



DINÂMICA E CONTROLE DE CAOS DE UM SISTEMA PENDULAR COM MEMÓRIA DE FORMA

Dimitri Danulussi Alves Costa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2017

DINÂMICA E CONTROLE DE CAOS DE UM SISTEMA PENDULAR COM
MEMÓRIA DE FORMA

Dimitri Danulussi Alves Costa

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Marcelo Amorim Savi, D. Sc.

Prof. Thiago Gamboa Ritto, D. Sc.

Prof.^a Aline Souza de Paula, D. Sc.

Prof.^a Roberta de Queiroz Lima, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
FEVEREIRO DE 2017

Costa, Dimitri Danulussi Alves

Dinâmica e Controle de Caos de um Sistema Pendular com Memória de Forma/ Dimitri Danulussi Alves Costa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XVI, 82 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 71-79.

1. Dinâmica Não-linear. 2. Controle de Caos. 3. Ligas com Memória de Forma. I. Savi, Marcelo Amorim. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título

AGRADECIMENTOS:

Primeiramente agradeço a Deus por criar um universo tão rico e fascinante onde cada detalhe descoberto leva a novos questionamentos. Agradeço aos meus pais que me apoiaram em toda a minha jornada e me incentivaram sempre a perseguir meus objetivos. Sou grato a toda a minha família que sempre esteve à disposição para me ajudar.

Agradeço o meu orientador Prof. Dr. Marcelo Amorim Savi, pela paciência e profissionalismo dedicados a me guiar durante a construção desse trabalho, pelas discussões e questionamentos levantados visando sempre à obtenção da excelência e por todo suporte dado. Também agradeço a banca examinadora por seu tempo e críticas construtivas.

Finalmente agradeço ao meu grande amor Isadora Henriques pela ajuda e suporte nas noites em claro recheadas de trabalho e risadas, e em me suportar nos momentos de desespero. Também agradeço a todos os meus amigos que contribuíram nessa jornada com conselhos, brincadeiras ou apenas boas risadas.

“Somewhere, something incredible is waiting to be known.”
– Carl Sagan

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

DINÂMICA E CONTROLE DE CAOS DE UM SISTEMA PENDULAR COM MEMÓRIA DE FORMA

Dimitri Danulussi Alves Costa

Fevereiro/2017

Orientador: Marcelo Amorim Savi

Programa: Engenharia Mecânica

Este trabalho desenvolve um estudo sobre a dinâmica e o controle de um sistema mecânico pendular composto por elementos de liga com memória de forma (SMA). A dinâmica do sistema é modelada assumindo que o comportamento termomecânico da SMA é descrito através de um modelo constitutivo polinomial dependente da temperatura. Apresenta-se uma investigação numérica do sistema mostrando comportamentos como órbitas periódicas de períodos variados, coexistência de múltiplas órbitas, caos transiente e caos. Todos os comportamentos são comprovados pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. A técnica de realimentação com estados defasados estendidos é aplicada para o controle do sistema considerando-se dois tipos de controladores: mecânico e térmico. A estabilidade das órbitas é avaliada através dos multiplicadores de Floquet. Para o controlador mecânico, apresenta-se uma discussão sobre a estabilidade de órbitas subharmônicas e sobre a relação entre consumo energético, tempo de estabilização e os parâmetros do controlador. O controlador com temperatura explora o comportamento termomecânico da SMA, investigando a sua viabilidade considerando suas limitações decorrentes de suas restrições temporais. Os resultados indicam que é viável utilizar atuadores de SMA no controle de caos e as relações entre os multiplicadores de Floquet de uma órbita e o controle.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

DYNAMICS AND CHAOS CONTROL OF AN SHAPE MEMORY ALLOY
PENDULUM SYSTEM

Dimitri Danulussi Alves Costa

February/2017

Advisor: Marcelo Amorim Savi

Department: Mechanical Engineering

This work deals with the dynamics and control of a pendulum system coupled with shape memory alloys (SMAs) springs. To construct the system's dynamics a polynomial temperature dependent constitutive model for the SMA is employed. The system's dynamics is characterized displaying a variety of responses like chaotic motion, transient chaos, coexisting periodic orbits and a variety of n-periodic orbits. All the behaviours are identified by their Lyapunov exponents. The extended time delay feedback technique is applied to control the system with two distinct types of controllers: a mechanical and a thermal. The stability of the orbits is identified using Floquet multipliers. Discussions about sub-harmonic orbits stability and the relation between energy consumption and the controller's parameters are made. The thermal controller uses the thermomechanical behaviour of the SMA for actuation. The results display the usage possibility of SMA actuator on chaos control and shed light into the relation between the Floquet multipliers of an orbit and the ETDF control.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Estrutura do Trabalho	2
2. REVISÃO DE LITERATURA	4
2.1. Caos em sistemas da engenharia.....	6
2.2. Controle de Caos.....	8
2.3. Ligas com Memória de Forma.....	14
3. TÉCNICAS DE CONTROLE DE CAOS	17
3.1. Realimentação por estados defasados	17
3.2. Realimentação de estados defasados estendidos.....	18
3.3. Realimentação de estados defasados estendidos com auto ajuste temporal	18
3.4. Método ETDF com instabilidade (adição de graus de liberdade instáveis).....	21
3.5. Resolução de equações diferenciais defasadas e cálculo de expoentes de Lyapunov de uma órbita	22
3.6. Multiplicadores de Floquet	23
3.7. Identificação de órbitas instáveis	28
4. SISTEMA PÊNDULO-SMA	31
4.1. Ligas com memória de forma	31
4.2. O pendulo não-linear com ligas com memória de forma.....	35
4.3. Simulações Numéricas.....	37
4.4. Identificação de OPIs	48
5. CONTROLE DE CAOS	52
5.1. Controlador mecânico	52
5.1.1. Avaliação do controle ETDF.....	53
5.1.2. Estabilização de subharmônicos	59
5.2. Controlador térmico	61
5.2.1. Controle direto	62
5.2.2. Controle ETDF	63
6. CONCLUSÕES	69
APÊNDICE	80

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1: Diagrama dos métodos de controle e objetivos (caixas) juntamente com algumas aplicações. Vale ressaltar que os métodos comuns de controle para sistemas não lineares como redes neurais não são representados nesse diagrama.</p> <p>Figura 2: Diagramas para análise de estabilidade usando expoentes de Floquet. a) Diagrama com pares real e imaginárias dos expoentes de Floquet para vários valores de κ. O eixo real se anula na linha pontilhada que contém círculos. b) Diagrama com a parte real dos expoentes de Floquet contra valores do parâmetro κ.</p> <p>Figura 3: Representação do plano imaginário dos multiplicadores de Floquet.</p> <p>Figura 4: Método de separação das OPIs. A esquerda: seleção dos pontos da OPI segundo o critério r_1 o círculo é centrado no ponto ξ_i e verifica-se se o ponto ξ_{i+k} encontra-se dentro do círculo. A direita: Separação das OPIs segundo o critério de r_2 cada aglomerado representa uma OPI de período-1 diferente o critério r_2 identifica que os pontos externos ao círculo centrado no ponto ξ_i pertencem a OPIs diferentes da do ponto analisado.</p> <p>Figura 5: Ciclo de carregamento termomecânico representando as transformações do SMA e seu comportamento de memória de forma.</p> <p>Figura 6: Exemplo do comportamento pseudoelástico do SMA com a indicação de cada etapa na deformação do material.</p> <p>Figura 7: Energia Livre de Helmholtz em temperaturas representando cada intervalo para o modelo de Falk. $a_m^* = 103\text{J/K}$, $b_m^* = 4 \cdot 10^7\text{J}$, $T_A = 313\text{ K}$, $T_M = 287\text{ K}$.</p> <p>Figura 8: Pendulo não linear: a) Modelo (1) disco metálico; (2) massa concentrada; (3) Sistema de dissipação magnético; (4) sensor; (5) atuador linear; (6) mola de SMA; (7) motor DC; b) Parâmetros e forças no disco metálico; c) Parâmetros para o sistema de forçamento (DE PAULA et al. 2006).</p> <p>Figura 9: Local dos pontos de equilíbrio no caso linear. Pontos estáveis são representados em azul e pontos instáveis em preto.</p> <p>Figura 10: Local dos pontos de equilíbrio em radianos em função da fase do motor em radianos para temperatura de $280,15\text{ K}$ abaixo de T_M (a) e $283,15\text{ K}$ logo acima de T_M (b). \blacktriangle são pontos instáveis e linha contínua preta são pontos estáveis.</p> <p>Figura 11: Local dos pontos de equilíbrio contra fase do motor para o sistema com mola de SMA no intervalo $T_M < T < T_A$. a) $284,15\text{ K}$ b) $285,15\text{ K}$ c) $286,15\text{ K}$ d) $287,15\text{ K}$ e) $288,15\text{ K}$ f) $289,15\text{ K}$. \blacktriangle são pontos instáveis e linha contínua preta são pontos estáveis.</p> <p>Figura 12: Local dos pontos de equilíbrio contra fase do motor para o sistema com mola de SMA para $T > T_A$. a) $290,15\text{ K}$ b) $291,15\text{ K}$. \blacktriangle são pontos instáveis e linha contínua preta são pontos estáveis.</p> <p>Figura 13: Diagrama de bifurcação com a variação da temperatura com frequência $\omega = 5,5\text{ rad/s}$. Por simplicidade, somente os resultados das posições iniciais mais relevantes são mostrados. Todas as outras condições iniciais apresentam comportamentos semelhantes as apresentadas na figura.</p> <p>Figura 14: Órbitas na frequência de $5,5\text{ rad/s}$ e temperatura de $291,15\text{ K}$. a) Comportamento caótico; b) Órbita periódica.</p> <p>Figura 15: Órbitas com frequência de forçamento de $5,5\text{ rad/s}$ e $T = 291,15\text{ K}$. a) Órbita de período 12, note que cada marcador da seção de Poincaré na verdade são dois marcadores muito próximos; b) Órbita de período 1.</p> <p>Figura 16: Diagrama de bifurcação com a frequência de forçamento em $T = 291,15\text{ K}$. Por simplicidade, somente os resultados das posições iniciais mais relevantes são</p>	<p>9</p> <p>25</p> <p>25</p> <p>29</p> <p>32</p> <p>33</p> <p>34</p> <p>36</p> <p>38</p> <p>39</p> <p>40</p> <p>40</p> <p>41</p> <p>42</p> <p>42</p> <p>42</p>
--	--

mostrados. Todas as outras condições iniciais apresentam comportamentos semelhantes as apresentadas na figura	43
Figura 17: Soluções do Sistema em diferentes frequências de forçamento (órbitas de período 1). a) 3,59 rad/s; b) 5,1 rad/s.	43
Figura 18: Solução caótica em $\omega = 5,5$ rad/s. a) Espaço de fase. b) Seção de Poincaré.	43
Figura 19: Solução caótica em $\omega = 4,78$ rad/s. a) Espaço de fase. b) Seção de Poincaré.	44
Figura 20: Caos transiente $\omega = 6$ rad/s, condições iniciais (10,152 rad, 0 rad/s). a) Sela caótica e solução permanente. b) Evolução com o tempo.	44
Figura 21: Caos transiente $\omega = 6$ rad/s, condições iniciais (10,151 rad, 0 rad/s). a) Sela caótica e solução permanente. b) Evolução com o tempo.	45
Figura 22: Diagrama de bifurcação em $T=286,15$ com frequência de forçamento de 6 rad/s contra o parâmetro b . Por simplicidade, somente os resultados das posições iniciais mais relevantes são mostrados. Todas as outras condições iniciais apresentam comportamentos semelhantes as apresentadas na figura.	45
Figura 23: a) Órbita caótica e b) Seção de Poincaré em $T = 286,15$ K, $\omega = 6$ rad/s e $b = 1,5$ cm.	46
Figura 24: Órbitas de período 1 coexistindo com o atrator caótico da figura 22. a) Em volta de 11,4 rad b) Nas proximidades da origem.	46
Figura 25: Evolução das regiões caóticas e diagramas de bifurcação com a temperatura e um braço de motor pequeno $b = 1,5$ cm. a) 284,65K; b) 285,15 K; c) 285,65 K; d) 286,15 K; e) 286,65 K; f) 287,15 K. Os símbolos indicam as condições iniciais: \bullet (-12, 0); \star (-6, 0); \blacktriangle (0, 0); \blacklozenge (15 rad, 0) nas figuras (a) e (b); \blacklozenge (12, 0) nas figuras (c),(d),(e) e (f).	47
Figura 26: Exemplo de cálculo de expoentes de Lyapunov. a) Convergência do expoente para o atrator com destaque ao patamar devido a OPI e período 1, mostrando a existência dos patamares.	48
Figura 27: OPIs identificadas. Períodos: a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6, g) 9, h) 12.	50
Figura 28: a) Atrator caótico e mapa de Poincaré das órbitas. b) Espaço de fase das OPIs. Note que ao representar as OPIs em uma mesma figura a imagem se assemelha ao espaço de fase do atrator caótico.	51
Figura 29: Algoritmo para cálculo do expoente de Floquet máximo. μ_0 é o chute inicial para os Expoentes de Floquet, μ_n indica a n-ésima, $\mu_{n+\Delta t}$ são os expoentes de Floquet calculados após a evolução temporal da n-ésima, err é a tolerância no erro, e μ_{best} é o melhor indivíduo da população selecionada pelo critério de parada.	53
Figura 30: Parte real dos expoentes de Floquet da órbita de período 1 analisada contra valores de K para vários valores de R . O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03$ Hz/ ω_0	54
Figura 31: Comparação entre os valores aproximados e os valores exatos dos expoentes de Floquet da OPI de período 1. As linhas pretas destacam a partir de que ponto a divergências na aproximação. O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03$ Hz/ ω_0	55
Figura 32: Controle da OPI de período-1. a) Resposta da posição no espaço. b) Força de Controle. c) Órbita estabilizada. d) Posição do atuador.	55
Figura 33: a, b) Comparação entre tempo e energia necessários para estabilização da OPI de período 1 para o mesmo valor de $K=0,4$ e valores diferentes de R , com os expoentes de Floquet. c, d) Comparação entre tempo e energia necessários para estabilização da OPI de período 1 para o mesmo valor de $R=0,1$ e valores diferentes de K , com os expoentes de Floquet. O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03$ Hz/ ω_0	57

Figura 34: Parte real dos expoentes de Floquet da OPI de período-2 contra K para diferentes valores de R . O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03 \text{ Hz}/\omega_0$	58
Figura 35: Controle mecânico de múltiplas órbitas. $OPI - 1: K = 0,3, R = 0,1; OPI - 2: K = 0,1, R = 0,1; OPI - 3: K = 0,1, R = 0,1$. a) Seção de Poincaré da posição com o tempo. b) Potência usada no controle com o tempo.....	59
Figura 36: Exemplificação da estabilização de duas órbitas diferentes pelo método ETDF. a) Espaço de fase representando a OPI-1 estabilizada. b) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-1. c) Espaço de fase representando a OPI-3 estabilizada. d) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-3.....	60
Figura 37: Exemplificação da estabilização de duas órbitas diferentes pelo método ETDF. a) Espaço de fase representando a OPI-1 estabilizada ($K = 0.5, R = 0.1$). b) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-1. c) Espaço de fase representando a OPI-3 estabilizada ($K = 0.3, R = 0.1$). d) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-3.....	60
Figura 38: Respostas com o controle de temperatura. a) Ciclo caótico-periódico-caótico. b) Seção de Poincaré do atrator caótico e da órbita de período um.....	63
Figura 39: Respostas com o controle de temperatura. a) Ciclo caótico-periódico-periódico. b) Seção de Poincaré do atrator caótico e das órbitas de período um.	63
Figura 40: Controle da OPI de período-1 com temperatura. a) Resposta da posição no espaço. b) Potência consumida no controle descontada a potência para manter o sistema na temperatura de referência. c) Órbita estabilizada. d) Posição do atuador.....	65
Figura 41: Controle térmico de múltiplas órbitas. $OPI - 1: K = 0,3, R = 0,1; OPI - 2: K = 0,1, R = 0,1; OPI - 3: K = 0,1, R = 0,1$. a) Seção de Poincaré da posição com o tempo. b) Potência usada no controle com o tempo.....	66
Figura 42: OPI-1 estabilizada com diferentes coeficientes de convecção (h) e erros associados ao controle em % do maior valor da força de controle ($K = 0,35, R = 0,2$). a),b): $h = 50 \text{ W/K}$ c),d): $h = 5 \text{ W/K}$ e),f): $h = 2 \text{ W/K}$ g),h): $h = 1,5 \text{ W/K}$	67
Figura 43: Caso em que $h = 1 \text{ W/K}$. O controlador apresenta erros muito altos e não consegue estabilizar o sistema na OPI desejada.....	68
Figura 44: Parte real dos expoentes de Floquet da OPI-1 para vários valores de h	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Órbitas periódicas instáveis detectadas e seus respectivos expoentes.....	49
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- DDE – Equação diferencial com defasagem temporal (*Delayed differential equation*)
- EF – Expoentes de Floquet (*Floquet exponents*)
- ETDF – Realimentação por estados defasados estendidos (*Extended time delay feedback*)
- MF – Multiplicadores de Floquet (*Floquet multipliers*)
- ODE – Equação diferencial ordinária (*ordinary differential equation*)
- OGY – Controle de Ott-Grebogy-York (*Ott-Grebogy-York control*)
- OPF – Realimentação proporcional ocasional (*Occasional proportional feedback*)
- OPI – Órbita periódica instável (*Unstable periodic orbit*)
- SC – Semi-contínuo (*semi-continuous*)
- SMA – Liga de memória de forma (*Shape memory alloy*)
- TDF – Realimentação por estados defasados (*Time delay feedback*)

LISTA DE SÍMBOLOS

- a - Distância vertical entre o centro do disco do pêndulo e o motor.
- a_m - Parâmetro linear da liga de memória de forma na equação da força.
- a_m^* - Parâmetro linear da liga de memória de forma na equação de energia.
- b - Tamanho do braço do motor.
- b_m - Parâmetro não linear da liga de memória de forma na equação da força.
- b_m^* - Parâmetro não linear da liga de memória de forma na equação de energia.
- c_p - Capacidade térmica da mola de SMA.
- C - Função de observação.
- d - Diâmetro do disco de forçamento.
- D - Diâmetro do disco que contém a massa concentrada.
- e - Erro do controle térmico.
- err - Tolerância do critério de minimização.
- f - Função do sistema.
- f_2 - Função de controle proporcional.
- F_{in} - Valor parcial do sinal de controle no controlador instável.
- F_m - Força de restituição exercida no pêndulo por uma das molas de SMA.
- F_{mec} - Força do atuador mecânico.
- F_{thermo} - Força do atuador térmico.
- \mathcal{F} - Transformação no plano complexo.
- g - Sinal de controle.
- g_g - Aceleração da gravidade.
- G - Gradiente da função de custo.
- G_l - Ganho de um controlador proporcional.
- h - Coeficiente de dissipação térmica por convecção.
- h_v - Variável instável do controlador.
- H - Coeficiente dependente dos expoentes de Floquet
- H_m - Matrix dos coeficientes dependentes dos expoentes de Floquet
- i - Indexador.
- I - Matrix identidade.
- I_1 - Corrente total no atuador.
- I_c - Corrente de controle.
- I_{ref} - Corrente de referência.
- j - Indexador.
- J_m - Jacobiana do sistema calculada em torno do ponto m .

K	- Ganho do controlador.
K_1	- Valor do ganho o qual inicia-se a região estável.
K_2	- Valor do ganho o qual finda-se a região estável.
K_{op}	- Valor do ganho onde o multiplicador de Floquet é mínimo.
m	- Massa concentrada.
M_c	- Martensita maclada.
M_d	- Martensita demaclada.
M_+	- Martensita induzida por tensão.
M_-	- Martensita induzida por compressão.
n	- Número natural.
N_p	- Número total de pontos no mapa.
\mathcal{N}	- Conjunto dos números naturais.
Q	- Equação característica.
r_1	- Critério de tolerância para aceitação de pontos como pertencentes a uma OPI.
r_2	- Critério de tolerância para separação de OPIs.
R	- Parâmetro de controle relacionado à influência dos estados defasados.
R_{ohn}	- Resistência elétrica das molas de SMA.
\mathbb{R}^n	- Espaço real n-dimensional.
s_m	- Força de restituição da mola de SMA conectada diretamente ao atuador mecânico.
S_c	- Função de custo.
S_m	- Soma ponderada dos estados defasados.
S_τ	- Soma aproximada dos estados defasados.
t	- Tempo.
t'	- Variável de integração.
t^*	- Tempo adimensional.
T	- Temperatura do SMA.
T_1	- Temperatura da mola de SMA.
T_A	- Temperatura para apenas austenita ser estável livre de tensões.
T_M	- Temperatura que abaixo dela apenas martensita é estável livre de tensões.
T_p	- Período mínimo das OPIs.
T_{ref}	- Temperatura de referência.
T_∞	- Temperatura do ambiente.
\mathbf{u}_i	- Vetor do desvio do i-ésimo ponto da média dos pontos selecionados de uma OPI.
\mathbf{U}	- Matrix dos vetores do desvio da média.
\mathbf{v}_{mi}	- Vetor de desvio do m-ésimo ponto com o ponto seguinte.
\mathbf{V}	- Matrix dos vetores do desvio do ponto seguinte.

\mathbf{x}	- Vetor de estado do sistema.
x_k	- K-ésima variável de estado do sistema.
\mathbf{x}^*	- Órbita alvo para cálculo dos multiplicadores de Floquet.
y	- Sinal observado do sistema.
y^*	- Sinal observado na órbita alvo para o cálculo dos multiplicadores de Floquet.
z	- Número complexo.
β	- Termo de relaxação de gradiente.
γ	- Constante do filtro passa alta.
$\delta\mathbf{x}$	- Pequeno deslocamento em torno da OPI.
Δ	- Função de custo suavizada no tempo.
ε	- Deformação.
η_{se}	- Coeficiente de atrito seco.
η_{vis}	- Coeficiente de atrito viscoso.
θ	- Fase do motor.
κ	- Parâmetro representativo do controlador.
λ	- Expoente de Lyapunov.
λ_0	- Parâmetro do controlador instável.
λ_∞	- Parâmetro do controlador instável.
μ	- Expoente de Floquet.
μ_{max}	- Máximo expoente de Floquet.
μ_{min}	- Valor mínimo da parte real do máximo expoente de Floquet.
μ_s	- Valor do expoente de Floquet sem controle.
μ^*	- Aproximação real do expoente de Floquet.
ν	- Parâmetro de tamanho da janela de integração.
ξ_i	- I-ésimo ponto do mapa.
ρ_i	- I-ésima função de Floquet.
σ	- Força exercida pela SMA.
τ	- Atraso do controlador.
τ_n	- Período da n-ésima órbita subharmônica.
τ_p	- Tempo de evolução do tempo de defasagem.
τ_s	- Tempo de evolução do sistema.
ϕ	- Posição em radianos do pêndulo.
ψ	- Energia livre de Helmholtz.
Ψ	- Matrix fundamental.
ω	- Frequência de forçamento.
ω_0	- Frequência para adimensionalização

1. INTRODUÇÃO

Os sistemas não lineares estão presentes em vários problemas de engenharia, como o estudo de estruturas submetidas a grandes deformações, guindastes, pêndulos, embarcações, dentre outros. De uma maneira geral, esses sistemas apresentam uma grande variedade de respostas dinâmicas como o caos.

Historicamente respostas caóticas eram indesejadas na engenharia sendo muitas vezes evitadas ou suprimidas com altos gastos de energia. Ainda hoje, há situações em que o caos é indesejado como no controle de potência de lasers (SCHIKORA *et al.*, 2008). Nesses casos, o comportamento caótico precisa ser eliminado, sendo nocivo ao sistema e podendo causar falhas críticas em seu funcionamento. Recentemente, esse problema passou a ser observado sob uma ótica diferente devido à possibilidade do aproveitamento de órbitas periódicas instáveis (OPIs) imersas nesse tipo de resposta. A estabilização de OPIs proporciona flexibilidade ao sistema além de possibilitar o controle com baixo consumo de energia (FRADKOV; EVANS, 2005). Devido a esse grande potencial, as técnicas de controle de caos tiveram destaque nos últimos anos em pesquisas sobre colheita de energia, controle de vibrações, controle de satélites e sondas, criptografia e sincronização de sistemas caóticos.

Para controlar um sistema qualquer há a necessidade de acessar e adaptar um de seus parâmetros. Materiais inteligentes representam uma classe de materiais com propriedades especiais que proporcionam características adaptativas. Ligas com memória de forma (SMAs) constituem um tipo desses materiais que tem como característica essencial a mudança de suas propriedades mecânicas com a variação de temperatura. Essas ligas possuem grande potencial na dinâmica aplicada e como atuadores estando associadas ao controle de vibrações (BESSA *et al.* 2013), estruturas tipo origami (KURIBAYASHI *et al.*, 2006), robótica (KIM *et al.*, 2006) e colheita de energia térmica (LEBEDEV *et al.*, 2011). O comportamento singular dessas ligas é devido às transformações termo-elásticas da martensita e dentre os comportamentos típicos destacam-se a pseudoelasticidade e o efeito de memória de forma.

Mesmo com o crescente interesse da engenharia em controle de caos e materiais inteligentes ainda há poucos trabalhos que tentam agrupar esses dois conhecimentos em uma aplicação. Além disso, há uma deficiência de pesquisas na aplicação do controle de

caos em sistemas mecânicos em geral. No entanto, existe uma crescente demanda para o controle do comportamento caótico que pode ser observado em processos de usinagem (LITAK *et al.*, 2009), ligas de memória de forma (MACHADO *et al.*, 2003), pêndulos (DE PAULA *et al.*, 2006), dissipadores torcionais (EL-BASSIOUNY, 2006; MONROE; SHAW, 2013), sistemas de colheita de energia (PARK *et al.*, 2008), dentre outros (BARBOSA *et al.*, 2015; SAVI *et al.*, 2006).

Este trabalho explora a utilização de técnicas de controle de caos em sistemas inteligentes. Em essência, utiliza-se um sistema pendular cuja excitação é provida por um sistema composto por um motor elétrico e molas com memória de forma. Desta forma, a adaptabilidade é conferida pela dependência da temperatura dos elementos com memória de forma. Em seguida, aplica-se ao sistema o método contínuo de controle de caos baseado na realimentação de estados defasados ETDF. Para determinar e otimizar os parâmetros do controlador é utilizada a teoria de Floquet. Dois tipos de controlador são considerados: mecânico e térmico. O controlador mecânico considera um atuador que impõe variações na configuração do sistema de excitação. O controlador térmico, por sua vez, explora a dependência da temperatura nas propriedades termomecânicas do SMA para o controle. Investiga-se a viabilidade de estabilizar órbitas periódicas instáveis a partir do controlador térmico e suas limitações decorrentes de suas restrições temporais.

1.1. Estrutura do Trabalho

Após esta introdução, o capítulo 2 apresenta uma revisão de literatura focando principalmente nos trabalhos sobre sistemas caóticos e suas aplicações na engenharia. Em seguida, foca-se nas técnicas de controle de caos existentes e suas modificações destacando os trabalhos que mais contribuíram para o seu desenvolvimento. Por fim, são citados alguns artigos de revisão importantes sobre o tema e uma breve introdução a ligas de memória de forma.

No capítulo 3 são apresentadas em detalhes as técnicas de controle de caos utilizadas além de outras técnicas auxiliares para a definição de estabilidade e identificação de órbitas periódicas instáveis.

O capítulo 4 discorre sobre as propriedades das SMAs e sobre modelos constitutivos usados para modelar o seu comportamento termomecânico. Em seguida, é

discutido o sistema pêndulo-SMA, deduzindo as equações dinâmicas. Logo após são apresentada as simulações sobre a dinâmica do sistema e identifica-se o seu comportamento. Finalmente é escolhido um atrator caótico, identificando suas órbitas periódicas instáveis.

O capítulo 5 expõe os resultados para um controlador ETDF aplicado por dois atuadores diferentes: um mecânico e um térmico. O consumo de energia e o tempo de estabilização como alguns problemas gerais do controle ETDF são discutidos. Para o controle térmico é analisada sua viabilidade e suas limitações devido a restrições temporais ao sistema. Também comparam-se os resultados obtidos pelos dois controladores.

O capítulo 6 apresenta a conclusão do trabalho, suas possíveis aplicações e contribuições.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Os sistemas naturais, desde efeitos quânticos e variações de intensidade em lasers (“*light amplification by stimulated emission of radiation*”) de alta potência aos movimentos de aglomerados de estrelas, apresentam uma grande variedade de respostas em seus comportamentos. Na engenharia e em nosso cotidiano nos deparamos com essa variedade de respostas em braços de guincho, guindastes, vibrações de estruturas, molas não lineares, dentre outros. Essa diversidade de respostas é o que realça a beleza desses sistemas e o que sempre intrigou os apreciadores do universo. Tal diversidade é devida a não-linearidade desses sistemas, o que torna a sua compreensão muito mais desafiante.

Foi no final do século XIX que Henri Poincaré analisou um desses comportamentos constatando que os movimentos associados a um sistema gravitacional de três corpos no espaço poderia ser extremamente complexo. Essa descoberta mostrou uma nova possibilidade de um sistema não-linear, sendo a primeira vez que o caos foi apresentado à comunidade científica. O comportamento verificado por Poincaré foi taxado como indesejável e considerado erroneamente como completamente aleatório devido a sua complexidade, sendo assim, evitado pela maioria dos pesquisadores (OTANI; JONES, 1997).

O estudo do caos ganhou impulso após a invenção do computador. Ele permitiu que cálculos numéricos, antes inviáveis devido a seu grande número de iterações, fossem realizados com muito mais facilidade e eficiência, tornando possível a obtenção das soluções das equações de governo de sistemas complexos e não-lineares. Foi a partir dessas simulações que Lorenz ao estudar os fenômenos meteorológicos obteve evidências de sua imprevisibilidade, verificando que pequenas variações na precisão dos cálculos e em suas condições iniciais refletiam em comportamentos muito diferentes do sistema estudado após certo período de tempo (LORENZ, 1963). Foi a partir da década de 1970 que o comportamento caótico foi verificado em várias áreas do conhecimento e seu estudo foi exacerbado, como na verificação do comportamento caótico em osciladores (GOLLUB *et al.* 1978; RÖSSLER, 1976), sistemas populacionais (MAY, 1975), em reações químicas (OLSEN; DEGN, 1977), em processos biológicos (MACKEY; GLASS, 1977) e em varias outras situações. Uma das principais descobertas da época foi feita por Feigenbaum (1980) que verificou comportamentos

gerais para a transição de comportamentos regulares para caóticos, observando cascatas de duplicações de período em um diagrama de bifurcação culminavam no caos mostrando regularidade e, desta forma, apresentando características universais na rota para o caos.

