



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**

*Escola Politécnica*

*Curso de Engenharia Civil*

*Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas*

PONTE EM LAJE ESCONSA  
ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO

MICHEL TOUMA DAHER

Projeto Final de Curso apresentado ao corpo docente do Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovado por:

---

Cláudia Ribeiro Eboli  
Prof.<sup>a</sup> Associada, D.Sc., EP/UFRJ  
(Orientadora)

---

Sergio Hampshire C. Santos  
Prof. Associado, D.Sc., EP/UFRJ

---

Fernando Celso Uchôa Cavalcanti  
Prof. Adjunto, M.Sc., EP/UFRJ

JUNHO / 2010

## **Agradecimentos**

Agradeço a todos que contribuíram para a realização deste trabalho e para a conclusão da graduação em engenharia civil, em especial a (aos):

- Deus, pelas oportunidades que recebi;
- Minha família, por estar sempre presente;
- Meus amigos, por apoiarem minhas decisões;
- Prof.<sup>a</sup> Cláudia Ribeiro Eboli, minha orientadora, pela colaboração e confiança;
- Demais professores e funcionários da engenharia civil da UFRJ, principalmente os do Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas, que participaram desta fase da minha vida e foram também responsáveis por diversas conquistas.

Resumo da Dissertação apresentada ao DME/POLI/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Título

PONTE EM LAJE ESCONSA  
ANÁLISE E DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO

Junho/2010

Orientadora: Professora Claudia Éboli

Curso: Engenharia Civil

- Objetivo: Análise e dimensionamento à flexão de uma ponte em laje esconsa;
- Análise elástica utilizando modelo em elementos de casca pelo programa SAP 2000, versão 12;
- Dimensionamento à flexão utilizando o método de Leonhardt, para armaduras ortogonais, e o método de Wood & Armer, para armaduras não ortogonais.

# Sumário

1.	INTRODUÇÃO .....	6
1.1.	Objetivo e Motivação .....	6
1.2.	Escopo do trabalho.....	6
2.	PONTE EM LAJE ESCONSA .....	8
2.1.	Introdução .....	8
2.2.	Desenhos esquemáticos.....	8
2.3.	Materiais .....	10
3.	MODELO E CARREGAMENTOS .....	11
3.1.	Introdução .....	11
3.2.	Modelo Estrutural .....	11
3.3.	Regiões de interesse de dimensionamento .....	12
3.4.	Carregamentos Atuantes .....	13
3.4.1.	Cargas Permanentes.....	13
3.4.2.	Carga Móvel .....	14
4.	RESULTADOS DA ANÁLISE .....	21
4.1.	Introdução .....	21
4.2.	Efeito da esconsidade .....	22
4.3.	Peso- Próprio .....	23
4.4.	Pavimentação e Recapeamento.....	24
4.5.	Guarda Rodas .....	26
4.6.	Carga Móvel .....	27
4.6.1.	Envoltória da carga móvel.....	28
4.6.2.	Combinações dos esforços.....	31
5.	DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO .....	34
5.1.	Introdução .....	34
5.2.	Método de Leonhardt .....	34
5.2.1.	Introdução .....	34
5.2.2.	Chapa com Armaduras Ortogonais .....	34
5.2.3.	Laje com armaduras ortogonais.....	38
5.2.4.	Determinação do Ângulo $\phi$ de Inclinação das Fissuras.....	39

5.2.5.	Dimensionamento de lajes com armadura oblíqua em relação aos momentos principais .....	41
5.2.6.	Dimensionamento da laje do projeto utilizando Leonhardt .....	42
5.3.	Método de Wood & Armer .....	46
5.3.1.	Introdução .....	46
5.3.2.	Critério de escoamento .....	46
5.3.3.	O Método .....	50
5.3.4.	Resumo.....	54
5.3.5.	Dimensionamento da laje do projeto utilizando Wood & Armer .....	55
5.4.	Resumo das armaduras .....	64
6.	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	65
6.1.	Conclusão e comparação entre os métodos.....	65
6.2.	Sugestão para futuros trabalhos .....	66
7.	Bibliografia .....	67

# **1. INTRODUÇÃO**

## **1.1. Objetivo e Motivação**

A utilização de programas computacionais na realização de projetos estruturais é cada vez mais comum. Esse trabalho surgiu devido à necessidade de se estudar métodos para resolver o problema específico de armaduras dispostas fora das direções principais, como é o caso da laje esconsa.

No decorrer do projeto serão definidas as características da laje e seus carregamentos, entre eles a carga móvel, sendo estas fundamentais para a modelagem computacional no programa SAP 2000. A partir de esforços de flexão concomitantes, será feito o dimensionamento do tabuleiro utilizando dois métodos.

O objetivo deste trabalho é dimensionar a ponte utilizando dois métodos distintos e fazer uma comparação dos resultados.

## **1.2. Escopo do trabalho**

No primeiro capítulo são apresentados os motivos da elaboração do presente trabalho, bem como introduzir os principais itens que serão discutidos no desenvolvimento do projeto.

No segundo capítulo serão fornecidos os dados da estrutura, onde poderão ser verificadas as características geométricas, ângulo de esconsidade, materiais utilizados e as regiões de interesse para o dimensionamento.

No terceiro capítulo será apresentado o modelo de análise em elementos finitos, juntamente com os carregamentos atuantes.

No quarto capítulo serão fornecidos os diagramas de momento fletor devido aos carregamentos atuantes e suas respectivas combinações.

No quinto capítulo serão apresentados e aplicados os métodos de dimensionamento de armaduras não coincidentes com os eixos principais de flexão. O primeiro método, de Leonhardt, gera armaduras esconsas em relação às direções principais, porém ortogonais entre si. O segundo método, de Wood & Armer, permite dimensionar armaduras em malha ortogonal ou não ortogonal entre si. Ao final de cada método, será feito o dimensionamento das armaduras para fins comparativos.

O sexto e último capítulo, faz-se uma breve comparação entre os métodos de dimensionamento, além de indicar sugestões para trabalhos futuros utilizando o mesmo tema.

## 2. PONTE EM LAJE ESCONSA

### 2.1. Introdução

Para vencer um pequeno vão da travessia de um rio esconso em relação à rodovia, optou-se em executar a ponte em laje maciça. A vantagem desse modelo de ponte permite fazer um ajuste aproximado das armaduras segundo as direções principais.

O tabuleiro da ponte se apóia sobre os aparelhos de apoio de neoprenes que por sua vez se apóiam nos encontros. O presente trabalho só trata da análise e do dimensionamento da superestrutura à flexão.

### 2.2. Desenhos esquemáticos

Podem-se verificar nesse item os desenhos esquemáticos utilizados para fazer a modelagem e a análise da laje.

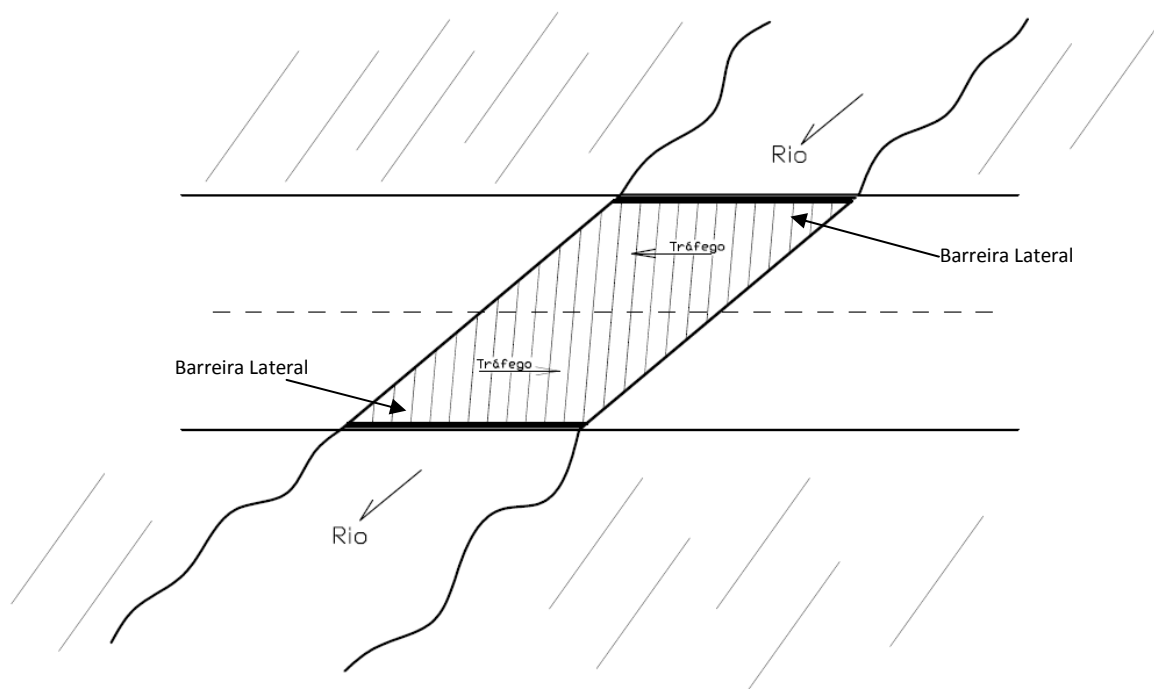


Figura 2.1 – Planta de Situação



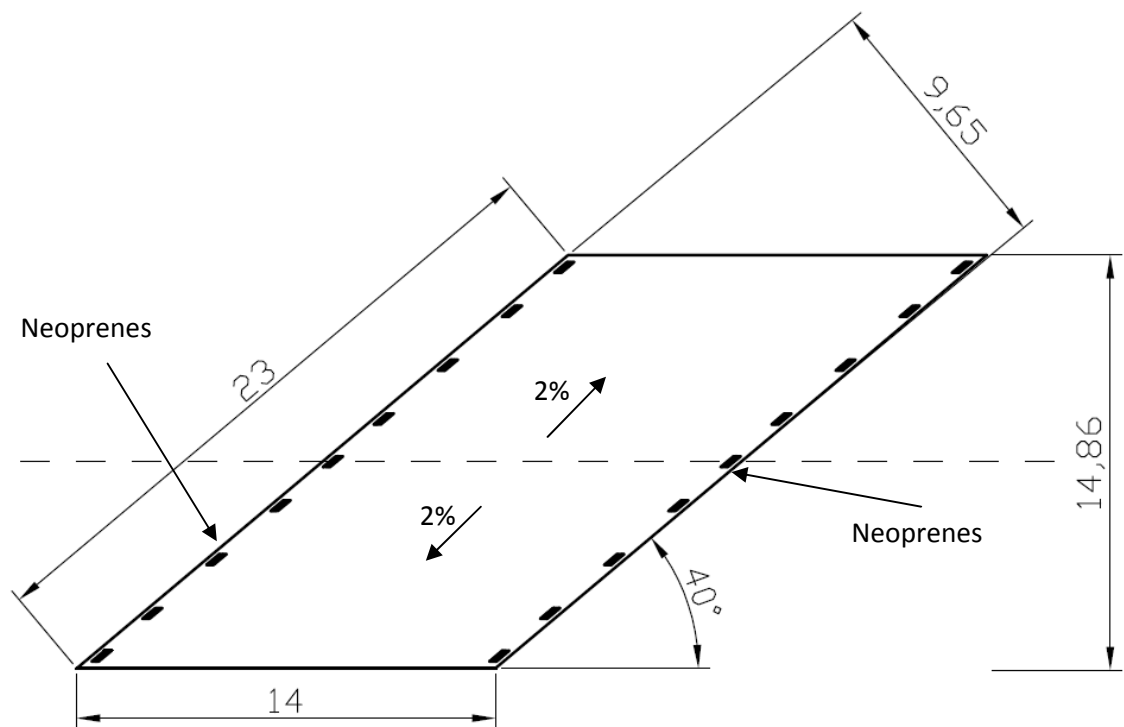


Figura 2.2 – Vista Inferior (m)

Observam-se na figura anterior as características determinantes no projeto de laje esconsa, segundo [8]:

- 1- Ângulo de esconsidade  $\beta$ : de modo geral as lajes esconsas apresentam ângulo de esconsidade entre  $20^\circ$  e  $70^\circ$ . O efeito da esconsidade pode ser desprezado para  $\beta$  maiores de  $70^\circ$ . A laje do presente projeto possui esconsidade bastante acentuada, com  $\beta=40^\circ$ ;
- 2- Relação  $b/l$ : onde  $b$  é a largura da laje perpendicular ao eixo da ponte e  $l$  é o vão medido perpendicularmente em relação aos apoios. A relação  $b/l=14,86/9,65=1,54$ .
- 3- Tipo de apoio: articulado (simplificação para os neoprenes).

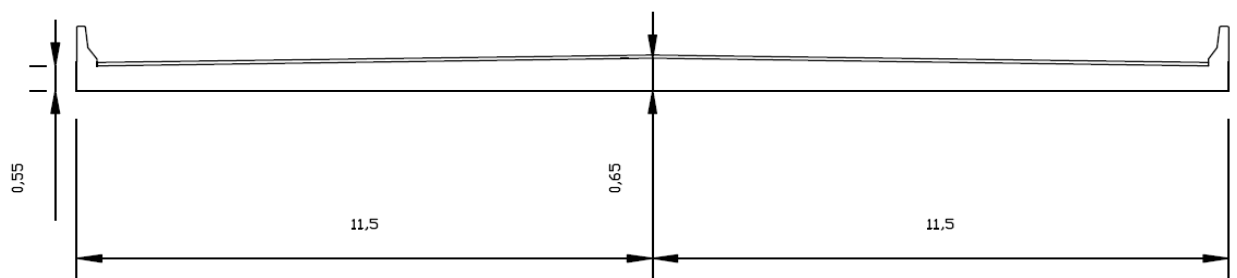


Figura 2.3 – Corte no centro da laje paralelo aos bordos apoiados (m)

### 2.3. Materiais

São apresentadas a seguir as características dos materiais utilizados:

Concreto:  $f_{ck}=35$  MPa ;

Aço: CA-50.

O peso específico utilizado para o concreto armado é  $\gamma = 25 \text{ kN} / \text{m}^3$ .

### 3. MODELO E CARREGAMENTOS

#### 3.1. Introdução

O modelo escolhido para realizar a análise elástica foi em elementos finitos.

Para o presente trabalho escolheu-se definir a laje como um elemento de casca, uma vez que esta apresenta rigidez aos esforços em todas as direções, comportamento este que pode ser encontrado na sobreposição das placas e membranas. Porém a análise foi realizada apenas para as cargas verticais.

