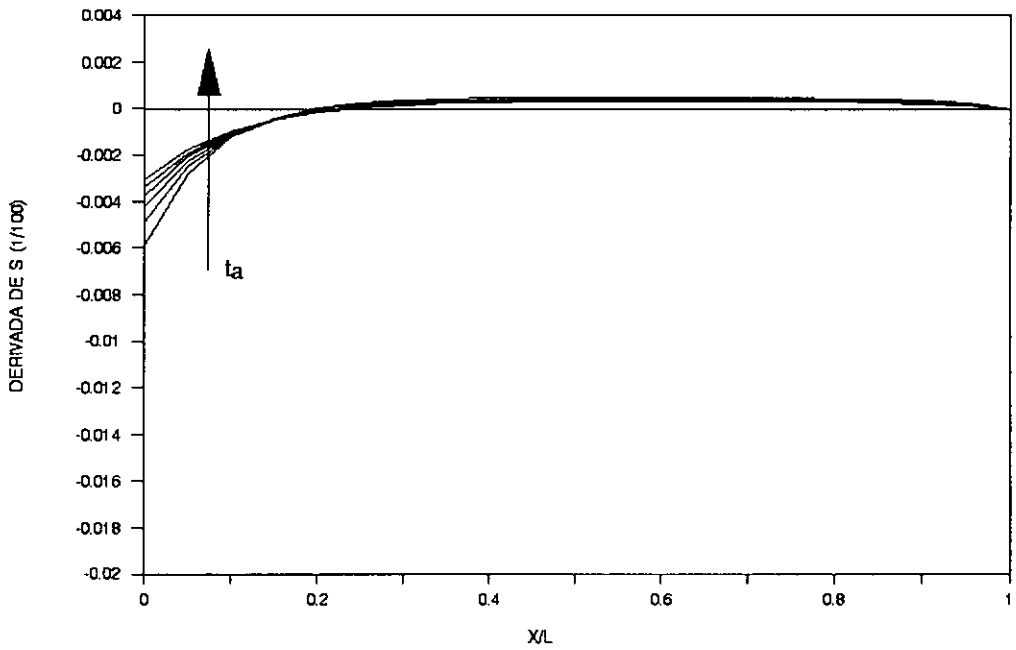


Figura VI.8 - Efeito da variação da espessura da alma

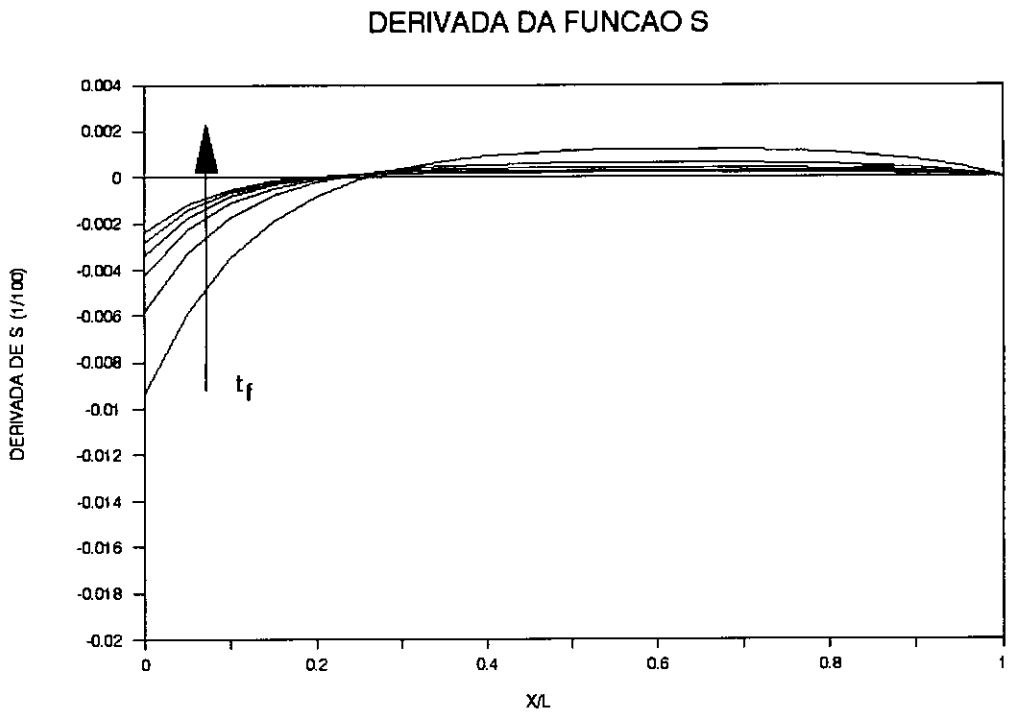
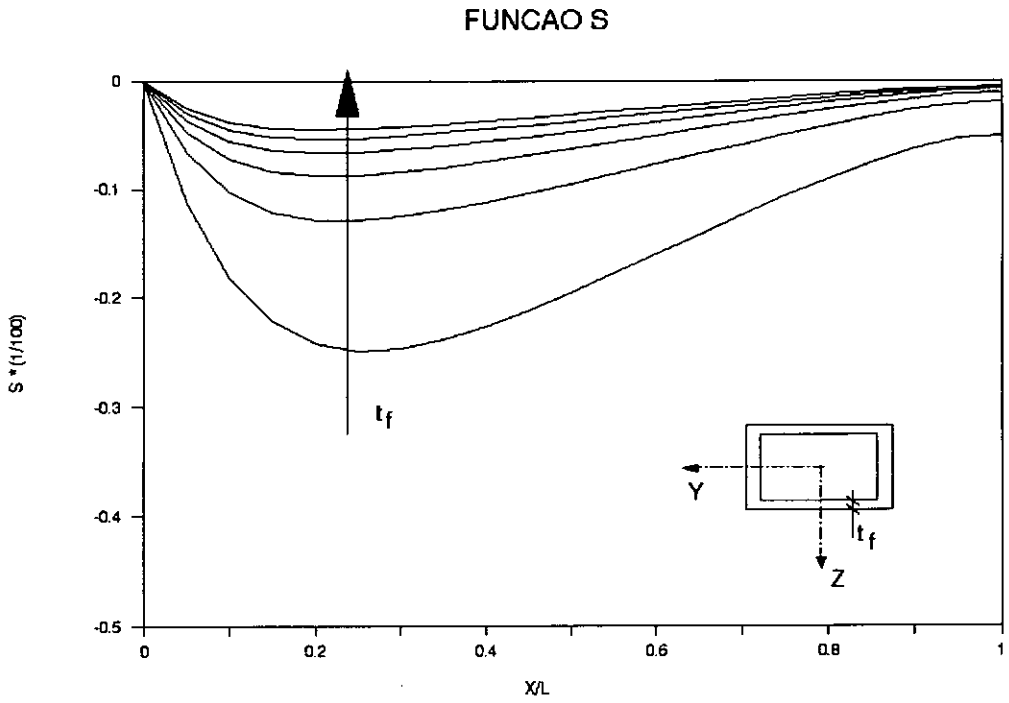


Figura VI.9 - Efeito da variaçao da espessura do flange

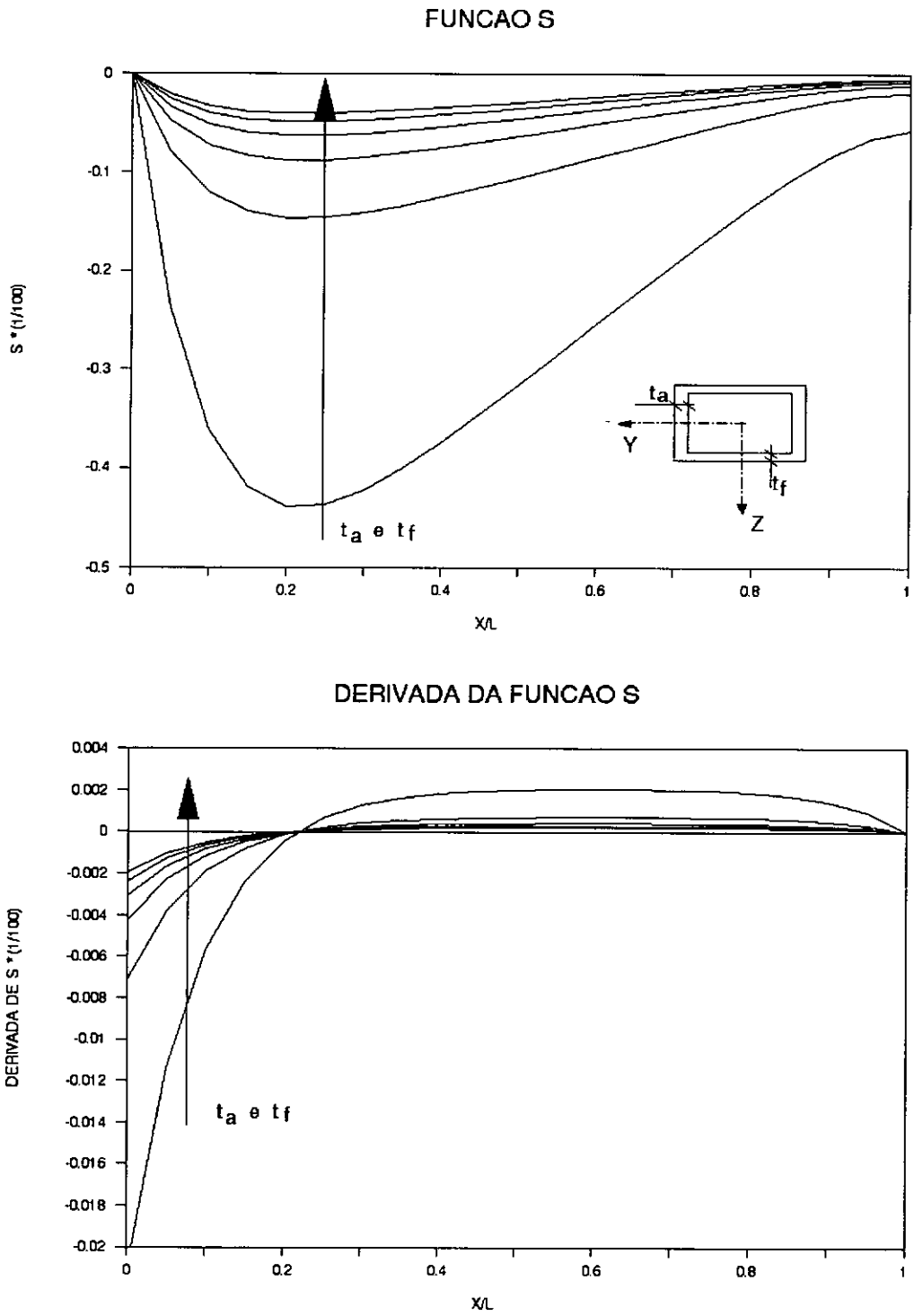


Figura VI.10 - Efeito da variação das espessuras (t_a e t_f)

influenciado pela variação da altura, ocorrendo sempre em $x/L=0,2$. A variação das espessuras dos flanges e das almas, isolada ou simultaneamente, acarreta pequenas alterações na posição desta inversão. A largura dos flanges é a característica que mais influencia o ponto de inversão da curvatura das tensões, que se situa entre $x/L=0,15$ para $2b=50$ m e $x/L=0,3$ para $2b=175$ m.

Os gráficos de S' mostram ainda que a maior intensidade da distribuição parabólica da tensão axial no flange ocorre no engaste, onde o valor de S' é máximo, enquanto que pelos gráficos de S , observa-se que nesta mesma seção o "shear lag" é nulo.

VI.2.3 - TENSÕES AXIAIS NOS FLANGES

As tensões axiais em $x/L=0$ e $x/L=1/2$ para o exemplo base, calculadas pela expressão (IV.47) e pela teoria clássica de vigas (σ_{EB}), são mostradas na figura VI.11.

As tensões axiais nos flanges numa seção transversal, podem ser bem caracterizadas pelas tensões situadas nos seus bordos ($y/b=\pm 1$) e centro ($y/b=0$). Desta forma foram escolhidas quatro seções transversais ($x/L=0, 1/4, 1/2$ e $3/4$) para as quais é obtido o desenvolvimento da relação σ/σ_{EB} nos bordos e centro dos flanges para a variação de cada parâmetro. Estes resultados encontram-se nas figuras VI.12 a VI.15.

Observando-se os gráficos para a seção do engaste ($x/L=0$), na figura VI.12, nota-se que, com a variação de qualquer um dos parâmetros geométricos, as tensões nos bordos do flange ($y/b=\pm 1$) são maiores do que a calculada pela teoria clássica de vigas, enquanto no centro do flange ($y/b=0$) as tensões são menores.

Ainda para a seção do engaste ($x/L=0$) pode-se observar, nos gráficos que mostram as influências da altura da seção e das espessuras da alma e do flange, variando isolada ou

simultaneamente, que a relação de tensões em $y/b=0$ permanece aproximadamente constante com valor de 0,7. Por outro lado, com a variação da largura do flange, a razão σ/σ_{EB} em $y/b=0$ decresce linearmente com o acréscimo deste parâmetro, enquanto para $y/b=\pm 1$, esta razão é linearmente crescente. Portanto quanto maior o flange, maior a diferença entre as tensões axiais no centro e nos bordos do flange, o que acarreta uma curvatura mais acentuada no diagrama dessas tensões. Esta diferença se mostra de menor intensidade nos casos de aumento da espessura do flange, para o qual σ/σ_{EB} sofre um pequeno acréscimo, e de aumento da altura e espessura da alma, para o qual σ/σ_{EB} experimenta um pequeno decréscimo.

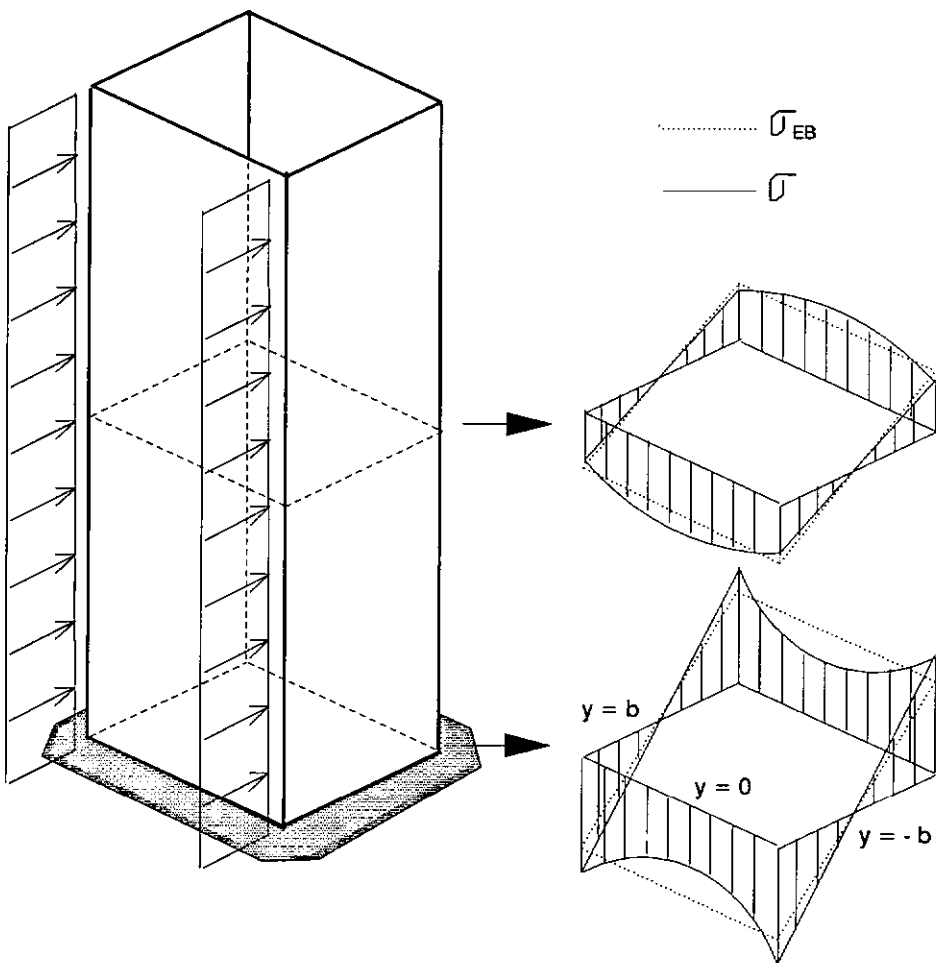


Figura VI.11 - Tensões axiais no flange para o exemplo básico

Para a seção transversal $x/L=1/4$ (figura VI.13), observa-se que para as variações da largura e espessura dos flanges, a relação entre as tensões em $y/b=0$ é crescente, chegando a valores superiores a 1, enquanto para os bordos dos flanges, a relação é decrescente, atingindo valores inferiores a unidade. Isto mostra que a partir de uma certa largura ou espessura dos flanges, a tensão no centro dos mesmos passa a ser maior que nos bordos para $x/L=1/4$. O ponto onde as curvas se interceptam corresponde ao valor do parâmetro para o qual a tensão é linear ($S'=0$) em $x/L=1/4$. Nota-se ainda que este ponto ocorre em $\sigma/\sigma_{EB}=1$, o que mostra que a tensão calculada levando-se em conta "shear lag" é igual a tensão calculada pela teoria clássica de vigas nesta seção transversal. Para os demais parâmetros, as tensões no centro do flange são maiores que as dos bordos, concluindo-se assim que para qualquer um destes parâmetros, a seção transversal onde a tensão no flange tem distribuição linear é anterior a $x/L=1/4$. Como observação adicional, nota-se que para esta seção transversal, a relação σ/σ_{EB} é muito próxima da unidade para todos os gráficos.

