Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

COMPARAÇÃO DA PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE RESERVATÓRIOS DE ÓLEO PRODUZINDO SOB INFLUXO DE ÁGUA UTILIZANDO A EQUAÇÃO DO BALANÇO DE MATERIAIS E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Ivan Landim Frota Leitão Junior

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Petróleo da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Paulo Couto
Abelardo de Sá Neto

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO, 2010

COMPARAÇÃO DA PREVISÃO DO COMPORTAMENTO DE RESERVATÓRIOS DE ÓLEO PRODUZINDO SOB INFLUXO DE ÁGUA UTILIZANDO A EQUAÇÃO DO BALANÇO DE MATERIAIS E SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Ivan Landim Frota Leitão Junior

PROJETO FINAL SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DO PETRÓLEO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE INTEGRANTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DO PETRÓLEO.

Aprovado por:

_____
Prof. Paulo Couto, Dr. Eng.
(Orientador)

_____
Prof. Abelardo de Sá Neto, Ph.D.
(Co-orientador)

_____
Prof. Armando Celestino Gonçalves Neto, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO, 2010

Leitão Junior, Ivan Landim Frota

Comparação da Previsão do Comportamento de Reservatórios de Óleo Produzindo Sob Influxo de Água Utilizando a Equação do Balanço de Materiais e Simulação Numérica / Ivan Landim Frota Leitão Junior. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2010.

XIII, 39p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Paulo Couto, Abelardo de Sá Neto

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia do Petróleo, 2010.

Referencias Bibliográficas: p. 39.

1. Modelagem de Reservatórios. 2. Reservatório com Influxo de Água. 3. Comparação com Modelagem computacional. I. Couto, Paulo *et al*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia do Petróleo. III. Titulo.

Agradecimentos

À minha família, por acreditar em mim todo o momento e sempre me apoiar, mesmo quando discordavam da decisão.

À Computer Modeling Group (CMG – Canadá), pelo suporte dado a este trabalho através da cessão da suíte de softwares de simulação de reservatórios.

Aos professores Paulo Couto e Abelardo Sá, por estarem sempre a disposição, terem paciência e confiança em mim e por todos os ensinamentos que me foram passados.

À todos da turma de Engenharia de Petróleo, por terem feito os cinco anos da faculdade serem inesquecíveis, por tudo que me ensinaram, não só sobre engenharia, e ainda vão ensinar.

À todos que participaram do CR, por tudo que estudamos, decoramos e esquecemos juntos, por me tornarem a pessoa que sou hoje e por me ensinarem o companheirismo.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Petróleo.

Comparação da Previsão do Comportamento de Reservatórios de Óleo Produzindo Sob Influxo de Água Utilizando a Equação do Balanço de Materiais e Simulação Numérica

Ivan Landim Frota Leitão Junior

Fevereiro/2010

Orientadores: Paulo Couto
Abelardo de Sá Neto

Curso: Engenharia do Petróleo

No Brasil a quantidade de reservatórios que produzem sob influxo de água é grande. É função do engenheiro de reservatórios realizar a análise dos mesmos para previsão do comportamento. Sendo assim, esse trabalho tem como objetivo analisar as equações de previsão de produção para um reservatório com mecanismo de influxo de água, verificando sua consistência entre elas e em comparação com um caso próximo ao real. Para criação desse caso foi utilizado o simulador comercial IMEX da CMG (Computer Modeling Group Canada). A versão utilizada é a 2008.10. Os resultados encontrados são debatidos de maneira a analisar as limitações do modelo de cálculo.

Palavras-chave: Equação do Balanço de Materiais, Influxo de Água, Previsão da Produção, Simulação numérica.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Comparison of Production Forecast of a Oil Reservoir Producing by Water Influx Using Material Balance Equation and Numerical Simulation

Ivan Landim Frota Leitão Junior

February/2010

Advisor: Paulo Couto
Abelardo de Sá Neto

Course: Petroleum Engineering

In Brazil there is a large number of reservoirs producing by water influx. The reservoir engineer is the responsible for production forecast. This work has the objective to analyze the equations of production forecast for water influx reservoir, verifying there consistency with themselves and with a case near to real. For this case it was used the IMEX of CMG (Computer Modeling Group Canada). The version used is the 2008.10. The results are discussed analyzing the limitations of the math model.

Keywords: Material Balance Equation, Water Influx, Production Forecast, Numeric Simulation.

Sumário

Lista de Figuras ..... **ix**

Lista de Tabelas ..... **xi**

Nomenclatura ..... **xii**

1. Introdução **1**

1.1. Relevância do tema 1

1.2. Objetivos e metodologia 1

1.3. Estrutura 2

2. Engenharia de Reservatórios **3**

2.1. Mecanismos de Produção de Reservatórios 3

2.1.1. Mecanismo de Influxo de Água 3

2.2. Equação de Balanço de Materiais 5

2.3. Cálculo do Influxo de Água 6

2.3.1. Modelo de van Everdingen & Hurst 6

2.3.1.1. Equação da Difusividade Hidráulica 7

2.3.1.2. Influxo de Água 10

2.3.1.3. Superposição de Efeitos 11

2.3.2. Modelo de Carter-Tracy 12

2.3.3. Comparação entre Modelos 12

2.3.4. Previsão da Diferença de Pressão no Contato 15

3. Simulação Numérica no IMEX **17**

3.1. Simulador 17

3.2. Builder 17

3.2.1. Reservatório 17

3.2.2. Componentes 19

3.2.3. Interação Rocha-Fluido 21

3.2.4. Condições Iniciais 23

3.2.5. Poços e Recorrentes 23

3.3. IMEX 23

3.4. Results 23

4. Comparação Entre a EBM e a Simulação Numérica 26

4.1. Dados de Entrada 26

4.2. Cálculos da EBM do Reservatório 29

4.3. Simulação do Reservatório 32

4.4. Comparação 35

5. Conclusões 37

6. Referências Bibliográficas 39

Lista de Figuras

Figura 2.1 - Reservatório com Mecanismo de Influxo de Água (Rosa *et al.*, 2006)..... 4

Figura 2.2 - Modelo de Aqüífero Radial (Rosa *et al.*, 2006) 7

Figura 2.3 - Gráfico da pressão adimensional em função do raio e do tempo adimensionais. ($r_{eD} = 10$)..... 9

Figura 2.4 - Gráfico do influxo adimensional em função do tempo adimensional para diferentes raios do aqüífero. 11

Figura 2.5 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 21,91$..... 13

Figura 2.6 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 4,382$. 14

Figura 2.7 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 1,0955$. 14

Figura 2.8 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 0,4382$ 15

Figura 3.1 – Vista superior de um reservatório com Grid Top 18

Figura 3.2 – Vista tridimensional de um reservatório com Grid Top..... 18

Figura 3.3 – Gráfico da razão de solubilidade (R_s) e do fator volume-formação do óleo (B_o) em função da pressão (p)..... 19

Figura 3.4 – Gráfico do fator de expansão do gás (E_g) em função da pressão (p)..... 20

Figura 3.5 – Gráfico das viscosidades do óleo e do gás (μ_o e μ_g) em função da pressão (p) 20

Figura 3.6 – Gráfico da permeabilidade relativa da água (k_{rw}) e do óleo em relação à água (k_{row}) em função da saturação de água (S_w) 21

Figura 3.7 – Gráfico da permeabilidade relativa do gás (k_{rg}) e do óleo em relação ao gás (k_{rog}) em função da saturação de líquido (S_l)..... 22

Figura 3.8 – Gráfico de 3 fases com a permeabilidade relativa do óleo (k_{ro}) em função das saturações (S_w, S_g e S_o) 22
Figura 3.9 – Exemplo de gráfico do Results Graph..... 24
Figura 3.10 – Exemplo de gráfico do Results 3D..... 25
Figura 4.1 – Vista superior do modelo de comparação com Grid Top..... 27
Figura 4.2 – Vista tridimensional do modelo de comparação com Grid Top 27
Figura 4.3 – Gráfico da vazão obtida pelo método de cálculo 32
Figura 4.4 – Gráfico da vazão obtida pelo IMEX 35
Figura 4.5 – Gráfico de vazões para comparação entre métodos 36

Lista de Tabelas

Tabela 2-1 – Variação da pressão com o tempo 13
Tabela 4-1 – Dados utilizados na solução da EBM 28
Tabela 4-2 – Tabela PVT 29
Tabela 4-3 – Resultados da EBM 31
Tabela 4-4 – Resultados da simulação numérica 34

Nomenclatura

B	Fator volume-formação	[]
c	Compressibilidade	[(kgf/cm^2)$^{-1}$]
d_g	Densidade do gás	[]
E	Expansão em solução	[]
F	Total de fluidos produzidos e injetados	[m^3]
G	Volume de gás	[m^3]
h	Espessura	[m]
$IP_{inicial}$	Índice de produtividade inicial	[mD]
k	Permeabilidade	[mD]
k_r	Permeabilidade relativa	[]
m	Quociente entre volume original da capa de gás e de óleo	[]
N	Volume de óleo total	[m^3]
p	Pressão	[kgf/cm^2]
p_b	Pressão de bolha	[kgf/cm^2]
p_b	Pressão mínima do poço	[kgf/cm^2]
q	Vazão	[m^3/dia]
R	Razão de solubilidade	[]
r	Coordenada radial	[m]
W	Volume de água	[m^3]
W_e	Volume do influxo de água	[m^3]
S	Saturação	[m]
T	Temperatura	[K]

t Tempo .....[dia]

U Constante de influxo de água do aqüífero..... [$m^3/(kgf/cm^2)$]

Símbolos Gregos:

Δ Diferença..... [psi]

ϕ Porosidade .....[]

μ Viscosidade .....[cp]

ρ Massa específica .....[ppg]

Subscritos:

$(\ )_D$ Adimensional

$(\ )_e$ Aquífero

$(\ )_i$ Condições Iniciais

$(\ )_w$ Fase água

$(\ )_g$ Fase gás

$(\ )_o$ Fase óleo

$(\ )_f$ Fase formação

$(\ )_{inj}$ Injetado

$(\ )_p$ Produzido

$(\ )_t$ Total

1. Introdução

1.1. Relevância do tema

Atualmente, o mundo se encontra em uma grande dependência das energias fósseis, principalmente o petróleo. Para melhorar obter essa energia e possibilitar o desenvolvimento é necessário o estudo aprofundado de suas formas de produção para prevê-las e otimizá-las.

No setor de E&P existe uma grande incerteza sobre a produção total dos poços. Sendo assim é de grande importância qualquer informação que possibilite a obtenção de parâmetros nos reservatórios de óleo. No Brasil um grande número de reservatórios tem como mecanismo o influxo de água, tornando-se essencial seu estudo. O desenvolvimento destas técnicas pode trazer desenvolvimento para a área e um aumento na produção de poços desse tipo.

Uma das funções do engenheiro de petróleo é a engenharia de reservatórios, que tem como objetivo a previsão do comportamento do reservatório, principalmente prever a produção do mesmo, e a otimização desta. Devido às diferenças entre os vários tipos de reservatórios, esse estudo focará nos reservatórios com influxo de água, principal ocorrência na Bacia de Campos.

Com as várias equações, que se encontram nos livros, e softwares, que se estão no mercado, a verificação destes é essencial antes da utilização. É de extrema importância que se confie nas equações e softwares utilizados. No caso de um erro na saída desses dados milhões de dólares podem ser perdidos devido à uma previsão mal realizada.

1.2. Objetivos e metodologia

O principal objetivo do estudo é a checagem das equações do balanço de materiais mais utilizadas para previsão do comportamento de reservatórios com influxo de água.

Uma comparação entre equações também é realizada. Para isso, o software Wolfram Mathematica, versão 7.0, é utilizado.

Para a comparação com o caso que se aproxime do real é utilizado um simulador comercial para gerar dados sintéticos de produção. É utilizado o software IMEX da CMG (Computer Modeling Group Canada). A versão utilizada é a 2008.10.

Obtendo-se os resultados tanto para a Equação do Balanço de Materiais e a Simulação Numérica serão comparadas os dados de saída para verificar essa previsão, e verificar a confiabilidade dos cálculos com um caso mais próximo do real possível.

As diferenças de resultados serão discutidas buscando-se encontrar o motivo para essa limitação. Esse motivo pode ser tanto uma incerteza devido à limitação de dados de entrada, como algo que não estava previsto no modelo.

1.3. Estrutura

A estrutura utilizada para organização do trabalho é feita seguindo a divisão de capítulos, que serão detalhados abaixo.

O Capítulo 2 apresenta e explica todos os modelos e equações que serão utilizadas para os cálculos. Nele também serão comparados diferentes métodos de solução entre si, para verificar-se a precisão dos métodos.

O Capítulo 3 resume a metodologia adotada para a implementação do modelo e mostra os dados de entrada que são necessários, permitindo notar a precisão do mesmo em relação ao modelo de cálculo. Desta forma, os resultados da simulação também são apresentados, mostrando assim a estrutura que se utiliza.

O Capítulo 4 mostra uma comparação entre os modelos. Uma situação prática é apresentada e ambos os modelos são utilizados para obtenção de resultados. Esses resultados são comparados e justificativas são apresentadas.

O Capítulo 5 expõe as conclusões encontradas em todo o trabalho, fechando assim a discussão.

2. Engenharia de Reservatórios

2.1. Mecanismos de Produção de Reservatórios

Um reservatório de petróleo, normalmente, possui um mecanismo primário de produção. Esses mecanismos são naturais e são resultantes de todas as circunstâncias pelas quais a jazida passou.

Os cinco mecanismos primários de produção, como explicado em Rosa et al., 2006, são:

I. Mecanismo de Gás em Solução;

II. Mecanismo de Capa de Gás;

III. Mecanismo de Influxo de Água;

IV. Mecanismo Combinado;

V. Mecanismo de Segregação Gravitacional.

Neste trabalho somente será descrito o mecanismo de influxo de água.

2.1.1. Mecanismo de Influxo de Água

Para que este tipo de mecanismo ocorra é necessário que a formação que contem o óleo esteja ligada a uma grande acumulação de água.

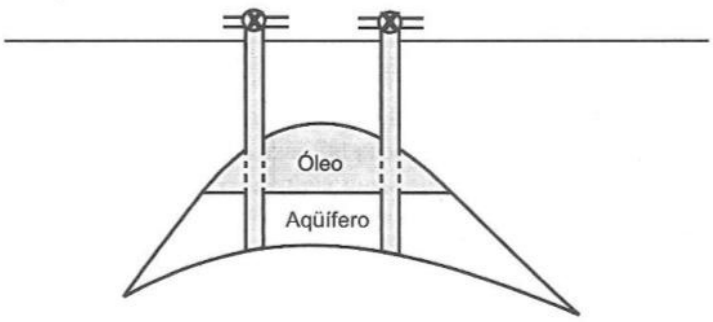


Figura 2.1 - Reservatório com Mecanismo de Influxo de Água (Rosa *et al.*, 2006)

A influência do aqüífero no reservatório se dá com a queda de pressão do mesmo. Quando isso ocorre, a água sofre uma expansão tomando parte do espaço que antes era ocupado pelo óleo.

Vale ressaltar que a compressibilidade da água é muito pequena e a influência do aqüífero só é relevante quando esse é de grandes proporções.

O aqüífero pode ser classificado de diferentes maneiras dependendo do seu tamanho e da sua interação com o exterior.

I. Aqüífero Infinito: quando a proporção do aqüífero é muito maior que a do reservatório de óleo.

II. Aqüífero Finito Selado: quando o aqüífero é proporcional ao reservatório. Como mostrado na Figura 2.1.

III. Aqüífero Finito Realimentado: quando o aqüífero é proporcional ao reservatório, porém existe uma entrada externa de água que o alimenta quando sua pressão cai.