#### 3.2. Modelo Estrutural

O modelo é apresentado a seguir. A laje foi dividida em uma malha contendo 1393 elementos de casca (0,5 x 0,5 m), com faces paralelas aos bordos da laje e 1470 nós. Observar que os apoios de 2º gênero representam os neoprenes.

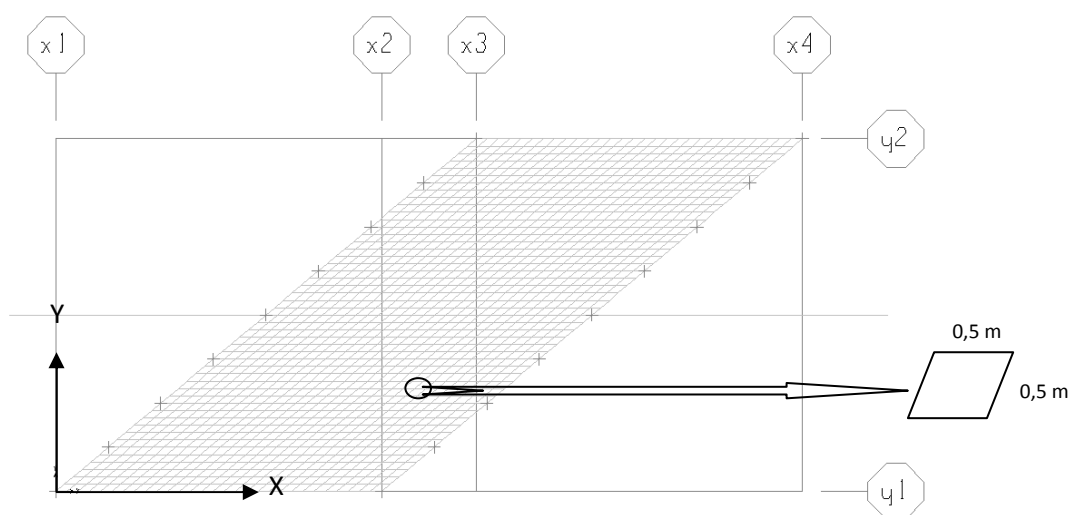


Figura 3.1 – Modelo em elementos finitos

Na figura 3.2 é apresentada a orientação dos eixos locais, que são paralelas aos eixos globais, sendo o eixo local 1 (representado em vermelho) coincidente com a direção do tráfego e com o eixo global X, já o eixo local 2 (representado em branco) tem a direção de Y, como se pode observar a seguir:

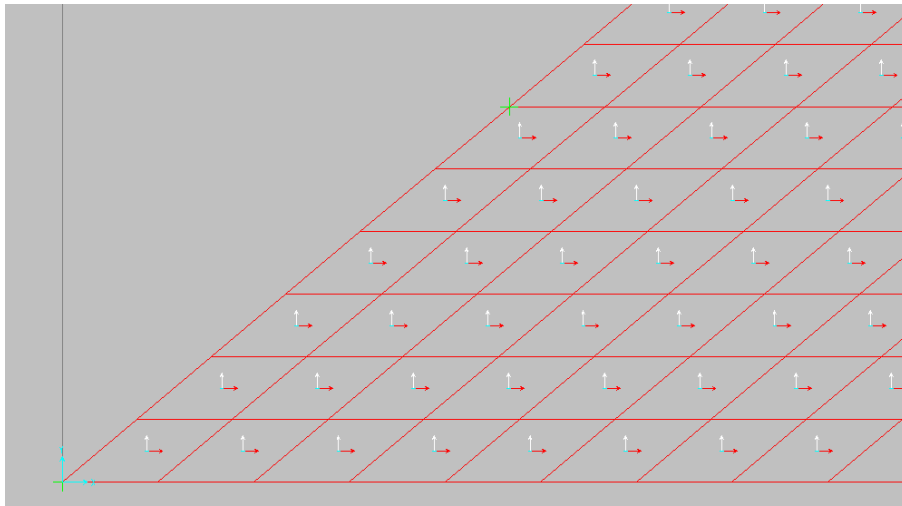


Figura 3.2 – Eixos Locais

### 3.3. Regiões de interesse de dimensionamento

Na prática o dimensionamento à flexão da laje se limita a poucos pontos, pois usualmente são os pontos onde os momentos apresentam seus valores máximos [8].

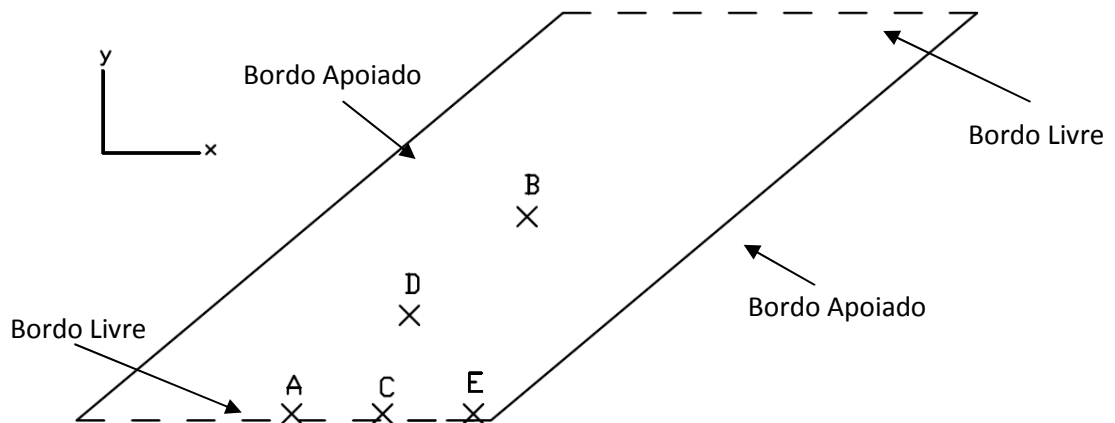


Figura 3.3 – Esquema da laje

De um modo geral temos:

- B é o ponto onde apresenta o maior momento fletor positivo no vão na região central;
- A é o ponto onde apresenta o maior momento fletor positivo no vão na região do bordo livre;
- E é o ponto onde apresenta o maior momento fletor negativo devido a influência do canto do ângulo obtuso;

- D e C são pontos auxiliares.

### **3.4. Carregamentos Atuantes**

Como o modelo adotado é isostático, o efeito da temperatura pode ser desconsiderado.

As ações podem ser divididas em permanente e móvel:

#### **3.4.1. Cargas Permanentes**

##### **3.4.1.1. Peso Próprio da Laje**

O programa SAP 2000 calcula automaticamente essa ação, multiplicando o valor do peso específico do concreto pela altura, gerando um carregamento por unidade de área, atuando em toda laje. Por simplificação foi adotado altura de 65 cm para toda a laje.

##### **3.4.1.2. Pavimentação**

Foi utilizado uma altura média de 7 cm e peso específico de  $\gamma = 20 \text{ kN} / \text{m}^3$ :

$$q_{pav} = 0,7 \cdot 20 = 1,4 \text{ kN} / \text{m}^2$$

##### **3.4.1.3. Recapeamento**

Considerado  $2 \text{ kN} / \text{m}^2$ , para o caso de colocação de novas camadas de pavimentação.

##### **3.4.1.4. Guarda-Rodas**

Localizados nos bordos livres da laje. O carregamento por metro linear é achado utilizando a área de uma seção típica da barreira e multiplicando pelo valor do peso específico do concreto:

$$q_{g-c} = 0,217 \cdot 25 = 5,425 \text{ kN} / \text{m}$$

### 3.4.2. Carga Móvel

#### 3.4.2.1. Trem-Tipo

É utilizado o trem-tipo Classe 45 [2].

O veículo de projeto pode ser observado na figura a seguir:

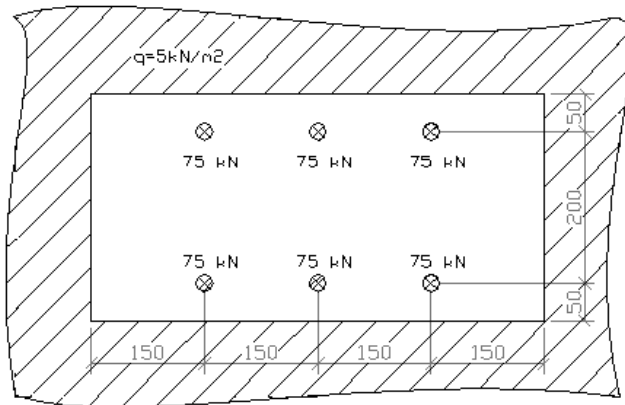


Figura 3.4 – Trem-tipo – TB-45

As cargas das rodas não foram espreiadas no plano médio da laje. Tal consideração provocaria pequenas alterações nos resultados dos esforços, entretanto não influenciaria na comparação dos métodos.

A seguir segue a representação do trem-tipo TB-45 utilizado no programa SAP 2000. Notar que a carga de multidão também foi considerada no interior do veículo, acarretando valores mais desfavoráveis.

**General Vehicle Data**

Vehicle name:  Units:

**Floating Axle Loads**

	Value	Width Type	Axle Width
For Lane Moments	<input type="text" value="0.0"/>	<input type="text" value="One Point"/>	<input type="text" value=""/>
For Other Responses	<input type="text" value="0.0"/>	<input type="text" value="One Point"/>	<input type="text" value=""/>

☐ Double the Lane Moment Load when Calculating Negative Span Moments

**Usage**

☒ Lane Negative Moments at Supports  
☒ Interior Vertical Support Forces  
☒ All other Responses

**Min Dist Allowed From Axle Load**

Lane Exterior Edge:   
Lane Interior Edge:

**Length Effects**

Axle:    
Uniform:

**Loads**

Load Length Type	Minimum Distance	Maximum Distance	Uniform Load	Uniform Width Type	Uniform Width	Axle Load	Axle Width Type	Axle Width
Leading Load	Infinite		5.0	Fixed Width	3.0	150.0	Two Points	2.0
Leading Load	Infinite		5.0	Fixed Width	3.0	150.0	Two Points	2.0
Fixed Length	1.5		5.0	Fixed Width	3.0	150.0	Two Points	2.0
Fixed Length	1.5		5.0	Fixed Width	3.0	150.0	Two Points	2.0

☐ Vehicle Applies To Straddle (Adjacent) Lanes Only  
☐ Vehicle Remains Fully In Lane (In Lane Longitudinal Direction)

Straddle Reduction Factor:

Figura 3.5 – Trem-tipo – TB-45 – modelo SAP 2000

O coeficiente de impacto será utilizado nas combinações e vale:

$$\phi = 1,4 - 0,007 \cdot l = 1,4 - 0,007 \cdot 14 = 1,302, \quad \text{onde } l \text{ é o vão da laje.}$$

### 3.4.2.2. Aplicação da Carga Móvel

No SAP 2000, versão 12, o comando “Lane” é utilizado para definir a pista para o veículo tipo. Foi considerada uma pista de eixo centrado, como pode ser observado abaixo:

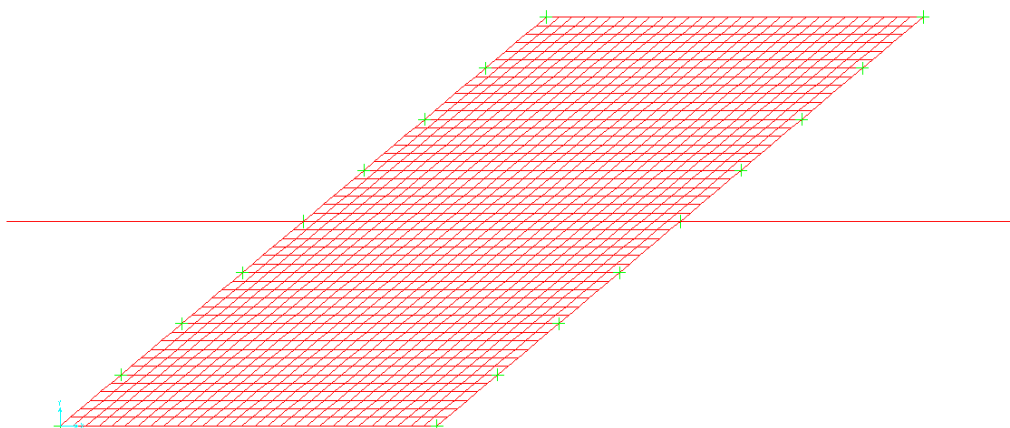


Figura 3.6 – Eixo da Lane

Depois de criada a “Lane”, criou-se um carregamento chamado de “Moving Load”. Este carregamento permite a atuação do veículo tipo sobre a laje.

Os esforços devido à carga móvel são gerados a partir do carregamento das diversas superfícies de influência pelo trem-tipo para todos os pontos, gerando assim envoltórias de máximos e mínimos (item 4.5.2).

#### 3.4.2.3. Superfícies de influência

Seguem, para exemplificação, as superfícies de influência para os pontos de interesse A, B e E, cuja forma retangular representa a “Lane”.

Os sinais das superfícies obedecem à convenção da figura 4.1.