Já na década de 1990, impulsionado pela utilização de lasers de alta potência em várias áreas do conhecimento, foi explorado o aproveitamento do comportamento caótico para o controle de um sistema. Ao se aproveitar da infinidade enumerável de órbitas instáveis presentes no caos foi possível o controle do comportamento caótico com baixo consumo de energia, apenas modificando ligeiramente um parâmetro do sistema (OTT *et al.*, 1990). Esse protocolo ficou conhecido como OGY (Ott, Grebogi e Yorke) como uma homenagem a seus criadores e foi considerado o primeiro trabalho que tentava aproveitar o comportamento caótico ao invés de apenas suprimi-lo. Outros protocolos e aperfeiçoamentos foram sendo propostos ao longo do tempo devido a sua grande aplicação em controle de caos (BESSA *et al.*, 2012; BOUKABOU; MEKIRCHA, 2012; PYRAGAS, 2001; SANJUÁN, 2014).

Recentemente, o caos e seu controle são estudados em várias áreas do conhecimento e se destacam na engenharia em sistemas elétricos (HUNT, 1991; MOON *et al.*, 1987), controle de lasers de alta potência (SCHIKORA *et al.*, 2008), no aumento da capacidade de sistemas de coleta de energia (PARK *et al.*, 2008), criptografia (VANWIGGEREN; ROY, 1998), em sistemas mecânicos não suaves (BATTELLI; FECKAN, 2013; DE SOUZA; CALDAS, 2004; SAVI *et al.*, 2007), e em usinagem (LITAK *et al.*, 2009a; LITAK *et al.*, 2009b).

Atualmente os materiais inteligentes vêm sendo aplicados nos mais variados problemas de engenharia devido as suas propriedades singulares. Geralmente eles são utilizados para controle passivo ou ativo devido a sua adaptabilidade as mais diversas situações. As ligas com memória de forma (*Shape Memory Alloys* - SMA) são uma classe de materiais inteligentes largamente aplicados na engenharia, principalmente em controle de vibrações (BESSA *et al.*, 2013), estruturas origânicas (KURIBAYASHI *et al.*, 2006), robótica (KIM *et al.*, 2006) e colheita de energia (LEBEDEV *et al.*, 2011). Seu comportamento singular é devido à transformação termoelástica da martensita, possibilitando que o material apresente comportamentos como o pseudoelástico e de memória de forma. Esses comportamentos podem ser utilizados para simular

movimentos biológicos, na robótica, em engenharia aeroespacial, controle de forma e vibrações, dentre outros (KIM *et al.*, 2006; KURIBAYASHI *et al.*, 2006; LEBEDEV *et al.*, 2011; MACHADO; SAVI, 2003; MACHADO *et al.*, 2003).

A seguir é apresentado um resumo de literatura sobre caos em sistemas da engenharia, controle de caos e ligas de memória de forma.

2.1. Caos em sistemas da engenharia

O estudo de caos na engenharia recebeu um grande enfoque após a descoberta que sistemas mecânicos e elétricos não lineares podem apresentar o comportamento caótico sob determinadas condições (HUNT, 1991; MOON *et al.*, 1987). Também foi mostrado o comportamento caótico em lasers de alta potência (SCHIKORA *et al.*, 2008), e a utilização do caos para protocolos de criptografia e comunicação (VANWIGGEREN; ROY, 1998). Mais recentemente o comportamento caótico também ganhou importância na área de colheita de energia principalmente em piezoelétricos após a verificação que esse tipo de comportamento produz um pico de energia em uma dada OPI, além de apresentar uma banda de eficiência maior que de comportamentos periódicos, porém não produz a maior média de energia ao longo do tempo (PARK *et al.*, 2008). Seguindo o enfoque desse trabalho são apresentados alguns trabalhos sobre caos em sistemas mecânicos.

Shaw e Rand (1989) foram pioneiros no estudo de caos em sistemas mecânicos analisando a movimentação de um pêndulo invertido com limitadores laterais. Ao estudarem sistemas não lineares, Roberts e Quispel (1992) analisaram o comportamento de sistemas reversíveis (que não se alteram dada uma transformação no tempo $t \rightarrow -t$) identificando órbitas periódicas e regimes caóticos desses sistemas, assim como algumas propriedades e comportamentos. Muszynska e Goldman (1995) verificaram o comportamento caótico em sistemas com folgas e rotores desbalanceados apresentando modelos matemáticos e simulações numéricas para esses sistemas. Galvanetto (1995) estudou um sistema mecânico de três graus de liberdade com atritos não lineares mostrando comportamentos caóticos.

Foong *et al.* (2003) verificaram experimentalmente que o crescimento de trincas geradas por fadiga podiam ocasionar respostas caóticas em um sistema mecânico. Wang *et al.* (1998) estudaram respostas dinâmicas em sistemas micro eletromecânicos

(MEMS – *Micro eletro-mechanical systems*), propondo um modelo teórico para os MEMS e realizando a verificação desse modelo com dados experimentais disponíveis na literatura. Além disso, eles utilizaram os MEMS para realizar protocolos de criptografia e estabeleceram experimentalmente e numericamente comunicações seguras entre seus aparelhos.

Mori e Fujisaka (2001) estudaram o caos em fluidos focando na interação do fluido em regime caótico com um pêndulo imerso. Battelli e Feckan (2005) relataram o comportamento caótico em uma viga elástica com amortecimento linear apoiada em mancais e sujeita a excitação periódica.

Savi *et al.* apresentaram uma coleção de trabalhos sobre sistemas mecânicos não lineares e presença de comportamento caótico em sistemas com ligas com memória de forma (MACHADO *et al.*, 2003; SAVI; PACHECO, 2002), e o cálculo de expoentes de Lyapunov em sistemas com histerese (MACHADO *et al.*, 2009).

Trabalhos também foram realizados em sistemas não suaves, por impacto ou atrito, verificando a presença de caos nesses sistemas (BATTELLI; FECKAN, 2013; SAVI *et al.*, 2007). Peterka (1996) disserta sobre bifurcações e as transições da dinâmica de um oscilador mecânico com impacto. Caldas e de Souza (2004) apresentaram um algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas mecânicos com impacto usando um oscilador simples limitado e dois osciladores acoplados como exemplo.

Já no campo de usinagem, vários estudos apresentam dinâmica caótica na interação ferramenta-metal em processos de corte que comprometem o acabamento da peça cortada (LITAK *et al.*, 2009a; LITAK *et al.*, 2009b).

Diversas outras áreas da engenharia mecânica também apresentam estudos sobre comportamentos caóticos e suas dinâmicas. Destacam-se os trabalhos sobre rolamentos de esferas (KARLBERG, 2009), trens de engrenagem (LI *et al.*, 2014), vibrações de automóveis em solo acidentado (BOROWIEC; LITAK, 2012) e na dinâmica de aerofólios (PRICE; KELERIS, 1996).

Um dos sistemas não lineares mais simples e mais ricos para ser estudado é o pêndulo. Apesar de sua simplicidade e facilidade de montagem experimental, esse

sistema pode apresentar variadas respostas inclusive bifurcações e caos (MOON *et al.*, 1987). O pêndulo não linear é um sistema estudado desde o começo do iluminismo tanto para a criação de novas tecnologias e aplicações quanto em pesquisa básica. O pendulo de Foucault (1819-1868) representou a primeira prova de rotação da Terra. Na medicina e na robótica, são utilizados na simulação de articulações e caminhada humana (SUZUKI *et al.*, 2012), na mecânica são utilizados no controle de vibrações de freios torcionais (MONROE; SHAW, 2013). Além disso, o pêndulo é empregado na medição da passagem do tempo, na integração de sistemas de estabilização e para aplicações balísticas. O pêndulo se tornou um dos símbolos da física contemporânea e ainda continua a ser amplamente utilizado nas pesquisas (TRUEBA *et al.*, 2003).

A dinâmica caótica de um pêndulo experimental é tratada em de Paula *et al.* (2006). O sistema é excitado por um sistema motor elétrico-mola-fio onde se evidenciam dinâmicas caóticas, periódicas, caos transiente e bifurcações. O trabalho realizou uma análise dinâmica completa do sistema experimentalmente e numericamente. Os autores também ressaltam a possibilidade desse sistema apresentar alto potencial de replicabilidade e aplicação em estudos de controle de caos.

2.2. Controle de Caos

As técnicas para controle de caos inicialmente surgiram como métodos para evitar que um sistema não linear se tornasse caótico e como uma maneira de suprimir esse comportamento. Apenas no início da década de 1990, Ott *et. al.* (1990) apresentaram uma maneira de explorar a dinâmica caótica e suas estruturas para o controle do sistema, fundando a área de controle de caos.

Essa área explora características do caos como a sensibilidade a pequenas perturbações e da existência de uma infinidade de órbitas periódicas instáveis para controlar o sistema com baixo consumo de energia. Nesse tipo de técnica, o controlador é projetado para que o sistema se estabilize (rastreamento) em uma orbita periódica instável escolhida, ou que os estados de dois sistemas caóticos idênticos se sincronizem. A troca entre órbitas também está associada a um baixo consumo de energia o que confere grande adaptabilidade e flexibilidade ao sistema (OTT *et al.*, 1990; PYRAGAS, 1992). Além disso, algumas técnicas de controle de caos podem ser baseadas apenas nas propriedades geométricas do atrator eliminando a necessidade do conhecimento das

equações de movimento do sistema. Desse modo, pode-se projetar um controlador eficiente apenas com séries temporais da resposta caótica.

O controle de caos se torna necessário principalmente em sistemas que possuem recursos limitados como satélites (LEIVA; BRIOZZO, 2006), sistemas para coleta de energia (LEBEDEV *et al.*, 2011; SILVA *et al.*, 2015), e sistemas de baixo consumo energético (BARBOSA *et al.*, 2015).

As técnicas de controle de caos podem ser divididas em dois grandes grupos: contínuo e discreto. Além disso, elas podem ser classificadas por seu objetivo: sincronia total, sincronia de fase ou rastreamento de uma órbita. A figura 1 indica os principais métodos de controle de caos citados ao longo desse trabalho e suas respectivas categorias.

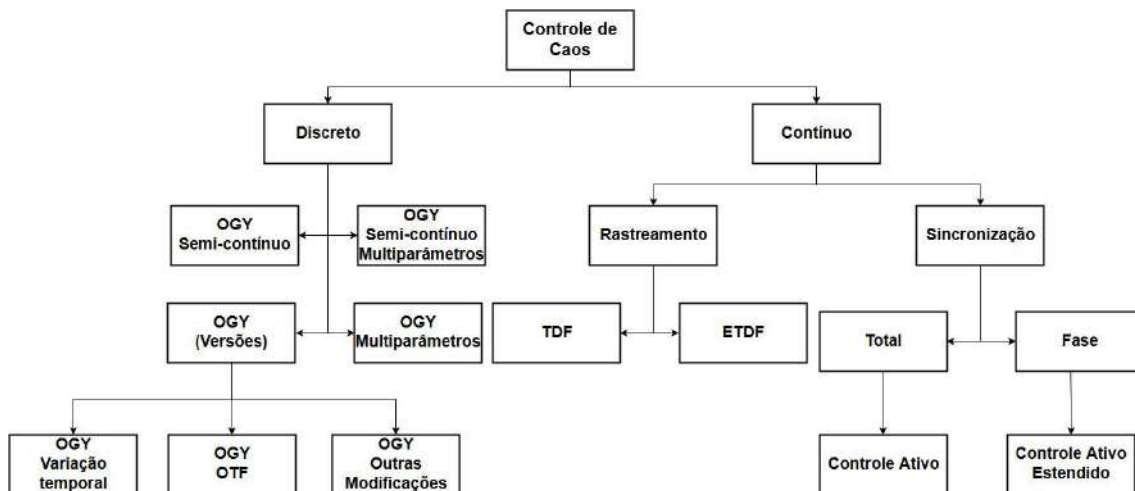


Figura 1: Diagrama dos métodos de controle e objetivos (caixas) juntamente com algumas aplicações. Vale ressaltar que os métodos comuns de controle para sistemas não lineares como redes neurais não são representados nesse diagrama.

Alguns autores apresentaram revisões gerais sobre o controle de caos. Ditto *et al.* (1995) e Grebogi e Lai (1997) forneceram uma revisão dos conceitos de controle de caos e de métodos baseados no controle OGY. Pyragas (2006) apresentou uma revisão de métodos contínuos baseados na realimentação por estados defasados. Arcchi *et al.* (1998) forneceram uma revisão geral de controle de caos e algumas aplicações. Savi e colaboradores (DE PAULA; SAVI, 2011; SAVI *et al.*, 2006) realizaram uma comparação de vários métodos de controle de caos para aplicação em sistemas mecânicos. Fradkov e Evans (2005) apresentaram uma revisão dos métodos de controle

de caos dividindo-os em sem realimentação, com realimentação discretos e com realimentação contínuos, além de aplicações em sistemas mecânicos.

O controlador OGY, nomeado em homenagem a seus criadores Ott-Grebogi-Yorke (OTT *et al.*, 1990), foi o trabalho pioneiro em controle de caos sendo o marco dessa linha de pesquisa. Esse método é baseado no fato de que as iterações de um mapa caótico na vizinhança de um ponto fixo geralmente possuem uma direção estável e outra instável. Para localizar essas direções basta obter a matriz Jacobiana do sistema no ponto em questão e obter seus autovalores e autovetores. Em seguida, o método impõe pequenas perturbações em um parâmetro do sistema quando a sua trajetória se encontra na vizinhança do ponto fixo, alinhando a trajetória do sistema com a direção estável do ponto fixo na iteração seguinte. Desse modo, força-se a estabilização da resposta dinâmica em uma OPI. A implementação desse método foi aplicada experimentalmente em vários sistemas (LAI *et al.*, 1993).

Vários autores se dedicaram a criar novas técnicas baseadas na ideia original OGY, aprimorando a eficiência energética e a aplicabilidade desse tipo de método em sistemas mais gerais. Hunt (1991) modificou o método OGY, baseando-se na medida de máximos locais da saída do sistema, para estabilizar a amplitude de um ciclo limite. Seu método foi batizado de realimentação proporcional ocasional (OPF).

Almejando o controle de sistemas de dimensões maiores, Romeiras *et al.* (1992) generalizam o método OGY abordando-o como um método de alocação de polos, permitindo assim maior flexibilidade na escolha da matriz ganho e tornando o método n -dimensional. Gluckman *et al.* (1997) desenvolveram um método de controle de caos adaptativo visando o controle de sistemas com dimensão elevada.

Ampliando a aplicação do método OGY para sistemas onde algumas variáveis de estado não são observáveis, Nitsche e Dressler (1992) analisaram o cenário quando o atrator é reconstruído utilizando-se o método de coordenadas defasadas. Para isso, modificaram a formulação do método OGY levando em consideração que o mapa de Poincaré também depende das perturbações anteriores no parâmetro de controle. Galias e Ogorzaleck (1995), por sua vez, modificaram o método OGY para o cenário no qual há somente dois valores acessíveis para o parâmetro de controle.

Bayly e Virgin (1994) indicaram preocupações na aplicabilidade do método OGY ressaltando propriedades desfavoráveis como inaptidão para o cálculo exato do tempo de convergência, erros na estimação de parâmetros, forte não linearidade, alta instabilidade da OPI escolhida e contaminação do sistema por ruídos. Para atacar algumas dessas limitações, principalmente à alta instabilidade de uma OPI, Hubinger *et al.* (1994) propuseram o método OGY semi-contínuo. Esse método consiste na utilização de mapas intermediários igualmente espaçados em fase entre duas seções de Poincaré do método OGY. Dessa maneira pode-se alterar o sinal de controle aplicando-se o método OGY nessas seções intermediárias e, desse modo, atuar no sistema antes dele retornar as proximidades do ponto desejado. Desta forma, aumentam-se as intervenções no sistema adaptando o método a sistemas com alta instabilidade. Posteriormente, Korte *et al.* (1995) utilizaram o mesmo conceito para mapas reconstruídos pelo método das coordenadas defasadas e cunharam o termo método semi-contínuo (SC), já que o número de seções de Poincaré intermediárias pode ser arbitrariamente grande. Christini *et al.* (1996) aplicaram o método SC para um pêndulo duplo. Ritz *et al.* (1997) aprimoraram a distribuições das seções intermediárias de controle de modo a equalizar as taxas de expansão de fluxo entre seções.

Para tratar do tempo de espera (tempo até a solução se encontrar nas vizinhas do ponto fixo desejado), Aston e Bird (1997) propuseram técnicas para o aumento da bacia de atração em torno do ponto de controle reduzindo o tempo para que se inicie o controle. Yagasaki e Uozumi (1998), por sua vez, aproximaram as vizinhanças do ponto de controle de maneira não-linear o que também reduz o tempo de espera para a atuação iniciar.

Pensando em um controle multi-parâmetros, Barreto e Grebogi (1995) abordaram o método OGY como um método de alocação de pólos. Os autores modificaram o método assumindo que todos os parâmetros acessíveis são acionados simultaneamente em todas as seções de controle e testaram experimentalmente seus modelos utilizando uma ação em dois parâmetros de controle, obtendo melhor desempenho que o método OGY convencional em tempo de convergência e menor suscetibilidade a ruídos. De Paula e Savi (2009) propuseram uma modificação do método OGY e OGY semi-contínuo assumindo um controle multi-parâmetros e

comprovaram que sua abordagem possibilita a estabilização de mais OPIs que os métodos OGY convencionais.

Há outros trabalhos que modificaram o método OGY como o de Yu *et. al.* (2001) que utilizaram a teoria de variedades invariantes e controle por modo deslizante para evitar o cálculo dos autovetores e autovalores da matriz Jacobiana do sistema. Alasty e Salarieh (2005) utilizaram lógica fuzzy para obter um controlador mais robusto e aplicaram seu método a um oscilador Bonhoeffer-Van der Pol. Yagasaki (2007) propôs um método para estabilização de trajetórias instáveis não periódicas.

A segunda família de métodos de controle de caos diz respeito a atuações contínuas, tendo como seu trabalho inicial o realizado por Pyragas (1992) que utilizou um controle com realimentação por estados defasados (TDF) para a estabilização do sistema. A vantagem desse método em relação aos discretos é sua eficiência em estabilizar sistemas muito instáveis devido a sua atuação ininterrupta. Pyragas (1992) ressaltou as dificuldades sofridas pelo método OGY como a permanente análise computacional do estado do sistema, a dificuldade da estabilização de OPIs muito instáveis cujos expoentes de Lyapunov são muito maiores que a frequência do controle, e a sensibilidade a ruídos. O método TDF consiste na realimentação proporcional da diferença entre o estado atual e o estado defasado do sistema, tendo geralmente a defasagem correspondendo ao período da OPI alvo. Além disso, o método TDF também possui a propriedade de utilizar pequenas perturbações para a estabilização e pode ser implementado sem o conhecimento prévio do modelo dinâmico do sistema. A primeira implementação experimental do método TDF foi reportada por Pyragas e Tamasevicius (1993) controlando um oscilador eletrônico caótico.

O método TDF apresenta desvantagens principalmente na dificuldade do estabelecimento do período de defasagem e na otimização dos valores do ganho para obtenção do melhor controle. Com esses problemas em mente, vários autores aprimoraram esse tipo de controle e estenderam as aplicações do método proposto por Pyragas ao longo do tempo. Pyragas (1992, 1993) determinou o ganho do controlador por tentativa e erro analisando a estabilidade das órbitas do sistema. Boccaletti e Arcchi (1995) estabeleceram um algoritmo adaptativo para o ajuste do ganho do controlador. Kittel *et al.* (1995) propuseram um algoritmo adaptativo baseado no método TDF para o ajuste do tempo de defasagem.

Socular *et al.* (1994) propuseram uma melhoria ao método TDF utilizando-se de uma somatória de múltiplos estados defasados do sistema e adicionando uma nova constante de calibração para o controle. Esse método soluciona a dificuldade do método TDF de estabilizar OPIs de periodicidade elevada e é considerado a principal contribuição para o método TDF sendo batizado de controle por estados defasados estendidos (ETDF).

Vários autores trabalharam em provas matemáticas da eficácia do TDF. Ushio (1996) utilizou multiplicadores de Floquet para provar que o método TDF somente pode estabilizar OPIs caracterizadas por uma torção finita no espaço de estados em sistemas discretos. Just *et al.* (1997) e Nakajima (1997) estenderam o resultado de Ushio para sistemas contínuos e Nakajima e Ueda (1998) estenderam o resultado para o método ETDF. Hooton e Amann (2012) corrigiram a afirmação de Ushio (1996) para sistemas autônomos e adicionaram uma nova condição para que o TDF e ETDF não consigam estabilizar OPIs desses sistemas.

Após os trabalhos mostrando as limitações do método TDF e suas adaptações, Pyragas (2001) propôs uma modificação no método ETDF tornando o controlador instável, eliminando assim a limitação de controle de órbitas com torções finitas e estendendo o alcance do método. Pyragas e Just (2007) aplicaram o método em um circuito eletrônico experimental. Além disso, propuseram uma maneira de automatizar a procura do tempo de atraso necessário para o método TDF eliminando o processo de tentativa e erro.

Outros autores ainda reportaram modificações e aplicações do método TDF, ETDF e suas variações. Chen e Yu (1999) estabeleceram condições suficientes para determinar quais métodos ETDF modificados poderiam estabilizar órbitas instáveis através da análise de estabilidade de Lyapunov das OPIs. Baseando-se nesse trabalho, Tian *et al.* (2007) propuseram um novo método TDF considerando diferentes parâmetros de controle e deslocamentos sucessivos nas realimentações. Tian e Yu (2000) projetaram um controlador TDF baseado em controle ótimo definindo um índice a ser minimizado para que uma OPI seja estabilizada.

Um terceiro caminho para o controle de caos pode ser traçado ao se aplicar técnicas de controle convencionais ou de outras áreas sobre sistemas com respostas

caóticas. Esse tipo de solução enfoca em dois conceitos de controle: o rastreamento (obrigar o sistema a realizar uma dada trajetória pré-estabelecida com o tempo) e o controle de estabilidade (estabiliza o sistema em um dado estado e o mantém nesse estado ao longo do tempo). Chen (1997) apresentou princípios de projeto de controladores lineares e não-lineares para o controle de caos que satisfazem as condições de estabilidade por função e Lyapunov. Chen (1994) propôs a utilização de uma abordagem convencional em teoria de controle ótimo para controlar respostas caóticas utilizando sequências de perturbações, e assim, minimizando a energia necessária para o controle. Myneni *et al.* (1997) propuseram um método de controle de caos simples para sistemas rápidos onde o controlador realiza uma perturbação pré-determinada quando o sistema se encontra em uma região do espaço de estados definida e volta a sua posição de referência quando o sistema se encontra fora dessa região. A partir da localização da região de controle identificam-se OPIs a serem estabilizadas. Myneni e colaboradores (1997) aplicaram experimentalmente esse controle a dois circuitos elétricos. Outros autores ainda aplicaram técnicas de controle como lógica fuzzy (BESSA *et al.*, 2009, 2013), controles impulsivos (LITAK *et al.*, 2007; OSIPOV *et al.*, 1998; YANG *et al.* 1997), método direto de Lyapunov (HSIAO; TUNG, 2002) e utilização de controladores e observadores não lineares (BOWONG; KAKMENI, 2003; CAO, 2000; FEMAT *et al.*, 1997; LIAO, 1998; SOLAK *et al.*, 2001).

2.3. Ligas com Memória de Forma

O interesse de materiais inteligentes tem crescido nos últimos anos devido as suas notáveis propriedades e sua adaptabilidade. Essa classe de materiais, normalmente utilizados como atuadores, sensores ou coletores de energia, tem a habilidade de transformar suas propriedades elétricas, mecânicas, dentre outras, pela aplicação de sinais elétricos, térmicos ou tensões.

As ligas com memória de forma pertencem a essa classe de materiais e suas características adaptativas são proporcionadas por transformações de fase sólidas. Para explorar todas as possibilidades das SMAs, vários pesquisadores desenvolveram modelos matemáticos para descrever o comportamento termomecânico das ligas. Essa descrição pode ser feita por modelos microscópicos, mesoscópicos e macroscópicos.

Os modelos microscópicos descrevem os fenômenos em nível molecular, observando o comportamento dos átomos do cristal para descrever o comportamento geral do material. Já os modelos mesoscópicos levam em conta o deslocamento de grupos de átomos ou planos atômicos definidos pela estrutura cristalina do material. Desse modo, consideram as vibrações e movimentos de cada átomo em particular desprezíveis quando comparados com os movimentos coletivos. Finalmente os modelos macroscópicos tratam dos deslocamentos e efeitos do material como um contínuo sem se importar com sua estrutura atômica.

Na literatura há várias revisões sobre os modelos e aplicações de SMAs. Savi e Paiva (2006) realizaram uma revisão dos modelos mais utilizados em SMAs e também citaram trabalhos experimentais e de aplicação das ligas. Lagoudas (2008) construiu um livro sobre a história da SMA, suas propriedades e os seus modelos. Lester *et al.* (2015) fez uma revisão sobre as aplicações de SMA na engenharia.

Falk (1980) e Falk e Konopka (1990) propuseram um modelo unidimensional baseado na teoria de Devonshire. Esse modelo considera um potencial de energia livre polinomial baseado na estabilidade das fases martensítica e austenítica do material. Esse modelo se destaca por sua simplicidade, podendo simular tanto a pseudoelasticidade como a memória de forma.

Outros modelos assumem equações matemáticas para cada transformação cristalográfica da liga. Para isso eles se utilizam de variáveis internas onde guardam informações sobre a história do carregamento, por exemplo, a fração volumétrica de cada fase. Essa formulação foi primeiramente proposta por Tanaka e Nagaki (1982), e depois foi adotada por Liang e Rogers (1990), Boyd e Lagoudas (1996), dentre outros. O modelo mais utilizado dessa família é o modelo de Brinson (1993) devido a sua boa relação de desempenho e complexidade.

Outros autores utilizaram ideias inspiradas na teoria elastoplástica (SIMO; TAYLOR, 1986). Betran (1982) propôs um modelo tridimensional usando os conceitos de endurecimento cinemático e isotrópico. Outros exemplos nesse sentido incluem: (AURICCHIO; SACCO (1997); SOUZA *et al.* (1998).

Fremond (1987, 1996) desenvolveu um modelo tridimensional que consegue reproduzir os comportamentos pseudoelástico e de memória de forma das SMAs,

utilizando-se de três variáveis internas que obedecem restrições internas relacionadas com a coexistência das diferentes fases da liga. O trabalho de Fremond inspirou outros autores a criarem um modelo que amplia os fenômenos descritos pelo modelo original incluindo a memória de forma de duas vias e a assimetria tensão-compressão (PAIVA *et al.*, 2005; SAVI; PAIVA, 2005).

3. TÉCNICAS DE CONTROLE DE CAOS

As técnicas de controle de caos exploram a existência de órbitas periódicas instáveis pertencentes a dinâmica do sistema. Existem três tipos de objetivos principais em controle de caos: destruir ou impor a dinâmica caótica em um sistema, estabilizar uma resposta caótica em uma OPI (rastreamento), ou sincronizar dois sistemas caóticos para se obter a mesma resposta e/ou fase.

Para esses controles é assumido que o sistema contenha pelo menos um parâmetro acessível para controle e que exista um sinal observável y . Desse modo a regra de controle genérica para um sistema pode ser descrita como:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{g}(y, t) \\ y &= C(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{1}$$

onde $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ é a derivada temporal do estado do sistema, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é o estado do sistema, y é um sinal escalar do sistema observado, C é uma função invertível, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n$ é a função do sistema, t é o tempo, $\mathbf{g}(y, t) \in \mathbb{R}^n$ é o sinal de controle. Por simplicidade, passa-se a considerar que a saída é igual a uma das variáveis internas do sistema ($y = x_k$), sem perda de generalidade.

3.1. Realimentação por estados defasados

O método de realimentação por estados defasados proposto por Pyragas (1992) baseia-se na ideia de rastreamento de um sinal de referência, ou seja, obter uma resposta objetivo $y_0(t)$ do sistema. Desta forma, a ideia padrão de utilizar a função objetivo na função de controle $\mathbf{g}(y, t)$ é substituída pelo próprio sinal do sistema, defasado de um certo período:

$$\mathbf{g}(y, t) = \mathbf{K}(y(t - \tau) - y(t))\tag{2}$$

onde K é a matriz de ganho, τ é o tempo de defasagem e y é o sinal observado. Note que quando a resposta do sistema se aproxima de uma OPI de período- n e o tempo de defasagem coincide com esse período ($\tau = nT_p$) tem-se que:

$$y(t - \tau) = y(t) \quad (3)$$

o que anula o sinal de controle $\mathbf{g}(y, t)$. Além disso, a matriz de ganho \mathbf{K} permite ajustar o controlador para estabilizar a OPI desejada.

O método TDF foi aplicado a vários experimentos e várias restrições foram descobertas como a incapacidade do método em estabilizar órbitas com número ímpar de expoentes de Floquet positivos (HOOTON; AMANN, 2012; USHIO, 1996) e a dificuldade em estabilizar órbitas de grande periodicidade ou grande instabilidade. Desse modo, várias modificações do método foram propostas, sendo algumas destacadas a seguir.

3.2. Realimentação de estados defasados estendidos

O método de realimentação por estados defasados estendidos (Socolar *et al.*, 1994) é considerado a principal modificação no método TDF. Nessa modificação, utiliza-se uma somatória de estados defasados conforme se segue:

$$\mathbf{g}(y, t) = \mathbf{K}((1 - R)S_m - y(t)) \quad (4)$$

$$S_m = \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1} y(t - j\tau) \quad (5)$$

onde $0 \leq |R| < 1$ é um novo parâmetro de controle. Observe que o método ETDF recai no método TDF no caso onde $R = 0$, sendo portanto, uma generalização do método TDF. Mais uma vez, se o estado do sistema se encontra em uma OPI, o controlador se anula. Desse modo, para a estabilização, basta escolher de forma apropriada os parâmetros de controle R e K . Essa escolha pode ser avaliada por várias técnicas de estabilidade, sendo as mais utilizadas baseadas nos expoentes de Lyapunov ou nos multiplicadores de Floquet. Ambas as maneiras são descritas nesse texto.

3.3. Realimentação de estados defasados estendidos com auto ajuste temporal

Um dos parâmetros a ser estimado no método ETDF é a defasagem do controlador (τ) para estabilizar a OPI desejada. Para contornar a necessidade de prévio conhecimento dessa defasagem, Pyragas e Pyragas (2011) desenvolveram um método

de ajuste automático. Para isso, eles desenvolveram a ideia de que o sinal de controle tem um tipo de ressonância com a frequência da OPI dado que os parâmetros \mathbf{K} e R sejam apropriados para estabilização da órbita. Desse modo, ao se ajustar $\tau(t)$ o sinal de controle vai à zero após a estabilização da OPI.

Assim, para buscar automaticamente uma defasagem $\tau(t)$ apropriada automaticamente, basta minimizar uma função de custo baseada no sinal de controle, por exemplo, $S_c = |\mathbf{g}(t, \tau, y)|^2$ via um método do gradiente descendente como o método de Newton-Raphson. Nessa subseção $g(t, \tau, y)$ será considerada uma função escalar, sem perda de generalidade.