O aqüífero aqui citado será o finito selado, por ser mais freqüente e, além disso, poder ser facilmente extrapolado para o aqüífero infinito.

2.2. Equação de Balanço de Materiais

Como explicado em Rosa *et al.*, 2006, uma das equações mais importantes para previsão do comportamento de um reservatório é a Equação de Balanço de Materiais (EBM). Dela pode-se obter o volume total de óleo tendo conhecimento das principais propriedades do reservatório e do fluido, além de seu histórico de produção e de pressão.

$$F = N(E_o + mE_g + E_{f,w}) + W_e \tag{1}$$

Sabemos que

$$F = N_p[B_t + (R_p - R_{si})B_g] + W_p B_w - W_{inj} B_{winj} - G_{inj} B_{ginj} \tag{2}$$

onde, N é o volume de óleo total, E_o é a expansão do óleo e do gás em solução, m é o quociente entre o volume original da capa de gás e o volume de óleo, E_g é a expansão do gás na capa, $E_{f,w}$ é a expansão da formação e da água conata e W_e é o influxo de água. F é a representação dos fluidos produzidos e injetados no reservatório.

N_p é o volume de óleo produzida, B_t é o fator volume-formação total do óleo, R_p razão gás/óleo acumulado, R_{si} é a razão gás/óleo de solução inicial, B_g é o fator volume-formação do gás, W_p é o volume de água produzido, B_w é o fator volume-formação da água, W_{inj} é o volume de água injetado, B_{winj} é o fator volume-formação da água injetada, G_{inj} é o volume de gás injetado e B_{ginj} é o fator volume-formação do gás injetado.

No caso estudado pode-se simplificar a equação removendo a existência de capa de gás ($m = 0$) e desconsiderando a compressibilidade da formação e da água conata ($E_{f,w} \approx 0$).

$$\frac{F}{E_o} = N + \frac{W_e}{E_o} \tag{3}$$

Considerando que no poço não temos nenhuma espécie de injeção ($W_{inj} = 0$ e $G_{inj} = 0$) e o gás em solução é irrelevante em consideração ao influxo e se mantém constante durante toda a produção ($R_{si} = R_s = R_p$). Além disso, o fator volume de formação total pode ser escrito da forma:

$$B_t = B_o + (R_{si} - R_s)B_g \tag{4}$$

onde B_o é o fator volume-formação do óleo. Então, pode-se dizer que:

$$B_t = B_o \tag{5}$$

O que define o sistema de fluidos do reservatório de forma:

$$F = N_p B_o + W_p B_w \tag{6}$$

Juntando as equações (3) e (6) tem-se:

$$\frac{N_p B_o + W_p B_w}{E_o} = N + \frac{W_e}{E_o} \tag{7}$$

2.3. Cálculo do Influxo de Água

Vale lembrar que todos os modelos apresentados adiante são uma forma de solução para a EBM, eles são fontes de estudos e testes que possuem validações que podem ser checadas em suas referências.

2.3.1. Modelo de van Everdingen & Hurst

O modelo de van Everdingen & Hurst, foi criado pelos próprios em van Everdingen & Hurst, 1949 e é considerado o mais preciso para o cálculo do influxo de água. Para sua solução utiliza-se a Equação da Difusividade Hidráulica prevendo assim a queda de pressão e conseqüente movimentação dos fluidos no interior no reservatório de petróleo.

2.3.1.1. Equação da Difusividade Hidráulica

A Equação da Difusividade Hidráulica é uma Equação Diferencial Parcial (E.D.P.) que prevê a alteração da pressão em função do raio e do tempo. Para simplificação será utilizado a equação com as variáveis adimensionais.

O modelo adimensional é modelo gerado por algumas operações matemáticas de maneira que simplifique e generalize a Equação da Difusividade Hidráulica. Dessa forma, ela fica só em função da pressão adimensional (p_D), do raio adimensional (r_D) e do tempo adimensional (t_D).

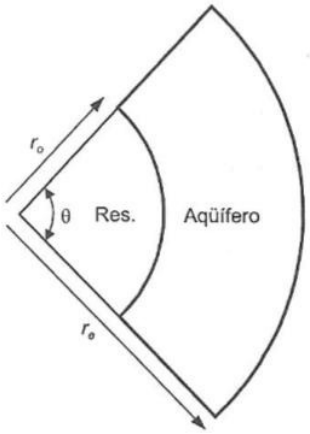


Figura 2.2 - Modelo de Aqüífero Radial (Rosa *et al.*, 2006)

$$p_D = \frac{p_i - p}{\Delta p_o} \tag{8}$$

$$r_D = \frac{r}{r_o} \tag{9}$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi \mu c_t r_o^2} \tag{10}$$

onde, p_i é a pressão inicial no reservatório, Δp_o é a queda de pressão no contato óleo-água e p é a variável da pressão. r_o é o raio do reservatório de óleo e r é a variável

radial. k é a permeabilidade, ϕ é a porosidade da formação, μ é a viscosidade do óleo, c_t é a compressibilidade total ($c_t = c_w + c_f$, soma da compressibilidade da água e da formação) e t é a variável do tempo.

A Equação da Difusividade Hidráulica fica:

$$\frac{\partial^2 p_D}{\partial {r_D}^2} + \frac{1}{r_D}\frac{\partial p_D}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \tag{11}$$

Para solucionar a E.D.P. utiliza-se a Condição Inicial, que impõem no início ($t = 0$) a pressão no reservatório sendo a inicial ($p = p_i$), a Condição de Contorno Interna, que assume a diferença de pressão no contato igual à queda de pressão no contato ($p_i - p(r_o) = \Delta p_o$).

$$p_D(r_D; t_D = 0) = 0 \tag{12}$$

$$p_D(r_D = 1; t_D) = 1 \tag{13}$$

Além dessas condições utilize-se a Condição de Contorno Externa, essa varia nos três diferentes tipos de aqüíferos. No caso utilizaremos a condição para aqüífero finito selado, que impõem a inexistência de fluxo no limite externo do reservatório.

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_{r_D = \frac{r_e}{r_o}} = 1 \tag{14}$$

Para resolver a E.D.P. foi utilizado a método de Laplace em relação ao tempo adimensional, deixando a equação da forma:

$$\frac{\partial^2 ps_D}{\partial {r_D}^2} + \frac{1}{r_D}\frac{\partial ps_D}{\partial r_D} = s \cdot ps_D \tag{15}$$

sendo ps_D é a pressão transformada e sendo função somente do raio adimensional (r_D) e s é a variável de Laplace. A Equação (15) é conhecida como Equação Modificada de Bessel e sua solução no domínio de frequências é conhecida na literatura (Ozisik, 1968):

$$ps_D\left(r_D, s\right) = BesselI(0, r_D\sqrt{s}) \cdot C_1 + BesselK(0, r_D\sqrt{s}) \cdot C_2 \tag{16}$$

onde C_1 e C_2 são constantes obtidas pela aplicação das condição de contorno.

Para inversão de Laplace utiliza-se o método de Stehfest, como pode ser visto em Stehfest, 1970. A solução é da forma:

$$p_D\left(r_D,t_D\right)=\frac{Ln(2)}{t_D}\cdot\sum_{i=1}^{Ni}V\left(i,Ni\right)\cdot ps_D\left(r_D,\frac{Ln(2)}{t_D}\cdot i\right) \tag{17}$$

onde

$$V\left(i,Ni\right)=\left(-1\right)^{i+\frac{Ni}{2}}\cdot\sum_{k=\mathrm{int}\left(\frac{i+1}{2}\right)}^{Min\left(i,\frac{Ni}{2}\right)}\frac{k^{1+\frac{Ni}{2}}\cdot\left(2\cdot k\right)!}{\left(\frac{Ni}{2-k}\right)!\cdot\left(k\right)!^2\cdot\left(i-k\right)!\cdot\left(2\cdot k-i\right)!} \tag{18}$$

onde k e i são simplesmente contadores e Ni é uma constante entre 8 e 16, no caso foi utilizada como 8.

Desta solução obteve-se o gráfico da pressão adimensional em função do raio e do tempo adimensionais, como na Figura 2.3. Esse gráfico é diferente para cada raio adimensional do aqüífero (r_{eD}).

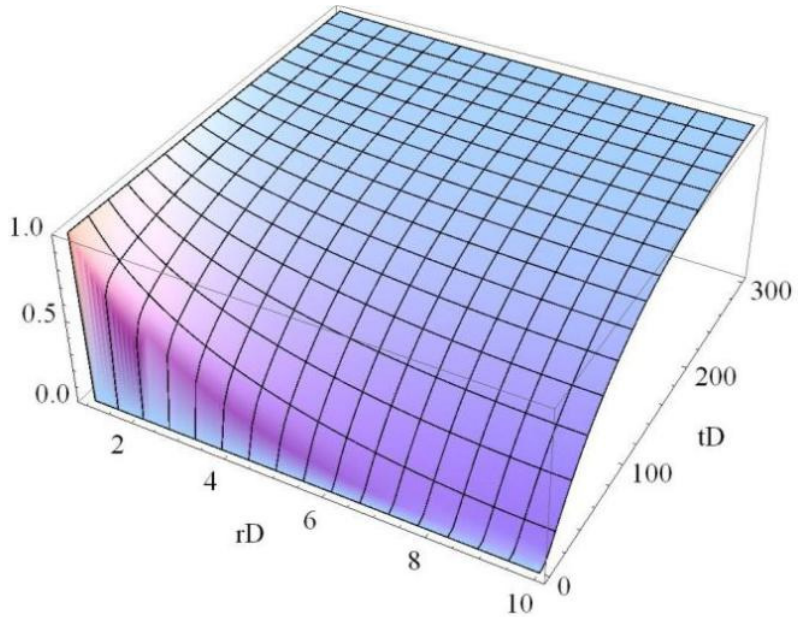


Figura 2.3 - Gráfico da pressão adimensional em função do raio e do tempo adimensionais. ($r_{eD}=10$)

2.3.1.2. Influxo de Água

O influxo de água fica dependente de sua forma adimensional, da queda no contato óleo-água e da constante de influxo de água do aqüífero (U).

$$W_e = U \Delta p_o W_D(t_D) \tag{19}$$

$$U = 2\pi\phi c_t h r_o^{\,2} \tag{20}$$

$$W_D = -\int_0^{t_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} dt_D \tag{21}$$

Para solução da equação (21) é necessário resolver da mesma maneira que a pressão, utilizando a Transformada de Laplace a transformada do influxo fica da forma:

$$Ws_D\left(r_D, s\right) = -\frac{\left(\dfrac{\partial ps_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1}}{s} \tag{22}$$

onde Ws_D é a transformada do influxo.

O método de Stehfest também é utilizado para a inversão da Transformada de Laplace.

$$W_D\left(r_D, t_D\right) = \frac{Ln(2)}{t_D} \cdot \sum_{i=1}^{Ni} V\left(i, Ni\right) \cdot Ws_D\left(r_D, \frac{Ln(2)}{t_D} \cdot i \right) \tag{23}$$

onde

$$V\left(i, Ni\right) = \left(-1\right)^{i+\frac{Ni}{2}} \cdot \sum_{k=\mathrm{int}\left(\frac{i+1}{2}\right)}^{Min\left(i, \frac{Ni}{2}\right)} \frac{k^{1+\frac{Ni}{2}} \cdot \left(2 \cdot k\right)!}{\left(\dfrac{Ni}{2-k}\right)! \cdot \left(k\right)!^2 \cdot (i-k)! \cdot \left(2 \cdot k - i\right)!} \tag{24}$$

Pode-se analisar o comportamento do influxo adimensional em função do tempo para diferentes raios adimensionais do aqüífero. Como se pode observar na Figura 2.4.

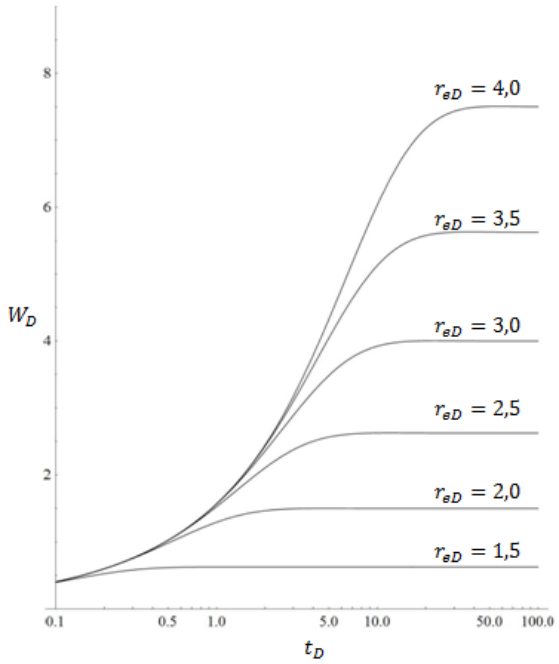


Figura 2.4 - Gráfico do influxo adimensional em função do tempo adimensional para diferentes raios do aqüífero.

Com isso pode-se calcular o influxo do aqüífero, contudo, a consideração utilizada de que a queda de pressão no contato óleo água não pode ser feita, sendo assim será corrigida pelo princípio da superposição.

2.3.1.3. Superposição de Efeitos

O Princípio da Superposição de Efeitos realiza a soma dos diferentes influxos para cada tempo. Isso ocorre devido à alteração da pressão no contato.

$$W_e = U\int_0^{t_D} W_D'(t_D - \tau_D)\Delta p(\tau_D)d\tau_D \tag{25}$$

Temos que W_D' é a vazão adimensional (a derivada do influxo adimensional) e $\Delta p(t) = p_i - p(t)$ é a variação entre a pressão inicial e a pressão do contato no tempo t.

2.3.2. Modelo de Carter-Tracy

O modelo de Carter-Tracy, como apresentado em Carter & Tracy, 1960, é derivado do modelo de van Everdingen & Hurst, já considerando a superposição de efeito. Porém, devido suas aproximações a forma de cálculo é extremamente mais simples e rápida.

Esse modelo não se restringe a uma geometria específica de reservatório, sendo somente necessário saber o comportamento da pressão adimensional em função do tempo, o que varia com o tipo de fluxo e geometria. Essas equações da pressão adimensional podem ser encontradas como solução da Equação de Difusividade Hidráulica.

O cálculo do influxo de água no modelo de Carter-Tracy é da forma

$$W_e(t_{Dj}) = W_e(t_{Dj-1}) + \frac{U\Delta p(t_{Dj}) - W_e(t_{Dj-1})p'_D(t_{Dj})}{p_D(t_{Dj}) - t_{Dj-1}p'_D(t_{Dj})}(t_{Dj} - t_{Dj-1}) \tag{26}$$

Precisa-se, contudo, determinar o melhor *time step* (Δt_D) a ser usado, pois isso afetará a precisão do modelo. Para a comparação serão utilizados diferentes tempos adimensionais.

2.3.3. Comparação entre Modelos

Os dois modelos apresentados serão comparados na resolução de um caso específico, no modelo de Carter-Tracy serão checados diferentes *time steps*.