##### - Ponto A – meio do bordo livre

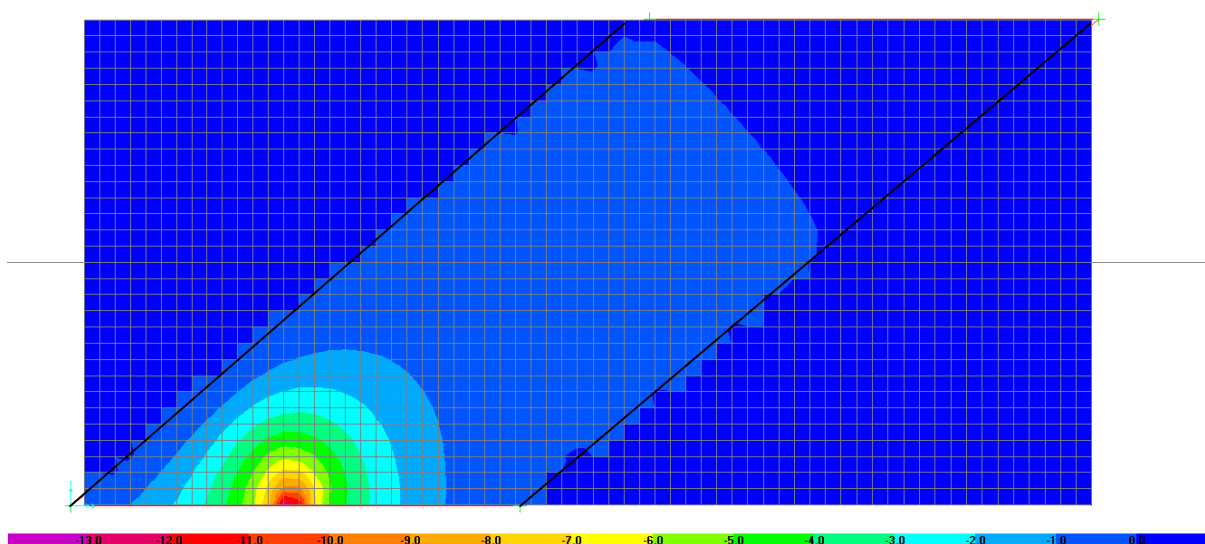


Figura 3.7 – SI - M11 – Ponto A



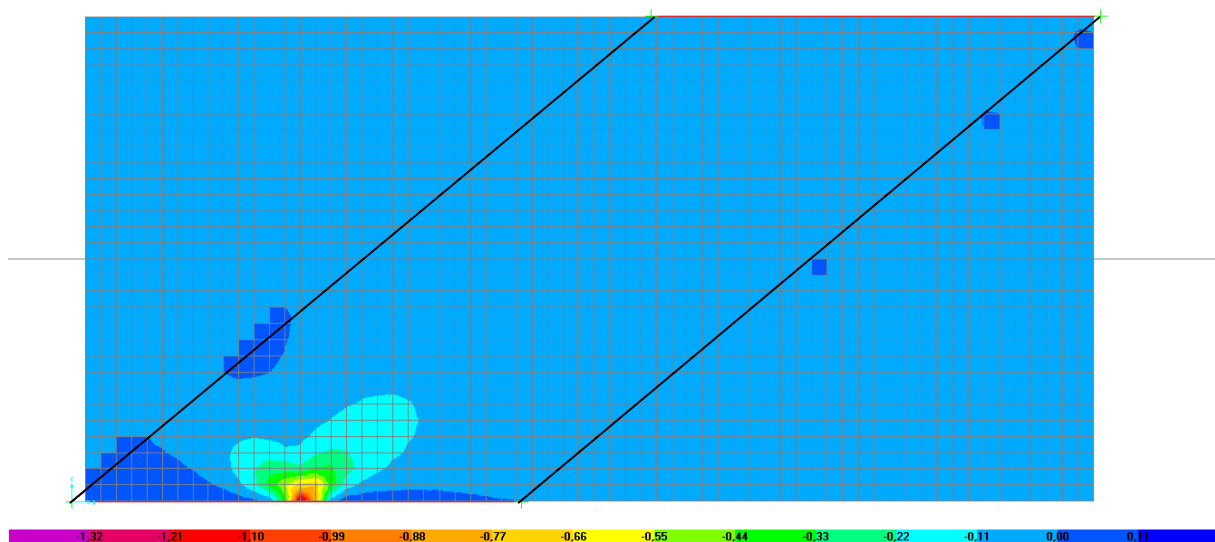


Figura 3.8 – SI – M22 – Ponto A

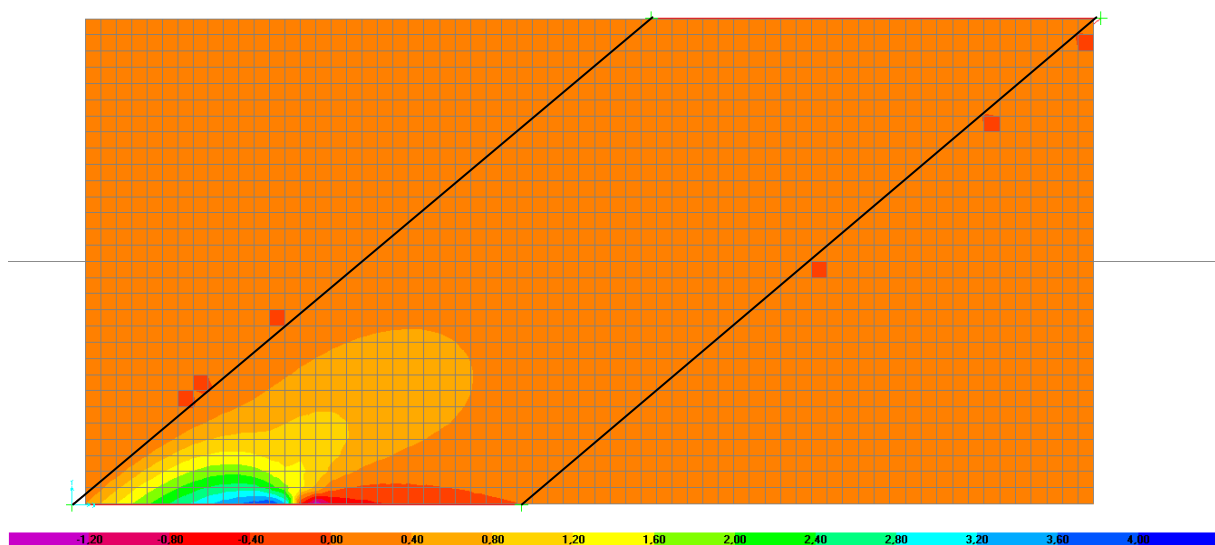


Figura 3.9 – SI – M12 – Ponto A

- Ponto B – meio laje

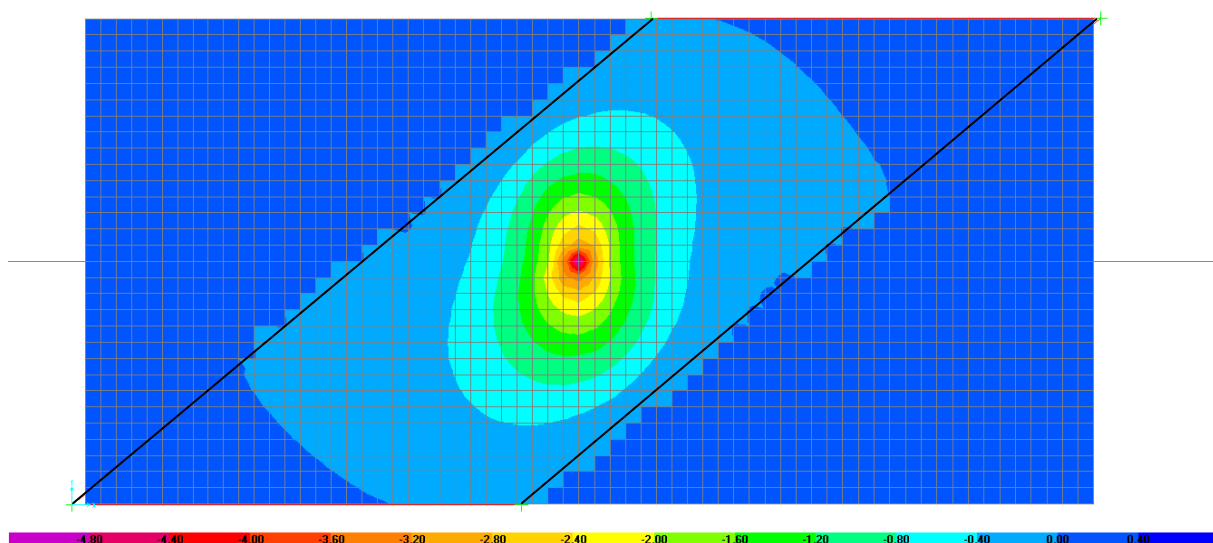


Figura 3.10 – SI –M11 – Ponto B

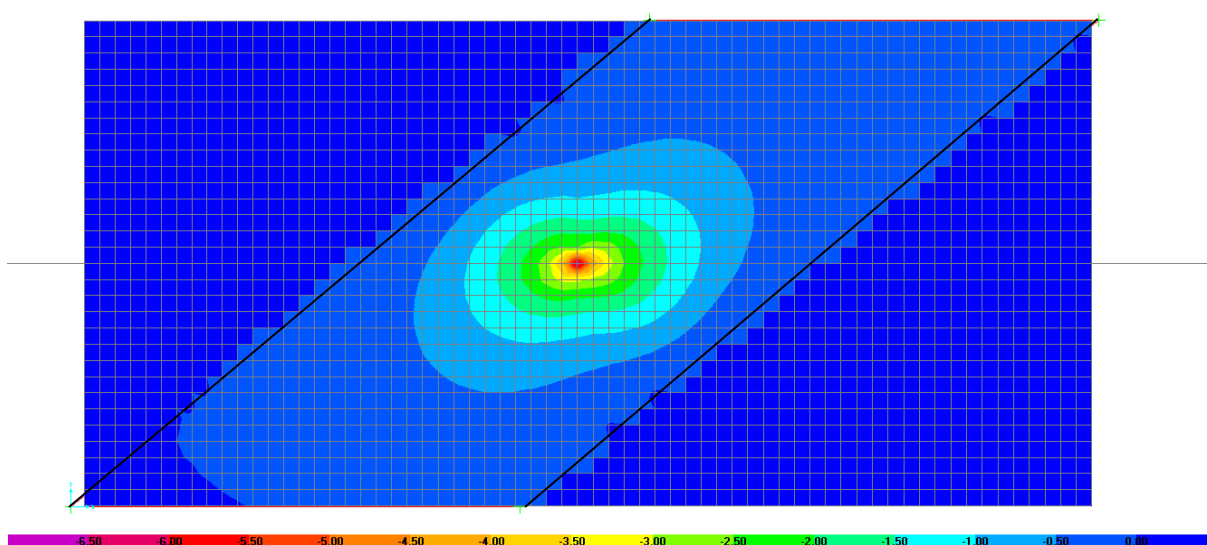


Figura 3.11 – SI –M22 – Ponto B

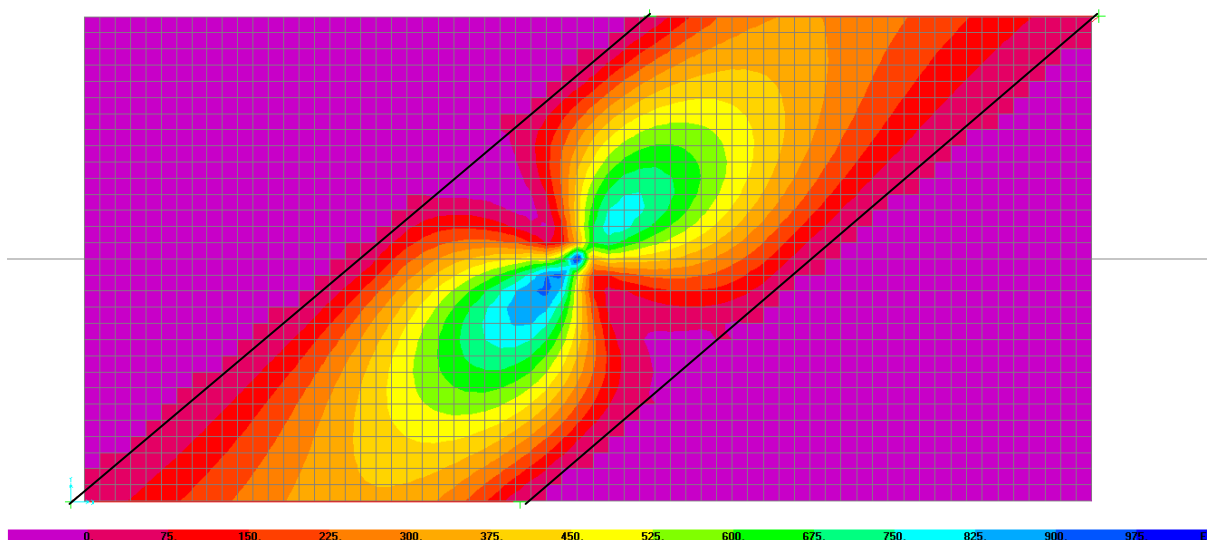


Figura 3.12 – SI –M12 – Ponto B

- Ponto E - vértice do ângulo obtuso

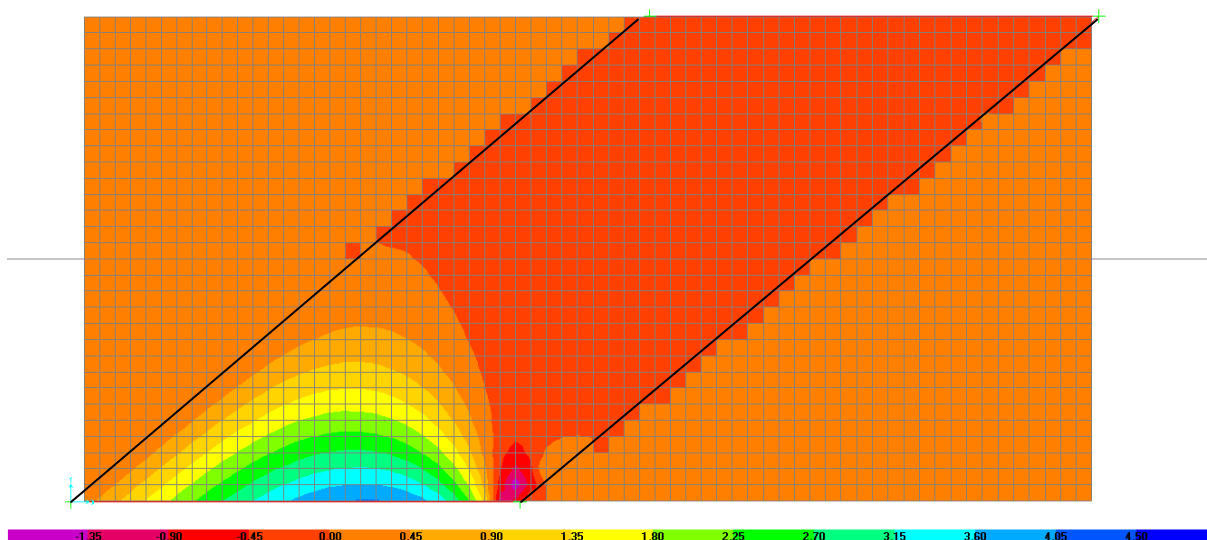


Figura 3.13 – SI –M11 – Ponto E

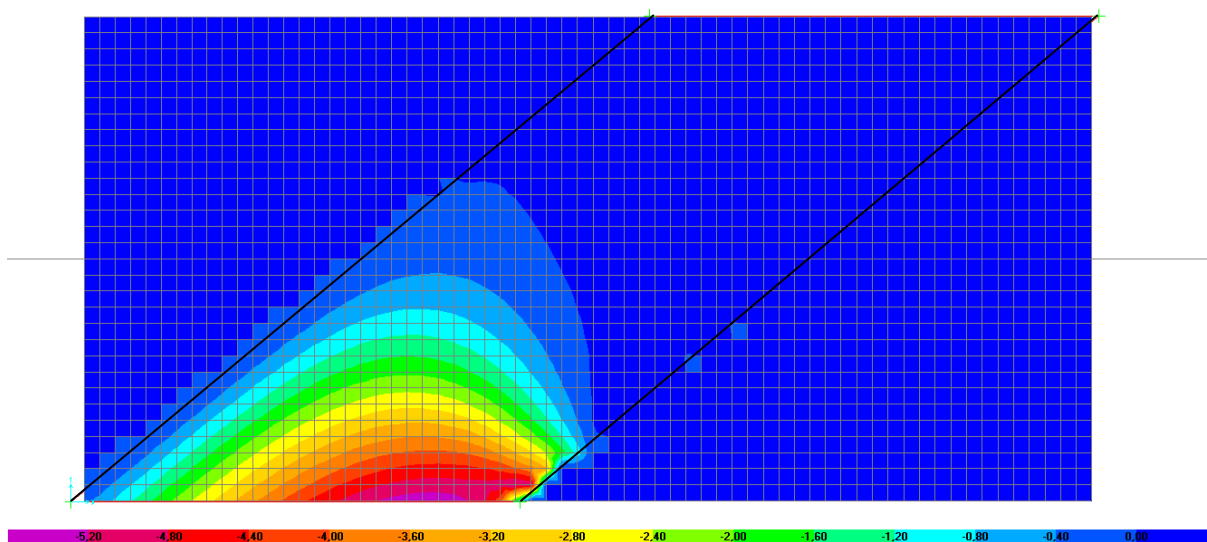


Figura 3.14 – SI –M22 – Ponto E

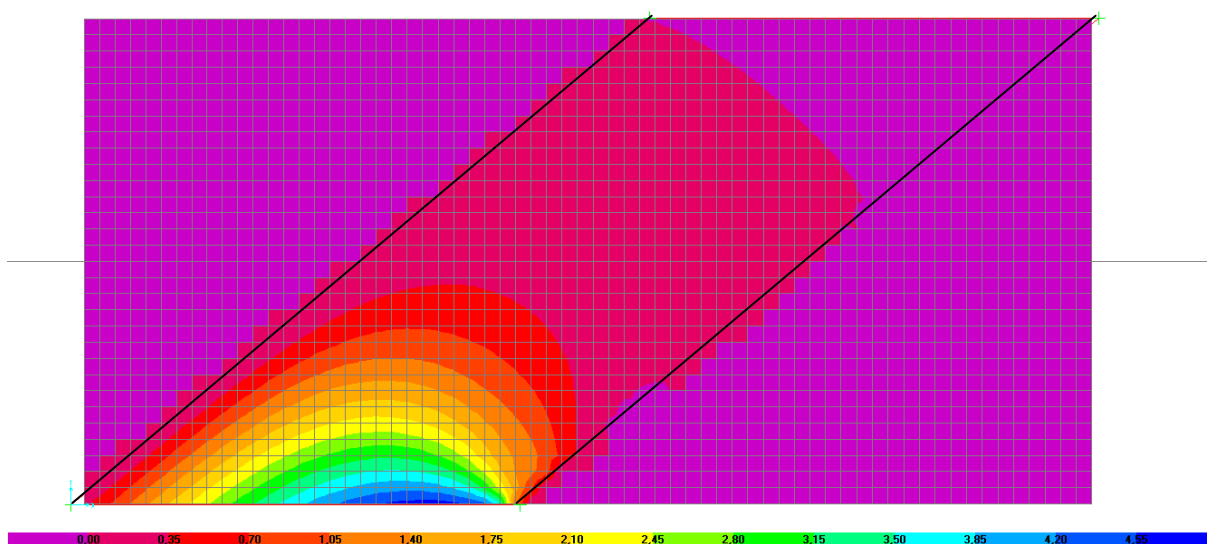


Figura 3.15– SI –M12 – Ponto E

## 4. RESULTADOS DA ANÁLISE

### 4.1. Introdução

Todos os resultados que serão apresentados neste capítulo seguem a notação e os sinais da figura abaixo.

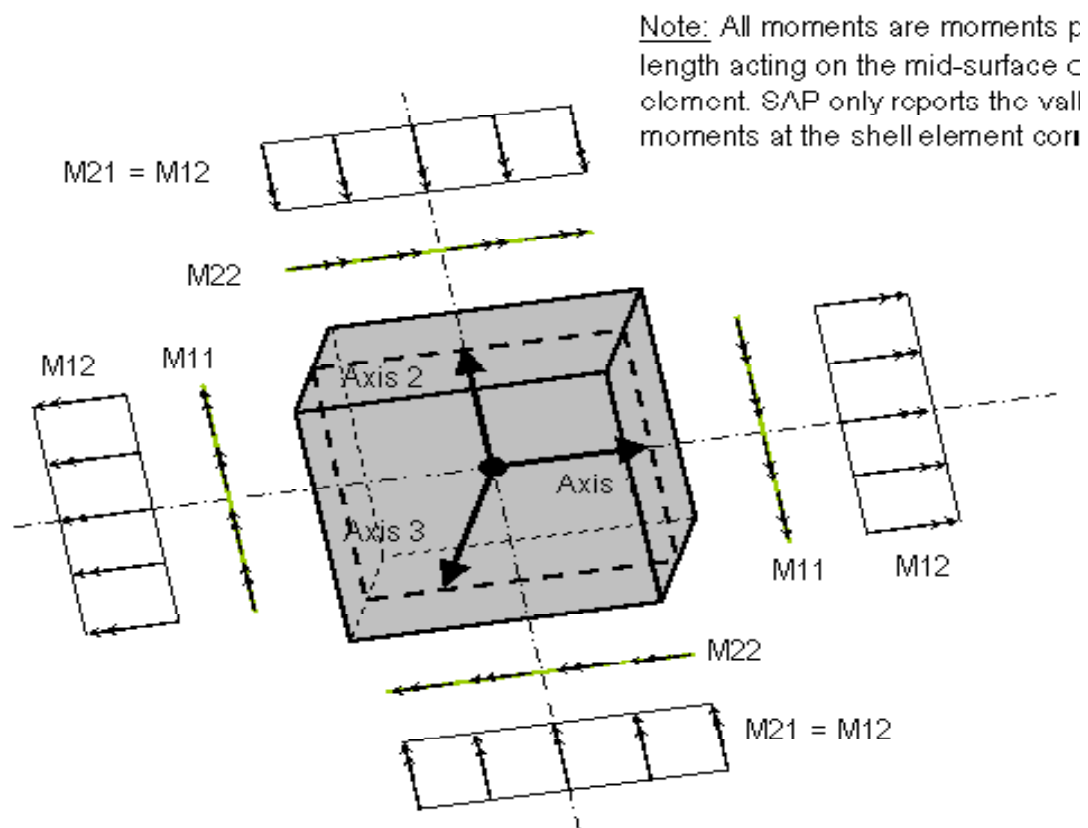


Figura 4.1 – Notação de sinais – SAP 2000