Para suavizar a função de custo no tempo e melhorar sua convergência ao longo da evolução do sistema pode-se utilizar uma função de minimização tomando uma média ponderada em uma janela de tempo do sinal de controle da forma:

$$\Delta(t, \tau) = \int_{t-\nu^{-1}}^t e^{-\nu(t-t')} g(t', \tau(t'), y)^2 dt' \quad (6)$$

onde ν é um parâmetro que indica o tamanho da janela temporal a ser considerada. Assim, a equação 6 suaviza o sinal de controle em um período de tempo ν fazendo a soma ponderada pelo termo exponencial do valor de g . Desse modo, quando a estabilização da OPI é atingida, Δ se anula, enquanto $\Delta > 0$ em qualquer outra condição. O calculo do valor de Δ é facilitado ao se escolher ν tal que:

$$\tau_s < \nu^{-1} < \tau_p \quad (7)$$

aqui τ_s é a escala de tempo a qual o sistema evolui e τ_p é o tempo característico que o parâmetro do sistema evolui $\tau(t)$. Assumindo-se a inequação 7, pode-se desprezar a mudança do período τ no intervalo de tempo da integração aproximando a eq. 6 da forma:

$$\Delta(t, \tau) \approx \int_{t-\nu^{-1}}^t e^{-\nu(t-t')} g(t', \tau(t), y)^2 dt' \quad (8)$$

Pode-se usar então uma fórmula para a evolução temporal de τ utilizando-se uma minimização pelo gradiente da forma:

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = -\beta \frac{d\Delta(t, \tau)}{d\tau} \equiv -\beta G \quad (9)$$

Nessa interpretação, $\Delta(t, \tau)$ pode ser visto como uma função potencial para o fluxo do gradiente enquanto β é um termo de relaxação na evolução temporal. Para estimar a função $G(t)$ pode-se derivar $\Delta(t, \tau)$ em relação a $\tau(t)$ obtendo-se:

$$G(t, \tau) = 2 \int_{t-\nu^{-1}}^t e^{-\nu(t-t')} g(t', \tau(t)) \frac{dg(t', \tau(t))}{d\tau} dt' \quad (10)$$

Pode-se então aplicar essa estratégia ao método TDF assumindo:

$$g(t', \tau(t)) = K(y(t') - y(t' - \tau(t))) \quad (11)$$

Para facilitar o cálculo da eq. 10, utiliza-se novamente a argumentação de que $\tau(t) \cong \tau(t')$ para o intervalo de integração, ou seja, que o tempo de defasagem é uma função que varia lentamente no tempo de integração, obtendo-se:

$$\frac{dG}{dt} \cong 2[y(t) - y(t - \tau(t))] \frac{dy(t - \tau(t))}{dt} - \nu G \quad (12)$$

Isso permite estimar à derivada em relação ao tempo \dot{y} introduzindo uma nova variável da dinâmica, $u = y - \dot{y}/\gamma$, que representa um filtro de banda alta na saída do sistema:

$$\frac{du}{dt} = \gamma[y(t - \tau(t)) - u] \quad (13)$$

onde $\gamma^{-1} < \tau_s$ é uma constante de tempo do filtro. Desse modo, a evolução temporal do sistema é reconstruída e pode-se calcular o tempo de atraso necessário para a estabilização.

3.4. Método ETDF com instabilidade (adição de graus de liberdade instáveis)

O método ETDF com instabilidade (PYRAGAS, 2001) ou batizado pelo próprio autor como UETDF (*unstable extended time delayed feedback*) consiste em adicionar um controlador instável ao controlador ETDF. A ideia é que a instabilidade do sistema se anule com a instabilidade do próprio controlador, viabilizando o controle. Esse método foi desenvolvido para superar a incapacidade dos métodos de realimentação por estados defasados de estabilizar órbitas com número ímpar de expoentes de Floquet positivos (USHIO, 1996). Para isso é definido uma quantidade $F_{in}(y, t)$ e uma variável instável adicional dadas por:

$$F_{in}(y, t) = y(t) - (1 - R) \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1} y(t - j\tau) \quad (14)$$

$$\dot{h}_v = \lambda_0 h_v + (\lambda_0 - \lambda_\infty) F(y, t)$$

onde $\lambda_0 > 0$ e $\lambda_\infty < 0$ são parâmetros de controle e h é a variável instável do controlador. A força de controle na equação 1 então pode ser dada por:

$$\mathbf{g}(y, t) = -\mathbf{K}(F_{in}(y, t) + h_v(t)) \quad (15)$$

Esse tipo de controle também se torna nulo após o sistema ser estabilizado em uma OPI alvo de período $nT_p = \tau$. Em seguida, basta realizar a análise da equação característica do sistema e estabelecer valores de \mathbf{K} e R adequadamente para que todos os expoentes de Floquet do sistema tenham sua parte real negativa: $Re(\mu_i) < 0 \forall i$, onde i indexa todos os expoentes de Floquet. Para exemplificar, pode-se tomar o sistema $\dot{x} = \mu_s x + g(t)$, onde μ_s é o expoente de Floquet do sistema sem controle, assumir $\tau = 1$ e usar o ansatz $y, h_v \propto e^{-\mu t}$, obtendo-se a equação característica:

$$Q(\mu) = 1 + K \left(\frac{\mu\tau - \lambda_\infty}{\mu\tau - \lambda_0} \frac{1 - e^{-\mu\tau}}{1 - Re^{-\mu\tau}} \frac{1}{\lambda - \mu_s} \right) \quad (16)$$

Neste momento, deve-se determinar os valores de K que mantem os pontos $Q(\mu) = 0$ com valores reais negativos.

3.5. Resolução de equações diferenciais defasadas e cálculo de expoentes de Lyapunov de uma órbita

Os expoentes de Lyapunov são uma ferramenta para o cálculo da estabilidade de uma órbita e indicam a divergência local de uma perturbação. O principal algoritmo para seu cálculo é o proposto por Wolf *et al.* (1985) e se baseia na linearização de um sistema dinâmico em torno da órbita a ser analisada. Desse modo, pode-se analisar como pequenos vetores de deslocamentos δx da órbita crescem ou decrescem ao evoluir no tempo. Além disso, devido à linearização se garante que um dos vetores será posicionado na direção de maior expansão.

Para a análise de estabilidade pode-se observar o sinal dos expoentes de Lyapunov. Caso todos os expoentes sejam negativos o espaço de fase está se contraindo ao redor da órbita e, desse modo, a órbita é estável. Já para o caso de expoentes de Lyapunov positivos, as soluções vizinhas divergem da analisada e assim, a órbita é instável. Expoentes de Lyapunov nulos, por sua vez, indicam que deslocamentos na órbita se mantem constantes, o que significa uma torção no espaço de fase à medida que a função de evolução temporal é aplicada. Desta forma, caso haja pelo menos um expoente de Lyapunov positivo em sistemas dissipativos, existe o caos.

No controle por estado defasado, as equações diferenciais do sistema tornam-se equações diferenciais com defasagem temporal (*Delayed Differential Equations –DDE*). Para encontrar uma solução para esse tipo de equações é necessário assumir uma função inicial $x_0(t)$ no intervalo $[-\infty, 0]$. Essa função pode ser estimada a partir de uma série de Taylor em torno de $t = 0$ obtendo:

$$x(-j\tau) \cong x(0) - j\tau \left. \frac{dx}{dt} \right|_0 \quad (17)$$

Onde j é um inteiro.

Ao aplicar a eq. 17 no método ETDF no caso unidimensional e considerando $y = x$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, t) + K[(1 - R)S_\tau - x] \\ \text{onde } \left\{ \begin{aligned} S_\tau &= \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1} (x(t) - j\tau \dot{x}(t)), \text{ se } (t - j\tau) < 0 \\ S_\tau &= \sum_{j=1}^{\infty} R^{j-1} x(t - j\tau), \text{ se } (t - j\tau) > 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (18)$$

A solução dessas DDEs pode ser obtida numericamente com um algoritmo Runge Kutta de quarta ordem. Os expoentes de Lyapunov podem ser calculados transformando as DDEs em equações diferenciais ordinárias (*ordinary differential equations - ODEs*) seguindo o método proposto por Sprott (2007) e obter a solução dessas equações e a matriz jacobiana do sistema seguindo o trabalho de Wolf *et al.* (1985). Além disso, vale ressaltar que o conhecimento do maior expoente de Lyapunov é suficiente para a caracterizar o comportamento caótico em sistemas dissipativos.

3.6. Multiplicadores de Floquet

Os multiplicadores de Floquet são outra ferramenta para identificar a estabilidade de uma órbita periódica de período τ . Ao contrario dos expoentes de Lyapunov que se aplicam a qualquer tipo de órbita os multiplicadores de Floquet só podem ser extraídos de órbitas periódicas (caminhos fechados no espaço de fase). A vantagem de sua utilização vem da ideia de utilizar apenas o período da orbita analisada e da periodicidade do sistema para retirar informações de estabilidade. Também ao contrario dos expoentes de Lyapunov os multiplicadores de Floquet residem no plano complexo e trazem informações, em sua parte complexa, sobre como o espaço de fase se dobra no caminho da orbita. A seguir há uma breve explicação sobre multiplicadores de Floquet e como analisa-los na aplicação em controladores de caos.

Para defini-los, faz-se uma aproximação linear em torno da órbita periódica que é uma das soluções da equação:

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (19)$$

Assim, considerando uma variação na órbita, δx , pode-se escrever a evolução dessa variação no tempo como se segue:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), t)\delta\mathbf{x} \quad (20)$$

onde $D\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ é a matriz Jacobiana do sistema e, como a aproximação é dada em torno de uma órbita periódica $\mathbf{x}^*(t)$, $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), t)$ também é periódica. Desse modo, a equação 20 atende aos requisitos da teoria de Floquet que diz que a variação $\delta\mathbf{x}(t)$ pode ser descrita como:

$$\delta\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\mu_i t} \boldsymbol{\rho}_i(t) \quad , \quad \boldsymbol{\rho}_i(t) = \boldsymbol{\rho}_i(t + \tau) \quad (21)$$

sendo $e^{\mu_i t}$ o i -ésimo multiplicador de Floquet (MF) da órbita, μ_i é o i -ésimo expoente de Floquet (EF) e $\boldsymbol{\rho}_i(t)$ é uma autofunção de $D\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ e n é a dimensão do espaço de fase. Para uma órbita ser estável é necessário que seus expoentes de Floquet possuam parte real negativa, $\text{Re}(\mu_i) \leq 0 \forall i$.

Para visualizar a dependência da estabilidade de uma órbita em relação a um parâmetro qualquer do sistema κ , observam-se os expoentes de Floquet no plano complexo e sua evolução com essa variação, como um diagrama de pólos (figura 2a). Nesse diagrama, enquanto os expoentes de Floquet se encontram a esquerda do eixo imaginário (valores reais negativos) a órbita é estável. A partir do momento que algum expoente de Floquet passar a possuir parte real positiva, a órbita se torna instável. Outra forma de visualizar a estabilidade da órbita é através de um diagrama da parte real dos expoentes de Floquet com vários valores do parâmetro κ (figura 2b). Em ambos os casos existem valores importantes a se definir: μ_0 que é o maior expoente de Floquet sem a existência de variação, k_1 que é o menor valor de κ que torna a órbita estável, k_2 que é o maior valor de κ que ainda tem a órbita estável e k_{op} que é o valor de κ que produz o menor valor μ_{min} para o maior multiplicador de Floquet.

Pode-se ainda avaliar a estabilidade da órbita pelos expoentes de Floquet. Para isso basta aplicar a transformação no plano complexo $\mathcal{F}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{F}(z) = e^z$. Essa transformação leva todo o semi-plano a esquerda do eixo imaginário para dentro de um círculo unitário na origem. Assim, aplicando essa transformação a $\mu\tau$ obtêm-se os

valores dos multiplicadores de Floquet e pode-se afirmar que a órbita é estável se $|e^{\mu\tau}| < 1$ (Figura 3).

O procedimento para o cálculo dos expoentes de Floquet utiliza uma matriz fundamental $\Psi(t)$ definida como:

$$\dot{\Psi}(t) = Df(x, t)\Psi(t) \quad , \quad \Psi(0) = I \quad (22)$$

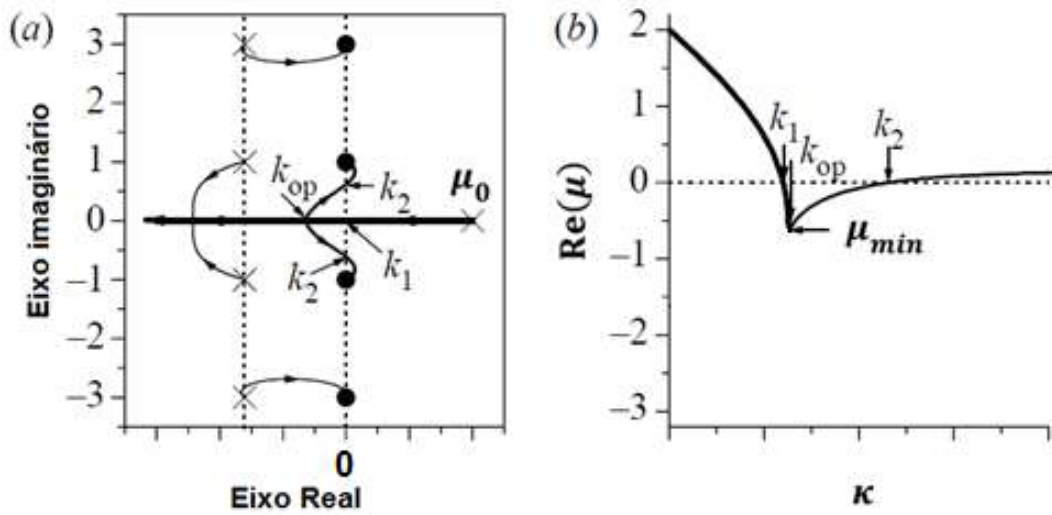


Figura 2: Diagramas para análise de estabilidade usando expoentes de Floquet. a) Diagrama com pares real e imaginárias dos expoentes de Floquet para vários valores de κ . O eixo real se anula na linha pontilhada que contém círculos. b) Diagrama com a parte real dos expoentes de Floquet contra valores do parâmetro κ .

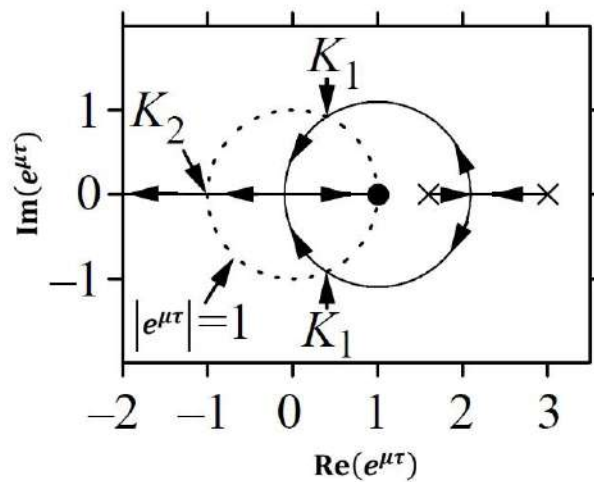


Figura 3: Representação do plano imaginário dos multiplicadores de Floquet.

Por essa definição também pode-se escrever a solução do sistema como: $\delta \mathbf{x}(t) = \Psi(t) \delta \mathbf{x}(0)$. Lembrando que os deslocamentos em relação à órbita analisada podem ser descritos como $\delta \mathbf{x}(t + \tau) = e^{\mu \tau} \delta \mathbf{x}(t)$, obtém-se:

$$(\Psi(\tau) - e^{\mu \tau} I) \delta \mathbf{x}(0) = 0 \quad (23)$$

E como $\delta \mathbf{x}(0) \neq 0$:

$$\det(\Psi(\tau) - e^{\mu \tau} I) = 0 \quad (24)$$

Resolvendo a equação 24, obtêm-se todos os expoentes de Floquet de uma dada órbita periódica.

Para estimar a estabilidade de uma órbita periódica governada por uma DDE, é necessário ter certas precauções. No caso do ETDF, a equação do sistema pode ser escrita da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{g}(y(t), y(t - \tau), \dots, t) \quad (25)$$

onde \mathbf{g} é o segundo termo da equação 4 no caso do ETDF. Desse modo, um desvio da órbita pode ser descrito em uma aproximação linear como:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), t) + D\mathbf{g}(y^*(t), y^*(t - \tau), \dots, t)) \delta \mathbf{x} \quad (26)$$

Substituindo $\delta \mathbf{x}(t - \tau n) = \sum_i e^{-n\mu_i \tau} \boldsymbol{\rho}(t)$:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(t), t) + D\mathbf{g}(C(\mathbf{x}^*(t)), e^{-\mu_i \tau} C(\mathbf{x}^*(t)), \dots, t)) \delta \mathbf{x} \quad (27)$$

Com a equação 26 o termo $D\mathbf{g}$ pode ser computado com apenas a derivada nas variáveis atuais, obtendo para o caso geral do ETDF:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = (D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*, t) + \mathbf{KH}(\mu) D\mathbf{C}(\mathbf{x}^*, t)) \delta \mathbf{x} \quad (28)$$

Onde:

$$H(\mu) = \frac{1 - e^{-\mu\tau}}{1 - Re^{-\mu\tau}} \quad (29)$$

Empregando o procedimento do cálculo dos EF obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}(t, \mu) = (Df(x^*(t), t) + KH_m(\mu)DC(x^*(t), t))\Psi(t, \mu) = 0 \\ \det(\Psi(\tau, \mu) - e^{\mu\tau}\mathbf{I}) = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

onde \mathbf{H}_m é a matriz diagonal contendo $H(\mu_i)$ de cada i -ésima autofunção. Finalmente, para resolver a equação 29 deve-se utilizar um cálculo de convergência baseado em um algoritmo genético ou algum outro algoritmo de convergência já que $\Psi(\tau, \mu)$, a qual é usada para o cálculo dos EF, depende dos próprios EFs do sistema.

Os expoentes de Floquet também podem ser empregados para analisar a estabilidade de órbitas subharmônicas, ou seja, órbitas com períodos $\tau_n = \tau/n$, sendo n inteiro. Nesse caso, integra-se a matriz fundamental $\Psi(t)$ apenas na órbita analisada de período τ_n e, desse modo, troca-se o tempo de integração temporal para τ_n , porém mantendo o período τ no somatório do sinal do controlador ETDF, modificando as equações para o cálculo dos expoentes de Floquet, obtendo:

$$\begin{aligned} H(\mu) = \frac{1 - e^{-\mu\tau}}{1 - Re^{-\mu\tau}} \\ \dot{\Psi}(t, \mu) = (Df_1(x(t), t) + KH_m(\mu)DC(x^*(t), t))\Psi(t, \mu) = 0 \\ \det(\Psi(\tau_n, \mu) - e^{-\mu\tau_n}\mathbf{I}) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Para valores muito baixos de \mathbf{K} e R , o que está associado a situações em que $\mathbf{KH}_m(\mu)$ não altera a parte imaginária do maior expoente de Floquet, μ_{max} , e que $\mu_{max}\tau \cong Re(\mu_{max}\tau) + i\pi$, pode-se evitar o processo de convergência que exige um grande custo computacional devido a sua complexidade e dependências não lineares.

Para isso, deve-se aproximar $\Psi(\tau, \mu)$ por $\Psi(\tau, \mathbf{G}_l)$, onde $\mathbf{G}_l = \mathbf{K} \frac{1 - e^{-\mu_{max}^*\tau}}{1 - Re^{-\mu_{max}^*\tau}}$. Desse modo, associa-se o valor de $\mathbf{H}_m(\mu)$ como apenas um ganho proporcional \mathbf{G}_l independente do expoente de Floquet. Fisicamente, é como se o controlador ETDF se

aproximasse de um controlador linear proporcional com ganho \mathbf{G}_l . Note que como \mathbf{G}_l é real, o valor de μ^* também deve ser real:

$$\mu_{max}^* = \mu_{max} - \frac{i\pi}{\tau} \quad (32)$$

onde $i = \sqrt{-1}$.

Com isso, o expoente de Floquet pode ser calculado utilizando-se:

$$\begin{aligned} \Psi(t, G) = (Df(x(t), t) + \mathbf{G}_l Df_2(x^*(t), t))\Psi(t, \mathbf{G}_l) = 0 \\ \det(\Psi(\tau, \mathbf{G}_l) - e^{\mu_{max}^* \tau} \mathbf{I}) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Onde, f_2 é a função do controlador proporcional.

Finalmente, para definir o ganho \mathbf{K} que produz o expoente de Floquet calculado deve-se assumir um valor constante de R e aplicar a transformação da equação 33 na equação 31, obtendo:

$$\mathbf{K} = \frac{\mathbf{G}_l(1 + Re^{-\mu_{max}^* \tau})}{1 + Re^{-\mu_{max}^* \tau}} \quad (34)$$

Um resumo sobre as provas, exemplos e aplicações dos multiplicadores de Floquet na determinação de estabilidade no controle de caos pode ser encontrada em PYRAGAS (2006).

3.7. Identificação de órbitas instáveis

Os métodos de controle de caos necessitam de uma fase de aprendizagem sobre a dinâmica do sistema onde são identificadas OPIs. Para isso, pode-se usar o método dos pontos recorrentes próximos (AUERBACH *et al.*, 1987). Primeiramente, faz-se a construção de um mapa de Poincaré a partir de séries temporais do espaço de fase do sistema formadas com pontos espaçados de um período T_p . Geralmente os períodos para a construção desse mapa em sistemas forçados são definidos pelo período de forçamento. A busca para uma órbita k -periódica é realizada correlacionando todos os pares de pontos do mapa segundo o critério:

$$|\xi_i - \xi_{i+k}|_{i=1}^{N_p-k} \leq r_1 \quad (35)$$

Onde N_p é o número de pontos no mapa, e r_1 é um critério de tolerância.

Os pontos que passam no critério são correlacionados aos pontos de órbitas k -periódicas do sistema (figura 4). Para separar órbitas distintas com o mesmo período utiliza-se um segundo critério onde se compara as distâncias entre os pares de pontos. Caso eles sejam maiores que uma tolerância r_2 (com $r_2 > r_1$), as órbitas são separadas. Caso contrário, eles são colocados em uma mesma órbita. Finalmente, para estipular o ponto real da OPI, faz-se uma média entre os pontos identificados.

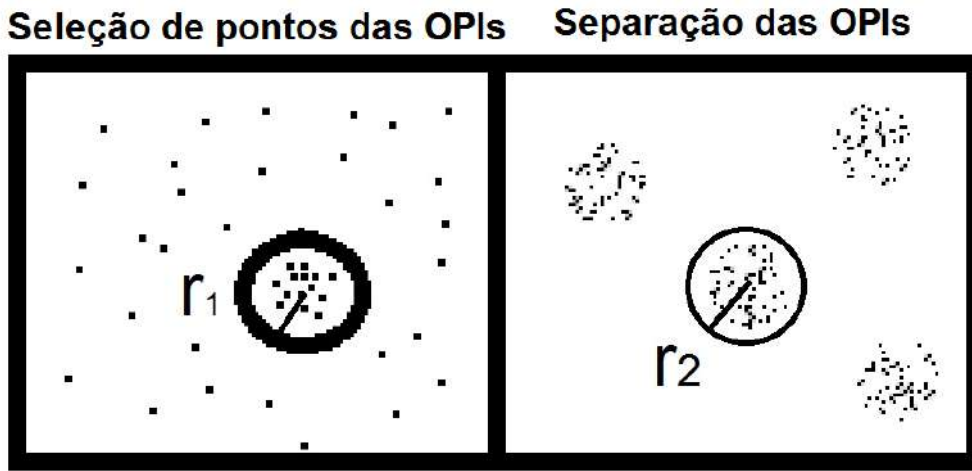


Figura 4: Método de separação das OPIs. A esquerda: seleção dos pontos da OPI segundo o critério r_1 o círculo é centrado no ponto ξ_i e verifica-se se o ponto ξ_{i+k} encontra-se dentro do círculo. A direita: Separação das OPIs segundo o critério de r_2 cada aglomerado representa uma OPI de período-1 diferente o critério r_2 identifica que os pontos externos ao círculo centrado no ponto ξ_i pertencem a OPIs diferentes da do ponto analisado.

Utilizando-se os desvios $\{u_i\}$ da média e os desvios $\{v_{mi}\}$ de iterações consecutivas pode-se estimar a Jacobiana do m -ésimo ponto identificado da orbita minimizando a fórmula:

$$dis_m = \|UJ_m - V_m\| \quad (36)$$

onde \mathbf{U} é a matriz cujas linhas são os vetores $\{\mathbf{u}_i\}$ e \mathbf{V} é a matriz cujas linhas são os vetores $\{\mathbf{v}_{mi}\}$ e J_m é a Jacobiana estimada no m -ésimo ponto identificado. Os expoentes de Lyapunov da órbita podem ser extraídos das J_m . Primeiramente deve-se multiplicá-las em sentido reverso ($J = J_m J_{m-1} J_{m-2} \dots J_1$) e em seguida diagonalizar a matriz resultante.

4. SISTEMA PÊNULO-SMA

Este capítulo apresenta uma investigação sobre a dinâmica do sistema pêndulo-SMA que será utilizado para aplicar as técnicas de controle de caos. Primeiramente é apresentada uma breve introdução sobre as ligas de memória de forma e seus modelos constitutivos. Logo após, é apresentado o sistema pendular, suas equações de governo e seus parâmetros e, em seguida, é apresentada uma análise dinâmica a partir de simulações numéricas. Finalmente, apresentam-se as órbitas periódicas instáveis de um dos atratores caóticos.

4.1. Ligas com memória de forma

Ligas com memória de forma (SMAs) são ligas metálicas que tem a habilidade de voltar a sua forma original pela imposição de um campo de forças ou pela mudança de sua temperatura devido à transformação de fase sólida. Os fenômenos de pseudoelasticidade e o de memória de forma são os mais usuais, sendo explorados em diversas situações. O efeito de pseudoelasticidade é definido como a habilidade de recuperar completamente da deformação causada por aplicações de grandes tensões, apresentando uma histerese no espaço tensão-deformação em um ciclo de carregamento e descarregamento. O efeito de memória de forma, por sua vez, se relaciona com a habilidade do material de recuperar totalmente sua forma, eliminando a deformação residual quando submetido a um ciclo térmico adequado.

A figura 5 mostra o comportamento macroscópico das ligas com memória de forma através de uma curva tensão-deformação-temperatura. O ponto A_f indica a temperatura acima da qual a fase austenítica se torna a única fase estável (T_A) na ausência de tensão. O ponto A_s indica a temperatura abaixo da qual a fase martensítica se torna a única fase estável (T_M) com um campo de tensões nulo. Considere portanto um ensaio de tração de uma amostra de SMA. No ponto A amostra se encontra totalmente na fase austenítica e é resfriada até chegar ao ponto B ($T < T_M$) na fase martensita maclada (M_c). Aí, aplica-se um campo de tensão que promove a demaclagem da martensita (M_d) atingindo o ponto C. Em seguida, o campo de tensão é removido até o ponto E, onde há uma deformação residual devida a transformação de fase de martensita maclada a martensita demaclada (existência de um único arranjo cristalográfico no material). Finalmente a SMA é aquecido até uma temperatura em que

a fase austenítica se torna estável ($T > T_A$), o que elimina a deformação residual e, desse modo, recupera sua forma original.

Deve-se ressaltar que, em meios tridimensionais, existem 24 variantes da fase martensítica que são induzidas por campos de tensão. A martensita maclada é compreendida como o estado onde não há predominância de nenhum arranjo cristalográfico martensítico. No caso unidimensional, as variantes podem ser reduzidas aquelas induzidas por compressão (M_-) e por tração (M_+). Os modelos macroscópicos costumam tratar as variantes martensíticas como fases macroscópicas.

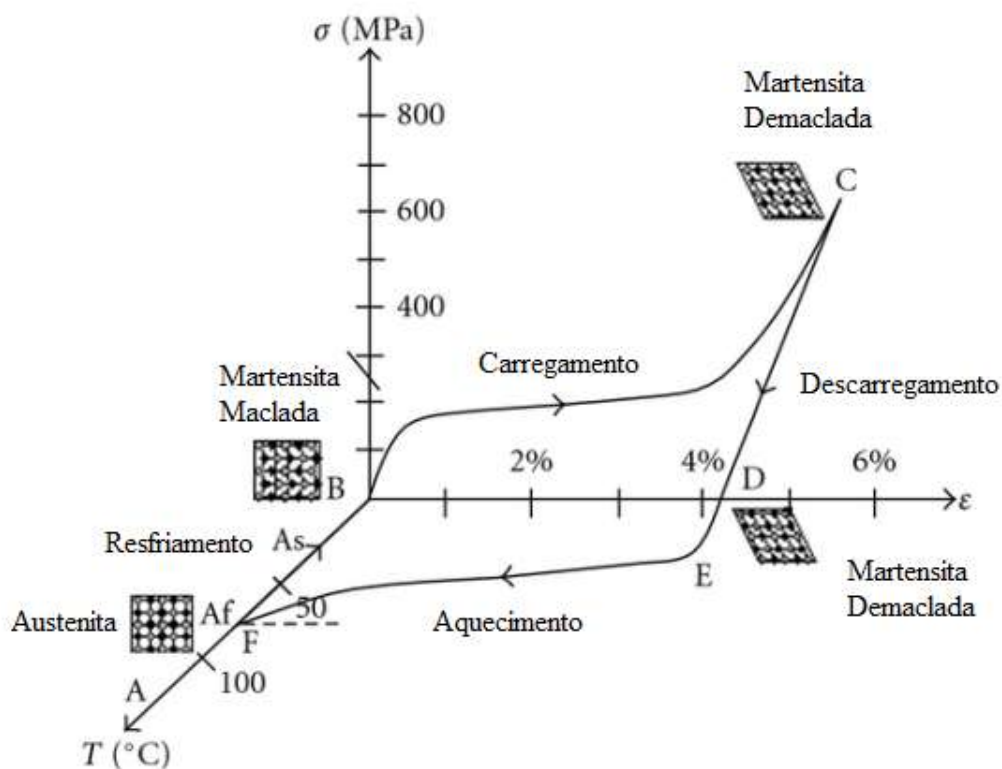


Figura 5: Ciclo de carregamento termomecânico representando as transformações do SMA e seu comportamento de memória de forma.

O efeito de pseudoelasticidade ocorre acima da temperatura de estabilização da austenita ($T > T_A$) e a figura 6 mostra a curva tensão-deformação típica. Esse fenômeno ocorre a uma temperatura constante e, portanto, as transformações de fase ocorrem como decorrência de um campo de tensões aplicado. Desse modo, as SMAs podem apresentar grandes deformações sem reter deformações residuais após um ciclo de

carregamento. Além disso, as SMAs apresentam um laço de histerese durante esse ciclo, que é caracterizado pela transformação de fase do material.

O processo de treinamento de uma SMA consiste na estabilização de suas propriedades por aplicações sucessivas de ciclos de carregamento térmicos e de tensão. Vários artigos tratam desse treinamento (LUO; ABEL, 2007; YAN *et al.*, 2014) e de suas aplicações (HARTL *et al.*, 2015; KURIBAYASHI *et al.*, 2006; MACHADO; SAVI, 2003; SILVA *et al.*, 2015).