Os dados foram tirados de Rosa et al., 2006 e são:

$$r_e = 6096m$$

$$r_o = 762m$$

$$h = 18,3m$$

$$\phi = 0,22$$

$$k = 100md$$

$$\mu = 0,30cp$$

$$c_t = 99,6 \cdot 10^{-6} \left(kgf \,/\, cm^2 \right)^{-1}$$

Tabela 2-1 – Variação da pressão com o tempo

$t(d)$	0	100	200	300	400	500
$p\left(kgf \,/\, cm^2\right)$	246,13	245,43	244,44	243,18	242,19	240,51

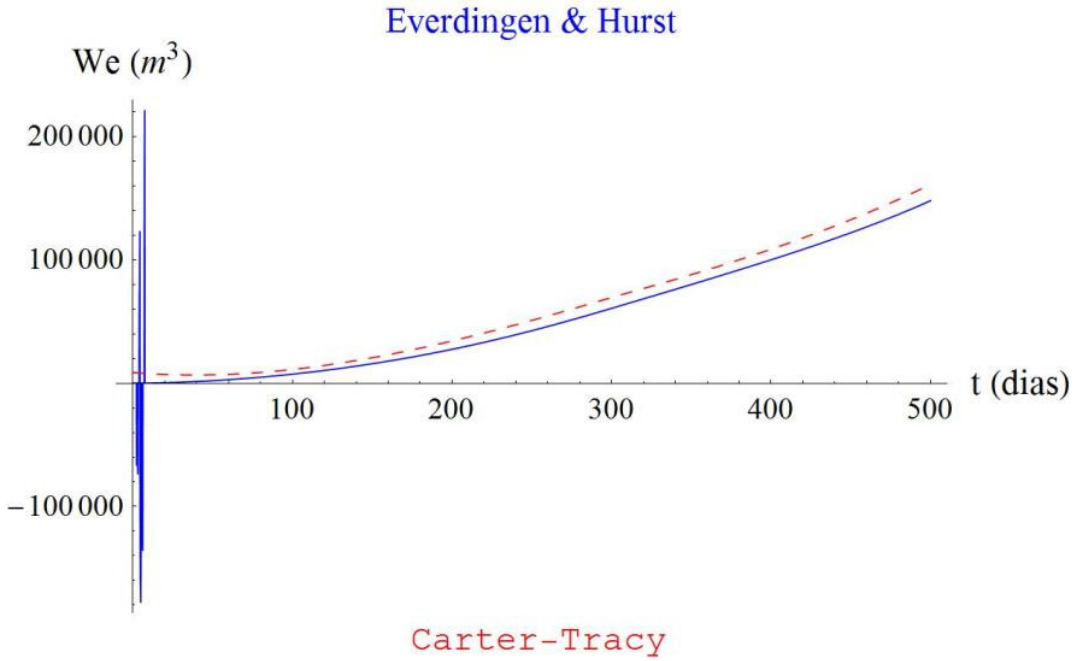


Figura 2.5 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 21,91$.

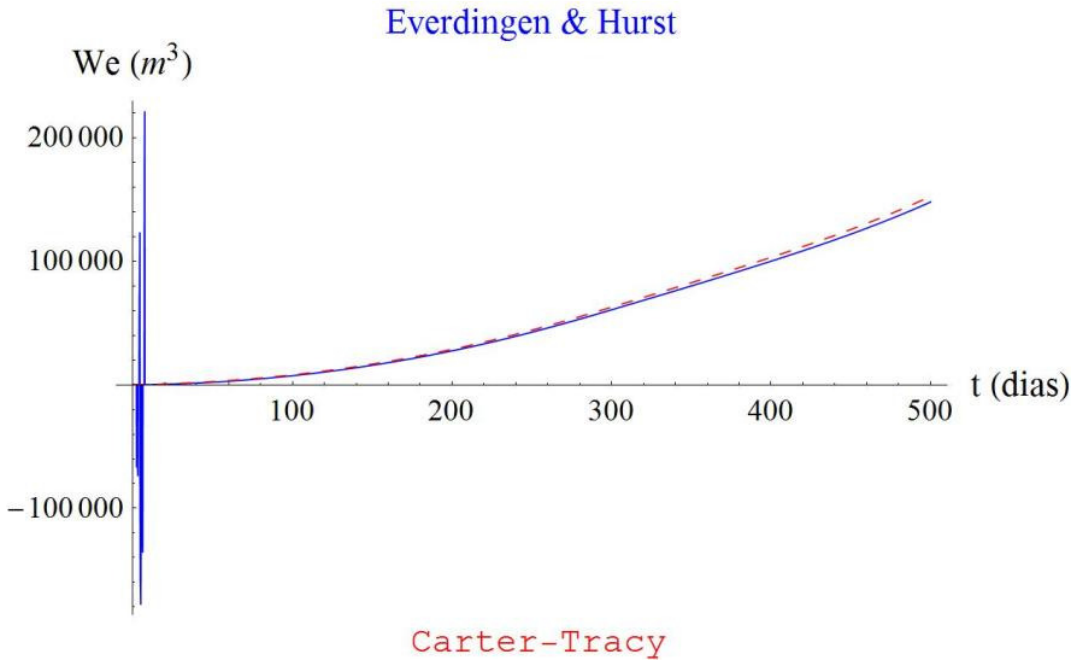


Figura 2.6 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 4,382$.

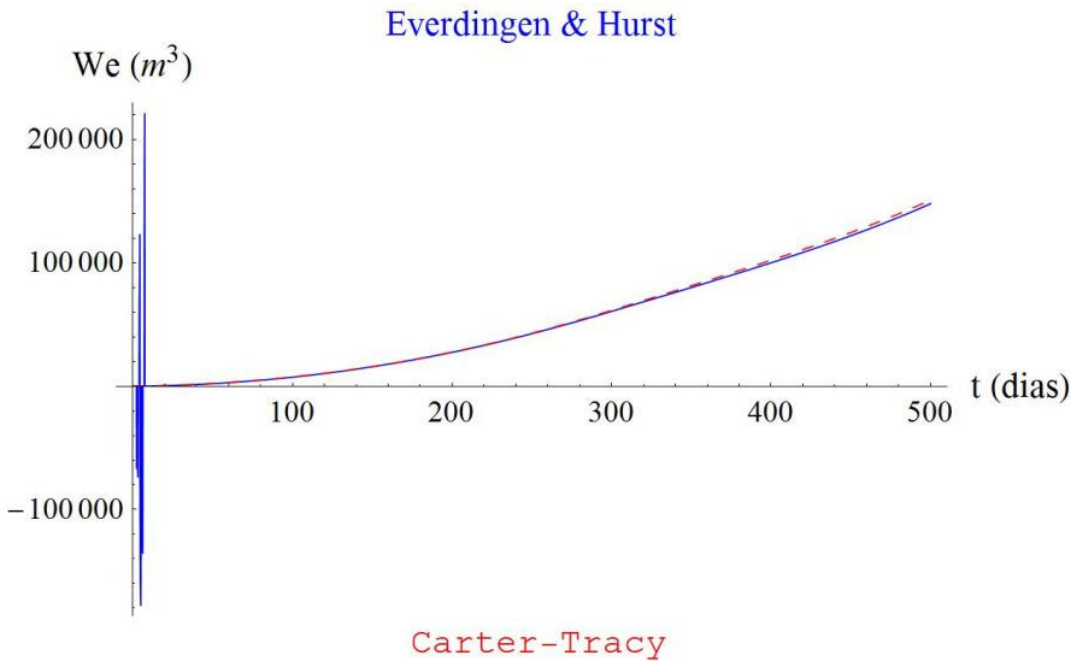


Figura 2.7 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 1,0955$.

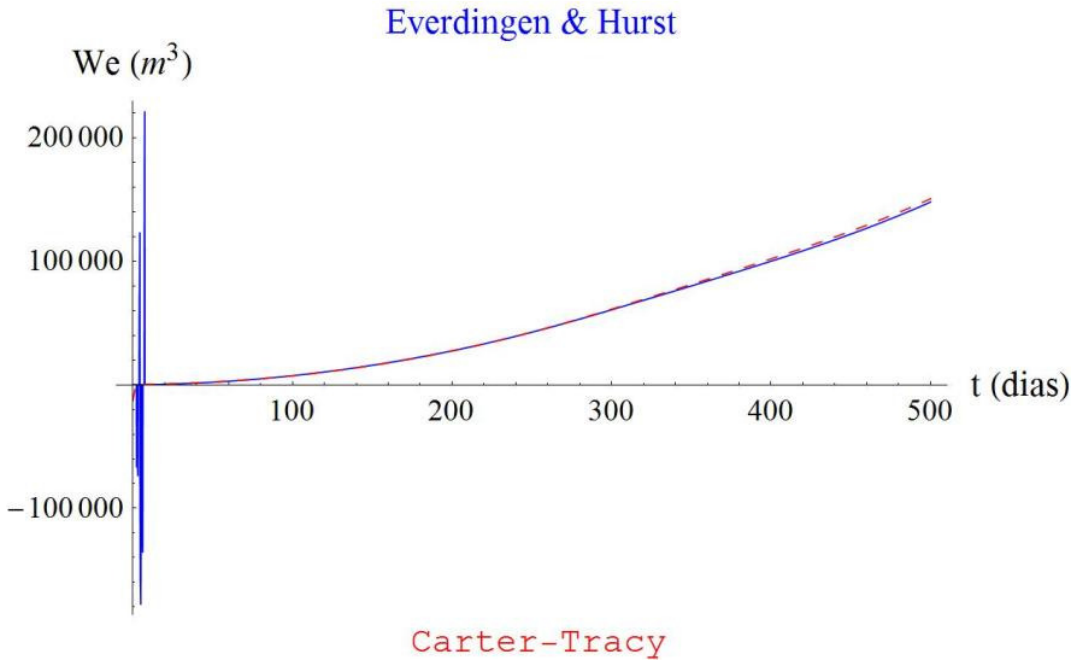


Figura 2.8 - Comparação entre os modelos de Everdingen & Hurst e Carter-Tracy para $\Delta t_D = 0,4382$.

A instabilidade existente nos gráficos para tempos muito pequenos é gerada pelo modelo de Everdingen & Hurst. Essa instabilidade é devido ao método de Stehfest utilizado, que para tempos muito pequenos gera problemas com o somatório presente neste.

Pode-se notar uma grande diferença entre os dois modelos para $\Delta t_D = 21,91$, contudo ela é diminui com a diminuição de Δt_D, sendo mínima já em $\Delta t_D = 1,0955$. Contudo, nota-se pouca diferença, quando se compara $\Delta t_D = 4,382$ e $\Delta t_D = 1,0955$. Sendo assim utilizou-se, no mínimo, $\Delta t_D = 4,382$ para as análises seguintes.

2.3.4. Previsão da Diferença de Pressão no Contato

O modelo de Carter-Tracy, assim como os outros, possui uma maneira de prever a diferença de pressão no contato óleo/água (Δp_o) em função do tempo. Isso é importante, pois permite que se obtenha o influxo (W_e) e a pressão (p) tendo como entrada a produção de óleo, N_p.

$$\Delta p(t_{Dj}) = \frac{N_p(t_{Dj})B_{oi} + W_p(t_{Dj}) - W_e(t_{Dj-1})\left[\dfrac{p_D(t_{Dj}) - t_{Dj}p'_D(t_{Dj})}{p_D(t_{Dj}) - t_{Dj-1}p'_D(t_{Dj})}\right]}{B_{oi}\left[Nc_{eo} - N_p(t_{Dj})c_o\right] + U\left[\dfrac{t_{Dj} - t_{Dj-1}}{p_D(t_{Dj}) - t_{Dj-1}p'_D(t_{Dj})}\right]} \tag{27}$$

onde B_{oi} é o fator volume de formação inicial, c_{eo} é a compressibilidade efetiva do óleo e é dada pela equação:

$$c_{eo} = \frac{c_o S_o + c_w S_w + c_f}{1 - S_w} \tag{28}$$

onde S_o é a saturação de óleo, S_w é a saturação de água, c_o é a compressibilidade do óleo e c_w é a compressibilidade da água.

3. Simulação Numérica no IMEX

Para realização da simulação numérica utilizaremos o software IMEX da CMG (Computer Modeling Group Canada) versão 2008.10. Para isso será necessário a preparação do modelo anteriormente discutido no software.

3.1. Simulador

O software da CMG possui três simuladores nele:

- IMEX;
- GEM;
- STARS.

Como a produção será realizada devido ao influxo de água, o simulador utilizado será o IMEX. Os outros simuladores servem para métodos de recuperação especiais, como injeção de vapor ou surfactantes.

3.2. Builder

Para rodar o simulador da CMG é necessário preparar o reservatório em um software chamado de Builder. Nesse software damos entrada a todas as propriedades e configuração do reservatório.

3.2.1. Reservatório

O formato do reservatório e as subdivisões utilizadas (grid) é o primeiro dado de entrada pedido pelo Builder. Os dados de permeabilidade e porosidade entram na etapa de determinação do reservatório, assim como o tipo de aqüífero simulado.

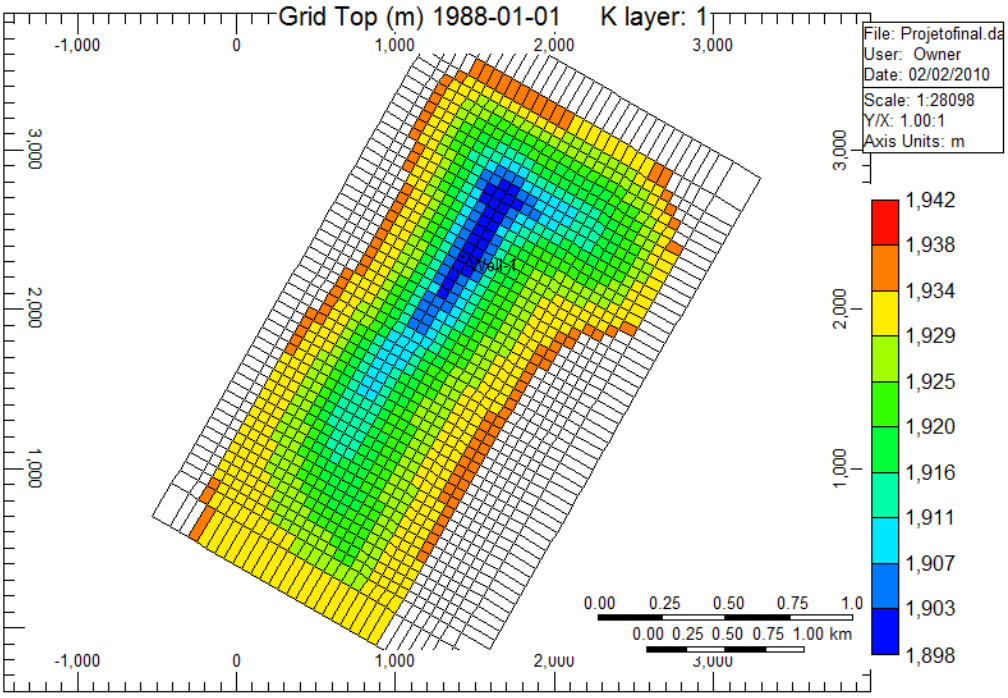


Figura 3.1 – Vista superior de um reservatório com Grid Top

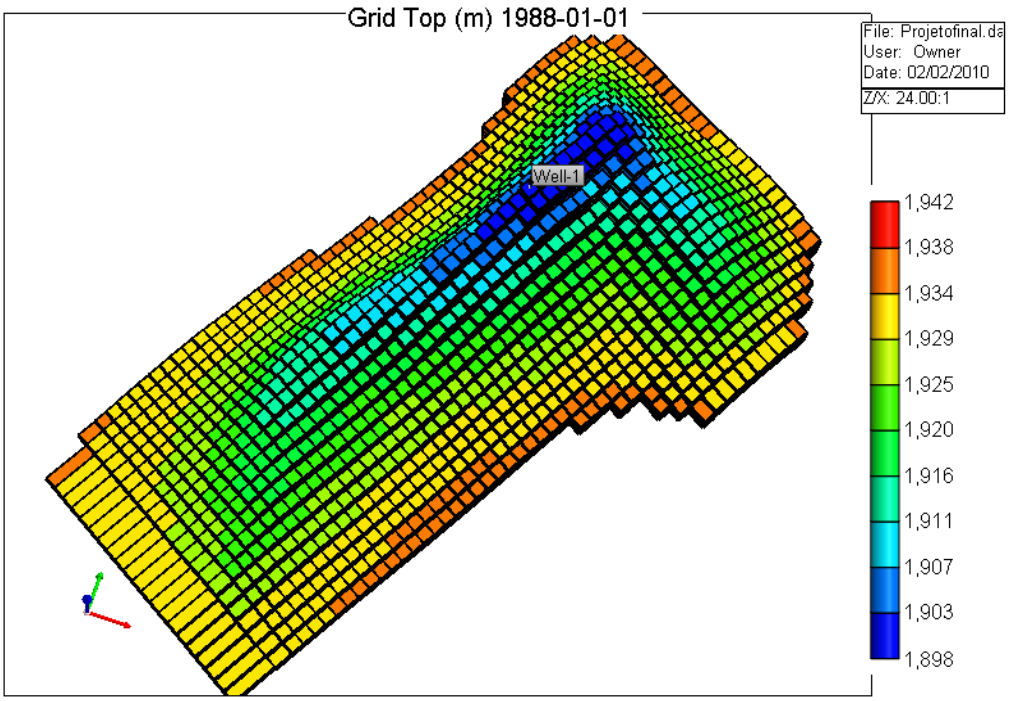


Figura 3.2 – Vista tridimensional de um reservatório com Grid Top

3.2.2. Componentes

Para definir os componentes utilizados precisa-se escolher o modelo que será utilizado para os cálculos. No caso o modelo é o Black Oil, já que simula-se um reservatório de óleo, com o influxo de água. A outra opção seria Gas/Water, caso fosse um reservatório de gás.

