

**COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS DE IDENTIFICAÇÃO DE PLANTAS COM  
RESPOSTAS AO DEGRAU MONOTONICAMENTE CRESCENTES E SINTONIA DE  
CONTROLADORES PID**

Sérgio Augusto Pereira Gomes

PROJETO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO ELETRICISTA.

Aprovada por:

---

Marcos Vicente de Brito Moreira, D. Sc.  
(Orientador)

---

João Carlos dos Santos Basilio, D. Phil.

---

Oumar Diene, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL  
SETEMBRO DE 2008

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pelas oportunidades que foram postas na minha vida, e por me permitir chegar até este momento tão importante.

Agradeço aos meus pais que me ensinaram muito, e me deram condições de chegar até aqui. Eles são as pessoas mais importantes na minha vida e sempre me apoiaram e me deram forças para que eu buscasse o que queria.

Agradeço a minha mãe, Beatriz da Conceição, por se manter ao meu lado em muitas madrugadas de estudo e por me dar força para me manter acordado; e a meu pai, Selem Gomes, por sempre se interessar em saber o estava aprendendo e ouvindo todas as explicações sobre o funcionamento elétrico das coisas.

Agradeço a minha namorada, Viviane Santos de Souza, por me ouvir e me consolar em momentos de dificuldade e por me ajudar muito na conclusão deste trabalho.

Agradeço a meus familiares, que quando tudo parecia somente faculdade, ajudaram a me desligar um pouco do mundo acadêmico e viver um pouco mais, nas viagens e nos momentos de descontração.

Agradeço a meus amigos de faculdade, André Almeida, Aretha Vidal, Carla da Gama, Carlos Roberto, Eduardo Jubini, Paulo Vinícius, Priscilla Guarini, Pedro Loques, Renata Silva, Renato Haddad e todos os que convivi desde 2003. Eles estiveram comigo nas aulas, nas provas, nas madrugadas de estudo, nas brincadeiras do dia-a-dia, nos dias de angústia para receber os resultados e nas festas onde podíamos nos desligar e nos divertir juntos.

Agradeço aos professores da UFRJ, pelo conhecimento passado e pela atenção dada durante todo o curso.

Por fim, agradeço em especial ao meu orientador Marcos Moreira por ter sido tão dedicado e por estar sempre a disposição para me auxiliar durante este trabalho.

# RESUMO

Sérgio Augusto Pereira Gomes  
UFRJ – EE

Projeto de Graduação  
Setembro 2008

## Comparação entre métodos de identificação de plantas com respostas ao degrau monotonicamente crescentes e sintonia de controladores PID

Atualmente, mais da metade dos controladores utilizados na indústria são controladores PID em sua forma clássica ou em modificações desta. Seu uso é bastante difundido, devido à sua aplicabilidade em grande parte dos sistemas de controle. Outro motivo determinante para seu uso é a necessidade de ajuste de poucos parâmetros. Contudo, para se obter o resultado esperado é necessário fazer uma boa sintonia do controlador PID, sendo esta dependente do modelo matemático construído para descrever a dinâmica da planta. Assim, para sintonia de controladores PID são necessárias duas etapas: (i) identificação da planta por um modelo matemático, sendo este, em geral, representado por uma função de transferência; (ii) baseado no modelo obtido, sintonizar os parâmetros do controlador PID.

O objetivo deste trabalho é apresentar a influência dos diferentes métodos de identificação da planta na resposta ao degrau obtida pelo sistema controlado, sendo o controlador ajustado por diversos métodos de sintonia de controladores PID. Para tanto, são apresentados quatro métodos de identificação da planta para processos com resposta ao degrau monotonicamente crescentes e quatro métodos de sintonia de controladores PID. Além disso, pretende-se também, analisar os resultados obtidos pelo sistema em malha fechada para as plantas utilizadas nos exemplos, tendo seus controladores sintonizados por cada um dos métodos de sintonia.

# Sumário

Capítulo 1	Introdução .....	1
Capítulo 2	Controladores PID .....	3
2.1	Introdução .....	3
2.2	Estrutura básica do controlador PID .....	3
2.2.1	Ação Proporcional .....	4
2.2.2	Ação Integral .....	5
2.2.3	Ação Derivativa .....	7
2.3	Modificações no controlador PID visando implementação .....	8
2.3.1	Modificações na parcela derivativa .....	8
2.3.2	Modificações no sinal de referência .....	10
2.4	Conclusões .....	12
Capítulo 3	Métodos de Identificação da Planta .....	13
3.1	Introdução .....	13
3.2	Sistemas com respostas ao degrau monotonicamente crescentes .....	13
3.2.1	Uma medida da proximidade entre a resposta ao degrau do sistema real e do modelo .....	14
3.3	Métodos de identificação da planta baseados na resposta ao degrau .....	15
3.3.1	Método da máxima tangente .....	16
3.3.2	Método de Minimização das Áreas .....	21
3.3.3	Método das Áreas .....	27
3.3.4	Método de Basílio e Matos .....	33
3.4	Conclusões .....	39
Capítulo 4	Métodos de sintonia de controladores PID .....	40
4.1	Introdução .....	40
4.2	Método de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau .....	40
4.2.1	Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$ .....	41
4.3	Método de Cohen-Coon .....	51
4.3.1	Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$ .....	51
4.4	Método Polinomial .....	60
4.4.1	Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$ .....	62
4.5	Método de Basílio e Matos [4] .....	70
4.5.1	Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$ .....	72
4.6	Comparação entre os métodos de sintonia de controladores PID .....	76
4.7	Conclusões .....	79
Capítulo 5	Conclusão .....	80
	Referências Bibliográficas .....	81

# Capítulo 1 Introdução

Os controladores PID (Proporcional – Integral – Derivativo), são encontrados em diversos tipos de aplicações, principalmente nas indústrias. Eles constituem a estratégia de controle mais utilizada na indústria ao longo de muitos anos, sendo na maioria dessas, suficientes apenas para garantir um bom desempenho do processo controlado. Contudo, este bom desempenho só ocorre quando o controlador é ajustado de forma adequada, sendo esta a maior dificuldade de sua utilização. Os métodos de sintonia de controladores PID, utilizam uma função de transferência como modelo da planta, sendo a mais utilizada, a função de primeira ordem com atraso [1], [2] e [3]. Assim, para a obtenção do controlador existem duas etapas: *(i)* identificação da planta por uma função de transferência; *(ii)* sintonia dos parâmetros do controlador.

Neste trabalho são apresentados diferentes métodos de identificação para plantas com resposta ao degrau monotonicamente crescentes. Os modelos obtidos a partir dos métodos de identificação são avaliados baseados em uma medida da proximidade das respostas ao degrau do sistema real e do modelo identificado. Este procedimento é feito com três exemplos de plantas obtidas a partir da literatura.

Após esta análise, são considerados quatro métodos para sintonia de controladores PID. Assim visa-se fazer uma comparação entre as respostas do sistema em malha fechada a uma entrada de referência e a perturbação na entrada da planta, ambas em degrau, para cada um dos métodos de sintonia, utilizando as plantas identificadas. Desta forma, pretende-se analisar qual a influência de métodos de identificação nos métodos de sintonia. Após isto, são feitas novas comparações, sendo estas, relacionadas aos resultados obtidos pelos diferentes métodos de sintonia, buscando assim analisar as respostas do sistema em malha fechada, novamente para rejeição de perturbação na entrada da planta e rastreamento de um sinal de referência igual ao degrau.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: no capítulo 2 é apresentada a teoria de controladores PID. No capítulo 3 são apresentados diversos métodos para identificação de plantas por sistemas de primeira ordem com atraso e de segunda ordem com pólos reais e iguais sem atraso. Além dos métodos de identificação, é também definido um método para medir a

proximidade entre as curvas de resposta ao degrau da planta e do correspondente modelo matemático. No capítulo 4, são apresentados quatro métodos de sintonia para controladores PID, onde são feitas comparações para verificar a influência do método de identificação da planta no ajuste do controlador. Além disso, são analisados os resultados obtidos pelos diversos métodos de sintonia de controladores PID para três plantas com dinâmicas diferentes. Por fim, no capítulo 5 são apresentadas as conclusões do trabalho.

# Capítulo 2 Controladores PID

## 2.1 Introdução

Neste capítulo a teoria de controladores PID (Proporcional – Integral – Derivativo) é apresentada. Inicialmente, na seção 2.2, a forma clássica do controlador PID é mostrada e cada uma das suas parcelas é descrita. Na seção 2.3 são apresentadas modificações na forma clássica do controlador PID visando tornar possível a sua implementação e melhorar o desempenho do sistema realimentado. Na seção 2.4 é mostrado o modelo matemático do controlador utilizado neste trabalho, a função de transferência em malha fechada utilizando este controlador e a função de transferência entre a saída do sistema e uma perturbação na entrada da planta. Finalmente, na seção 2.5, são apresentadas as conclusões deste capítulo.

## 2.2 Estrutura básica do controlador PID

O modelo usualmente encontrado na literatura para um controlador PID é apresentado pela equação (2.1) [2]:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(s) ds + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (2.1)$$

em que  $u(t)$  é o sinal de controle e  $e(t)$  é o sinal de erro entre o sinal de referência,  $r(t)$ , e a resposta do sistema,  $y(t)$ . A partir da equação (2.1), pode-se ver que o controlador PID é composto pela soma de três parcelas: uma proporcional ao erro, uma proporcional à integral do erro e outra proporcional à derivada do erro. Nas subseções 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 são descritos cada um dos termos do controlador PID, mostrando algumas particularidades.

## 2.2.1 Ação Proporcional

A parcela proporcional do controlador PID pode ser representada pela seguinte equação:

$$u_p(t) = K_p e(t). \quad (2.2)$$

A ação proporcional, como o próprio nome diz, age proporcionalmente ao erro entre a entrada e a saída do sistema.

Para mostrar o efeito do controlador proporcional, considere a figura 2.1, em que  $d(t)$  denota a perturbação na entrada da planta, e suponha que o processo seja descrito por um ganho estático:

$$y(t) = K \hat{u}_p(t). \quad (2.3)$$

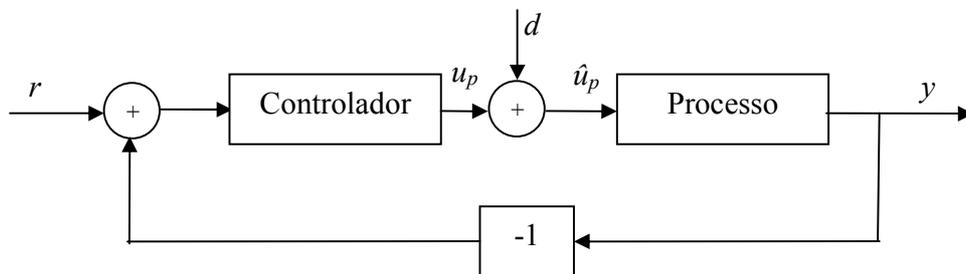


Figura 2.1 – Diagrama de blocos de um sistema realimentado

Assim, supondo que o controlador seja descrito pela equação (2.2), obtém-se a seguinte equação que descreve o sinal de saída do sistema em malha fechada representado pela figura 2.1:

$$y(t) = \frac{K_p K}{1 + K_p K} r(t) + \frac{K}{1 + K_p K} d(t). \quad (2.4)$$

A partir da equação (2.4), é possível verificar que o valor do ganho  $K_p$  deve ser alto para que a saída do processo  $y(t)$  seja próxima do valor de referência  $r(t)$ . Além disso, sendo  $K_p$  um valor elevado, o sistema torna-se menos sensível ao sinal de perturbação  $d(t)$ . Contudo, é possível ver que a ação proporcional provoca um erro em regime permanente impedindo o rastreamento do sinal de referência. Além disso, ao considerar a dinâmica do sistema, valores muito elevados para o ganho proporcional podem levar o sistema em malha fechada à instabilidade para sistemas que possuam grau relativo maior que 2 [1].

## 2.2.2 Ação Integral

A ação integral age proporcionalmente à integral do erro do sistema. Ela é responsável por garantir um erro igual a zero em regime permanente para entradas em degrau, quando o sistema em malha fechada for internamente estável, e rejeitar perturbações na entrada da planta iguais ao degrau. Uma forma de verificar o valor nulo do erro em regime permanente para uma entrada igual ao degrau é apresentada a seguir. Para tanto, considere que o sinal de controle seja dado por:

$$u_{PI}(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda, \quad (2.5)$$

em que  $T_i$  denota o tempo integral. Considere também que o sistema realimentado seja o mesmo apresentado pela figura 2.1 substituindo-se o sinal  $u_P(t)$  por  $u_{PI}(t)$  e suponha que o sistema realimentado seja estável. Aplicando transformada de Laplace na equação (2.5) obtém-se a seguinte função de transferência do controlador PI:

$$K_{PI}(s) = \frac{K_p \left( s + \frac{1}{T_i} \right)}{s}. \quad (2.6)$$

Assim, denotando por  $G(s)$  a função de transferência da planta tem-se que a função de transferência do sistema em malha fechada é dada por:

$$Y(s) = \frac{(K_p T_i s + K_p)G(s)}{(K_p T_i s + K_p)G(s) + T_i s} R(s), \quad (2.7)$$

e

$$E(s) = R(s) - Y(s). \quad (2.8)$$

Substituindo-se a equação (2.7) na equação (2.8) obtém-se:

$$E(s) = \left[ 1 - \frac{(K_p T_i s + K_p)G(s)}{(K_p T_i s + K_p)G(s) + T_i s} \right] R(s) \Rightarrow E(s) = \left[ \frac{T_i s}{(K_p T_i s + K_p)G(s) + T_i s} \right] R(s). \quad (2.9)$$

Ao analisar a equação (2.9), é possível ver, supondo que  $G(s)$  não tenha zeros na origem, que o controlador PI introduz um zero na origem na função de transferência entre o sinal de erro,  $E(s)$ , e o sinal de referência,  $R(s)$ . Dessa forma, aplicando-se o teorema do valor final para uma entrada  $r(t)$  do tipo degrau unitário, tem-se que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left[ \frac{T_i s}{(K_p T_i s + K_p)G(s) + T_i s} \right] = 0, \quad (2.10)$$

o que mostra que o erro  $e(t)$  se torna zero quando o tempo tende para o infinito.

Para mostrar que o sistema em malha fechada rejeita um sinal de perturbação na entrada da planta igual ao degrau, é necessário obter a função de transferência entre a saída do sistema,  $y_d(t)$ , e o sinal de perturbação,  $d(t)$ . Após algumas manipulações algébricas simples pode-se mostrar que:

$$Y_d(s) = \left[ \frac{T_i s G(s)}{(K_p T_i s + K_p)G(s) + T_i s} \right] D(s), \quad (2.11)$$

em que  $D(s)$  e  $Y_d(s)$  denotam, respectivamente, as transformadas de Laplace dos sinais de perturbação  $d(t)$  e da resposta do sistema à perturbação  $y_d(t)$ . Aplicando novamente o teorema do valor final tem-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_d(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \left[ \frac{T_i s G(s)}{(K_p T_i s + K_p) G(s) + T_i s} \right] = 0. \quad (2.12)$$

O que mostra que o sistema realimentado é também capaz de rejeitar perturbações na entrada da planta iguais ao degrau.

### 2.2.3 Ação Derivativa

A ação derivativa age proporcionalmente à derivada do erro do sistema e é responsável por melhorar o seu desempenho como é explicado a seguir. Devido à dinâmica do processo, existe um atraso entre a variação do sinal de controle e a sua influência no sinal de saída. Um controlador com ação proporcional-derivativa pode ser interpretado como se o controle atuasse proporcionalmente sobre a previsão do sinal de erro, onde essa previsão é feita extrapolando a curva do erro utilizando a sua tangente no instante de tempo  $t$ , como mostrado na figura 2.2.

O sinal de controle de um controlador PD é dado pela seguinte equação:

$$u_{PD}(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}, \quad (2.13)$$

em que  $T_d$  é o tempo derivativo.

Após apresentadas as três parcelas do controlador PID, serão apresentadas algumas modificações necessárias ao controlador para sua implementação.

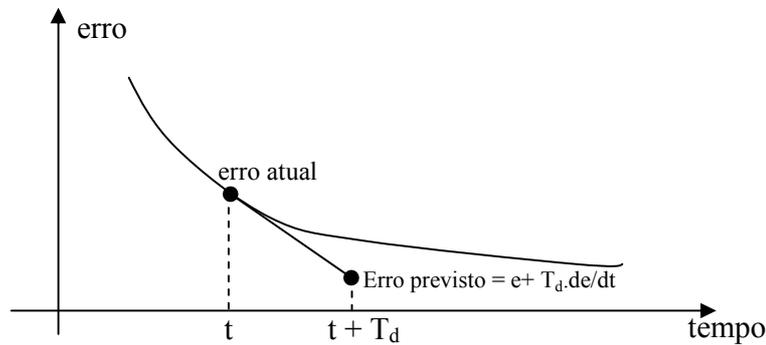


Figura 2.2 – Interpretação da ação proporcional-derivativa como ação de controle preditiva.

## 2.3 Modificações no controlador PID visando implementação

A estrutura do controlador PID apresentada na equação (2.1) possui problemas para sua implementação, que exigem algumas modificações.

### 2.3.1 Modificações na parcela derivativa

A primeira modificação está na ação derivativa, uma vez que um derivador puro não é fisicamente realizável [2]. Um outro problema com relação à implementação do derivador puro está relacionado com a existência de ruído no sinal de saída medido, que pode ser visto utilizando-se a resposta em frequência do derivador. Para tanto, suponha que o sinal de saída medido seja dado por:

$$y_m(t) = y(t) + n(t), \quad (2.14)$$

em que  $y(t)$  denota o sinal de saída do sistema e  $n(t)$  denota o ruído introduzido pelo sistema de medição. O sinal de controle associado à parcela derivativa é, de acordo com a equação (2.1), dado por:

$$u_D(t) = K_p T_d \frac{d[r(t) - y_m(t)]}{dt}. \quad (2.15)$$

Utilizando-se a equação (2.15) é possível mostrar a influência do sinal de ruído na resposta do controlador. Para tanto, considere o sinal de controle referente ao ruído no sinal de saída dado por:

$$u_{Dn}(t) = K_p T_d \frac{d[n(t)]}{dt}. \quad (2.16)$$

Considere, também, que o ruído seja expresso por:

$$n(t) = A \sin(\omega t), \quad (2.17)$$

em que  $A$  e  $\omega$  representam, respectivamente, a amplitude e a frequência do sinal de ruído. Assim, substituindo-se  $n(t)$  expresso pela equação (2.17), na equação (2.16), obtém-se a parcela do sinal de controle referente ao sinal de ruído,  $u_{Dn}(t)$ , como descrito a seguir:

$$u_{Dn}(t) = K_p T_d \frac{dn(t)}{dt} \Rightarrow u_{Dn}(t) = AK_p T_d \omega \cos(\omega t),$$

onde pode ser visto que a frequência do sinal de ruído passa a multiplicar a amplitude de  $u_{Dn}(t)$ . Caso o valor de  $\omega$  seja elevado, o ganho para este sinal de ruído também será elevado.

Para contornar esse problema, é implementado junto à parcela derivativa um filtro passa-baixa de primeira ordem, como apresentado na equação a seguir:

$$U_D(s) = \left( \frac{K_p T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) E(s). \quad (2.18)$$

Este filtro é obtido acrescentando-se um pólo em  $\left( -\frac{N}{T_d} \right)$ . Com a inclusão deste pólo, sinais com frequências superiores a  $\frac{N}{T_d}$  têm seu ganho limitado a  $NK_p$ . O valor de  $N$  é definido de modo a manter este pólo afastado o suficiente dos pólos do sistema realimentado, de modo a ter uma influência não significativa na dinâmica do mesmo. Na literatura,  $N$  é normalmente escolhido com valores entre 10 e 20 [3].

Além disso, em geral, o sinal de referência é normalmente constante com mudanças abruptas de valor. Com isso, devido à ação derivativa, é gerado um sinal de controle muito elevado. Por este motivo, neste trabalho, somente será considerada a ação derivativa para o sinal de saída [1], [2], ou seja,

$$U_D(s) = - \left( \frac{K_p T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) Y(s). \quad (2.19)$$

### 2.3.2 Modificações no sinal de referência

A fim de se reduzir o sinal de controle e o máximo sobre-sinal de saída para uma entrada de referência em degrau, é possível introduzir um parâmetro  $b$  que é multiplicado à referência para reduzir sua influência na parcela proporcional [2]. Isto ocorre, pois o zero adicionado pelo controlador é diretamente relacionado ao parâmetro  $b$ , de forma que quanto menor for o valor de  $b$ , mais afastado estará o zero do eixo imaginário e conseqüentemente dos pólos do sistema realimentado. Portanto, quanto menor o valor de  $b$ , menor é a influência do zero na resposta do sistema realimentado.

Para mostrar a influência do parâmetro  $b$ , é utilizado um controlador, onde estão incluídas as modificações sugeridas na subseção 2.3.1. Assim, é apresentado a seguir o modelo do controlador a ser utilizado neste trabalho:

$$U(s) = K_p \left[ bR(s) - Y(s) + \frac{1}{sT_i} (R(s) - Y(s)) - \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} Y(s) \right], \quad (2.20)$$

em que  $K_p$  é o ganho proporcional,  $b$  é a constante que determina a posição de um dos zeros introduzidos pelo controlador,  $T_i$  é o tempo integral,  $T_d$  é o tempo derivativo e  $N$  é a constante que determina a localização do pólo do filtro passa-baixa. Na figura 2.3, é apresentado o diagrama de blocos para o sistema em malha fechada com o controlador dado pela equação (2.20).

A partir da figura 2.3 é possível obter a função de transferência entre a referência  $R(s)$  e a saída  $Y(s)$ .

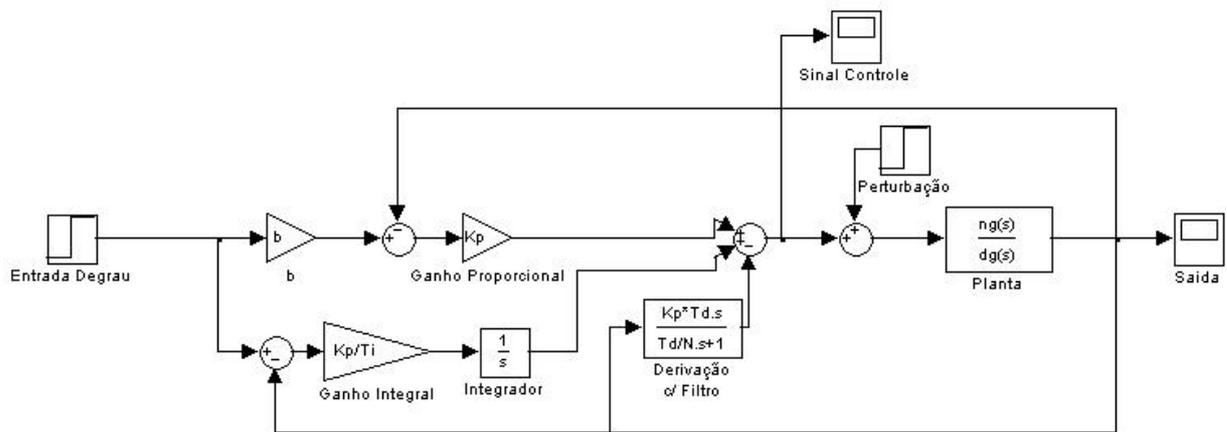


Figura 2.3 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada

Supondo que a planta seja dada pela função de transferência  $G(s) = \frac{n_G(s)}{d_G(s)}$ , em que  $n_G(s)$  e  $d_G(s)$  são o numerador e o denominador da planta, respectivamente, obtém-se a função de transferência do sistema em malha fechada apresentada na equação a seguir:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\left[ (bT_i s + 1) \left( \frac{T_d}{N} s + 1 \right) \right] n_G(s)}{\left[ \left( \frac{T_i T_d}{N} + T_i T_d \right) s^2 + \left( T_i + \frac{T_d}{N} \right) s + 1 \right] n_G(s) + \left[ \left( \frac{T_i T_d}{K_p N} \right) s^2 + \left( \frac{T_i}{K_p} \right) s \right] d_G(s)}, \quad (2.21)$$

onde é possível ver que os zeros da função são  $-\frac{1}{bT_i}$  e  $-\frac{N}{T_d}$ . Dessa forma, um dos zeros da função de transferência pode ser arbitrariamente alocado dependendo do valor de  $b$  escolhido.

É possível mostrar que a variação do parâmetro  $b$  não influencia na resposta a perturbações aplicadas na entrada da planta. Desta forma, é possível garantir que a resposta à perturbação inicialmente prevista para cada um dos métodos de ajuste do PID será mantida, independentemente do valor utilizado para  $b$ . Para demonstrar este fato, é necessário obter a função de transferência do sistema em malha fechada entre a perturbação  $D(s)$  e a saída  $Y(s)$ . Após análise do diagrama de blocos da figura 2.3 e algumas manipulações algébricas, chega-se à seguinte função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{\left[ \left( \frac{T_i T_d}{N} \right) s^2 + (T_i) s \right] n(s)}{\left[ K_d T_i T_d \left( \frac{1}{N} + 1 \right) s^2 + \left( K_p T_i + \frac{K_p T_d}{N} \right) s + K_p \right] n(s) + \left[ \left( \frac{T_i T_d}{N} \right) s^2 + T_i s \right] d(s)} \quad (2.22)$$

Analisando a equação (2.22), é possível verificar que o parâmetro  $b$  não aparece, o que mostra que seu valor não influencia na resposta do sistema a perturbações na entrada da planta.

## 2.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados os principais conceitos sobre controladores PID, detalhando as características de cada uma das parcelas que compõem o controlador. Além disso, foram apresentadas todas as modificações feitas desde o modelo original até o modelo de controlador que é utilizado, mostrando o porquê de cada modificação e de cada parâmetro adicionado. No capítulo seguinte serão apresentados quatro métodos de identificação da planta a ser controlada. Os três primeiros métodos utilizam como modelo de identificação uma função de primeira ordem com atraso, e o quarto método utiliza como modelo uma função de segunda ordem, com pólos iguais, e sem zeros finitos.