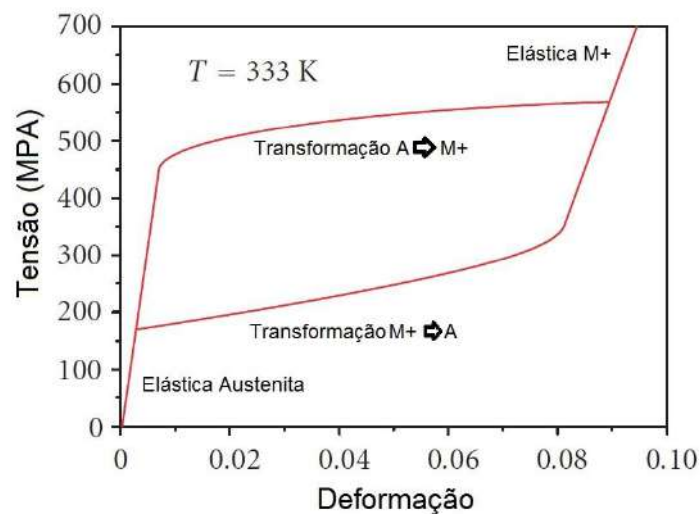


Figura 6: Exemplo do comportamento pseudoelástico do SMA com a indicação de cada etapa na deformação do material.

Neste trabalho, utiliza-se o modelo de Falk (1980) que é baseado na teoria de Devonshire para descrever o comportamento termomecânico das SMAs a partir de uma energia livre de Helmholtz polinomial. Originalmente proposto para uma modelagem unidimensional, ele foi estendido para um modelo tridimensional (FALK; KONOPKA, 1990). Nesse modelo não há variáveis internas ou dissipação de energia (histerese em um ciclo). Dessa maneira, a energia livre é função apenas da temperatura e da deformação.

A energia livre é escolhida de forma a representar com seus máximos e mínimos a estabilidade e instabilidade das fases martensítica compressiva e extensiva, e austenítica do material. Desse modo, em baixas temperaturas ($T < T_M$) quando a

martensita é estável, o potencial deve apresentar dois pontos de mínimo, um devido a martensita compressiva e o outro a martensita extensiva. Em temperaturas médias ($T_M < T < T_A$), o potencial apresenta três pontos de mínimo representando a estabilidade das duas fases martensíticas e da austenita. Finalmente, para temperaturas altas, somente a austenita é estável deixando o potencial com apenas um ponto de mínimo. Desta forma, a energia livre, ψ , é descrita pela seguinte equação, cujas curvas estão apresentadas na figura 7.

$$\psi = \frac{a_m^*}{2}(T - T_M)\varepsilon^2 - \frac{b_m^*}{4}\varepsilon^4 + \frac{b_m^{*2}}{6a_m^*(T_A - T_M)}\varepsilon^6 \quad (37)$$

onde a_m^* e b_m^* são parâmetros do material, ε é a deformação e T é a temperatura.

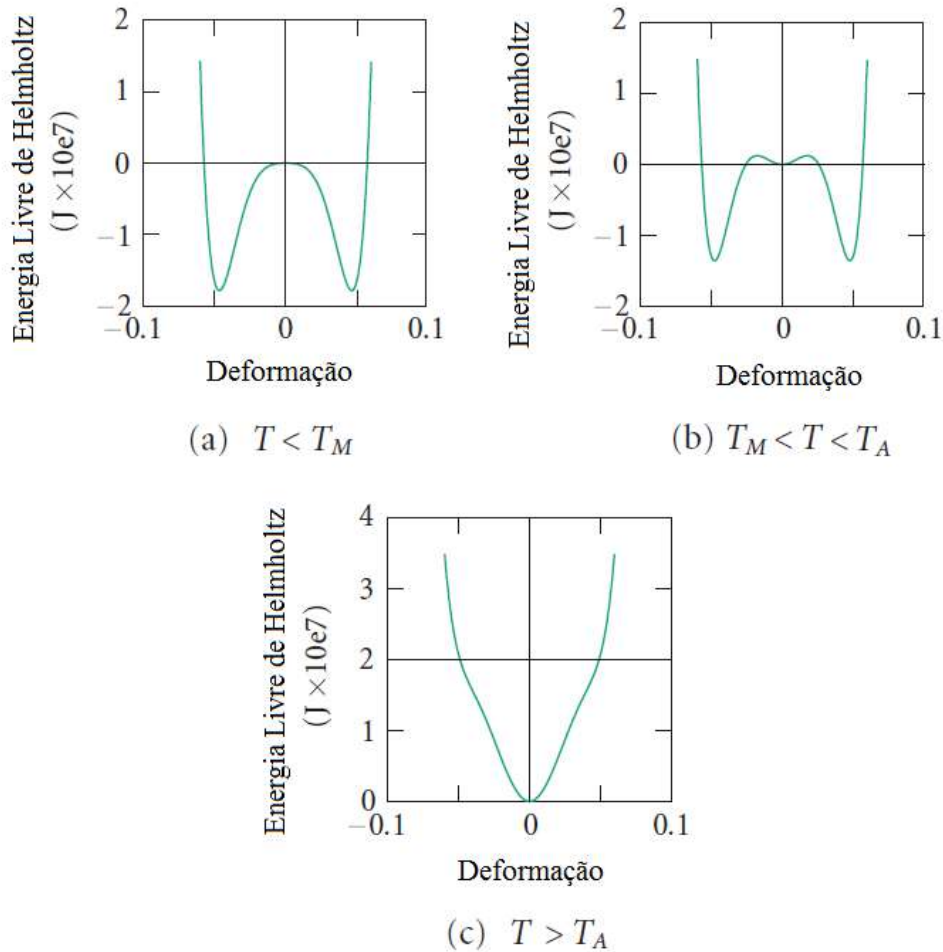


Figura 7: Energia Livre de Helmholtz em temperaturas representando cada intervalo para o modelo de Falk. $a_m^* = 10^3 J/K$, $b_m^* = 4 \cdot 10^7 J$, $T_A = 313 K$, $T_M = 287 K$.

A partir dessa energia livre, escreve-se a equação constitutiva:

$$\sigma = a_m^*(T - T_M)\varepsilon - b_m^*\varepsilon^3 + \frac{b_m^{*2}}{4a_m^*(T_A - T_M)}\varepsilon^5 \quad (38)$$

Os coeficientes do material podem ser obtidos a partir de ajuste de curvas experimentais. Por outro lado, as temperaturas de transição também podem ser obtidas por calorimetria.

Esse modelo tensão-deformação pode ser facilmente estendido para descrever o comportamento força-deslocamento de molas helicoidais seguindo as hipóteses discutidas em AGUIAR *et. al.* (2010) e ENEMARK *et al.* (2016).

4.2. O pêndulo não-linear com ligas com memória de forma

Considere um pêndulo não-linear formado por um disco de diâmetro D , e uma massa concentrada m em um ponto. O forçamento é dado por um motor DC, com um comprimento de braço b , conectado a um sistema mola-fio composto por duas molas de SMA que proporcionam características adaptativas ao pêndulo. Em uma extremidade do sistema, um fio é preso ao motor DC e a uma das molas. Um fio conectado a outra extremidade da mola passa por uma polia de diâmetro d , onde se considera que não existe deslizamento, até ser fixado a extremidade de outra mola. A outra extremidade da segunda mola é conectada a um atuador mecânico através de outro fio. Um ímã permite ajustar a dissipação do sistema. Um sistema similar, construído com molas elásticas, é descrito em De Paula *et al.* (2006), estando apresentado na figura 8.

Considerando ϕ como o ângulo do pêndulo relativo à vertical, e assumindo que a dissipação de energia é derivada de termos lineares viscosos e de atrito seco, a equação de movimento do pêndulo é dada por:

$$\phi'' = -\frac{\eta_{vis}}{I\omega_0}\phi' - \frac{\eta_{se}}{mg_gD}\text{sign}(\phi') - \frac{\sin(\phi)}{2} + \frac{d}{2mgD}(F_m - s_m) \quad (39)$$

onde a é a distância entre o centro do disco metálico e do rotor do motor DC, η_{se} é o coeficiente de atrito seco, η_{vis} é o coeficiente de atrito viscoso, ω é a frequência do

rotor, I é o momento de inércia do pêndulo, g_g é a aceleração da gravidade, t é o tempo, t^* é o tempo adimensional ($t^* = \omega_0 t$), ω_0 é uma frequência de referência,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg_g d}{I}} \quad (39)$$

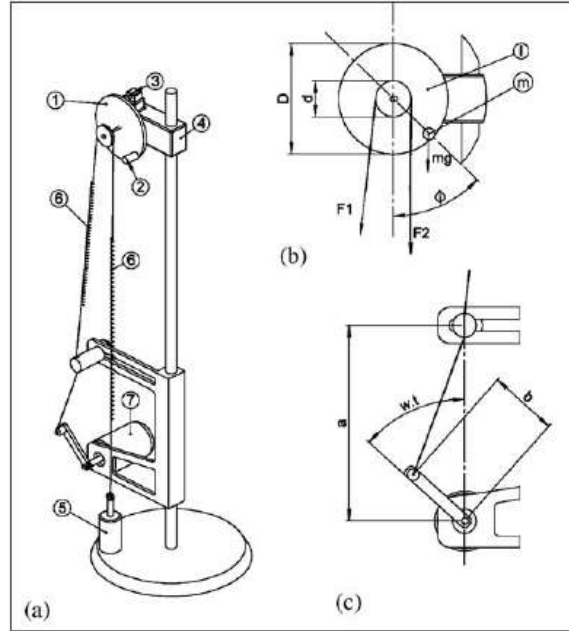


Figura 8: Pendulo não linear: a) Modelo (1) disco metálico; (2) massa concentrada; (3) Sistema de dissipação magnético; (4) sensor; (5) atuador linear; (6) mola de SMA; (7) motor DC; b) Parâmetros e forças no disco metálico; c) Parâmetros para o sistema de forçamento (DE PAULA et al. 2006).

Além disso, s_m é a força da mola ancorada e F_m é a força do sistema de forçamento mola-motor. O superescrito ()' representa derivadas em relação ao tempo adimensional.

Para obter F_m e s_m é necessário descrever os deslocamentos das molas e utilizar o modelo constitutivo. Desse modo, o deslocamento na mola é causado pelo motor e pelo movimento do pêndulo pode ser dado por:

$$y = \sqrt{\left(a^2 + b^2 - 2abc \cos\left(\frac{\omega t^*}{\omega_0} + \theta\right)\right)} - (a - b) - \frac{d\phi}{2} \quad (40)$$

onde θ é a fase inicial do motor.

Assumindo que as transformações de fase são homogêneas em qualquer corte transversal da mola, pode-se utilizar o modelo constitutivo de Falk *et al.* (1980) em uma versão de forças e deslocamentos (AGUIAR *et al.*, 2010), obtendo:

$$F_m = a_m(T - T_m)y - b_my^3 + \frac{b_m^2}{a_m(T_A - T_m)}y^5 \quad (41.1)$$

$$s_m = a_m(T - T_m)\frac{\phi d}{2} - b_m\left(\frac{\phi d}{2}\right)^3 + \frac{b_m^2}{a_m(T_A - T_m)}\left(\frac{\phi d}{2}\right)^5 \quad (41.2)$$

Os valores dos parâmetros são obtidos experimentalmente (De Paula *et al.*, 2006): $m = 1,47$ kg, $D = 9,5$ cm, $d = 4,8$ cm, $b = 6$ cm, $a = 16$ cm, $\eta_{se} = 1,272 \cdot 10^{-4}$ Nm, $\eta_{vis} = 2,368 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$, $g_g = 9,81$ m/s². Os parâmetros constitutivos da SMA são ajustados baseados em dados experimentais apresentados em AGUIAR *et al.* (2010): $T_A = 289,35$ K, $T_M = 282,45$ K, $a_m = 0,4375$ N/mK and $b_m = 150$ Pa/m.

4.3. Simulações Numéricas

As simulações numéricas são realizadas utilizando-se o método Runge-Kutta de quarta ordem. O método Runge-Kutta de quinta ordem com erro estimado foi utilizado para a análise de convergência. Desse modo, o passo de tempo escolhido foi o que apresentava uma soma de erros estimados de todas as iterações abaixo de 10^{-6} ao final de 2000 períodos.

Inicialmente a estrutura dos pontos de equilíbrio é analisada para avaliar a dependência da temperatura do sistema. Neste estudo, o sistema não é excitado ($\omega = 0$) e o braço do motor está em um ângulo θ , constante, que pode variar. Apresentam-se informações sobre o lugar geométrico dos pontos de equilíbrio contra o ângulo θ em várias temperaturas como pode ser visto nas figuras 9, 10, 11 e 12. A estabilidade dos pontos de equilíbrio é avaliada através da análise dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema no ponto.

A mola de SMA a temperatura de $T = 291,15$ K apresenta um comportamento semelhante a uma mola elástica sendo, portanto, similar ao resultado obtido por De Paula *et al.* (2006). Nessa situação, a SMA se encontra acima de T_A tendo apenas a fase austenítica estável. A figura 9 mostra o local dos pontos de equilíbrio para esse caso,

mostrando intervalos em θ relacionados a apenas um ponto de equilíbrio e uma região ($2,71 \leq \theta \leq 4,11$) relacionada a três pontos de equilíbrio (dois estáveis e um instável).

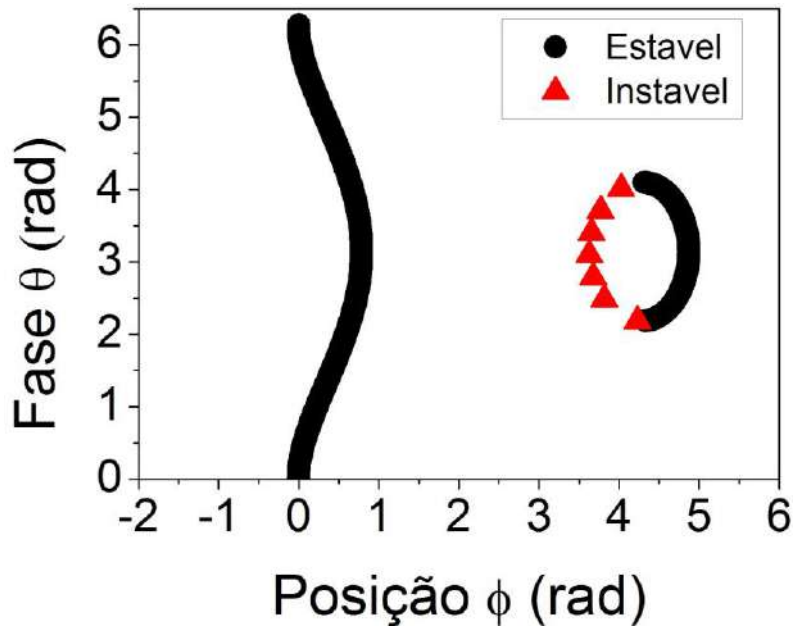


Figura 9: Local dos pontos de equilíbrio no caso linear. Pontos estáveis são representados em azul e pontos instáveis em preto.

A alteração da temperatura causa mudanças dramáticas no lugar geométrico dos pontos de equilíbrio do sistema. As figuras 10a e 10b exibem as situações em que a temperatura das molas é menor ou aproximadamente T_M . Nota-se que existem cinco pontos de equilíbrio em $\theta = 0$, dois pontos instáveis e três estáveis, posicionados simetricamente em volta da origem. A fase θ do motor pode ser vista como um mecanismo que introduz assimetria ao sistema. Desse modo, ao se alterar a fase do motor, a simetria do sistema é quebrada, deslocando os pontos de equilíbrio do sistema até ocorrer a colisão entre um ponto de equilíbrio estável e um instável. Ao se aumentar a temperatura a estrutura dos pontos de equilíbrio muda. A figura 10b mostra o crescimento da elipse formada pelos pontos de equilíbrio devido o aumento de temperatura.

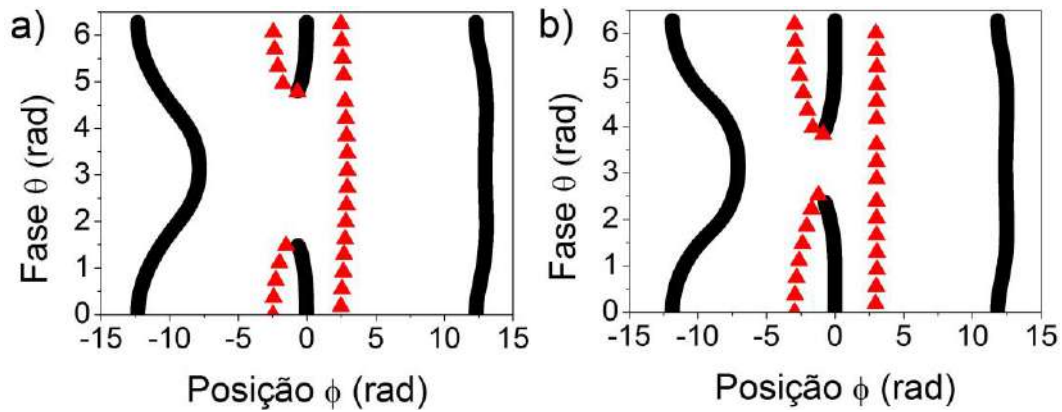


Figura 10: Local dos pontos de equilíbrio em radianos em função da fase do motor em radianos para temperatura de 280,15 K abaixo de T_M (a) e 283,15 K logo acima de T_M (b). ▲ são pontos instáveis e linha contínua preta são pontos estáveis.

O intervalo entre T_M e T_A permite que austenita e martensita sejam estáveis, o que permite a formação de um número maior de pontos de equilíbrio. A figura 11a mostra a temperatura em que à colisão entre as duas extremidades da estrutura elíptica dos pontos de equilíbrio formando duas linhas. Ao aumentar a temperatura, pode-se observar o surgimento e crescimento de outra elipse figura 11c e 11d. Ao se aumentar ainda mais a temperatura, essa elipse cresce até se abrir, e logo em seguida há a criação de outra elipse figura 11e. Finalmente, ao se aproximar de T_A , ocorre uma mudança drástica no comportamento dos pontos de equilíbrio. Nessa temperatura, o crescimento das elipses é cessado e os locais dos pontos de equilíbrio mais extremos começam a se aproximar e coalescem em novas elipses (figura 11f). Ao se aproximar e passar de T_A essas novas elipses se contraem, podendo se dividir em duas no processo ou sendo formadas em pares (figura 11f e figura 12a). O caso limite ocorre a $T = 291,15 K$ onde a estrutura dos pontos de equilíbrio se assemelha a do caso linear (figura 12b).

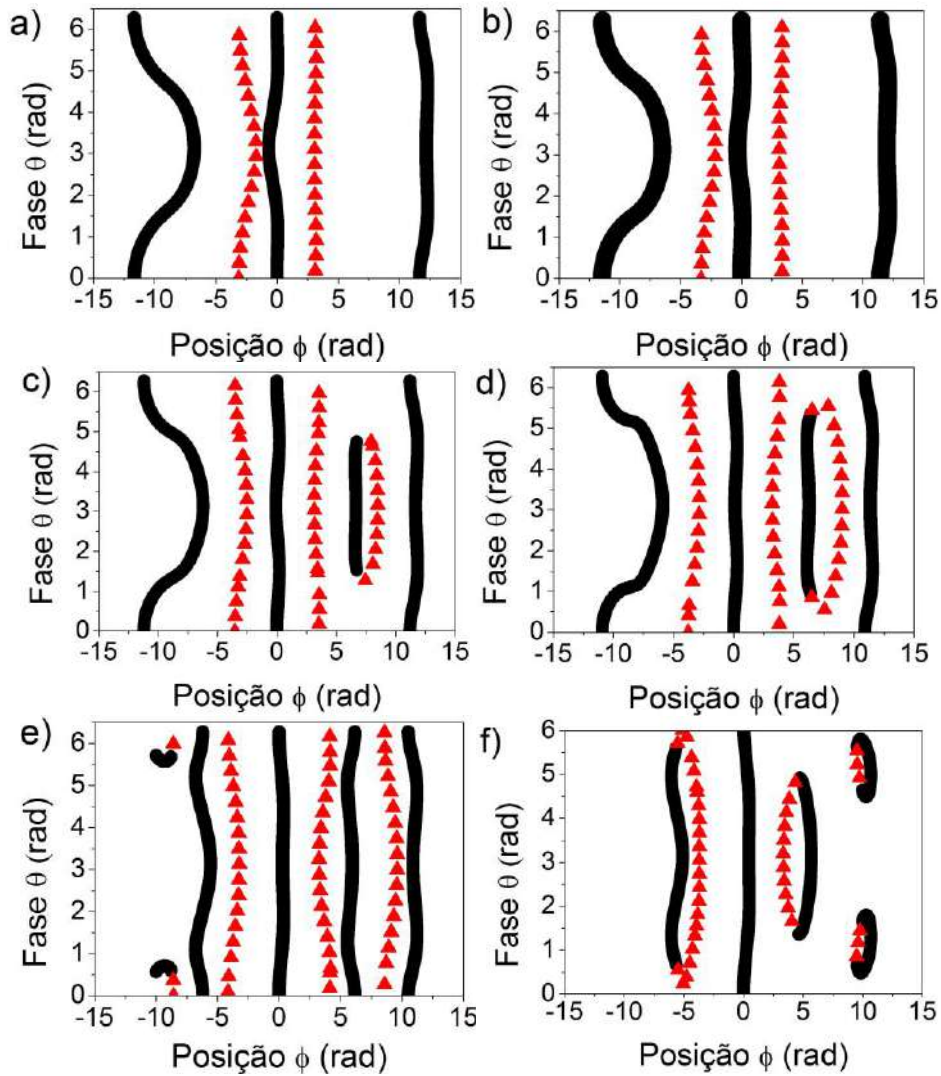


Figura 11: Local dos pontos de equilíbrio contra fase do motor para o sistema com mola de SMA no intervalo $T_M < T < T_A$. a) 284,15 K b) 285,15 K c) 286,15 K d) 287,15 K e) 288,15 K f) 289,15 K. \blacktriangle são pontos instáveis e linha contínua preta são pontos estáveis.

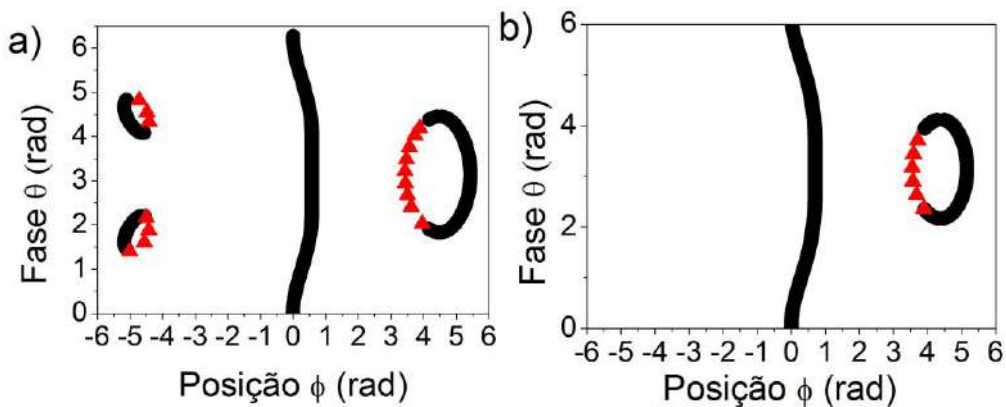


Figura 12: Local dos pontos de equilíbrio contra fase do motor para o sistema com mola de SMA para $T > T_A$. a) 290,15 K b) 291,15 K. \blacktriangle são pontos instáveis e linha contínua preta são pontos estáveis.

A avaliação do sistema forçado (motor em movimento) é feita na sequência. Inicialmente, apresentam-se diagramas de bifurcação traçados em função da temperatura e da frequência obtendo uma visão geral do comportamento do sistema. Os diagramas são construídos eliminando-se os 600 primeiros ciclos com 30 diferentes posições iniciais igualmente espaçadas. As diferentes condições iniciais se devem a grande possibilidade de multi-estabilidade do sistema. A figura 13 apresenta o diagrama de bifurcação mostrando a variável posição no mapa de Poincaré contra a variação de temperatura, considerando a frequência do motor de $\omega = 5,5$ rad/s. Observa-se a coexistência de uma órbita de período-1 e um atrator caótico em $T = 291,15$ K (figura 14) e a coexistência de uma órbita de período-12 com uma de período-1 (figura 15) na região de $T = 283,55$ K. Observe também que na região de $T = 291,15$ K a região caótica, que em temperaturas mais baixas e mais altas é visitada por três condições iniciais, é visitada apenas por uma enquanto as outras se tornam órbitas de período-1.

Para analisar a influência de variações na frequência também foram traçados diagramas de bifurcação com temperatura constante de $T = 291,15$ K (figura 16). Nessa temperatura, objetiva-se localizar regiões caóticas e a comparação com o caso linear. Note que existem múltiplas regiões caóticas coexistindo com órbitas de período-1: três regiões caóticas desconexas no diagrama 4,78 rad/s, 5,18 rad/s e 5,5 rad/s e uma região caótica conexa em 5,4 rad/s. Nota-se que as regiões caóticas desconexas estão sempre entre a transição de uma órbita de período-1 para uma órbita de período de multiplicidade maior.

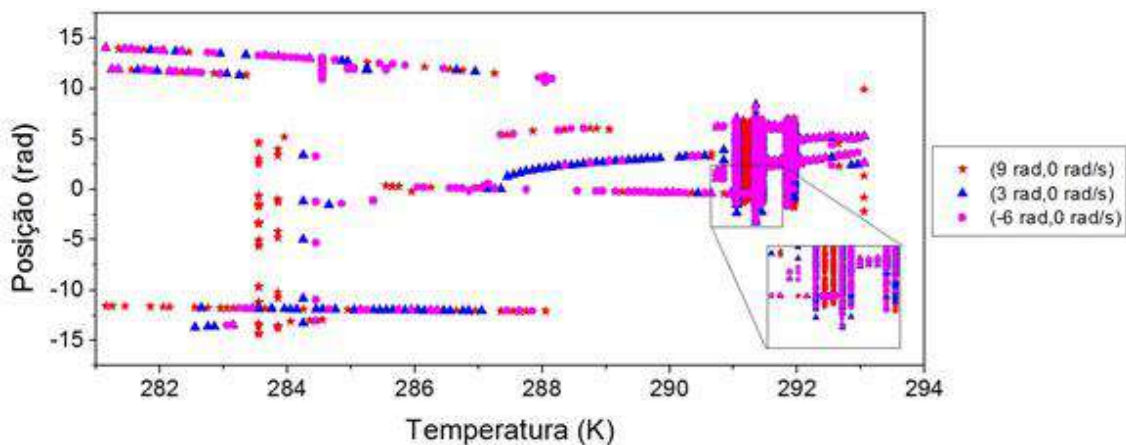


Figura 13: Diagrama de bifurcação com a variação da temperatura com frequência $\omega = 5,5$ rad/s. Por simplicidade, somente os resultados das posições iniciais mais relevantes são mostrados. Todas as outras condições iniciais apresentam comportamentos semelhantes as apresentadas na figura.

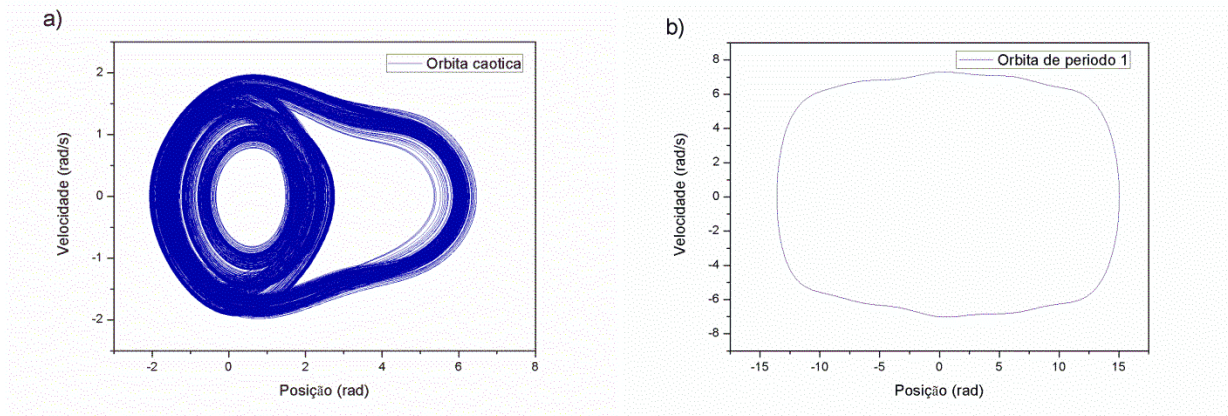


Figura 14: Órbitas na frequência de 5,5 rad/s e temperatura de 291,15 K. a) Comportamento caótico; b) Órbita periódica.

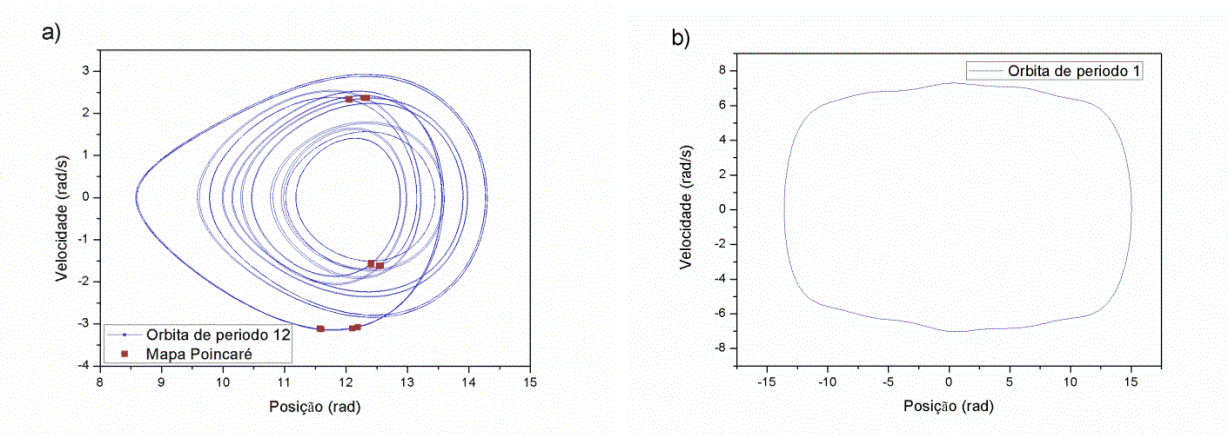


Figura 15: Órbitas com frequência de forçamento de 5,5 rad/s e $T = 291,15 K$. a) Órbita de período 12, note que cada marcador da seção de Poincaré na verdade são dois marcadores muito próximos; b) Órbita de período 1.