Nesse ponto é necessário entrar com propriedades dos fluidos envolvidos, óleo, gás e água. Como o modelo Black Oil está sendo utilizado, as propriedades requeridas não são as composições, mas densidades e temperatura, por exemplo.

Dos dados de entrada o próprio programa imprime a tabela PVT do óleo e do gás. Disponibilizando a razão de solubilidade (R_s), o fator volume-formação do óleo (B_o), o fator de expansão do gás (E_g), as viscosidades do óleo e do gás (μ_o e μ_g) e a compressibilidade do óleo (c_o) para diferentes valores de pressão (p).

Abaixo seguem alguns exemplos dos gráficos gerados pelo Builder.

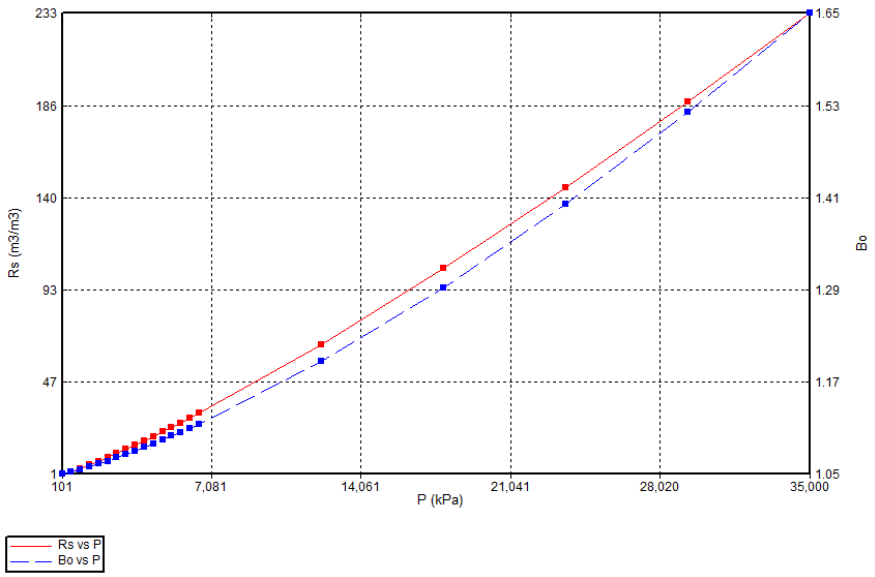


Figura 3.3 – Gráfico da razão de solubilidade (R_s) e do fator volume-formação do óleo (B_o) em função da pressão (p)

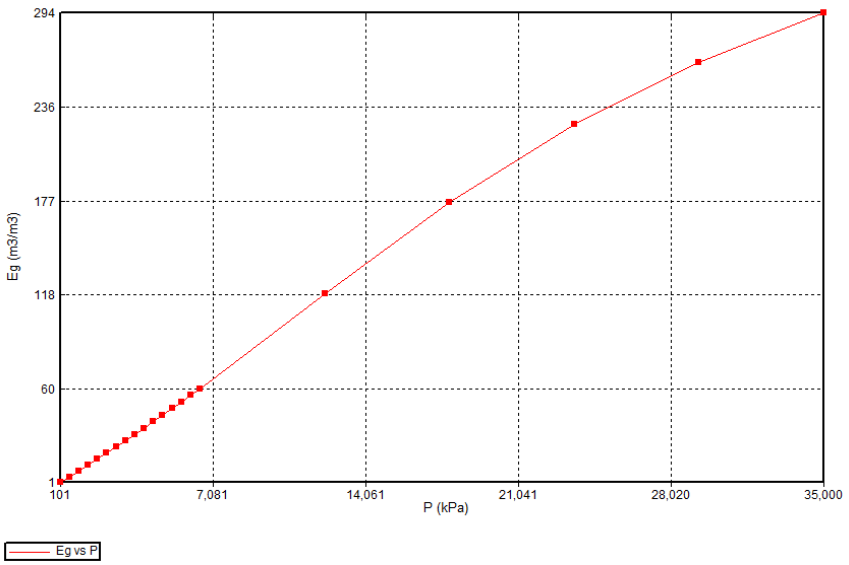


Figura 3.4 – Gráfico do fator de expansão do gás (E_g) em função da pressão (p)

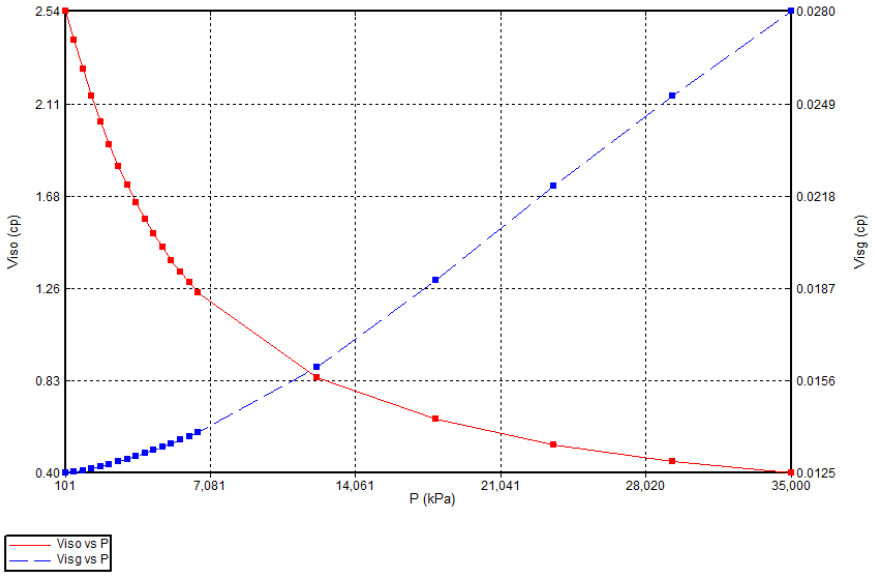


Figura 3.5 – Gráfico das viscosidades do óleo e do gás (μ_o e μ_g) em função da pressão (p)

3.2.3. Interação Rocha-Fluido

Nesta etapa os dados de saturação e permeabilidades relativas são acrescentados a simulação. É comum, nesta etapa, a entrada de dados para alimentar correlações que fornecem as permeabilidades relativas em função das saturações.

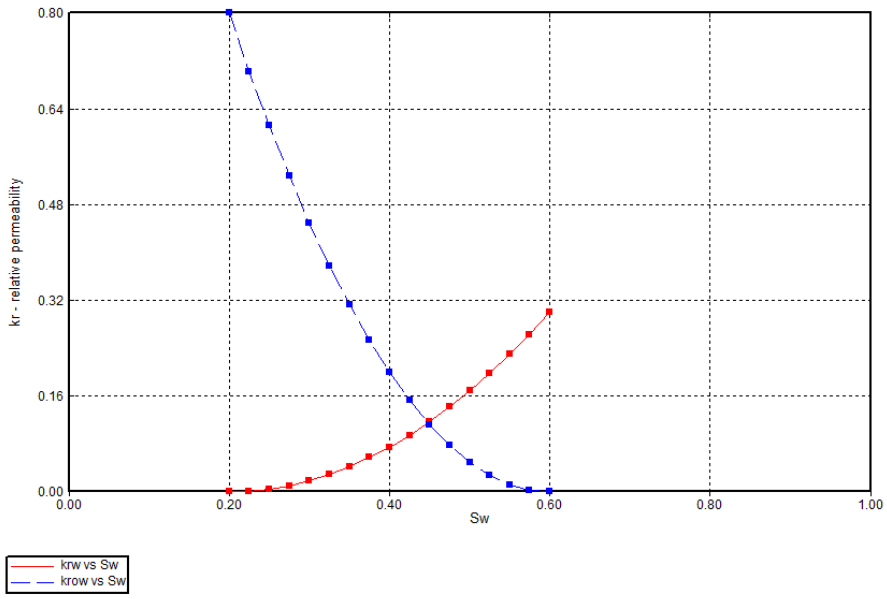


Figura 3.6 – Gráfico da permeabilidade relativa da água (k_{rw}) e do óleo em relação à água (k_{row}) em função da saturação de água (S_w)

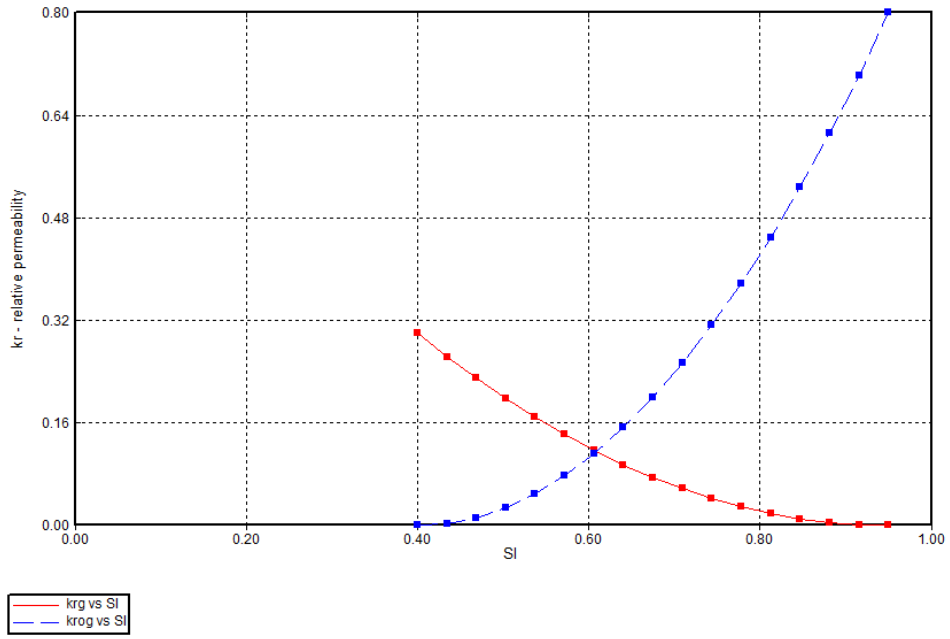


Figura 3.7 – Gráfico da permeabilidade relativa do gás (k_{rg}) e do óleo em relação ao gás (k_{rog}) em função da saturação de líquido (S_l)

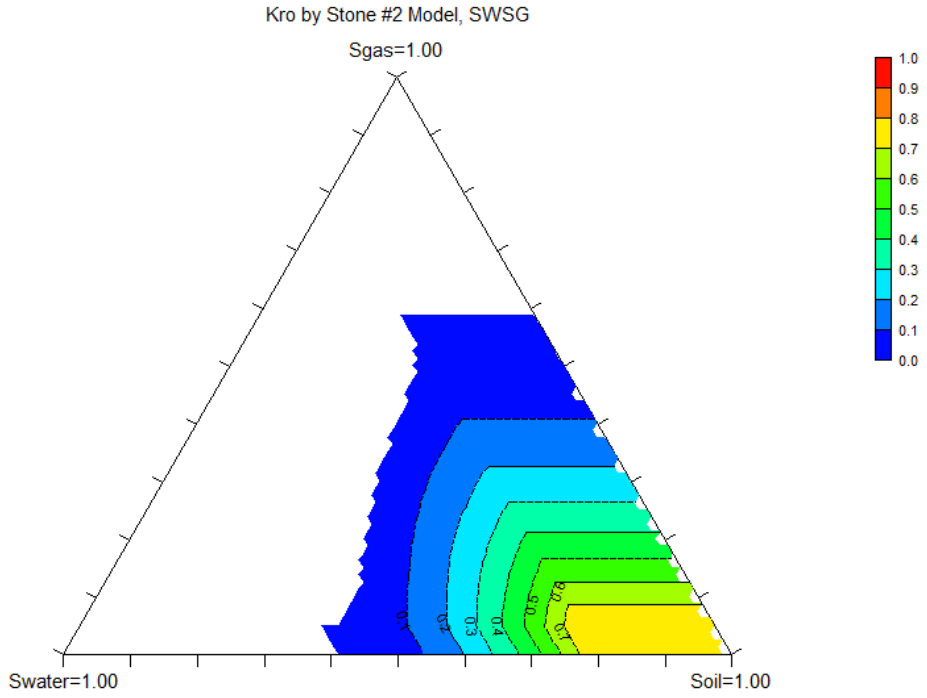


Figura 3.8 – Gráfico de 3 fases com a permeabilidade relativa do óleo (k_{ro}) em função das saturações (S_w, S_g e S_o)

3.2.4. Condições Iniciais

As condições iniciais são estabelecidas de acordo com os fluidos no reservatório, no caso, somente óleo e água. Os dados de entrada são a pressão original do reservatório, a profundidade e a profundidade do contato óleo/água, além de definir o ponto de bolha.

3.2.5. Poços e Recorrentes

Nesta fase são definidas as posições dos poços, que no caso é somente um, e as datas onde ocorrem eventos, por exemplo, abertura ou fechamento de um determinado poço. Nesse momento se definem em quais camadas o poço vai produzir, sua vazão máxima e pressão mínima.

3.3. IMEX

Após a construção do modelo no Builder, gerando um arquivo com extensão dat, se passa o arquivo para o IMEX e esse será simulado. A simulação realizada vai até a última data definida na parte de Poços e Recorrentes, sendo assim é importante defini-la com atenção.

O IMEX libera três arquivos de saída, com as extensões irf, mrf e out. O arquivo com extensão irf é utilizado para ver os gráficos desejados e o out para verificação de dados específicos de cada período.

O arquivo de extensão out pode ser visualizado pelo bloco de notas do Windows, não possuindo nenhuma dificuldade. O arquivo irf precisa ser aberto em um programa do CMG chamado Results.