# Capítulo 3 Métodos de Identificação da Planta

## 3.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados métodos para identificação de processos com resposta ao degrau monotonicamente crescentes. Para tanto, na seção 3.2 são descritos os sistemas com resposta ao degrau monotonicamente crescentes e são apresentados quatro métodos diferentes para identificação da planta. Na subseção 3.2.1 é definida uma medida para avaliar a identificação do modelo obtido. Nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3 são apresentados métodos de identificação utilizando como modelo uma função de transferência de primeira ordem com atraso. Na subseção 3.3.4 é apresentado o método proposto em [4] para a identificação da planta por uma função de transferência de segunda ordem sem zeros finitos. Finalmente, na seção 3.4 são apresentadas as conclusões deste capítulo.

## 3.2 Sistemas com respostas ao degrau monotonicamente crescentes

Sistemas são ditos monótonos quando apresentam respostas ao degrau que não decrescem com o tempo. Na figura 3.1 é mostrada a resposta ao degrau de um sistema monótono. Diversos processos industriais possuem resposta deste tipo.

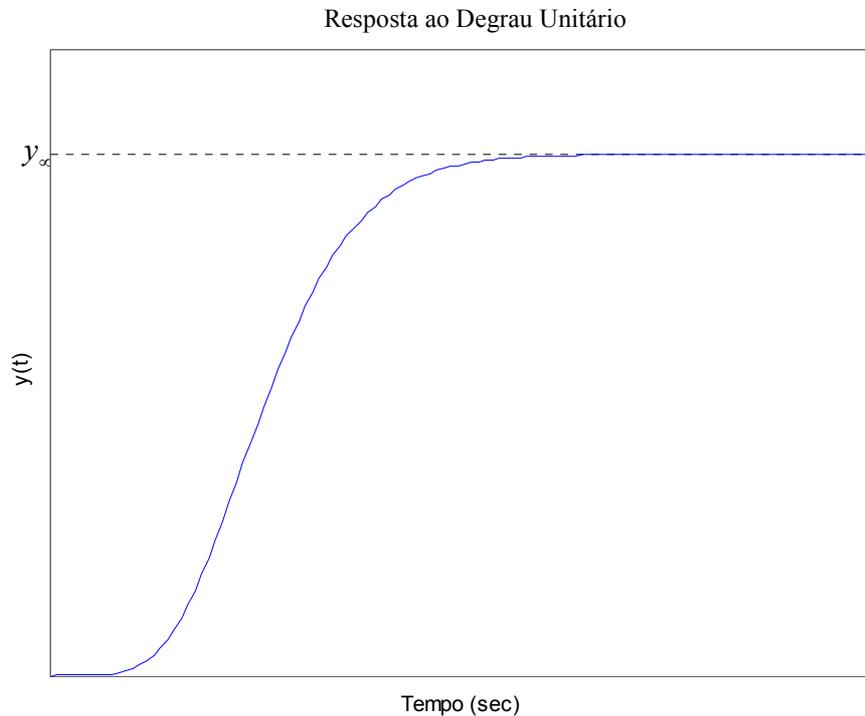


Figura 3.1 – Sistema com resposta ao degrau monotonicamente crescente.

### 3.2.1 Uma medida da proximidade entre a resposta ao degrau do sistema real e do modelo

Neste capítulo são apresentados alguns métodos para a identificação da função de transferência da planta a partir da resposta ao degrau do sistema. Assim, nesta subseção, é proposta uma medida para avaliar a proximidade entre as respostas ao degrau do sistema real e do modelo. Essa medida é utilizada para comparar os diferentes métodos para a identificação da função de transferência da planta.

Para ilustrar de forma mais clara a medida adotada neste trabalho, observe a figura 3.2, onde são apresentadas duas curvas, sendo que a curva em azul representa a resposta ao degrau do sistema real e a curva verde representa a resposta ao degrau do modelo analisado. É fácil perceber que quanto mais próximas as curvas de resposta ao degrau estiverem entre si, menor é a área

entre as curvas,  $\delta$ , e melhor é a identificação do sistema real. Isto leva à seguinte definição de uma medida da proximidade entre as duas curvas:

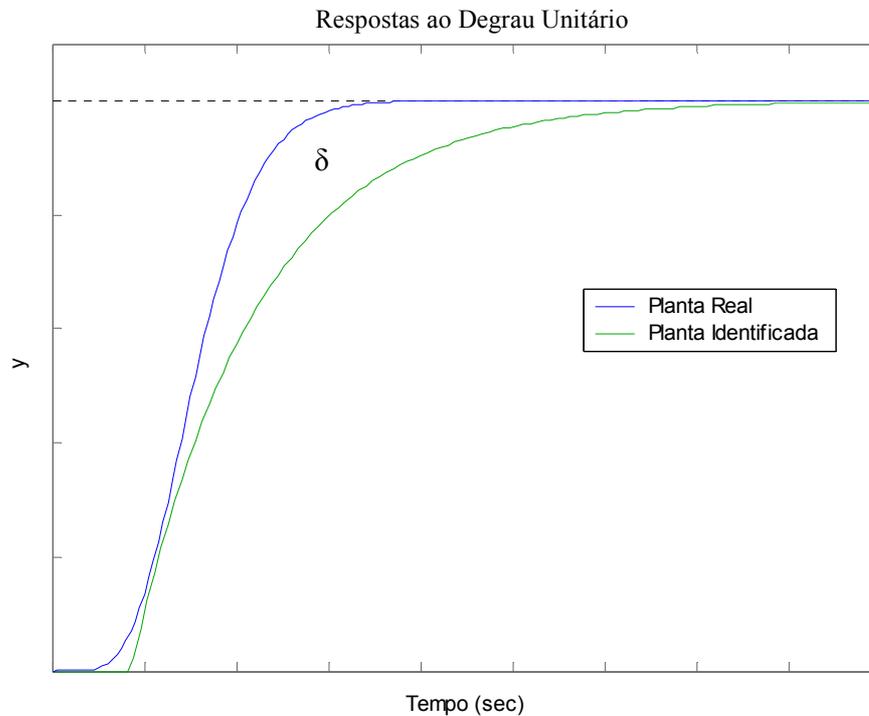


Figura 3.2 – Respostas ao degrau do sistema real (azul) e do modelo identificado (verde).

$$\delta = \int_0^{\infty} |y_r(t) - y_m(t)| dt, \quad (3.1)$$

em que  $y_r(t)$  e  $y_m(t)$  são as respostas ao degrau do sistema real e do modelo identificado, respectivamente.

### ***3.3 Métodos de identificação da planta baseados na resposta ao degrau***

### 3.3.1 Método da máxima tangente

Este método foi desenvolvido por Ziegler e Nichols [3] após a constatação de que diversos processos apresentavam respostas semelhantes para referência do tipo degrau.

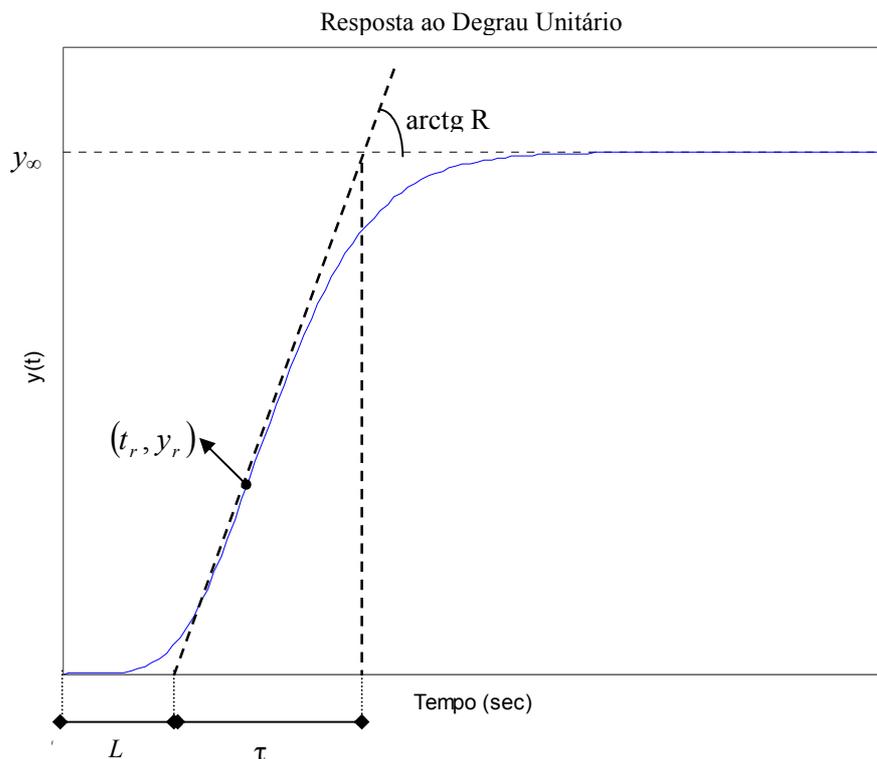


Figura 3.3 – Curva de resposta ao degrau de sistemas monótonos.

Após esta constatação foi desenvolvida uma forma de identificação para sistemas de ordem elevada, representando-os por funções de transferência de primeira ordem com atraso de acordo com o modelo apresentado pela seguinte equação:

$$G_m(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1}, \quad (3.2)$$

em que  $K$  representa o ganho DC,  $L$  representa o atraso e  $\tau$  representa a constante de tempo do sistema. Para determinar os parâmetros da equação (3.2), é apresentado o seguinte algoritmo:

#### Algoritmo 1

1. Aplica-se um sinal igual ao degrau unitário à planta.

2. Utilizando-se a resposta obtida, representada na figura 3.3, encontra-se o valor de regime permanente  $y_\infty$ . Com este valor, obtém-se  $K$ , fazendo-se  $K = y_\infty$ .
3. Pela figura 3.3, determina-se o valor da maior derivada ( $R$ ), ou seja, o ponto de inflexão da curva de resposta ao degrau unitário da planta real, e determina-se também a coordenada deste ponto  $(t_r, y_r)$ . Com isso, para obter o valor de  $\tau$ , utiliza-se a equação a seguir:

$$\tau = \frac{K}{R}. \quad (3.3)$$

4. Para determinação de  $L$ , aplicam-se os valores obtidos do ponto  $(t_r, y_r)$  e o valor de  $R$  na equação a seguir:

$$L = t_r - \frac{y_r}{R}. \quad (3.4)$$

A seguir são apresentados exemplos para demonstração do método. Os mesmos exemplos são utilizados no decorrer deste trabalho para ilustrar as diferentes técnicas de identificação da planta.

**Exemplo 3.1:** Neste exemplo é utilizada a seguinte função de transferência de ordem elevada para representar a planta real [4]:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^8}. \quad (3.5)$$

Utilizando o Matlab, obtém-se o gráfico apresentado na figura 3.4 para resposta ao degrau unitário da equação (3.5):

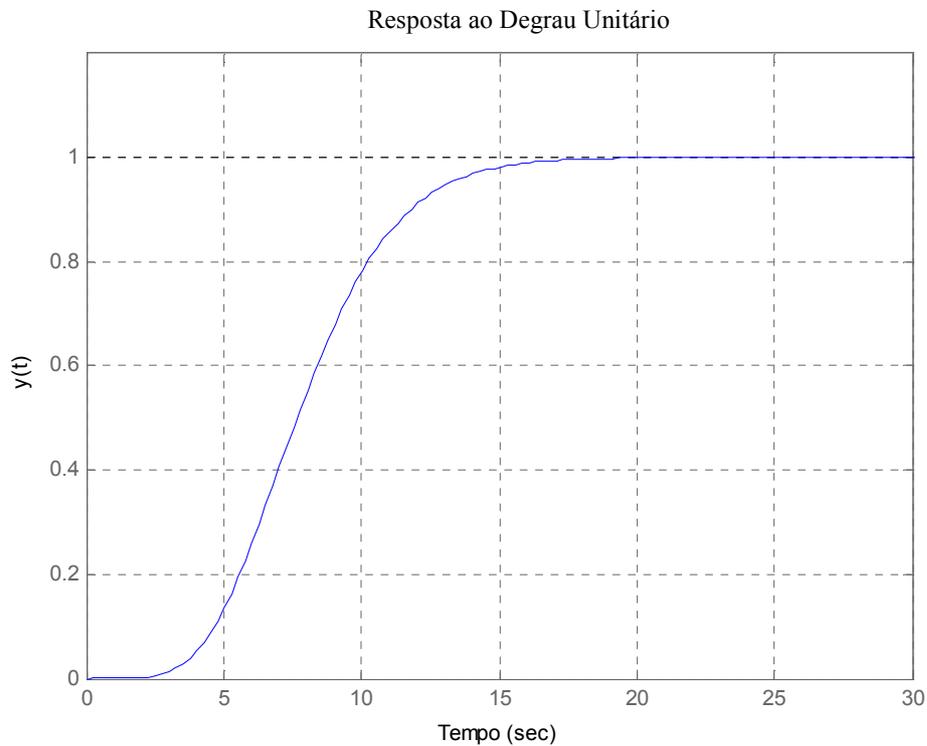


Figura 3.4 – Curva de resposta ao degrau unitário da a equação (3.5).

Os passos a seguir referem-se àqueles descritos no algoritmo 1 da subseção 3.3.1. Utilizando o passo 1, obtém-se a figura 3.4. De acordo com o passo 2 e com a figura 3.4,  $y_{\infty} = 1$ , portanto, tem-se que  $K = 1$ . Seguindo o passo 3, obtém-se  $R = 0,1489$  e o ponto  $(t_r, y_r) = (6,9092 ; 0,3878)$ . Aplicando-se esses valores de  $R$  e  $K$  na equação (3.3), obtém-se  $\tau = \frac{1}{0,1489} = 6,7179$ .

De acordo com o passo 4, utilizando-se a equação (3.4) e aplicando os valores já obtidos, tem-se que:  $L = t_r - \frac{y_r}{R} = 6,9092 - \frac{0,3878}{0,1489} = 4,3042$ .

Após determinados todos os parâmetros necessários, aplicam-se os valores obtidos na equação (3.2), obtendo-se a seguinte função de transferência aproximada da planta:

$$G_m(s) = \frac{e^{-4,3042s}}{6,7179s + 1} \quad (3.6)$$

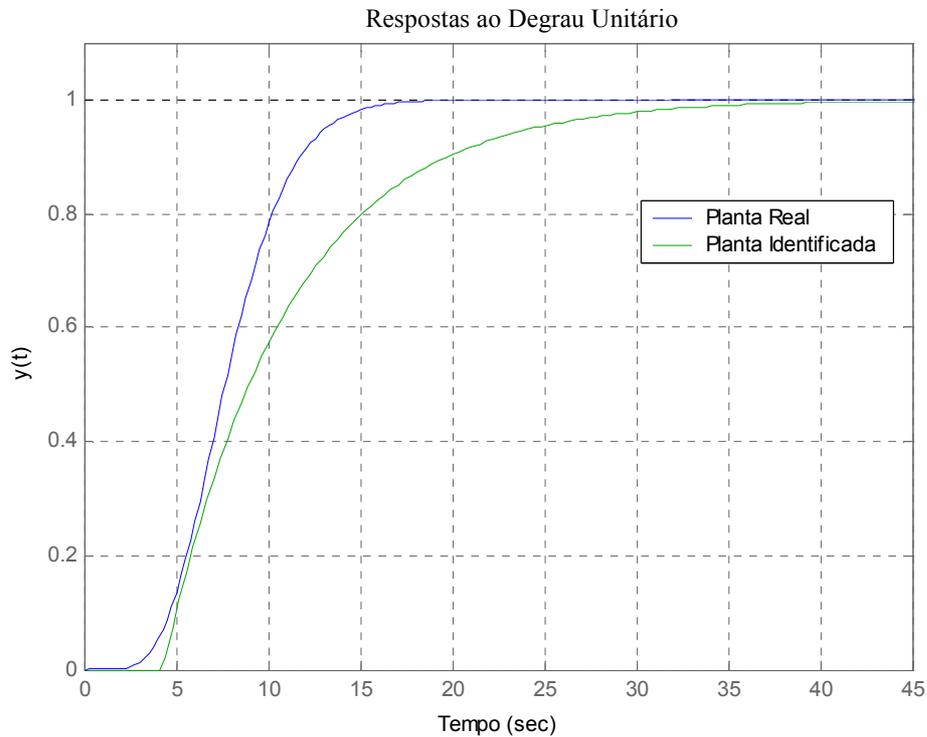


Figura 3.5 – Curva de resposta ao degrau da equação (3.5)(azul) e Curva de resposta ao degrau da equação (3.6)(verde)

Com o objetivo de avaliar o resultado apresentado na figura 3.5, utiliza-se o método descrito na subseção 3.2.1. Resolvendo a equação (3.1), obtém-se  $\delta = 2,8735$ .

No decorrer deste capítulo, o sistema representado pela função de transferência da equação (3.5) será identificado por outros métodos. Assim, será possível verificar qual método resulta em um menor valor de  $\delta$ , e portanto melhor representa o sistema real de acordo com esta medida.

**Exemplo 3.2:** Neste exemplo, é utilizada uma planta que possui ordem elevada e todos os pólos distintos:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(1,15s + 1)(1,1s + 1)(0,95s + 1)(0,9s + 1)(0,05s + 1)(0,01s + 1)}. \quad (3.7)$$

Seguindo os passos descritos no algoritmo 1 da subseção 3.3.1, obtém-se  $K = 1$ ,  $L = 2,1932$  e  $\tau = 5,2292$ . Com isso retornado à equação (3.2), tem-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-2,1932s}}{5,2292s + 1} \quad (3.8)$$

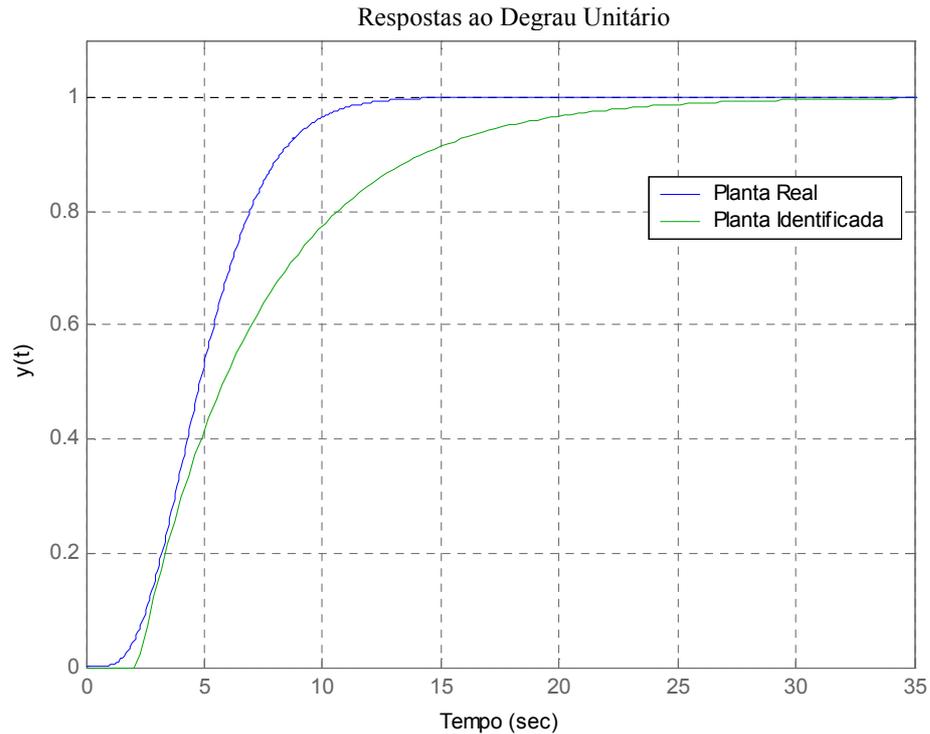


Figura 3.6 – Curva de resposta ao degrau unitário da equação (3.7) (azul) e curva de resposta ao degrau unitário da equação (3.8) (verde).

Utilizando a equação (3.1) e as curvas da figura 3.6, encontra-se  $\delta = 2,0008$ .

**Exemplo 3.3:** Neste exemplo é utilizada a planta apresentada em [2], cuja função de transferência é dada por:

$$G(s) = \frac{1}{(s + 1)(0,2s + 1)(0,05s + 1)(0,01s + 1)} \quad (3.9)$$

Seguindo os passos descritos na subseção 3.3.1, encontra-se  $K = 1$ ,  $L = 0,1641$  e  $\tau = 1,5026$ . Com isso, aplicando-se os valores de volta à equação (3.2), tem-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-0,1641s}}{1,5026s + 1} \quad (3.10)$$

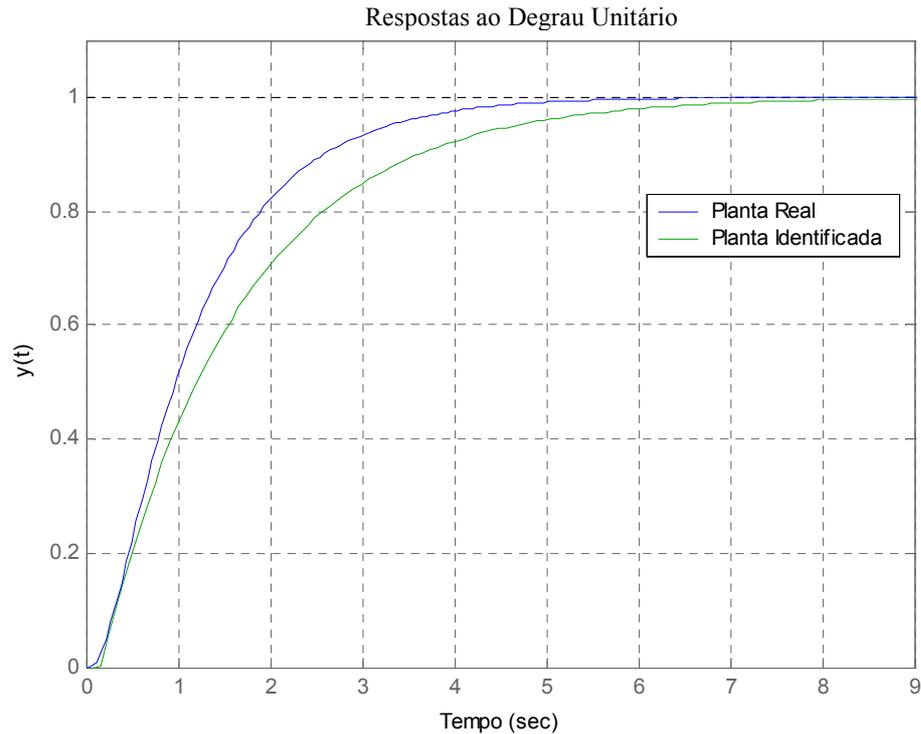


Figura 3.7 – Curva de resposta ao degrau unitário da equação (3.9)(azul) e curva de resposta ao degrau unitário da equação (3.10)(verde)

De acordo com as curvas da figura 3.7 aplicadas à equação (3.1), obtém-se  $\delta = 0,3951$ .

### 3.3.2 Método de Minimização das Áreas

Como apresentado na subseção 3.2.1, o método proposto para avaliar a identificação é feito obtendo-se a diferença das áreas descritas entre as curvas de resposta ao degrau do sistema real e de sua identificação. Por esse motivo, o método proposto a seguir tem como objetivo encontrar a identificação da planta que resulte no menor  $\delta$  possível. Para obter o método, é

utilizado  $\delta$  como função custo, tendo  $L$  e  $\tau$  como variáveis. Além disso, a função de transferência do modelo de identificação continua sendo dada pela equação (3.2).

Para a obtenção do método, primeiramente deve ser calculada a transformada inversa de Laplace da função de transferência do modelo, quando aplicado um sinal de referência igual ao degrau unitário. Assim, tem-se:

$$y_m(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} Y_m(s) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1} \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s} e^{-Ls} - \frac{K}{s + 1/\tau} e^{-Ls} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_m(t) = Ku_0(t-L) - Ke^{-\frac{(t-L)}{\tau}} u_0(t-\tau), \quad (3.11)$$

Como a função custo é dada por  $\delta$ , tem-se:

$$\delta = \int_0^{\infty} |y_r(t) - y_m(t)| dt = \int_0^L |y_r(t) - 0| dt + \int_L^{\infty} |y_r(t) - y_m(t)| dt. \quad (3.12)$$

Aplicando a equação (3.11) na equação (3.12), tem-se:

$$\delta = \int_0^L |y_r(t)| dt + \int_L^{\infty} \left| y_r(t) - K + Ke^{-\frac{(t-L)}{\tau}} \right| dt.$$

fazendo-se a substituição de variável,  $\lambda = t - L$  e  $d\lambda = dt$ , obtém-se:

$$\delta = \int_0^L |y_r(t)| dt + \int_0^{\infty} \left| y_r(\lambda + L) - K + Ke^{-\frac{\lambda}{\tau}} \right| d\lambda, \quad (3.13)$$

Desta forma, o seguinte problema de otimização pode ser formulado:

$$\min_{L, \tau} \delta = \min_{L, \tau} \left( \int_0^L |y_r(t)| dt + \int_0^{\infty} \left| y_r(\lambda + L) - K + Ke^{-\frac{\lambda}{\tau}} \right| d\lambda \right). \quad (3.14)$$

A seguir são apresentados exemplos utilizando este método aplicado às mesmas funções de transferência das equações (3.5), (3.7) e (3.9), dos exemplos 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente. Para obtenção do valor mínimo de  $\delta$ , utilizou-se o Matlab para fazer uma busca exaustiva, variando-se os valores dos parâmetros  $L$  e  $\tau$ .