Para as seções transversais $x/L=1/2$ e $3/4$ (figuras VI.14 e VI.15), os gráficos se comportam de forma semelhante. Com o aumento da largura dos flanges nota-se que a diferença entre a relação de tensões para $y/b=0$ e $y/b=\pm 1$, é crescente. Em $x/L=3/4$ observa-se ainda que a curva para $y/b=\pm 1$ atingiu valores negativos para a variação da largura do flange, o que significa que houve uma inversão do esforço com relação ao da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Isto significa que, por exemplo, o flange que deveria estar totalmente comprimido, está com seus bordos tracionados para larguras de flanges superiores a 130 cm. Este fato é surpreendente, mas deve-se ressaltar que as tensões em $x/L=3/4$, são muito pequenas, comparadas com as da seção do engaste.

A relação entre tensões em $x/L=3/4$ é aproximadamente linear para os demais parâmetros, sendo constante para para a variação simultânea das espessuras (t_a e t_f). A tensão no centro dos flanges fica em torno de 40% superior a σ_{EB} , e nos bordos cerca de 60% inferiores.

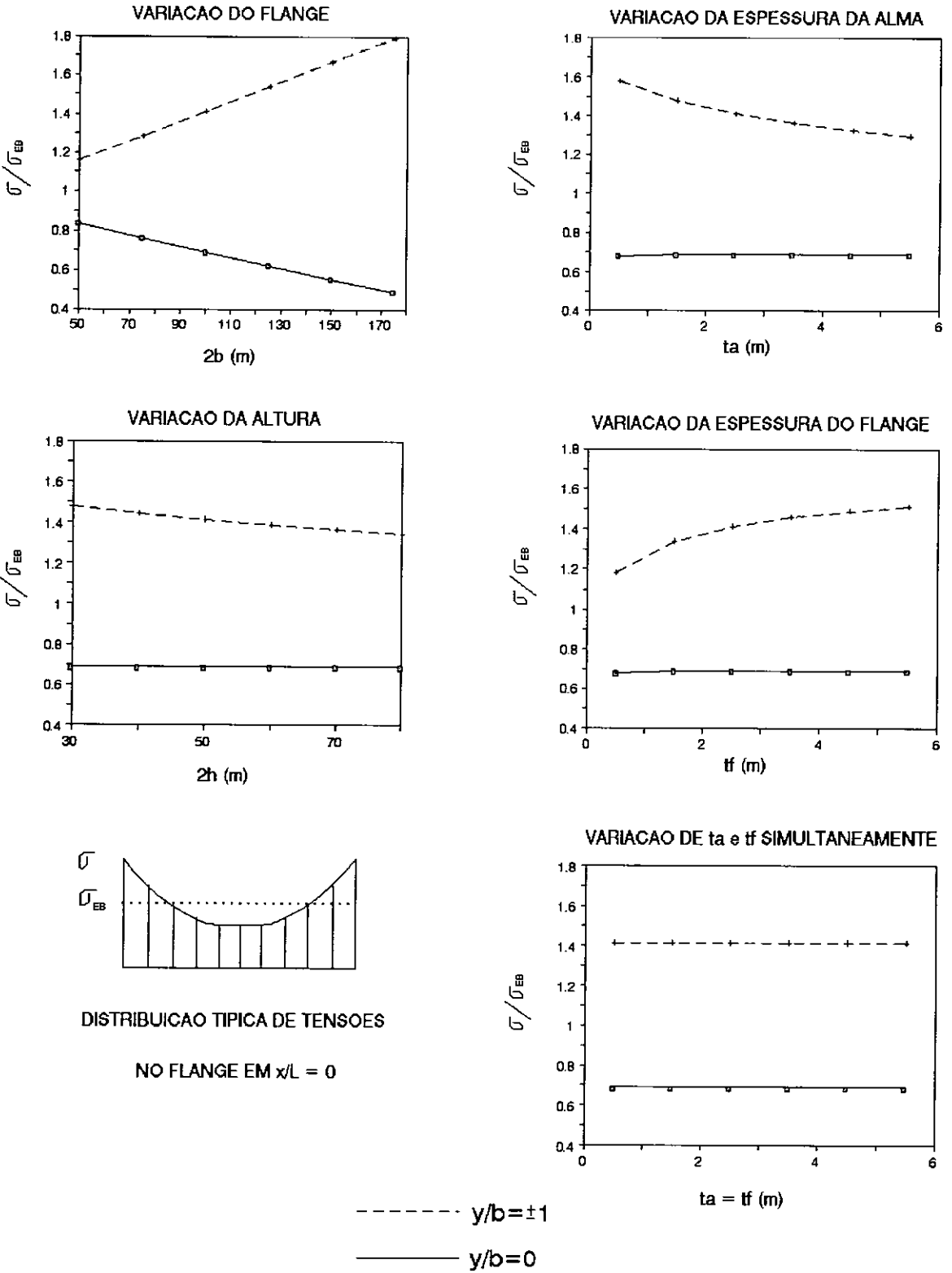


Figura VI.12 - Relações σ/σ_{EB} em $x/L = 0$

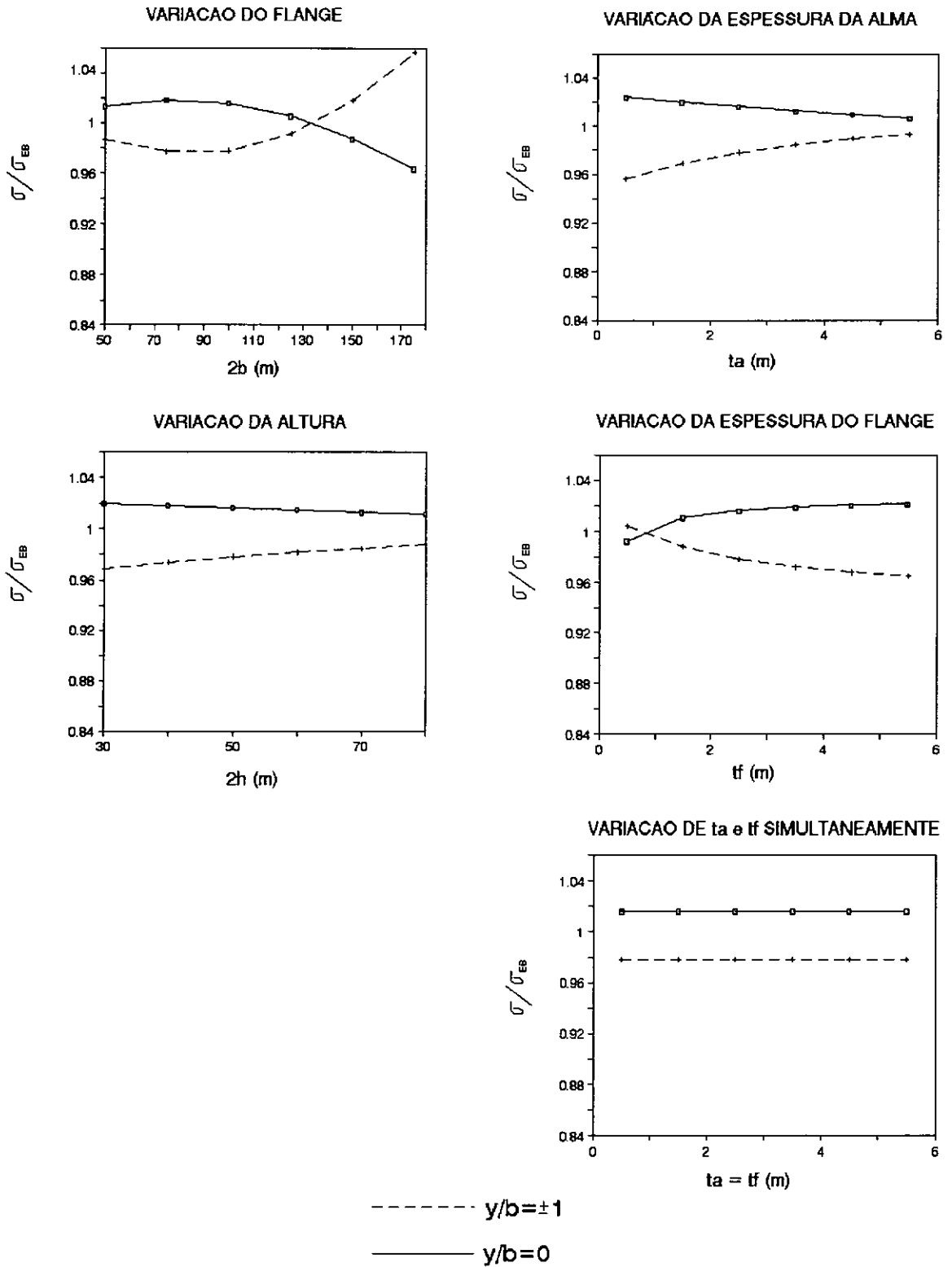
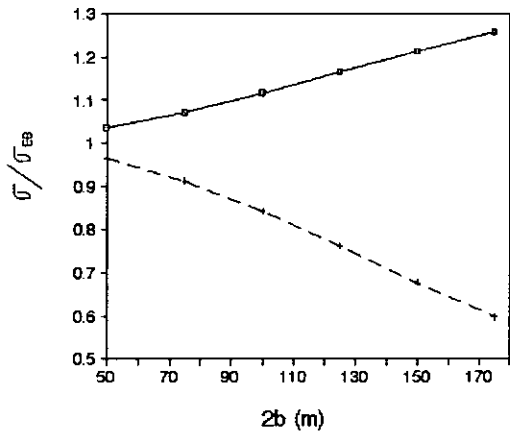
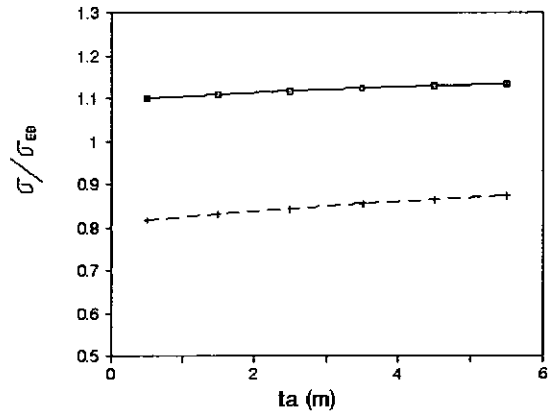


Figura VI.13 - Relações σ/σ_{EB} em $x/L = 1/4$

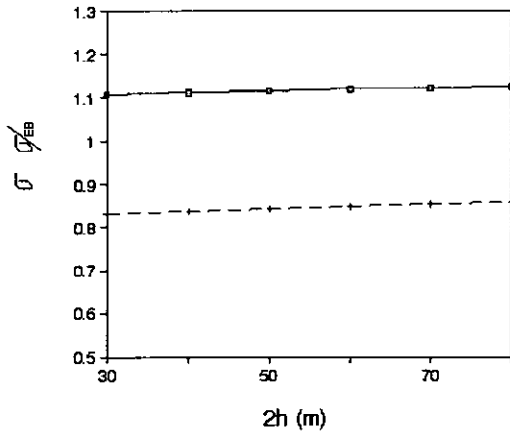
VARIACAO DA LARGURA DO FLANGE



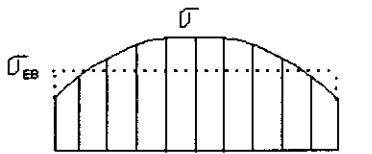
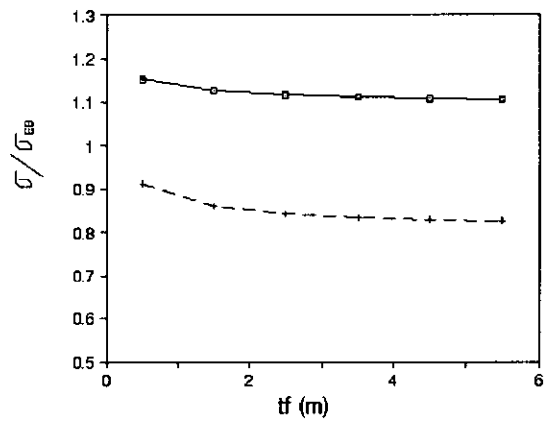
VARIACAO DA ESPESSURA DA ALMA



VARIACAO DA ALTURA



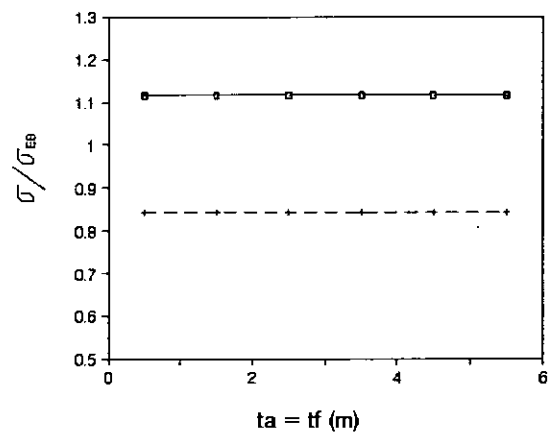
VARIACAO DA ESPESSURA DO FLANGE



DISTRIBUICAO TIPICA DE TENSOES

NO FLANGE EM $x/L = 1/2$

VARIACAO DE ta e tf SIMULTANEAMENTE

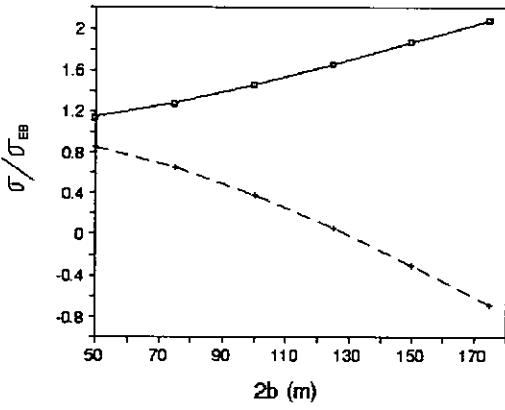


----- y/b=±1

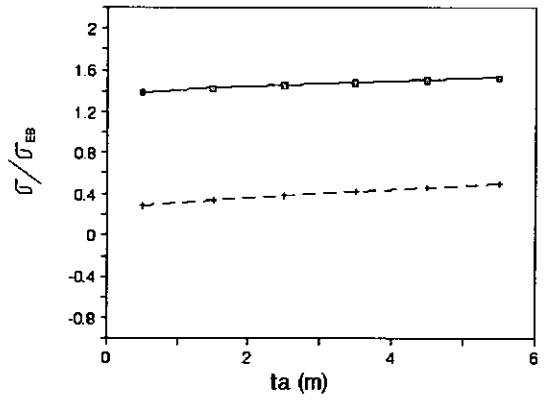
————— y/b=0

Figura VI.14 - Relações σ/σ_{EB} em $x/L = 1/2$

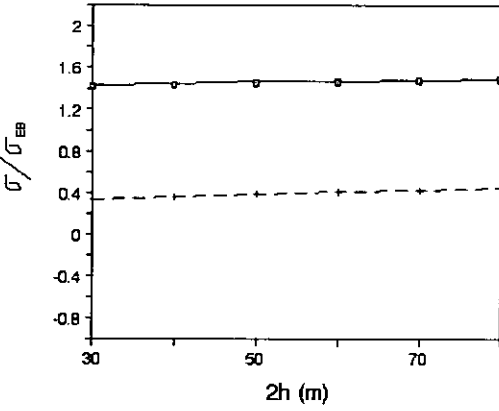
VARIACAO DA LARGURA DO FLANGE



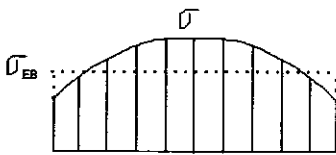
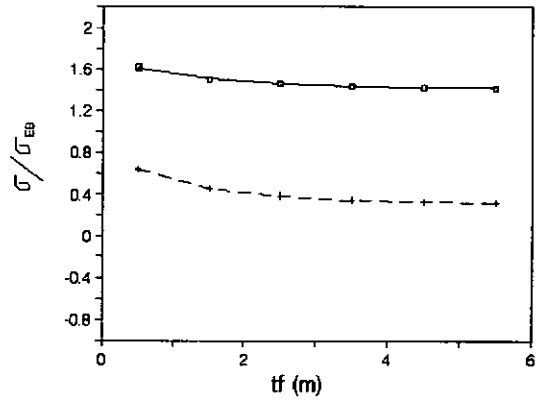
VARIACAO DA ESPESSURA DA ALMA