## 4.2. Efeito da esconsidade

O programa fornece as trajetórias dos momentos principais da laje, como se observa na figura a seguir, para o efeito de peso-próprio.

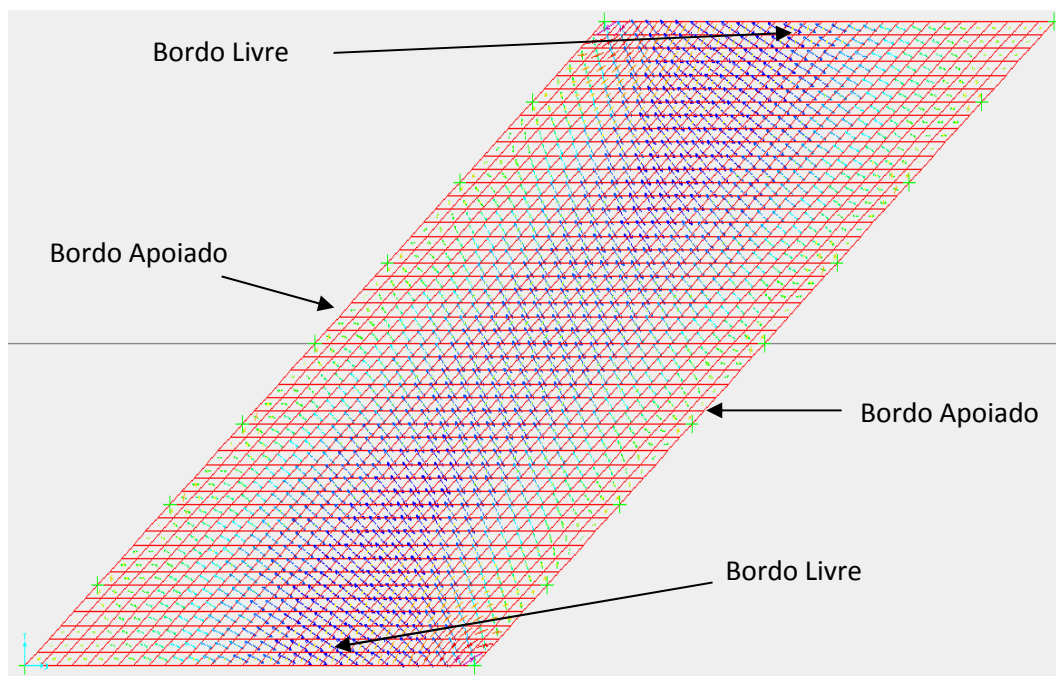


Figura 4.2 – Direção dos momentos principais – Peso-próprio

Verifica-se claramente na figura acima a tendência da direção principal de momentos (maior) na região central ser perpendicular aos bordos apoiados. Já na região inferior e superior, a tendência é da direção principal ficar paralela aos bordos livres. Observando agora a região dos vértices obtusos, as direções principais seguem a direção da bissetriz e a direção circunferencial centrada no vértice.

A seguir seguem os momentos extremos segundo os eixos locais para cada carregamento.

### 4.3. Peso- Próprio

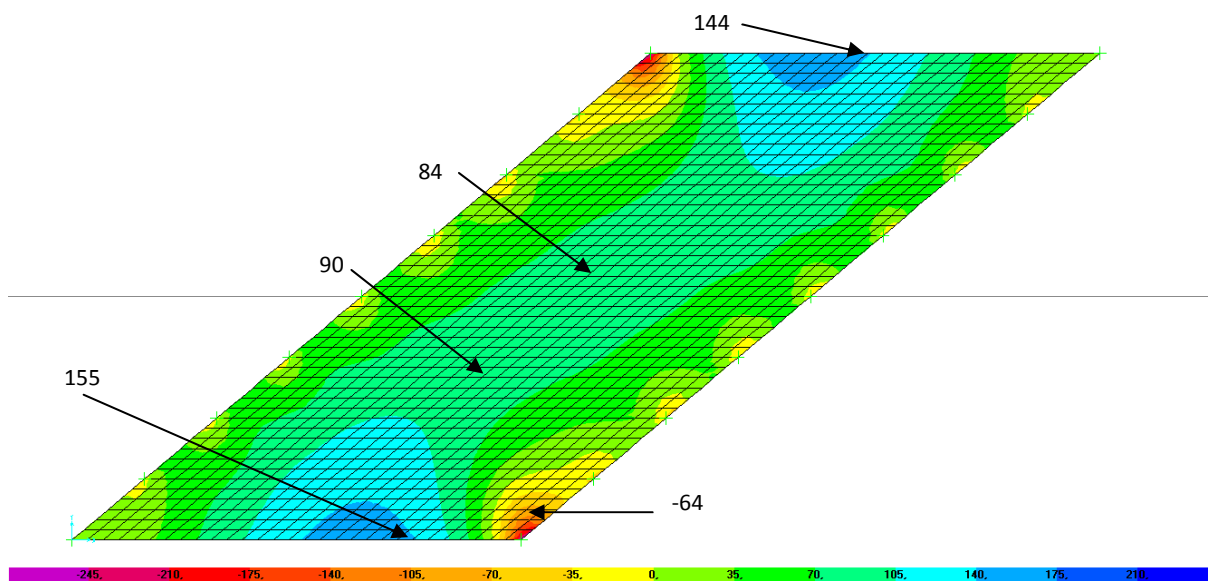


Figura 4.3 –  $M_{11}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Peso Próprio

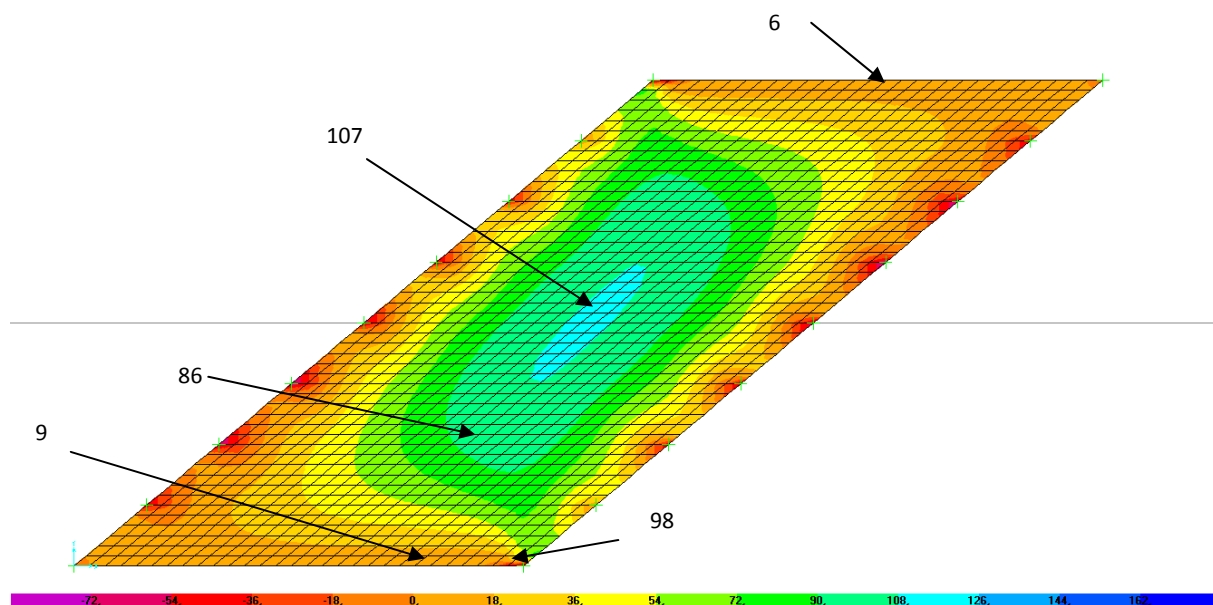


Figura 4.4 –  $M_{22}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Peso Próprio