**Exemplo 3.4:** Neste exemplo é apresentada a identificação da planta real representada pela equação (3.5) utilizando o método de minimização de  $\delta$ . De acordo com a equação (3.13),  $\delta$  é uma função de  $L$  e  $\tau$ . Assim sendo, é possível construir um gráfico variando-se os valores desses

dois parâmetros e obtendo-se o valor de  $\delta$  correspondente. Para tanto, utiliza-se a resposta da função de transferência da equação (3.5) a um degrau unitário, que está apresentada na figura 3.4, e variam-se os valores de  $L$  e  $\tau$  na equação (3.13). Com isso, obtêm-se diversos valores para  $\delta$ . Desta forma é possível construir o gráfico da figura 3.8, que apresenta o gráfico de superfície mostrando a relação entre  $L$ ,  $\tau$  e  $\delta$ , onde é visto que há um ponto onde  $\delta$  é mínimo.

A partir da figura 3.4, encontra-se  $K = 1$  e, utilizando o Matlab para executar uma busca exaustiva do  $\delta$  mínimo, variando-se os valores de  $L$  e  $\tau$ , encontram-se  $L = 5,3762$  e  $\tau = 2,9330$ . Assim, aplicando-se os valores obtidos novamente na equação (3.2), tem-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-5,3762s}}{2,9330s + 1} \quad (3.15)$$

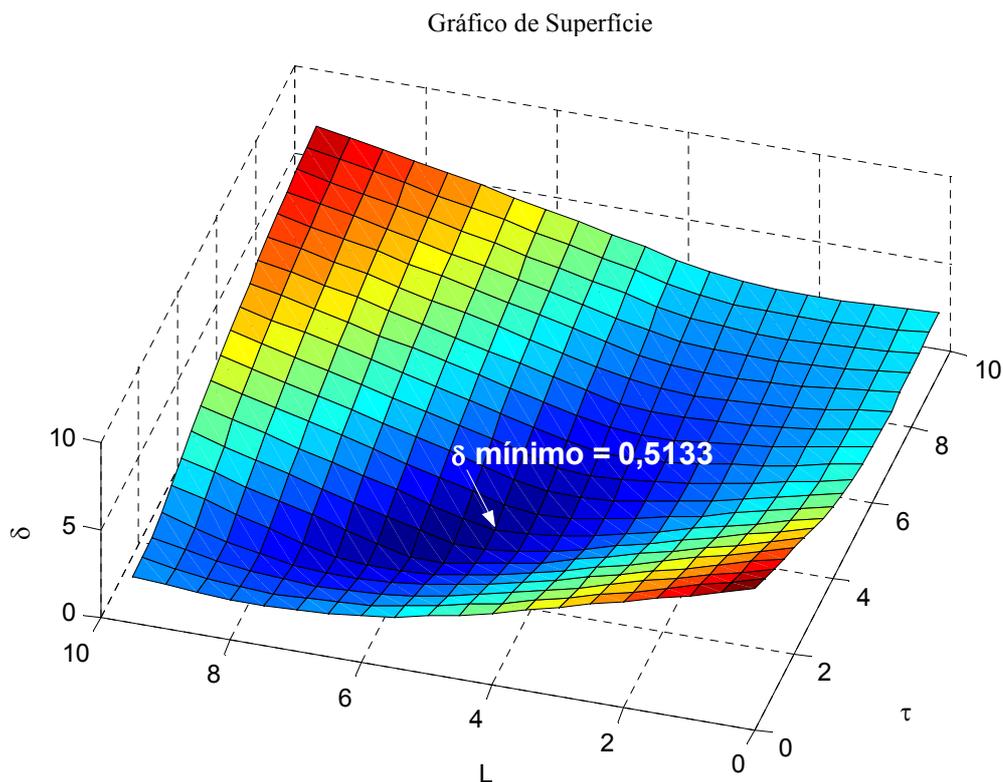


Figura 3.8 – Gráfico de superfície apresentando  $\delta$  mínimo para a planta da equação (3.5)

A figura 3.9 mostra as curvas de resposta ao degrau unitário para a planta real e para sua aproximação. De acordo com a subseção 3.2.1, é obtido  $\delta = 0,5133$ . Ao comparar este valor,

com o valor obtido no exemplo 3.1 ( $\delta = 2,8735$ ), é possível verificar a maior proximidade entre as curvas quando utilizado o método de minimização de áreas.

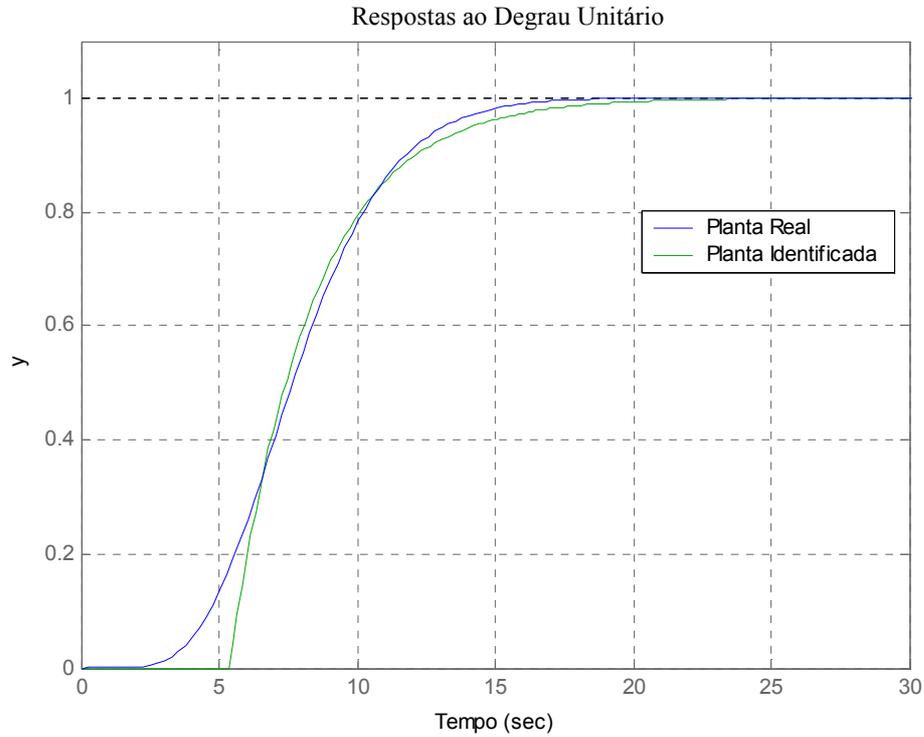


Figura 3.9 – Curva de resposta ao degrau da equação (3.5) (azul) e Curva de resposta ao degrau da equação (3.15) (verde)

**Exemplo 3.5:** Este exemplo utiliza a função de transferência da equação (3.7). A partir da curva de resposta ao degrau unitário desta função de transferência, apresentada na figura 3.6, e da variação dos valores de  $L$  e  $\tau$  aplicados na equação (3.13), obtém-se o gráfico de superfície apresentado na figura 3.10. Com a busca exaustiva feita em Matlab, verifica-se que o menor valor de  $\delta$ , ocorre para  $L = 3,0134$  e  $\tau = 2,3524$ . Aplicando-se esses valores na equação (3.2), obtém-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-3,0134s}}{2,3524s + 1} \quad (3.16)$$

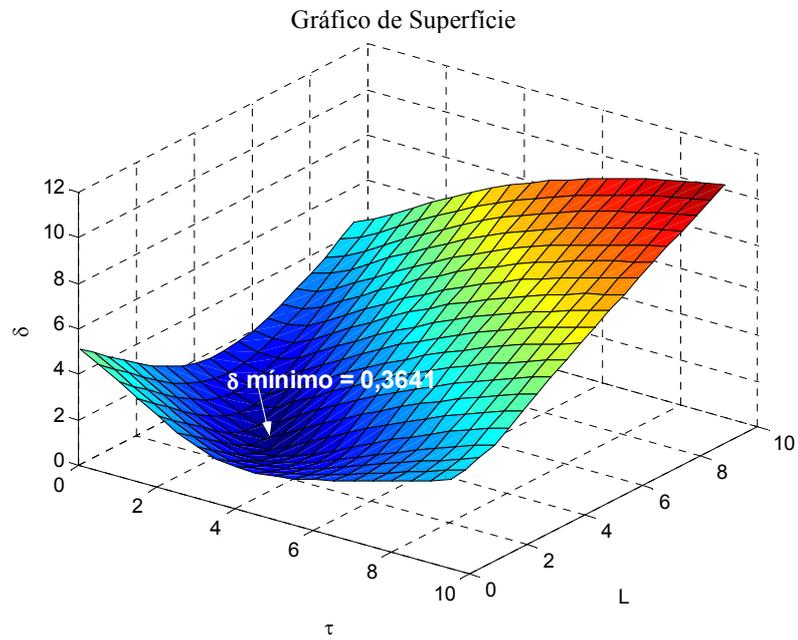


Figura 3.10 – Gráfico de superfície apresentando  $\delta$  mínimo para a planta da equação 3.20

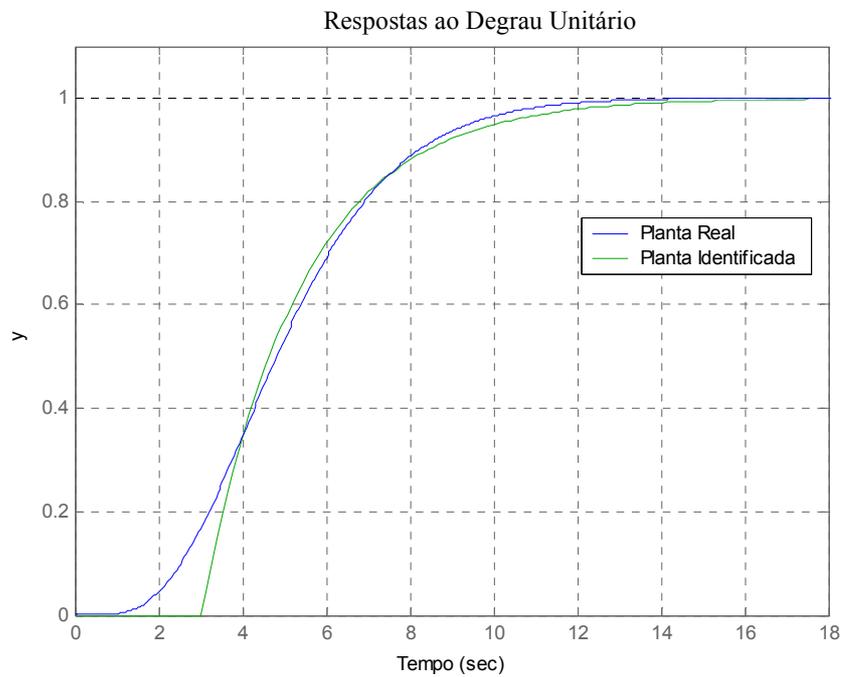


Figura 3.11 - Curva de resposta ao degrau da equação (3.7)(azul) e Curva de resposta ao degrau da equação (3.16) (verde).

O valor obtido para  $\delta$  é 0,3641, enquanto no exemplo 3.2, foi obtido um valor aproximadamente 6 vezes maior ( $\delta = 2,0008$ ). Assim, é possível afirmar, de acordo com a medida proposta, que a resposta ao degrau unitário, obtida utilizando-se o modelo identificado pelo método de minimização de áreas, está mais próxima da resposta ao degrau da planta real em relação à resposta obtida com o modelo identificado pelo método descrito na subseção 3.3.1.

**Exemplo 3.6:** O método descrito no item 3.3.2 é utilizado neste exemplo para identificar a planta representada pela função de transferência dada na equação (3.9). O gráfico de superfície da figura 3.12 mostra a relação entre a área  $\delta$  e os parâmetros  $L$  e  $\tau$ . Com a curva de resposta ao degrau unitário da planta, verifica-se que  $K = 1$ . Com uma busca exaustiva feita em Matlab, verifica-se que o valor mínimo de  $\delta$  ocorre para  $L = 0,2640$   $\tau = 1,0106$ . Aplicando-se os valores de volta à equação (3.2), obtém-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-0,2640s}}{1,0106s + 1}. \quad (3.17)$$

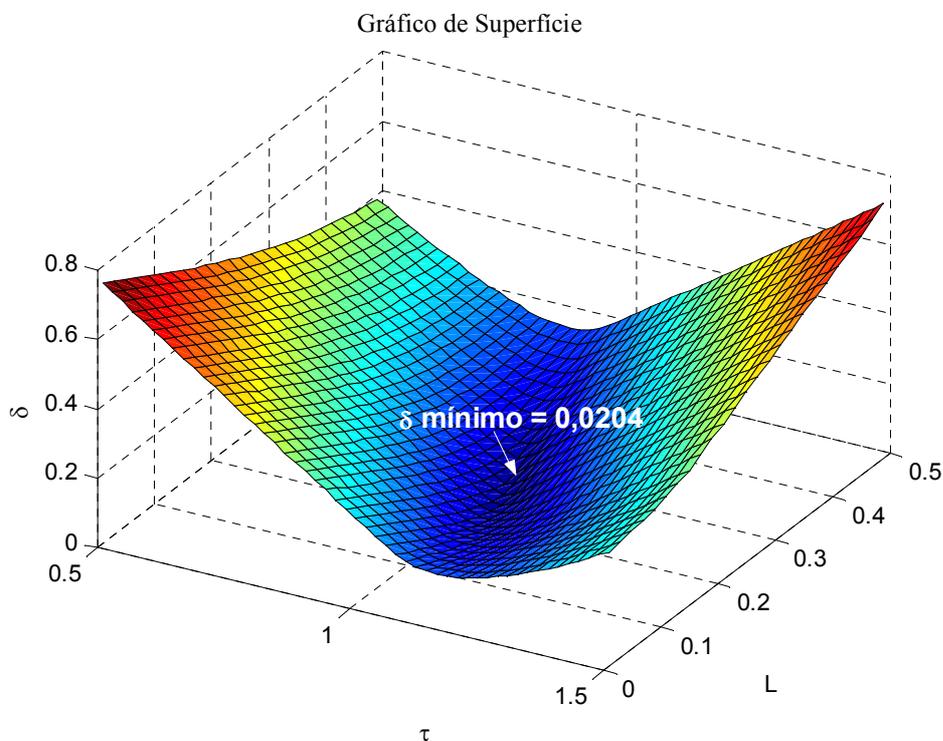


Figura 3.12 – Gráfico de superfície apresentando  $\delta$  mínimo para a planta da equação (3.9)

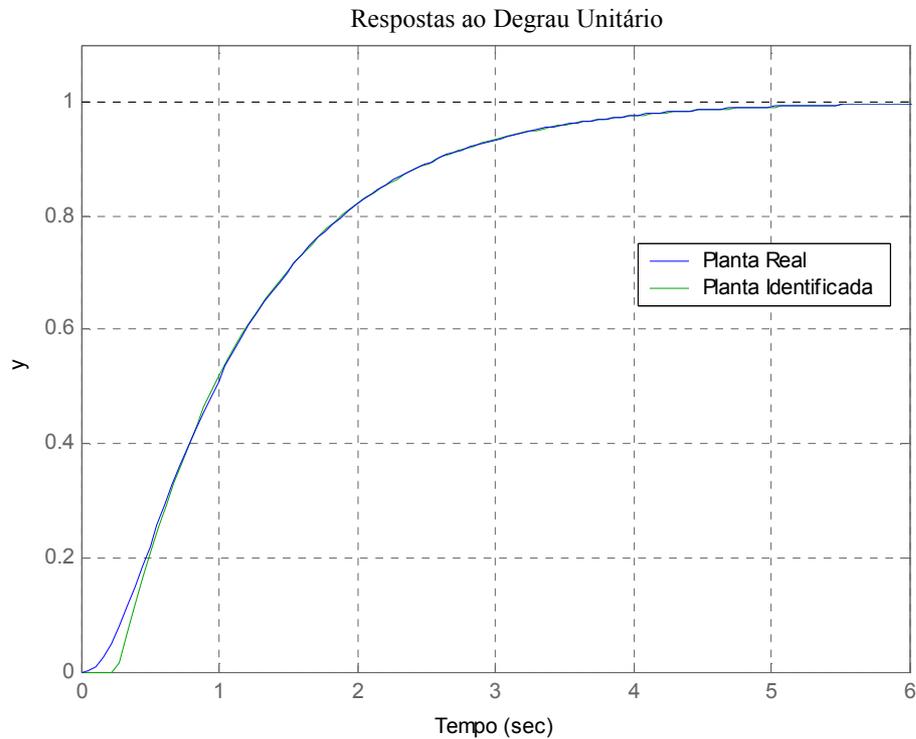


Figura 3.13 - Curva de resposta ao degrau da equação (3.9) (azul) e Curva de resposta ao degrau da equação (3.17) (verde).

Neste exemplo  $\delta = 0,0205$ , mostrando que realmente as curvas de resposta ao degrau unitário do modelo identificado e da planta real estão próximas, de acordo com a medida proposta. Além disso, comparando-se o valor de  $\delta$ , com o obtido no exemplo 3.3, que foi de 0,3951, verifica-se uma diferença aproximadamente de 20 vezes, mostrando que o método de minimização de áreas apresentou um resultado melhor.

### 3.3.3 Método das Áreas

Esta subseção apresenta outro método para se determinar os parâmetros  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  da equação (3.2). Neste método, também é utilizada a curva de resposta ao degrau da função de transferência da planta, onde são destacadas duas áreas, como mostrado na figura 3.14 [2].

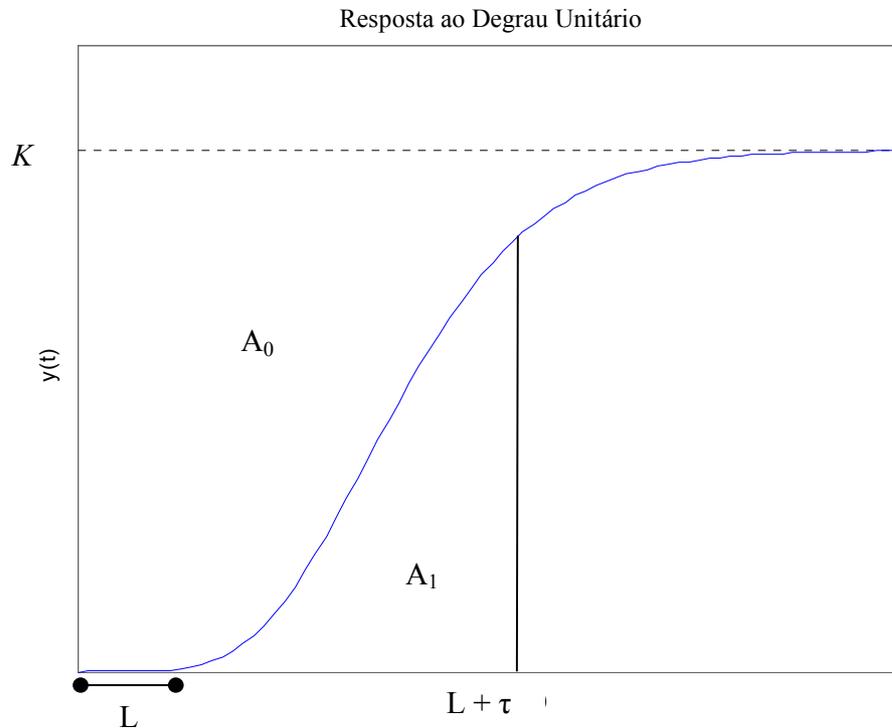


Figura 3.14 – Curva de resposta ao degrau destacando os pontos importantes.

O método da Máxima Tangente, apresentado na subseção 3.3.1, depende apenas do ponto de maior derivada da curva de resposta da planta a um sinal do tipo degrau, para determinação dos parâmetros da função de transferência do modelo. Por este motivo, o método é muito sensível a ruídos de medição, fazendo com que qualquer variação na determinação deste ponto resulte em uma identificação ruim. No método das áreas, os parâmetros  $L$  e  $\tau$ , são determinados de acordo com duas áreas,  $A_0$  e  $A_1$ , destacadas na figura 3.14. Desta forma, o método é menos sensível a variações provocadas por ruído, dado que uma pequena variação na curva de resposta não influenciaria tanto no valor final das áreas.

Desta forma, é necessário agora determinar as áreas e suas relações com os parâmetros a serem determinados. Primeiramente é mostrada a área  $A_0$ , que é a área delimitada entre a reta  $y(t)=K$  e a curva de resposta ao degrau da planta real. Como o objetivo final é aproximar a curva de resposta ao degrau da planta real, utilizando como modelo a função de transferência dada pela equação (3.2), tem-se que:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int_0^{\infty} K - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G_m(s) \right\} dt = \int_0^{\infty} K - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1} \right\} dt = \int_0^{\infty} K - \left( K - Ke^{-\frac{(t-L)}{\tau}} \right) u_0(t-L) dt \Rightarrow \\
\Rightarrow A_0 &= \int_0^L K - \left( K - Ke^{-\frac{(t-L)}{\tau}} \right) dt + \int_L^{\infty} K - \left( K - Ke^{-\frac{(t-L)}{\tau}} \right) dt = KL + Ke^{\frac{L}{\tau}} \int_L^{\infty} e^{-t/\tau} dt \Rightarrow \\
\Rightarrow A_0 &= KL - K\tau e^{\frac{L}{\tau}} e^{-t/\tau} \Big|_L^{\infty} \Rightarrow A_0 = KL + K\tau \Rightarrow \\
L + \tau &= \frac{A_0}{K}. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Após determinada a área  $A_0$ , é necessário determinar a área  $A_1$ , que é a área delimitada pela curva de resposta ao degrau da planta real, desde um tempo  $t = 0$  até um tempo  $t = L + \tau$ . Com isso, obtém-se:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_L^{L+\tau} K - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G_m(s) \right\} dt = \int_L^{L+\tau} K - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1} \right\} dt = K(\tau + L - L) - Ke^{\frac{L}{\tau}} \int_L^{L+\tau} e^{-t/\tau} dt \Rightarrow \\
\Rightarrow A_1 &= K\tau + K\tau e^{\frac{L}{\tau}} e^{-t/\tau} \Big|_L^{L+\tau} = K\tau + K\tau e^{\frac{L-\tau-L}{\tau}} - K\tau \Rightarrow \\
\tau &= \frac{A_1}{Ke^{-1}}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Após a demonstração do significado de cada uma das áreas destacadas na figura 3.14, é apresentado a seguir um algoritmo para determinar os parâmetros  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  da equação (3.2).

### Algoritmo 2

1. Aplica-se à planta um sinal em degrau unitário e obtém-se o valor de  $K$ , que é valor de regime permanente da resposta do sistema.
2. Determina-se a área  $A_0$ , utilizando a seguinte equação:

$$A_0 = \int_0^{\infty} [K - y_r(t)] dt. \tag{3.20}$$

3. Utilizando-se o valor de  $A_0$  e a equação (3.18), encontra-se  $L + \tau$ .
4. Com o valor de  $L + \tau$ , é possível encontrar  $A_1$ , como mostrado a seguir:

$$A_1 = \int_0^{L+\tau} y_r(t) dt. \tag{3.21}$$

5. Por último determina-se  $\tau$ , utilizando-se a equação (3.19), e  $L$  utilizando-se a equação (3.18).

A seguir são apresentados exemplos utilizando o método das áreas aplicado às funções de transferência das plantas dadas pelas equações (3.5), (3.7) e (3.9).

**Exemplo 3.7:** Considere a planta representada pela equação (3.5).

A curva de resposta ao degrau unitário desta planta está apresentada na figura 3.4. A partir desta figura, são seguidos os passos descritos no algoritmo 2, para determinação de  $K$ ,  $L$  e  $\tau$ .

1. A partir da figura 3.4, é fácil verificar que  $K = 1$ .

2. Pela equação (3.20), tem-se

$$A_0 = \int_0^{\infty} K dt - \int_0^{\infty} y_r(t) dt = 8,0000 .$$

3. Aplicando-se os valores de  $K$  e  $A_0$  na equação (3.18), obtém-se:

$$L + \tau = \frac{A_0}{K} = 8,0000 .$$

4. Utilizando a equação (3.21), tem-se que:

$$A_1 = \int_0^{L+\tau} y_r(t) dt = 1,0049 .$$

5. A partir das equações (3.18) e (3.19), obtém-se  $\tau = 2,7317$  e  $L = 5,2683$ .

Aplicando-se os valores obtidos, novamente na equação (3.2), obtém-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-5,2683s}}{2,7317s + 1} . \quad (3.22)$$

Na figura 3.15, são apresentadas as duas curvas de resposta ao degrau unitário, uma para planta real e outra para a função de transferência do modelo identificado. Calculando-se o valor de  $\delta$ , mostrado na subseção 3.2.1, encontra-se 0,5878. Comparando este valor com o obtido no exemplo 3.4 ( $\delta = 0,5133$ ), e os valores obtidos para  $L$  e  $\tau$ , é possível ver que neste exemplo o

método das áreas leva a uma função de transferência de primeira ordem com atraso próxima da função ótima obtida no método de minimização das áreas.