VARIACAO DA ALTURA



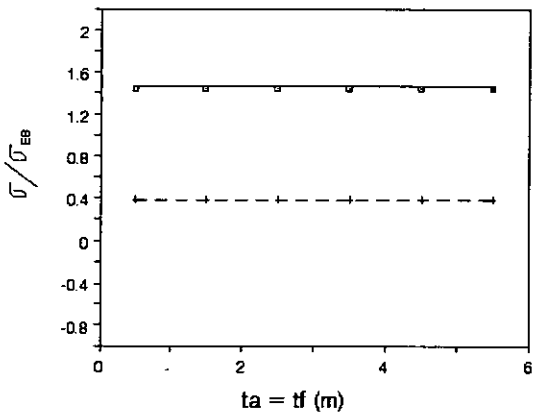
VARIACAO DA ESPESSURA DO FLANGE



DISTRIBUICAO TIPICA DE TENSOES

NO FLANGE EM $x/L = 3/4$

VARIACAO DE ta e tf SIMULTANEAMENTE



----- y/b=±1
 ————— y/b=0

Figura VI.15 - Relações σ/σ_{EB} em $x/L = 3/4$

VI.3 - APLICAÇÃO DA FORMULAÇÃO PARA SEÇÕES TÍPICAS DE PONTES

São agora apresentadas algumas aplicações da formulação para seções típicas de pontes, desenvolvida no capítulo V. Para isto é utilizado o programa SLPONTE já descrito.

Inicialmente, para efeito de verificação, são analisados alguns exemplos já publicados em artigos. A seguir, são criadas novas situações com diferentes condições de contorno e de carregamento, para o exemplo básico do ítem VI.2. Finalmente faz-se uma análise dos deslocamentos transversais em vigas curtas, comparando-se os resultados obtidos com aqueles dados pelas teorias clássica e de Timoshenko.

VI.3.1 - VERIFICAÇÃO DA FORMULAÇÃO

Os exemplos escolhidos para verificação da formulação foram extraídos do artigo de DEZI e MENTRASTI [19]. Trata-se de uma viga engastada e livre sujeita a um carregamento uniforme, como apresentado na figura VI.16.a. Para este modelo são analisadas duas situações, $b_1 \neq b_2 \neq b_3$ (figura VI.16.b) e $b_1 = b_2 \neq b_3$ (figura VI.16.e). No primeiro caso as funções S e suas derivadas S' para cada um dos flanges são apresentadas nas figuras VI.16.c e VI.16.d respectivamente. Nota-se que a amplitude da função S é proporcional ao comprimento do flange correspondente. Nas figuras VI.16.f e VI.16.g, estão apresentados os gráficos de variação de S e S' para o caso de almas verticais. Observa-se que as funções relativas aos flanges iguais são sempre coincidentes. Comparando-se estes resultados com os do referido artigo, conclui-se que os mesmos são coincidentes. Ainda como verificação, foram analisados alguns dos exemplos apresentados nos ítem anterior, fazendo $b_1 \cong b_2$ e b_3 relativamente pequeno. Ficou assim comprovada a eficiência da formulação e da automatização do processo de cálculo.

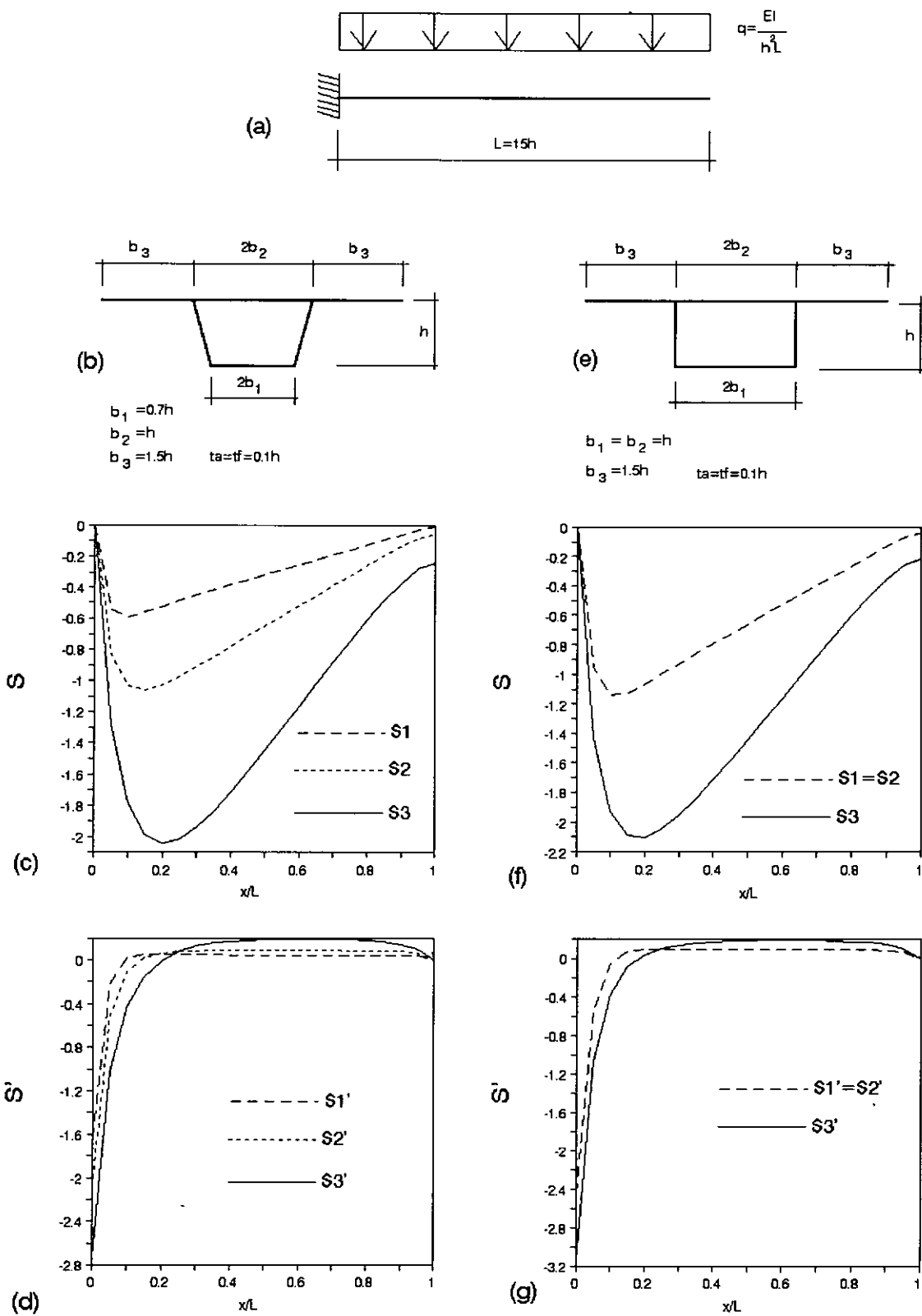


Figura VI.16 - Resultados para os exemplos de DEZI

Na formulação apresentada por DEZI e MENTRASTI, o potencial das cargas é transformado através de um processo de integração por partes, e substituído pela seguinte expressão equivalente, dependente da distribuição de momento fletor ao longo da viga:

$$\Omega = \int_0^L M(x) w'' dx - M \beta \Big]_0^L \quad (\text{VI.1})$$

Desta forma surge como incógnita adicional a função $M(x)$, o que levou os autores a tratarem de forma diferenciada os problemas estaticamente determinados e indeterminados. No caso de problemas estaticamente determinados, a função $M(x)$ é conhecida, e as equações diferenciais de equilíbrio são integradas de forma análoga ao que foi exposto no capítulo V. Por outro lado, para estruturas estaticamente indeterminadas os autores não apresentam nenhuma solução definitiva, sugerindo apenas uma forma aproximada, na qual deve-se partir da distribuição de momentos fletores dada pela teoria clássica de vigas.

VI.3.2 - ESTUDO DAS FUNÇÕES S E S' PARA DIVERSOS CARREGAMENTOS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

Lembrando que as tensões tangenciais no flange (II.13) são diretamente proporcionais à função S , e S' representa a intensidade da parcela não linear das tensões axiais nos flanges, nota-se que é possível se ter uma boa visão do comportamento de distribuição de tensões de uma viga, examinando-se apenas a distribuição das funções S e S' . Assim são estudadas várias situações a partir do exemplo da figura VI.17, sendo mostradas somente as funções S e S' para cada caso. Os resultados encontram-se nas figuras VI.18 a VI.20.

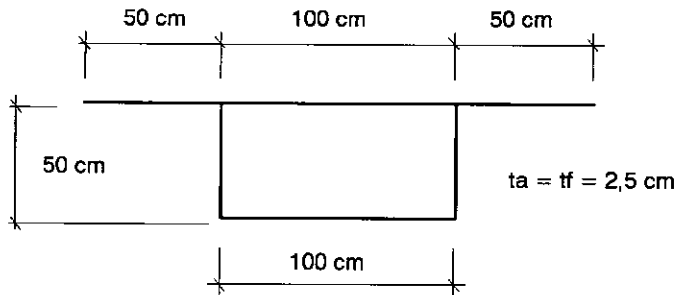


Figura VI.17 - Seção transversal para estudo das funções S e S'

Este estudo tem como objetivo ilustrar as diferenças de comportamento da distribuição de deslocamentos axiais e tensões ao longo da viga em função das condições de contorno e carregamentos. Destaca-se que a maioria destes diferentes comportamentos não foram encontrados durante a pesquisa bibliográfica, daí o interesse em apresentá-los reunidos. Este exemplo foi escolhido para simplificação dos gráficos, pois nele só existe uma função S para a seção típica de pontes, onde os três flanges têm dimensões idênticas. Numa seção de pontes, com flanges de comprimentos diferentes, as magnitudes das funções S para cada flange seriam distintas porém sua forma seria basicamente a mesma. Como este estudo visa comparar as formas de distribuição de S e S' , fica justificado o emprego da seção transversal da figura VI.17.

Observando-se a figura VI.18 pode ser feita uma comparação de vigas com diferentes condições de contorno, sujeitas a um mesmo carregamento distribuído uniforme. Dos gráficos da função S , conclui-se que a tensão tangencial no flange (II.13) assume valores maiores para a viga engastada e livre do que para as demais condições de apoio. A reversão do "shear lag" ocorre, obviamente, no mesmo ponto ($x/L=0,5$) para as vigas simétricas, bi-engastada e bi-apoiada, e em outro

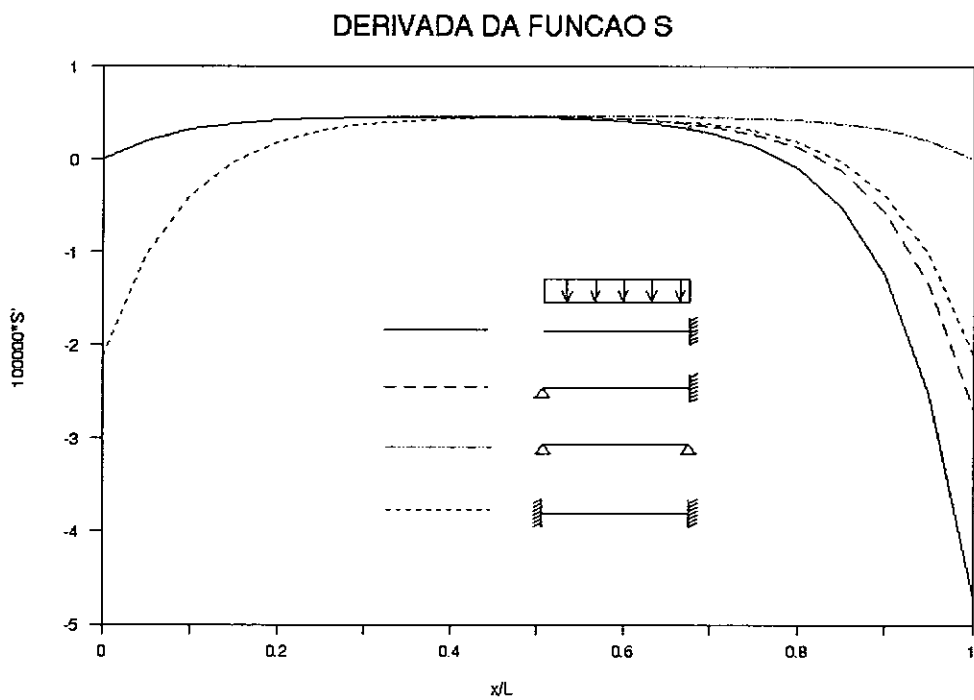
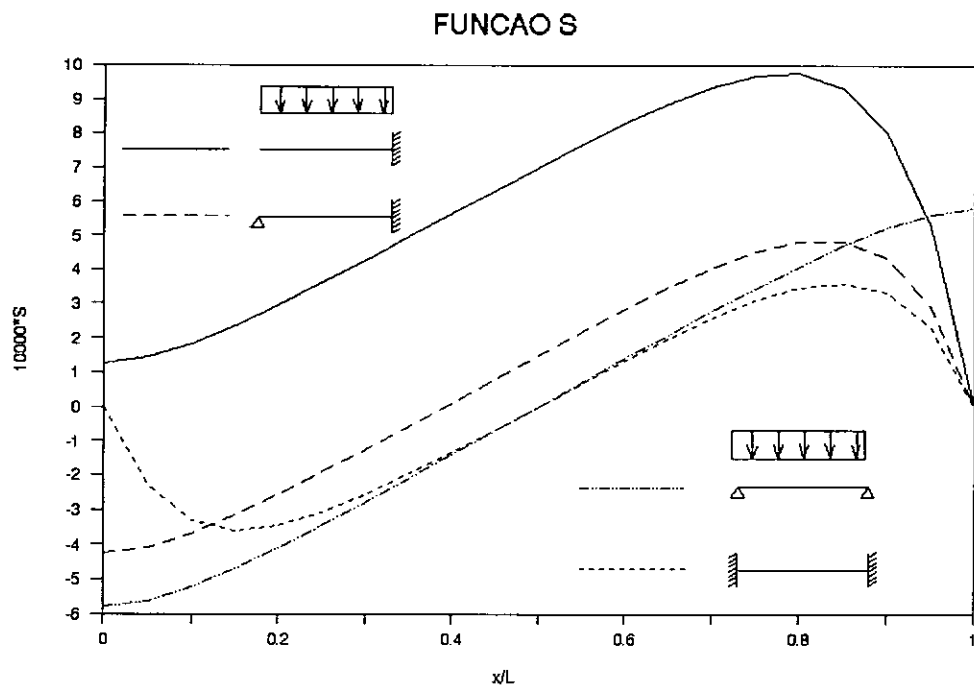


Figura VI.18 - Funções S e S' para carga distribuida

ponto para a condição apoio-engaste. A viga engastada-livre não apresenta esta reversão.