3.4. Results

Existem dois tipos de arquivos para a leitura dos dados com extensão irf, seus nomes são Results Graph e Results 3D. O Results Graph apresenta os gráficos do reservatório possuindo, por exemplo, vazão e produção acumulada. O Results 3D permite a visualização do reservatório em 3D e a alteração dos parâmetros com o tempo, por exemplo, saturação dos fluidos e pressão em cada região.

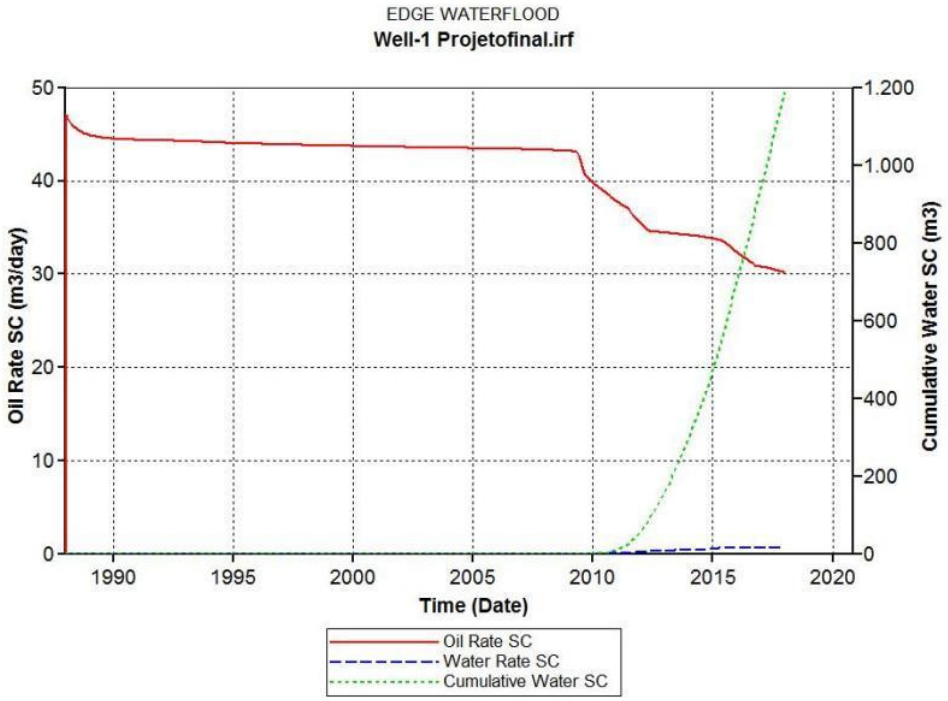


Figura 3.9 – Exemplo de gráfico do Results Graph

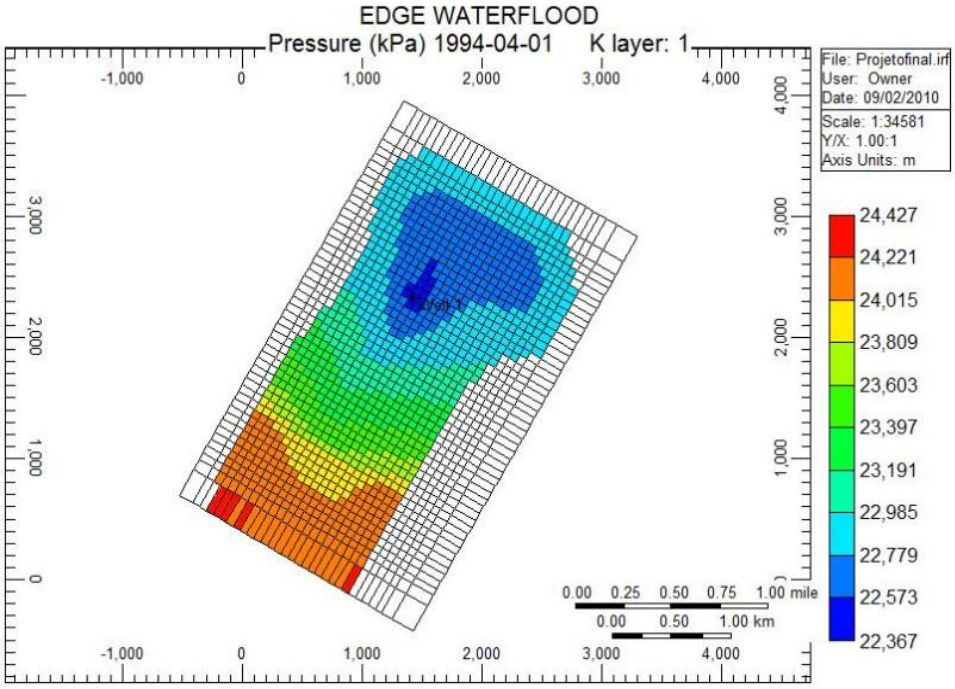


Figura 3.10 – Exemplo de gráfico do Results 3D

4. Comparação Entre a EBM e a Simulação Numérica

Para realização da comparação, será utilizado um modelo simples. Esse modelo foi escolhido por permitir uma melhor comparação com a equação dado que a mesma é regida para tal tipo de interação. Como a intenção é estudar de maneira mais exata possível a fórmula de Carter-Tracy não se utilizou mais de um poço, que ampliaria os erros e incertezas na análise.

4.1. Dados de Entrada

O caso utilizado foi gerado no IMEX e preparado para cálculo na EBM. Os dados utilizados para o modelo estão apresentados a seguir.

A Figura 4.1 mostra o reservatório em vista superior, vale ressaltar que o IMEX não representa o aqüífero, ficando assim só com a zona de óleo. A Figura 4.2 é uma representação tridimensional do reservatório. Ambas as figuras são de *Grid Top*, que é a profundidade onde se encontra a parte superior do grid.

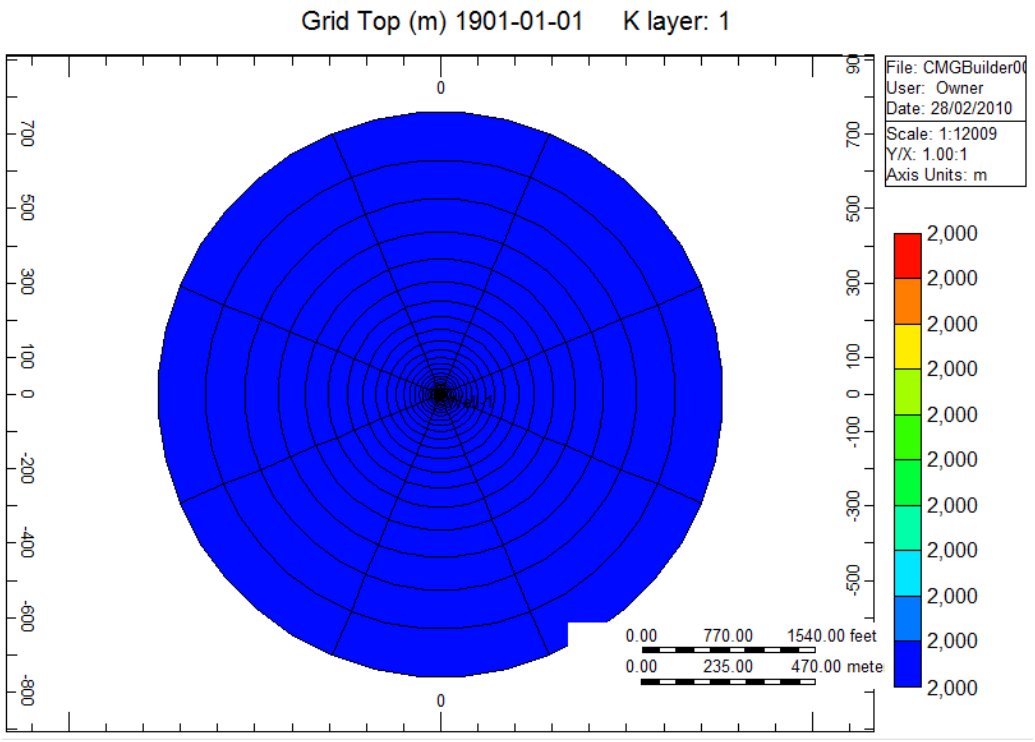


Figura 4.1 – Vista superior do modelo de comparação com Grid Top

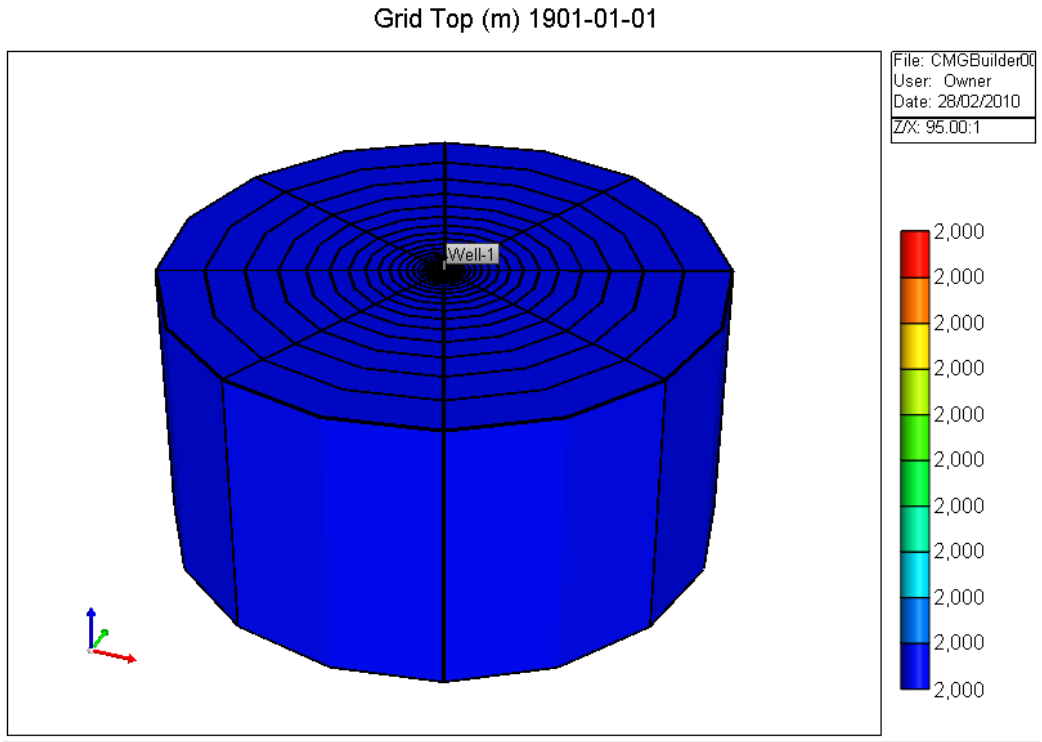


Figura 4.2 – Vista tridimensional do modelo de comparação com Grid Top

Tabela 4-1 – Dados utilizados na solução da EBM

r_e	$6092m$
r_o	$750m$
h	$8,0m$
ϕ	$0,22$
k	$100md$
μ_w	$0,75cp$
c_f	$48,3 \cdot 10^{-6} \left(kgf / cm^2\right)^{-1}$
c_w	$42,45 \cdot 10^{-6} \left(kgf / cm^2\right)^{-1}$
$p(t=0)$	$246,13kgf / cm^2$
ρ_o	$813kg / m^3$
ρ_w	$1097kg / m^3$
d_g	$0,834$
B_w	$1,01$
p_b	$101,97kgf / cm^2$
$p_{\min p}$	$2,039kgf / cm^2$
$IPinicial$	$0,2(m^3 / (d \cdot (kgf / cm^2))$

Tabela 4-2 – Tabela PVT

P (kPa)	P (kgf/cm^2)	B_o	μ_o (cp)
10000	101,97	1,25	0,649
11000	112,16	1,27	0,614
12000	122,36	1,28	0,579
13000	132,56	1,31	0,517
14000	142,76	1,32	0,506333
15000	152,95	1,33	0,495667
16000	163,15	1,34	0,485
17000	173,35	1,35	0,474333
18000	183,54	1,36	0,463667
19000	193,74	1,37	0,453
20000	203,94	1,38	0,442333
25000	254,92	1,43	0,389
27500	280,41	1,46	0,362333
30000	305,90	1,48	0,335667
35000	356,89	1,53	0,2823333

Não foi utilizada uma vazão de produção máxima devido ao Índice de Produtividade ($IPinicial$) muito pequeno e porque a intenção dessa análise é puramente teórica.

O modelo apresentado será rodado por 30 anos. Sendo os dados obtidos anuais, para ambos os métodos, tanto pelo cálculo quanto pelo simulador.

A produção acumulada de água (W_p) será desconsiderada por ser insignificante em um modelo de tal simplicidade.

4.2. Cálculos da EBM do Reservatório

Para realização dos cálculos do reservatório serão realizadas algumas iterações da seguinte maneira.

Primeiro será calculado o Δp, usando como entrada a N_p do tempo anterior. Com isso, se calcula p_e para o cálculo da q, pela equação de Darcy. Com a vazão calcula-se N_p ($N_p = \int q dt$). Isso se repete até a variação de Δp ser suficientemente pequena. Após encontrar Δp, acha-se W_e e o último N_p. Esses cálculos serão realizados para cada tempo, que no caso é anual.

Os resultados das contas se encontram a seguir:

Tabela 4-3 – Resultados da EBM

Ano	Vazão de Óleo (m^3/d)	Np (m^3)	Delta P (kgf/cm^2)	P (kgf/cm^2)	We (m^3)
1	48,36	17651	1,559	244,570	23800
2	48,27	35272	1,846	244,28	48616
3	48,23	52878	1,987	244,14	73530
4	48,20	70474	2,084	244,04	98466
5	48,18	88061	2,158	243,97	123410
6	48,16	105642	2,219	243,91	148356
7	48,15	123218	2,270	243,86	173303
8	48,14	140789	2,314	243,81	198249
9	48,12	158356	2,352	243,77	223193
10	48,11	175920	2,387	243,74	248136
11	48,10	193480	2,418	243,71	273077
12	48,10	211037	2,446	243,68	298016
13	48,09	228591	2,473	243,65	322953
14	48,08	246142	2,497	243,63	347888
15	48,08	263692	2,519	243,61	372821
16	48,07	281239	2,540	243,58	397752
17	48,06	298783	2,560	243,56	422682
18	48,06	316326	2,579	243,55	447609
19	48,05	333867	2,596	243,53	472535
20	48,05	351407	2,613	243,51	497459
21	48,04	368944	2,629	243,50	522381
22	48,04	386480	2,644	243,48	547303
23	48,03	404014	2,660	243,46	572230
24	48,03	421547	2,677	243,45	597192
25	48,02	439077	2,696	243,43	622205
26	48,02	456606	2,712	243,41	647254
27	48,01	474133	2,728	243,40	672334
28	48,01	491658	2,745	243,38	697466
29	48,01	509182	2,758	243,37	722615
30	48,01	526705	2,768	243,36	747754

O gráfico da vazão será utilizado para comparações por ser o mais preciso. Sabe-se que o mais importante é saber a produção acumulada, porém a produção terá uma discrepância cada vez maior, devido às vazões diferentes. Como essa diferença é só gerada pela vazão será utilizado esse gráfico.