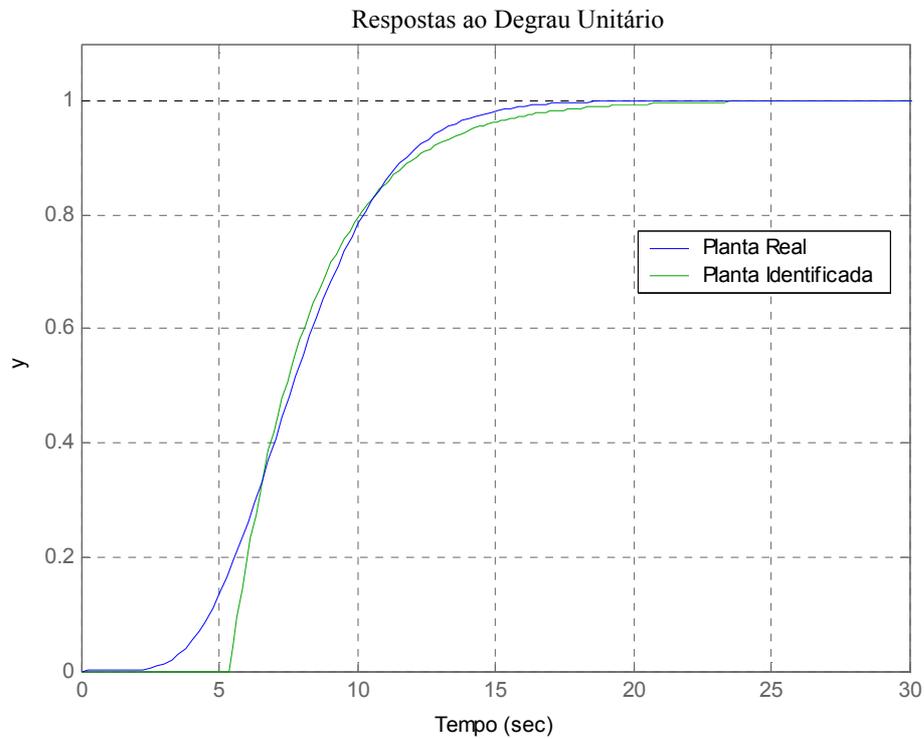


Figura 3.15 –Curvas de resposta ao degrau unitário das equação (3.5) (azul) e da equação (3.22) (verde)

**Exemplo 3.8:** Seguindo os passos descritos no algoritmo 2 da subseção 3.3.3 para a planta descrita por (3.7), obtém-se  $K = 1$ ,  $L = 2,73$  e  $\tau = 2,427$ . Com isso, aplicando-se os valores obtidos, na equação (3.2), tem-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-2,73s}}{2,427s + 1}. \quad (3.23)$$

Assim, é apresentado na figura 3.16, o gráfico com as curvas de resposta ao degrau unitário da planta real e do modelo identificado, dado na equação (3.23).

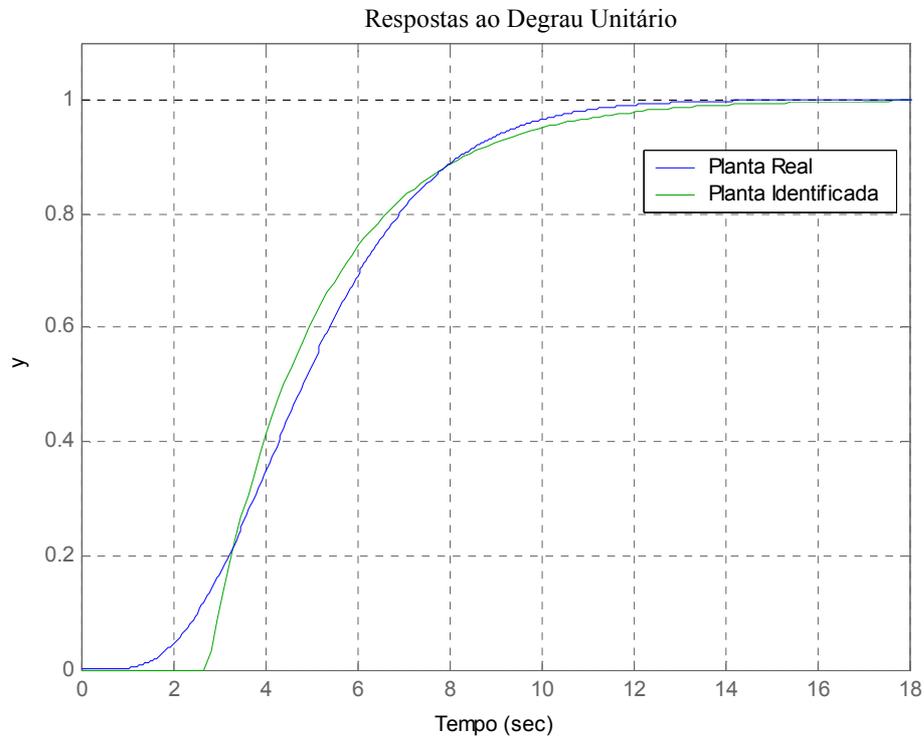


Figure 3.16 - Resposta ao degrau da equação (3.7) (azul) e Resposta ao degrau da equação (3.23) (verde)

Utilizando-se a medida descrita na subseção 3.2.1 para avaliar a proximidade entre as curvas, obtém-se  $\delta$  igual a 0,4018. Comparando-se este valor com o obtido no exemplo 3.5 ( $\delta = 0,3641$ ), verifica-se que para este exemplo, assim como verificado no exemplo 3.7, a função de transferência obtida com o método das áreas é semelhante à função obtida quando utilizado o método de minimização de área.

**Exemplo 3.9:** Neste exemplo, é utilizada a equação (3.9) como planta a ser identificada. Utilizando os passos descritos no algoritmo 2 da subseção 3.3.3, obtém-se  $K = 1$ ,  $L = 0,2812$  e  $\tau = 0,9526$ . Com isso, substituindo-se esse valores na equação (3.2), tem-se:

$$G_m(s) = \frac{e^{-0,2812s}}{0,9526s + 1} \quad (3.24)$$

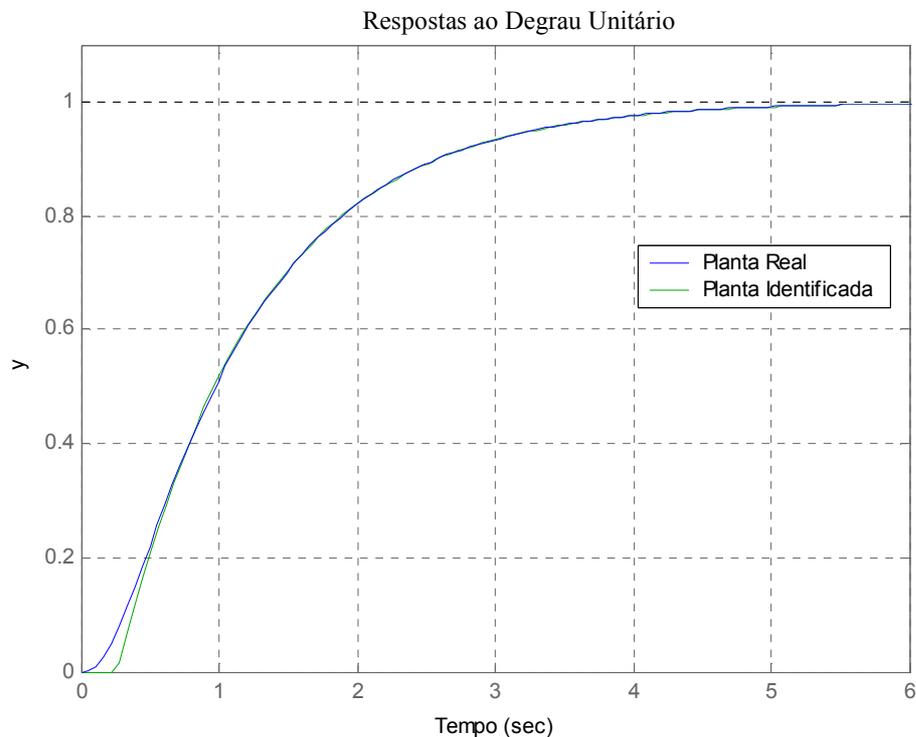


Figura 3.17 –Resposta ao degrau da equação (3.5) (azul) e Resposta ao degrau da equação (3.24) (verde)

Calculando-se o valor de  $\delta$ , como descrito na subseção 3.2.1, obtém-se  $\delta = 0,0491$ . Comparando-se este valor com o obtido no exemplo 3.6 ( $\delta = 0,0205$ ), que utiliza a mesma função de transferência para a planta a ser identificada, verifica-se, que também neste exemplo, as funções de transferência obtidas pelo método das áreas e pelo método de minimização de áreas são aproximadamente iguais.

### 3.3.4 Método de Basílio e Matos

O método descrito nesta subseção foi apresentado em [4] e mostra uma forma de identificação de sistemas monótonos, utilizando como modelo, uma função de transferência de segunda ordem sem zeros finitos [5]:

$$G_m(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \quad (3.25)$$

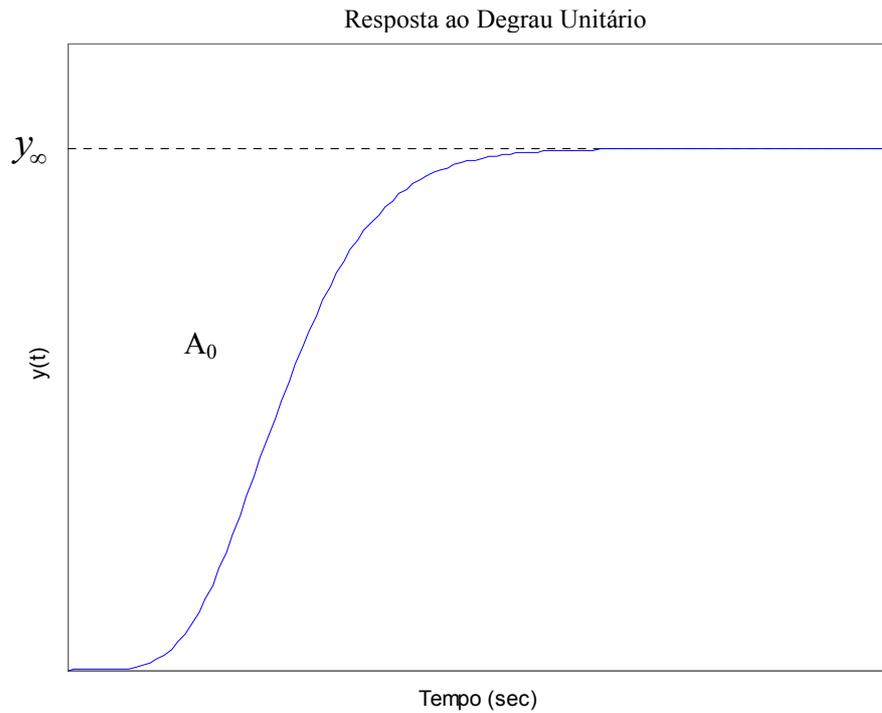


Figura 3.18 – Curva de resposta ao degrau unitário

Este método utiliza uma área do gráfico de resposta ao degrau da planta a ser identificada para determinação do parâmetro  $\tau$ . Na figura 3.18, a área chamada de  $A_0$  corresponde à área entre a reta  $y(t) = y_\infty = K$  e a curva de resposta ao degrau da planta a ser identificada, ou seja, a transformada inversa de Laplace da resposta da planta excitada por um degrau unitário. Como o objetivo é identificar a planta utilizando a equação (3.25) como modelo, é apresentado a seguir a demonstração algébrica para se obter a equação correspondente a  $A_0$ :

$$A_o = \int_0^{\infty} \left[ K - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} G_m(s) \right\} \right] dt = \int_0^{\infty} \left[ K - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{K}{(\tau s + 1)^2} \right\} \right] dt = K \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{\tau} t e^{-\frac{t}{\tau}} + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 = 2K\tau \quad (3.26)$$

Para resumir o método, um algoritmo para determinação dos parâmetros  $K$  e  $\tau$  da equação (3.25) é apresentado.

**Algoritmo 3:**

1. Aplica-se um sinal igual ao degrau unitário à planta.
2. O valor de  $K$  (o ganho DC) é igual ao valor de regime permanente da resposta ao degrau unitário da planta.
3. Calcula-se a área  $A_0$  pela equação (3.20).
4. Com o valor da área  $A_0$ , obtém-se o valor de  $\tau = \frac{A_0}{2K}$ .

Para ilustrar o método proposto por [4], são apresentados os seguintes exemplos.

**Exemplo 3.10:** Neste exemplo é utilizada como planta a ser identificada, a função de transferência apresentada na equação (3.5).

Para determinação dos parâmetros  $K$  e  $\tau$  da equação (3.25), são seguidos os passos descritos no algoritmo 3.

1. Após aplicado um degrau unitário, obtém-se o gráfico da figura 3.4
2. Pela figura, é fácil ver que  $K = 1$ .
3. Utilizando equação (3.20) tem-se que:

$$A_0 = \int_0^{T_{rp}} K dt - \int_0^{T_{rp}} y_2(t) dt = 8,0000.$$

4. Usando os valores de  $K$  e  $A_0$ , obtém-se:

$$\tau = \frac{A_0}{2K} = 4,0000.$$

Com isso, retornando à equação (3.2) e aplicando os valores obtidos para  $K$  e  $\tau$ , tem-se:

$$G_m(s) = \frac{1}{(4s+1)^2}. \quad (3.27)$$

Na figura 3.19, é apresentado o gráfico onde estão as curvas de resposta a um sinal de entrada do tipo degrau unitário, da planta real e do modelo identificado.

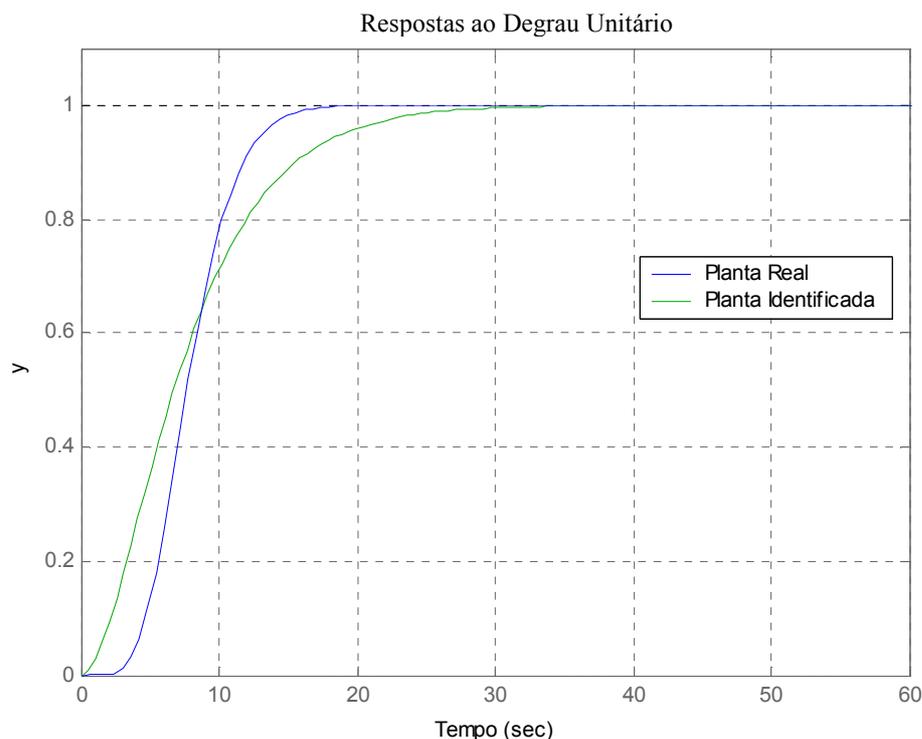


Figura 3.19 –Curvas de resposta ao degrau unitário da equação (3.5) (azul) e da equação (3.27) (verde).

Calculando-se a área  $\delta$ , obtém-se 2,1079, o que mostra que para esta planta, as respostas ao degrau unitário da planta real e da identificada estão relativamente afastadas se comparado, por exemplo, com a obtida para o sistema identificado por uma função de transferência de primeira ordem com atraso do exemplo 3.7 obtida pelo método das áreas, em que o valor da área  $\delta$  encontrado foi igual a 0,5878.

**Exemplo 3.11:** Este exemplo utiliza a equação (3.7) como planta a ser identificada. Após seguido o algoritmo 3, obtém-se  $K = 1$  e  $\tau = 2,5790$ . Aplicando esses valores na equação (3.25), tem-se que:

$$G_m(s) = \frac{1}{(2,5790s + 1)^2}. \quad (3.28)$$

Na figura 3.20 é apresentado o gráfico com as curvas de resposta ao degrau unitário, para a planta real e para sua função de transferência identificada.

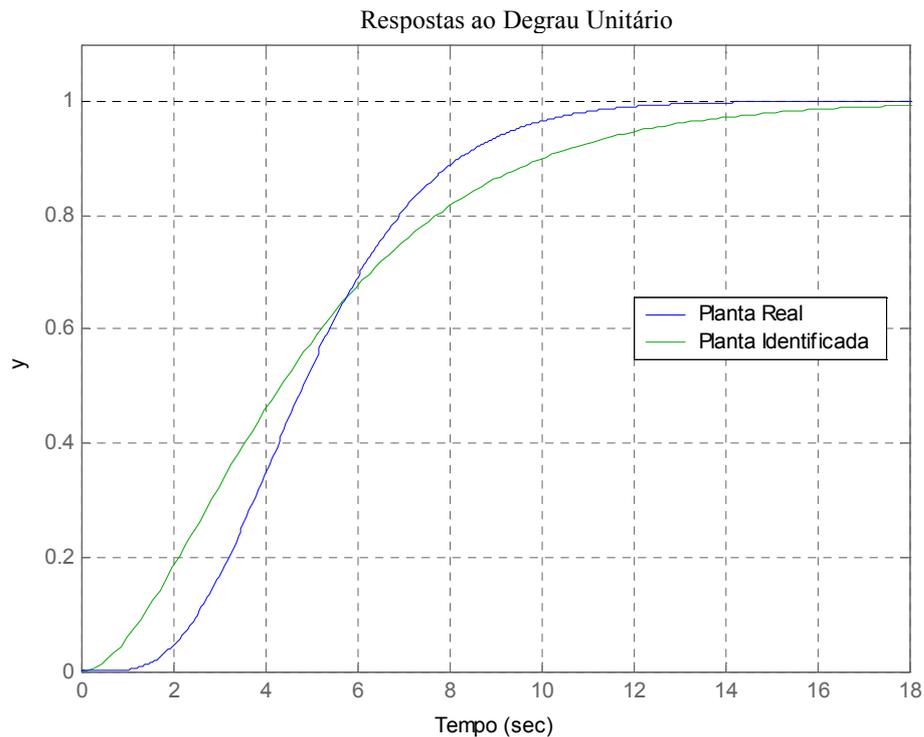


Figura 3.20 – Curvas de resposta ao degrau unitário da equação (3.7) (azul) e da equação (3.28) (verde)

Calculando-se o valor da medida  $\delta$ , obtém-se 0,9916, que é um valor maior que os obtidos nos exemplos 3.5 e 3.8 ( $\delta = 0,3641$  e  $\delta = 0,4018$ , respectivamente) que utilizam como modelo para identificação funções de transferência de primeira ordem com atraso.

**Exemplo 3.12:** Neste exemplo é utilizada a função de transferência dada na equação (3.9). Utilizando os passos descritos no algoritmo 3, obtém-se  $K = 1$  e  $\tau = 0,6193$ . Retornando à equação (3.25) e aplicando os valores de  $K$  e  $\tau$ , obtém-se:

$$G_m(s) = \frac{1}{(0,6193s + 1)^2} \quad (3.29)$$

Na figura 3.21 estão apresentadas as curvas de resposta a um sinal de entrada do tipo degrau unitário das equações (3.9) e (3.29).

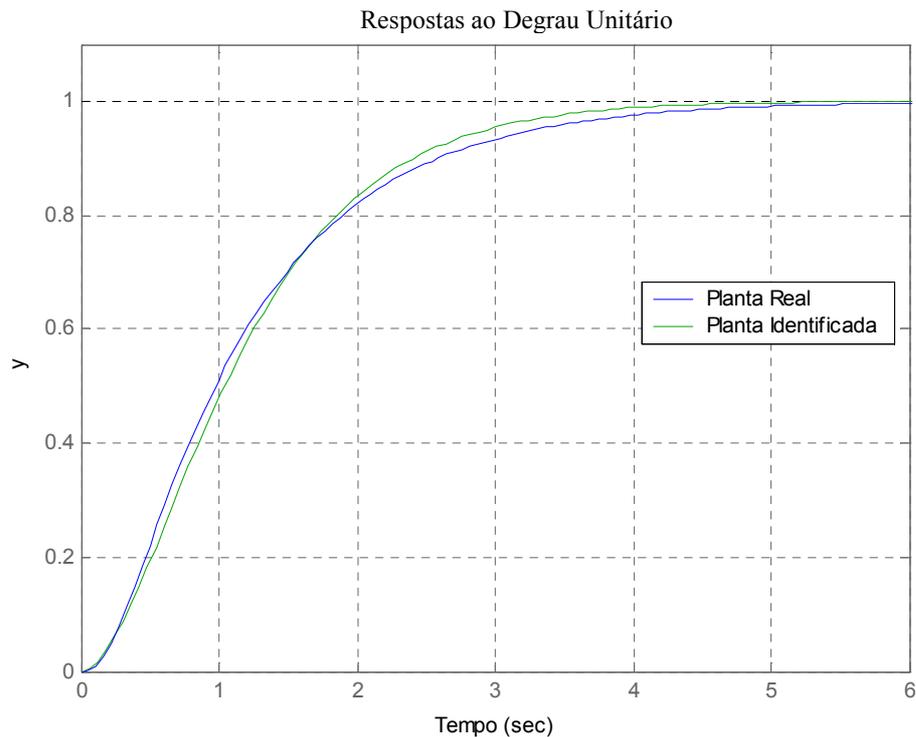


Figura 3.21 – Curvas de resposta ao degrau unitário da equação (3.9) (azul) e da equação (3.29) (verde).

Neste caso obtém-se  $\delta = 0,0986$ , que é também maior que os valores obtidos nos exemplos 3.6 e 3.9 ( $\delta = 0,0205$  e  $\delta = 0,0491$ , respectivamente) para modelos de identificação descritos por funções de transferência de primeira com atraso.

### 3.4 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas formas de identificação da função de transferência de um sistema a partir da sua resposta ao degrau. Os modelos identificados são de primeira ordem com atraso e de segunda ordem com pólos reais e iguais e sem atraso. Foi também apresentada uma medida, denotada por  $\delta$ , para determinação da proximidade entre as curvas de resposta ao degrau da planta e do modelo identificado. Utilizando-se esta medida, é possível verificar que os métodos que utilizam plantas de primeira ordem com atraso como modelo, e fazem o cálculo dos parâmetros do modelo utilizando áreas do gráfico de resposta ao degrau, apresentam valores menores de  $\delta$ , como mostrado na tabela 3.1. Além disso, os resultados obtidos mostram que o método das áreas e o método de minimização de áreas levam a funções de transferência próximas para os modelos identificados e conseqüentemente, para os valores da áreas  $\delta$ , e os resultados obtidos para a medida  $\delta$  com o método da máxima tangente são ruins em relação aos demais métodos.

	Método da Máxima Tangente				Método de Minim. De Áreas				Método das Áreas				Método de Basilio e Matos		
	K	L	$\tau$	$\delta$	K	L	$\tau$	$\delta$	K	L	$\tau$	$\delta$	K	$\tau$	$\delta$
<b>Planta 1 - Equação (3.5)</b>	1	4,3042	6,7179	2,8735	1	5,3762	2,9330	0,5133	1	5,2683	2,7317	0,5878	1	4,000	2,1079
<b>Planta 2 - Equação (3.7)</b>	1	2,1932	5,2292	2,0008	1	3,0134	2,3524	0,3641	1	2,7307	2,4274	0,4018	1	2,579	0,9916
<b>Planta 3 - Equação (3.9)</b>	1	0,1641	1,5026	0,3951	1	0,2640	1,0106	0,0205	1	0,2859	0,9526	0,0491	1	0,619	0,0986

Tabela 3.1 – Valores obtidos para a medida  $\delta$ .

No capítulo quatro são apresentados diversos métodos de ajuste de controladores PID, visando avaliar os desempenhos de cada um dos métodos de identificação apresentados neste capítulo. Além disso, são comparados os resultados obtidos pelos diferentes métodos de sintonia de controladores PID.

# Capítulo 4 Métodos de sintonia de controladores PID

## 4.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados diversos métodos para determinação dos parâmetros de controladores PID. Para exemplificar os métodos, são utilizadas as mesmas funções de transferência dos exemplos do capítulo 3. Primeiramente na seção 4.2, é apresentado o método de sintonia de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau. Na seção 4.3 é apresentado o método de Cohen-Coon [3]. Na seção 4.4, é apresentado um método de sintonia de controladores com abordagem polinomial [3]. Na seção 4.5 é apresentado o método de Basilio e Matos [4], sendo que este utiliza para sintonia do controlador PID, a identificação da planta feita por uma função de transferência de segunda ordem sem zeros finitos. Na seção 4.6 é feita a comparação entre os resultados obtidos pelos diferentes métodos de sintonia de controladores PID. Por fim, na seção 4.7, são apresentadas as conclusões do capítulo.

## 4.2 Método de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau

O primeiro método de Ziegler-Nichols é baseado na resposta de um sistema em malha aberta a uma entrada em degrau. Ele tem por objetivo ajustar um controlador PID de forma que o transitório dominante decaia a um quarto do seu valor após um período de oscilação, como pode ser visto na figura 4.1. Assim, o ajuste dos parâmetros do controlador é feito para se obter uma boa resposta a perturbações na entrada da planta.

Para determinação dos parâmetros do controlador PID, é necessário identificar a função de transferência da planta real, por uma função de transferência de primeira ordem com atraso, como descrita a seguir:

$$G_m(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau s + 1} \quad (4.1)$$

Para tanto, são utilizados neste capítulo os métodos de Máxima Tangente, de Minimização de Áreas e das Áreas, apresentados nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3.