As curvas da função S' mostram que a inversão da curvatura das tensões axiais nos flanges, ou seja quando S' troca de sinal, ocorre apenas para vigas onde um dos extremos é engastado, porém o ponto onde se verifica esta inversão ($S'=0$), varia conforme a condição de apoio no outro extremo da viga. Nota-se ainda que este fenômeno ocorre em dois pontos simetricamente dispostos para a viga bi-engastada. Na seção $x/L=1$, S' apresenta valores maiores para a condição livre-engaste, concluindo-se então que neste ponto a curvatura das tensões axiais é mais acentuada do que para as demais condições. No trecho entre $x/L=0,45$ e $x/L=0,52$, o valor de S' é o mesmo para todas as condições de contorno apresentadas. Observa-se ainda que para uma viga simétrica, a função S é anti-simétrica e a função S' é simétrica.

A figura VI.19 mostra as curvas das funções S e sua derivada para três condições de contorno com o mesmo momento concentrado aplicado em um dos extremos da viga. Os gráficos da função S mostram que a reversão do "shear lag" ocorre somente para os casos de bi-apoio e apoio-engaste, porém em pontos diferentes ao longo da viga. Para a condição livre-engaste, observa-se que a partir de $x/L=0,52$, a função é nula, ou seja, neste trecho não existe "shear lag". A seção transversal com maior tensão tangencial é aquela em que a carga momento está aplicada.

Ainda na figura VI.19, observando-se a função S' , conclui-se que a inversão de curvatura das tensões axiais nos flanges ocorre somente para o caso de apoio-engaste. Para os demais casos, nota-se que a partir de $x/L=0,57$ a distribuição de tensões axiais no flange é linear.

Para uma viga engastada e livre com carga concentrada aplicada no extremo livre, têm-se as seguintes curvas de S e

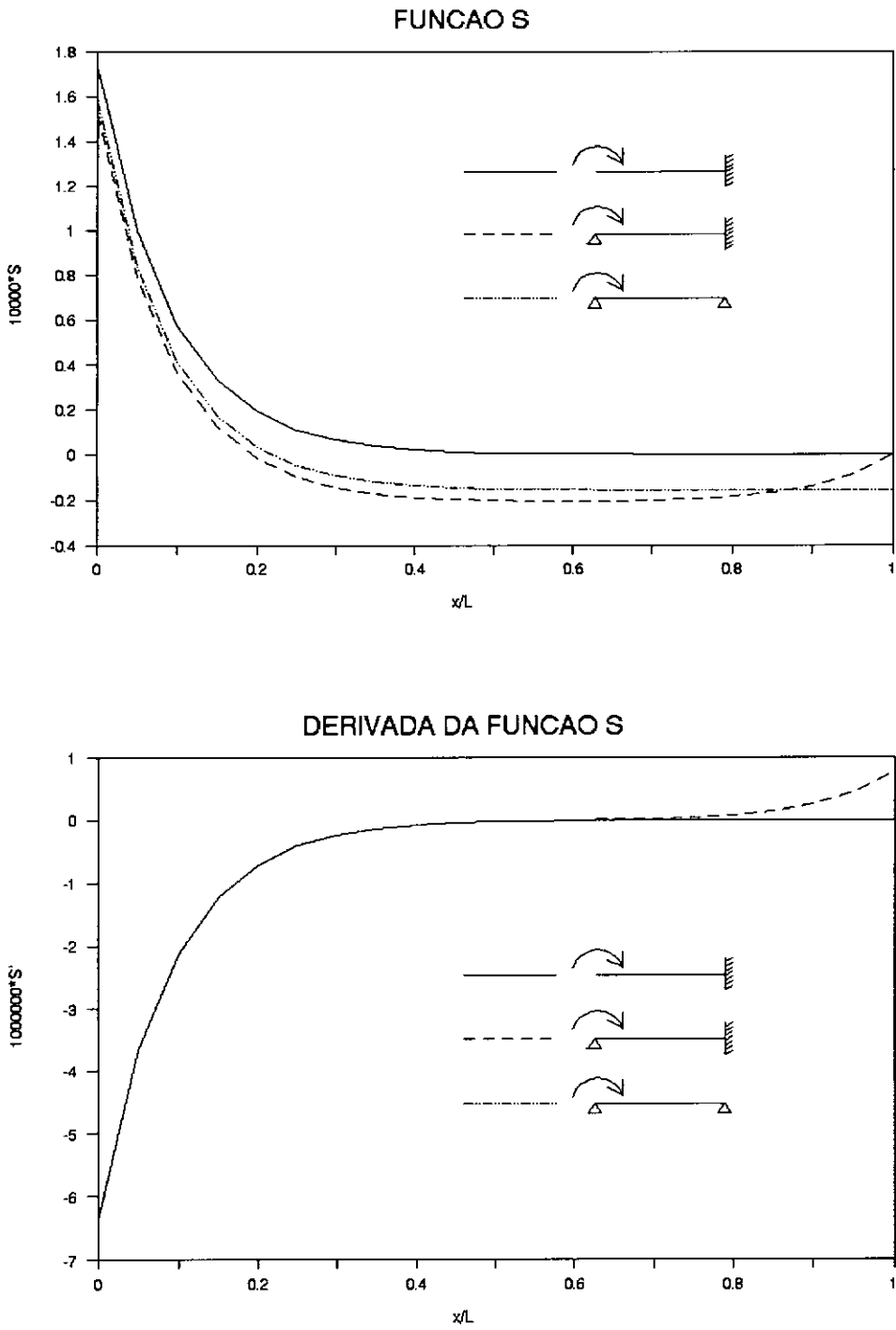


Figura VI.19 - Funções S e S' para carga momento

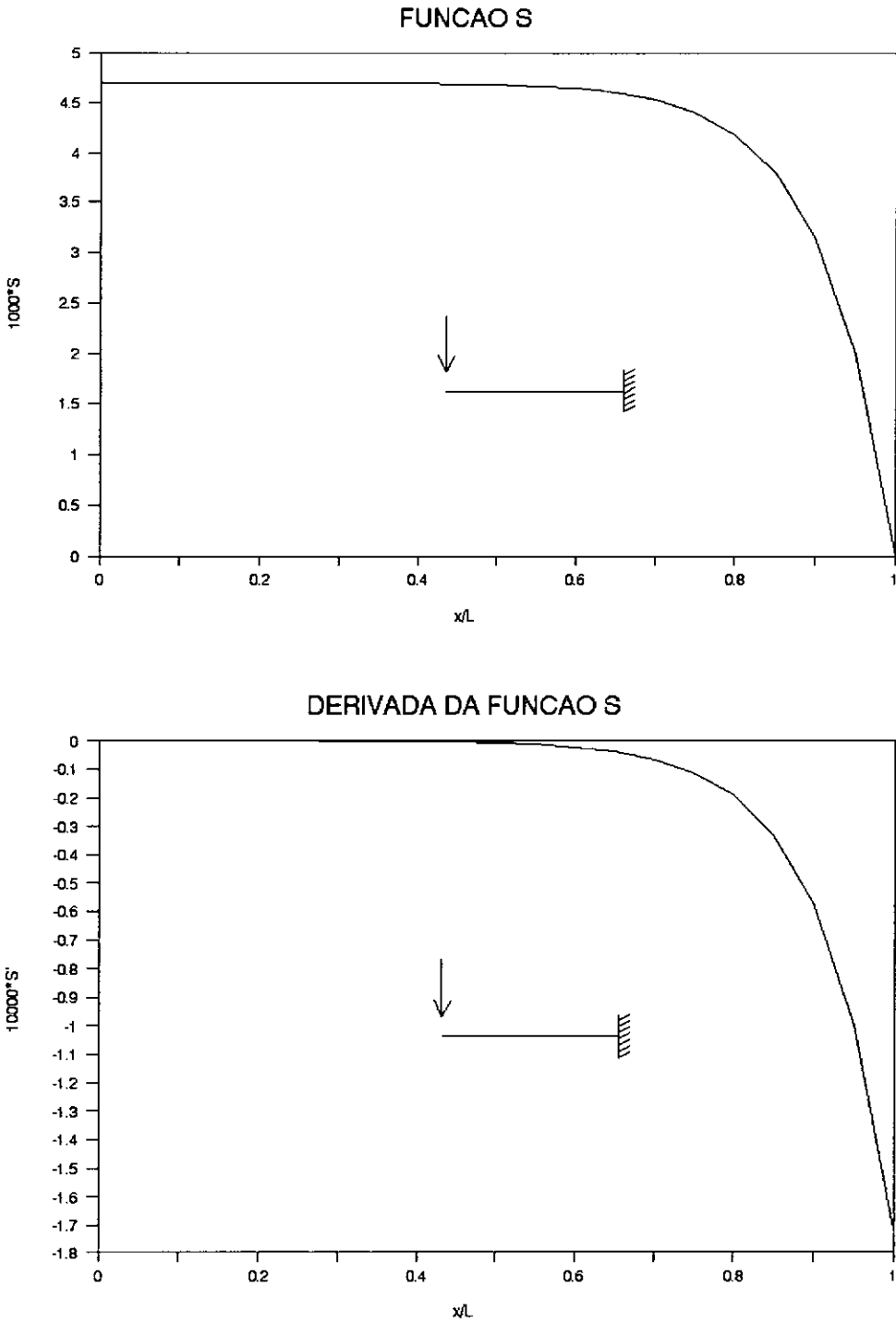


Figura VI.20 - Funções S e S' para carga concentrada

S' mostradas na figura VI.20. A distribuição da função S mostra que o "shear lag" é maior no extremo livre do que na região próxima ao engaste, onde a função S é decrescente até atingir o valor nulo na seção engastada. Isto também se verifica para a carga momento aplicada no extremo livre (figura VI.19), ao contrário da carga distribuída linear (figura VI.18), para as mesmas condições de apoio. Nota-se ainda que para este caso (figura VI.20), não existe o efeito de reversão do "shear-lag", nem inversão da curvatura das tensões axiais nos flanges.

Observando-se a derivada da função S apresentada na figura VI.20, conclui-se que a distribuição de tensões axiais do flange permanece linear ($S'=0$) na região próxima ao extremo livre, e iniciando sua não linearidade devido a condição de engaste no outro extremo da viga. O efeito de inversão da curvatura das tensões não ocorre para uma viga engastada e livre com carga concentrada aplicada no extremo livre.

VI.3.3 - INFLUÊNCIA DA CONSIDERAÇÃO DO "SHEAR LAG" NO CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS EM VIGAS CURTAS

No caso de vigas curtas, ou seja, quando a altura da seção tem a mesma ordem de grandeza de seu comprimento, é sabido [21] que deve-se considerar as deformações por esforço cortante no cálculo dos deslocamentos. Para isto, pode-se empregar a teoria de vigas de Timoshenko. Porém no caso em que se apresenta o fenômeno do "shear lag", a teoria de Timoshenko pode não ser suficiente, devendo-se considerar adequadamente a influência de tal fenômeno. Para comprovação desta influência, são apresentados alguns exemplos de vigas sujeitas a cargas distribuídas com diversas condições de contorno, para as seguintes relações altura/comprimento: $h/L = 1/5, 1/10, 1/20$. O modelo estrutural básico para estes exemplos é definido na figura VI.21

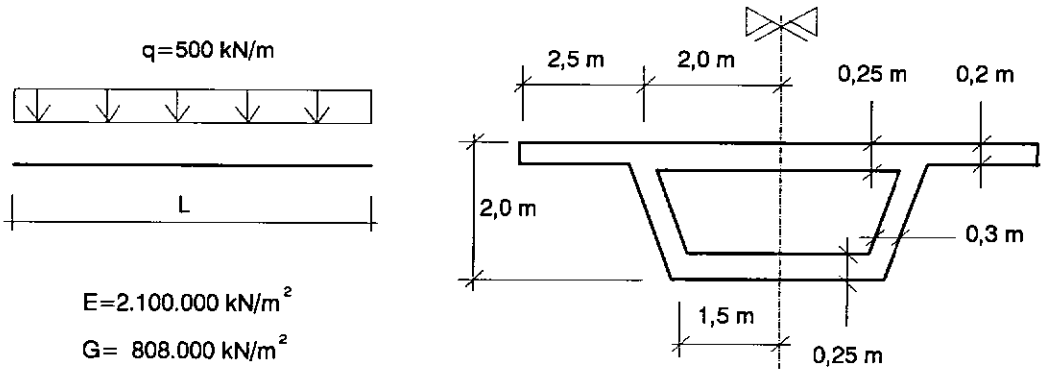


Figura VI.21 - Modelo de viga curta para cálculo de deslocamentos

A análise foi feita empregando-se o programa SLPONTE. Os resultados encontram-se nas figuras VI.19 a VI.22. Nota-se que a medida que vão sendo introduzidas vinculações nos extremos, os efeitos da deformação por cortante vão se tornando mais pronunciados. Para as mesmas condições de contorno, o mesmo efeito se verifica a medida que a relação h/L torna-se menor.