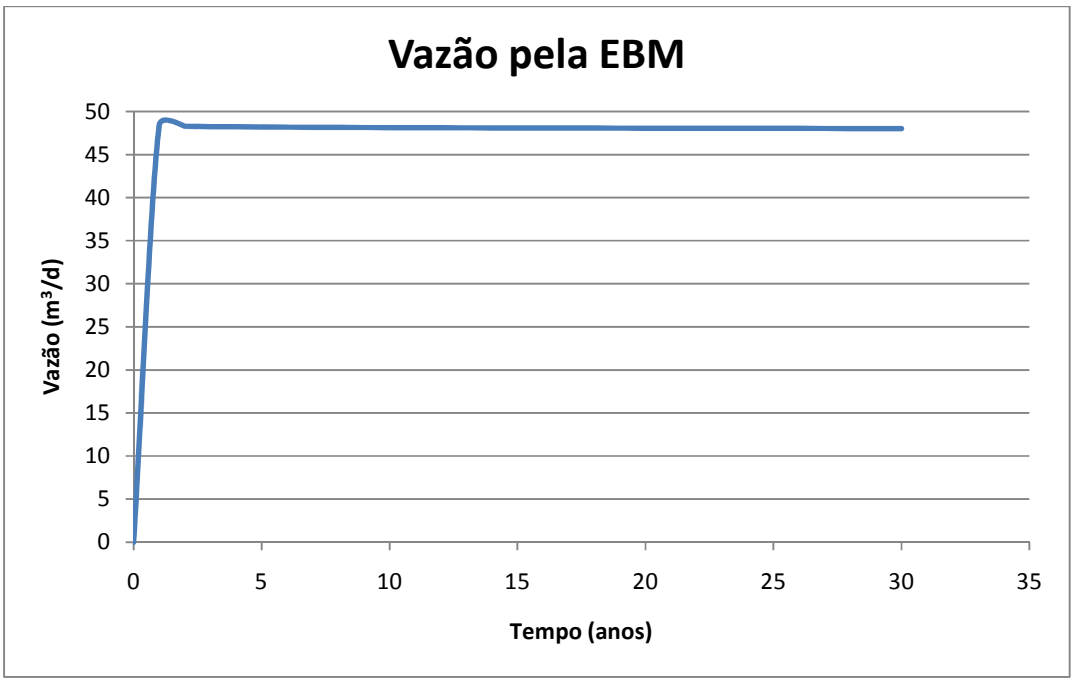


Figura 4.3 – Gráfico da vazão obtida pelo método de cálculo

Pode-se notar uma queda muito sutil na vazão e de maneira continua, não apresentando distorções.

4.3. Simulação do Reservatório

Poucos dados foram inseridos no simulador, usando-se o modelo simples para a comparação. A única diferença é a unidade de pressão que o simulador utiliza como kPa. A conversão utilizada foi $1kgf / cm^2 = 98,07kPa$.

Os resultados encontrados se apresentam na tabela abaixo. O foco foi dado na vazão e na produção acumulada.

Tabela 4-4 – Resultados da simulação numérica

Ano	Vazão de Óleo (m^3/d)	Np (m^3)
1	45,91	16765
2	45,90	33520
3	45,89	50272
4	45,88	67067
5	45,88	83813
6	45,87	100558
7	45,87	117301
8	45,87	134089
9	45,86	150829
10	45,86	167569
11	45,86	184307
12	45,86	201091
13	45,85	217827
14	45,85	234563
15	45,85	251298
16	45,85	268078
17	45,84	284812
18	45,84	301545
19	45,84	318278
20	45,84	335056
21	45,84	351788
22	45,84	368519
23	45,84	385249
24	45,84	402025
25	45,83	418755
26	45,83	435484
27	45,83	452213
28	45,83	468987
29	45,83	485715
30	45,83	502443

Já se pode notar a diferença entre as vazões dos dois modelos.

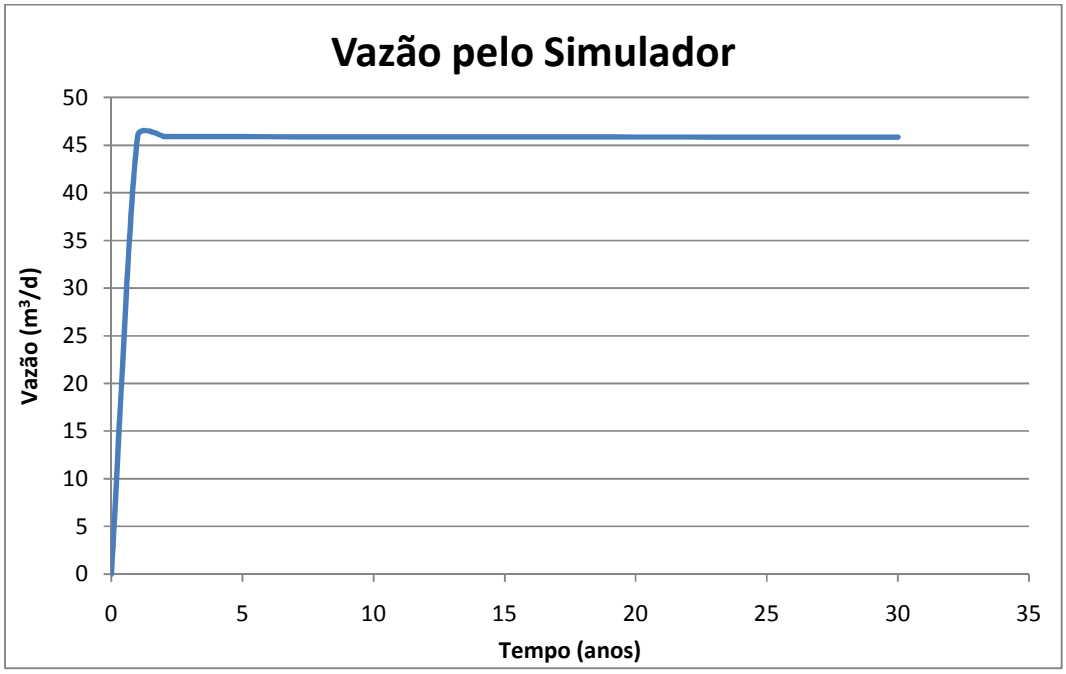


Figura 4.4 – Gráfico da vazão obtida pelo IMEX

4.4. Comparação

Antes de qualquer comentário é importante a visualização das duas vazões em um mesmo gráfico, de maneira que se facilite a comparação.

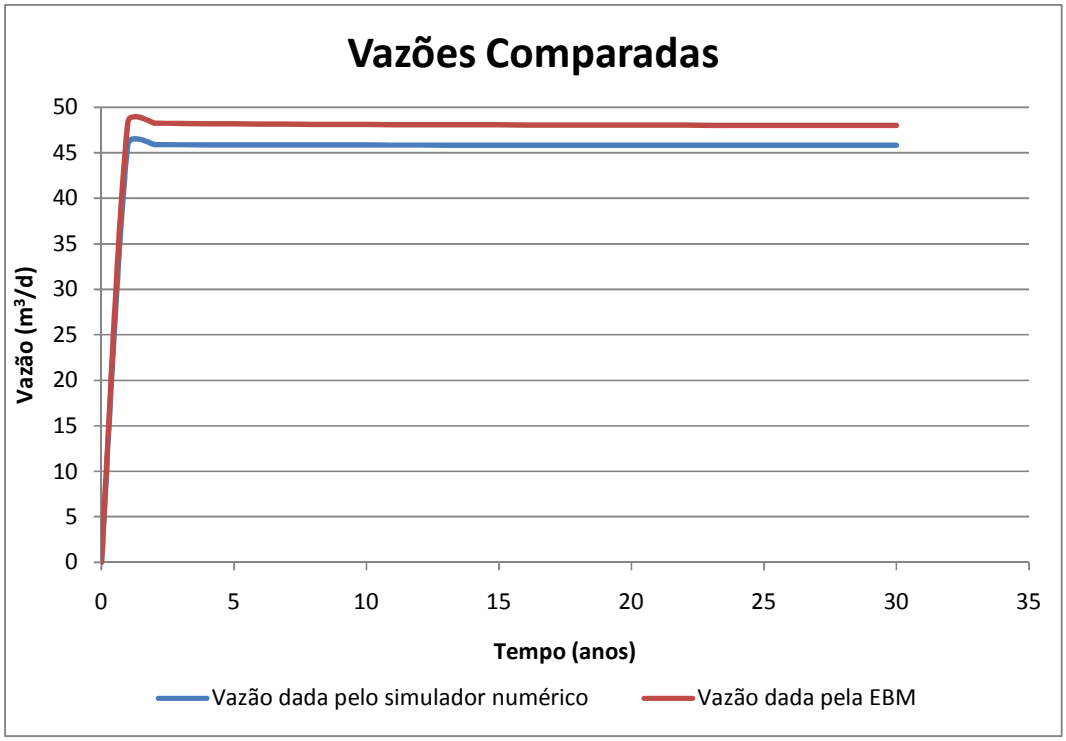


Figura 4.5 – Gráfico de vazões para comparação entre métodos

Pode-se perceber que o método de cálculo funcionou praticamente como o esperado. A diferença que se apresenta não é tão grande se compararmos a capacidade de resolução de variáveis que o simulador tem em comparação com os cálculos simples apresentados no outro método. Essa diferença é produto de uma melhor precisão que o simulador possui por receber mais variáveis.

Nota-se que a queda na vazão é praticamente a mesma, o que só demonstra a capacidade de resolução do problema.

Dessa forma checou-se a precisão do método existente em comparação com o simulador que já é consagrado na indústria.

5. Conclusões

Para escolha de modelos para influxo de água o modelo de Carter-Tracy se mostrou bastante preciso comparando-se com o modelo de Everdingen & Hurst. Os cálculos realizados posteriormente fazendo parte do modelo criavam a possibilidade de uma iteração para obtenção dos dados desejados. Utilizando um número razoável de períodos de tempo os cálculos pelo modelo tornavam-se quase tão exatos quanto o mais preciso.

Comparando-se os resultados encontrados nos cálculos e no simulador pode-se notar que o modelo de Carter-Tracy cumpre perfeitamente seu objetivo, dando de maneira aproximada o que se propõem a prever.

É possível se utilizar o Carter-Tracy, sem nenhuma dúvida, mas é necessário saber as limitações do modelo e utilizar outro modelo caso seja necessário. Um estudo prévio, verificando essas limitações é necessário para todas as simulações que forem feitas.

O simulador apresentou os dados com precisão, mostrando ser condizente com o esperado e com as equações consagradas. Assim a confiabilidade do simulador manteve-se em alta.

Por não possuir dados reais não se pôde checar o simulador, porém seus resultados atuaram de maneira esperada, dando assim credibilidade ao mesmo. A quantidade de dados de entrada mostra a precisão com que os cálculos devem estar sendo feitos.

É possível prosseguir com esses estudos analisando todos os parâmetros por algumas visões diferentes e principalmente de maneira mais prática. Verificando não só o estudo até o momento, como ampliando os horizontes do mesmo.

A possibilidade de análise para mais poço é uma maneira interessante de verificar o comportamento do Método de Carter-Tracy, sofrendo interferência dos poços próximos.

Verificar como Carter-Tracy se comporta em modelos de diferentes formatos pode ser uma opção para o estudo, verificando o quanto confiável é o mesmo. Pode-se também alterar o tipo de aqüífero, para infinito e para realimentado, verificando as limitações.

Esse mesmo estudo poderia ser feito para os diferentes métodos existentes, já que se sabe que o método de van Everdingen & Hurst e o Carter-Tracy não são os únicos utilizados.

Uma análise de um reservatório real comparando-se ambos os modelos seria uma oportunidade para chegar não só como Carter-Tracy segue a EBM, como também de verificar a simulação do IMEX. Certamente teria que ser um poço bem conhecido, para garantir que nenhum dado de entrada estivesse errado, mesmo assim essa experiência daria credibilidade aos resultados.

Por último, seria de grande importância um método que utiliza-se as equações apresentadas para realizar uma regressão, obtendo-se os parâmetros de entrada. É comum, para licitação de poços marginais que a empresa só possua os dados de produção, isso permitiria que pela regressão esta obtivesse dados que de maneira contrária precisaria de testes de formação que custariam muito mais, além de diminuir o risco já que esses dados podem ser obtidos antes de ser feito o leilão para concessão do bloco.

6. Referências Bibliográficas

CARTER, R. D. & TRACY, G. W. **An Improved Method for Calculating Water Influx**. J. Pet. Tech., 1960.

OZISIK, N. M. **Boundary Value Problems of Heat Conduction.** Dover Phoenix Editions, International Textbook Co., 1968.

ROSA, A. J., CARVALHO, R. S., XAVIER, J. A. D. **Engenharia de Reservatórios de Petróleo**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2006.

STEHFEST, H. **Algorithm 386, Numerical Inversion of Laplace Transforms – D5.** Communications of the ACM, 1970.

THOMAS, J. E. (org.) **Fundamentos de Engenharia de Petróleo**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2004.

VAN EVERDINGEN, A. F. & HURST, W. **The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs**. Trans. AIME, 1949.

ANEXO 1

In[1]:=
```
Off[General::spell]
Off[General::spell1]
```

In[3]:=
```
SetDirectory[
 "C:\\Users\\Owner\\Desktop\\Faculdade\\Projeto Final\\Aquiferos\\Comparação Everdingen
    Carter"]
```

Out[3]= C:\Users\Owner\Desktop\Faculdade\Projeto Final\Aquiferos\Comparação Everdingen Carter

---

Definição do problema

Considerando que rE e rO são constantes. Preferi definí-los agora.

In[4]:= $\text{EDP} = \partial_{rD,rD}\text{PD}[rD, tD] + \frac{1}{rD} * \partial_{rD}\text{PD}[rD, tD] == \partial_{tD}\text{PD}[rD, tD];$

In[5]:=
```
CI = PD[rD, tD] == 0 /. tD → 0;
```

In[6]:=
```
CCI = PD[rD, tD] == 1 /. rD → 1;
```

In[7]:= $\text{CCE} = \partial_{rD}\text{PD}[rD, tD] == 0 \text{ /. } rD \to reD;$

Vamos aplicar Laplace.