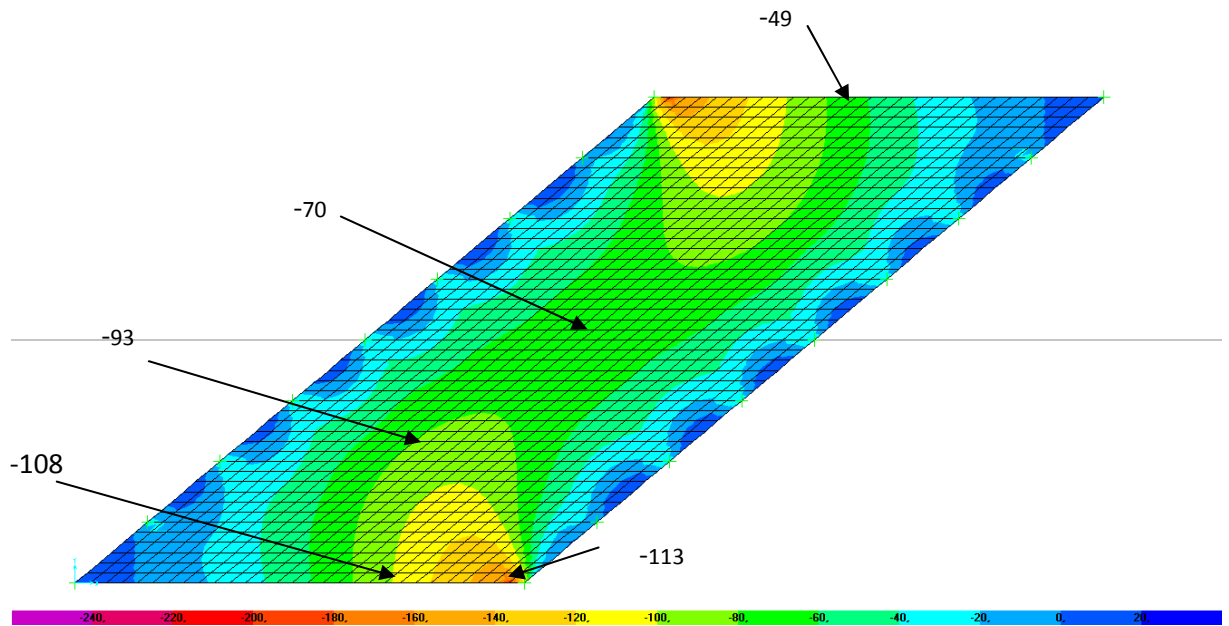


Figura 4.5 –  $M_{12}$  ( kNm/m ) – Peso Próprio

#### 4.4. Pavimentação e Recapeamento

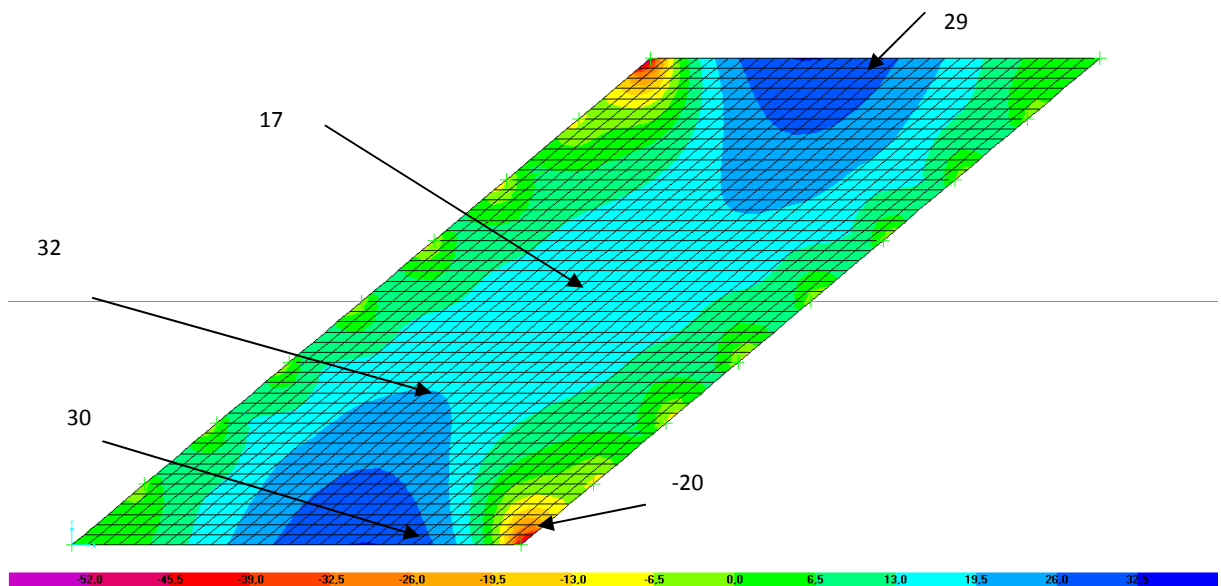


Figura 4.6 –  $M_{11}$  ( kNm/m ) – Pavimentação e Recapeamento



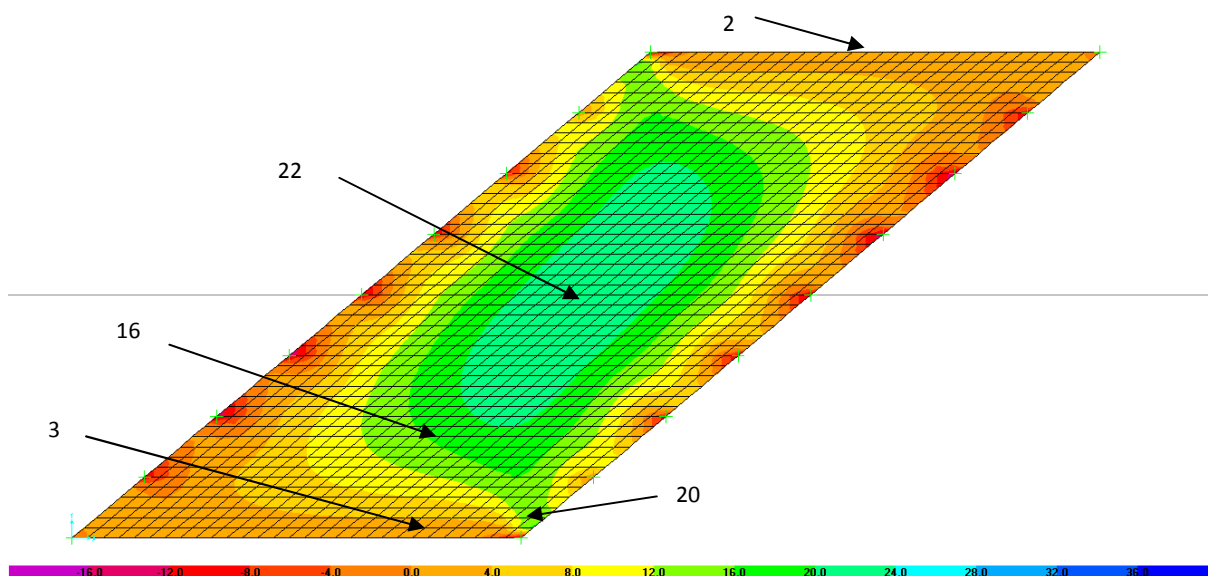


Figura 4.7 –  $M_{22}$  ( kNm/m ) – Pavimentação e Recapeamento

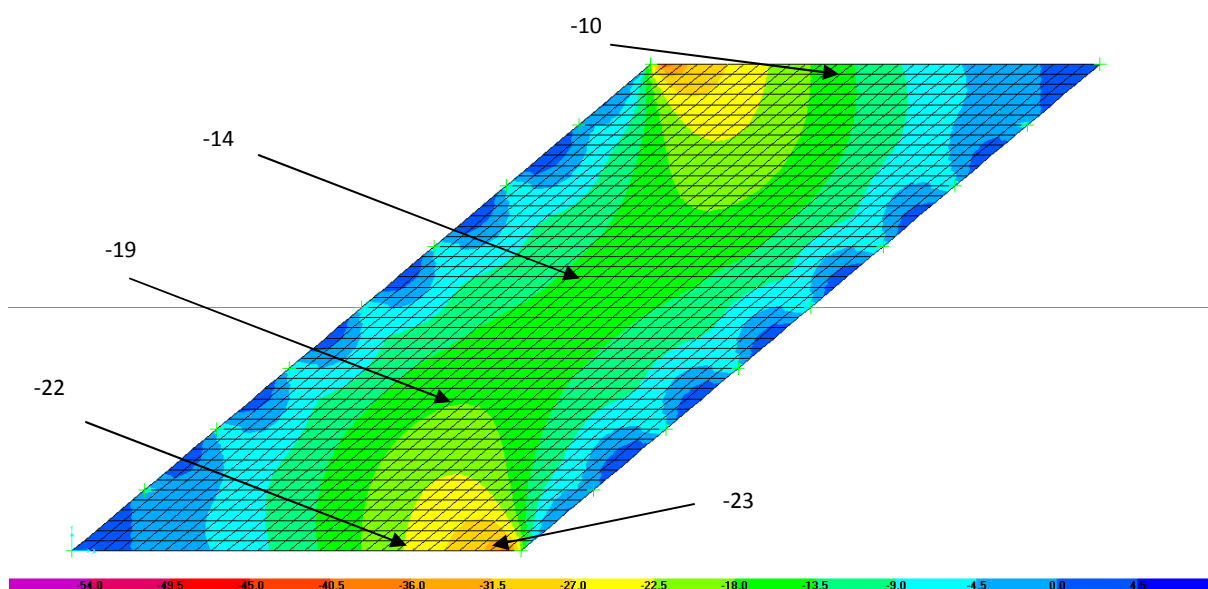


Figura 4.8 –  $M_{12}$  ( kNm/m ) – Pavimentação e Recapeamento

#### 4.5. Guarda Rodas

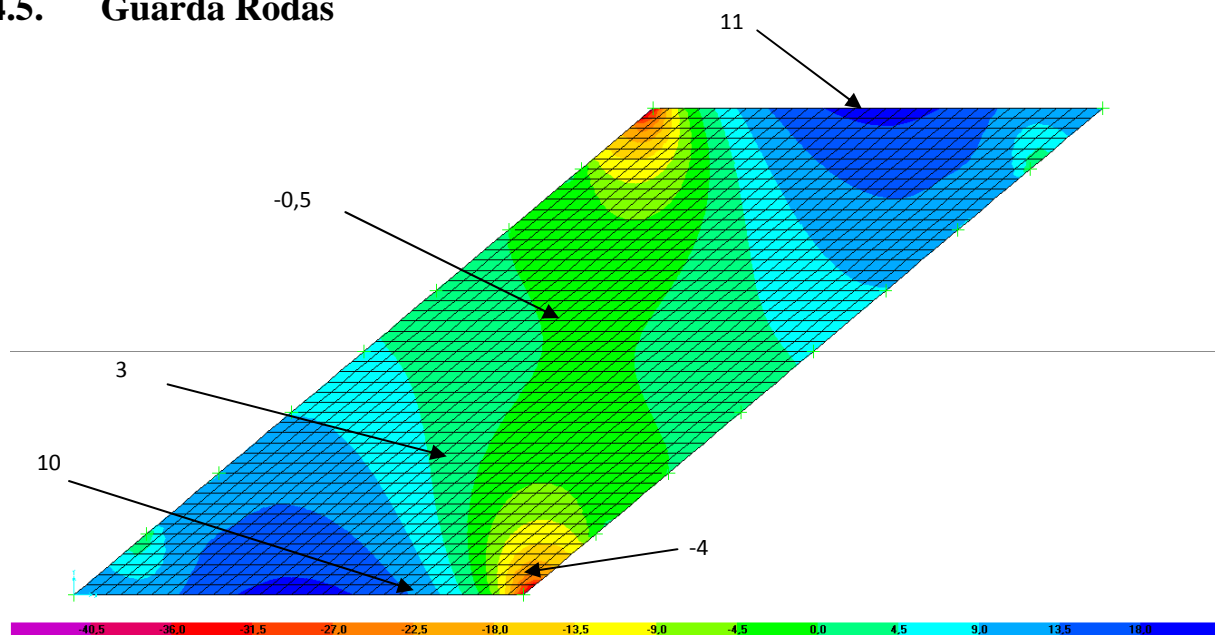


Figura 4.9 –  $M_{11}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Guarda - Rodas

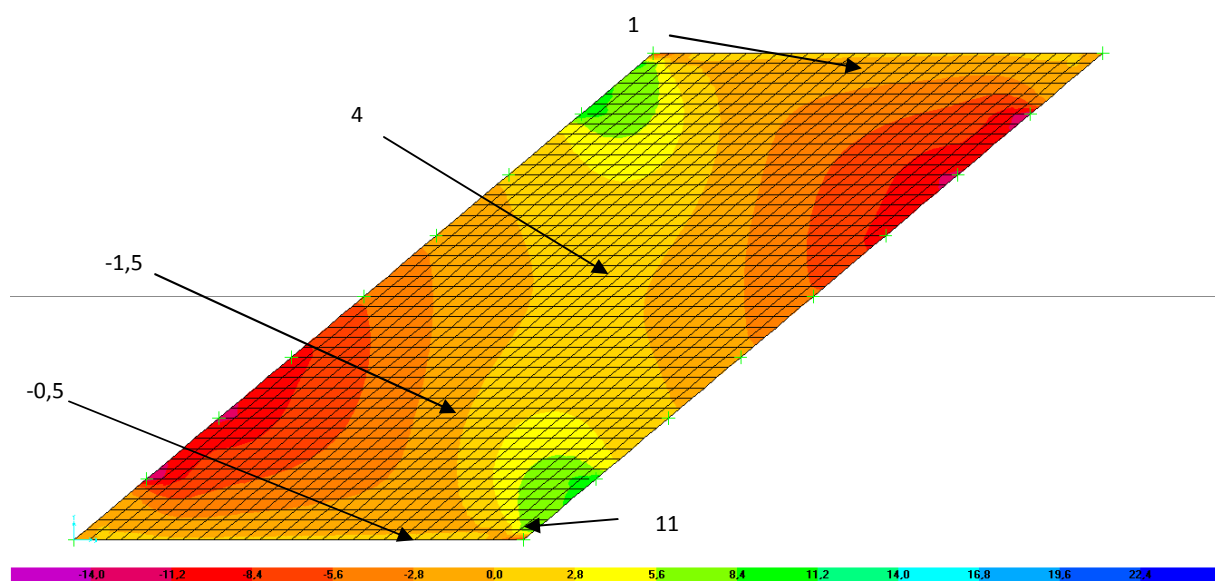


Figura 4.10 –  $M_{22}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Guarda - Rodas