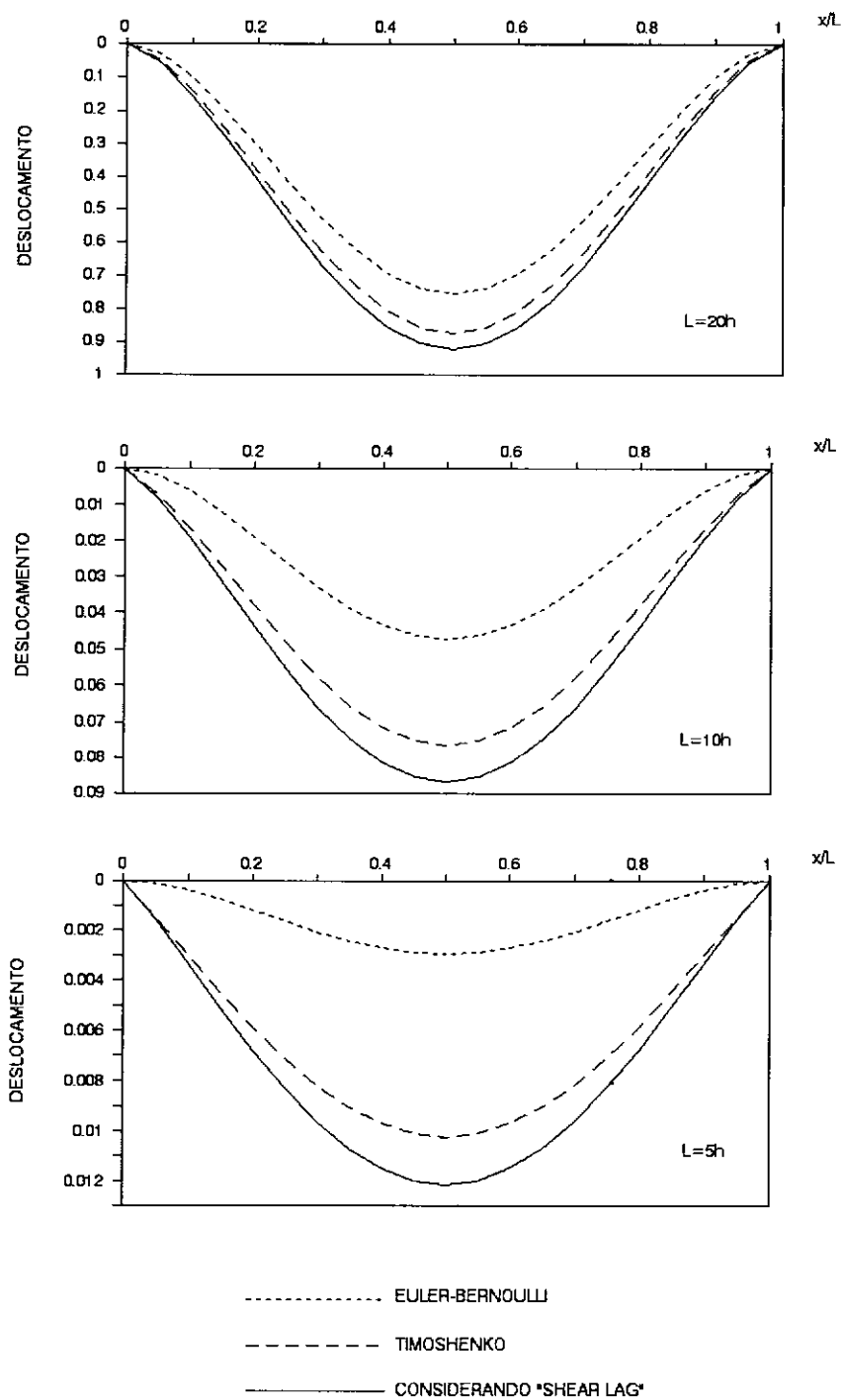


Figura VI.22 - Deslocamentos para viga bi-engastada

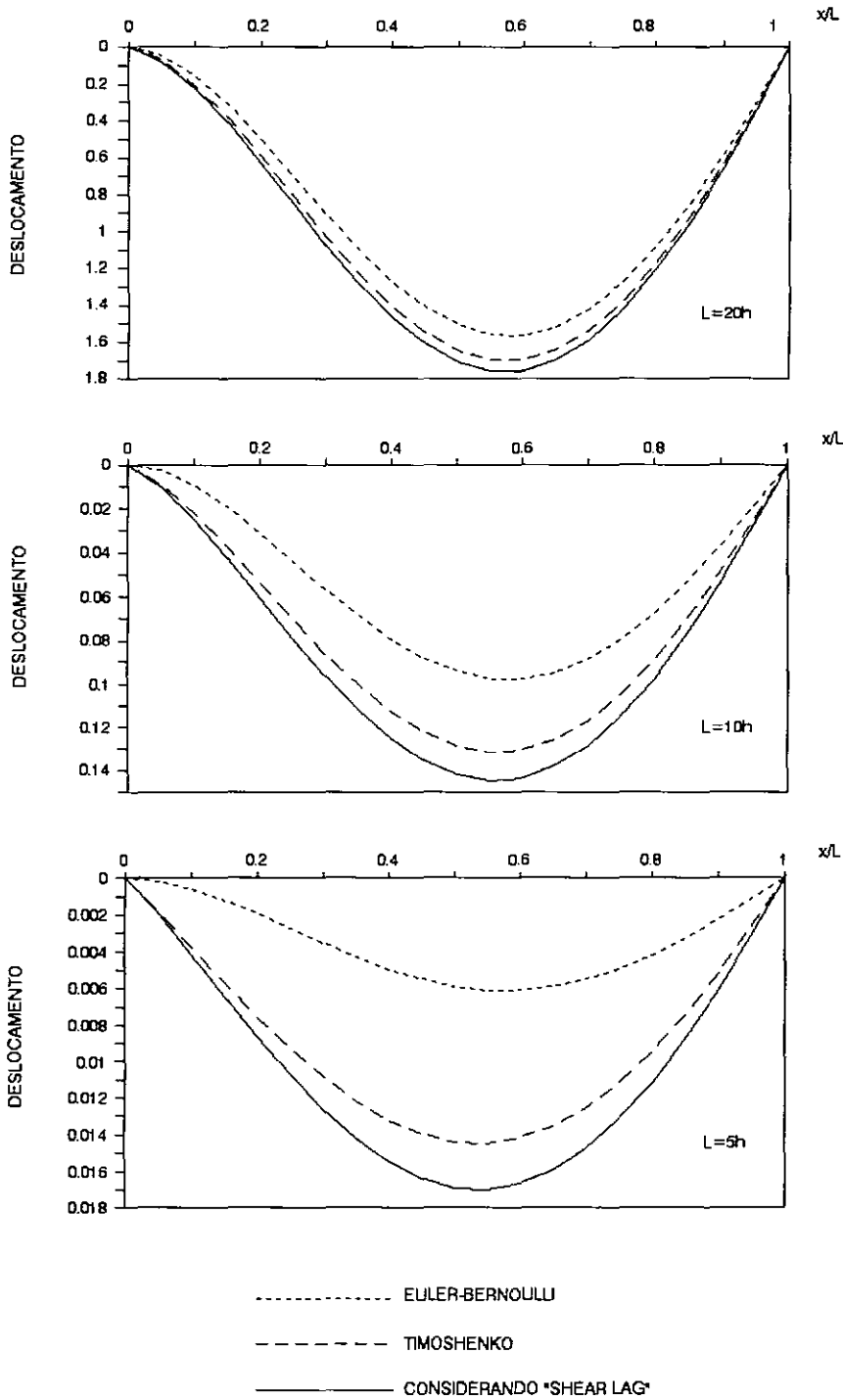


Figura VI.23 - Deslocamentos para viga engastada-apoiada

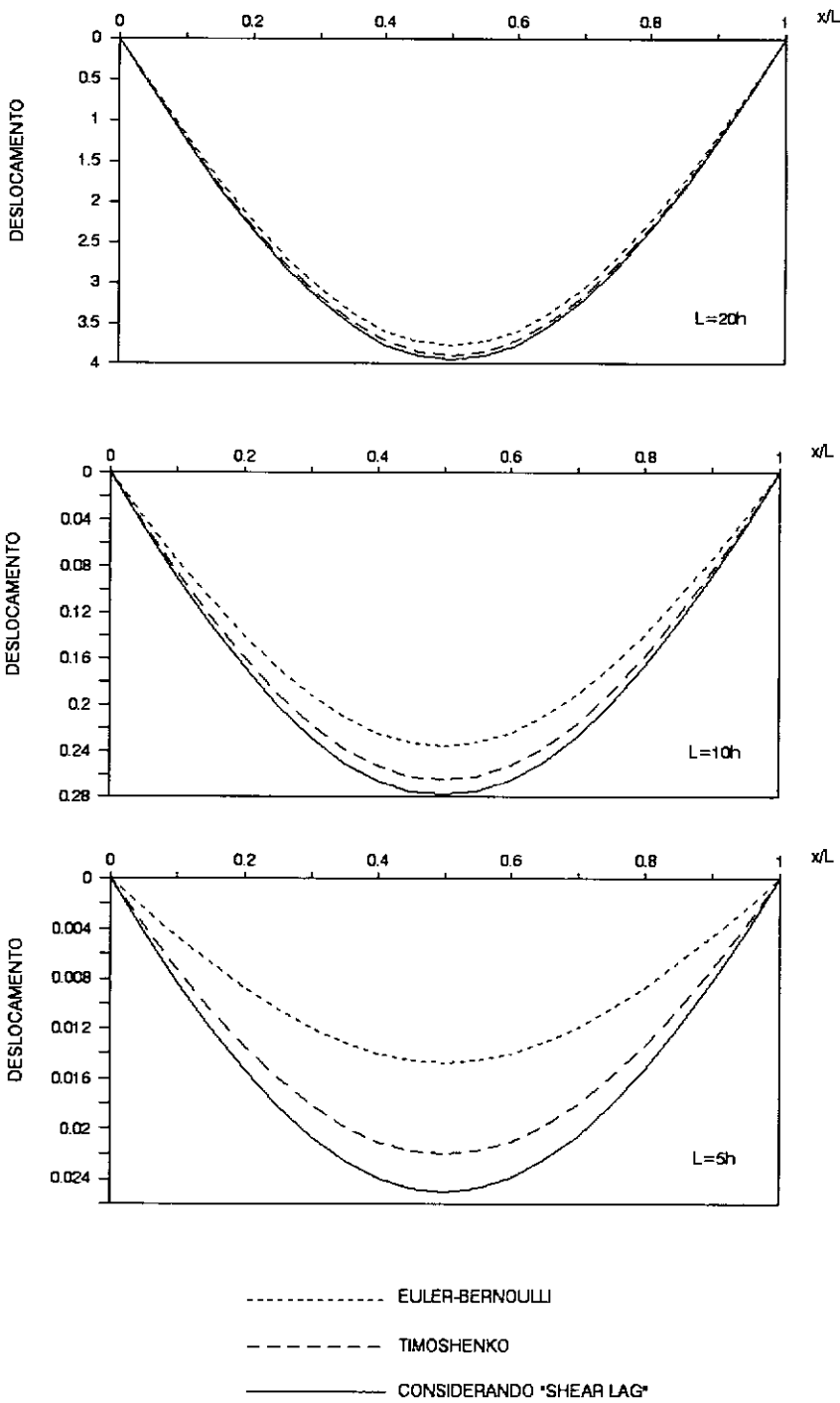


Figura VI.24 - Deslocamentos para viga bi-apoiada

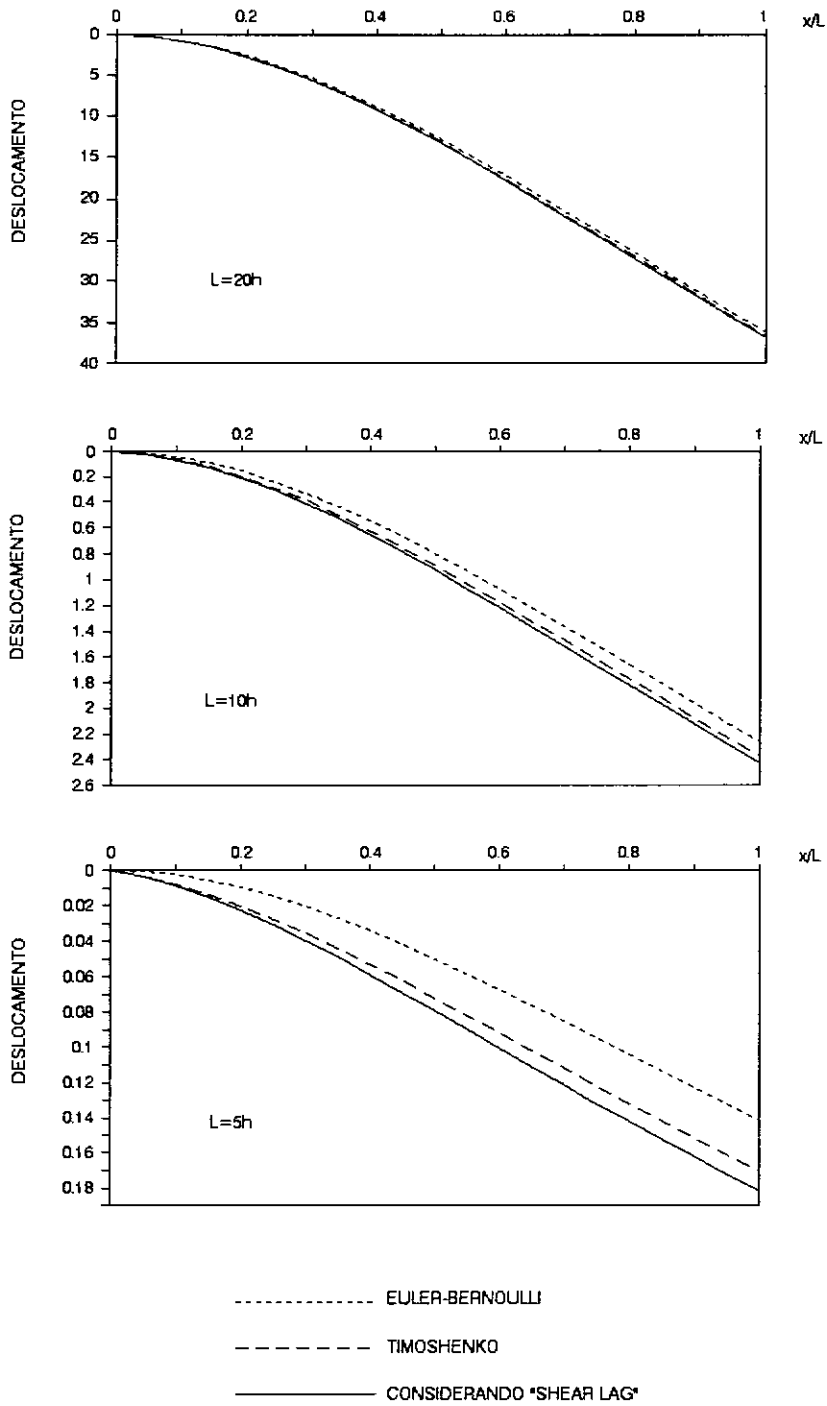


Figura VI.25 - Deslocamentos para viga engastada e livre

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

VII.1 - CONCLUSÕES GERAIS

Este trabalho define claramente que o efeito de "shear lag" está associado a distribuição não uniforme de deslocamentos axiais nos flanges. Da mesma forma são bem definidos os conceitos de reversão do "shear lag" e inversão da curvatura do diagrama de tensões. Estas definições tornam-se mais claras a partir da observação do comportamento de vigas com diversas condições de contorno e carregamentos.

A automatização dos cálculos apresentados, para alguns casos mais típicos, permitem uma avaliação dos resultados para formas geométricas mais complexas. Por exemplo, ao se estudar uma estrutura tubular via MEF, pode-se saber previamente em qual sentido e com que intensidade cada variável do problema influencia nas soluções.

Com pequenos ajustes para levar em conta ortotropia ou anisotropia de placas típicas de pontes ou grelhas típicas de edifícios, as expressões explícitas para cálculos de tensões e deslocamentos podem ser utilizadas de forma direta em pré-projetos.

VII.2 - SUGESTÕES PARA CONTINUAÇÃO DO TRABALHO

- a) Soluções fechadas para as demais condições de contorno e carregamentos, no caso de seção caixão retangular, podem ser obtidas seguindo procedimento análogo ao do capítulo IV.
- b) Conclusões gerais a respeito da influência das variáveis do problema poderão ser obtidas através de uma análise dimensional aplicada às soluções analíticas.
- c) A extensão da análise para os problemas dinâmicos seria também de grande interesse prático. Nestes casos poderiam ser avaliados os efeitos, por exemplo, de cargas de vento, sismos e etc, em estruturas tubulares que podem ser associadas aos casos simples analisados.
- d) Poderia ser formado a partir da solução de uma viga bi-engastada, um elemento finito para membros tubulares.

A matriz de rigidez seria determinada aplicando-se deslocamentos e rotações unitários nos extremos. É fácil notar que a função S está associada a um carregamento axial, cuja resultante é apenas um momento fletor. Porém, deve ser estudada com atenção a relação entre a função S e a rotação nos extremos, para que as condições de compatibilidade sejam satisfeitas. Um programa com este tipo de elemento finito utilizaria como subrotina para formação da matriz de rigidez, um processo automático semelhante ao SLPONTE. Desta forma, seriam incorporadas todas as vantagens do MEF, permitindo a análise de várias formas estruturais (figura V.3) com variação de seção e diversas condições de apoio e carregamento ao longo da viga. Estes resultados seriam comparáveis com aqueles obtidos através de um modelo discretizado em elementos finitos, como ilustrado na figura I.8.

- e) Os campos de deslocamentos axiais tanto no flange quanto nas almas poderiam ainda ser melhor aproximados. Sabendo-se

que os deslocamentos no flange só podem ser aproximados por funções pares, poderia ser acrescentada uma parábola do 4^o grau na aproximação estabelecida na expressão II.3. À esta parábola adicional deve estar associada uma nova função, por exemplo \bar{S} . A expressão para os deslocamentos axiais no flange assim aproximados seria

$$u_f = \pm h \left[(w' - \beta) + \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) S + \left(1 - \frac{y^4}{b^4}\right) \bar{S} \right] \quad (\text{VII.1})$$

Os deslocamentos axiais da alma, por sua vez, poderiam ser melhor aproximados acrescentando-se uma função cúbica, buscando uma forma semelhante àquela apresentada na figura II.4. Para medir a amplitude desta nova parcela ao longo da viga, seria necessária a introdução de outra função do tipo S, por exemplo S_a . Tal expressão seria

$$u_a = -z (w' - \beta) + \left(\frac{z}{h}\right)^3 S_a \quad (\text{VII.2})$$

Esta melhor aproximação no campo de deslocamentos teria uma influência mais acentuada na distribuição de tensões tangenciais, pois com deslocamentos axiais aproximados de 4^o ordem nos flanges, as tensões tangenciais aí seguiriam uma lei de variação cúbica. Isto estaria mais próximo do esperado, pois como se sabe [1], a distribuição de tensões tangenciais no flange não é linear. A introdução de uma função cúbica nos deslocamentos da alma conduziriam a uma distribuição parabólica de tensões tangenciais, o que também se aproxima do esperado. Estas novas distribuições de tensões estão apresentadas na figura VII.1.