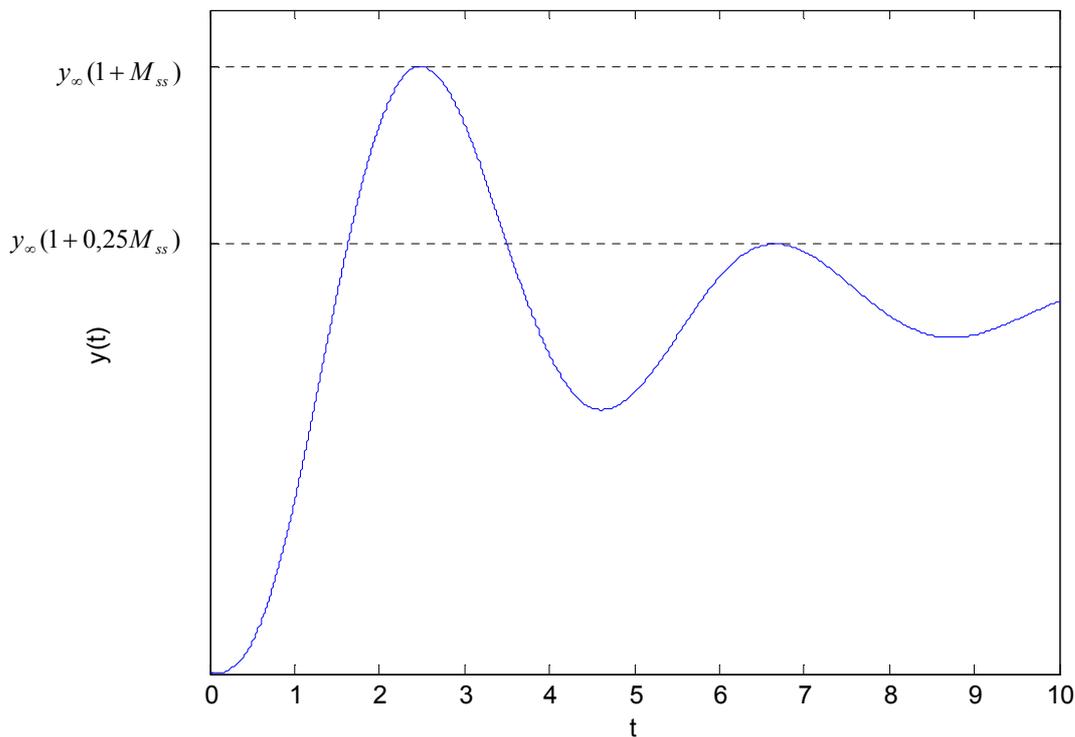


Figura 4.1 – Resposta do sistema com decaimento de 0,25 após um período de oscilação.  $M_{ss}$  denota o máximo sobre-sinal.

### 4.2.1 Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$

Como apresentado na seção 4.2, é necessário identificar a planta real, utilizando como modelo a função de transferência dada pela equação (4.1). Para isto, são utilizados os métodos de identificação apresentados nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3. Após a obtenção dos valores de  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  da equação (4.1), os parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  são obtidos diretamente, aplicando os valores de  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  na tabela 4.1 [1] e [2].

PID	
$K_p$	$\frac{1,2\tau}{KL}$
$T_i$	$2L$
$T_d$	$\frac{L}{2}$

Tabela 4.1 – Parâmetros de ajuste de PID por Ziegler-Nichols resposta ao degrau [2].

A seguir são apresentados três exemplos que utilizam este método para ajuste de controladores do tipo PID. Para avaliação do desempenho da resposta obtida em cada exemplo, são apresentadas tabelas com os seguintes indicadores:  $t_s$  (tempo de acomodação), o tempo para que a resposta se mantenha a 2% de seu valor de regime permanente;  $t_r$  (tempo de subida), tempo até a resposta atingir 90% do valor de regime permanente [3];  $u_{\text{máx}}$  (valor máximo atingido pelo sinal de controle);  $m_s$  (máximo sobre-sinal), o valor do percentual de ultrapassagem em relação ao valor do sinal em regime permanente; e  $t_{sp}$  (tempo de acomodação após a perturbação), considerando 2% do valor de regime permanente. Todas as simulações realizadas nos exemplos, utilizam  $b = 1$  e  $N = 30$ . Além disso, a identificação da planta é feita utilizando-se os métodos descritos nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3.

**Exemplo 4.1:** Neste exemplo é projetado um controlador PID para a função de transferência da planta descrita pela equação (3.5) e reescrita a seguir:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^8}, \quad (4.2)$$

utilizando para ajuste do controlador PID o método de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau. Com a utilização dos métodos de identificação da planta são obtidos os valores de  $K$ ,  $L$  e  $\tau$ , apresentados na tabela 4.2.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K$	1	1	1
$L$	5,3762	4,3042	5,2683
$\tau$	2,9330	6,7179	2,7317
$\delta$	0,5133	2,8735	0,5878

Tabela 4.2 – Parâmetros de identificação da planta.

Com os valores da tabela 4.2 aplicados à tabela 4.1, obtém-se a tabela 4.3.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	0,6547	1,8729	0,6222
$T_i$	10,7525	8,6084	10,5366
$T_d$	2,6881	2,1521	2,6342

Tabela 4.3 – Parâmetros do controlador PID obtidos pelo método de Ziegler-Nichols.

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtêm-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.2, 4.3 e 4.4.

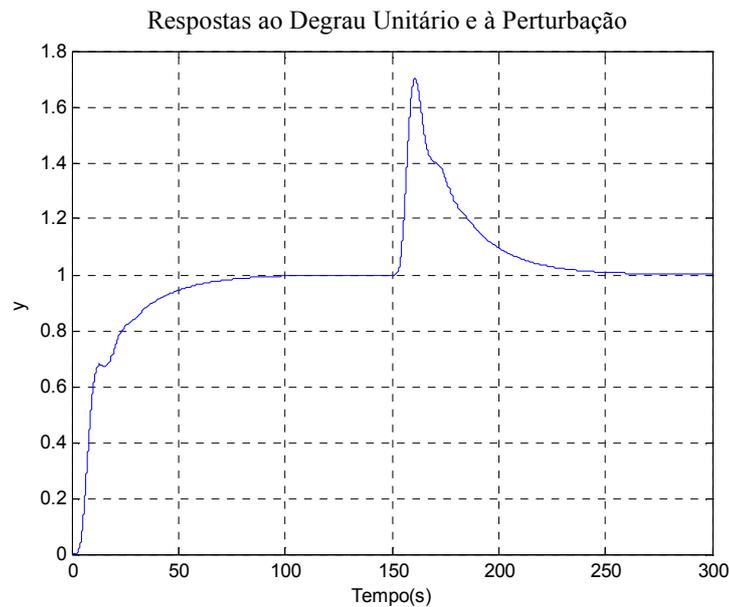


Figura 4.2 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas.

Perturbação aplicada em  $t = 150s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

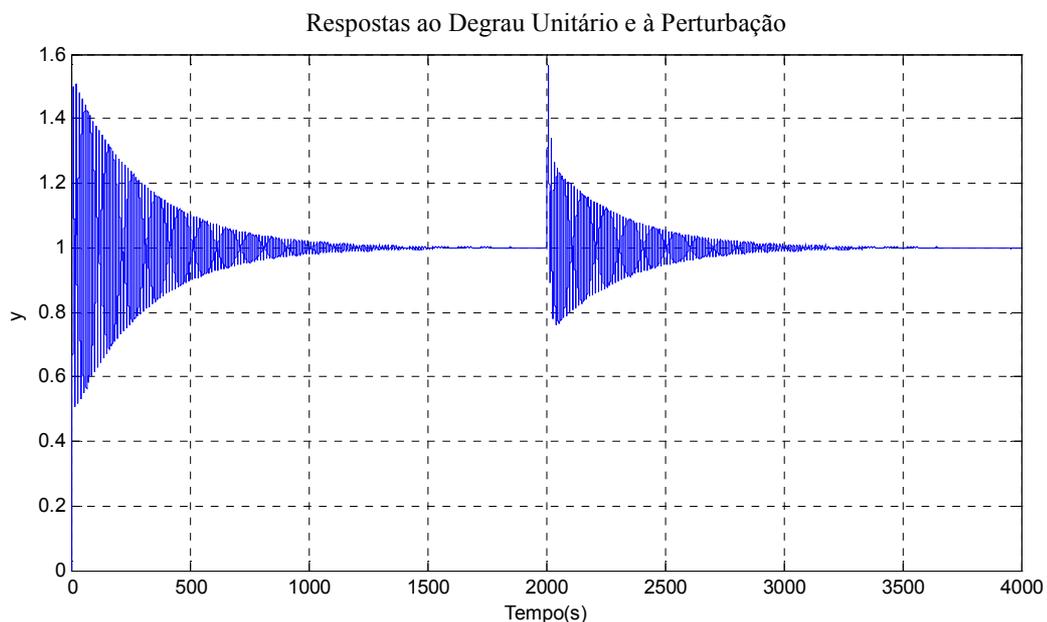


Figura 4.3 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente. Perturbação aplicada em  $t = 2000$ s – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

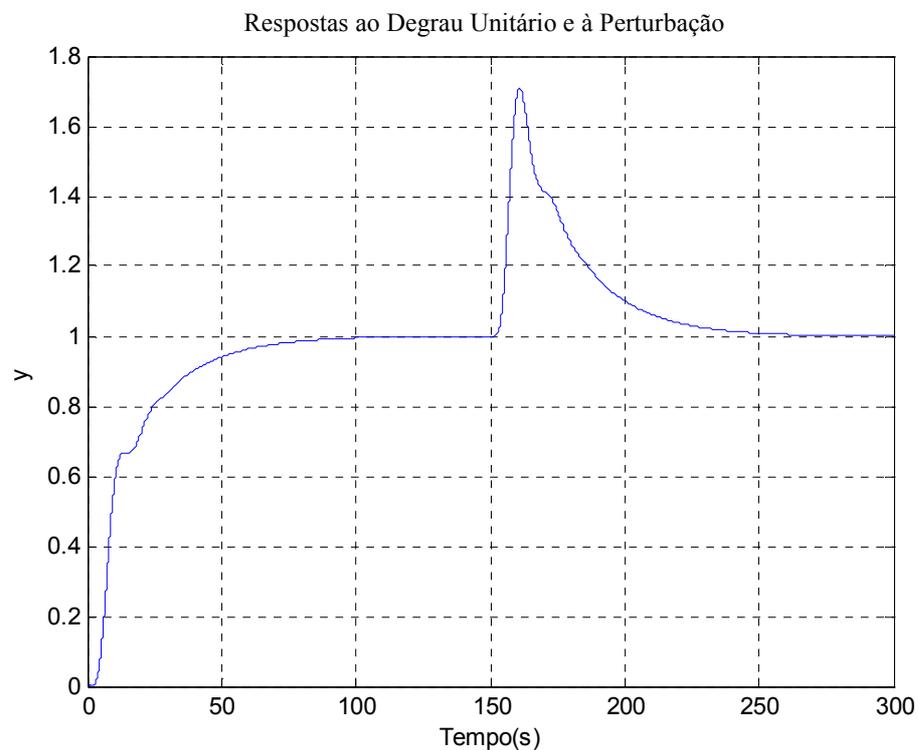


Figura 4.4 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 150$ s – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

Na tabela 4.4, são apresentados os indicadores de desempenho das respostas obtidas utilizando as três identificações e os controladores PID respectivos apresentados neste exemplo.

Índice	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	71s	1003,5s	72,8s
$t_r$	38,25s	7,15s	39,5s
$u_{máx}$	1	2,34	0,988
$m_s$	0%	51%	0%
$t_{sp}$	81,8s	817s	83s

Tabela 4.4 – Indicadores de desempenho.

Ao analisar a tabela 4.4, é possível concluir que controladores projetados utilizando o modelo de planta identificado pelo método de Minimização de Áreas e pelo Método das Áreas levaram a desempenhos semelhantes. Cabe ressaltar que utilizando o método da Máxima Tangente para identificação da planta, o resultado foi extremamente ruim, apresentando tempos de acomodação aproximadamente dez vezes maior que nos outros dois métodos, além de um máximo sobre-sinal de 51%, contra 0% dos demais.

Além das considerações apresentadas, é importante destacar o fato que utilizando os métodos de identificação das Áreas e de Minimização de Áreas, os resultados obtidos para o controlador ajustado por Ziegler-Nichols apresentaram máximo sobre-sinal de 0%.

**Exemplo 4.2:** Neste exemplo é utilizada a função de transferência da planta apresentada na equação (3.7) e reescrita a seguir:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(1,15s+1)(1,1s+1)(0,95s+1)(0,9s+1)(0,05s+1)(0,01s+1)} \quad (4.3)$$

Os resultados obtidos para os valores de  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  estão apresentados na tabela 4.5.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K$	1	1	1
$L$	3,0134	2,1932	2,7307
$\tau$	2,3524	5,2292	2,4274
$\delta$	0,3641	2,0008	0,4018

Tabela 4.5 – Parâmetros de identificação da planta.

Com os valores da tabela 4.5 aplicados à tabela 4.1, obtêm-se a tabela 4.6.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	0,9368	2,8615	1,0669
$T_i$	6,0269	4,3864	5,4613
$T_d$	1,5067	1,0966	1,3653

Tabela 4.6 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Com esses valores aplicados às equações (2.21) e (2.22) e sendo  $R(s)$  igual a um sinal igual ao degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtêm-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.5, 4.6 e 4.7.

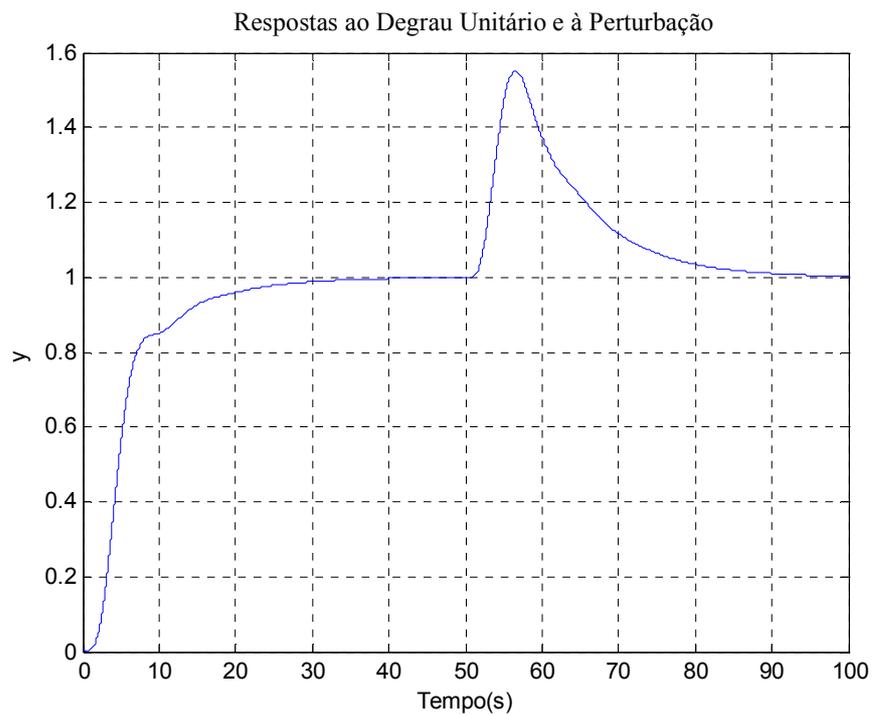


Figura 4.5 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

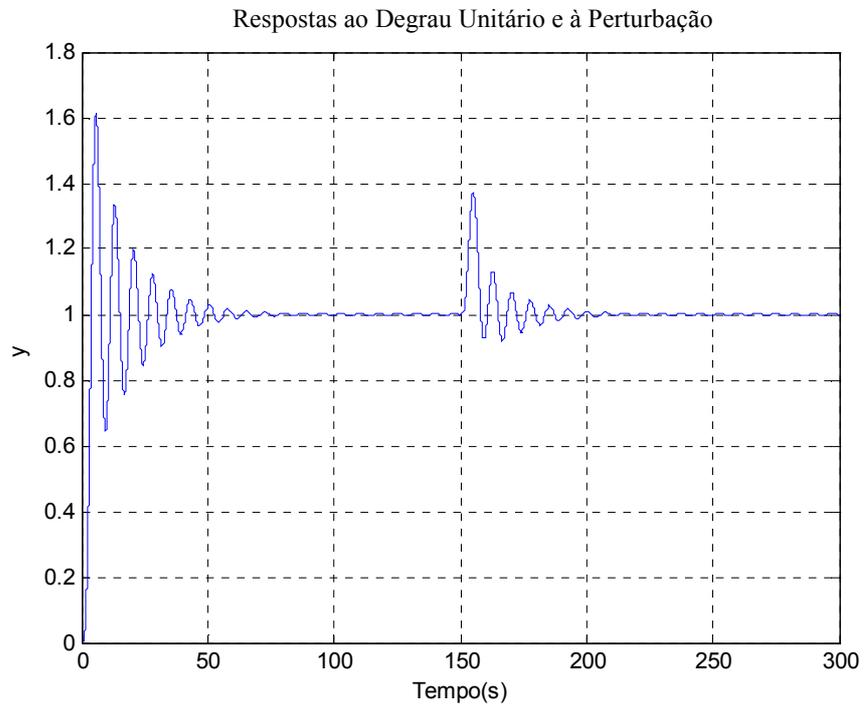


Figura 4.6 - Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente. Perturbação aplicada em  $t = 150s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

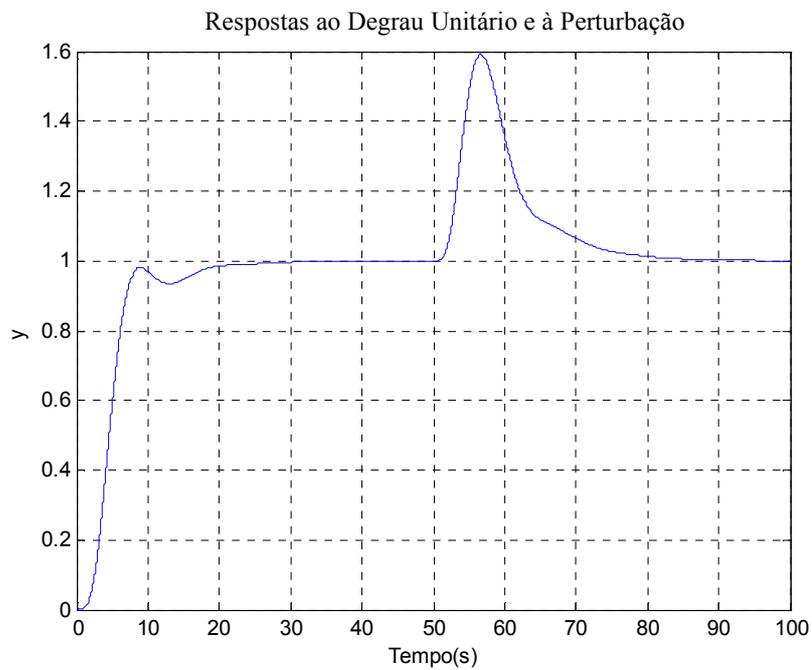


Figura 4.7 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

A seguir é apresentada a tabela 4.7, onde são mostrados os indicadores de desempenho, obtidos com a utilização do método de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau, para os diferentes métodos de identificação da planta.

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	25,67s	54,98s	18,7s
$t_r$	13,26s	3,683s	7s
$u_{\text{máx}}$	1,1	3,4	1,28
$m_s$	0%	61,5%	0%
$t_{sp}$	34,6s	39,53s	27s

Tabela 4.7 – Indicadores de desempenho.

Após análise dos indicadores de desempenho obtidos, exibidos na tabela 4.7, com as três identificações da planta, pode-se afirmar que o método das Áreas apresentou os melhores resultados, exceto pelo tempo de subida ( $t_r$ ), que teve um melhor resultado quando utilizado o método de identificação da Máxima Tangente. Entretanto, o valor do máximo sinal de controle para esta simulação foi aproximadamente três vezes maior e o sobre-sinal atingiu 61,5%. É importante ressaltar ainda que, apesar de  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  possuírem valores próximos nos modelos identificados pelo método das Áreas e o de minimização de Áreas, os indicadores de desempenho para estes dois métodos de identificação são consideravelmente distintos, como pode ser observado na tabela 4.7.

**Exemplo 4.3:** Neste exemplo é utilizada a função de transferência da planta apresentada na equação (3.9) e reescrita a seguir:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)(0,05s+1)(0,01s+1)} \quad (4.4)$$

Utilizando os métodos de identificação da planta, obtém-se os valores dos parâmetros da equação (4.1), apresentados na tabela 4.8.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K$	1	1	1
$L$	0,2640	0,1641	0,2859
$\tau$	1,0106	1,5026	0,9526
$\delta$	0,0205	0,3951	0,0491

Tabela 4.8 – Parâmetros de identificação da planta.

Com os valores da tabela 4.8 aplicados à tabela 4.1, obtém-se a tabela 4.9.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	4,5933	11,0284	4,0138
$T_i$	0,5281	0,3282	0,5718
$T_d$	0,1320	0,0821	0,1430

Tabela 4.9 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtêm-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

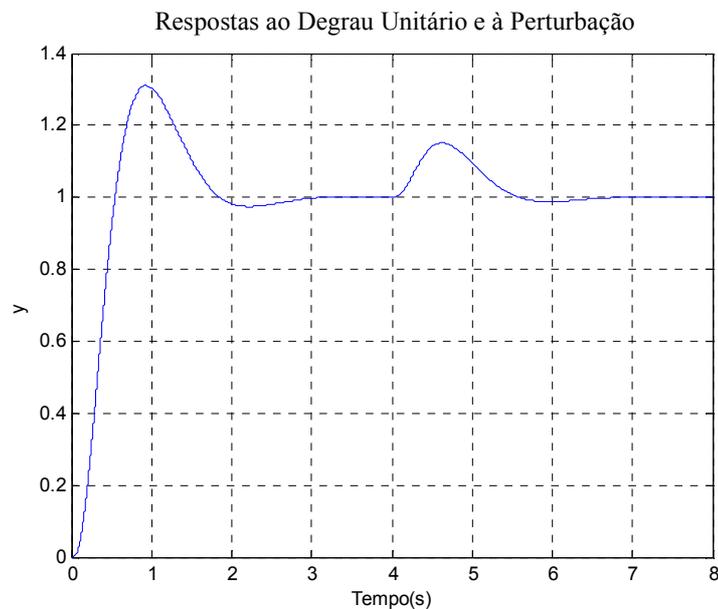


Figura 4.8 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas.

Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

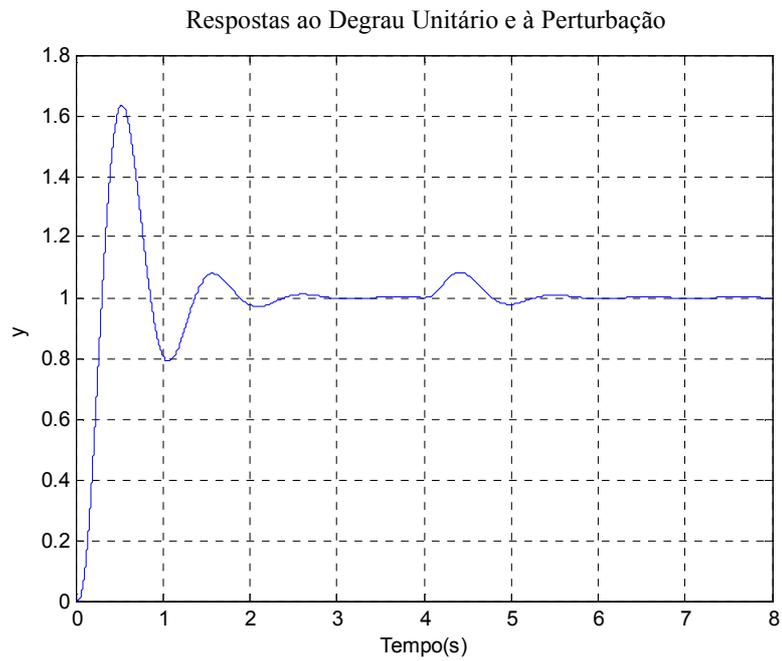


Figura 4.9 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente. Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

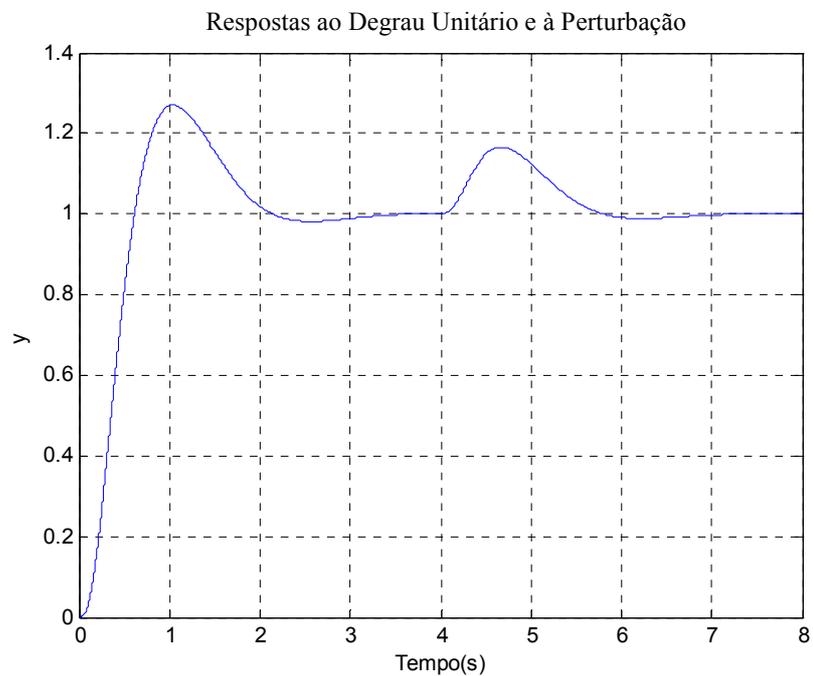


Figura 4.10 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método de Ziegler-Nichols.

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	2,49s	2,24s	1,999s
$t_r$	0,494s	0,2825s	0,549s
$u_{\text{máx}}$	4,87	12,04	4,237
$m_s$	31%	63,5%	27%
$t_{sp}$	1,4s	1,06s	1,587s

Tabela 4.10 – Indicadores de desempenho.