Alguns comportamentos específicos do sistema em $T = 291,15 K$ podem ser destacados. A figura 17a apresenta uma resposta de período-1 com $\omega = 5,1 \text{ rad/s}$. A figura 17b apresenta uma órbita de período-2 com forçamento de $\omega = 3,59 \text{ rad/s}$. Já em $\omega = 5,5 \text{ rad/s}$ uma resposta caótica aparece. A resposta caótica pode ser confirmada pelo cálculo de seus expoentes de Lyapunov estimados a partir do algoritmo de Wolf *et al.* (1985), que apresentam valor máximo de $\lambda = 0,14 \pm 0,02 \text{ bit/s}$. A figura 18 mostra o mapa de Poincaré, com uma estrutura fractal desconexa de três regiões distintas, e o espaço de fase dessa resposta. A figura 19 apresenta uma estrutura caótica similar em $\omega = 4,78 \text{ rad/s}$ com um atrator de duas regiões desconexas. Já as respostas de período-1 que coexistem com as respostas caóticas tem as formas apresentadas na figura 17a.

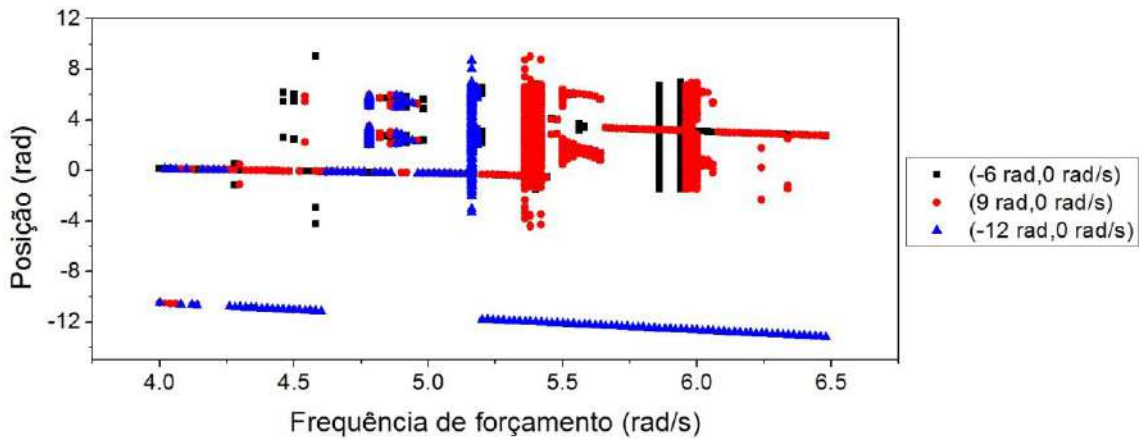


Figura 16: Diagrama de bifurcação com a frequência de forçamento em $T = 291,15\text{ K}$. Por simplicidade, somente os resultados das posições iniciais mais relevantes são mostrados. Todas as outras condições iniciais apresentam comportamentos semelhantes as apresentadas na figura

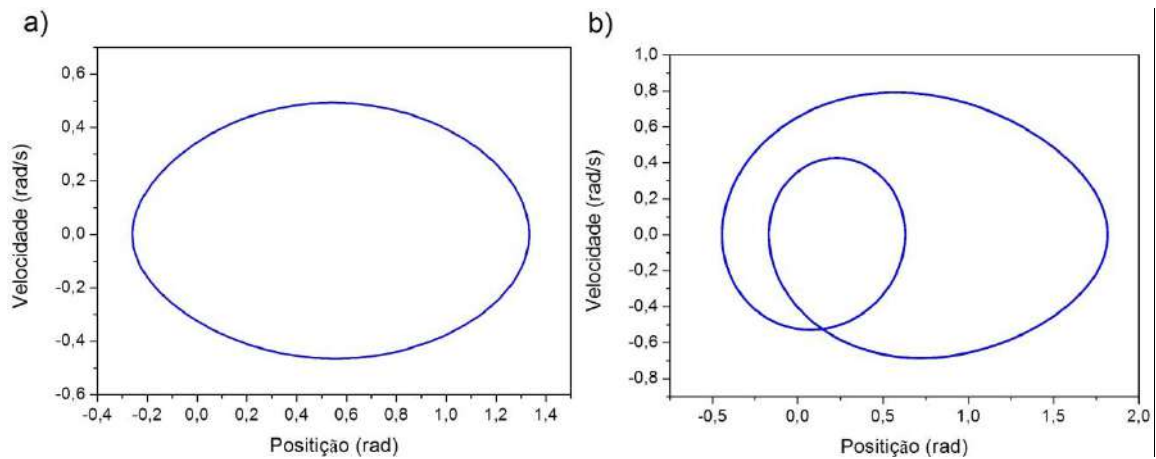


Figura 17: Soluções do Sistema em diferentes frequências de forçamento (órbitas de período 1). a) 3,59 rad/s; b) 5,1 rad/s.

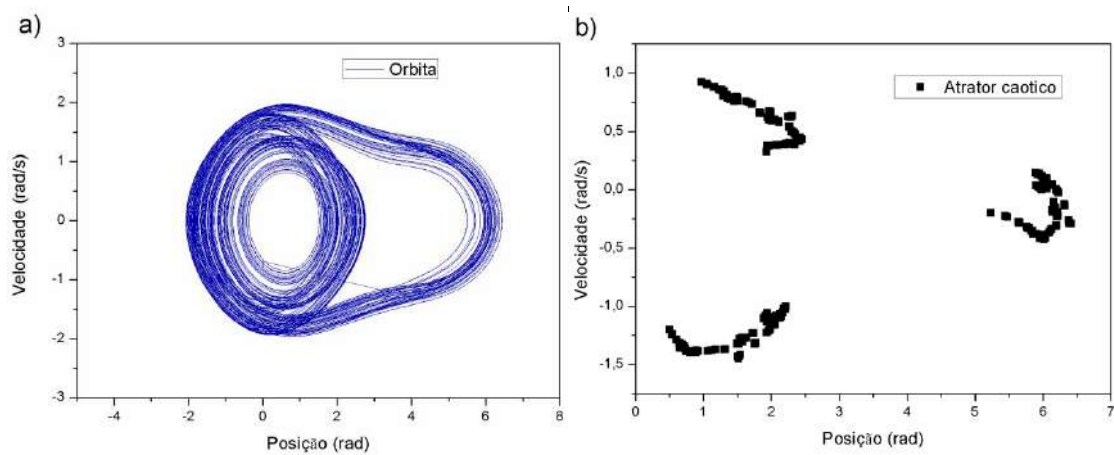


Figura 18: Solução caótica em $\omega = 5,5\text{ rad/s}$. a) Espaço de fase. b) Seção de Poincaré.

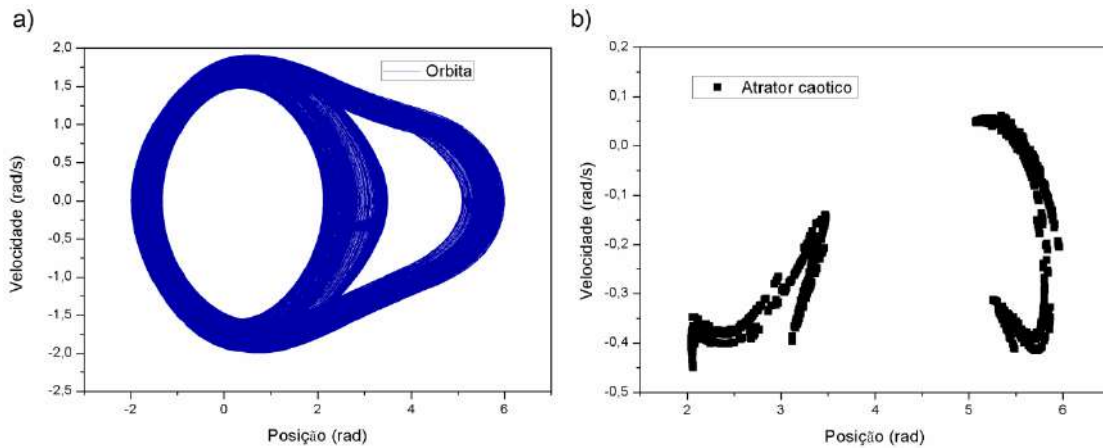


Figura 19: Solução caótica em $\omega = 4,78$ rad/s. a) Espaço de fase. b) Seção de Poincaré.

O sistema pêndulo-SMA apresenta caos transiente, comportamento o qual é relacionado a uma sela caótica. A diferença essencial entre a sela e um atrator é que a sela repele a solução do sistema para outra região do espaço de fase apresentando assim uma presença transiente enquanto o atrator apresenta comportamento permanente. O tempo em que o sistema permanece na sela é altamente dependente das condições iniciais. A figura 20 apresenta a sela caótica e a posição do pêndulo ao longo do tempo para uma frequência de $\omega = 6$ rad/s. A figura 21 também apresenta os mesmos dados porém com condições iniciais diferentes enfatizando a grande sensibilidade da resposta. A verificação dessas selas como caóticas foi realizada pela sua estrutura fractal e pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov em condições que o transiente existe por um tempo muito grande habilitando as iterações do algoritmo de Wolf *et al.* (1985) convergirem para o máximo expoente de $0,52 \pm 0,03$ bits/s.

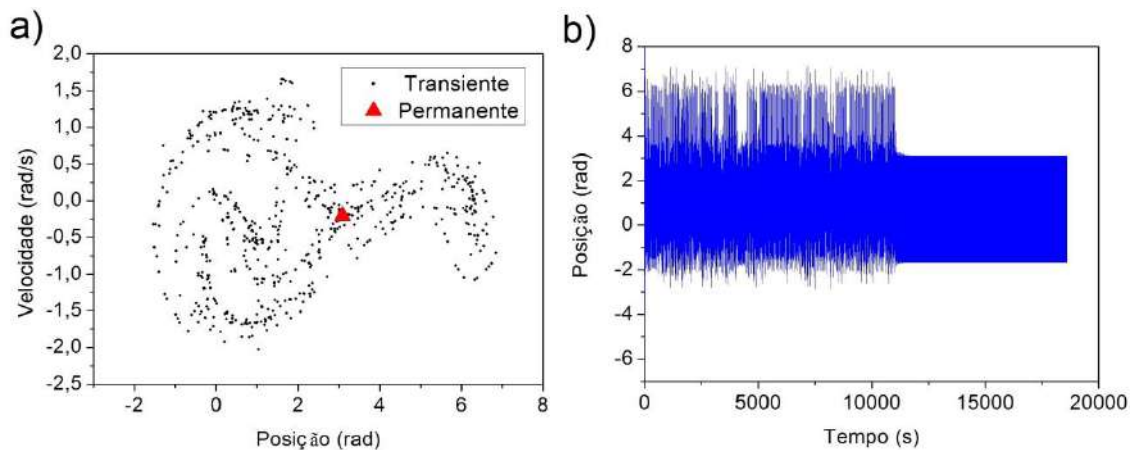


Figura 20: Caos transiente $\omega = 6$ rad/s, condições iniciais (10,152 rad, 0 rad/s). a) Sela caótica e solução permanente. b) Evolução com o tempo.

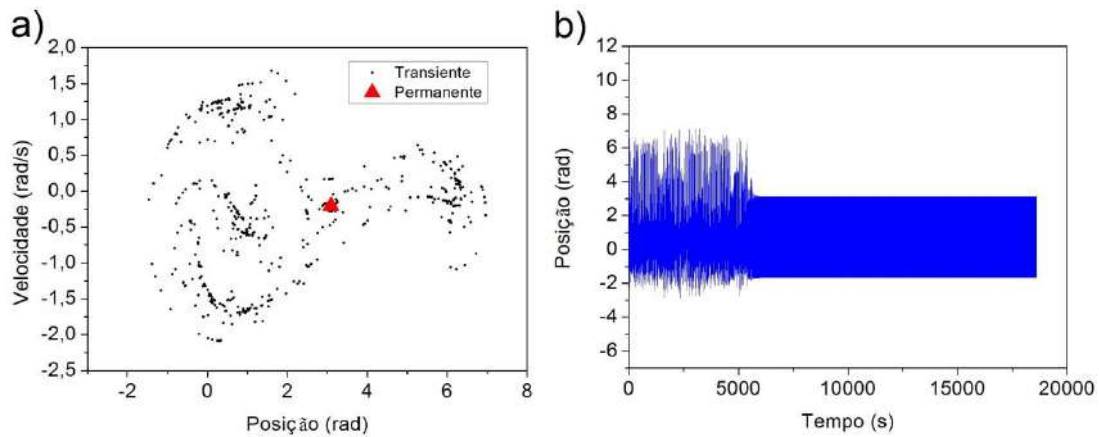


Figura 21: Caos transiente $\omega = 6 \text{ rad/s}$, condições iniciais $(10,151 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s})$. a) Sela caótica e solução permanente. b) Evolução com o tempo.

A coexistência de várias soluções do sistema levanta questões sobre o surgimento de mais soluções ou diferentes comportamentos à medida que a energia entregue ao sistema varia. Para essa análise o braço do motor (parâmetro b) pode ser variado em um diagrama de bifurcação. Os resultados desse diagrama a $T = 286,15 \text{ K}$ são mostrados na figura 22. Uma região caótica na região de $b = 1,5 \text{ cm}$ é claramente observável na parte inferior do diagrama e pode ser claramente verificada com seu diagrama de Poincaré (figura 23) e o cálculo de seu maior expoente de Lyapunov: $0,26 \pm 0,03 \text{ bits/s}$. O atrator também coexiste com duas órbitas de período-1 apresentadas na figura 24.

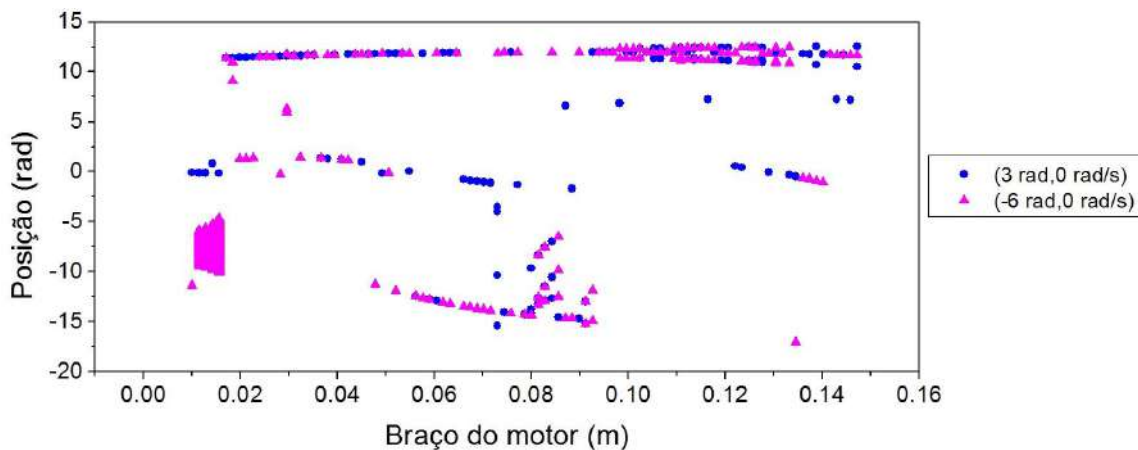


Figura 22: Diagrama de bifurcação em $T=286,15$ com frequência de forçamento de 6 rad/s contra o parâmetro b . Por simplicidade, somente os resultados das posições iniciais mais relevantes são mostrados. Todas as outras condições iniciais apresentam comportamentos semelhantes as apresentadas na figura.

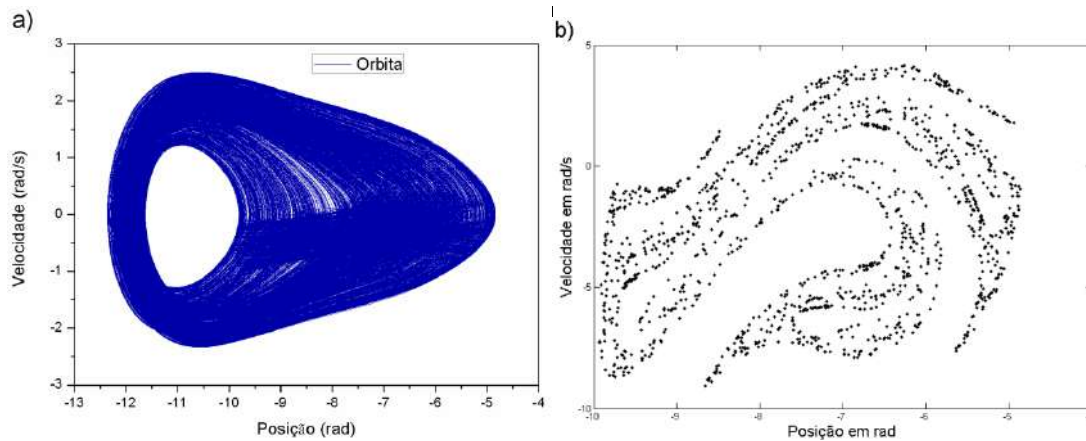


Figura 23: a) Órbita caótica e b) Seção de Poincaré em $T = 286,15 K$, $\omega = 6 \text{ rad/s}$ e $b = 1,5 \text{ cm}$.

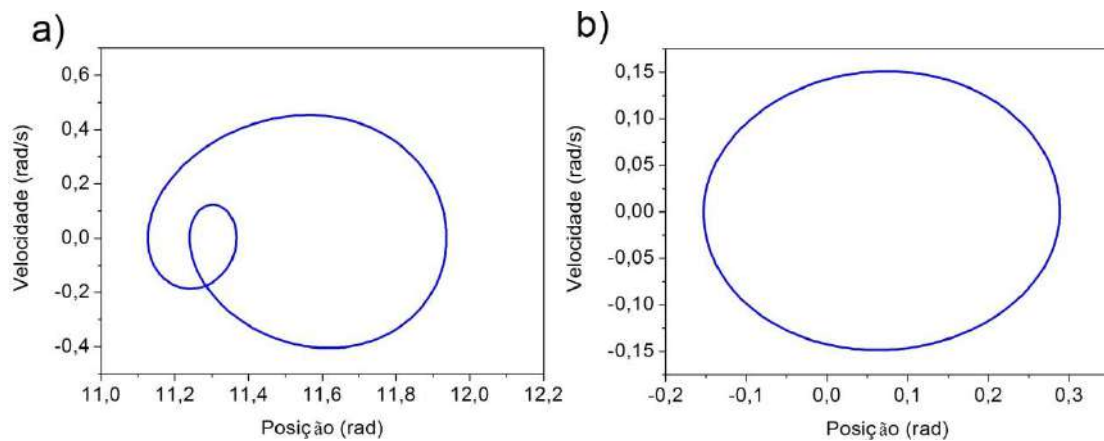


Figura 24: Órbitas de período 1 coexistindo com o atrator caótico da figura 22. a) Em volta de $11,4 \text{ rad}$ b) Nas proximidades da origem.

Para valores maiores de b , os termos devido ao potencial gravitacional começam a perder sua influência e os termos devido ao potencial da mola de SMA começam a ser preponderantes. Desse modo, o sistema assemelha seu comportamento ao oscilador estudado por Machado *et al.* (2003).

A influência da temperatura sobre o sistema com um braço de motor menor ($b = 1,5 \text{ cm}$) pode então ser analisada. A figura 25 mostra diagramas de bifurcação variando a frequência de excitação para diferentes temperaturas, variando de $T = 284,55 K$ até $T = 286,15 K$ com um intervalo de $0,5 K$ entre eles. Observe que duas ou mais órbitas coexistem sendo uma delas periódica. Além disso, pode-se observar a coexistência de duas regiões caóticas nas figuras 25b e 25c. Nota-se também que ao se aumentar a temperatura as regiões caóticas são criadas, se movem para a esquerda e

desaparecem. O atrator inferior nas figuras 25b, 25c, 25d e 25e também contém ilhas de periodicidade que evoluem com a região caótica empurrando-a para os lados, crescendo entre o caos e ultimamente eliminando-o (figura 25f). Desse modo aumento em temperaturas pode ser relacionado à criação de ilhas periódicas que deslocam e destroem o caos.

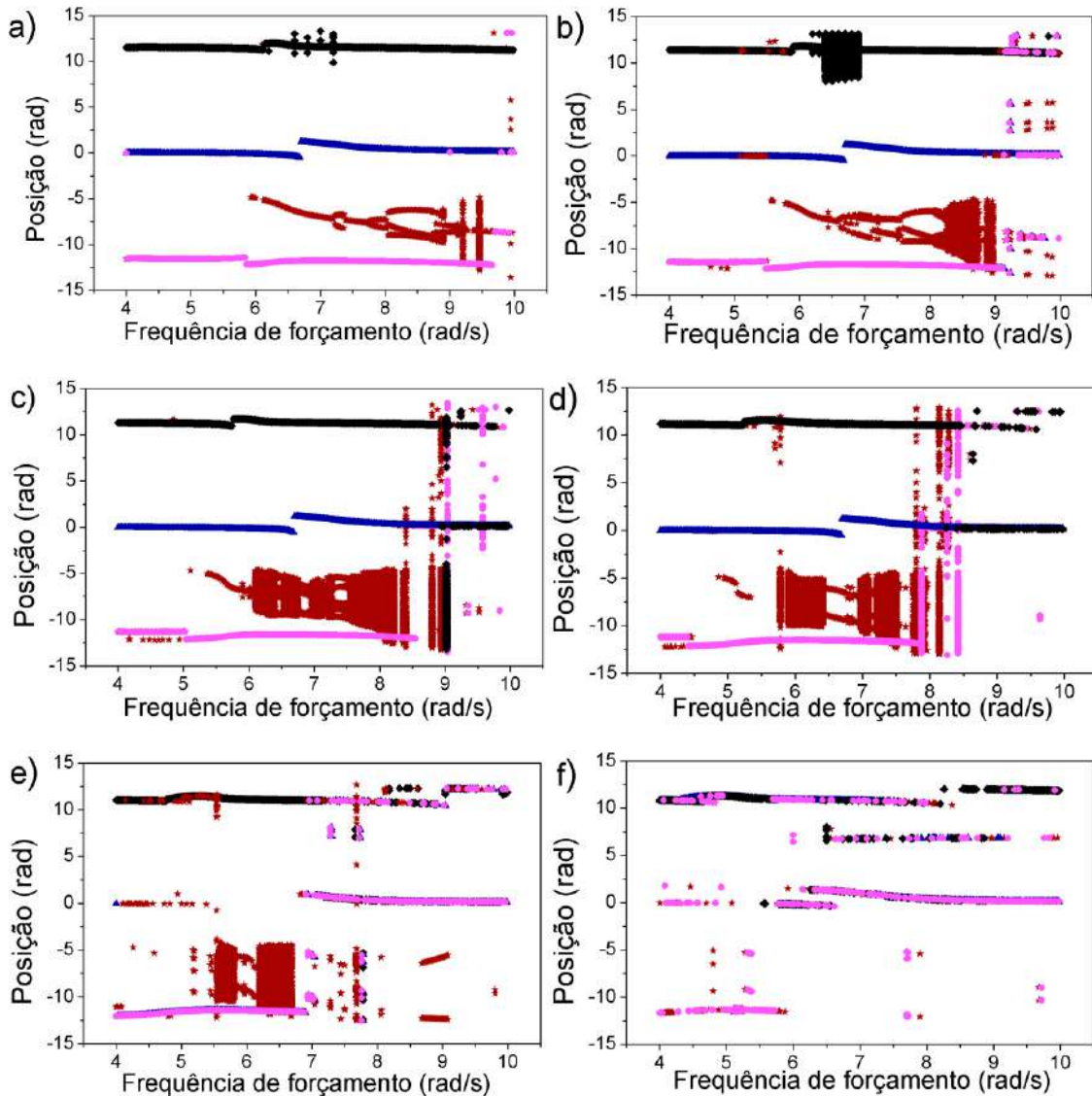


Figura 25: Evolução das regiões caóticas e diagramas de bifurcação com a temperatura e um braço de motor pequeno $b = 1,5$ cm. a) 284,65K; b) 285,15 K; c) 285,65 K; d) 286,15 K; e) 286,65 K; f) 287,15 K. Os símbolos indicam as condições iniciais: \bullet $(-12, 0)$; \star $(-6, 0)$; \blacktriangle $(0, 0)$; \blacklozenge $(15 \text{ rad}, 0)$ nas figuras (a) e (b); \blacklozenge $(12, 0)$ nas figuras (c),(d),(e) e (f).

4.4. Identificação de OPIs

O atrator identificado na parte inferior do diagrama de bifurcação da figura 24b é escolhido para a análise de OPIs e controle. Os parâmetros utilizados são $b = 1,5 \text{ cm}$, $\omega = 8,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ e $T = 275,15 \text{ K}$.

As órbitas periódicas instáveis do sistema são identificadas através do método descrito por Auerbach *et al.* (1987). Utilizam-se mapas de Poincaré com 25600 períodos simulados onde os primeiros 600 períodos são descartados. Os parâmetros do algoritmo para a determinação das órbitas periódicas instáveis são: $r_1 = 0,04$ e $r_2 = 0,15$.

Após a identificação das OPIs são traçados os expoentes de Lyapunov e de Floquet. Os expoentes de Lyapunov são avaliados a partir do método de Wolf *et al.* (1985) aplicado a OPI. A figura 26 mostra a convergência de expoentes de Lyapunov calculados.

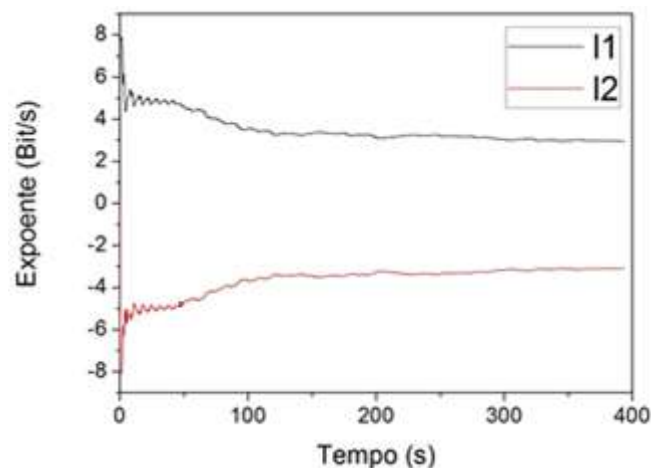


Figura 26: Exemplo de cálculo de expoentes de Lyapunov. a) Convergência do expoente para o atrator com destaque ao patamar devido a OPI e período 1, mostrando a existência dos patamares.

O cálculo dos expoentes de Floquet segue o procedimento descrito no capítulo 4. A tabela 1 mostra as OPIs identificadas e seus expoentes de Lyapunov e de Floquet, destacando a instabilidade dessas soluções. Nota-se que a igualdade $\text{Im}(\mu_i)\tau n = \pi$, onde $n \in \mathcal{N}$, é válida para a maioria das órbitas indicando que seus expoentes de Floquet estão próximos do limite da zona de Brillouin. A zona de Brillouin é apenas o

conjunto do espaço recíproco entre os valores do eixo imaginário $\mu\tau = [-\pi i, \pi i]$. Esse conjunto contém toda a informação de estruturas periódicas, sejam elas OPIs, uma rede atômica, etc. (KITTEL, 2004). Todas as órbitas apresentam número de expoentes com parte real positivas pares (para um sistema não autônomo o tempo corresponde a um multiplicador positivo) e, desse modo, são formadas por dobras finitas no espaço de estado.

Para exemplificar as dobras, a figura 27 mostra algumas OPIs identificadas juntamente com seus mapas de Poincaré. Note que todas as órbitas podem ser construídas com torções em uma região do espaço de fase da órbita de período-1.

Essas órbitas também constroem o atrator caótico. Desse modo à medida que o sistema evolui a solução do sistema tende a se torcer e ser empurrada de uma OPI para outra. A figura 28 mostra como as órbitas constroem o atrator caótico no espaço de fase e no mapa de Poincaré.

Tabela 1: Órbitas periódicas instáveis detectadas e seus respectivos expoentes.

Período	Expoente			
	Lyapunov 1	Lyapunov 2	Floquet 1	Floquet 2
n	$\pm 0.05 \text{ bit/s}$	$\pm 0.05 \text{ bit/s}$	$\pm 0.01 + 0.01i \text{ Hz}/\omega_0$	$\pm 0.01 + 0.01i \text{ Hz}/\omega_0$
1	4,86	-5,04	$0.37 + 0.47i$	$-0.39 + 0.47i$
2	4,08	-4,25	0,32	-0,34
3	2,81	-2,98	0,22	-0,24
4	2,40	2,57	$0,19 + 0.11i$	$-0,21 + 0.11i$
5	3,54	-3,71	$0,30 + 0.09i$	$-0,31 + 0.09i$
6	2,28	-2,45	$0,20 + 0.08i$	$-0,21 + 0.08i$
9	2,91	-3,08	0,24	-0,25
12	3,02	-3,19	$0,22 + 0.04i$	$-0,21 + 0.04i$
14	2,41	-2,58	$0,18 + 0.03i$	$-0,20 + 0.03i$

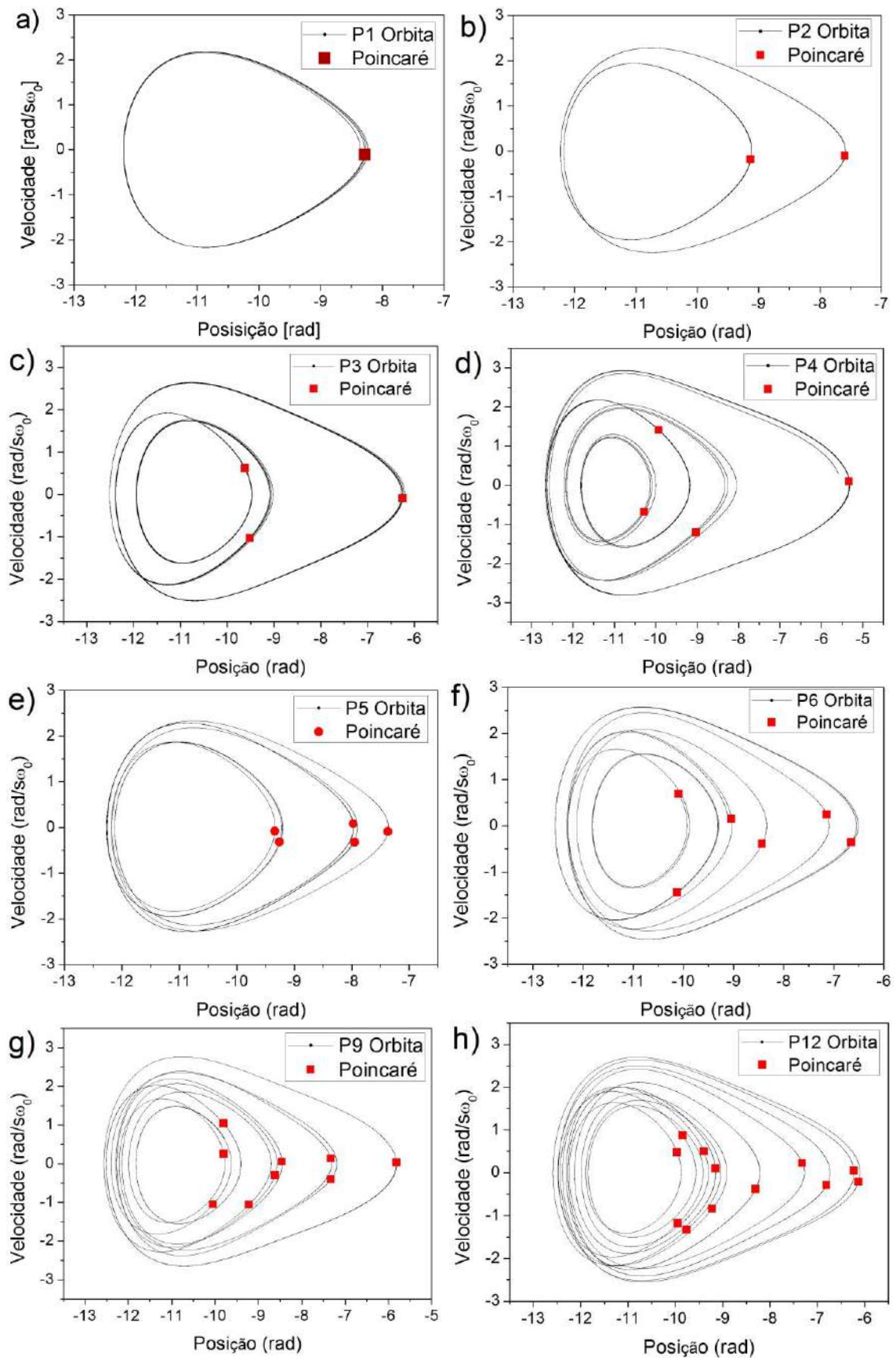


Figura 27: OPIs identificadas. Períodos: a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) 5, f) 6, g) 9, h) 12.