In[8]:=
```
LaplaceTransform[EDP, tD, s]
```

Out[8]= $\frac{\text{LaplaceTransform}\left[\text{PD}^{(1,0)}[rD, tD], tD, s\right]}{rD} + \text{LaplaceTransform}\left[\text{PD}^{(2,0)}[rD, tD], tD, s\right] == s\,\text{LaplaceTransform}[\text{PD}[rD, tD], tD, s] - \text{PD}[rD, 0]$

In[9]:=
```
Unprotect[LaplaceTransform];
LaplaceTransform[PD[rD_, tD_], tD_, s] := PS[rD]
LaplaceTransform[Derivative[n_, 0][PD][rD_, tD_], tD_, s] := Derivative[n][PS][rD];
Protect[LaplaceTransform];
```

In[13]:=
```
EDPs = LaplaceTransform[EDP, tD, s] /. ToRules[CI];
```

In[14]:=
```
EDP
```

Out[14]= $\frac{\text{PD}^{(1,0)}[rD, tD]}{rD} + \text{PD}^{(2,0)}[rD, tD] == \text{PD}^{(0,1)}[rD, tD]$

In[15]:=
```
EDPs
```

Out[15]= $\frac{\text{PS}'[rD]}{rD} + \text{PS}''[rD] == s\,\text{PS}[rD]$

In[16]:=
```
CCIs = LaplaceTransform[CCI, tD, s]
CCEs = LaplaceTransform[CCE, tD, s]
```

Out[16]= $\text{PS}[1] == \frac{1}{s}$

Out[17]= $\text{PS}'[reD] == 0$

In[18]:=
```
DSolve[EDPs, PS[rD], rD] // FullSimplify
```

Out[18]= $\left\{\left\{\text{PS}[rD] \to \text{BesselI}\left[0, rD\sqrt{s}\right] C[1] + \text{BesselY}\left[0, -i\,rD\sqrt{s}\right] C[2]\right\}\right\}$

In[19]:=
```
Unprotect[BesselY];
BesselY[n_, -i rD_ Sqrt[s_]] := BesselK[n, rD Sqrt[s]];
Protect[BesselY];
```

In[22]:=
```
Sol = DSolve[EDPs, PS[rD], rD] // FullSimplify // Flatten
```

Out[22]= $\left\{PS[rD] \to BesselI\left[0, rD\sqrt{s}\right] C[1] + BesselK\left[0, rD\sqrt{s}\right] C[2]\right\}$

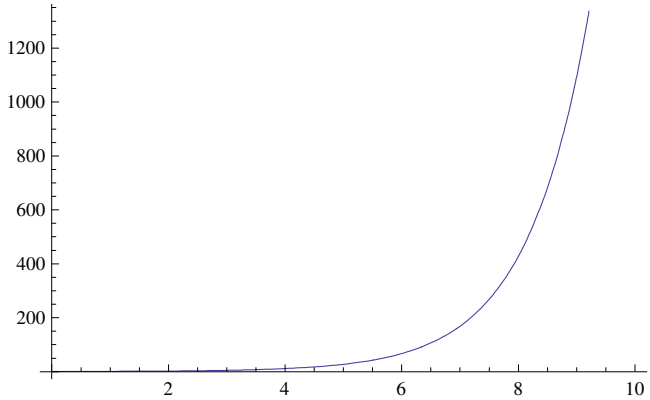
In[23]:=
```
PS1[rD_] = PS[rD] /. Sol
```

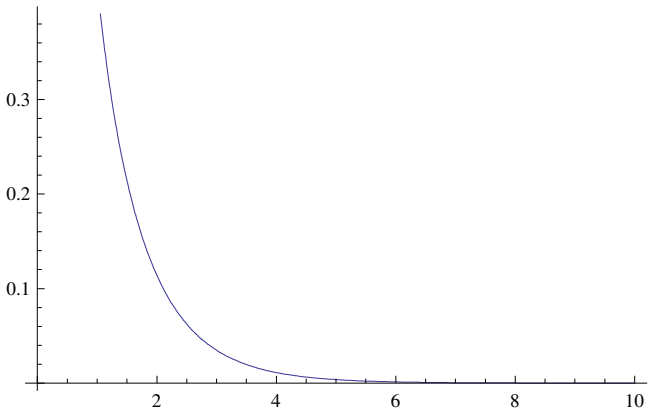
Out[23]= $BesselI\left[0, rD\sqrt{s}\right] C[1] + BesselK\left[0, rD\sqrt{s}\right] C[2]$

In[24]:=
```
PS1[1]
```

Out[24]= $BesselI\left[0, \sqrt{s}\right] C[1] + BesselK\left[0, \sqrt{s}\right] C[2]$

In[25]:=
```
Plot[BesselI[0, x], {x, 0, 10}]
Plot[BesselK[0, x], {x, 0, 10}]
```

Out[25]=


Out[26]=


In[27]:=
```
Sol = Solve[{CCIs /. PS → PS1, CCEs /. PS → PS1}, {C[2], C[1]}] // Flatten;
```

In[191]:=
```
PSf[rD_, reD_, s_] = PS1[rD] /. Sol
```

Out[191]=
$$\frac{BesselI\left[1, 8\sqrt{s}\right] BesselK\left[0, rD\sqrt{s}\right]}{s\left(BesselI\left[1, 8\sqrt{s}\right] BesselK\left[0, \sqrt{s}\right] + BesselI\left[0, \sqrt{s}\right] BesselK\left[1, 8\sqrt{s}\right]\right)} + \frac{BesselI\left[0, rD\sqrt{s}\right] BesselK\left[1, 8\sqrt{s}\right]}{s\left(BesselI\left[1, 8\sqrt{s}\right] BesselK\left[0, \sqrt{s}\right] + BesselI\left[0, \sqrt{s}\right] BesselK\left[1, 8\sqrt{s}\right]\right)}$$

Método Stehfest

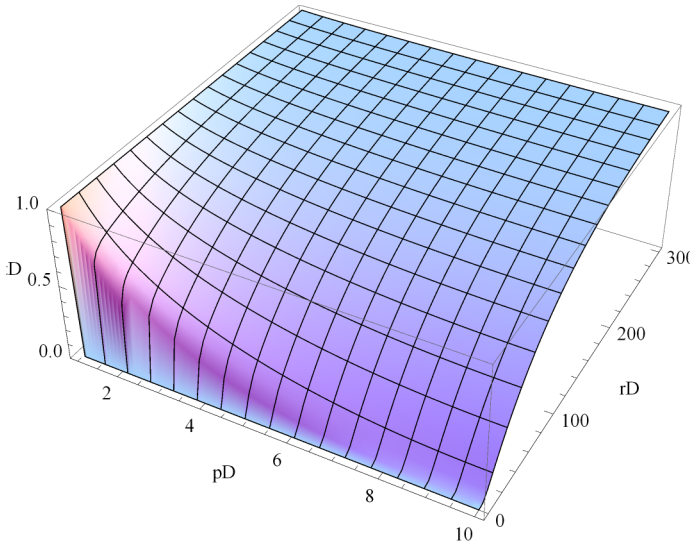
In[29]:=
```
Ni = 8;
```

In[30]:=
```
V[i_, NN_] =
  (-1)^(i+NN/2) * Sum[(k^(1+NN/2) * (2 * k) !) / ((NN / 2 - k) ! * (k !)^2 * (i - k) ! * (2 * k - i) !), {k, Floor[(i+1)/2], Min[i,NN/2]}];
```

In[31]:=
```
PD[rD_, reD_, tD_] = Log[2] / tD * Sum[V[i, Ni] * PSf[rD, reD, (Log[2] / tD) * i], {i, 1, Ni}];
```

In[32]:=
```
PDrDtD = Plot3D[PD[rD, 10, tD], {rD, 1, 10}, {tD, 0, 300},
  PlotRange → {0, 1}, PlotPoints → {50, 50}, AxesLabel → {pD, rD, tD}]
```

Out[32]=



In[33]:=
```
Export["PD x (rD,tD) reD10.jpg", PDrDtD, ImageResolution → 250];
```

In[34]:=
```
LaplaceTransform[-Integrate[rD * ∂rD PD1[rD, τ] /. rD → 1, {τ, 0, tD}], tD, s]
```

Out[34]= $-\frac{\text{LaplaceTransform}\left[\text{PD1}^{(1,0)}[1, \text{tD}], \text{tD}, \text{s}\right]}{\text{s}}$

In[35]:=
```
Unprotect[LaplaceTransform];
LaplaceTransform[PD1[rD_, tD_], tD_, s] := PS[rD]
LaplaceTransform[Derivative[n_, 0][PD1][rD_, tD_], tD_, s] := Derivative[n][PS][rD];
Protect[LaplaceTransform];
```

In[39]:=
```
LaplaceTransform[-Integrate[rD * ∂rD PD1[rD, τ] /. rD → 1, {τ, 0, tD}], tD, s]
```

Out[39]= $-\frac{\text{PS}'[1]}{\text{s}}$

In[40]:=
```
WDS[s_, reD_] = -(∂rD PSf[rD, reD, s] /. rD → 1) / s;
```

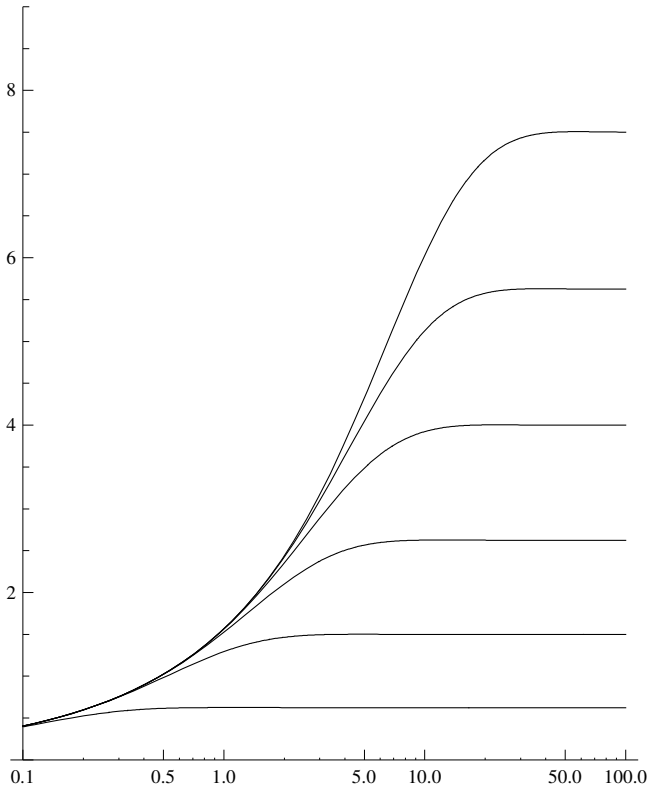
In[41]:=
```
WD[tD_, reD_] = Log[2] / tD * Sum[V[i, Ni] * WDS[(Log[2] / tD) * i, reD], {i, 1, Ni}];
```

In[42]:=
```
WD[50., 5]
```

Out[42]= 11.7788

In[43]:=
```
P1 = LogLinearPlot[WD[t, 1.5], {t, 0.1, 100},
   PlotRange → {0, 9}, AspectRatio → 7.2 / 6, PlotStyle → {Black}];
P2 = LogLinearPlot[WD[t, 2], {t, 0.1, 100}, PlotRange → {0, 9},
   AspectRatio → 7.2 / 6, PlotStyle → {Black}];
P3 = LogLinearPlot[WD[t, 2.5], {t, 0.1, 100}, PlotRange → {0, 9},
   AspectRatio → 7.2 / 6, PlotStyle → {Black}];
P4 = LogLinearPlot[WD[t, 3], {t, 0.1, 100}, PlotRange → {0, 9},
   AspectRatio → 7.2 / 6, PlotStyle → {Black}];
P5 = LogLinearPlot[WD[t, 3.5], {t, 0.1, 100}, PlotRange → {0, 9},
   AspectRatio → 7.2 / 6, PlotStyle → {Black}];
P6 = LogLinearPlot[WD[t, 4], {t, 0.1, 100}, PlotRange → {0, 9},
   AspectRatio → 7.2 / 6, PlotStyle → {Black}];
Show[P1, P2, P3, P4, P5, P6]
Export["WD x tD.jpg", Show[P1, P2, P3, P4, P5, P6], ImageResolution → 250];
```

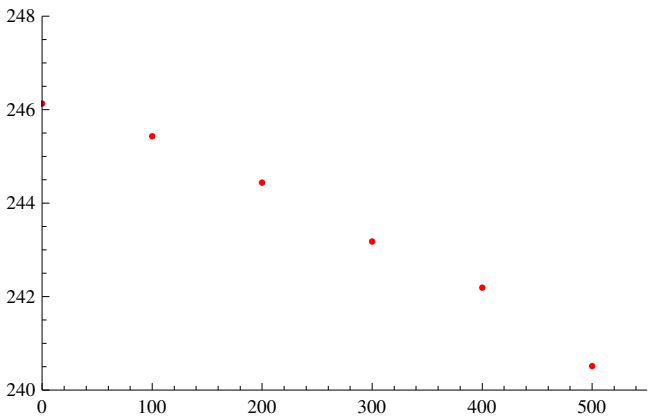
Out[49]=



In[51]:=
```
DadosP =
  {{0, 246.13}, {100, 245.43}, {200, 244.44}, {300, 243.18}, {400, 242.19}, {500, 240.51}};
```

In[52]:=
```
P1 = ListPlot[DadosP, PlotRange → {{0, 550}, {240, 248}}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]]
```

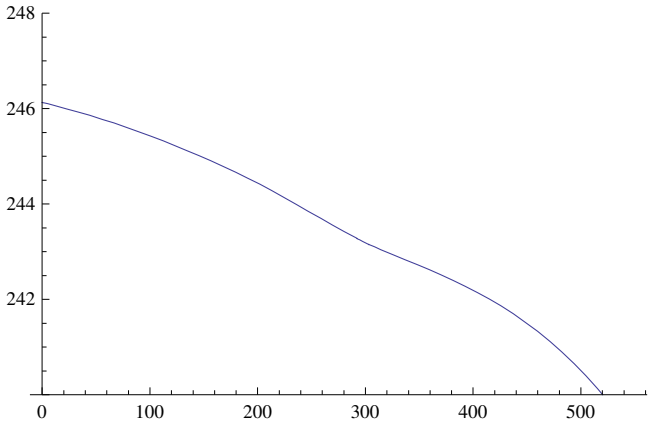
Out[52]=



In[53]:=
```
Pa = Interpolation[DadosP];
```

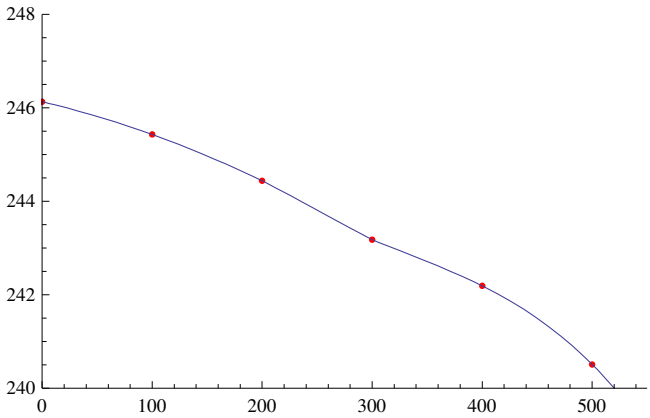
In[54]:=
```
P2 = Plot[Pa[tx], {tx, 0, 550}, PlotRange → {240, 248}]
```

Out[54]=



In[55]:=
```
Show[P1, P2]
```

Out[55]=



Superposição de Efeitos

In[56]:=
```
Pini = Pa[0];
```

In[57]:=
```
U = 1462.9;
```

In[58]:=
```
We[tD_, reD_] =
  U * NIntegrate[(∂tDx WD[tDx - τD, reD] /. tDx → tD) * (Pini - Pa[τD / 0.2191]), {τD, 0, tD}];
```

NIntegrate::nlim : τD = tD is not a valid limit of integration. ≫

NIntegrate::nlim : τD = tD is not a valid limit of integration. ≫

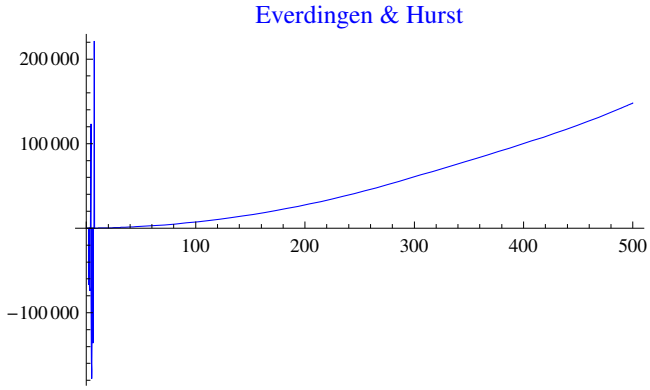
In[59]:=
```
reD = 8;
```

In[60]:=
```
We[0.2191 * 500., reD]
```

Out[60]= 147979.