Com a análise dos indicadores da tabela 4.10, verifica-se que o método das Áreas obteve um resultado melhor para a resposta à referência, porém com relação a resposta à perturbação o método da Máxima Tangente para identificação da planta superou os outros dois, porém com máximo sobre-sinal aproximadamente duas vezes maior. Por estes motivos o método das Áreas é considerado o melhor método de identificação a ser utilizado para a sintonia do controlador PID pelo método de Ziegler-Nichols neste exemplo.

### 4.3 Método de Cohen-Coon

O método de Cohen-Coon é um método semelhante ao método de Ziegler-Nichols de resposta ao degrau, pois também utiliza a identificação da planta real por uma função de transferência de primeira ordem com atraso, mostrada na equação (4.1). A diferença entre os métodos está no fato que Cohen e Coon ao observarem que o método de Ziegler-Nichols é sensível à relação  $L/\tau$ , onde  $L$  e  $\tau$  denotam o atraso e a constante de tempo do sistema, respectivamente, decidem realizar estudos considerando um parâmetro  $\eta$ , sendo  $\eta = L/\tau$ . Desta forma, os resultados para controladores PID projetados por este método sofrem menor influência de  $\eta$  [3].

#### 4.3.1 Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$

Para determinação dos parâmetros de ajuste do controlador PID utilizando o método de Cohen-Coon é preciso primeiramente identificar a planta real por uma função de transferência de primeira ordem com atraso. Após obter os valores de  $L$ ,  $\tau$  e  $K$  da equação (4.1), basta aplicá-los à tabela 4.11, para obter os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ .

PID	
$K_p$	$\frac{\tau}{KL} \left( \frac{4}{3} + \frac{L}{4\tau} \right)$
$T_i$	$\frac{L(32\tau + 6L)}{13\tau + 8L}$
$T_d$	$\frac{4L\tau}{11\tau + 2L}$

Tabela 4.11 - Parâmetros de ajuste de PID por Cohen-Coon [3]

A seguir são feitos três exemplos utilizando este método para projetar os controladores PID. Para estas simulações feitas nesses exemplos são adotados  $b = 1$  e  $N = 30$ . Além disso, as plantas dos exemplos são identificadas pelos métodos de identificação apresentados nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3.

**Exemplo 4.4:** Neste exemplo é ajustado um controlador PID para a planta descrita na equação (4.2) utilizando o método de Cohen-Coon. Os resultados para os parâmetros  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  da função de transferência do modelo da planta estão apresentados na tabela 4.2.

Com os valores da tabela 4.2 aplicados à tabela 4.11, obtém-se os resultados apresentados na tabela 4.12.

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	0,6592	1,4206	0,6389
$T_i$	8,3563	8,5117	8,0745
$T_d$	1,4663	1,4019	1,4184

Tabela 4.12 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Logo, aplicando os valores da tabela 4.12 às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.11, 4.12 e 4.13.

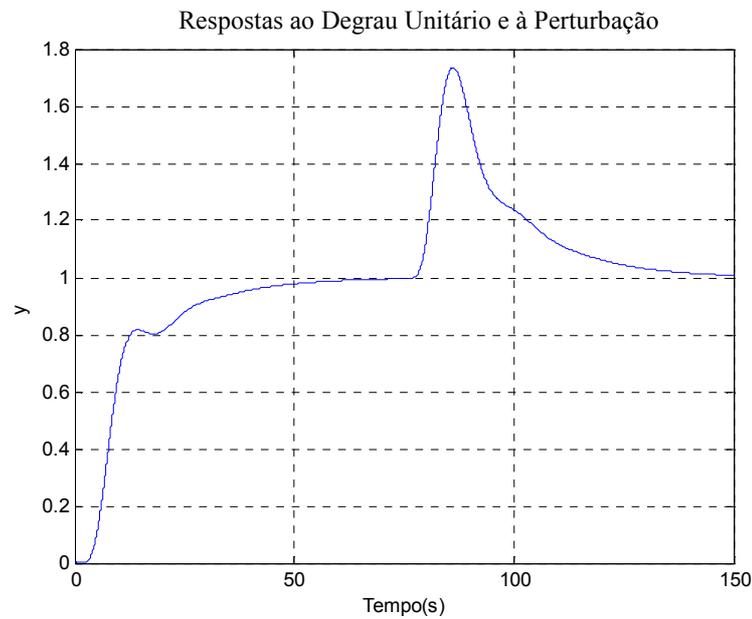


Figura 4.11 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 75s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

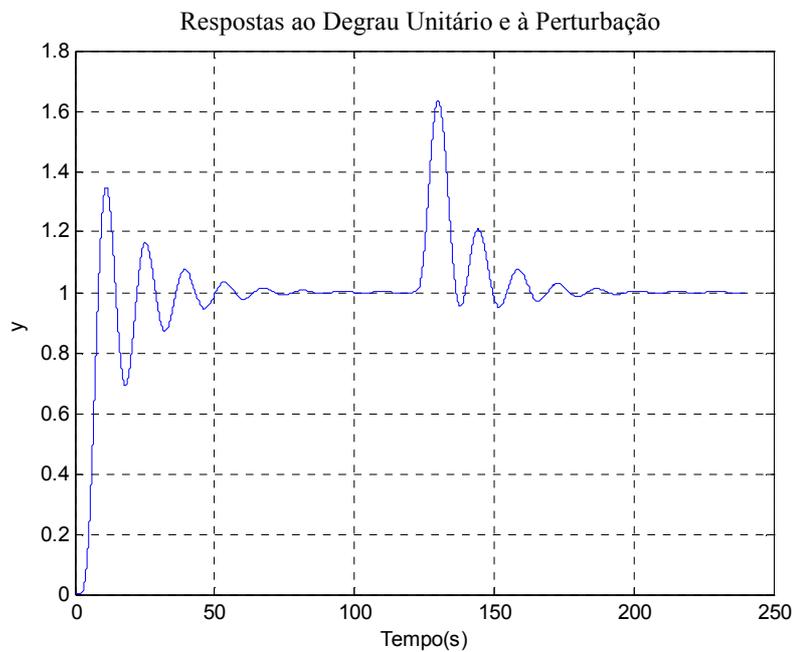


Figura 4.12 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente. Perturbação aplicada em  $t = 120s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

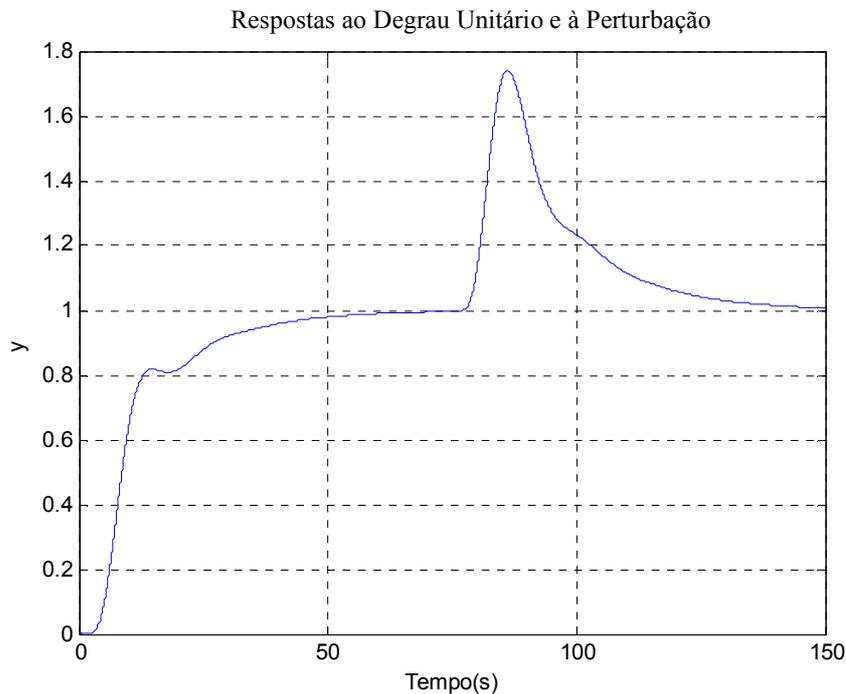


Figura 4.13 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 75s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.13

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	51,5s	61,8s	50,6s
$t_r$	27,25s	7,93s	27,1s
$u_{máx}$	1	1,837	1
$m_s$	0%	35%	0%
$t_{sp}$	60,5s	54,9s	60,5s

Tabela 4.13 – Indicadores de desempenho.

Com a análise dos indicadores de desempenho apresentados na tabela 4.13, verifica-se que os melhores resultados são obtidos quando utilizado o método das Áreas. Apenas para resposta à perturbação o método de identificação da Máxima Tangente apresentou um melhor resultado, porém apresentando um máximo sobre-sinal de 35%. Além disso, é importante ressaltar que os resultados obtidos com a identificação feita pelo método de Minimização de

Áreas são muito semelhantes aos obtidos com o método das Áreas, como esperado, devido à proximidade dos valores obtidos para  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  pelos dois métodos.

**Exemplo 4.5:** Este exemplo utiliza como planta e equação apresentada em (4.3). Utilizando os métodos de identificação, obtém-se os resultados mostrados na tabela 4.5.

Aplicando os valores da tabela 4.5 na tabela 4.11, obtém-se a tabela 4.14:

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	0,8355	2,0385	0,9168
$T_i$	5,1442	4,6286	4,8097
$T_d$	0,8888	0,7410	0,8244

Tabela 4.14 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Utilizando-se os controladores PID, com os parâmetros apresentados na tabela 4.14 às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se as curvas de resposta apresentadas nas figuras 4.14, 4.15 e 4.16.

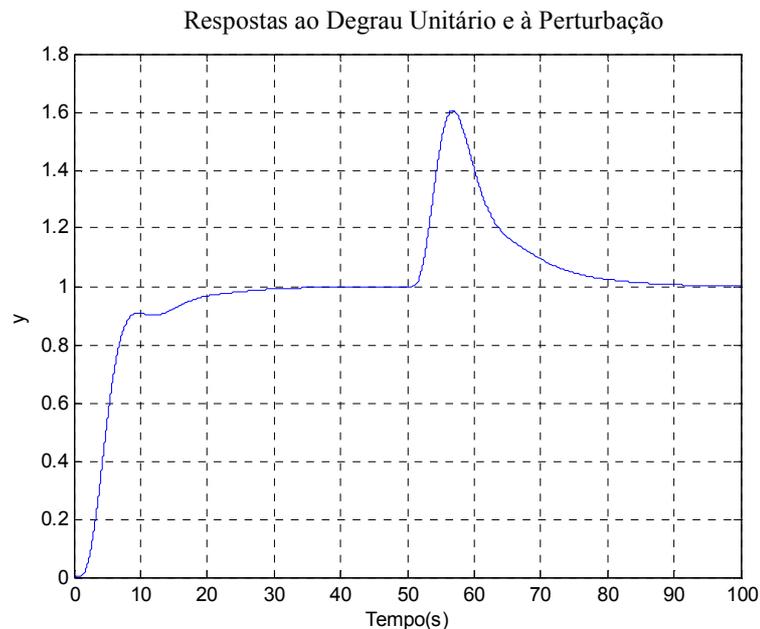


Figura 4.14 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas.

Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

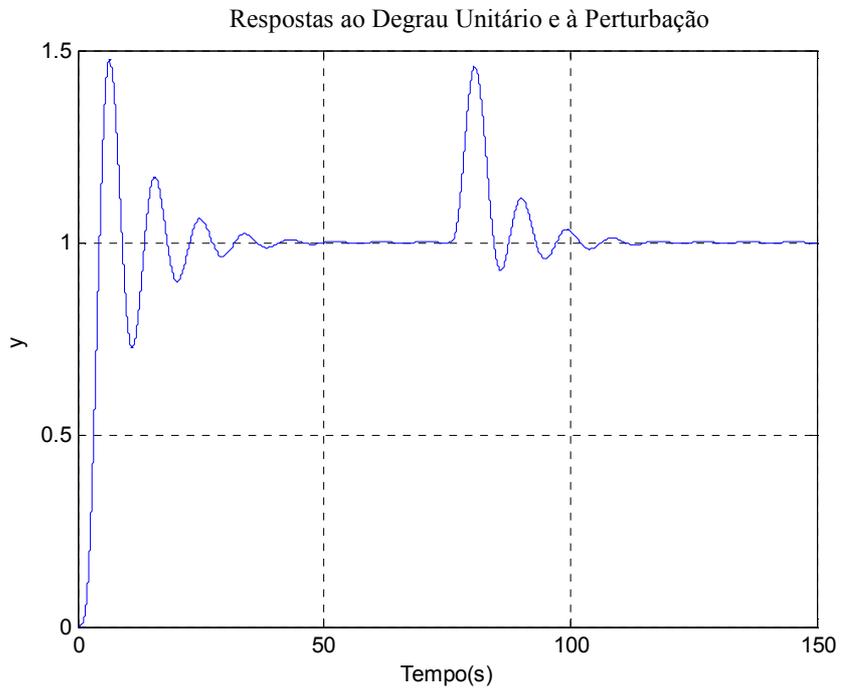


Figura 4.15 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente. Perturbação aplicada em  $t = 75s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon..

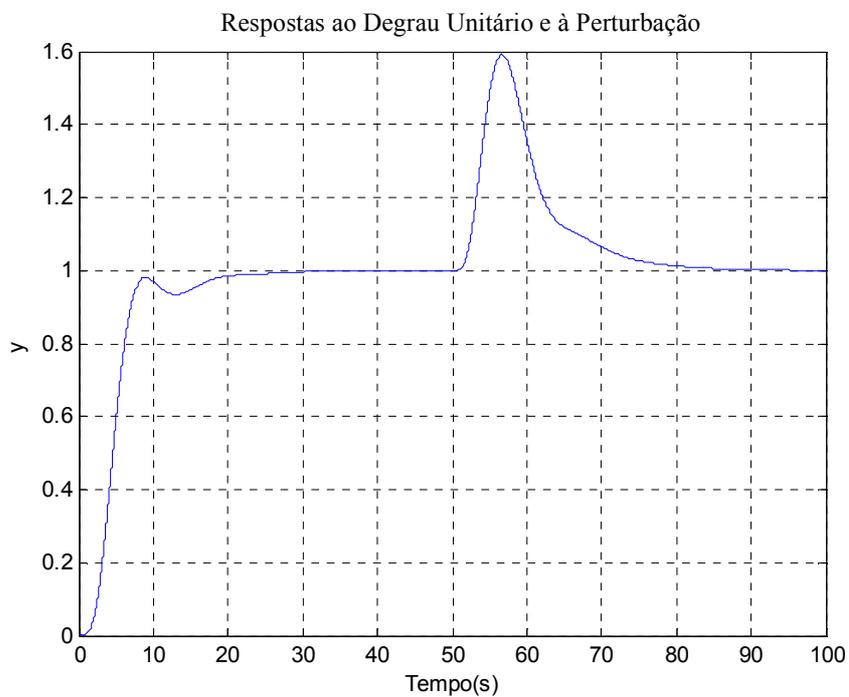


Figura 4.16 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.15

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	24,25s	34,74s	18,72s
$t_r$	8,65s	4,22s	6,98s
$u_{máx}$	1,076	2,502	1,2
$m_s$	0%	47,62%	0%
$t_{sp}$	31,5s	25,9s	27,0s

Tabela 4.15 – Indicadores de desempenho.

Com a análise dos indicadores de desempenho apresentados na tabela 4.15, verifica-se que os melhores resultados são obtidos com a utilização do método das Áreas para identificação da planta, pois este obteve o menor valor para o tempo de acomodação e nos outros indicadores apresentou valores iguais ou próximos aos dos outros dois métodos. Além disso, verifica-se que o resultado para o método de identificação da Máxima Tangente foi ruim em praticamente todos os indicadores, exceto pelos valores de tempo de acomodação após a perturbação e para o tempo de subida, que foram menores, porém apresentando aos altos valores de  $M_{ss}$  e  $u_{máx}$ .

**Exemplo 4.6:** Este exemplo utiliza como planta e equação apresentada em (4.4). Utilizando os métodos de identificação da planta, obtêm-se os valores da  $K$ ,  $L$  e  $\tau$  apresentados na tabela 4.8. Com esses valores da tabela 4.8 aplicados à tabela 4.11, obtêm-se os valores da tabela 4.16:

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	3,1208	11,0284	4,0138
$T_i$	0,5873	0,3282	0,5718
$T_d$	0,0917	0,0821	0,1430

Tabela 4.16 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Utilizando-se os parâmetros dos controladores PID apresentados na tabela 4.16 aplicados às funções de transferência dadas nas equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do

tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtêm-se as curvas de resposta apresentadas nas figuras 4.17, 4.18 e 4.19.

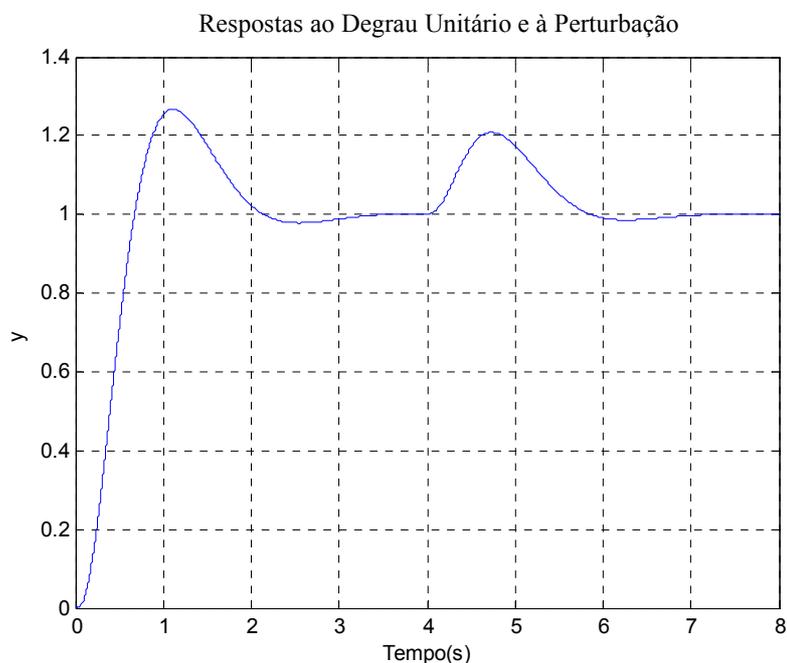


Figura 4.17 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas.

Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

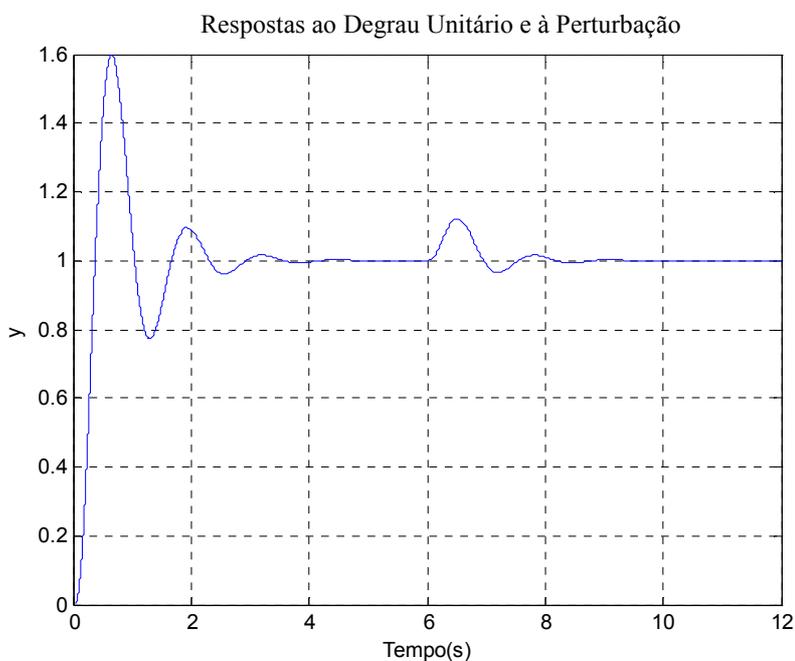


Figura 4.18 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente.

Perturbação aplicada em  $t = 6s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

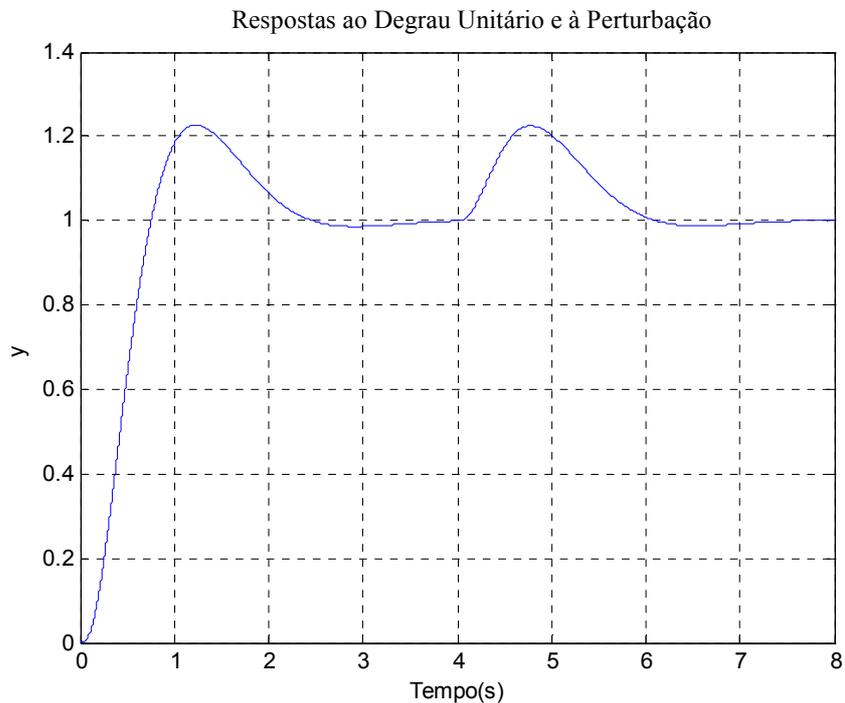


Figura 4.19 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método de Cohen-Coon.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.17

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	2,7s	2,8s	2,27s
$t_r$	0,606s	0,346s	0,671s
$u_{máx}$	3,4	7,985	2,995
$m_s$	26,7%	59,9%	22,68%
$t_{sp}$	1,69s	1,4s	1,9s

Tabela 4.17 – Indicadores de desempenho.

Com os valores apresentados na tabela 4.17, é possível afirmar que o método das Áreas para identificação da planta, foi o que apresentou os melhores resultados, exceto pelo tempo de acomodação após a perturbação ( $t_{sp}$ ), que teve um resultado melhor para a identificação feita pelo método da Máxima Tangente.

## 4.4 Método Polinomial

O método polinomial é um método diferente dos dois métodos apresentados nas seções 4.2 e 4.3, por ser este um método não empírico. Neste caso, para determinação dos parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , é utilizado o método de posicionamento de pólos dominantes. Para tanto, primeiramente a planta é identificada por uma função de transferência de primeira ordem com atraso. Este atraso é aproximado por uma função racional própria, utilizando-se a aproximação de Padé de ordem (1,1) [3]:

$$e^{-sL} \approx \frac{\left[ \left( \frac{-L}{2} \right) s + 1 \right]}{\left[ \left( \frac{L}{2} \right) s + 1 \right]}$$

Portanto, a função de transferência utilizada como modelo para identificação da planta é dada por:

$$G_m(s) = e^{-sL} \frac{K}{(\tau s + 1)} \approx \frac{\left[ \left( \frac{-L}{2} \right) s + 1 \right]}{\left[ \left( \frac{L}{2} \right) s + 1 \right]} \frac{K}{(\tau s + 1)} = \frac{K \left[ \left( \frac{-L}{2} \right) s + 1 \right]}{\left[ \left( \frac{L}{2} \right) s + 1 \right] (\tau s + 1)}. \quad (4.5)$$

Supondo que o controlador PID seja:

$$K(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right),$$

é possível, após algumas manipulações algébricas, obter:

$$K(s) = \frac{K_p T_d s^2 + K_p s + \frac{K_p}{T_i}}{s} = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}, \quad (4.6)$$

onde

$$K_d = K_p T_d, \quad (4.7)$$

e

$$K_i = \frac{K_p}{T_i}. \quad (4.8)$$

Assim, o sistema em malha aberta é dado por  $G_{ma}(s) = G_m(s)K(s)$ , e o sistema em malha fechada, com realimentação unitária negativa, é dado por:

$$G_{mf}(s) = \frac{G_{ma}(s)}{1 + G_{ma}(s)} = \frac{\frac{n_{G_{ma}}(s)}{d_{G_{ma}}(s)}}{1 + \frac{n_{G_{ma}}(s)}{d_{G_{ma}}(s)}} = \frac{\frac{n_{G_{ma}}(s)}{d_{G_{ma}}(s)}}{\frac{d_{G_{ma}}(s) + n_{G_{ma}}(s)}{d_{G_{ma}}(s)}} = \frac{n_{G_{ma}}(s)}{d_{G_{ma}}(s) + n_{G_{ma}}(s)}, \quad (4.9)$$

onde  $n_{G_{ma}}(s)$  e  $d_{G_{ma}}(s)$  são, respectivamente, o numerador e o denominador de  $G_{ma}(s)$ .