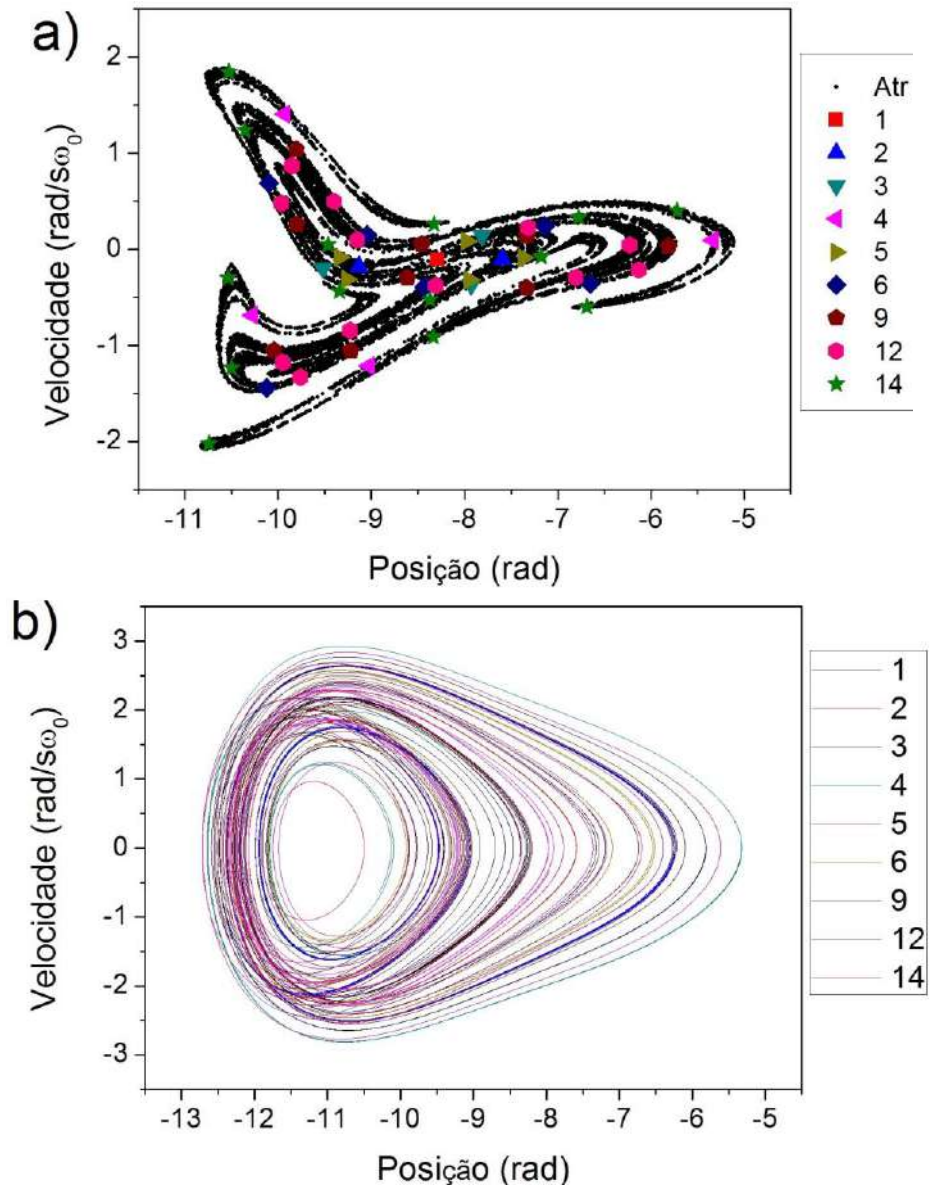


Figura 28: a) Atrator caótico e mapa de Poincaré das órbitas. b) Espaço de fase das OPIs. Note que ao representar as OPIs em uma mesma figura a imagem se assemelha ao espaço de fase do atrator caótico.

5. CONTROLE DE CAOS

Neste capítulo discute-se o controle de caos. Consideram-se dois controladores: mecânico e térmico. O controlador mecânico considera um atuador mecânico que consiste de um motor que altera o comprimento do fio conectado a uma das molas de SMA (localizado na posição 5 da figura 7). A atuação do controlador mecânico é calculado a partir do ETDF. O controle térmico considera fontes de corrente que aquecem as molas de SMA por efeito Joule. O controle térmico possui duas situações diferentes: controle direto, onde a temperatura é convenientemente variada entre dois patamares; ETDF, onde a variação de temperatura é calculada a partir dos estados defasados.

Nesse trabalho, o controle ETDF aplicado ao sistema considera que a velocidade do pêndulo é a variável observável e os estados defasados dizem respeito a essa variável. Desse modo, a matriz K e conseqüentemente $H_m(\mu)$ são consideradas escalares. Além disso, ao menos que explicitamente citado, o tempo de defasagem do controlador é sempre igual ao período da OPI a ser estabilizada. As matrizes utilizadas para os cálculos dos expoentes de Floquet são explicitadas no Apêndice A.

5.1. Controlador mecânico

O controlador mecânico considera um atuador mecânico que consiste de um motor que altera o comprimento do fio conectado a uma das molas de SMA. A força de controle é expressa através do deslocamento na mola efetivado pelo atuador Δl :

$$F_{mec} = a_m(T - T_m) \left(\frac{\phi d}{2} - \Delta l \right) - b_m \left(\frac{\phi d}{2} - \Delta l \right)^3 + \frac{b_m^2}{a_m(T_A - T_m)} \left(\frac{\phi d}{2} - \Delta l \right)^5 - F_m \quad (42)$$

onde F_{mec} é a força aplicada pelo atuador no sistema. Note que trata-se de polinômio de quinto grau, apresentando 5 possíveis posições reais as quais a força de controle F_{mec} pode ser obtida. Para eliminar essa ambigüidade, a posição ϵ_c é escolhida de modo a minimizar a energia consumida no controle.

$$E_m = \int_{t_0}^{t_f} F_{mec}(y, t) \dot{l}(t) dt \quad (43)$$

onde t_0 é o início da movimentação do controlador e t_f é o final da movimentação. Vale ressaltar que no controlador mecânico a igualdade $F_{mec} = g(y, t)$ é válida para todo o tempo.

5.1.1. Avaliação do controle ETDF

Utiliza-se o atuador mecânico para aplicar a força referente ao ETDF. Para estabelecer os parâmetros do controlador, utiliza-se o critério de minimização do maior expoente de Floquet da órbita. Para calculá-los, utiliza-se a equação 29, e um método iterativo de minimização para a convergência da solução (baseado em um algoritmo de evolução diferencial (STORN; PRICE, 1997)). O algoritmo para esse cálculo pode ser visto na figura 29:

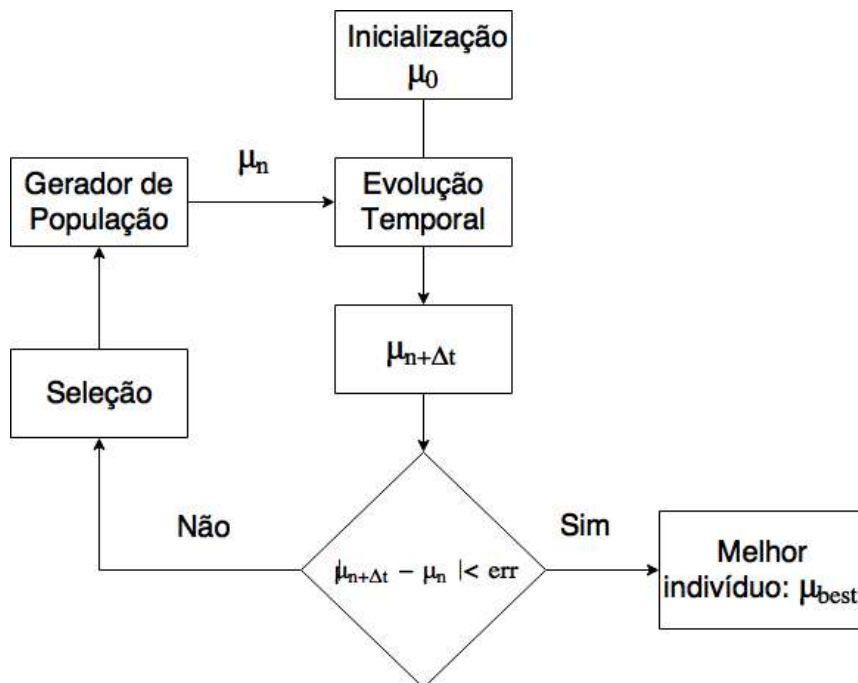


Figura 29: Algoritmo para cálculo do expoente de Floquet máximo. μ_0 é o chute inicial para os Expoentes de Floquet, μ_n indica a n -ésima, $\mu_{n+\Delta t}$ são os expoentes de Floquet calculados após a evolução temporal da n -ésima, err é a tolerância no erro, e μ_{best} é o melhor indivíduo da população selecionada pelo critério de parada.

Neste momento, considere a estabilização de uma OPI de período-1 (OPI-1). Os expoentes de Floquet dessa OPI são calculados para vários valores de K e R como pode ser visto na figura 30. Nota-se que dado um valor de R , existe uma região em K estável ($\mu_{max} < 0$) que começa em um valor inicial K_1 e termina quando o maior expoente de Floquet se torna novamente positivo, $K = K_2$. Nessa região de estabilidade verifica-se um mínimo μ_{min} no valor da parte real do maior expoente de Floquet onde $K = K_{op}$. O efeito de R parece deslocar os mínimos para o canto inferior direito da curva aumentando o valor de K em que eles ocorrem. Desse modo, para realizar o controle otimizado da OPI-1, utiliza-se os valores de $K_{op} = 0,41$ e $R_{op} = 0,3$.

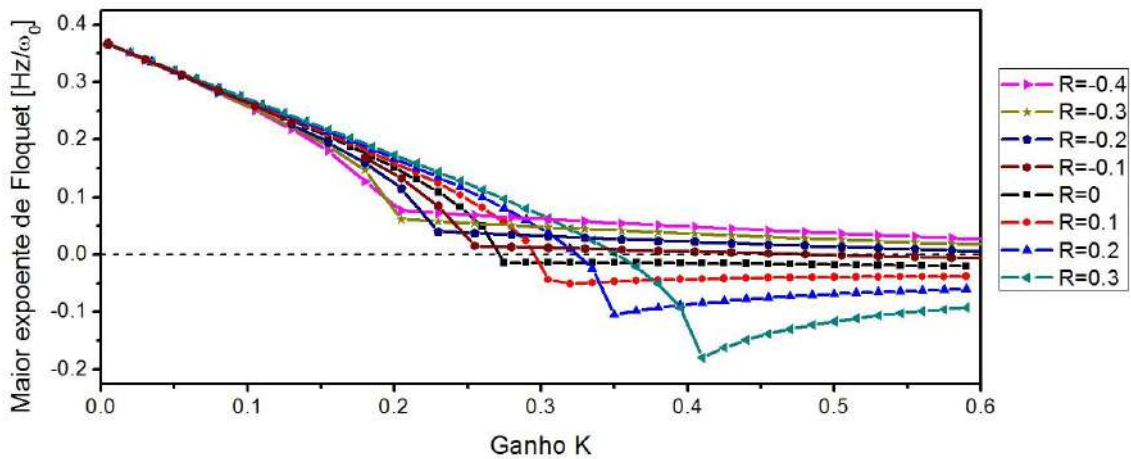


Figura 30: Parte real dos expoentes de Floquet da órbita de período 1 analisada contra valores de K para vários valores de R . O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03 \text{ Hz} // \omega_0$.

A região que contempla pequenos valores de R e K apresenta uma vantagem no cálculo de multiplicadores de Floquet que estão próximos à borda da primeira zona de Brillouin (KITTEL, 2004). A zona de Brillouin é a região em um espaço recíproco que representa todo o espaço recíproco devido a sua periodicidade, ao se aproximar da borda dessa zona os multiplicadores de Floquet indicam que a dobra do espaço de fase ao percorrer a OPI ocorre com a mesma periodicidade da órbita, o que possibilita o cálculo aproximado desses valores sem a utilização de um minimizador diminuindo consideravelmente o custo computacional necessário. Para isso, pode-se aplicar o método descrito na subseção 4.6. A figura 31 mostra a relação entre os expoentes de Floquet calculados por esse método aproximado e os calculados pelo método com minimização. As linhas indicadas indicam praticamente os mesmos valores até a mudança do valor imaginário dos expoentes de Floquet. Vale ressaltar que essa

mudança acontece quando há um cruzamento entre os caminhos dos dois maiores expoentes de Floquet indicado pela descontinuidade na derivada $d\mu_{max}/dK$.

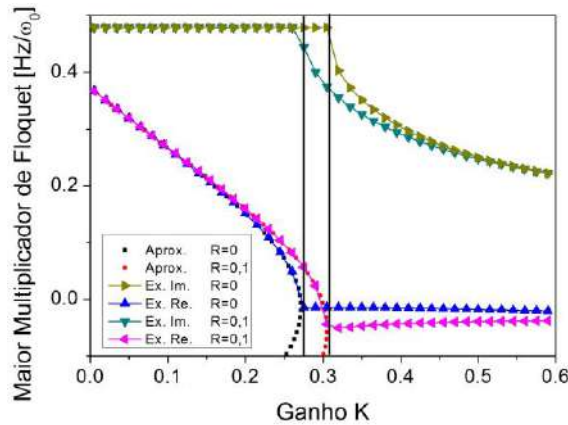


Figura 31: Comparação entre os valores aproximados e os valores exatos dos expoentes de Floquet da OPI de período 1. As linhas pretas destacam a partir de que ponto a divergências na aproximação. O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03 \text{ Hz}/\omega_0$.

A figura 32 mostra o controle otimizado da OPI-1 utilizando os parâmetros K_{op} e R_{op} . Nota-se que o tempo para a estabilização é considerável, 370τ , e que o esforço de controle tende a zero após a estabilização, consumindo apenas uma pequena quantidade de energia de $136,8 \pm 0,1 \text{ J}$ para manter o sistema na órbita desejada.

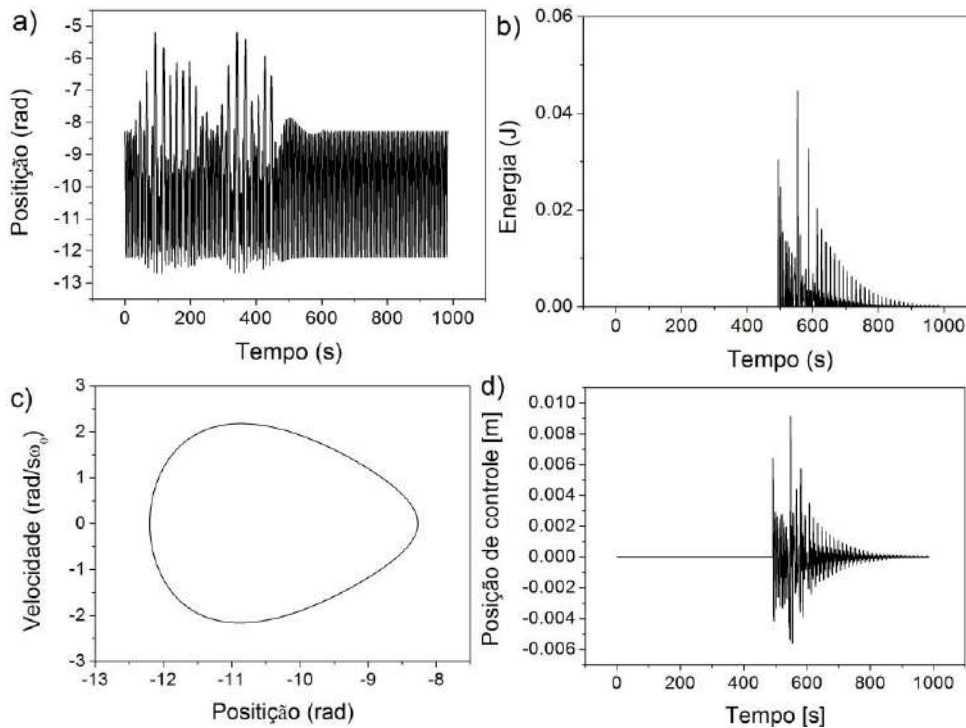


Figura 32: Controle da OPI de período-1. a) Resposta da posição no espaço. b) Força de Controle. c) Órbita estabilizada. d) Posição do atuador.

Para aplicações com recursos de energia limitados o consumo energético pelo controlador também pode ser um parâmetro de restrição ou ser outro parâmetro a ser otimizado. Desse modo, é necessário um maior entendimento sobre as ações dos parâmetros K e R na energia consumida e tempo para o controle do sistema.

A figura 33a mostra o valor do tempo de estabilização e a energia consumida para vários valores de R , com $K = 0,35$. Para $R < -0,18$ o sistema não pode ser estabilizado já que $\mu_{max} > 0$. O controlador com valores de R muito próximos a esse limite (zona destacada em laranja) requer um aumento no custo de energia para estabilização devido ao decréscimo da estabilidade da OPI ($\mu(R, K) \cong 0$). Porém, ao aumentar o valor de R , há a ocorrência de um vale no consumo de energia. Esse vale se deve a influência de um segundo fator, já que, para valores de R negativos, há a interferência destrutiva entre os estados defasados do sistema o que diminui o valor absoluto do ganho e conseqüentemente a energia consumida. Assim, inicialmente a influência da região de instabilidade predomina até ceder ao segundo fator por volta de $R = -0,1$ e quando R se aproxima de zero a interferência dos estados defasados também se anula fazendo a energia consumida aumentar novamente. Finalmente, ao se aproximar de $R = 0$, encontra-se o caso limite em que o ETDF se transforma no TDF. Nesse ponto, existe um pico de consumo. Para valores positivos de R , há uma competição entre o aumento da influência dos estados anteriores, o que aumenta o tempo para estabilização e o consumo, e a diminuição dos valores de μ_{max} (figura 33b) o que reduz o consumo. Desse modo, a influência desses dois fatores faz com que o consumo de energia chegue a um mínimo devido a valores mais negativos de μ_{max} até que aumente novamente tanto pelo aumento do tempo de estabilização como pelo aumento dos valores de μ_{max} após $R = 0,2$.

Na figura 33c o valor do tempo de estabilização e a energia consumida para vários valores de K com $R = 0,2$ são apresentados. Mais uma vez, observa-se que o controlador consegue estabilizar a OPI após $K = 0,33$ (figura 33d). Próximo a esses valores de K , o consumo de energia e o tempo de estabilização são altos devido ao valor de μ_{max} ser próximo de zero (região laranja). Ao aumentar o valor de K até onde o maior expoente de Floquet é mínimo (para um R constante), encontra-se o menor consumo de energia. Após esse ponto, o consumo de energia volta a aumentar. O tempo

para estabilização segue o mesmo comportamento do consumo de energia, porém apresenta seu mínimo após μ_{min} .

Finalmente, ao entender as influências dos parâmetros K e R no controlador, pode-se realizar uma escolha desses parâmetros a fim de atender as especificações de algum projeto e minimizar a energia consumida, ou até mesmo utilizar uma superfície de Pareto (INGHAM, 2016; SHUKLA; DEB, 2007) que consiste em uma maximização de uma função de custo que leva em consideração e pesa dois fatores diferentes que no caso podem ser a energia necessária para o controle e o valor do maior expoente de Floquet da OPI desejada. Além disso, deve-se perceber que a energia consumida e tempo para estabilização são propriedades não lineares com K e R necessitando de um estudo cuidadoso na otimização de um controlador ETDF.

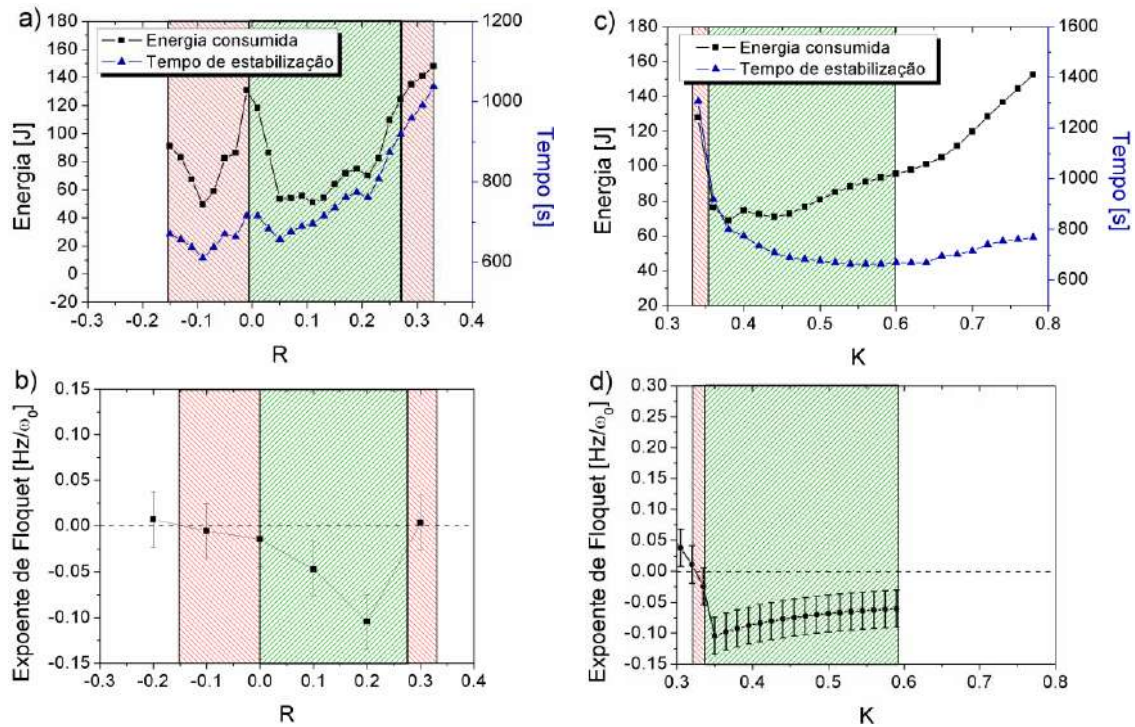


Figura 33: a, b) Comparação entre tempo e energia necessários para estabilização da OPI de período 1 para o mesmo valor de $K=0,4$ e valores diferentes de R , com os expoentes de Floquet. c, d) Comparação entre tempo e energia necessários para estabilização da OPI de período 1 para o mesmo valor de $R=0,1$ e valores diferentes de K , com os expoentes de Floquet. O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03$ Hz/ ω_0 .

Considere agora uma OPI de período-2. A análise dos expoentes de Floquet dessa OPI são indicadas na figura 34. Note que o comportamento dos expoentes com a

variação de R e K é parecido com os da OPI de período-1 (figura 30), indicando apenas pequenas diferenças. Os expoentes mínimos apresentam um valor bem menor que os da OPI de período-1 e uma mudança mais abrupta em sua derivada. Desse modo, os mínimos são caracterizados por vales mais proeminentes. O aparente deslocamento horizontal da curva entre os valores de $R = 0,2$ e $R = 0,3$ pode indicar uma saturação no valor mínimo acessível pelo controle dos expoentes de Floquet da órbita.

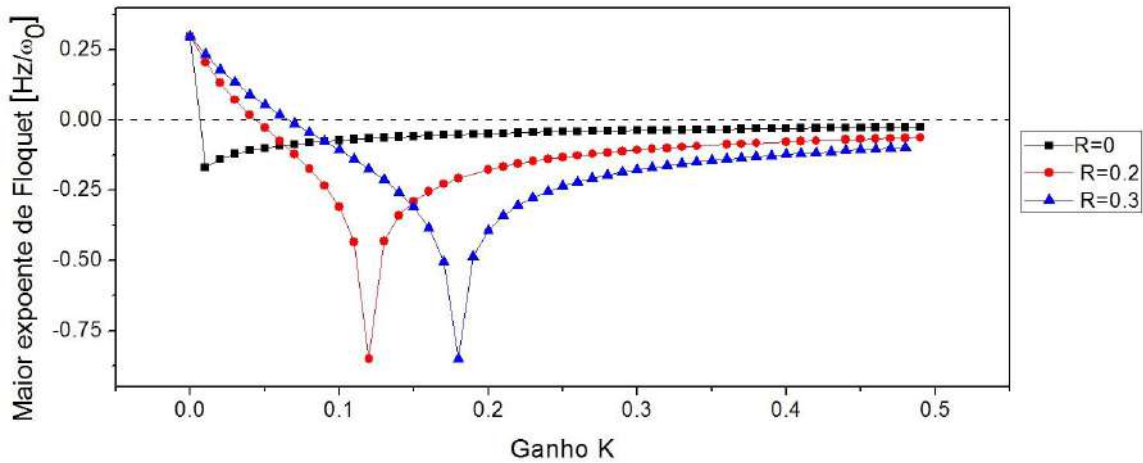


Figura 34: Parte real dos expoentes de Floquet da OPI de período-2 contra K para diferentes valores de R . O erro no valor dos multiplicadores é de $\pm 0,03 \text{ Hz}/\omega_0$.

A partir de agora realizam-se testes para seguir uma lei de controle, estabilizando diferentes órbitas. A lei de controle considera que o controlador é ligado após 75 períodos para estabilizar uma OPI de período-1; após 300 períodos passa-se a estabilizar uma órbita de período-3; finalmente, após 600 períodos faz-se a estabilização de uma órbita de período-2. A figura 35a mostra o resultado do controle apresentando a evolução no tempo do mapa de Poincaré e todos os parâmetros utilizados encontram-se na descrição da figura. Observa-se que o controlador é capaz de estabilizar todas as órbitas da lei de controle apresentando, para cada órbita, os seguintes expoentes de Floquet máximos com erro em seu módulo de $\pm 0,03$ em Hz/ω_0 : $\mu_{max1} = -0,07 + 0,48i$, $\mu_{max2} = -0,19$, $\mu_{max3} = -0,11$. Além disso, deve-se observar que existe um tempo até a estabilização da órbita de período-3. Isso é explicado, pois, os desvios da OPI de período 1 no controlador são baixos e demoram a se acumular até o ponto que o sinal de controle consegue transferir a solução do sistema para a OPI de período-3. A energia consumida exposta na figura 35b reforça a afirmação anterior mostrando que o

controle necessita de um tempo maior para sair de sua posição de equilíbrio próxima de consumo zero.

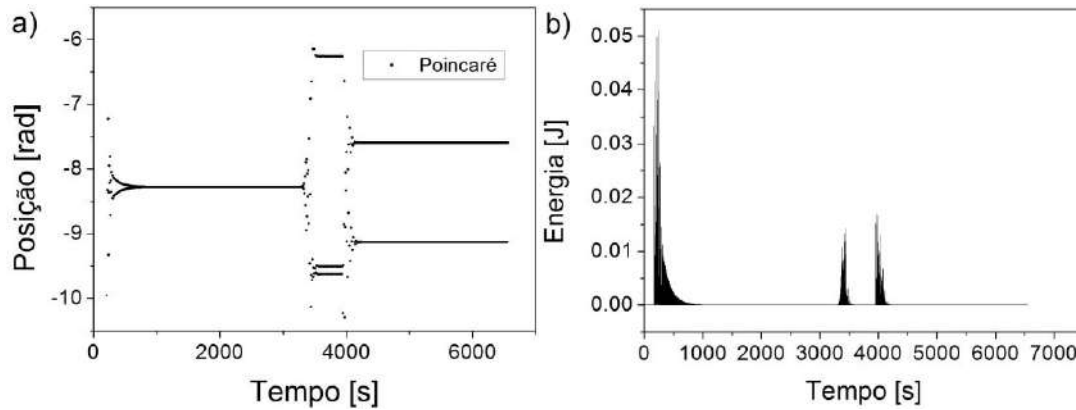


Figura 35: Controle mecânico de múltiplas órbitas. OPI – 1: $K = 0,3, R = 0,1$; OPI – 2: $K = 0,1, R = 0,1$; OPI – 3: $K = 0,1, R = 0,1$. a) Seção de Poincaré da posição com o tempo. b) Potência usada no controle com o tempo.

5.1.2. Estabilização de subharmônicos

Uma das características do método ETDF é estabilizar órbitas associadas a períodos submúltiplos do período da órbita desejada. Se por um lado, isso permite retirar o sistema da resposta caótica, por outro representa uma perda de eficácia no sentido de não estabilizar a órbita desejada. Desta forma, dado um período τ de uma órbita, o controlador ETDF pode estabilizar uma OPI com um período subharmônico da defasagem do controlador, ou seja, uma órbita de período τ_n , tal que $\tau = n\tau_n$, onde n é inteiro.

A figura 36 exemplifica um caso em que o controlador com os mesmos parâmetros ($K = 0,34, R = 0,1, \tau = 3T$) pode estabilizar duas órbitas diferentes dependendo do ponto inicial com seu sinal de controle indo a zero em ambos os casos. Dessa maneira, há duas bacias de atração coexistindo. Esse efeito pode ser contornado avaliando as bacias de atração de cada órbita o que demanda um alto custo computacional ou experimental. Outra forma de evitar esse problema é realizar uma análise dos valores de R e K que estabilizam apenas a órbita alvo. Assim, definem-se valores de R e K que somente deixem todos os expoentes de Floquet da órbita alvo terem partes reais menores que zero.