A melhor aproximação decorrente da introdução de novas funções S, apresentaria o inconveniente de tornar o sistema de equações diferenciais de equilíbrio mais complexo, podendo impossibilitar a obtenção de soluções analíticas relativamente simples.

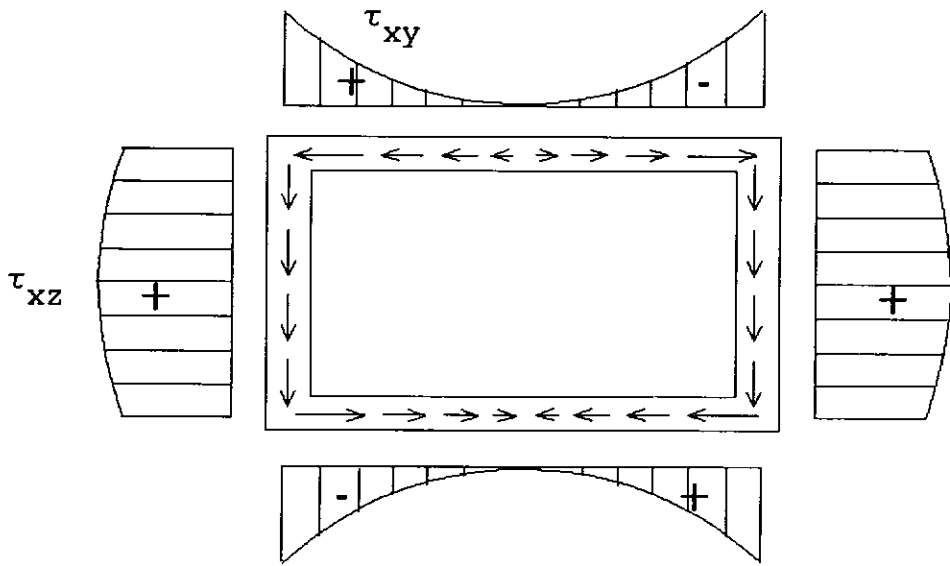


Figura VII.1 - Distribuição de tensões tangenciais

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] TIMOSHENKO, S.P., GERE, J.M. "Mechanics of Materials", Brooks/Cole Eng. Div., 1972
- [2] TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, I.H. Teoria da Elasticidade, Guanabara Dois, 1980.
- [3] ODEN, J.T. "Mechanics of Elastic Structures", McGraw-Hill, 1967.
- [4] TARANATH, B.S. "Structural Analysis and Design of Tall Buildings", McGraw-Hill, 1976.
- [5] MURRAY, N.W. "Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures", Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [6] MEGSON, T.H.G. "Linear Analysis of Thin-Walled Elastic Structures", Surrey University Press, 1974.
- [7] COULL, A., BOSE, B. "Simplified Analysis of Frame-Tube Structures", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.101, No.ST11, 2223-2240, 1975.
- [8] MALCOLM, D.J., REDWOOD, R.G. "Shear Lag in Stiffened Box Girders", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.96, No.ST7, 1403-1419, 1970.
- [9] MOFFAT, K.R., DOWLING, P.J., "Shear Lag in Steel Box Girders Bridges", The Structural Engineer, Vol.53, No.10, 439-448, 1975.

- [10] CHANG, P., HIJAZI, H. "General Analysis of Asymmetric Thin-Walled Members", Thin Walled Structures, 7, 159-186, 1989.
- [11] SCHUELLER, W. "High-Rise Building Structures", Willey-Interscience Publication, USA, 1977.
- [12] IYENGAR, S.H., KHAN, F.R. "La Tour Sears (Chicago): Le Bâtiment le Plus Haut du Monde", Acier-Stahl-Steel, 7-8, 306-313, 1973
- [13] NAIR, R.S. "A Modified Tube Concept for Tall Buildings", Engineering Journal American Institute of Steel Construction, Third Quarter, 126-130, 1986
- [14] ZIENKIEWIKS, O.C. "The Finite Element Method", McGraw-Hill, London, 1982.
- [15] REISSNER, E. "Least Work Solutions of Shear Lag Problems", Journal of the Aeronautical Sciences, 8, 284-291, 1941
- [16] HILDEBRAND, F.B., REISSNER, E. "Least Work Analysis of the Problem of Shear Lag in Box Beams", N.A.C.A. Technical Note, No. 893, 1943
- [17] REISSNER, E. "Analysis of Shear-Lag in Box Beams by the Principle of Minimum Potential Energy", Quarterly of Applied Mathematics, Vol.4, No.3, 268-278, Oct. 1946.
- [18] FOUTCH, D.A., CHANG, P.C. "A Shear Lag Anomaly", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.108, No.ST7, 1653-1658, 1982.
- [19] DEZI, L., MENTRASTI, L. "Nonuniform Bending-Stress Distribution (Shear Lag)", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.111, No.12, 2675-2690, 1985.

[20] SHAW, F.S. "Virtual Displacements and Analysis of Structures", Prentice-Hall, 1972

[21] DYM, C.L., SHAMES, I.H., "Solid Mechanics: A Variational Approach", Mc Graw-Hill, 1973

[22] DERIVE, A Mathematical Assistant, Soft Warehouse, Inc., 1989

[23] CHANG, S.T., ZHENG, F.Z. "Negative Shear Lag in Cantilever Box Girder with Constant Depth", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.113, No.1, 20-35, 1987.

[24] CHANG, P., FOUTCH, D.A., "Static and Dynamic Modeling and Analysis of Tube Frames", Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol.110, No.12, 2955-2975, 1984.

APÊNDICE I

LISTAGEM DO PROGRAMA SHELAG

```
*****
*
* ANALISE ESTRUTURAL DE VIGA ENGASTADA-LIVRE COM SECAO
* RETANGULAR DELGADA CONSIDERANDO-SE O EFEITO DE "SHEAR LAG".*
*
*****
```

```
IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
DOUBLE PRECISION I,IF,L,K2,K1,IA
DIMENSION RAZ(0:3)
CHARACTER*20 ARQ,AUX2,AUX3,AUX4,AUX5
```

```
EXP (XX) = DEXP (XX)
SQRT (XX) = DSQRT (XX)
COSH (XX) = DCOSH (XX)
SINH (XX) = DSINH (XX)
```

* ARQUIVOS

```
WRITE (*,*) 'ARQUIVO DE DADOS ? '
READ (*,10) ARQ
OPEN (UNIT=1,FILE=ARQ)
AUX2 ='W'//ARQ
AUX3 ='S'//ARQ
AUX4 ='T'//ARQ
AUX5 ='L'//ARQ
OPEN (UNIT=2,FILE=AUX2)      ! W E WEB
OPEN (UNIT=3,FILE=AUX3)     ! FUNCAO S
OPEN (UNIT=4,FILE=AUX4)     ! TENSOES AXIAIS
OPEN (UNIT=5,FILE=AUX5)     ! DERIVADA DA FUNCAO S
```

```
READ (1,*) NCASOS
```

* PERCORRER TODOS OS CASOS

```
DO ICASO=1,NCASOS
```

* ENTRADA DE DADOS

```
READ(1,*) E,G,B,H,L,TA,TF,Q
```

* CARACTERISTICAS GEOMETRICAS

```

IA = 4/3*H**3*TA
AA = 4*H*TA
AF = 4*B*TF
IF = 4*B*TF*H**2
I = IA+IF

```

```

WRITE (2,20) ICASO,B,H,L,TA,TF,Q
WRITE (3,20) ICASO,B,H,L,TA,TF,Q
WRITE (4,20) ICASO,B,H,L,TA,TF,Q
WRITE (5,20) ICASO,B,H,L,TA,TF,Q

```

* CONSTANTES

```

K1 = 4*E*I/5-2*E*IF/3
K2 = 2*G*I/B**2
CSI = SQRT(K2/K1)
C1 = L*Q
C2 = Q*B**2*(L*CSI*EXP(-CSI*L)-1)/(4*G*I*CSI*COSH(CSI*L))
C3 = Q*B**2*(L*CSI*EXP(CSI*L)+1)/(4*G*I*CSI*COSH(CSI*L))
C4 = -Q*( IF*B**2/(3*G*I**2) - L**2/(2*E*I) + 1/(AA*G) )

```

* DESLOCAMENTO TRANSVERSAL (W)

```

DO J=1,20
  X = J*L/20
  W = - Q*B**2*IF*(L*CSI*(SINH(CSI*L)-SINH(CSI*(L-X)))
    - COSH(CSI*X)+1)/(3*G*I**2*CSI**2*COSH(CSI*L))
    - Q*(1/(2*G*AA)+IF*B**2/(6*G*I**2))*(X**2-2*L*X)
    + Q*X**2*(X**2-4*L*X+6*L**2)/(24*E*I)
  WEB = Q*X**2*(X**2-4*L*X+6*L**2)/(24*E*I)
  RAZAO = W/WEB
  WRITE (2,40) X/L,RAZAO,W,WEB
END DO

```

* FUNCAO S

```

DO J=0,20
  X = J*L/20
  S = Q*B**2*(L*CSI*COSH(CSI*(L-X))-SINH(CSI*X))/
    (2*G*I*CSI*COSH(CSI*L)) - Q*B**2*(L-X)/(2*G*I)
  WRITE (3,30) X/L,S
END DO

```

* DERIVADA DA FUNCAO S

```

DO J=0,20
  X = J*L/20
  SLINHA=- Q*B**2*(CSI*L*SINH(CSI*L-CSI*X)+COSH(CSI*X))/
    (2*G*I*COSH(CSI*L)) + Q*B**2/(2*G*I)
  WRITE (5,30) X/L,SLINHA
END DO

```

* TENSOES LONGITUDINAIS

```

DO JJ = -10,10
  Y = B*JJ/10
  DO J = 0,3
    X = J*L/4

```

```

      SIGF = - E*( CSI*H*( 3*I*Y**2 + B**2*(2*IF-3*I) ) *
      .      (C2*EXP(CSI*X)-C3*EXP(-CSI*X)) / (3*B**2*I)
      .      + X*H*(2*C1-Q*X) / (2*E*I) + H*Q*(Y**2-B**2) / (2*G*I)
      .      - H*Q/(G*AA) - C4*H)
      SIGL = Q*H*(L-X)**2 / (2*I)
      RAZ(J) = SIGF/SIGL
      END DO
      WRITE (4,50) Y/B, (RAZ(J),J=0,3)
      END DO

      END DO

      CLOSE(UNIT=2)
      CLOSE(UNIT=3)
      CLOSE(UNIT=4)
      CLOSE(UNIT=5)

10  FORMAT (A20)
30  FORMAT(2E13.5)
40  FORMAT(4E13.5)
50  FORMAT(5E12.5)
20  FORMAT (/, ' CASO ', I2, /, ' B=' , F8.5, 2X, ' H=' , F8.5, 2X,
. ' L=' , F8.2, 2X, ' TA=' , F8.5, 2X, ' TF=' , F8.5, 2X, ' Q=' , F8.5)
      END

```

APÊNDICE II

DIAGONALIZAÇÃO DE UMA MATRIZ DE TRANSFORMAÇÃO LINEAR
POR INTERMÉDIO DE MUDANÇA DE BASE

Seja, por exemplo, o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}} \quad (1)$$

onde A é a matriz dos coeficientes, que pode ser interpretada, mais genericamente como sendo a matriz da transformação linear que relaciona $\underline{\underline{X}}$ com $\underline{\underline{Y}}$.

O que se deseja é determinar de que forma pode-se obter uma transformação equivalente a (1), na qual a matriz seja diagonal, como a seguir,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\bar{A}}} \cdot \underline{\underline{\bar{X}}} = \underline{\underline{\bar{Y}}} \quad (2)$$

Para que este novo sistema seja equivalente ao original, é necessário que ambos estejam relacionados através de transformações lineares. Logo, pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{X} = \underline{M} \cdot \bar{\underline{X}} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \underline{Y} = \underline{M} \cdot \bar{\underline{Y}} \quad (4)$$

onde \underline{M} é uma matriz de transformação linear.

Deve-se observar que as relações (3) e (4) representam na verdade uma mudança de base.

Substituindo (3) e (4) em (1), tem-se

$$\underline{A} \cdot \underline{M} \cdot \bar{\underline{X}} = \underline{M} \cdot \bar{\underline{Y}} \quad (5)$$

que pré-multiplicado por \underline{M}^{-1} resulta em

$$\underline{M}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{M} \cdot \bar{\underline{X}} = \bar{\underline{Y}} \quad (6)$$

Observando-se (2) e (6) conclui-se que

$$\bar{\underline{A}} = \underline{M}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{M} \quad (7)$$

que é a relação de mudança de base para a matriz da transformação linear (1). Resta ainda determinar qual é a base em que a matriz de transformação se torna diagonal.

Pré-multiplicando (7) por \underline{M} tem-se

$$\underline{M} \cdot \bar{\underline{A}} = \underline{A} \cdot \underline{M} \quad (8)$$

que escrito na forma expandida pode ser particionado da seguinte forma:

$$\lambda_1 \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \\ \vdots \\ M_{n1} \end{Bmatrix} \quad (11.a)$$

$$\lambda_2 \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \\ \vdots \\ M_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{12} \\ M_{22} \\ \vdots \\ M_{n2} \end{Bmatrix} \quad (11.b)$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\lambda_n \begin{Bmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ \vdots \\ M_{nn} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_{1n} \\ M_{2n} \\ \vdots \\ M_{nn} \end{Bmatrix} \quad (11.c)$$

que correspondem a n sistemas homogêneos, sendo que o i -ésimo sistema apresenta $n+1$ incógnitas: $M_{1i}, M_{2i}, \dots, M_{ni}$ e λ_i . Os n sistemas homogêneos formam portanto o seguinte problema de autovalor:

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \cdot \underline{\Phi} = \underline{0} \quad (12)$$

que resolvido fornece os valores de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (autovalores) e a matriz de transformação de base, \underline{M} , que será formada pelos autovetores dispostos segundo suas colunas.