A partir da equação (4.9), é possível extrair o polinômio característico do sistema, sendo este igual a:

$$p_c(s) = s^3 + \frac{\left(KK_d - \frac{L}{2}KK_p + \frac{L}{2} + \tau\right)}{\left(\frac{L}{2}\tau - \frac{L}{2}KK_d\right)}s^2 + \frac{\left(KK_p - \frac{L}{2}KK_i + 1\right)}{\left(\frac{L}{2}\tau - \frac{L}{2}KK_d\right)}s + \frac{KK_i}{\left(\frac{L}{2}\tau - \frac{L}{2}KK_d\right)}. \quad (4.10)$$

É possível perceber que os pólos da equação (4.10) dependem dos valores de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ . Portanto, é possível colocá-los arbitrariamente, de acordo com o ajuste dos parâmetros do controlador PID. Para este ajuste é utilizado o conceito de pólos dominantes. Para isto, dois pólos são alocados de forma a serem dominantes e o terceiro é alocado aproximadamente quatro vezes mais afastado do eixo real, em relação aos pólos dominantes. Desta forma, o terceiro pólo exerce pouca influência sobre a resposta do sistema realimentado [1]. Para tanto, é criado um polinômio característico desejado, como mostrado na equação a seguir:

$$p_{cd}(s) = (s + \alpha\xi\omega)(s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2) = s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3, \quad (4.11)$$

em que  $\xi$  denota o coeficiente de amortecimento,  $\omega$  denota a frequência natural não amortecida e  $\alpha$  denota a constante que define o afastamento do pólo não dominante.

Neste trabalho, para determinação dos valores de  $\xi$  e  $\omega$ , são utilizados os valores desejados para o máximo sobre-sinal,  $M_{ss}$ , e para o tempo de acomodação,  $t_s$ , para os pólos dominantes do sistema, sendo [1]:

$$\xi = \sqrt{\frac{\ln^2(M_{ss})}{\ln^2(M_{ss}) + \pi^2}}$$

e

$$\omega = -\frac{\ln(M_{ss})}{\xi t_s}.$$

Além de  $\xi$  e  $\omega$ , é necessário determinar  $\alpha$ , porém para este, não há necessidade de cálculo, sendo utilizado usualmente  $\alpha = 4$  [1]. Com os valores de  $\xi$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  aplicados à equação (4.11) é possível obter os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  do polinômio desejado da equação (4.11).

#### 4.4.1 Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$

Após determinado o polinômio característico desejado, é necessário igualar os coeficientes do polinômio característico, dado na equação (4.10), aos coeficientes do polinômio característico desejado, dado pela equação (4.11), para determinação de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ . Assim, para obter os parâmetros do controlador PID, é apresentado a seguir o sistema linear que os determina a partir dos valores de  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $K$  e  $L$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & K & \left(\frac{L}{2}\right)Ka_3 \\ K & -\left(\frac{L}{2}\right)K & a_2\left(\frac{L}{2}\right)K \\ -\left(\frac{L}{2}\right)K & 0 & \left[K + a_1\left(\frac{L}{2}\right)K\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3\left(\frac{L}{2}\right)\tau \\ a_2\left(\frac{L}{2}\right)\tau - 1 \\ a_1\left(\frac{L}{2}\right)\tau - \left(\frac{L}{2}\right) - \tau \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

Resolvendo-se esse sistema linear, é possível obter os valores de  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$  e conseqüentemente  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , a partir das equações (4.7) e (4.8).

A seguir são feitos três exemplos utilizando este método para projetar controladores PID. Em todos os exemplos a planta é identificada pelos métodos descritos nas subseções 3.3.1, 3.3.2 e 3.3.3, e nas simulações são adotados  $b = 1$  e  $N = 30$ . Para  $M_{ss}$  são sempre adotados valores de modo a produzir o menor máximo sobre-sinal e para  $t_s$  são adotados valores que visam reduzir os valores obtidos para  $t_s$ , nos exemplos dos métodos de sintonia apresentados nas seções 4.2 e 4.3.

**Exemplo 4.7:** Este exemplo utiliza a planta apresentada na equação (4.2). Para sintonia do controlador PID é utilizado o método Polinomial. Com a utilização dos métodos de identificação da planta, obtém-se os dados apresentados na tabela 4.2:

Aplicando os valores da tabela 4.2 na equação (4.12), onde  $M_{ss}$  e  $t_s$  são fixados em 0,1% e 23s, respectivamente, e resolvendo o sistema linear obtém-se:

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	0,6281	1,5972	0,5574
$T_i$	5,3628	8,2193	4,9558
$T_d$	1,7496	1,8259	1,6762

Tabela 4.18 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.20, 4.21 e 4.22.

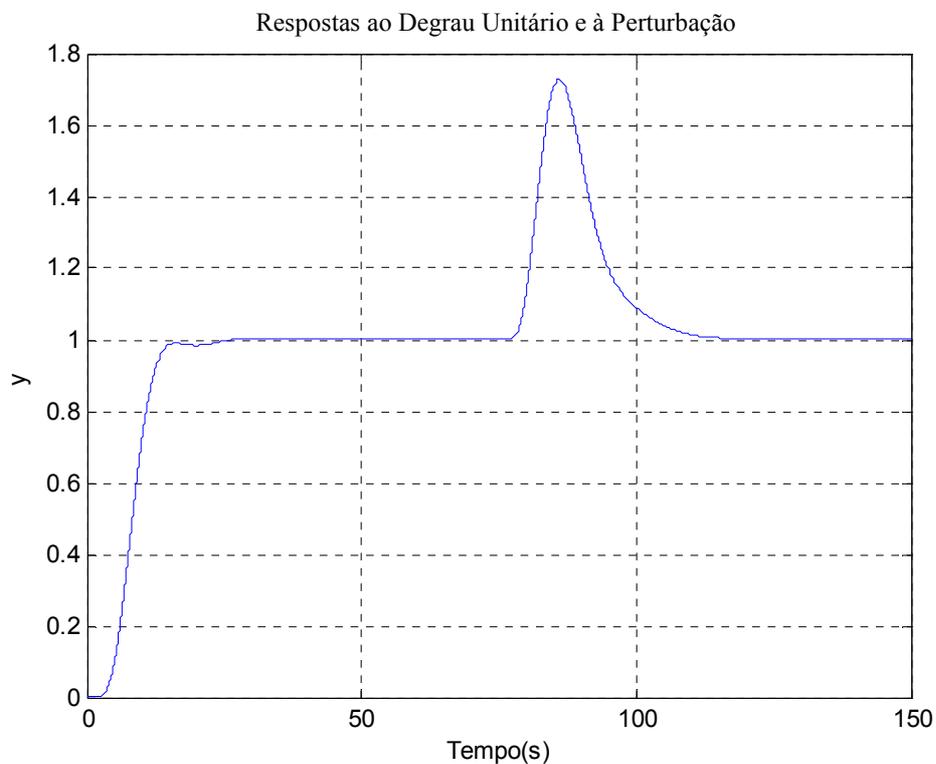


Figura 4.20 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 75s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

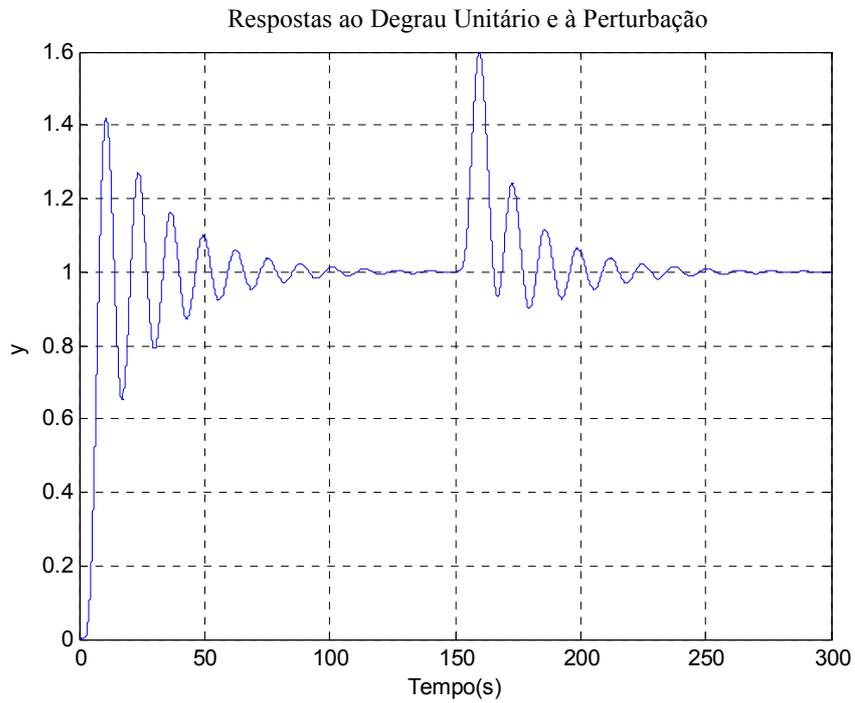


Figura 4.21 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente.

Perturbação aplicada em  $t = 150s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

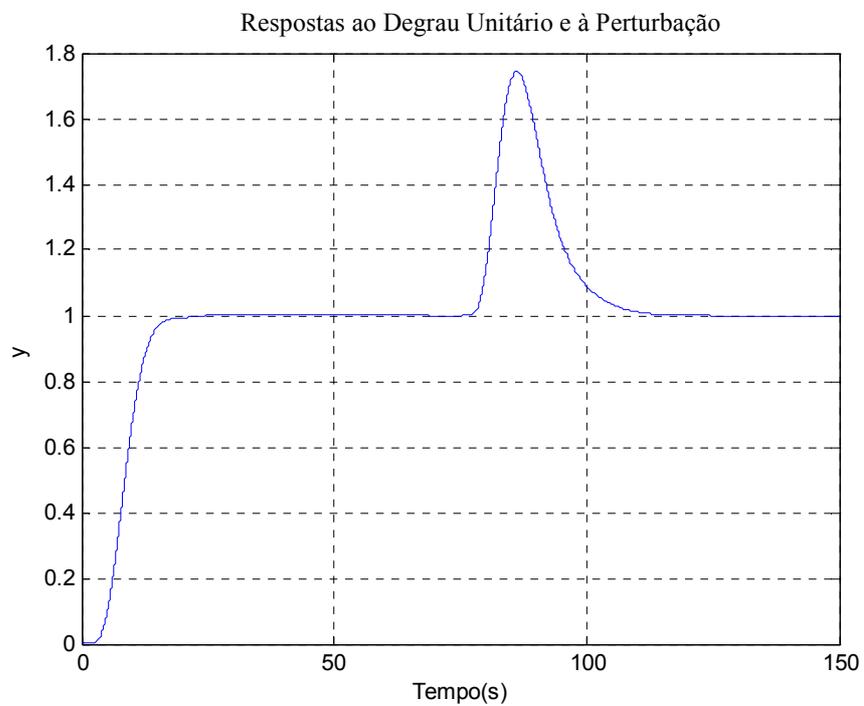


Figura 4.22 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação

aplicada em  $t = 75s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.19

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	14,5s	89,2s	16,2s
$t_r$	12,1s	7,55s	13s
$u_{máx}$	1,058	2,048	1,016
$m_s$	0,24%	41,8%	0,36%
$t_{sp}$	33,5s	76s	32,6s

Tabela 4.19 – Indicadores de desempenho.

Com a análise dos indicadores da tabela 4.19, verifica-se que o método de Minimização de Áreas apresentou os melhores resultados, exceto para o tempo de acomodação após a perturbação, que teve seu menor valor para o método das Áreas. Ainda assim, ao comparar os valores de  $t_{sp}$  obtidos com o método de Minimização de Áreas e com o método das Áreas verifica-se que estes são muito próximos.

**Exemplo 4.8:** Este exemplo utiliza a planta apresentada na equação (4.3). Com a utilização destes métodos de identificação da planta, obtém-se os dados apresentados na tabela 4.5:

Aplicando os valores da tabela 4.5 na equação (4.12), onde  $M_{ss}$  e  $t_s$  são fixados em 0,1% e 15s, respectivamente, e resolvendo o sistema linear obtém-se os parâmetros apresentados na tabela 4.20:

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	0,7316	1,7895	0,7022
$T_i$	3,7262	5,3946	3,5796
$T_d$	1,1356	0,9485	1,0681

Tabela 4.20 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Logo, aplicando-se os valores da tabela 4.20 às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.23, 4.24 e 4.25.

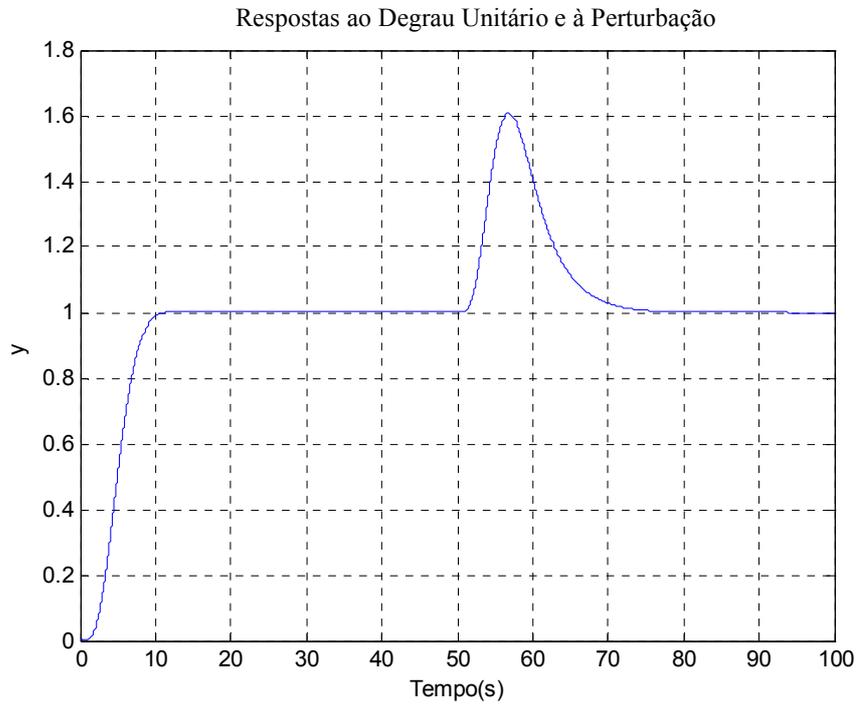


Figura 4.23 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método Minimização de Áreas.  
 Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

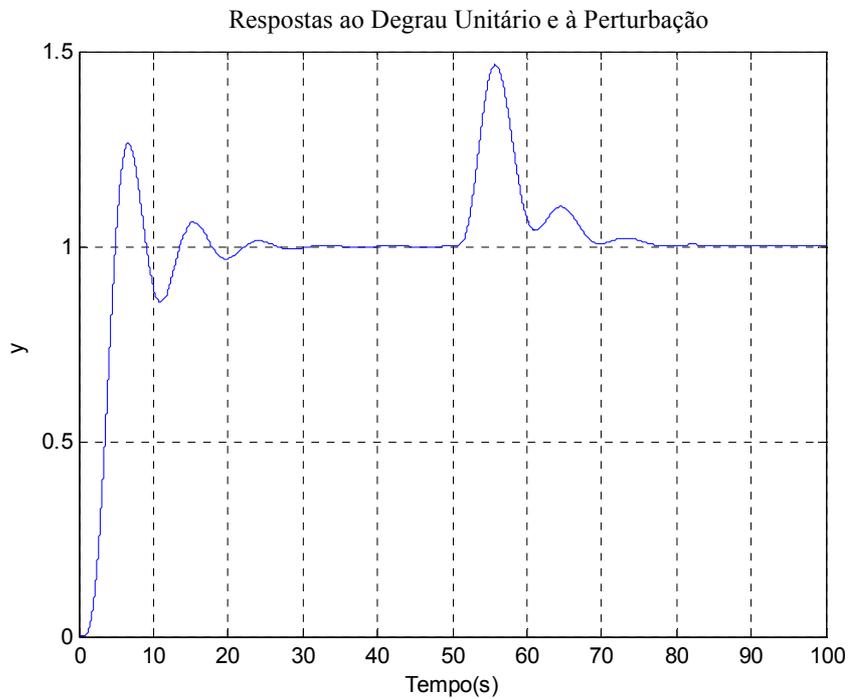


Figura 4.24 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente.  
 Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

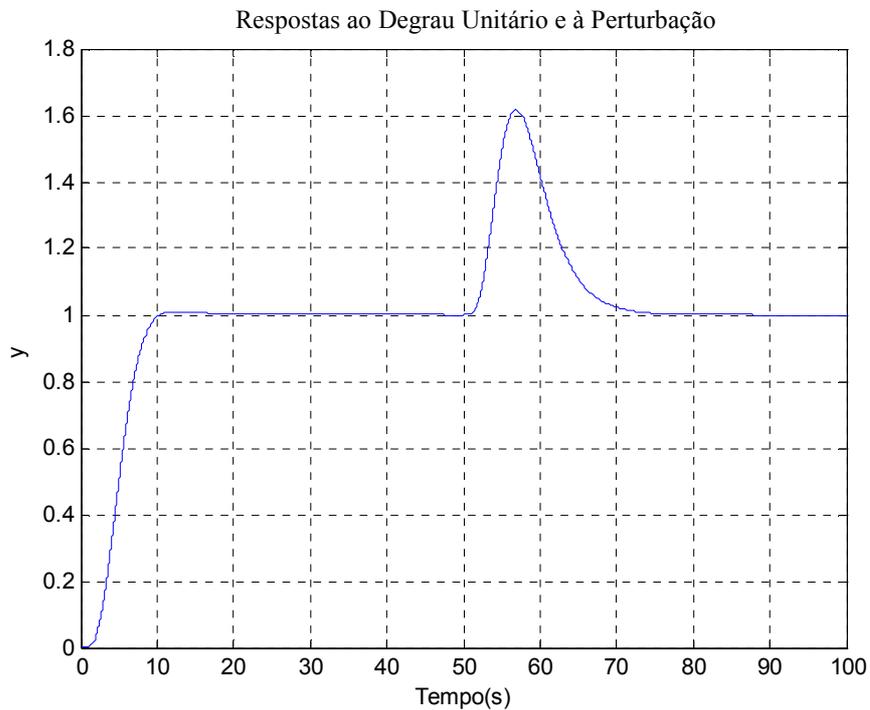


Figura 4.25 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.21.

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	9,62s	21,1s	9,45s
$t_r$	7,86s	4,6s	7,9s
$u_{máx}$	1,079	2,11	1,076
$m_s$	0,38%	26,5%	1%
$t_{sp}$	21,3s	24,2s	20,6s

Tabela 4.21 – Indicadores de desempenho.

Após análise dos indicadores apresentados na tabela 4.21, verifica-se que os resultados obtidos com o método de Minimização de Áreas e com o método das Áreas foram semelhantes, enquanto o resultado obtido com o método da Máxima Tangente para identificação da planta apresentou resultados piores. Para comparações posteriores são utilizados os indicadores obtidos com a utilização do método das Áreas devido os menores valores para  $t_s$  e para  $t_{sp}$ .

**Exemplo 4.9:** Este exemplo utiliza a planta apresentada na equação (4.4). Após utilizar os métodos para identificação da planta, obtém-se os dados da tabela 4.8:

Aplicando os valores da tabela 4.8 na equação (4.12), onde  $M_{ss}$  e  $t_s$  são fixados em 0,1% e 1,5s, respectivamente, e resolvendo o sistema linear obtém-se a tabela 4.22:

Parâmetro	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$K_p$	4,1223	5,6010	3,9345
$T_i$	0,6948	0,6897	0,6965
$T_d$	0,1178	0,0630	0,1258

Tabela 4.22 – Parâmetros de ajuste do controlador PID.

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se as curvas de resposta mostradas nas figuras 4.26, 4.27 e 4.28.

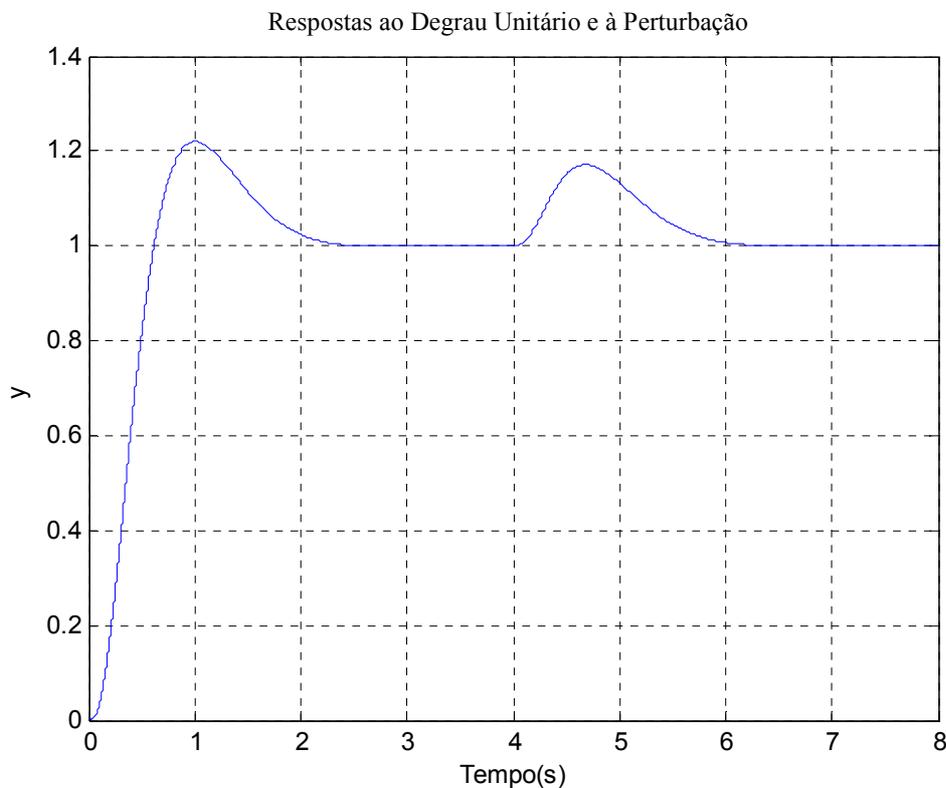


Figura 4.26 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Minimização de Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

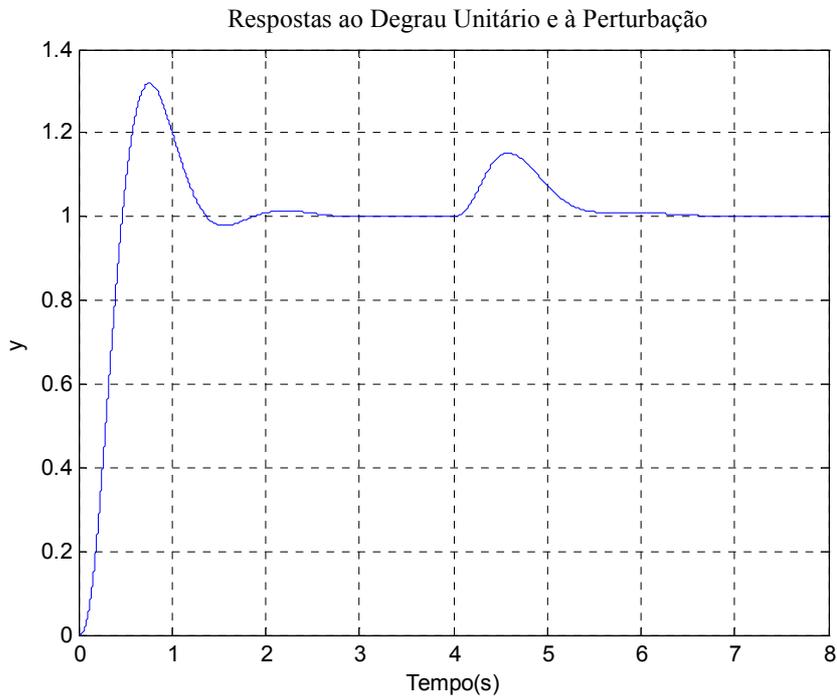


Figura 4.27 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método da Máxima Tangente. Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

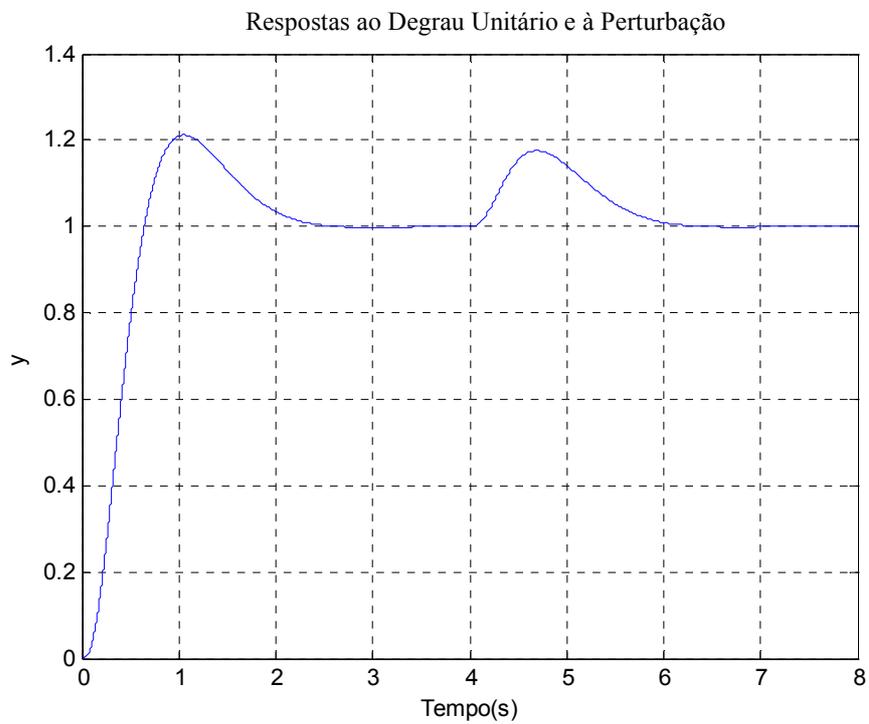


Figura 4.28 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método das Áreas. Perturbação aplicada em  $t = 4s$  – Sintonia feita pelo método Polinomial.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.21.