A figura 37 mostra a estabilização de duas órbitas diferentes com o controlador tendo parâmetros diferentes, porém o mesmo atraso $\tau = 3T$ e mesma condição inicial. Isso mostra que pode existir valores de K e R que estabilizam subharmônicos porém

não estabilizam a órbita alvo, reforçando a necessidade da análise de estabilidade de todas as órbitas subharmônicas e da órbita alvo pelos expoentes de Floquet.

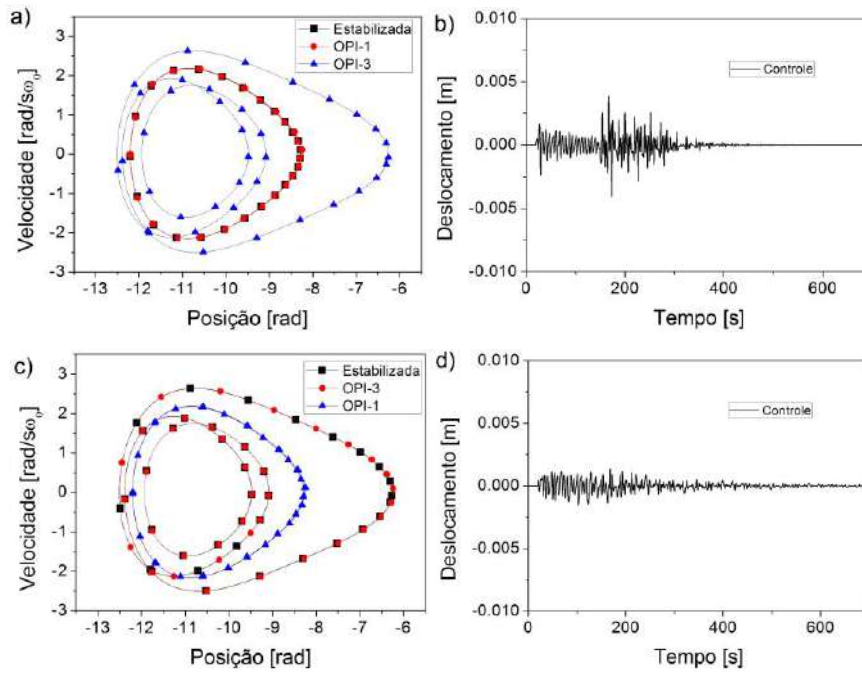


Figura 36: Exemplificação da estabilização de duas órbitas diferentes pelo método ETDF. a) Espaço de fase representando a OPI-1 estabilizada. b) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-1. c) Espaço de fase representando a OPI-3 estabilizada. d) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-3.

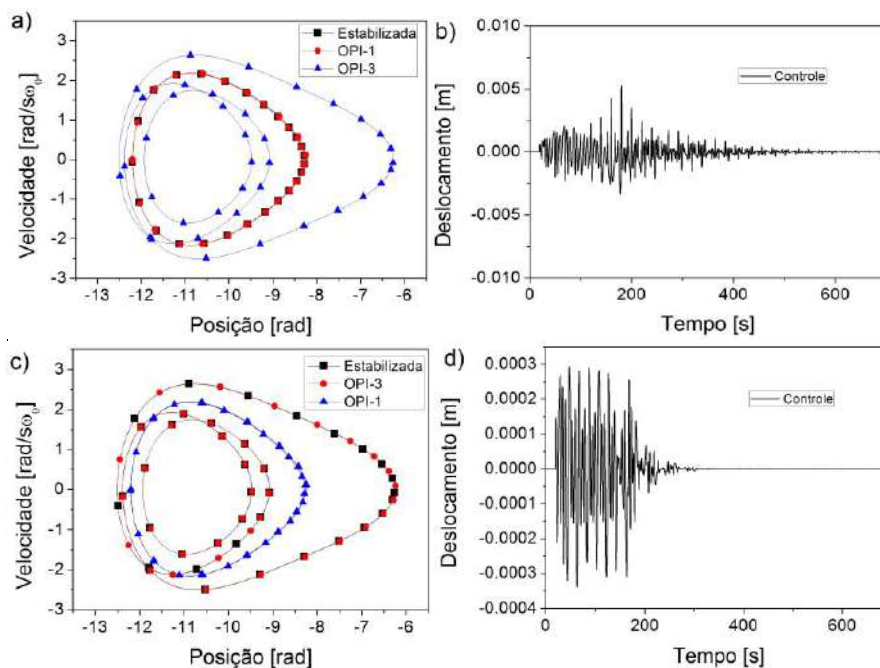


Figura 37: Exemplificação da estabilização de duas órbitas diferentes pelo método ETDF. a) Espaço de fase representando a OPI-1 estabilizada ($K = 0.5, R = 0.1$). b) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-1. c) Espaço de fase representando a OPI-3 estabilizada ($K = 0.3, R = 0.1$). d) Sinal de controle no tempo na estabilização da OPI-3.

5.2. Controlador térmico

O controlador térmico considera uma atuação através de uma fonte de corrente acoplada a uma das molas de SMA. Desse modo a força de controle, F_{thermo} , é descrita por:

$$F_{thermo} = a_m(T_1(t) - T_{ref})y \quad (44)$$

onde T_1 é a temperatura na mola de SMA acoplada ao motor de forçamento, T_{ref} é uma temperatura de referência.

A corrente aplicada na mola leva em consideração a equação da energia que considera que a resistência das diferentes fases da SMA são iguais e que não há alteração da condutividade elétrica, o que resulta uma resistência constante. Com isso, a equação da energia é descrita da seguinte forma:

$$\dot{T}_1 = -\frac{h}{c_p}(T_1 - T_\infty) + \frac{I_1^2 R_{ohn}}{c_p} \quad (45)$$

onde T_∞ é a temperatura do ambiente, I_1^2 é a corrente gerada na fonte, R_{ohn} é a resistência da mola de SMA, c_p é a capacidade térmica da mola e h é um coeficiente de dissipação térmica por convecção. Note que assume-se que a temperatura é homogênea em toda a mola de SMA. A corrente I_1^2 é escolhida para que a força aplicada pelo atuador térmico F_{thermo} seja a mais próxima possível à força calculada pelo método ETDF, $g(y, t)$. No entanto, existe uma restrição física que impede que essa igualdade seja obedecida para todo o tempo, especialmente relacionadas ao tempo de resfriamento. Além disso, existe uma restrição associada ao valor da corrente I_1 , limitada ao valor de 5 A. Desta forma, a equação 45 limita a temperatura mínima como a temperatura do ambiente e o tempo de resposta no resfriamento, definido pelo coeficiente $\frac{h}{c_p}$. Desta forma, existem restrições que impedem que $F_{thermo}(y, t) = g(y, t)$, que ocorre somente quando o controle necessita de um aquecimento moderado.

A energia consumida pelo controle térmico e dada por:

$$E_T = \int_0^t I_1^2 R_{ohn} dt' \quad (46)$$

Dois tipos de controle são tratados na sequência: controle direto, onde aplica-se uma variação de temperatura entre patamares convenientemente especificados; e controle ETDF, onde a variação da temperatura é avaliada a partir dos estados defasados.

5.2.1. Controle direto

A dinâmica dependente da temperatura pode ser explorada de forma direta considerando um controlador que altere a temperatura e com isso, modifique a dinâmica do sistema.

A figura 38 ilustra uma situação em que é utilizada uma variação direta de temperatura. O controle é simulado inicializando o sistema em $x_0 = (-6 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s})$, com frequência de forçamento 6,5 rad/s e com uma temperatura fixa a $T = 286,15 \text{ K}$ por 600 ciclos. Nessas condições, o sistema apresenta uma resposta caótica (atrator inferior do diagrama de bifurcação da figura 25b). Em seguida a temperatura é aumentada linearmente a uma taxa de 0,1 K/s até alcançar o valor de $T = 288,15 \text{ K}$ (temperatura próxima a T_A) obtendo-se assim uma resposta de período-1. Após mais 400 ciclos a temperatura é reduzida linearmente com a mesma taxa do aquecimento para a temperatura inicial, retornando o sistema a sua resposta caótica.

A figura 39 ilustra o teste realizado com diferentes atratores. O atrator caótico está associado a parte superior do diagrama de bifurcação da figura 24b. O controle é inicializado com o sistema em $x_0 = (6 \text{ rad}, 0 \text{ rad/s})$, com frequência de forçamento 6,5 rad/s e com uma temperatura fixa a $T = 285,15 \text{ K}$ por 600 ciclos, apresentando uma resposta caótica. Em seguida a temperatura é alterada linearmente a uma taxa de 0,1 K/s até alcançar o valor de $T = 287,15 \text{ K}$ (temperatura próxima a T_A) obtendo-se uma resposta de período-1. Após mais 400 ciclos a temperatura é reduzida linearmente com a mesma taxa do aquecimento para $T = 286,65 \text{ K}$, o que torna a resposta de período-1 instável (resposta por volta de 6 rad na figura 25f), fazendo com que o sistema altere sua resposta para uma outra órbita de período-1 em torno de 11 rad.

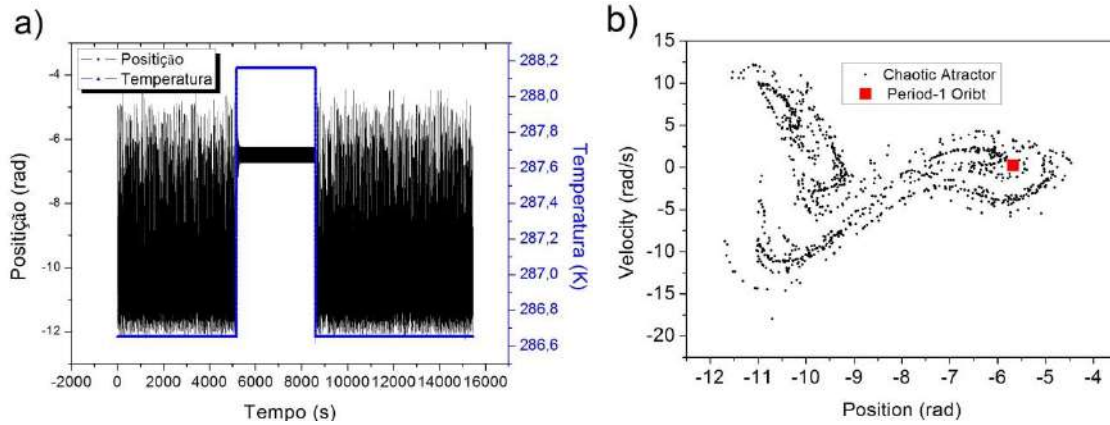


Figura 38: Respostas com o controle de temperatura. a) Ciclo caótico-periódico-caótico. b) Seção de Poincaré do atrator caótico e da órbita de período um.

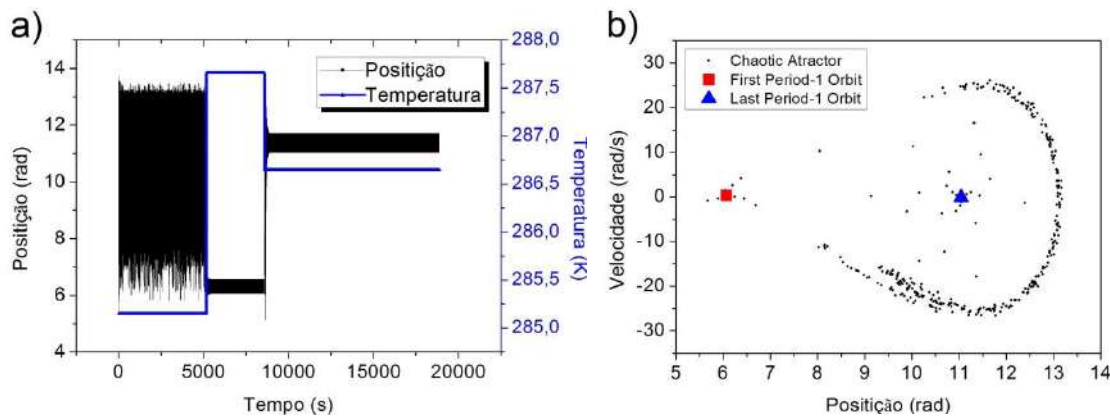


Figura 39: Respostas com o controle de temperatura. a) Ciclo caótico-periódico-periódico. b) Seção de Poincaré do atrator caótico e das órbitas de período um.

5.2.2. Controle ETDF

O controle ETDF por temperatura é aplicado ao sistema pêndulo-SMA considerando os seguintes parâmetros: $T_{ref} = 283,15 K$, $h = 2 W/K$, $c_p = 5 J/K$ e $T_{\infty} = 281,15 K$. Observe que a temperatura ambiente é 2 K mais baixa que a temperatura de referência com o objetivo de aumentar a janela de temperaturas acessíveis pelo atuador, já que T_{∞} limita a temperatura mínima.

Desse modo, devem ser consideradas duas correntes de controle: I_{ref} , que existe para manter a temperatura de referência T_{ref} e I_c , que realiza o controle propriamente dito. Assim, a corrente total na mola é dada por:

$$I_1 = I_{ref} + I_c \quad (47)$$

Considere então a estabilização da OPI de período-1 tratada no caso do controlador mecânico. A figura 40 mostra o controle por temperatura realizado para valores de $K = 0,4$ e $R = 0,3$. Esses valores foram escolhidos baseados na análise da estabilidade da OPI-1 do controlador mecânico. O maior expoente de Floquet para a OPI é então calculado com esses valores resultando em: $\mu_{max} = -0,05 + 0,07i \pm 0,03 \pm 0,03i \frac{Hz}{\omega_0}$. Observe que a OPI de período-1 é estabilizada com sucesso após um período de tempo de 326τ . Note que a potência necessária para manter a órbita no local é aproximadamente quatro vezes menor que a maioria dos picos de potência necessários para estabilizá-la. Isso difere do controlador mecânico que consome muito menos energia após a estabilização do que para estabilizar o sistema. Essa diferença no consumo de energia deve-se ao fato que o atuador térmico possui restrições físicas de funcionamento e, desta forma, não consegue acessar o valor da força de atuação calculada em todo o tempo. Isso implica em correções diferentes das do controle mecânico. As restrições ficam explícitas nas curvas de resfriamento e aquecimento no detalhe da figura 40d, em que as taxas de resfriamento nos dois picos seguem uma escala temporal igual entre elas e maior que a do aquecimento indicando que a atuação por temperatura não acompanha a lei de controle e apresenta um erro:

$$e(y, t) = F_{thermo}(y, t) - g(y, t) \quad (48)$$

Que pode ser melhor interpretado como uma porcentagem da força máxima de controle e é apresentado na figura 40e:

$$e(y, t)[\%] = \frac{F_{thermo}(y, t) - g(y, t)}{\max(g(y, t))} \quad (49)$$

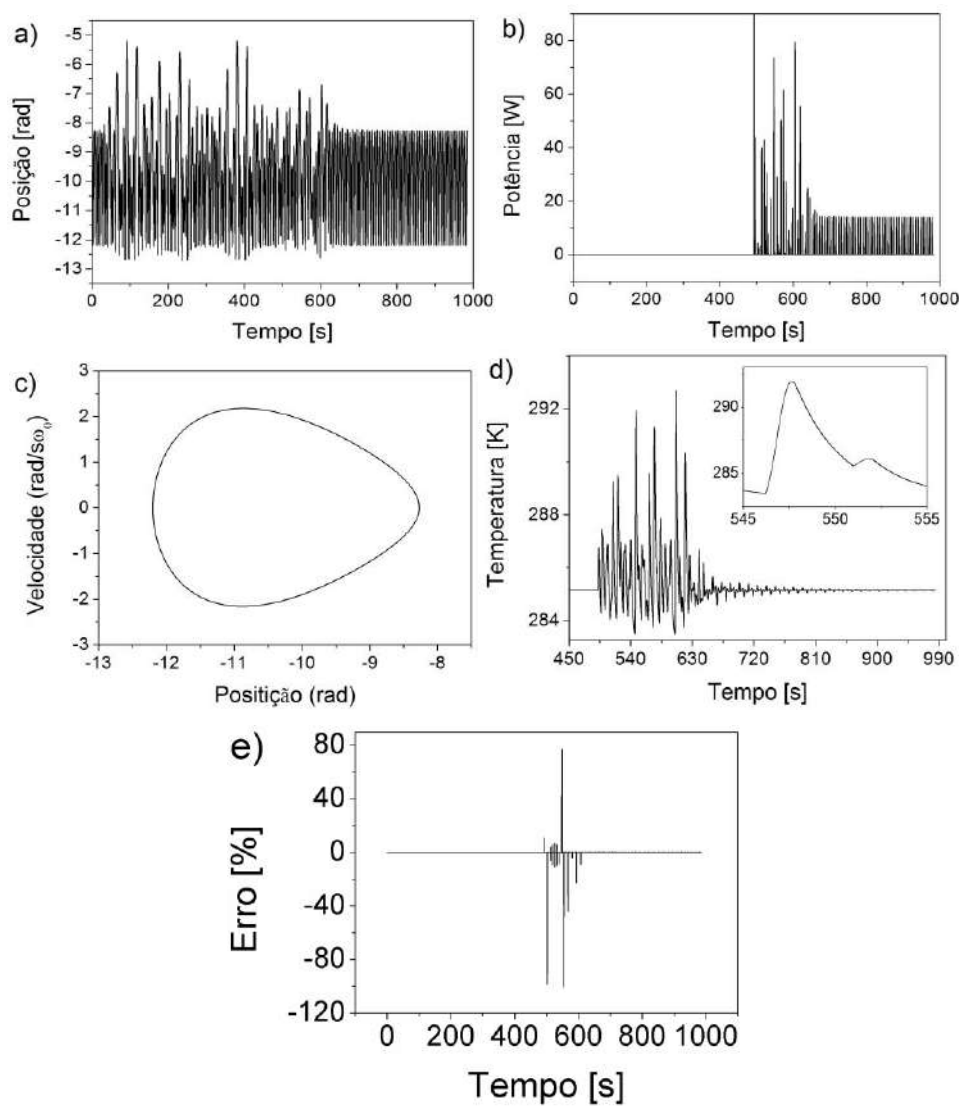


Figura 40: Controle da OPI de período-1 com temperatura. a) Resposta da posição no espaço. b) Potência consumida no controle descontada a potência para manter o sistema na temperatura de referência. c) Órbita estabilizada. d) Posição do atuador.

A mesma lei de controle utilizada para a estabilização de várias órbitas do modelo mecânico é utilizada para o modelo térmico. A ideia é ligar o controlador após 75 períodos e iniciar a estabilização de uma OPI de período-1; após 300 períodos estabiliza-se uma órbita de período-3; finalmente, após 600 períodos estabiliza-se uma órbita de período-2. A figura 41 mostra a resposta do sistema controlado seguindo essa lei de controle e os ganhos utilizados para a estabilização de cada OPI em sua descrição. Observa-se que, após um transiente, todas as órbitas são estabilizadas com o controlador de temperatura possuindo os seguintes expoentes de Floquet com erro em seu módulo de $\pm 0,03$ em unidades de Hz/ω_0 : $\mu_{max1} = -0,05 + 0,07i$, $\mu_{max2} = -0,15 - 0,23i$, $\mu_{max3} = -0,09 - 0,06i$. Deve-se destacar que, ao contrário do que ocorreu com

o controlador mecânico, não há problema na estabilização da órbita de período-3 após a OPI de período-1 devido aos maiores desvios da OPI causados pelo erro de controle. A figura 41b mostra a energia consumida na estabilização das órbitas da lei de controle. Chama a atenção os picos de potência no início da estabilização das OPIs de período-1 e de período-2 e o menor consumo de energia para estabilizar a órbita de período-3.

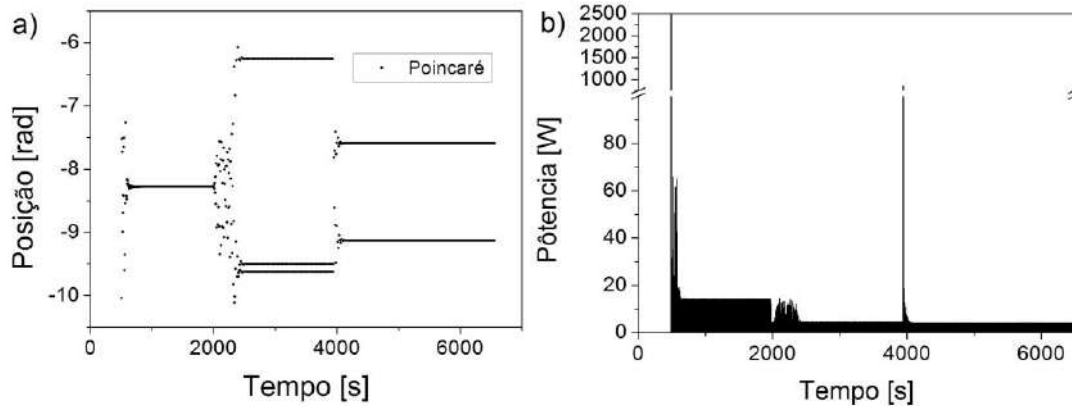


Figura 41: Controle térmico de múltiplas órbitas. OPI – 1: $K = 0,3, R = 0,1$; OPI – 2: $K = 0,1, R = 0,1$; OPI – 3: $K = 0,1, R = 0,1$. a) Seção de Poincaré da posição com o tempo. b) Potência usada no controle com o tempo.

Comparando os resultados das figura 41 e 35, observa-se que o controle térmico estabiliza mais facilmente a OPI de período múltiplo de uma OPI previamente estabilizada. Porém isso não apresenta uma vantagem sobre o controle mecânico, já que pode-se desligar o controlador na transição entre a OPI de período-1 e a de período-3 acumulando desvios suficientes para que o controlador possa agir.

O controlador térmico possui uma forte dependência da capacidade de dissipar energia, representada pelo coeficiente de convecção h . A partir de agora, investiga-se essa influência na estabilização de OPIs. A figura 42 mostra a atuação do controlador para diferentes valores do coeficiente de convecção. A figura 42a mostra o caso onde $h = 50 W/K$. Nessa condição, o controlador consegue rastrear a força de controle com erros menores que 10% da força máxima na maior parte do tempo. As figuras 42 c à h mostram os resultados para valores decrescentes de h . Nelas observa-se que a diminuição do valor de h causa um aumento nos erros do controlador enquanto o sistema é estabilizado na OPI alvo. Contudo, deve-se ressaltar que, após a estabilização da OPI, os erros no controlador parecem não variar com o parâmetro h , o que pode ser observado nos detalhes da figura 42.

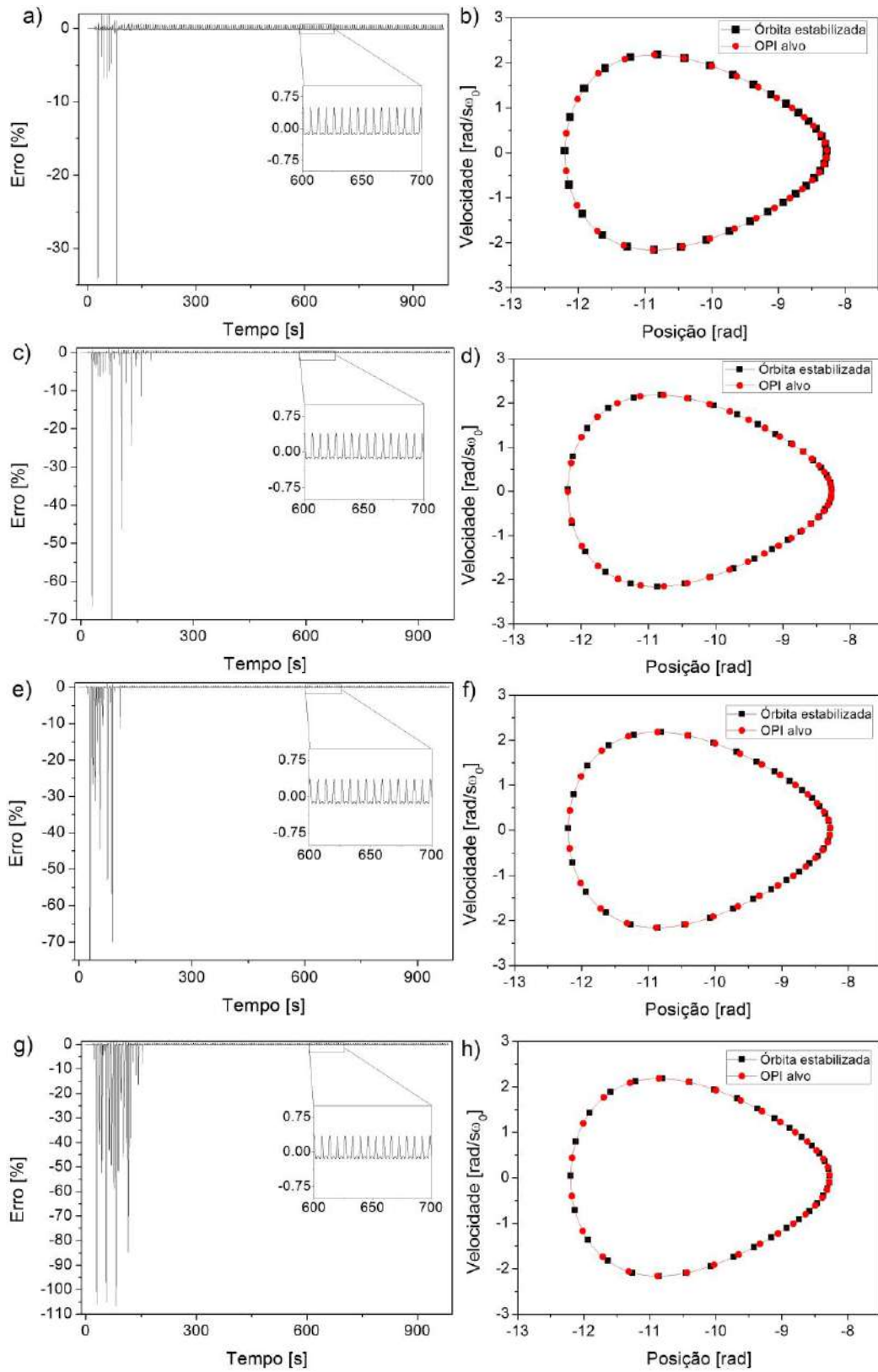


Figura 42: OPI-1 estabilizada com diferentes coeficientes de convecção (h) e erros associados ao controle em % do maior valor da força de controle ($K = 0,35, R = 0,2$).
a), b): $h = 50 W/K$ c), d): $h = 5 W/K$ e), f): $h = 2 W/K$ g), h): $h = 1,5 W/K$.

A figura 43 mostra um caso em que o valor de h é muito baixo para a OPI alvo ser estabilizada. O controlador força o sistema para uma órbita estável fora do comportamento caótico, apresentando erros maiores que 100% antes da estabilização. Após a estabilização, os erros e o controle vão a zero, pois a órbita é estável.

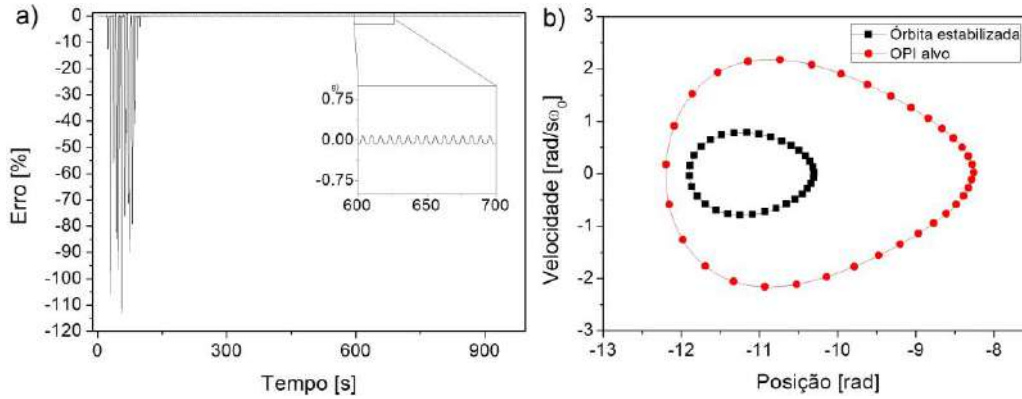


Figura 43: Caso em que $h = 1 \text{ W/K}$. O controlador apresenta erros muito altos e não consegue estabilizar o sistema na OPI desejada.

A figura 44 mostra os expoentes de Floquet da OPI de período-1 para vários valores de h . Observe que para $h = 1 \text{ W/K}$, a OPI se torna instável, já que $\mu_{\max} > 0$. A medida em que se aumenta o valor de h , os expoentes de Floquet tendem a diminuir seu valor real até atingirem um patamar cujo valor é igual ao expoente de Floquet do controle com o atuador mecânico $Re(\mu_{mec}) = 0,12 \pm 0,03 \text{ Hz}/\omega_0$.

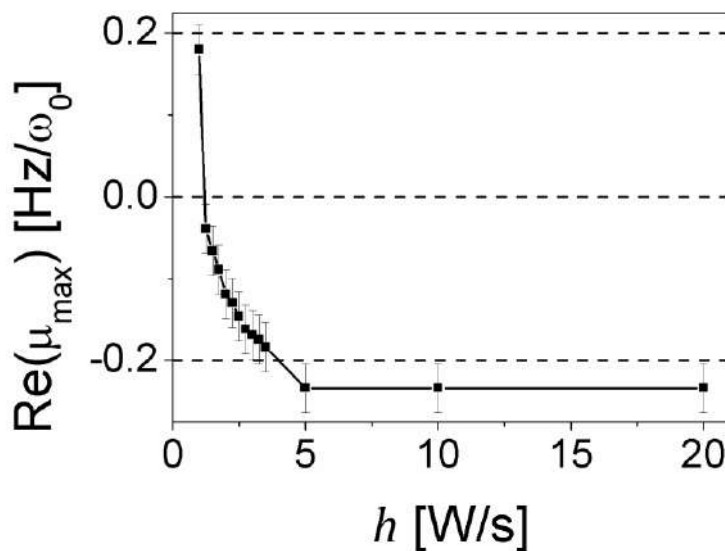


Figura 44: Parte real dos expoentes de Floquet da OPI-1 para vários valores de h .

6. CONCLUSÕES

Esse trabalho investiga o controle de caos em sistemas mecânicos adaptativos. Utiliza-se para isso um sistema pêndulo-SMA que possui um comportamento dinâmico rico e dois tipos de controladores: mecânico e térmico.

Na parte de controle mecânico explora-se como os expoentes de Floquet são úteis para a determinação da estabilidade de um sistema controlado pelo método ETDF assim como se elucida a dependência da estabilidade com os parâmetros K e R do controlador. Também é verificada a influência dos parâmetros de controle no consumo de energia e tempo de estabilização. As discussões dos resultados obtidos assim explicitam as propriedades do controle ETDF e os cuidados que devem ser tomados ao projetar esse tipo de controlador. Verifica-se a estabilização de OPIs diferentes dependendo do ponto inicial para os mesmos parâmetros do controlador ETDF e indica-se como solucionar esse problema através dos expoentes de Floquet.