APÊNDICE III

LISTAGEM DO PROGRAMA SLPONTE

```

{*****}
      PROGRAM SLPONTE;
{*****}
{$N+}
CONST
  NEQ = 10;      { NUMERO DE EQUACOES }
  NPONTOS = 20; { NUMERO DE PONTOS PARA OS GRAFICOS DE W E S }
VAR
ARQ      : text;      { ARQUIVO }
NOME     : string[20];{ NOME DE ARQUIVO }
CC1,CC2  : char;     { TIPO DE CONDICAO DE CONTORNO : A,E,L }
i,j,k    : integer;  { CONTADORES }
AF1,AF2,AF3 : extended; { AREA DOS FLANGES }
AA       : extended; { AREA DAS ALMAS }
b1,b2,b3 : extended; { MEIA LARGURA DOS FLANGES }
tf1,tf2,tf3 : extended; { ESPESSURA DOS FLANGES }
ta       : extended; { ESPESSURA DAS ALMAS }
H        : extended; { ALTURA DA SECAO }
ZB1,ZB2,ZB3,ZBA : extended; { POSICAO DO CG DAS AREAS
                             EM RELACAO A BASE }
ZB       : extended; { POSICAO DO CG DA SECAO
                             EM RELACAO A BASE }
H1,H2,H3 : extended; { POS. CG DAS AREAS EM REL.
                             AO CG DA SECAO }
H4       : extended; { EXTR. SUP. DA ALMA EM REL.
                             AO CG DA SECAO }
IF1,IF2,IF3,IA,IT: extended; { INERCIA DOS FLANGES,
                             ALMAS E TOTAL }
i1,i2,i3,
F1,F2,F3,
n1,n2,n3,
A1,A2,A3,
g1,g2,g3,
t1,t2,t3,
R1,R2,TETA,A,B,
LM1,LM2,LM3 : extended; { VARIAVEIS AUXILIARES }
ALFA       : extended; { COEFICIENTE DE CISALHAMENTO
                             DA SECAO }
L1,L2,L3   : extended; { AUTOVALORES }

```

```

DETM      : extended; { DETERMINANTE DA MATRIZ MODAL }
q         : extended; { CARGA DISTRIBUIDA UNIFORME }
M0,ML    : extended; { MOMENTO APLICADO EM x=0 E EM x=L }
P0,PL    : extended; { CARGA APLICADA EM x=0 E EM x=L }
M12,M13,
M21,M23,
M31,M32   : extended; { TERMOS DA MATRIZ MODAL }
E,G       : extended; { MODULOS DE ELASTICIDADES }
S1,S2,S3,BETA,W : extended; { FUNCOES INCOGNITAS }
SL1,SL2,SL3 : extended; { DERIVADAS DE S1, S2 E S3 }
L         : extended; { COMPRIMENTO DA VIGA }
x         : extended; { ABSCISSA }
y         : extended; { POSICAO DE UM PONTO NA
                        SECAO TRANSVERSAL }
SIG1,SIG2,SIG3 : extended; { TENSOES NOS FLANGES 1, 2 E 3 }
Web       : extended; { DESLOCAMENTO - TEORIA
                        DE EULER-BERNOULLI }
Wt        : extended; { DESLOCAMENTO - TEORIA
                        DE TIMOSHENKO }
PV        : extended; { PIVOT NA TRIANGULARIZACAO
                        DA MATRIZ MC }
AUX       : extended; { VARIAVEL AUXILIAR }
WX0,WXL,WLX0,WLXL: extended; { VALORES PRESCRITOS
                        DE DESLOCAMENTOS }
C : ARRAY[1..10] OF extended; { CONSTANTES DE INTEGRACAO }
V : ARRAY[1..10] OF extended; { TERMOS INDEPENDENTES }
MC: ARRAY[1..10,1..10] OF extended;{ MATRIZ DOS COEFICIENTES }

{*****}
FUNCTION ACOS (N:extended):extended;
{*****}
BEGIN
  ACOS := ARCTAN (SQRT ((1.0 - N) * (1.0 + N)) / N);
END;

{*****}
FUNCTION CUB (N:extended):extended;
{*****}
BEGIN
  CUB:=N*N*N;
END;

{*****}
PROCEDURE ENTRADA_DE_DADOS ;
{*****}
BEGIN
  WRITE ('NOME DO ARQUIVO DE DADOS ');
  READLN (NOME);
  ASSIGN (ARQ,NOME);
  RESET (ARQ);
  READLN (ARQ);
  READLN (ARQ,E,G);
  READLN (ARQ);
  READLN (ARQ,H,L,ta);
  READLN (ARQ);

```

```

READLN (ARQ,b1,tf1);
READLN (ARQ);
READLN (ARQ,b2,tf2);
READLN (ARQ);
READLN (ARQ,b3,tf3);
READLN (ARQ);
READLN (ARQ,q,M0,P0,ML,PL);
READLN (ARQ);
READLN (ARQ,WX0,WLX0,WXL,WLXL);
READLN (ARQ);
READLN (ARQ,CC1);
READLN (ARQ);
READLN (ARQ,CC2);
CLOSE (ARQ);
WRITE ('NOME DO ARQUIVO DE SAIDA ');
READLN (NOME);
ASSIGN (ARQ,NOME);
REWRITE (ARQ);
END;

```

```

{*****}
PROCEDURE CARACTERISTICAS_GEOMETRICAS ;
{*****}
BEGIN
{
AREAS DOS FLANGES E DAS ALMAS
}
AF1:=2*b1*tf1 ;
AF2:=2*b2*tf2 ;
AF3:=2*b3*tf3 ;
AA:=2*ta*(H-1/2*(tf1+(tf2+tf3)/2)) ;
{
COEFICIENTE DE CISALHAMENTO
}
ALFA:=1 ;
{
POSICAO DO CG DAS AREAS EM RELACAO A BASE
}
ZB1:=tf1/2 ;
ZB2:=H-tf2/2 ;
ZB3:=H-tf3/2 ;
ZBA:=(4*H+2*tf1-(tf2+tf3))/8 ;
{
POSICAO DO CG DA SECAO EM RELACAO A BASE
}
ZB:=(AF1*ZB1+AF2*ZB2+AF3*ZB3+AA*ZBA)/(AF1+AF2+AF3+AA) ;
{
POSICAO DO CG DAS AREAS EM RELACAO AO CG DA SECAO
}
H1:=ZB-tf1/2 ;
H2:=H-ZB-tf2/2 ;
H3:=H-ZB-tf3/2 ;
H4:=H-ZB-1/4*(tf2+tf3) ;
{
INERCIA DOS FLANGES, DAS ALMAS E TOTAL

```

```

}
IF1:=2*b1*CUB(tf1)/12+2*b1*tf1*SQR(H1) ;
IF2:=2*b2*CUB(tf2)/12+2*b2*tf2*SQR(H2) ;
IF3:=2*b3*CUB(tf3)/12+2*b3*tf3*SQR(H3) ;

IA:=2/3*(CUB(H1)+CUB(H4))*ta ;
IT:=IA+IF1+IF2+IF3 ;
END;

{*****}
PROCEDURE AUTOVALORES;
{*****}
BEGIN
{
VARIAVEIS AUXILIARES
}
i1:=IF1/IT ;
i2:=IF2/IT ;
i3:=IF3/IT ;
F1:=(-5*i1/(SQR(b1)*(5*i1+5*i2+5*i3-6))) ;
F2:=(-5*i2/(SQR(b2)*(5*i1+5*i2+5*i3-6))) ;
F3:=(-5*i3/(SQR(b3)*(5*i1+5*i2+5*i3-6))) ;
{
SOLUCAO DA EQUACAO CARACTERISTICA L^3 + A1 L^2 + A2 L + A3
}
A1:=-1/SQR(b1)-1/SQR(b2)-1/SQR(b3)-F1-F2-F3 ;
A2:=(F1*(SQR(b2)+SQR(b3))/(SQR(b2)*SQR(b3))+
F2*(SQR(b1)+SQR(b3))/(SQR(b1)*SQR(b3))+
F3*(SQR(b1)+SQR(b2))/(SQR(b1)*SQR(b2))+
(SQR(b1)+SQR(b2)+SQR(b3))/(SQR(b1)*SQR(b2)*SQR(b3))) ;
A3:=-F1/(SQR(b2)*SQR(b3))
-F2/(SQR(b1)*SQR(b3))
-F3/(SQR(b1)*SQR(b2))
-1/(SQR(b1)*SQR(b2)*SQR(b3)) ;
R1:=(9*A1*A2-27*A3-2*CUB(A1))/54 ;
R2:=(3*A2-SQR(A1))/9 ;
TETA:=ACOS(R1/SQRT(-CUB(R2))) ;
A:=SQRT(-R2)*COS(TETA/3) ;
B:=SQRT(-R2)*SIN(TETA/3) ;
l1:=2*A-A1/3 ;
l2:=-A-A1/3-B*SQRT(3) ;
l3:=-A-A1/3+B*SQRT(3) ;
END;

{*****}
PROCEDURE BASE_DE_AUTOVETORES ;
{*****}
BEGIN
{
TERMOS DA MATRIZ MODAL
}
AUX:=SQR(b1)*(SQR(b3)*l2*(F1+F3-l2)+l2-F1)
-(SQR(b3)*(F3-l2)+1) ;

M12:=-SQR(b1)*F2*(SQR(b3)*l2-1)/AUX ;
M32:=-SQR(b3)*F2*(SQR(b1)*l2-1)/AUX ;

```

```

AUX:=SQR(b1)*(SQR(b2)*l3*(F1+F2-l3)+l3-F1)
                                         -(SQR(b2)*(F2-l3)+1) ;
M13:=-SQR(b1)*F3*(SQR(b2)*l3-1)/AUX ;
M23:=-SQR(b2)*F3*(SQR(b1)*l3-1)/AUX ;
AUX:=SQR(b2)*(SQR(b3)*l1*(F2+F3-l1)+l1-F2)
                                         -(SQR(b3)*(F3-l1)+1) ;
M21:=-SQR(b2)*F1*(SQR(b3)*l1-1)/AUX ;
M31:=-SQR(b3)*F1*(SQR(b2)*l1-1)/AUX ;
{
  DETERMINANTE DA MATRIZ MODAL
}
DETM:=- (M12*(M21-M23*M31) - (M13*(M21*M32-M31)+1-M23*M32)) ;
{
  VARIAVEIS AUXILIARES
}
AUX:=2*DETM*E*IT*(5*i1+5*i2+5*i3-6) ;
n1:= 15*(M12*(M23-1)+M13*(M32-1)+1-M23*M32)/AUX ;
n2:= 15*(M13*(M21-M31)+(M23*(M31-1)+1)-M21)/AUX ;
n3:=-15*(M12*(M21-M31)+(M31+M32-1)-M21*M32)/AUX ;
LM1:=SQRT(5*g*l1/(2*E)) ;
LM2:=SQRT(5*g*l2/(2*E)) ;
LM3:=SQRT(5*g*l3/(2*E)) ;
g1:=M12*n2/SQR(LM2)+M13*n3/SQR(LM3)+n1/SQR(LM1) ;
g2:=M21*n1/SQR(LM1)+M23*n3/SQR(LM3)+n2/SQR(LM2) ;
g3:=M31*n1/SQR(LM1)+M32*n2/SQR(LM2)+n3/SQR(LM3) ;
t1:=2*(if1+if2*M21+if3*M31)/(3*IT*LM1) ;
t2:=2*(if1*M12+if2+if3*M32)/(3*IT*LM2) ;
t3:=2*(if1*M13+if2*M23+if3)/(3*IT*LM3) ;
END;

{*****}
PROCEDURE W0;
{*****}
BEGIN
  MC[1, 2]:=-t1 ;
  MC[1, 3]:= t1 ;
  MC[1, 4]:=-t2 ;
  MC[1, 5]:= t2 ;
  MC[1, 6]:=-t3 ;
  MC[1, 7]:= t3 ;
  MC[1,10]:= 1. ;
END;

{*****}
PROCEDURE WL;
{*****}
BEGIN
  MC[6, 1]:= CUB(L)/(6*E*IT) ;
  MC[6, 2]:=-t1*EXP( L*LM1) ;
  MC[6, 3]:= t1*EXP(-L*LM1) ;
  MC[6, 4]:=-t2*EXP( L*LM2) ;
  MC[6, 5]:= t2*EXP(-L*LM2) ;
  MC[6, 6]:=-t3*EXP( L*LM3) ;
  MC[6, 7]:= t3*EXP(-L*LM3) ;
  MC[6, 8]:= SQR(L)/2 ;

```

```

MC[6, 9]:= L ;
MC[6,10]:= 1 ;
V[6]      := -SQR(SQR(L))*q/(24*E*IT) ;
END;

```

```

{*****}
PROCEDURE PSIO;

```

```

{*****}
BEGIN

```

```

MC[2, 1]:= 1./(ALFA*G*AA) ;
MC[2, 2]:=-LM1*t1 ;
MC[2, 3]:=-LM1*t1 ;
MC[2, 4]:=-LM2*t2 ;
MC[2, 5]:=-LM2*t2 ;
MC[2, 6]:=-LM3*t3 ;
MC[2, 7]:=-LM3*t3 ;
MC[2, 9]:= 1 ;
END;

```

```

{*****}
PROCEDURE PSIL;

```

```

{*****}
BEGIN

```

```

MC[7, 1]:= 1/(ALFA*G*AA) + SQR(L)/(2*E*IT) ;
MC[7, 2]:=-LM1*t1*EXP( L*LM1) ;
MC[7, 3]:=-LM1*t1*EXP(-L*LM1) ;
MC[7, 4]:=-LM2*t2*EXP( L*LM2) ;
MC[7, 5]:=-LM2*t2*EXP(-L*LM2) ;
MC[7, 6]:=-LM3*t3*EXP( L*LM3) ;
MC[7, 7]:=-LM3*t3*EXP(-L*LM3) ;
MC[7, 8]:= L ;
MC[7, 9]:= 1 ;
V[7]      :=-q*L*(SQR(L)/(6*E*IT) + 1/(ALFA*G*AA)) ;
END;

```

```

{*****}
PROCEDURE SO;

```

```

{*****}
BEGIN

```

```

MC[3, 1]:=-g1 ;
MC[3, 2]:= 1 ;
MC[3, 3]:= 1 ;
MC[3, 4]:= M12 ;
MC[3, 5]:= M12 ;
MC[3, 6]:= M13 ;
MC[3, 7]:= M13 ;
MC[4, 1]:=-g2 ;
MC[4, 2]:= M21 ;
MC[4, 3]:= M21 ;
MC[4, 4]:= 1 ;
MC[4, 5]:= 1 ;
MC[4, 6]:= M23 ;
MC[4, 7]:= M23 ;
MC[5, 1]:=-g3 ;
MC[5, 2]:= M31 ;

```



```

MC[5, 3]:= M31 ;
MC[5, 4]:= M32 ;
MC[5, 5]:= M32 ;
MC[5, 6]:= 1 ;
MC[5, 7]:= 1 ;
END;

{*****}
PROCEDURE SL;
{*****}
BEGIN
MC[8, 1]:=-g1 ;
MC[8, 2]:= EXP( L*LM1) ;
MC[8, 3]:= EXP(-L*LM1) ;
MC[8, 4]:= M12*EXP( L*LM2) ;
MC[8, 5]:= M12*EXP(-L*LM2) ;
MC[8, 6]:= M13*EXP( L*LM3) ;
MC[8, 7]:= M13*EXP(-L*LM3) ;
V[8] := g1*L*q ;
MC[9, 1]:=-g2 ;
MC[9, 2]:= M21*EXP( L*LM1) ;
MC[9, 3]:= M21*EXP(-L*LM1) ;
MC[9, 4]:= EXP( L*LM2) ;
MC[9, 5]:= EXP(-L*LM2) ;
MC[9, 6]:= M23*EXP( L*LM3) ;
MC[9, 7]:= M23*EXP(-L*LM3) ;
V[9] := g2*L*q ;
MC[10, 1]:=-g3 ;
MC[10, 2]:= M31*EXP( L*LM1) ;
MC[10, 3]:= M31*EXP(-L*LM1) ;
MC[10, 4]:= M32*EXP( L*LM2) ;
MC[10, 5]:= M32*EXP(-L*LM2) ;
MC[10, 6]:= EXP( L*LM3) ;
MC[10, 7]:= EXP(-L*LM3) ;
V[10] := g3*L*q ;
END;

{*****}
PROCEDURE P_0;
{*****}
BEGIN
MC[1, 1]:= 1 ;
V[1] := -P0 ;
END;

{*****}
PROCEDURE P_L;
{*****}
BEGIN
MC[6, 1]:= 1 ;
V[6] := -L*q-PL ;
END;

```

```

{*****}
      PROCEDURE M_0;
{*****}
BEGIN
  MC[2, 8]:= 1 ;
  V[2]:= -q/(ALFA*G*AA) + MO/(E*IT)
          + 2*q*(g1*IF1+g2*IF2+g3*IF3)/(3*IT) ;
END;

{*****}
      PROCEDURE M_L;
{*****}
BEGIN
  MC[7, 1]:= L ;
  MC[7, 8]:= E*IT ;
  V[7] := ML- q*(E*IT/(ALFA*G*AA)
              - 2*E*(g1*IF1+g2*IF2+g3*IF3)/3 + SQR(L)/2 ) ;
END;

{*****}
      PROCEDURE NATS0;
{*****}
BEGIN
  MC[3, 2]:= 2*LM1*(4 -5*LM1*t1)/15 ;
  MC[3, 3]:= -2*LM1*(4 -5*LM1*t1)/15 ;
  MC[3, 4]:= 2*LM2*(4*M12-5*LM2*t2)/15 ;
  MC[3, 5]:= -2*LM2*(4*M12-5*LM2*t2)/15 ;
  MC[3, 6]:= 2*LM3*(4*M13-5*LM3*t3)/15 ;
  MC[3, 7]:= -2*LM3*(4*M13-5*LM3*t3)/15 ;
  MC[3, 8]:= 2/3 ;
  V[3] := 8*g1*q/15 - 2*q/(3*ALFA*G*AA) ;
  MC[4, 2]:= 2*LM1*(4*M21-5*LM1*t1)/15 ;
  MC[4, 3]:= -2*LM1*(4*M21-5*LM1*t1)/15 ;
  MC[4, 4]:= 2*LM2*(4 -5*LM2*t2)/15 ;
  MC[4, 5]:= -2*LM2*(4 -5*LM2*t2)/15 ;
  MC[4, 6]:= 2*LM3*(4*M23-5*LM3*t3)/15 ;
  MC[4, 7]:= -2*LM3*(4*M23-5*LM3*t3)/15 ;
  MC[4, 8]:= 2/3 ;
  V[4] := 8*g2*q/15 - 2*q/(3*ALFA*G*AA) ;
  MC[5, 2]:= 2*LM1*(4*M31-5*LM1*t1)/15 ;
  MC[5, 3]:= -2*LM1*(4*M31-5*LM1*t1)/15 ;
  MC[5, 4]:= 2*LM2*(4*M32-5*LM2*t2)/15 ;
  MC[5, 5]:= -2*LM2*(4*M32-5*LM2*t2)/15 ;
  MC[5, 6]:= 2*LM3*(4 -5*LM3*t3)/15 ;
  MC[5, 7]:= -2*LM3*(4 -5*LM3*t3)/15 ;
  MC[5, 8]:= 2/3 ;
  V[5] := 8*g3*q/15 - 2*q/(3*ALFA*G*AA) ;
END;

{*****}
      PROCEDURE NATSL;
{*****}
BEGIN
  MC[8, 1]:= 2*L/(3*E*IT) ;
  MC[8, 2]:= (8* LM1/15-2*SQR(LM1)*t1/3)*EXP( L*LM1) ;