Indicador	Método de Min. Áreas	Método da Máxima Tangente	Método das Áreas
$t_s$	2,055s	1,31s	2,15s
$t_r$	0,55s	0,428s	0,57s
$u_{máx}$	4,3	5,875	4,1
$m_s$	22%	32%	21,2%
$t_{sp}$	1,76s	1,34s	1,8s

Tabela 4.23 – Indicadores de desempenho.

Com os resultados apresentados na tabela 4.23, verifica-se que o método da Máxima Tangente obteve melhor resultado para os tempos de acomodação, de subida e de acomodação após a perturbação e que o método das Áreas obteve melhores resultados para o máximo sinal de controle e máximo sobre-sinal. Neste caso, são escolhidos para comparações posteriores os resultados obtidos com o método das Áreas, devido ao máximo sobre-sinal ser consideravelmente menor que os outros dois valores obtidos, porém na prática esta escolha depende da necessidade da aplicação onde o controlador será implementado.

## 4.5 Método de Basilio e Matos [4]

Neste método a planta é modelada por uma função de transferência de segunda ordem sem zeros finitos, como apresentada a seguir:

$$G_m(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)^2}. \quad (4.13)$$

Para realizar a identificação da planta, neste trabalho é utilizado o método descrito na subseção 3.3.4. Para ajuste dos parâmetros do controlador PID, o método é baseado no cancelamento de pólos utilizando o posicionamento de zeros do sistema controlado em malha aberta. Para isto, a equação do controlador, dada em (4.6), pode ser reescrita como:

$$K(s) = \bar{K}_p \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s}, \quad (4.14)$$

onde  $-z_1$  e  $-z_2$  (assumindo,  $|z_2| > |z_1|$ ) são os zeros do controlador e

$$\bar{K}_p = K_p T_d, \quad z_1 + z_2 = \frac{1}{T_d} \quad \text{e} \quad z_1 z_2 = \frac{1}{T_i T_d}. \quad (4.15)$$

Isto mostra os valores dos parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  dependem da escolha de  $\bar{K}_p$ ,  $z_1$  e  $z_2$ . Esta escolha pode ser feita com o auxílio do diagrama de lugar das raízes. Deve-se notar que desde que a função de transferência em malha aberta

$$Q(s) = G_m(s) \cdot K(s) = \frac{K \bar{K}_p (s + z_1)(s + z_2)}{(\tau s + 1)^2 s}$$

tenha um pólo no origem e um pólo duplo em  $-1/\tau$ , então uma escolha imediata para  $z_1$  é  $1/\tau$ . Esta escolha faz com que o sistema em malha fechada tenha um comportamento como de um sistema de segunda ordem e, portanto, a escolha dos pólos do sistema em malha fechada se torna mais fácil. Além disto, posicionando o zero  $-z_2$  a esquerda de  $-z_1$ , o diagrama de lugar das raízes é desviado em direção a  $-z_2$  e, portanto, se afastando do eixo imaginário.

O próximo passo é a escolha do posicionamento de  $-z_2$ . Baseado em diversas simulações, foi concluído que a melhor escolha é  $z_2 = 1,5/\tau$ , e portanto, a função de transferência em malha aberta é dada por

$$Q(s) = \frac{\bar{K} \bar{K}_p (s + z_2)}{(s + 1/\tau)s}$$

onde  $\bar{K} = K/\tau^2$ . Pode ser visto pelo diagrama de lugar das raízes que a escolha de  $\bar{K}_p$  pode fazer com que o sistema em malha fechada tenha resposta ao degrau amortecida ou sub-amortecida. Não é difícil de verificar que o polinômio característico do sistema em malha fechada é dado por

$$p_c(s) = s(s + 1/\tau) + \bar{K} \bar{K}_p (s + z_2)$$

e logo,  $p_c(s) = 0$  terá raízes reais duplas quando

$$\bar{K}_p = \frac{1}{\bar{K}} \left[ 2 \left( z_2 \pm \sqrt{z_2^2 - \frac{z_2}{\tau}} \right) - \frac{1}{\tau} \right]. \quad (4.16)$$

Pode ser notado que o menor(maior) valor de  $\bar{K}_p$  corresponde ao ganho do ponto  $P_1(P_2)$  do diagrama de lugar das raízes. O menor valor é adotado, pois este resulta num menor sinal de controle.

#### 4.5.1 Obtenção de $K_p$ , $T_i$ e $T_d$

Finalmente, após determinados  $z_1 = 1/\tau$ ,  $z_2 = 1,5/\tau$ , e  $\bar{K} = K/\tau^2$ , e substituindo-os nas equações (4.15) e (4.16), os parâmetros  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  do controlador PID podem ser expressados em termos dos parâmetros da planta identificada,  $K$  e  $\tau$ , como

$$K_p = \frac{0,6699}{K}, \quad T_i = \frac{5\tau}{3} \quad \text{e} \quad T_d = \frac{2\tau}{5}. \quad (4.17)$$

Em [4], é ainda comentado que após determinar os parâmetros do controlador PID, de acordo com a equação (4.17), deve-se ainda com o controlador aplicado ao sistema real, aumentar ou diminuir o valor de  $K_p$  de modo a modificar a resposta transitória do sistema compensado caso o desempenho desejado não seja obtido com o valor de  $K_p$  da equação (4.17).

A seguir são feitos três exemplos utilizando este método para projetar os controladores PID para as plantas dadas nas equações (4.2), (4.3) e (4.4). Para as simulações feitas nos exemplos, são adotados  $b = 1$  e  $N = 30$ .

**Exemplo 4.10:** Este exemplo projeta um controlador PID para a planta apresentada na equação (4.2). Para identificação da planta é utilizado o método descrito na subseção 3.3.4. Assim, após seguidos os passos descritos na subseção citada, obtém-se:  $K = 1$  e  $\tau = 4$ . Aplicando esses à equação (4.17), obtém-se:  $K_p = 0,6699$ ,  $T_i = 6,6667$  e  $T_d = 1,600$ .

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se a curva de resposta mostrada na figura 4.29.

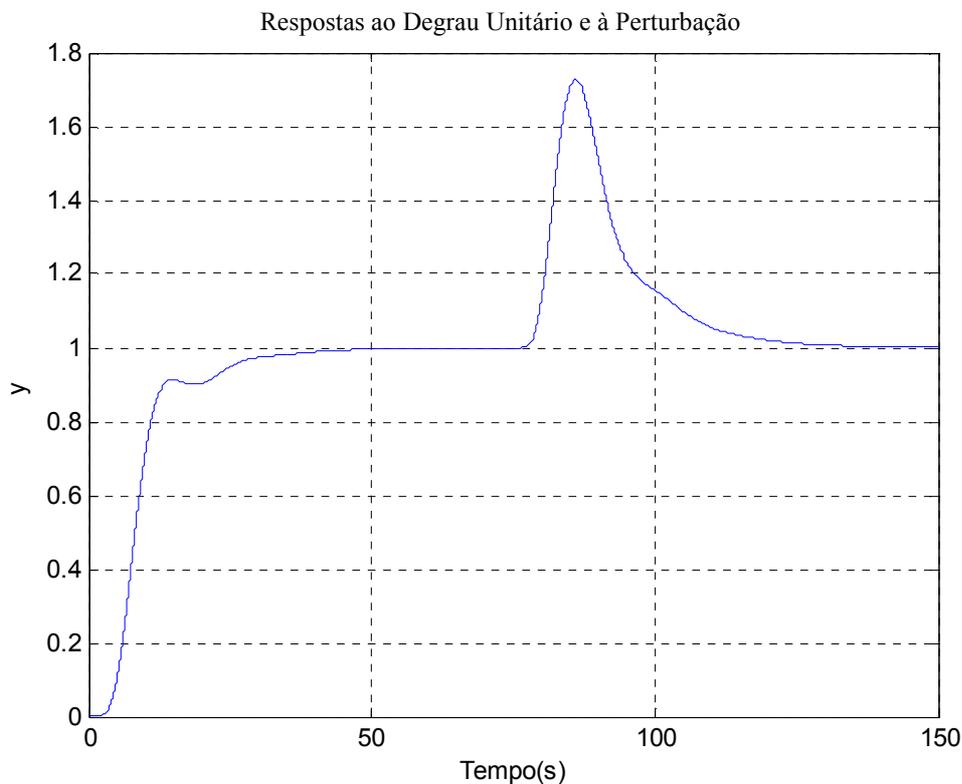


Figura 4.29 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Basilio e Matos.  
 Perturbação aplicada em  $t = 75s$  – Sintonia do controlador feita pelo método de Basilio e Matos.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.24.

Indicador	Método de Basilio e Matos
$t_s$	33,8s
$t_r$	13,25s
$u_{m\acute{a}x}$	1
$m_s$	0%
$t_{sp}$	45s

Tabela 4.24 – Indicadores de desempenho.

**Exemplo 4.11:** Este exemplo projeta um controlador PID para a planta apresentada na equação (4.3). Para identificação da planta é utilizado o método descrito na subseção 3.3.4. Assim, após seguidos os passos descritos na subseção citada, obtém-se:  $K = 1$  e  $\tau = 2,5790$ . Aplicando esses à equação (4.17), obtém-se:  $K_p = 0,6699$ ,  $T_i = 4,2983$  e  $T_d = 1,0316$ .

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se a curva de resposta mostrada na figura 4.30.

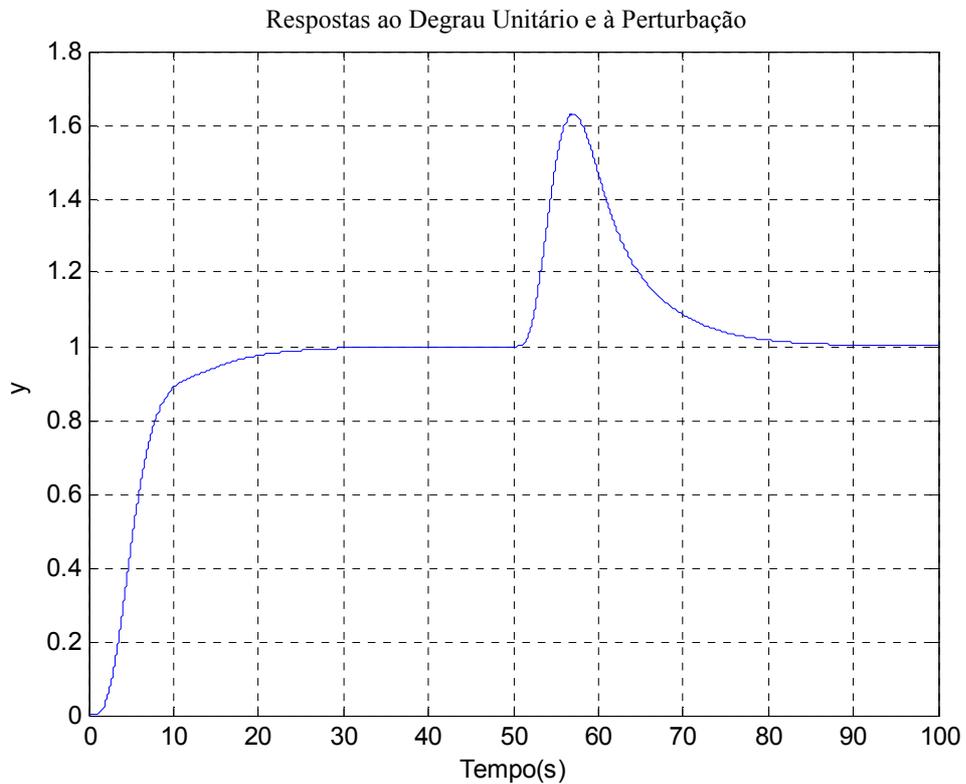


Figura 4.30 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Basilio e Matos.  
 Perturbação aplicada em  $t = 50s$  – Sintonia do controlador feita pelo método de Basilio e Matos.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.25.

Indicador	Método de Basilio e Matos
$t_s$	21,26s
$t_r$	10,75s
$u_{m\acute{a}x}$	1
$m_s$	0%
$t_{sp}$	29s

Tabela 4.25 – Indicadores de desempenho.

**Exemplo 4.12:** Este exemplo projeta um controlador PID para a planta apresentada na equação (4.4). Para identificação da planta é utilizado o método descrito na subseção 3.3.4. Assim, após seguidos os passos descritos na subseção citada, obtém-se:  $K = 1$  e  $\tau = 0,6193$ . Aplicando esses à equação (4.17), obtém-se:  $K_p = 0,6699$ ,  $T_i = 1,0321$  e  $T_d = 0,2477$ .

Logo, aplicando esses valores às equações (2.21) e (2.22) e fazendo  $R(s)$  igual a um sinal do tipo degrau unitário e  $P(s)$  também igual a um degrau unitário, obtém-se a curva de resposta mostrada na figura 4.29.

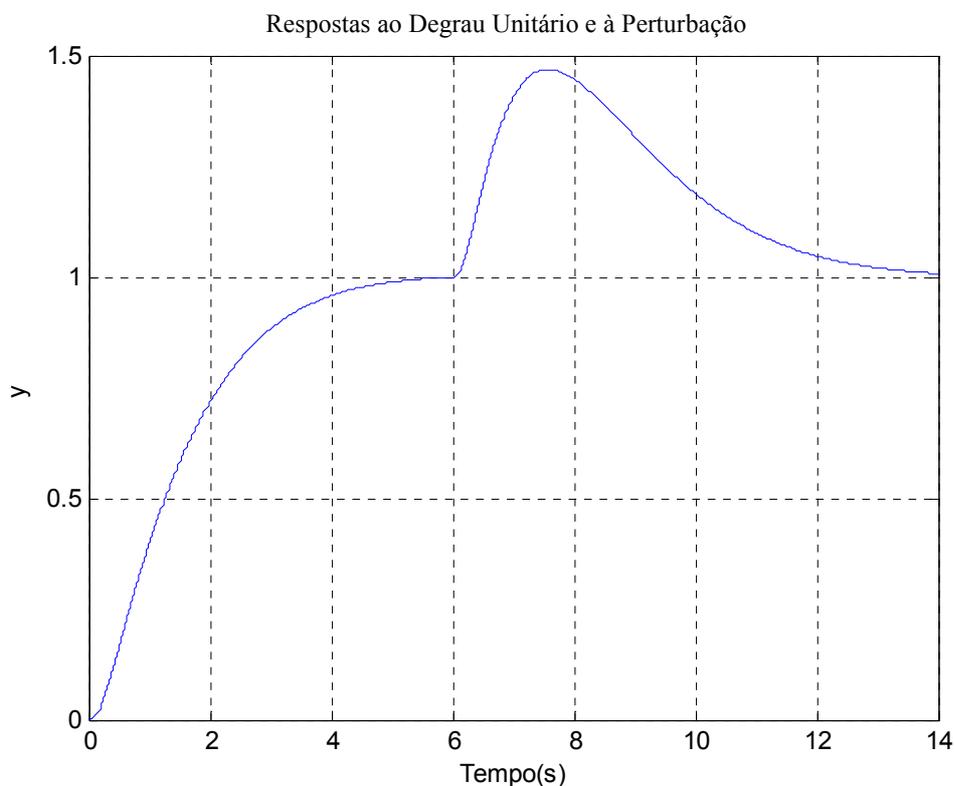


Figura 4.31 – Curva de resposta utilizando a identificação da planta feita pelo método de Basilio e Matos.

Perturbação aplicada em  $t = 6s$  – Sintonia do controlador feita pelo método de Basilio e Matos.

Os indicadores resultantes destas simulações estão apresentados na tabela 4.26.

Indicador	Método de Basílio e Matos
$t_s$	4,623s
$t_r$	3,184s
$u_{m\acute{a}x}$	1
$m_s$	0%
$t_{sp}$	7,02s

Tabela 4.26 – Indicadores de desempenho.

## ***4.6 Comparação entre os métodos de sintonia de controladores PID***

Nesta seção são comparados os indicadores de desempenho obtidos pelos diferentes métodos de sintonia para as três plantas utilizadas nos exemplos deste capítulo. Para tanto, nos métodos de sintonia que tiveram os modelos da planta obtidos por mais de um método de identificação, é escolhido o controlador que apresenta os melhores indicadores de desempenho do sistema em malha fechada aplicados à planta real. Para efeito de comparação, o tempo de subida ( $t_r$ ) não será considerado, pois este é em geral menor para processos com elevado sobre-sinal máximo e elevado sinal de controle.

Primeiramente, são comparados os resultados obtidos para os controladores PID sintonizados para a planta dada na equação (4.2). Para esta planta, estão apresentados na tabela 4.27, os indicadores de desempenho obtidos com os diferentes métodos de ajuste de controladores PID. Para o método de Ziegler-Nichols foi escolhido o controlador associado à planta identificada pelo método de Minimização de Áreas. Para o método de Cohen-Coon foi escolhido o controlador associado à planta identificada pelo método das Áreas. Para o método Polinomial foi escolhido o controlador associado à planta identificada pelo método de Minimização de Áreas.

Analisando-se os valores apresentados na tabela 4.27 é possível afirmar que o método Polinomial obteve o melhor desempenho quando comparado aos outros métodos, pois dos cinco

indicadores este obteve valores melhores em três ( $t_s$ ,  $t_r$  e  $t_{sp}$ ) e nos outros dois ( $u_{máx}$  e  $m_s$ ) obteve valores semelhantes aos demais.

$G(s) = \frac{1}{(s+1)^8}$				
Indicador	Método de Zigler-Nichols	Método de Cohen-Coon	Método Polinomial	Método de Basílio e Matos
$t_s$	71s	50,6s	14,5s	33,8s
$t_r$	38,25s	27,1s	12,1s	13,25s
$u_{máx}$	1	1	1,058	1
$m_s$	0%	0%	0,24%	0%
$t_{sp}$	81,8s	60,5s	33,5s	45s

Tabela 4.27 – Indicadores de desempenho para a planta da equação (4.2).

É importante ressaltar que o valor obtido para  $t_s$  utilizando o método Polinomial é menor que a metade do valor obtido pelo método de Basílio e Matos, que foi o segundo menor valor para este indicador.

Para a planta dada na equação (4.3) foram obtidos os indicadores de desempenho apresentados na tabela 4.28. Para os métodos de Ziegler-Nichols, Cohen-Coon e Polinomial, foram escolhidos os controladores associados às plantas identificadas pelo método das Áreas.

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(1,15s+1)(1,1s+1)(0,95s+1)(0,9s+1)(0,05s+1)(0,01s+1)}$				
Indicador	Método de Zigler-Nichols	Método de Cohen-Coon	Método Polinomial	Método de Basílio e Matos
$t_s$	18,7s	18,72s	9,45s	21,26s
$t_r$	7s	6,98s	7,9s	10,75s
$u_{máx}$	1,28	1,2	1,076	1
$m_s$	0%	0%	1%	0%
$t_{sp}$	27s	27s	20,6s	29s

Tabela 4.28 – Indicadores de desempenho.

Ao analisar os resultados da tabela 4.28 verifica-se que o método Polinomial obteve resultados melhores quando comparado com os demais métodos de sintonia de controladores PID. Este método obteve para  $t_s$ , um valor que corresponde aproximadamente a metade do valor obtido no segundo menor valor para o mesmo indicador que é alcançado pelo método de Ziegler-Nichols. Para os valores de  $u_{m\acute{a}x}$  e  $m_s$ , os valores obtidos no método Polinomial ficaram muito próximos aos menores valores obtidos nos demais métodos.

Para a planta dada na equação (4.4) foram obtidos os indicadores de desempenho apresentados na tabela 4.29.

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)(0,05s+1)(0,01s+1)}$				
Indicador	Método de Ziegler-Nichols	Método de Cohen-Coon	Método Polinomial	Método de Basílio e Matos
$t_s$	1,999s	2,27s	2,15s	4,623s
$t_r$	0,549s	0,671s	0,57s	3,184s
$u_{m\acute{a}x}$	4,237	2,95	4,1	1
$m_s$	27%	22,68%	21,2%	0%
$t_{sp}$	1,587s	1,9s	1,8s	7,02s

Tabela 4.29 – Indicadores de desempenho.

Analisando-se os valores da tabela 4.29 verifica-se que nos três primeiros métodos os indicadores estão muito próximos, enquanto o controlador projetado pelo método de Basilio e Matos obteve os melhores resultados para  $u_{m\acute{a}x}$  e  $m_s$ . Contudo, os resultados para  $t_s$  e  $t_{sp}$  do método de Basílio e Matos foram 2,0366 e 3,6947 vezes maiores, respectivamente, que os obtidos nos outros métodos que apresentaram os piores resultados. Outro fato importante é que os três primeiros métodos tiveram melhores resultados para  $t_s$  e  $t_{sp}$ , porém todos estes resultaram em máximos sobre-sinais superiores a 20%.

Para reduzir o máximo sobre-sinal, é possível utilizar o parâmetro livre  $b$ , apresentado na subseção 2.3.2, associado a uma ponderação no sinal de referência para o termo proporcional do controlador PID. Assim, o controlador obtido pelo método Polinomial foi recalculado visando obter  $m_s$  e  $t_s$  iguais a 0,1% e 1s, respectivamente, e o valor de  $b$  após um processo de tentativa e erro foi escolhido igual a 0,2. Para comparação o mesmo valor de  $b$  é utilizado para calcular os

novos indicadores de desempenho nos métodos de Ziegler-Nichols e Cohen-Coon. Para o método de Basilio e Matos não foi utilizado  $b = 0,2$ , devido ao fato de produzir resultados que piorariam os indicadores já obtidos com  $b = 1$ . Na tabela 4.30 são apresentados os indicadores resultantes das simulações.

Analisando-se os resultados apresentados na tabela 4.30, verifica-se que o método Polinomial apresentou o melhor resultado com relação aos indicadores  $t_s$ ,  $t_{sp}$  e, além disso, obteve um máximo sobre-sinal muito menor que o obtido quando utilizado  $b = 1$ . Contudo, é importante ressaltar que o máximo sinal de controle foi maior que o de todos os demais métodos.

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(0,2s+1)(0,05s+1)(0,01s+1)}$				
Indicador	Método de Ziegler-Nichols	Método de Cohen-Coon	Método Polinomial	Método de Basílio e Matos
$t_s$	2,065s	2,31s	1s	4,623s
$t_r$	0,935s	1,12s	0,84s	3,184s
$u_{m\acute{a}x}$	2,146	1,82	2,56	1
$m_s$	7,3%	5,65%	1,55%	0%
$t_{sp}$	1,4s	1,69s	1,17s	7,02s

Tabela 4.30 – Indicadores de desempenho.

## 4.7 Conclusões

Neste capítulo, foram apresentados quatro métodos de ajuste de controladores PID. Verificou-se que os métodos de identificação da planta influenciam consideravelmente na sintonia do controlador PID, como pode ser visto principalmente com os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols e de Cohen-Coon. Tradicionalmente, estes dois métodos apresentam resultados com elevado máximo sobre-sinal, contudo utilizando os métodos de identificação que se baseiam em áreas do gráfico de resposta ao degrau, este máximo sobre-sinal foi reduzido em muitos casos a 0%. Além disso, pode-se concluir que o método Polinomial apresentou bons indicadores de desempenho para todas as plantas estudadas, superando os demais métodos na maioria dos indicadores de desempenho.

## Capítulo 5 Conclusão

Neste trabalho foram considerados métodos de identificação de plantas que apresentam resposta ao degrau monotonicamente crescentes e métodos de sintonia para controladores PID, muito utilizados na indústria devido à pequena quantidade de parâmetros a serem ajustados. Para este estudo, primeiramente foi apresentada uma teoria sobre controladores PID. Em seguida, foi proposta uma medida, denotada por  $\delta$ , para avaliar a proximidade entre curvas de resposta ao degrau, sendo está utilizada para medir a proximidade entre as curvas de resposta ao degrau da planta e de sua identificação, respectivamente. Foram ainda, apresentados métodos para identificação da planta utilizando como modelo funções de transferência de primeira ordem com atraso e de segunda ordem com pólos reais e iguais sem atraso. Após apresentado cada um dos métodos, foram feitos três exemplos, que foram úteis para concluir que os métodos que utilizam como modelo uma função de transferência de primeira ordem com atraso e se baseiam em áreas do gráfico de resposta ao degrau da planta, produzem os menores valores de  $\delta$  para as plantas consideradas. Foram também apresentados quatro métodos para sintonia de controladores PID.

Após a apresentação dos métodos de sintonia de controladores, foi constatado nos exemplos, que os métodos de identificação da planta influenciam consideravelmente na resposta do sistema em malha fechada e, conseqüentemente, nos indicadores de desempenho. Esta influência se verifica principalmente para os métodos de sintonia de Ziegler-Nichols e Cohen-Coon, que, geralmente, apresentam alto máximo sobre-sinal. Para estes métodos, foram obtidas, em algumas plantas, respostas ao degrau sem sobre-sinal, quando estas foram identificadas utilizando métodos baseados em áreas da curva de resposta ao degrau.

Finalmente, dentre os controladores PID projetados com os diferentes modelos de identificação da planta, foram escolhidos os controladores que obtiveram os melhores indicadores de desempenho para cada planta. Assim, cada método de sintonia teve um controlador escolhido para cada tipo de planta, e desta forma, pode ser feita uma análise comparativa entre os indicadores obtidos por esses métodos. Com esta análise foi visto que o método Polinomial apresentou bons resultados para a maior parte dos indicadores, sendo estes, em alguns casos, superiores aos dos demais métodos.

# Referências Bibliográficas

- [1] G. Franklin e J. D. Powell, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Ed. Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1993.
- [2] K. J. Aström e T. Hägglund, *Automatic Tuning of PID Controllers*, Ed. Research Triangle Park, 1988.
- [3] G. C. Goodwin, E. Graebe e M. E. Salgado, *Control System Design*, Ed. Prentice Hall, 2000.
- [4] J. C. Basilio e S. R. Matos, *Design of PI and PID Controllers With Transient Performance Specification*, IEEE Transactions on Education Vol. 45 No. 4, Novembro de 2002.
- [5] K. OGATA, *Engenharia de Controle Moderno*, Ed. Pearson Brasil, 2003.