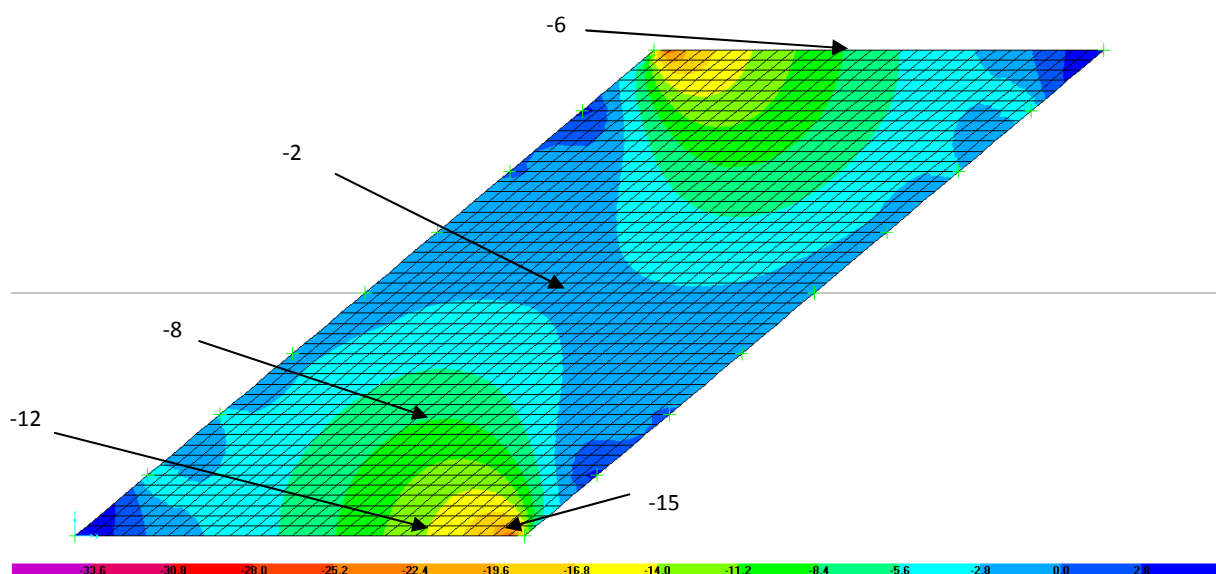


Figura 4.11 – M12 ( kNm/m ) – Guarda – Rodas

#### 4.6. Carga Móvel

As superfícies de influência de todos os pontos são carregadas pelo trem-tipo de projeto (TB-45) e como resultados têm-se os esforços máximos ou mínimos. É válido ressaltar que as envoltórias das solicitações não são concomitantes. Os esforços concomitantes serão apresentados em forma de tabela mais adiante, pois o programa SAP 2000 não fornece saída gráfica.

#### 4.6.1. Envoltória da carga móvel

Seguem as envoltórias dos esforços para todos os pontos da laje.

##### 4.6.1.1. Envoltória de Máximos

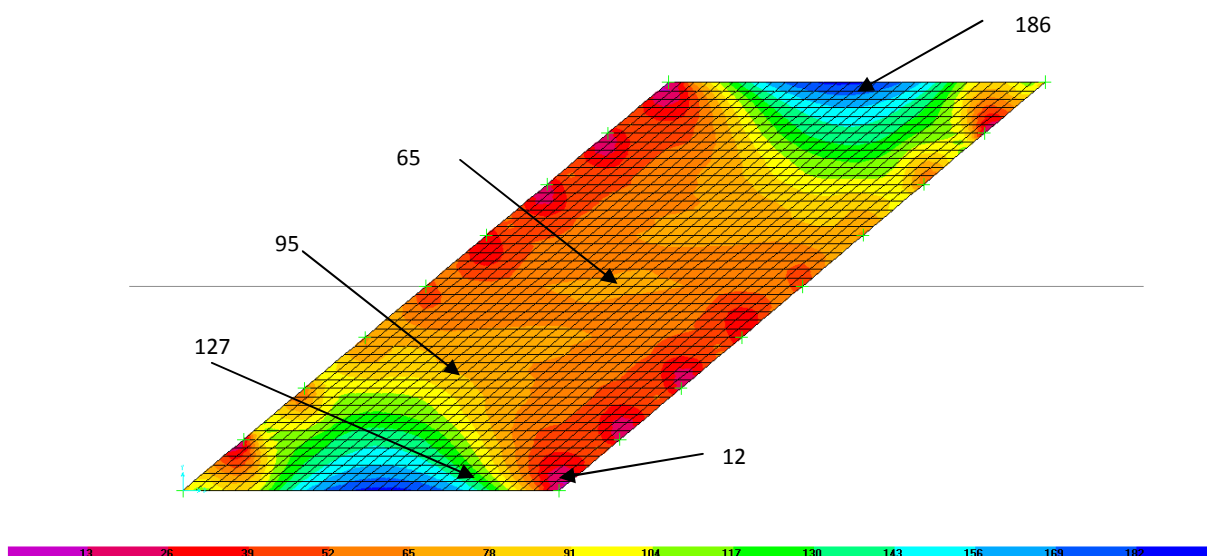


Figura 4.12 –  $M_{11}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Carga Móvel – Máximo

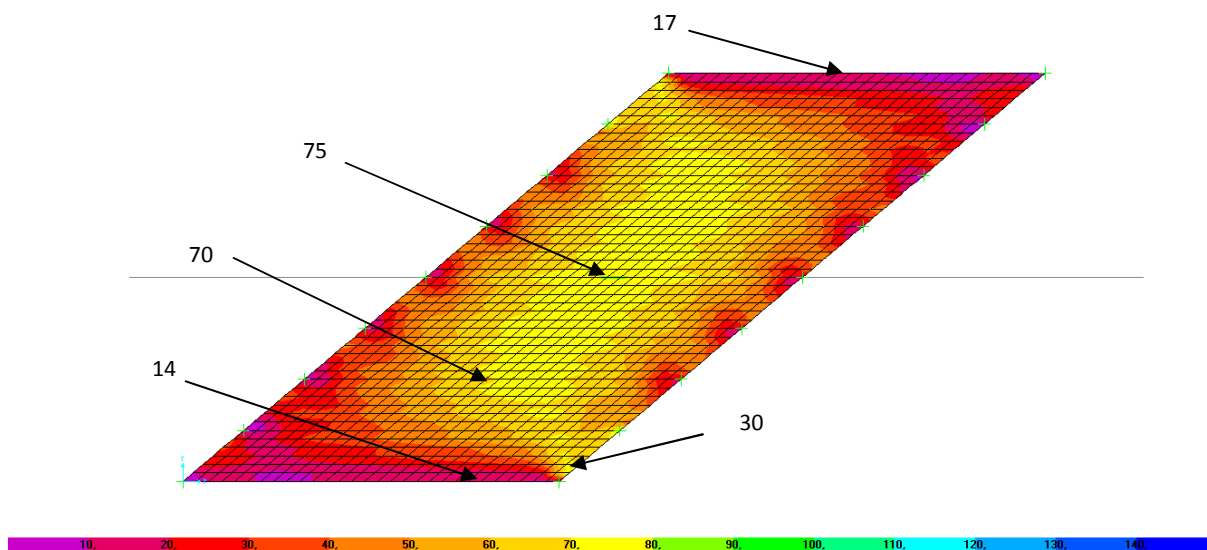


Figura 4.13 –  $M_{22}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Carga Móvel – Máximo

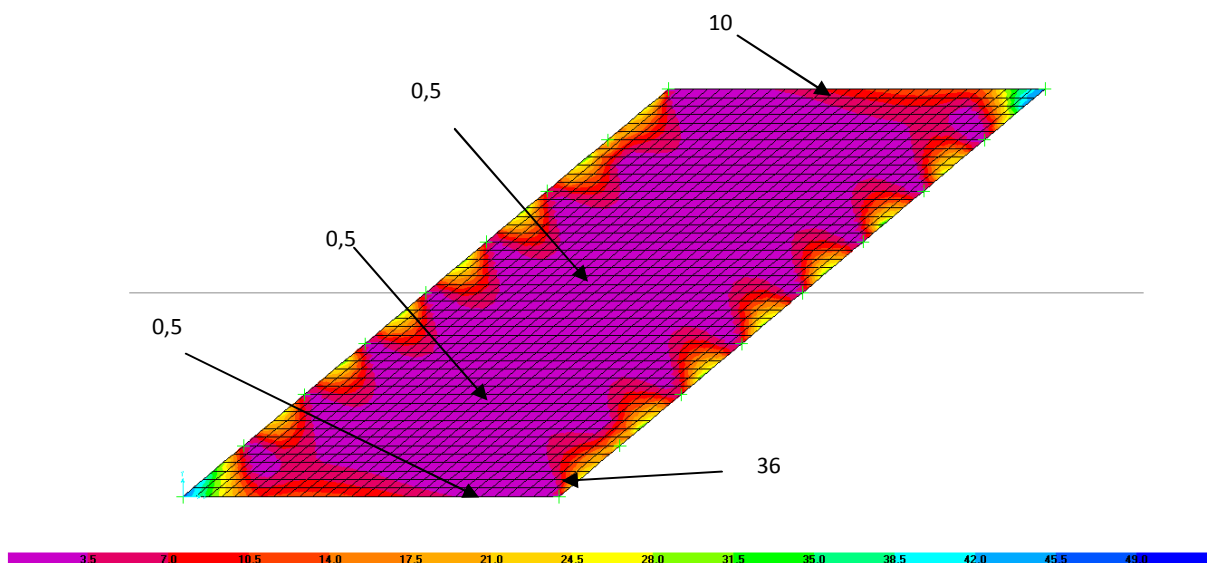


Figura 4.14 –  $M_{12}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Carga Móvel – Máximo

#### 4.6.1.2. Envoltória dos mínimos

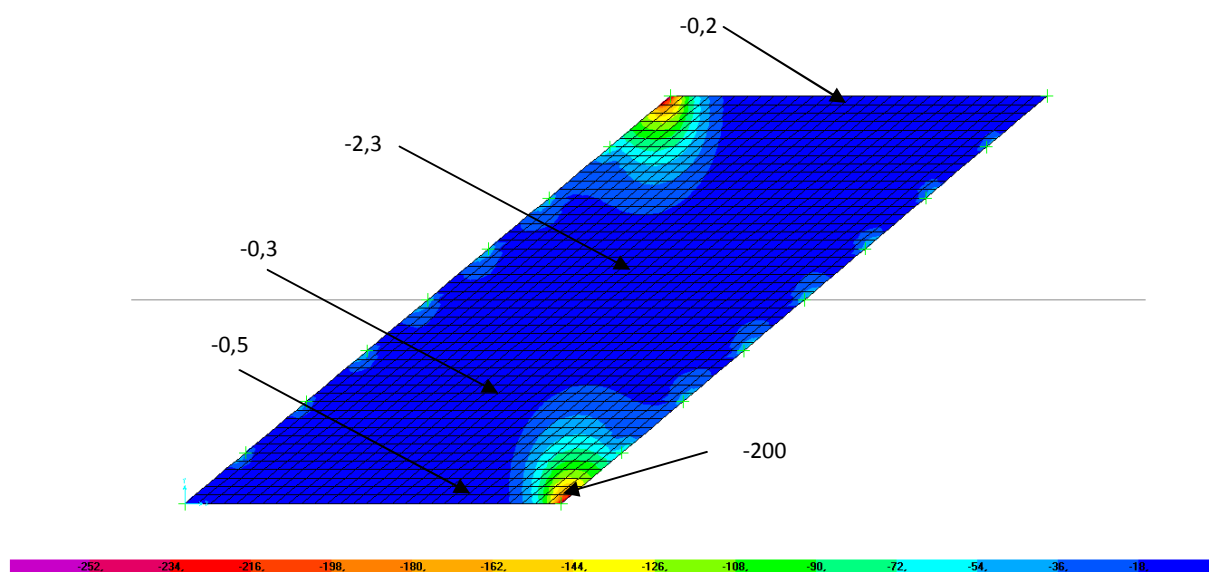


Figura 4.15 –  $M_{11}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Carga Móvel – Mínimo

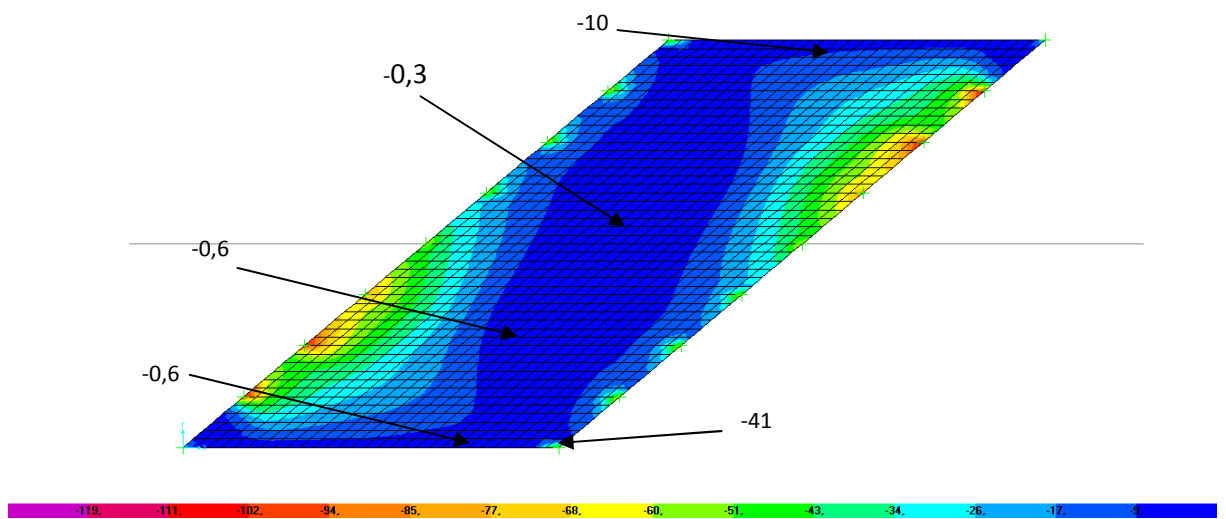


Figura 4.16 –  $M_{22}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Carga Móvel – Mínimo

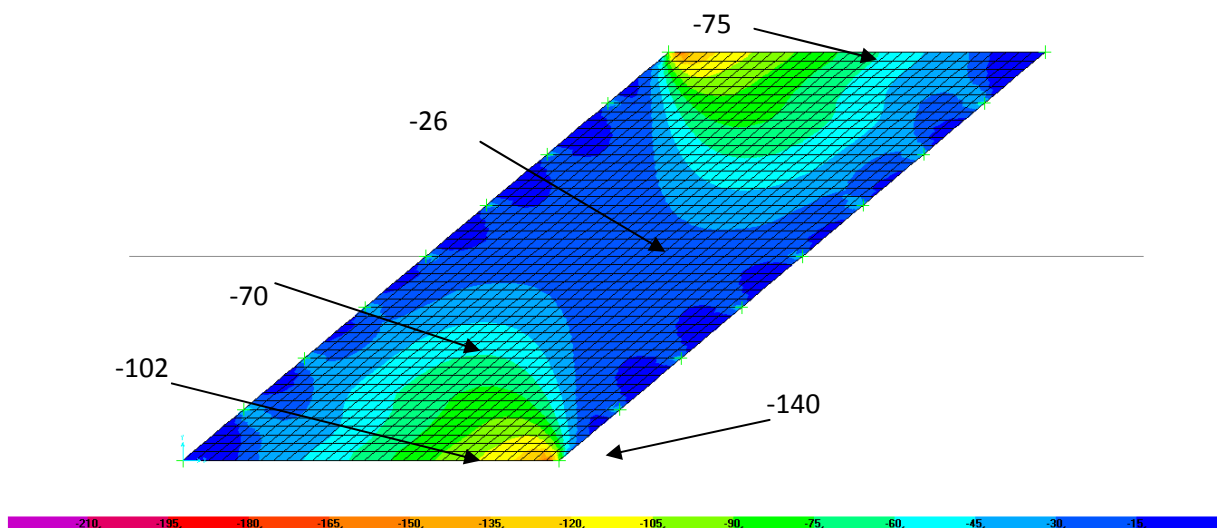


Figura 4.17 –  $M_{12}$  (  $\text{kNm/m}$  ) – Carga Móvel – Mínimo

#### 4.6.2. Combinações dos esforços

Os esforços obtidos para cada carregamento devem ser combinados para se obter a solicitação de projeto no ELU, com os coeficientes de majoração prescritos em [2]. O coeficiente de impacto  $\Phi$  será inserido nas combinações.