No controlador térmico, o uso inédito de elementos com memória de forma para controle de caos proporciona as características adaptativas, dependentes da temperatura, para atuação. Várias restrições como limitações na corrente de aquecimento, temperaturas inacessíveis e escala de tempo do controlador são consideradas e analisadas e verifica-se a possibilidade do uso de SMA em controladores de caos. É explorada a influência da convecção térmica, representada pelo parâmetro h/c_p , no controle, identificando que, caso haja estabilização, o sinal pós-estabilização não se altera. É verificado também o cálculo dos expoentes de Floquet com erros na força de controle. São realizadas comparações entre o controlador térmico e mecânico identificando suas diferenças, como maior consumo de energia.

As possíveis aplicações possuem um grande leque como em sistemas de coleta de energia, sistema de controle de baixo consumo energético, coleta de energia termal através do SMA, dentre outros aspectos.

Também abre-se a possibilidade da combinação dos atuadores térmico e mecânico e a análise sobre melhores estratégias de atuação para um menor consumo de energia.

Finalmente esse texto pode servir de embasamento para futuras análises de outros controladores de caos como os baseados no OGY que têm uma frequência de variação menor e podem ser mais apropriados para atuação térmica, ou modificações do

ETDF (LEONOV, 2014; PYRAGAS; PYRAGAS, 2011), e como ponto de partida para testes de atuação por SMA. Além disso, ele contribui para o estudo da dinâmica de sistemas adaptativos com SMAs. O sistema também pode ser futuramente construído experimentalmente para validação de modelos constitutivos dinâmicos de SMAs e validação experimental de controladores de caos.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, R. A. A.; SAVI, M. A.; PACHECO, P. M. C. L. Experimental and numerical investigations of shape memory alloy helical springs. **Smart Materials and Structures**, v. 19, n. 2, p. 025008, 1 fev. 2010.

ALASTY, A.; SALARIEH, H. Controlling the chaos using fuzzy estimation of OGY and Pyragas controllers. **Chaos, Solutions and Fractals**, v. 26, p. 379–392, 2005.

ARECCHI, F. T. et al. The Control of Chaos: Theoretical Schemes And Experimental Realizations. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 8, n. 8, p. 1643–1655, 1998.

ASTON, P. J.; BIRD, C. M. Analysis of the Control of Chaos - Extending the Basin of Attraction. **Chaos, Solutions and Fractals**, v. 58, n. 23, p. 1413–1429, 1997.

AUERBACH, D. et al. Exploring chaotic motion through periodic orbits. **Physical Review Letters**, v. 58, n. 23, p. 2387, 1987.

AURICCHIO, F.; SACCO, E. A one-dimensional model for superelastic shape memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite. **Intranational Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 32, n. 6, p. 1101–1114, 1997.

BARBOSA, W. O. V. et al. Chaos control applied to piezoelectric vibration-based energy harvesting systems. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 224, n. 14–15, p. 2787–2801, nov. 2015.

BARRETO, E.; GREBOGI, C. Multiparameter Control of Chaos. **Physical Review E**, v. 54, n. 4, p. 3553–35557, 1995.

BATTELLI, F.; FEČKAN, M. Chaos in the beam equation. **Journal of Differential Equations**, v. 209, n. 1, p. 172–227, fev. 2005.

BATTELLI, F.; FECKAN, M. Chaos in Forced Impact Systems. **Discrete and Continuous Dynamical Systems- Series S**, v. 6, n. 4, p. 861–890, 2013.

BAYLY, P. V.; VIRGIN, L. N. Practical considerations in the control of chaos. **Physical Review E**, v. 50, n. 1, p. 604, 1994.

BERTRAN, A. Thermo-mechanical constitutive equations for the description of shape memory effects in alloys. **Nuclear Engineering and Design**, v. 74, n. 2, p. 173–182, 1982.

BESSA, W. M.; DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A. Chaos control using an adaptive fuzzy sliding mode controller with application to a nonlinear pendulum. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 42, n. 2, p. 784–791, 30 out. 2009.

BESSA, W. M.; DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A. Sliding mode control with adaptive fuzzy dead-zone compensation for uncertain chaotic systems. **Nonlinear Dynamics**, v. 70, n. 3, p. 1989–2001, nov. 2012.

- BESSA, W. M.; DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A. Adaptive fuzzy sliding mode control of smart structures. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 222, n. 7, p. 1541–1551, set. 2013.
- BOCCALETTI, S.; ARECCHI, F. T. Adaptive Control of Chaos. **Europhysics Letters**, v. 31, p. 127–132, 1995.
- BOROWIEC, M.; LITAK, G. Transition to chaos and escape phenomenon in two-degrees-of-freedom oscillator with a kinematic excitation. **Nonlinear Dynamics**, v. 70, n. 2, p. 1125–1133, out. 2012.
- BOUKABOU, A.; MEKIRCHA, N. Generalized chaos control and synchronization by nonlinear high-order approach. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 82, n. 11, p. 2268–2281, jul. 2012.
- BOWONG, S.; KAKMENI, F. M. M. Chaos control and duration time of a class of uncertain chaotic systems. **Physics Letters A**, v. 316, p. 206–217, 2003.
- BOYD, J. G.; LAGOUDAS, D. C. A thermodynamic constitutive model for the shape memory materials. Part I: the monolithic shape memory alloys. **International Journal of Plasticity**, v. 12, n. 6, p. 805–842, 1996.
- BRINSON, L. C. One dimensional constitutive behaviour of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, n. 4, p. 229–242, 1993.
- CAO, Y. J. A nonlinear adaptative approach to controlling chaotic oscillators. **Physics Letters A**, v. 270, p. 171–176, 2000.
- CHEN, G. Optimal control of chaotic systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 4, n. 2, p. 461–463, 1994.
- CHEN, G. On some controllability conditions for chaotic dynamics control. **Chaos, Solutions and Fractals**, v. 8, n. 9, p. 1461–1470, 1997.
- CHEN, G.; YU, X. On Time-Delayed Feedback Control of Chaotic Systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications**, v. 46, n. 6, p. 767–772, 1999.
- CHRISTINI, D. J.; COLLINS, J. J.; LINSAY, P. S. Experimental Control of High-dimensional Chaos: The Driven Double Pendulum. **Physical Review E**, v. 54, n. 5, p. 4824–4827, 1996.
- DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A. A multiparameter chaos control method based on OGY approach. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 40, n. 3, p. 1376–1390, 15 maio 2009.
- DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A. Comparative analysis of chaos control methods: A mechanical system case study. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 8, p. 1076–1089, out. 2011.

- DE PAULA, A. S.; SAVI, M. A.; PEREIRA-PINTO, F. H. I. Chaos and transient chaos in an experimental nonlinear pendulum. **Journal of Sound and Vibration**, v. 294, n. 3, p. 585–595, jun. 2006.
- DE SOUZA, S. L. T.; CALDAS, I. L. Calculation of Lyapunov exponents in systems with impacts. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 19, n. 3, p. 569–579, fev. 2004.
- DITTO, W. L.; SPANO, M. L.; LINDNER, J. F. Techniques for the control of chaos. **Physica D**, v. 86, p. 198–211, 1995.
- EL-BASSIOUNY, A. F. Vibration and chaos control of non-linear torsional vibrating systems. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 366, p. 167–186, jul. 2006.
- ENEMARK, S.; SANTOS, I. F.; SAVI, M. A. Modelling, Characterisation and Uncertainties of Stabilised Pseudoelastic Shape Memory Alloy Helical Springs. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, 2016.
- FALK, F. Model free-energy, mechanics and thermodynamics of shape memory alloys. **ACTA Metalurgica**, v. 28, n. 12, p. 1773–1780, 1980.
- FALK, F.; KONOPKA, P. Three-dimensional Landau theory describing the martensitic transformation of shape memory alloys. **Journal de Physique**, n. 2, p. 61–77, 1990.
- FEIGENBAUM, M. J. Universal behavior in nonlinear systems. **Los Alamos Science**, v. 1, p. 4–27, 1980.
- FEMAT, R.; RAMIREZ, J. A.; GONZÁLEZ, J. A strategy to control chaos in nonlinear driven oscillators with least prior knowledge. **Physics Letters A**, v. 224, p. 271–276, 1997.
- FOONG, C.-H. et al. Chaos caused by fatigue crack growth. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 16, n. 5, p. 651–659, 2003.
- FRADKOV, A. L.; EVANS, R. J. Control of chaos: Methods and applications in engineering. **Annual Reviews in Control**, v. 29, n. 1, p. 33–56, jan. 2005.
- FREMOND, M. Matériaux à Mémoire de Forme. **Comptes Rendus Mathématique**, v. 304, n. 7, p. 239–244, 1987.
- FREMOND, M. **Shape memory alloy: a thermomechanical macroscopic theory**. Nova York: Springer US, 1996.
- GALIAS, Z.; OGORZALEK, M. J. **Bang-bang control of chaotic systems**. . In: INTERNATIONAL WORKSHOP, NON LINEAR DYNAMICS OF ELECTRONICS SYSTEMS. Dublin: 1995
- GALVANETTO, U., SRIBRISGHELLA, L. MECHANICAL STICK-SLIP VIBRATIONS. **International journal of bifurcation and chaos in applied sciences and engineering**, v. 5, n. 3, p. 637–651, 1995.

- GLUCKMAN, B. J. et al. Tracking unstable periodic orbits in nonstationary high-dimensional chaotic systems: method and experiment. **Physical Review E**, v. 55, n. 5, p. 4935, 1997.
- GOLLUB, J. P.; BRUNNER, T. O.; DANLY, B. G. Periodicity and Chaos in Coupled Nonlinear Oscillators. **Science**, v. 200, p. 48–50, abr. 1978.
- GREBOGI, C.; LAI, Y. C. Controlling chaotic dynamical systems. **Systems and Control Letters**, v. 31, p. 307–312, 1997.
- HARTL, D. J. et al. Standardization of shape memory alloy test methods toward certification of aerospace applications. **Smart Materials and Structures**, v. 24, n. 8, p. 082001, 1 ago. 2015.
- HOOTON, E. W.; AMANN, A. Analytical Limitation for Time-Delayed Feedback Control in Autonomous Systems. **Physical Review Letters**, v. 109, n. 15, 9 out. 2012.
- HSIAO, Y. C.; TUNG, P. C. Global chaos control of non-autonomous systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 254, n. 1, p. 163–174, 2002.
- HUBINGER, B. et al. Controlling chaos experimentally in systems exhibiting large effective Lyapunov exponents. **Physical Review E**, v. 50, p. 932–948, 1994.
- HUNT, E. R. Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: the diode resonator. **Physical Review Letters**, v. 67, n. 15, p. 1953, 1991.
- INGHAM, S. **Pareto-optimality**. Enciclopédia. Disponível em: <<http://academic-eb-britannica.ez29.capes.proxy.ufrj.br/levels/collegiate/article/603014>>. Acesso em: 9 jan. 2017.
- JUST, W. et al. Mechanism of Time-Delayed Feedback Control. **Physical Review Letters**, v. 78, p. 203–206, 1997.
- KARLBERG, M. Investigation of a saddle node bifurcation due to loss of contact in preloaded spherical roller thrust bearings. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 41, n. 4, p. 1750–1759, ago. 2009.
- KIM, B. et al. An earthworm-like micro robot using shape memory alloy actuator. **Sensors and Actuators A: Physical**, v. 125, n. 2, p. 429–437, jan. 2006.
- KITTEL, A.; PARISI, J.; PYRAGAS, K. Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time. **Physics Letters A**, v. 198, p. 433–436, 1995.
- KITTEL, C. **Introduction to Solid State Physics**. 8. ed. [s.l.] Wiley, 2004. v. 1
- KORTE, R. J.; SCHOUTEN, J. C.; BLEEK, C. M. Experimental control of a chaotic pendulum with unknown dynamics using delay coordinates. **Physical Review E**, v. 52, n. 4, p. 3358–3365, 1995.
- KURIBAYASHI, K. et al. Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of Ni-rich TiNi shape memory alloy foil. **Materials Science and Engineering: A**, v. 419, n. 1–2, p. 131–137, mar. 2006.

LAGOUDAS, D. C. **Shape Memory Alloys**. 1. ed. Boston, MA: Springer US, 2008. v. 1

LAI, Y.-C.; TÉL, T.; GREBOGI, C. Stabilizing chaotic-scattering trajectories using control. **Physical Review E**, v. 48, n. 2, p. 709, 1993.

LEBEDEV, G. A. et al. **Thermal energy harvesting using shape memory/piezoelectric composites**. Solid-State Sensors, Actuators and Microsystems Conference (TRANSDUCERS), 2011 16th International. **Anais...IEEE**, 2011 Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=5969842>. Acesso em: 1 dez. 2015

LEIVA, A. M.; BRIOZZO, C. B. Control of chaos and fast periodic transfer orbits in the Earth–Moon CR3BP. **Acta Astronautica**, v. 58, n. 8, p. 379–386, abr. 2006.

LEONOV, G. A. Pyragas stabilizability via delayed feedback with periodic control gain. **Systems & Control Letters**, v. 69, p. 34–37, jul. 2014.

LESTER, B. T. et al. Review and perspectives: shape memory alloy composite systems. **Acta Mechanica**, v. 226, n. 12, p. 3907–3960, dez. 2015.

LI, S.; WU, Q.; ZHANG, Z. Bifurcation and chaos analysis of multistage planetary gear train. **Nonlinear Dynamics**, v. 75, n. 1–2, p. 217–233, jan. 2014.

LIANG, C.; ROGERS, C. A. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, n. 1, p. 207–234, 1990.

LIAO, T. L. Observer-based approach for controlling chaotic systems. **Physical Review E**, v. 57, n. 2, p. 1604–1610, 1998.

LITAK, G.; ALI, M.; SAHA, L. M. Pulsating feedback control for stabilizing unstable periodic orbits in a nonlinear oscillator with a nonsymmetric potential. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 17, p. 1797–2803, 2007.

LITAK, G.; SEN, A. K.; SYTA, A. Intermittent and chaotic vibrations in a regenerative cutting process. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 41, n. 4, p. 2115–2122, ago. 2009.

LITAK, G.; SYTA, A.; WIERCIGROCH, M. Identification of chaos in a cutting process by the 0–1 test. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 40, n. 5, p. 2095–2101, 15 jun. 2009.

LORENZ, E. N. Journal of the Atmospheric Sciences. **The Mechanics of Vacillation**, v. 20, p. 448–464, jun. 1963.

LUO, H. Y.; ABEL, E. W. A comparison of methods for the training of NiTi two-way shape memory alloy. **Smart Materials and Structures**, v. 16, n. 6, p. 2543–2549, 1 dez. 2007.

MACHADO, L. G.; LAGOUDAS, D. C.; SAVI, M. A. Lyapunov exponents estimation for hysteretic systems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 46, n. 6, p. 1269–1286, mar. 2009.

- MACHADO, L. G.; SAVI, M. A. Medical applications of shape memory alloys. **Brazilian Journal of Medical and Biological Research**, v. 36, n. 6, p. 683–691, 2003.
- MACHADO, L. G.; SAVI, M. A.; PACHECO, P. M. C. L. Nonlinear dynamics and chaos in coupled shape memory oscillators. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 19, p. 5139–5156, set. 2003.
- MACKEY, M. C.; GLASS, L. Oscillation and chaos in physiological control systems. **Science**, v. 197, n. 4300, p. 287–289, 1977.
- MAY, R. M. Biological Populations Obeying Difference Equations: Stable Points, Stable Cycles and Chaos. **Journal of Theoretical Biology**, v. 51, p. 511–524, 1975.
- MONROE, R. J.; SHAW, S. W. Nonlinear Transient Dynamics of Pendulum Torsional Vibration Absorbers—Part I: Theory. **Journal of Vibration and Acoustics**, v. 135, n. 1, 2013.
- MOON, F. C.; CUSUMANO, J.; HOLMES, P. J. Evidence for Homoclinic Orbits as a Precursor to Chaos in a Magnetic Pendulum. **Physica D**, v. 24, p. 383–390, 1987.
- MORI, H.; FUJISAKA, H. Transport and entropy production due to chaos or turbulence. **Physical Review E**, v. 63, n. 2, 17 jan. 2001.
- MUSZYNSKA, A.; GOLDMAN, P. Chaotic Responses of Unbalanced Rotor/Bearing/Stator Systems with Looseness or Rubs. **Chaos, Solutions & Fractals**, v. 5, p. 1683–1704, 1995.
- MYNENI, K. et al. New Method for the Control of Fast Chaotic Oscillations. **Physical Review Letters**, v. 83, p. 2175–2178, 1997.
- NAKAJIMA, H. On analytical properties of delayed feedback control of chaos. **Physica Letters A**, v. 232, p. 207–210, 1997.
- NAKAJIMA, H.; UEDA, Y. Limitation of Generalized Delayed Feedback Control. **Physica D**, v. 111, p. 143–150, 1998.
- NITSCHKE, G.; DRESSLER, U. Controlling chaotic dynamical systems using time delay coordinates. **Physica D**, v. 58, p. 153–164, 1992.
- OLSEN, L. F.; DEGN, H. Chaos in an enzyme reaction. **Nature**, v. 267, n. 5607, p. 177–178, 12 maio 1977.
- OSIPOV, G.; GLATZ, L.; TROGER, H. Suppressing Chaos in the Duffing Oscillator by Impulsive Actions. **Chaos, Solutions and Fractals**, v. 9, p. 307–321, 1998.
- OTANI, M.; JONES, A. J. **Guiding Chaotic Orbits**. Londres: Imperial College London, 3 jan. 1997.
- OTT, E.; GREBOGI, C.; YORKE, J. A. Controlling chaos. **Physical Review Letters**, v. 64, n. 11, p. 1196–1199, 1990.

PAIVA, A. et al. A constitutive model for shape memory alloys considering tensile–compressive asymmetry and plasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 42, n. 11–12, p. 3439–3457, jun. 2005.

PAIVA, A.; SAVI, M. A. An overview of constitutive models for shape memory alloys. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2006, p. 1–30, 2006.

PARK, K.; CHEN, Q.; LAI, Y.-C. Energy enhancement and chaos control in microelectromechanical systems. **Physical Review E**, v. 77, n. 2, 12 fev. 2008.

PETERKA, F. Bifurcation and Transition Phenomena in an Impact Oscillator. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 7, n. 10, p. 1635–1647, 1996.

PRICE, S. J.; KELERIS, J. P. Non-Linear Dynamics of AN Air Foil Forced to Oscillate in Dynamic Stall. **Journal of sound and vibration**, v. 194, n. 2, p. 265–283, 1996.

PYRAGAS, K. Continuous Control of Chaos by Self-Controlling Feedback. **Physics Letters A**, v. 170, p. 421–428, 1992.

PYRAGAS, K. Predictable chaos in slightly perturbed unpredictable chaotic systems. **Physics Letters A**, v. 181, p. 203–210, 1993.

PYRAGAS, K. Control of Chaos via an Unstable Delayed Feedback Controller. **Physical Review Letters**, v. 86, n. 11, p. 2265–2268, 12 mar. 2001.

PYRAGAS, K. Delayed Feedback Control of Chaos. **Philosophical Transactions of the Royal Society**, v. 364, p. 2309–2334, 2006.

PYRAGAS, K.; JUST, W. Global Properties in an Experimental Realization of Time-Delayed Feedback Control with an Unstable Control Loop. **Physical Review Letters**, v. 98, p. 2141–2144, 2007.

PYRAGAS, K.; TAMAŠEVIČIUS, A. Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback. **Physics Letters A**, v. 180, n. 1, p. 99–102, 1993.

PYRAGAS, V.; PYRAGAS, K. Adaptive modification of the delayed feedback control algorithm with a continuously varying time delay. **Physics Letters A**, v. 375, n. 44, p. 3866–3871, out. 2011.

RAND, R. H.; SHAW, S. W. THE TRANSITION TO CHAOS IN A SIMPLE MECHANICAL SYSTEM. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 24, n. 1, p. 41–56, 1989.

RITZ, T. et al. Chaos Control with Adjustable Control Times. **Chaos Solutions and Fractals**, v. 8, n. 9, p. 1559–1576, 1997.

ROBERTS, J. A. G.; QUISPTEL, G. R. W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems JAG Roberts “and GRW Quispelb. **Physics Letters**, v. 216, p. 63–177, 1992.

ROMEIRAS, F. J. et al. Controlling chaotic dynamical systems. **Physica D**, v. 58, p. 165–192, 1992.

- RÖSSLER, O. E. An Equation For Continuous Chaos. **Physics Letters**, v. 57 A, n. 5, p. 397–398, 27 maio 1976.
- SANJUÁN, M. A. F. S. **Recent progress in controlling chaos**. [s.l.] World Scientific, 2014. v. 16
- SAVI, M. A. et al. Numerical and experimental investigations of the nonlinear dynamics and chaos in non-smooth systems. **Journal of Sound and Vibration**, v. 301, n. 1–2, p. 59–73, mar. 2007.
- SAVI, M. A.; PACHECO, P. Chaos and hyperchaos in shape memory systems. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 12, n. 03, p. 645–657, 2002.
- SAVI, M. A.; PAIVA, A. Describing internal subloops due to incomplete phase transformation in shape memory alloys. **Archive of Applied Mechanics**, v. 74, n. 9, p. 637–647, 2005.
- SAVI, M. A.; PEREIRA-PINTO, F. H. I.; FERREIRA, A. M. Chaos control in mechanical systems. **Shock and Vibration**, v. 13, n. 4–5, p. 301–314, 2006.
- SCHIKORA, S.; WÜNSCHE, H.-J.; HENNEBERGER, F. All-optical noninvasive chaos control of a semiconductor laser. **Physical Review E**, v. 78, n. 2, 15 ago. 2008.
- SHUKLA, P. K.; DEB, K. On finding multiple Pareto-optimal solutions using classical and evolutionary generating methods. **European Journal of Operational Research**, v. 181, n. 3, p. 1630–1652, set. 2007.
- SILVA, L. L. et al. Synergistic Use of Smart Materials for Vibration-Based Energy Harvesting. **European Physical Journal – Special Topics**, v. 224, n. 14–15, p. 3005–3012, 2015.
- SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, n. 3, p. 649–670, 1986.
- SOCOLAR, J. E. S.; SUKOW, D. W.; GAUTHIER, D. J. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems. **Physical Review E**, v. 50, n. 4, p. 3245–3248, 1994.
- SOLAK, E.; MOGUL, O.; ERSOY, U. Observer-based control of a class of chaotic systems. **Physics Letters A**, v. 279, p. 47–55, 2001.
- SOUZA, A. C.; MAMIYA, E.; ZOUAIN, N. Three-dimensional model for solids undergoing stress-induced phase transformations. **European Journal of Mechanics - A Solids**, v. 17, n. 5, p. 789–806, 1998.
- SPROTT, J. C. A simple chaotic delay differential equation. **Physics Letters A**, v. 366, p. 397–402, 2007.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution—a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of global optimization**, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

SUZUKI, Y. et al. Intermittent control with ankle, hip, and mixed strategies during quiet standing: A theoretical proposal based on a double inverted pendulum model. **Journal of Theoretical Biology**, v. 310, p. 55–79, out. 2012.

TANAKA, K.; NAGAKI, S. Thermomechanical description of materials with internal variables in the process of phase transitions. **Ingenieur - Archive**, v. 51, p. 287–299, 1982.

TIAN, L. et al. On a new time-delayed feedback control of chaotic systems. **Chaos Solutions and Fractals**, 2007.

TIAN, Y. P.; YU, X. Stabilizing unstable periodic orbits of chaotic systems via an optimal principle. **Journal of the Franklin Institute**, v. 337, p. 771–779, 2000.

TRUEBA, J. L.; BALTANÁS, J. P.; SANJUÁN, M. A. A generalized perturbed pendulum. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 15, n. 5, p. 911–924, 2003.

USHIO, T. Limitation of de layed feedback control in nonlinear discrete-time systems. **IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications**, v. 43, p. 815–816, 1996.

VANWIGGEREN, G. D.; ROY, R. Communication with Chaotic Lasers. **Science**, v. 279, n. 5354, p. 1198–1200, 20 fev. 1998.

WANG, Y. C. et al. **Chaos in MEMS, Parameter Estimation and Its Potential Application**. . In: IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS-I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS. 1998Disponível em: <<http://ieeexplore.ieee.org/ielx4/81/15711/00728856.pdf?tp=&arnumber=728856&isnumber=15711>>. Acesso em: 11 nov. 2015

WOLF, A. et al. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series. **Physica D**, v. 16, p. 285–317, 1985.

YAGASAKI, K. Extension of a chaos control method to unstable trajectories on infinite- or finite-time intervals: Experimental verification. **Physics Letters A**, v. 368, p. 222–226, 2007.

YAGASAKI, K.; UOZUMI, T. Controlling chaos using nonlinear approximations and delay coordinate embedding. **Physics Letters A**, v. 247, p. 129–139, 1998.

YAN, Z. W. et al. Remarkable improvement of shape memory effect in a Co–31Ni–3Si alloy by training treatment. **Materials Science and Engineering: A**, v. 618, p. 41–45, nov. 2014.

YANG, T.; YANG, C. M.; YANG, L. B. Control of Rossler System to Periodic Motion Using Impulsive Control Methods. **Physics Letters A**, v. 232, p. 356–361, 1997.

YU, X. et al. An Invariant-Manifold-Based Method for Chaos Control. **IEEE Transactions on Circuits and Systems - I: Fundamental Theory and Applications**, v. 48, n. 8, p. 930–937, 2001.

APÊNDICE

A. Cálculo da Jacobiana e matriz do observador para os multiplicadores de Floquet

A.1. Controle mecânico

O sistema pendular pode ser expresso como:

$$\begin{bmatrix} \phi'_x \\ \phi'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_y \\ -\frac{\vartheta}{Iw_0} \phi_y - \frac{\mu}{mgD} \text{sign}(\phi_y) - \frac{\sin(\phi_x)}{2} + \frac{d}{2mgD} (F_m - s_m) \end{bmatrix} = \Phi' \quad (A.1)$$

Onde $\phi = \phi_x$, e $\phi' = \phi_y$. Desse modo pode-se retirar a Jacobiana do sistema obtendo-se:

$$Df = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\cos(\phi_x)}{2} + \frac{d}{2mgD} (\delta F_m - \delta s_m) & -\frac{\vartheta}{Iw_0} \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

Onde:

$$\delta F_m = -\frac{d}{2} (a_m(T - T_M) - 3b_m y^2 + \frac{5b_m^2}{4a_m(T_A - T_M)} y^4) \quad (A.3)$$

$$\delta s_m = \frac{d}{2} (a_m(T - T_M) \frac{d}{2} - 3b_m \left(\frac{\phi_x d}{2}\right)^2 + \frac{5b_m^2}{4a_m(T_A - T_M)} \left(\frac{\phi_x d}{2}\right)^4) \quad (A.4)$$

Já a matriz de controle torna-se:

$$Dg = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

A.2. Controle térmico

Adiciona-se para o controle térmico a temperatura como uma variável do sistema. Além disso, o controle define o tempo característico da equação térmica, ou seja, com o aquecimento o tempo característico do sistema é definido como o tempo necessário para a corrente aquecer o fio de SMA de uma temperatura T_i a uma temperatura T_f esse tempo pode ser definido como dt . Já no resfriamento o sistema térmico é limitado pela convecção tendo um tempo característico dado por c_p/h . Desse modo têm-se a equação para:

$$\begin{bmatrix} \phi'_x \\ \phi'_y \\ \phi'_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_y \\ -\frac{\vartheta}{Iw_0} \phi_y - \frac{\mu}{mgD} \text{sign}(\phi_y) - \frac{\sin(\phi_x)}{2} + \frac{d}{2mgD} (F_m(\phi_T) - s_m) \\ -\frac{h}{c_p} (\phi_T - T_\infty) + \frac{I_1^2 R}{c_p} \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

Onde $\phi_T = T$, e:

$$F_m(\phi_T) = (a_m(\phi_T - T_M)y - b_my^3 + \frac{b_m^2}{4a_m(T_A - T_M)}y^5) \quad (A.7)$$

$$I^2 = \begin{cases} h \frac{\phi_T - T_\infty}{R} + \left(\frac{2F_c mgD}{da_m y} - \phi_T + T_{ref} \right) \frac{c_p}{Rdt} se > 0 \\ 0 se \leq 0 \end{cases} \quad (A.8)$$

Assim a Jacobiana do sistema se torna:

$$Df_T = \begin{cases} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\cos(\phi_x)}{2} + \frac{d}{2mgD}(\delta F_m - \delta s_m) & -\frac{\vartheta}{Iw_0} & \frac{da_m}{2mgD} \left(y - \frac{\phi_x d}{2} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{1}{dt} \end{array} \right] se I^2 > 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\cos(\phi_x)}{2} + \frac{d}{2mgD}(\delta F_m - \delta s_m) & -\frac{\vartheta}{Iw_0} & \frac{da_m}{2mgD} \left(y - \frac{\phi_x d}{2} \right) \\ 0 & 0 & -\frac{h}{c_p} \end{array} \right] se I^2 = 0 \end{cases} \quad (A.9)$$

E a matriz de controle:

$$Dg = \begin{cases} \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\phi_y mgD}{a_m y^2} & -\frac{2mgD}{dt da_m y} & 0 \end{array} \right] se I^2 > 0 \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] se I^2 = 0 \end{cases} \quad (A.10)$$

Finalmente tendo-se o valor de $F_c(t)$ e a orbita $\Phi(t)$ pode-se calcular seus multiplicadores de Floquet e saber se uma orbita é estável.

A.3. Multiplicadores de Floquet considerando o controlador como uma variável do sistema

Uma alternativa para o calculo dos multiplicadores de Floquet de uma OPI é realizar a evolução dinâmica do próprio controle, ou seja, considerando o sistema de controle como uma variável dinâmica. De um modo geral pode-se escrever a força de controle do ETDF da forma:

$$F_c(t) = \frac{d}{dt} \left(K \left((1-R) \sum_{n=0}^{\infty} R^n y(t - \tau n) - y(t) \right) \right) \quad (A.11)$$

Considerando que $y(t) = e^{-\mu t} \rho(t) + y_0(t)$ onde $y_0(t)$ é definido pela OPI a ser controlada e $e^{-\mu t} \rho(t)$ é um pequeno desvio, pode-se expressar F como:

$$F_c(t) = \frac{K(1-R)\rho(t)}{1 - R e^{-\mu \tau}} \quad (A.12)$$

Assim para obter $F_c(t)$ basta saber $\rho(t)$. Usando que $\rho(t)e^{\mu t} = C\delta x(t)$ e que $\delta\dot{x}(t) = Df(x, t)\delta x(t)$ pode-se obter:

$$\dot{\rho}(t) = \mu\rho(t) + C_0A(t)\delta x(t) \quad (A.13)$$

onde, C_0 é a matriz formada por: $C_{0ij} = e^{-\mu_i t} C_j$. Essa formulação mais ampla permite analisar a estabilidade de controles que não vão à zero após a estabilização ou que tenham erros periódicos inseridos, além de necessitar apenas um valor inicial para a força de controle $F_c(t_0)$.