In[81]:=
```
PEverdingen = Plot[We[t * 0.2191, reD], {t, 0, 500},
  PlotStyle → Directive[Blue], PlotLabel → Style["Everdingen & Hurst", Blue]]
```

Out[81]=



CARTER - TRACY

In[82]:=
```
PDCT[tD_, reD_] = { 1 / 2 * (Log[tD] + 0.80907)                  tD / (π*(reD^2 - 1)) < 0.1
                    2 / reD^2 * tD + Log[reD] - 3/4              tD / (π*(reD^2 - 1)) ≥ 0.1 ;
```

In[83]:=
```
WeCT[0] = 0;
```

In[180]:=
```
Jmax = 250;
```

In[181]:=
```
ΔtCT = 500 / Jmax;
ΔtDCT = ΔtCT * 0.2191;
```

In[183]:=
```
For[j = 0, j ≤ Jmax, j++, tDCT[j] = j * ΔtCT * 0.2191];
```

In[184]:=
```
For[j = 1, j ≤ Jmax, j++, {
    WeCT[j] =
     WeCT[j - 1] + ((U * (Pini - Pa[tDCT[j] / 0.2191]) - WeCT[j - 1] * D[PDCT[tDx, reD], tDx] /.
            tDx → tDCT[j]) / (PDCT[tDCT[j], reD] - tDCT[j - 1] * D[PDCT[tDx, reD], tDx] /.
            tDx → tDCT[j])) * (tDCT[j] - tDCT[j - 1])
  }];
```

In[185]:=
```
(*TableForm[Table[{j,j*ΔtCT,Pa[j*ΔtCT],Pini-Pa[j*ΔtCT],tDCT[j],
    PDCT[tDCT[j],reD],D[PDCT[tDx,reD],tDx]/.tDx→tDCT[j],WeCT[j]},{j,0,Jmax}],
  TableHeadings→{None,{"j",tj,Pj,ΔPj,tDj,"PD","PD'","We"}},TableSpacing→{1,3}]*)
```

In[186]:=
```
WearrayCT = Array[{# * ΔtCT, WeCT[#]} &, Jmax];
```

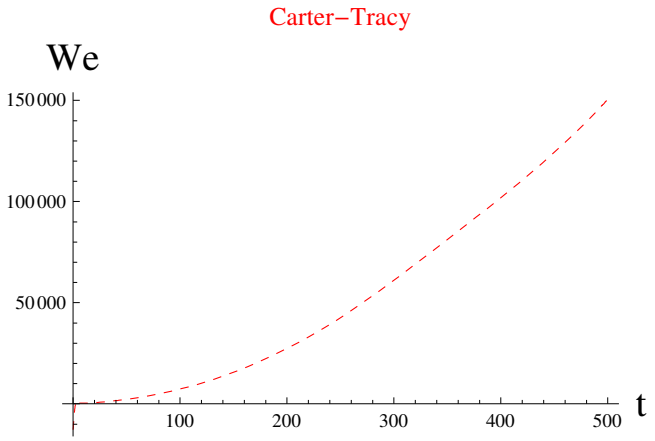
In[187]:=
```
WeaCT = Interpolation[WearrayCT];
```

In[188]:=
```
PCarter = Plot[WeaCT[j], {j, 0, Jmax * ΔtCT},
  PlotStyle → Directive[Dashed, Red], PlotLabel → Style["Carter-Tracy", Red],
  AxesLabel → {Style["t", FontSize → 18], Style["We", FontSize → 18]}]
```

InterpolatingFunction::dmval :

Input value {0.0102143} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used. ≫

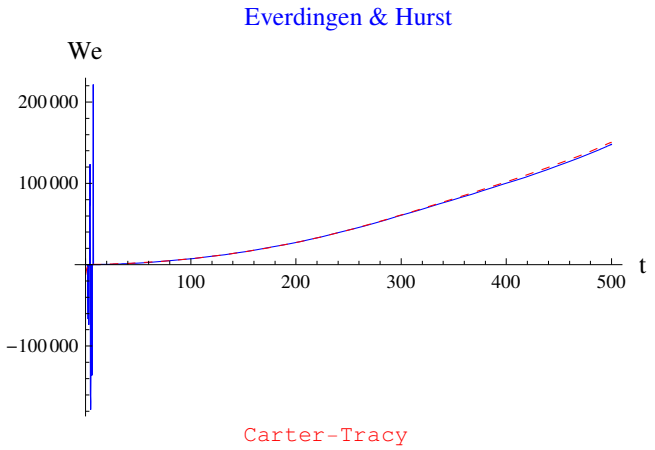
Out[188]=



COMPARAÇÃO

In[189]:=
```
PlotCompara = Labeled[Show[PEverdingen, PCarter, AxesLabel →
    {Style["t", FontSize → 12], Style["We", FontSize → 12]}], Style["Carter-Tracy", Red]]
```

Out[189]=



In[190]:=
```
Export["Jmax=" <> ToString[Jmax] <> ".jpg", PlotCompara, ImageResolution → 250]
```

Out[190]= Jmax=250.jpg

In[102]:=
```
WeaCT[Jmax * ΔtCT]
We[0.2191 * 500., reD]
WeaCT[Jmax * ΔtCT] - We[0.2191 * 500., reD]
(WeaCT[Jmax * ΔtCT] - We[0.2191 * 500., reD]) / We[0.2191 * 500., reD]
```

Out[102]= 150928.

Out[103]= 147979.

Out[104]= 2948.52

Out[105]= 0.0199252

ANEXO 2

```
Off[General::spell]
Off[General::spell1]

SetDirectory[
 "C:\\Users\\Ivan\\Desktop\\Outro PC\\Faculdade\\Projeto Final\\Parte Escrita"]
```

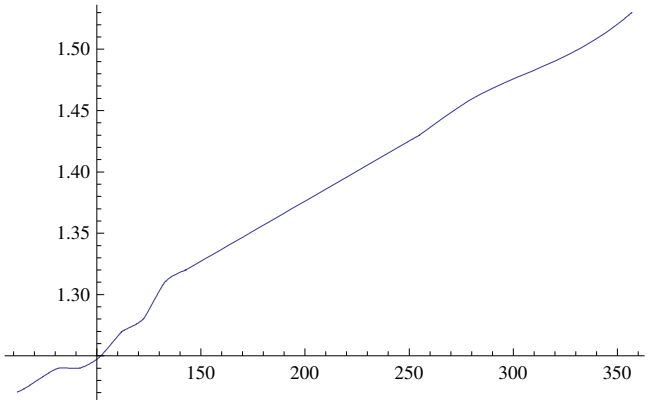
```
C:\Users\Ivan\Desktop\Outro PC\Faculdade\Projeto Final\Parte Escrita
```

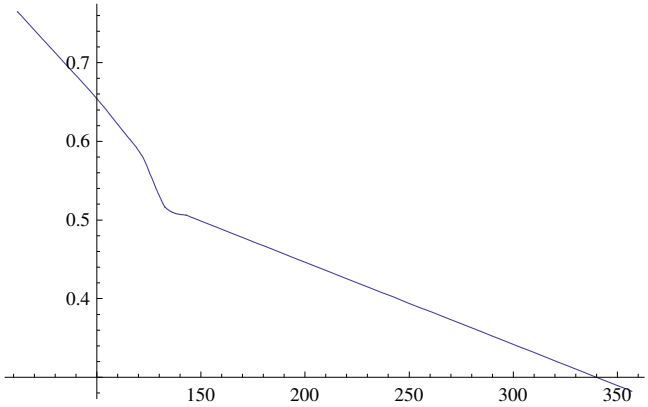
```
Pini = 246.13;
API = 60;
Nori = 3.1953 * 10^6;
Tres = 70;
ϕ = 0.22;
Sw = 0.2;
k = 100;
IPini = 0.2;

Pwfmin = 2.039;

Bo = Interpolation[{{356.89, 1.53}, {305.9, 1.48}, {280.41, 1.46}, {254.92, 1.43},
    {203.94, 1.38}, {193.74, 1.37}, {183.54, 1.36}, {173.35, 1.35}, {163.15, 1.34},
    {152.95, 1.33}, {142.76, 1.32}, {132.56, 1.31}, {122.36, 1.28}, {112.16, 1.27},
    {101.97, 1.25}, {91.77, 1.24}, {81.57, 1.24}, {71.38, 1.23}, {61.18, 1.22}}];
μ = Interpolation[{{356.89, 0.2823333}, {305.9, 0.335667}, {280.41, 0.362333},
    {254.92, 0.389}, {203.94, 0.442333}, {193.74, 0.453}, {183.54, 0.463667},
    {173.35, 0.474333}, {163.15, 0.485}, {152.95, 0.495667}, {142.76, 0.506333},
    {132.56, 0.517}, {122.36, 0.579}, {112.16, 0.614}, {101.97, 0.649},
    {91.77, 0.6785}, {81.57, 0.708}, {71.38, 0.7375}, {61.18, 0.767}}];
```

```
Plot[Bo[P], {P, 61.93, 356.89}]
Plot[μ[P], {P, 61.93, 356.89}]
```






```
Boini = Bo[Pini];
μini = μ[Pini];
kroini = 1;
kro = kroini;
```

$$\text{IPw[t_] := IPini} * \left(\frac{\text{kro / (Bo[P[t]] * μ[P[t]])}}{\text{kroini / (Boini * μini)}}\right);$$

```
qw[t_] := IPw[t] * (P[t] - Pwfmin);

ro = 750.;
h = 8.;
co = 111.43 * 10^-6;
cw = 42.45 * 10^-6;
cf = 48.3 * 10^-6;
Bw = 1.01;
Erro = 0.01;

ct = cf + cw;

So = 1 - Sw;
```

$$\text{ceo} = \frac{\text{co * So + cw * Sw + cf}}{\text{1 - Sw}}$$

```
0.000182418
```

```
U = 2 * π * ϕ * h * ct * ro^2
```

564.497

```
tD[t_] := (0.0003484 * k * t * (365 * 24)) / (ϕ * μ[P[t]] * ct * ro^2)
```

```
pD[tDv_] = 1/2 * (Log[tDv] + 0.80907)
```

$\frac{1}{2}(0.80907 + \text{Log}[\text{tDv}])$

```
∂tDv pD[tDv]
```

$\frac{1}{2\,\text{tDv}}$

```
Δt = 1;
ttotal = 30;

We[0] = 0;
Np[0] = 0;
Δp[0] = 0;

Wp = Interpolation[{{0, 0}, {1, 9.81377 * 10^-5}, {2, 0.000282304}, {3, 0.000491084},
    {4, 0.00070994}, {5, 0.000938216}, {6, 0.00117784}, {7, 0.00143085}, {8, 0.00169525},
    {9, 0.00197013}, {10, 0.00225329}, {11, 0.00254452}, {12, 0.00284358},
    {13, 0.00315081}, {14, 0.00346433}, {15, 0.00378467}, {16, 0.00411181},
    {17, 0.00444871}, {18, 0.00480781}, {19, 0.00523285}, {20, 0.00587031},
    {21, 0.00735334}, {22, 0.504186}, {23, 10.0509}, {24, 58.6298}, {25, 161.368},
    {26, 300.086}, {27, 471.919}, {28, 699.513}, {29, 941.549}, {30, 1189.62}}];

P[t_] := Pini - Δp[t / Δt];

For[j = 1, j ≤ ttotal / Δt, j++, {
   Diferenca = Erro + 1;
   Δp[j] = Δp[j - 1];
   tDj[j] = tD[j * Δt];
   For[i = 1, Diferenca ≥ Erro, i++, {
     Δpantigo = Δp[j];
     Np[j * Δt] = qw[j * Δt] * 365 + Np[(j - 1) * Δt];
     Δp[j] = (Boini * Np[j * Δt] + Wp[j * Δt] -
         We[j - 1] * ((pD[tD[j * Δt]] - tD[j * Δt] * ∂tDv pD[tDv] /. tDv → tD[j * Δt]) /
             (pD[tD[j * Δt]] - tD[(j - 1) * Δt] * ∂tDv pD[tDv] /. tDv → tD[j * Δt]))) /
       (Boini * (Nori * ceo - Np[j * Δt] * co) + U * ((tD[j * Δt] - tD[(j - 1) * Δt]) /
             (pD[tD[j * Δt]] - tD[(j - 1) * Δt] * ∂tDv pD[tDv] /. tDv → tD[j * Δt])));
     Diferenca = { Δpantigo - Δp[j]   Δpantigo ≥ Δp[j]
                   Δp[j] - Δpantigo   Δpantigo < Δp[j] ;
    }];
   We[j] = We[j - 1] + ((U * Δp[j] - We[j - 1] * ∂tDv pD[tDv] /. tDv → tD[j * Δt]) / (pD[tD[j * Δt]] -
           tD[(j - 1) * Δt] * ∂tDv pD[tDv] /. tDv → tD[j * Δt])) * (tD[j * Δt] - tD[(j - 1) * Δt]);
   Np[j * Δt] = qw[j * Δt] * 365 + Np[(j - 1) * Δt];
  }];
```

```
Tabela = TableForm[Table[{cont, qw[cont * Δt], Np[cont * Δt],
    Wp[cont * Δt], Δp[cont], P[cont * Δt], We[cont]}, {cont, 1, (j - 1)}],
  TableHeadings → {None, {"Ano", "Qw", "Npj", "Wpj", "ΔP", "P", "We"}},
  TableSpacing → {1, 3}]
```

Ano	Qw	Npj	Wpj	ΔP	P	We
1	48.3604	17651.5	0.0000981377	1.55952	244.57	23800.7
2	48.2767	35272.5	0.000282304	1.84586	244.284	48616.5
3	48.2354	52878.4	0.000491084	1.98698	244.143	73530.5
4	48.2071	70474.	0.00070994	2.08399	244.046	98466.7
5	48.1854	88061.7	0.000938216	2.15846	243.972	123410.
6	48.1677	105643.	0.00117784	2.21896	243.911	148357.
7	48.1529	123219.	0.00143085	2.26991	243.86	173303.
8	48.14	140790.	0.00169525	2.31392	243.816	198249.
9	48.1287	158357.	0.00197013	2.35265	243.777	223194.
10	48.1187	175920.	0.00225329	2.38724	243.743	248137.
11	48.1096	193480.	0.00254452	2.41848	243.712	273078.
12	48.1013	211037.	0.00284358	2.44697	243.683	298016.
13	48.0936	228591.	0.00315081	2.47315	243.657	322954.
14	48.0866	246143.	0.00346433	2.49737	243.633	347889.
15	48.08	263692.	0.00378467	2.51989	243.61	372822.
16	48.0739	281239.	0.00411181	2.54095	243.589	397753.
17	48.0681	298784.	0.00444871	2.56072	243.569	422682.
18	48.0627	316327.	0.00480781	2.57935	243.551	447610.
19	48.0576	333868.	0.00523285	2.59696	243.533	472535.
20	48.0527	351407.	0.00587031	2.61365	243.516	497460.
21	48.0481	368945.	0.00735334	2.62953	243.5	522382.
22	48.0437	386481.	0.504186	2.64471	243.485	547303.
23	48.0392	404015.	10.0509	2.66005	243.47	572231.
24	48.034	421547.	58.6298	2.67774	243.452	597193.
25	48.0286	439078.	161.368	2.69633	243.434	622206.
26	48.0239	456606.	300.086	2.71252	243.417	647255.
27	48.0194	474134.	471.919	2.72805	243.402	672335.
28	48.0143	491659.	699.513	2.74556	243.384	697466.
29	48.0106	509183.	941.549	2.75826	243.372	722615.
30	48.0077	526705.	1189.62	2.76826	243.362	747755.

```
Export["Tabela.xls", Tabela]
```

Tabela.xls