```

```

MC[8, 3]:=(8*      LM1/15-2*SQR(LM1)*t1/3)*EXP(-L*LM1) ;
MC[8, 4]:=(8*M12*LM2/15-2*SQR(LM2)*t2/3)*EXP( L*LM2) ;
MC[8, 5]:=(8*M12*LM2/15-2*SQR(LM2)*t2/3)*EXP(-L*LM2) ;
MC[8, 6]:=(8*M13*LM3/15-2*SQR(LM3)*t3/3)*EXP( L*LM3) ;
MC[8, 7]:=(8*M13*LM3/15-2*SQR(LM3)*t3/3)*EXP(-L*LM3) ;
MC[8, 8]:= 2/3 ;
V[8]      := q*(-2/(3*ALFA*G*AA)-SQR(L)/(3*E*IT)+8*g1/15) ;
MC[9, 1]:= 2*L/(3*E*IT) ;
MC[9, 2]:=(8*M21*LM1/15-2*SQR(LM1)*t1/3)*EXP( L*LM1) ;
MC[9, 3]:=(8*M21*LM1/15-2*SQR(LM1)*t1/3)*EXP(-L*LM1) ;
MC[9, 4]:=(8*      LM2/15-2*SQR(LM2)*t2/3)*EXP( L*LM2) ;
MC[9, 5]:=(8*      LM2/15-2*SQR(LM2)*t2/3)*EXP(-L*LM2) ;
MC[9, 6]:=(8*M23*LM3/15-2*SQR(LM3)*t3/3)*EXP( L*LM3) ;
MC[9, 7]:=(8*M23*LM3/15-2*SQR(LM3)*t3/3)*EXP(-L*LM3) ;
MC[9, 8]:= 2/3 ;
V[9]      := q*(-2/(3*ALFA*G*AA)-SQR(L)/(3*E*IT)+8*g2/15) ;
MC[10,1]:= 2*L/(3*E*IT) ;
MC[10,2]:=(8*M31*LM1/15-2*SQR(LM1)*t1/3)*EXP( L*LM1) ;
MC[10,3]:=(8*M31*LM1/15-2*SQR(LM1)*t1/3)*EXP(-L*LM1) ;
MC[10,4]:=(8*M32*LM2/15-2*SQR(LM2)*t2/3)*EXP( L*LM2) ;
MC[10,5]:=(8*M32*LM2/15-2*SQR(LM2)*t2/3)*EXP(-L*LM2) ;
MC[10,6]:=(8*      LM3/15-2*SQR(LM3)*t3/3)*EXP( L*LM3) ;
MC[10,7]:=(8*      LM3/15-2*SQR(LM3)*t3/3)*EXP(-L*LM3) ;
MC[10,8]:= 2/3 ;
V[10]     := q*(-2/(3*ALFA*G*AA)-SQR(L)/(3*E*IT)+8*g3/15) ;
END;

{*****}
      PROCEDURE FORMAR_O_SISTEMA;
{*****}
BEGIN
  FOR i:=1 TO NEQ DO BEGIN
    V[i]:=0 ;
    FOR j:=1 TO NEQ DO
      MC[i,j]:=0 ;
    END;
  {
    CONDICAOES DE CONTORNO DO EXTREMO 1
  }
  IF (CC1='E') THEN BEGIN
    W0 ;
    PSI0 ;
    S0 ;
  END;
  IF (CC1='A') THEN BEGIN
    W0 ;
    M_0 ;
    NATS0 ;
  END;
  IF (CC1='L') THEN BEGIN
    P_0 ;
    M_0 ;
    NATS0 ;
  END;
{

```

```

CONDICOES DE CONTORNO DO EXTREMO 2
}
IF (CC2='E') THEN BEGIN
  WL ;
  PSIL ;
  SL ;
END;
IF (CC2='A') THEN BEGIN
  WL ;
  M_L ;
  NATSL ;
END;
IF (CC2='L') THEN BEGIN
  P_L ;
  M_L ;
  NATSL ;
END;
END;

{*****}
PROCEDURE RESOLVER_O_SISTEMA ;
{*****}
BEGIN
  FOR j:=1 TO (NEQ-1) DO BEGIN
    PV:=MC[j,j];
    IF (ABS(PV) < 1.E-10) THEN BEGIN
      FOR i:=(j+1) TO NEQ DO IF (ABS(MC[i,j]) > ABS(PV) )
        THEN BEGIN
          PV:=MC[i,j];
          k:=i;
        END;
      IF ( ABS(PV) < 1.E-30 ) THEN BEGIN
        WRITELN ('SISTEMA SINGULAR');
        HALT;
      END;
      FOR i:=j TO NEQ DO BEGIN
        AUX:=MC[k,i];
        MC[k,i]:=MC[j,i];
        MC[j,i]:=AUX;
      END;
      AUX:=V[j];
      V[j]:=V[k];
      V[k]:=AUX;
    END;
    FOR i:=(j+1) TO NEQ DO BEGIN
      AUX:= MC[i,j]/PV;
      FOR k:=(j+1) TO NEQ DO MC[i,k]:=MC[i,k]-AUX*MC[j,k];
      V[i]:=V[i]-AUX*V[j];
    END;
  END;
  C[NEQ]:=V[NEQ]/MC[NEQ,NEQ];
  FOR k:=(NEQ-1) DOWNTO 1 DO BEGIN
    C[k]:=V[k];
    FOR j:=(k+1) TO NEQ DO C[k]:=C[k]-MC[k,j]*C[j];
    C[k]:=C[k]/MC[k,k];
  END;

```

END;
END;

```

{*****}
PROCEDURE FUNCOES_INCOGNITAS;
{*****}
BEGIN
  FOR i:=0 TO NPONTOS DO BEGIN
    x:=i*L/NPONTOS ;
  {
    EXPRESSAO DE W
  }
    W:= C[1]*CUB(x)/(6*E*IT)
      +t1*(-C[2]*EXP(LM1*x)+C[3]*EXP(-LM1*x))
      +t2*(-C[4]*EXP(LM2*x)+C[5]*EXP(-LM2*x))
      +t3*(-C[6]*EXP(LM3*x)+C[7]*EXP(-LM3*x))
      +C[8]*SQR(x)/2
      +C[9]*x
      +C[10]
      +q*SQR(SQR(x))/(24*E*IT) ;
  {
    EXPRESSAO DE Web
  }
    Wt:=0;
    IF (CC1='E') THEN BEGIN
      IF (CC2='E') THEN BEGIN
        Web:=q*SQR(x)*SQR(L-x)/(24*E*IT) ;
        Wt:=Web+q*x*(L-x)/(2*G*AA) ;
        END;
      IF (CC2='A') THEN BEGIN
        Web:=q*SQR(x)*((L-x)*(3*L-2*x))/(48*E*IT) ;
        Wt:=Web+q*x*(G*AA*L*x-2*(12*E*IT
          +5*G*AA*SQR(L)))*(x-L)/(16*G*AA*(3*E*IT+G*AA*SQR(L)));
        END;
      IF (CC2='L') THEN BEGIN
        Web:=q*SQR(x)*(6*SQR(L)-4*L*x
          +SQR(x))/(24*E*IT) ;
        Wt:=Web+q*x*(2*L-x)/(2*G*AA) ;
        END;
      END;
    IF (CC1='A') THEN BEGIN
      IF (CC2='E') THEN BEGIN
        Web:=q*x*(SQR(L-x)*(L+2*x))/(48*E*IT)
          -M0*SQR(L-x)/(4*E*IT*L) ;
        END;
      IF (CC2='A') THEN BEGIN
        Web:=q*x*(CUB(L)
          -2*L*SQR(x)+CUB(x))/(24*E*IT) ;
        Wt:=Web+q*x*(L-x)/(2*G*AA) ;
        END;
      END;
    IF (CC1='L') THEN BEGIN
      IF (CC2='E') THEN
        Web:=q*SQR(L-x)*(3*SQR(L)+2*L*x+SQR(x))/(24*E*IT) ;
    END;
  }

```

```

{
EXPRESSAO DE S1
}
S1:= C[2] *EXP( LM1*x)
      +C[3] *EXP(-LM1*x)
      +C[4]*M12*EXP( LM2*x)
      +C[5]*M12*EXP(-LM2*x)
      +C[6]*M13*EXP( LM3*x)
      +C[7]*M13*EXP(-LM3*x)
      -g1*(q*x+C[1]) ;

{
EXPRESSAO DE S2
}
S2:= C[2]*M21*EXP( LM1*x)
      +C[3]*M21*EXP(-LM1*x)
      +C[4] *EXP( LM2*x)
      +C[5] *EXP(-LM2*x)
      +C[6]*M23*EXP( LM3*x)
      +C[7]*M23*EXP(-LM3*x)
      -g2*(q*x+C[1]) ;

{
EXPRESSAO DE S3
}
S3:= C[2]*M31*EXP( LM1*x)
      +C[3]*M31*EXP(-LM1*x)
      +C[4]*M32*EXP( LM2*x)
      +C[5]*M32*EXP(-LM2*x)
      +C[6] *EXP( LM3*x)
      +C[7] *EXP(-LM3*x)
      -g3*(q*x+C[1]) ;

{
EXPRESSAO DE BETA
}
BETA:=(-1/(ALFA*G*AA)*(q*x+C[1])) ;
{
WRITELN (ARQ,x:10:2,W,Web,Wt,S1,S2,S3,BETA); }
WRITELN (ARQ,x/L:10:2,S1,S2,S3);
END;
WRITELN (ARQ);
END;

{*****}
PROCEDURE DERIVADAS_DOS_S;
{*****}
BEGIN
FOR i:=0 TO NPONTOS DO BEGIN
x:=i*L/NPONTOS;
{
EXPRESSAO DE SL1
}
SL1:= C[2]*LM1 *EXP( LM1*x)
      -C[3]*LM1 *EXP(-LM1*x)
      +C[4]*LM2*M12*EXP( LM2*x)
      -C[5]*LM2*M12*EXP(-LM2*x)
      +C[6]*LM3*M13*EXP( LM3*x)
      -C[7]*LM3*M13*EXP(-LM3*x)

```

```

      -g1*q ;
{
EXPRESSAO DE SL2
}
      SL2:= C[2]*LM1*M21*EXP( LM1*x)
            -C[3]*LM1*M21*EXP(-LM1*x)
            +C[4]*LM2      *EXP( LM2*x)
            -C[5]*LM2      *EXP(-LM2*x)
            +C[6]*LM3*M23*EXP( LM3*x)
            -C[7]*LM3*M23*EXP(-LM3*x)
            -g2*q ;
{
EXPRESSAO DE SL3
}
      SL3:= C[2]*LM1*M31*EXP( LM1*x)
            -C[3]*LM1*M31*EXP(-LM1*x)
            +C[4]*LM2*M32*EXP( LM2*x)
            -C[5]*LM2*M32*EXP(-LM2*x)
            +C[6]*LM3      *EXP( LM3*x)
            -C[7]*LM3      *EXP(-LM3*x)
            -g3*q ;
      WRITELN (ARQ,X/L:10:2,SL1,SL2,SL3);
      END;
      WRITELN (ARQ);
END;

{*****}
      PROCEDURE TENSOES;
{*****}
BEGIN
  FOR i:=0 TO 5 DO BEGIN
    x:=i*L/5;
    WRITELN (ARQ,'x/L=',x/l);
    FOR j:=-10 TO 10 DO BEGIN
      y:=j*b1/10;
      SIG1:=-C[1]*H1*x/IT
      +E*C[2]*H1*EXP( LM1*x)*LM1*( t1*LM1- 1+      SQR(y)/SQR(b1))
      +E*C[3]*H1*EXP(-LM1*x)*LM1*(-t1*LM1+ 1-      SQR(y)/SQR(b1))
      +E*C[4]*H1*EXP( LM2*x)*LM2*( t2*LM2-M12+M12*SQR(y)/SQR(b1))
      +E*C[5]*H1*EXP(-LM2*x)*LM2*(-t2*LM2+M12-M12*SQR(y)/SQR(b1))
      +E*C[6]*H1*EXP( LM3*x)*LM3*( t3*LM3-M13+M13*SQR(y)/SQR(b1))
      +E*C[7]*H1*EXP(-LM3*x)*LM3*(-t3*LM3+M13-M13*SQR(y)/SQR(b1))
      -E*C[8]*H1-E*H1*q*(1/(ALFA*G*AA) +SQR(x)/(2*E*IT)
      -g1+g1*SQR(y)/SQR(b1));
      y:=j*b2/10;
      SIG2:= C[1]*H2*x/IT
      +E*C[2]*H2*EXP( LM1*x)*LM1*(-t1*LM1+M21-M21*SQR(y)/SQR(b2))
      +E*C[3]*H2*EXP(-LM1*x)*LM1*( t1*LM1-M21+M21*SQR(y)/SQR(b2))
      +E*C[4]*H2*EXP( LM2*x)*LM2*(-t2*LM2+ 1-      SQR(y)/SQR(b2))
      +E*C[5]*H2*EXP(-LM2*x)*LM2*( t2*LM2- 1+      SQR(y)/SQR(b2))
      +E*C[6]*H2*EXP( LM3*x)*LM3*(-t3*LM3+M23-M23*SQR(y)/SQR(b2))
      +E*C[7]*H2*EXP(-LM3*x)*LM3*( t3*LM3-M23+M23*SQR(y)/SQR(b2))
      +E*C[8]*H2+E*H2*q*(1/(ALFA*G*AA)+SQR(x)/(2*E*IT)
      -g2+g2*SQR(y)/SQR(b2));
      y:=j*b3/10;

```

```

SIG3:= C[1]*H3*x/IT
+E*C[2]*H3*EXP( LM1*x)*LM1*(-t1*LM1+M31-M31*SQR(y)/SQR(b3))
+E*C[3]*H3*EXP(-LM1*x)*LM1*( t1*LM1-M31+M31*SQR(y)/SQR(b3))
+E*C[4]*H3*EXP( LM2*x)*LM2*(-t2*LM2+M32-M32*SQR(y)/SQR(b3))
+E*C[5]*H3*EXP(-LM2*x)*LM2*( t2*LM2-M32+M32*SQR(y)/SQR(b3))
+E*C[6]*H3*EXP( LM3*x)*LM3*(-t3*LM3+ 1- SQR(y)/SQR(b3))
+E*C[7]*H3*EXP(-LM3*x)*LM3*( t3*LM3- 1+ SQR(y)/SQR(b3))
+E*C[8]*H3+E*H3*q*(1/(ALFA*G*AA)+SQR(x)/(2*E*IT)
-g3+g3*SQR(y)/SQR(b3));
WRITELN(ARQ,j/10,SIG1,SIG2,SIG3);
END;
WRITELN(ARQ);
END;
CLOSE(ARQ);
END;

```

```

{*****
PROGRAMA PRINCIPAL
*****}
BEGIN
  ENTRADA_DE_DADOS;
  CARACTERÍSTICAS_GEOMETRICAS;
  AUTOVALORES;
  BASE_DE_AUTOVETORES;
  FORMAR_O_SISTEMA;
  RESOLVER_O_SISTEMA;
  FUNCOES_INCOGNITAS;
  DERIVADAS_DOS_S;
  TENSOES;
END.

```