		Combinação			
	Carregamento	Comb 1	Comb 2	Comb 3	Comb 4
Permanente	Peso-próprio	1,35	1	1,35	1
	Pav. + Rec	1,35	1	1,35	1
	Barreira lateral	1,35	1	1,35	1
Acidental	Carga Móvel (+)	$1,5 \times \Phi$	$1,5 \times \Phi$	-	-
	Carga Móvel (-)	-	-	$1,5 \times \Phi$	$1,5 \times \Phi$

Tabela 4.1 – Combinações - ELU

Segue novamente a figura contendo os pontos de interesse para o dimensionamento:

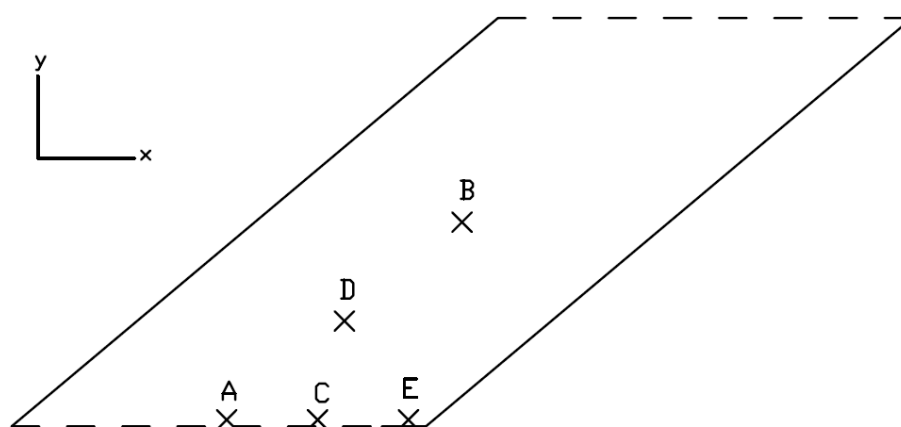


Figura 4.18 – Regiões de interesse

A tabela resumo a seguir se refere a resultante dos esforços devido as cargas permanentes:

Região	Solicitação		
	M11	M22	M12
A	184,34	9,30	- 70,61
B	102,19	133,11	- 87,58
C	202,55	12,39	- 143,29
D	125,64	100,39	- 120,39
E	- 88,84	129,81	- 152,87

Tabela 4.2 – Resultantes dos esforços (kNm/m) – carga permanente

A tabela para carga móvel apresenta os esforços concomitantes, e não para os máximos e mínimos.

Região	Solicitação	M11	M22	M12
A	Máx M11	152,00	8,02	0,22
A	Mín M11	- 0,28	- 0,59	- 43,71
A	Máx M22	152,00	8,02	0,22
A	Mín M22	- 0,28	- 0,59	- 43,71
A	Máx M12	152,00	8,02	0,22
A	Mín M12	- 0,28	- 0,59	- 43,71
B	Máx M11	69,56	84,82	0,56
B	Mín M11	- 1,26	- 0,17	- 25,81
B	Máx M22	69,56	84,82	0,56
B	Mín M22	- 1,26	- 0,17	- 25,81
B	Máx M12	69,56	84,82	0,56
B	Mín M12	- 1,26	- 0,17	- 25,81
C	Máx M11	139,40	10,46	0,03
C	Mín M11	- 0,24	- 0,10	- 76,03
C	Máx M22	139,40	10,46	0,03
C	Mín M22	- 0,24	- 0,10	- 76,03
C	Máx M12	139,40	10,46	0,03
C	Mín M12	- 0,24	- 0,10	- 76,03
D	Máx M11	72,66	69,46	0,45
D	Mín M11	- 0,14	- 2,92	- 55,50
D	Máx M22	72,66	69,46	0,45
D	Mín M22	- 0,14	- 2,92	- 55,50
D	Máx M12	72,66	69,46	0,45
D	Mín M12	- 0,14	- 2,92	- 55,50
E	Máx M11	23,28	90,59	1,09
E	Mín M11	- 87,80	- 4,50	- 98,58
E	Máx M22	23,28	90,59	1,09
E	Mín M22	- 87,80	- 4,50	- 98,58
E	Máx M12	23,28	90,59	1,09
E	Mín M12	- 87,80	- 4,50	- 98,58

Tabela 4.3 – Esforços concomitantes (kNm/m) – carga móvel



A tabela a seguir mostra os valores das combinações, para momentos concomitantes, que serão utilizados no dimensionamento, já feitas às combinações.

Região	Solicitação	M11	M22	M12
A	Máx M11	545,26	28,20	- 94,89
A	Mín M11	248,32	11,41	- 180,55
A	Máx M22	545,26	28,20	- 94,89
A	Mín M22	248,32	11,41	- 180,55
A	Máx M12	545,26	28,20	- 94,89
A	Mín M12	248,32	11,41	- 180,55
B	Máx M11	273,61	345,09	- 117,15
B	Mín M11	135,50	179,37	- 168,57
B	Máx M22	273,61	345,09	- 117,15
B	Mín M22	135,50	179,37	- 168,57
B	Máx M12	273,61	345,09	- 117,15
B	Mín M12	135,50	179,37	- 168,57
C	Máx M11	545,26	37,12	- 193,38
C	Mín M11	272,98	16,53	- 341,70
C	Máx M22	545,26	37,12	- 193,38
C	Mín M22	272,98	16,53	- 341,70
C	Máx M12	545,26	37,12	- 193,38
C	Mín M12	272,98	16,53	- 341,70
D	Máx M11	311,29	270,97	- 161,65
D	Mín M11	169,34	129,83	- 270,75
D	Máx M22	311,29	270,97	- 161,65
D	Mín M22	169,34	129,83	- 270,75
D	Máx M12	311,29	270,97	- 161,65
D	Mín M12	169,34	129,83	- 270,75
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60
E	Máx M22	- 74,53	351,90	- 204,25
E	Mín M22	- 291,14	166,46	- 398,60
E	Máx M12	- 74,53	351,90	- 204,25
E	Mín M12	- 291,14	166,46	- 398,60

Tabela 4.4 – Valores de cálculo no ELU para momentos concomitantes - (kNm/m)

## **5. DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO**

### **5.1. Introdução**

Como demonstrado anteriormente, as direções dos momentos principais variam em cada ponto da laje, o que torna inviável o posicionamento das armaduras segundo essas direções. A seguir, serão apresentados dois métodos práticos de dimensionamento que permitem realizar o projeto de forma mais simples do ponto de vista prático e em seguida os métodos serão comparados.

Não ocorre inversão de sinal dos momentos, e por isso a fadiga não será verificada.

### **5.2. Método de Leonhardt**

#### **5.2.1. Introdução**

Sabe-se que a posição ótima para colocação das armaduras é segunda a direção das tensões principais de tração ou dos momentos principais. É intuitivo notar que, dessa forma, a armadura absorve diretamente os esforços de tração do concreto ficando perpendiculares as fissuras. Entretanto, em alguns casos práticos, essa disposição não é a mais adequada do ponto de vista construtivo, como é o caso da laje esconsa.

Nos parágrafos seguintes segue um breve desenvolvimento do método e sua aplicação para a laje esconsa da ponte do trabalho aqui desenvolvido, método usado apenas para armaduras ortogonais entre si e oblíquas em relação às direções principais.

O método será desenvolvido inicialmente para chapa e posteriormente será adequado para lajes.

#### **5.2.2. Chapa com Armaduras Ortogonais**

Por simplicidade, o método foi desenvolvido utilizando apenas uma malha de armadura no plano médio da chapa. Verifica-se também que as faces do elemento são paralelas as direções principais e as armaduras formam uma malha ortogonal nas direções  $x$  e  $y$  não coincidente com as direções principais 1 e 2.

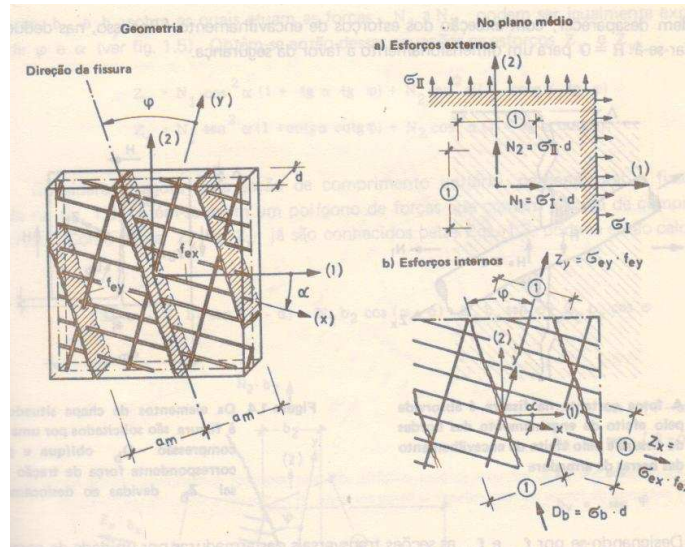


Figura 5.1 – Solicitações – chapa [7]

Segue a seguir a nomenclatura e a convenção utilizada no método:

- $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões segundo as direções principais, onde  $\sigma_1$  é sempre maior que  $\sigma_2$ , tal que se adota positiva para tração e negativa para compressão;
- $\sigma_b$  é a tensão de compressão no concreto;
- $A_{sx}$  e  $A_{sy}$  são as armaduras por metro nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente;
- $\alpha$  é o ângulo entre a direção do eixo principal 1 e o eixo  $x$ ;
- $\varphi$  é o ângulo entre a direção das fissuras e o eixo  $y$ .

A chapa está sendo solicitada pelos esforços normais externos  $N_1$  e  $N_2$ , que atuam em um comprimento unitário:

$$N_1 = \sigma_1 \cdot h \cdot 1 \quad (5.1)$$

$$N_2 = \sigma_2 \cdot h \cdot 1 = k \cdot N_1$$

$$k \leq 1$$

Ao analisar os esforços internos, verifica-se uma força resistente de compressão no concreto,  $D_b = \sigma_b \cdot d \cdot 1$ , entre as fissuras, e para a armadura, as forças resistentes de tração são  $Z_x = \sigma_{sx} \cdot A_{sx}$  e  $Z_y = \sigma_{sy} \cdot A_{sy}$ .

Considerando-se uma seção de comprimento unitário ao longo da fissura e fazendo-se o equilíbrio das forças (figura 5.2):

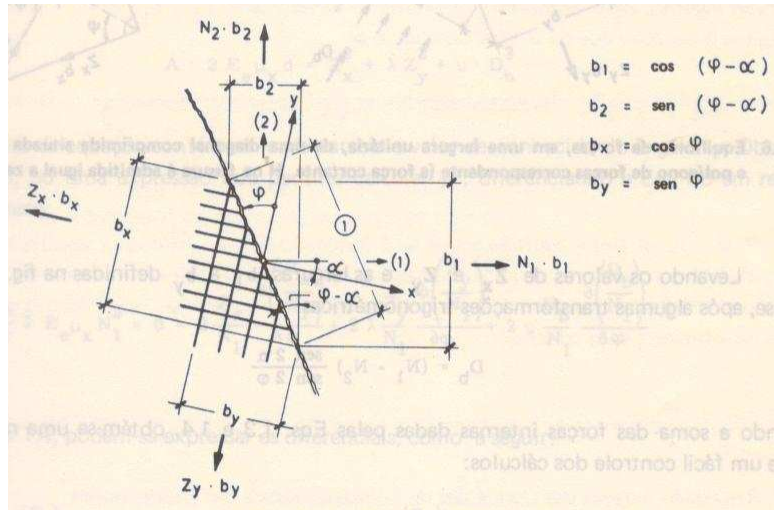


Figura 5.2 – Equilíbrio de forças – comprimento unitário [7]

$$N_1 \cdot b_1 - Z_x \cdot b_x \cdot \cos \alpha - Z_y \cdot b_y \cdot \sin \alpha = 0 \quad (5.2)$$

$$N_2 \cdot b_2 - Z_y \cdot b_y \cdot \cos \alpha + Z_x \cdot b_x \cdot \sin \alpha = 0$$

Utilizando-se as relações geométricas entre as faixas  $b_i$  (figura 5.2), pode-se colocar em evidência as forças resistentes das armaduras:

$$Z_x = N_1 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi) + N_2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi) \quad (5.3)$$

$$Z_y = N_1 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 + \cot g \alpha \cdot \cot g \varphi) + N_2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cot g \varphi)$$

Já conhecidas as forças de tração na armadura, resta achar a força de compressão do concreto. Portanto, utiliza-se uma seção de comprimento unitário normal a fissura (figura 5.3) e fazendo-se novamente o equilíbrio, tem-se:

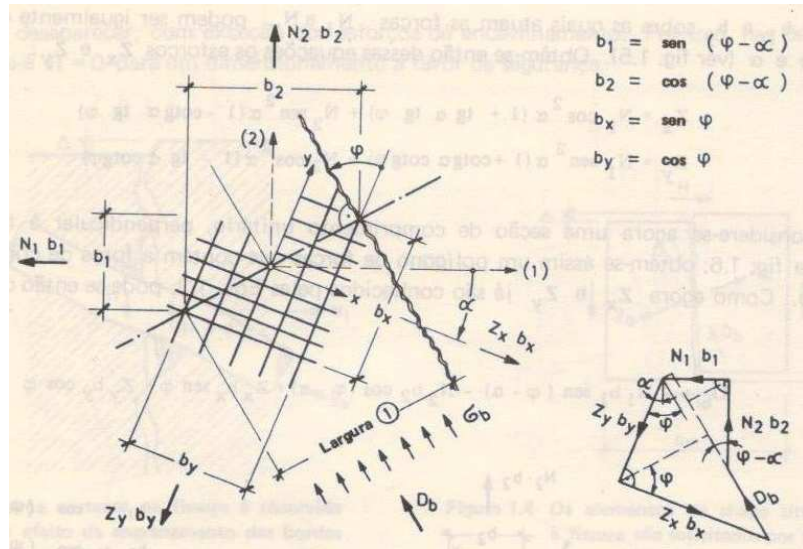


Figura 5.3 – Equilíbrio de forças – largura uniária [7]

$$D_b = -N_1 \cdot b_1 \cdot \sin(\varphi - \alpha) - N_2 \cdot b_2 \cdot \cos(\varphi - \alpha) + Z_x \cdot b_x \cdot \sin \varphi + Z_y \cdot b_y \cdot \cos \varphi$$

Substituindo os valores de  $Z_x$  e  $Z_y$  na equação anterior:

$$D_b = (N_1 - N_2) \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi} \quad (5.4)$$

Considerando as relações geométricas da figura 5.3, chega-se a equação de verificação dos valores de  $Z_x$ ,  $Z_y$  e  $D_b$ :

$$Z_x + Z_y - D_b = N_1 + N_2 \quad (5.5)$$

### 5.2.3. Laje com armaduras ortogonais

Os esforços normais podem ser reescritos utilizando a razão momento e braço de alavanca:

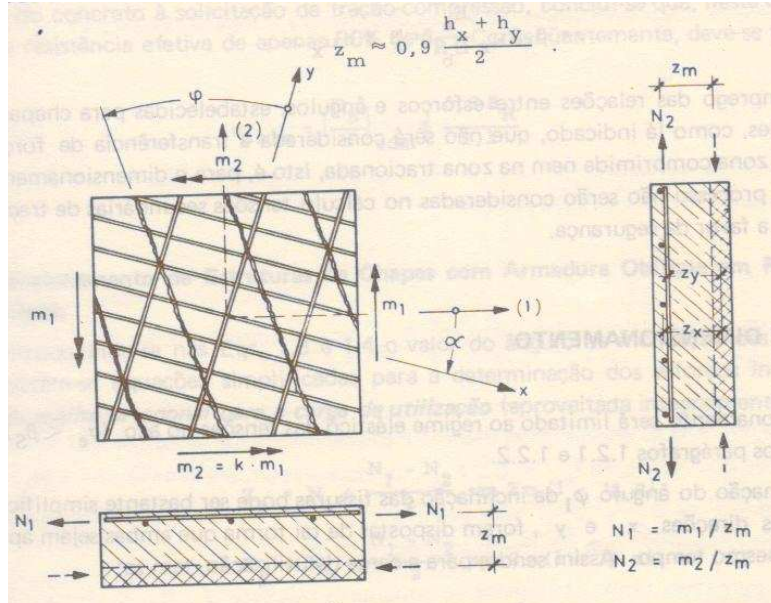


Figura 5.4 – Solicitações – laje [7]

$$N_1 = \frac{m_1}{z_m} \quad (5.6)$$

$$N_2 = \frac{m_2}{z_m}$$

Fazendo as devidas substituições, tem-se

$$m_x = Z_x \cdot z_x = m_1 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi) + m_2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cot g \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi)$$

$$m_y = Z_y \cdot z_y = m_1 \cdot \sin^2 \alpha \cdot (1 + \cot g \alpha \cdot \cot g \varphi) + m_2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cot g \varphi) \quad (5.7)$$

$$D_b \cdot z_m = (m_1 - m_2) \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi}$$

#### 5.2.4. Determinação do Ângulo $\varphi$ de Inclinação das Fissuras

Para encontrar o ângulo  $\varphi$ , faz-se necessário utilizar as condições de compatibilidade das deformações, no regime linear e elástico.

Primeiramente, considera-se o triângulo retângulo formado pelo comprimento unitário da fissura e as direções das armaduras, como demonstrado na figura a seguir.

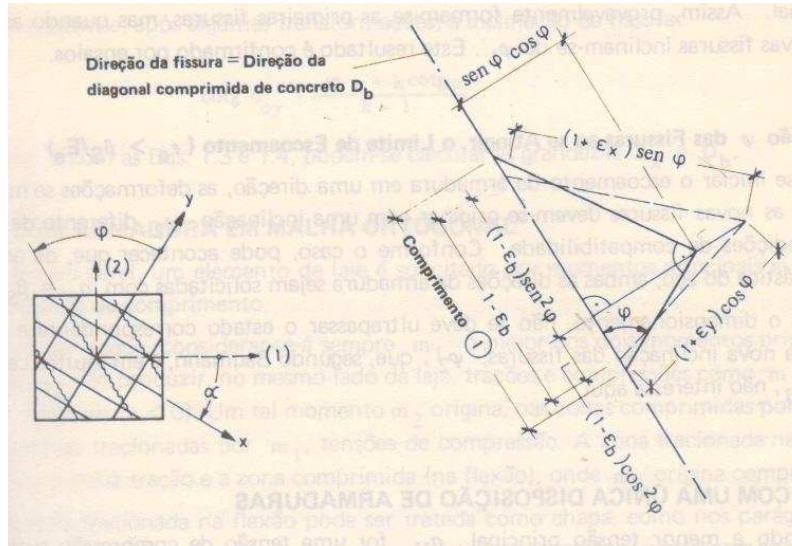


Figura 5.5 – Deformações de um elemento de chapa [7]

Com a solicitação da compressão do concreto  $D_b$ , o triângulo em questão sofre deformações, onde o concreto se encurta. Os lados do triângulo estão sujeitos as deformações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_{xx}}{E_s} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_{yy}}{E_s} \\ \varepsilon_b &= \frac{\sigma_b}{E_b}\end{aligned}\tag{5.8}$$

Chega-se geometricamente ao tamanho dos lados do triângulo tracejado representados na figura 5.5.

Partindo do princípio que não há mudança da direção das alturas dos triângulos, e que os triângulos têm a mesma altura:

$$[(1+\varepsilon_x) \cdot \sin \varphi]^2 - [(1-\varepsilon_c) \cdot \sin^2 \varphi]^2 = [(1+\varepsilon_y) \cdot \cos \varphi]^2 - [(1-\varepsilon_c) \cdot \cos^2 \varphi]^2 \quad (5.9)$$

Desprezando os termos de segunda ordem e resolvendo os termos em relação à  $\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$ :

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \tan^2 \varphi \cdot \left[ 1 + \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_x} (1 - \cot^2 \varphi) \right] \quad (5.10)$$

Substituindo as deformações pelas correspondentes tensões:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} &= \frac{\sigma_{sy}}{\sigma_{sx}} \\ \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_c} &= \frac{Z_z}{\nu \cdot D_c} \\ \frac{\sigma_{sy}}{\sigma_{sx}} &= \tan^2 \varphi \cdot \left[ 1 + \nu \frac{D_c}{Z_x} (1 - \cot^2 \varphi) \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\nu = \rho_x \frac{E_S}{E_c}$$

Para simplificar os cálculos, considera-se que as armaduras nas duas direções são solicitadas em suas totalidades e ao mesmo tempo. Então, tem-se que  $\sigma_{sx} = \sigma_{sy}$  e desprezando termo muito pequeno  $\nu \frac{D_c}{Z_x}$ :

$$\frac{\sigma_{sy}}{\sigma_{sx}} = 1 = \tan^2 \varphi \quad (5.12)$$

Então:

$$\varphi = 45^\circ.$$

Valor coerente com a consideração anterior de ambas as armaduras estarem solicitadas com a mesma intensidade e como consequência, torna-se o ângulo que produz a solução mais econômica.



### 5.2.5. Dimensionamento de lajes com armadura oblíqua em relação aos momentos principais

Utilizando a consideração do item anterior, chegam-se as equações simplificadas dos esforços internos:

$$\begin{aligned} m_x &= Z_x \cdot z_x = m_1 + \frac{m_1 - m_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha) \\ m_y &= Z_y \cdot z_y = m_2 + \frac{m_1 - m_2}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$D_c = (m_1 - m_2) \cdot \sin 2\alpha$$

Os momentos principais e o ângulo  $\alpha$  formado podem ser encontrados através das seguintes equações:

**- Momentos de mesmo sinal:**

$$m_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (5.14)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot M_{xy}}{M_x - M_y}$$

**- Momentos com sinais contrários:**

**- Armadura Positiva**

$$m_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot M_{xy}}{M_x - M_y}$$

**- Armadura Negativa**

$$m_{1,2} = \frac{M_x + M_y}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{M_x - M_y}{2}\right)^2 + M_{xy}^2} \quad (5.15)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot M_{xy}}{M_x - M_y}$$

### 5.2.6. Dimensionamento da laje do projeto utilizando Leonhardt

Em posse dos valores dos momentos nas direções x e y, o dimensionamento a flexão torna-se direto. As direções das armaduras utilizadas no método podem ser observadas na figura a seguir:

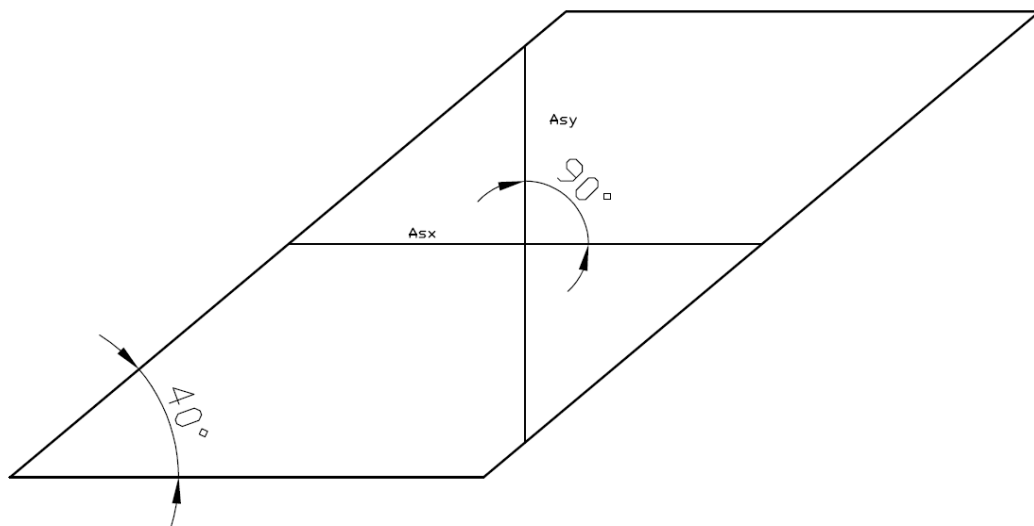


Figura 5.6 – Direção Armaduras - Leonhardt

A seguir serão apresentadas tabelas de dimensionamento para as diversas regiões de interesse. Os momentos estão kNm/m.

Região A

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos Principais			Momentos	
					m1	m2	$\alpha$ (rad)	mx	my
A	Máx M11	545,26	28,20	- 94,89	562,13	11,33	0,18	640,16	123,09
A	Mín M11	248,32	11,41	- 180,55	345,80	- 86,07	0,50	428,86	191,96

mx								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,098	0,154	0,938	1.337,78	8,25	30,77	20	10,00
Mín M11	0,066	0,101	0,960	876,34	8,25	20,16	16	10,00

my								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,019	0,028	0,989	244,11	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,030	0,044	0,982	383,16	8,25	8,81	12,5	12,50

Tabela 5.1 – Região A – Método de Leonhardt

Região B

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos Principais			Momentos	
					m1	m2	$\alpha$ (rad)	mx	my
B	Máx M11	273,61	345,09	- 117,15	431,83	186,86	0,64	390,76	462,24
B	Mín M11	135,50	179,37	- 168,57	327,42	- 12,55	0,72	304,07	347,94

mx								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,042	0,063	0,975	657,25	9,75	15,12	16	12,50
Mín M11	0,033	0,049	0,980	508,45	9,75	11,69	12,5	10,00

my								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,050	0,075	0,970	781,31	9,75	17,97	16	10,00
Mín M11	0,037	0,056	0,977	583,52	9,75	13,42	16	15,00

Tabela 5.2 – Região B – Método de Leonhardt

Região C

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos Principais			Momentos	
					m1	m2	$\alpha$ (rad)	mx	my
C	Máx M11	545,26	37,12	- 193,38	610,48	- 28,10	0,33	738,64	230,50
C	Mín M11	272,98	16,53	- 341,70	509,73	- 220,21	0,61	614,69	358,23

mx								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,114	0,180	0,928	1.560,69	8,25	35,90	25	12,50
Mín M11	0,095	0,148	0,941	1.280,97	8,25	29,46	20	10,00

my								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,035	0,053	0,979	461,79	8,25	10,62	12,5	10,00
Mín M11	0,055	0,084	0,966	726,78	8,25	16,72	16	10,00

Tabela 5.3 – Região C – Método de Leonhardt

Região D

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos Principais			Momentos	
					m1	m2	$\alpha$ (rad)	mx	my
D	Máx M11	311,29	270,97	- 161,65	454,03	128,23	0,72	472,94	432,61
D	Mín M11	169,34	129,83	- 270,75	421,05	- 121,88	0,75	440,08	400,58

mx								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,060	0,092	0,963	876,84	9,00	20,17	20	15,00
Mín M11	0,056	0,085	0,966	813,68	9,00	18,71	20	15,00

my								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,055	0,084	0,966	799,37	9,00	18,39	16	10,00
Mín M11	0,051	0,078	0,969	738,21	9,00	16,98	16	10,00

Tabela 5.4 – Região D – Método de Leonhardt

Região E

Momentos positivos

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos Principais			Momentos	
					m1	m2	$\alpha$ (rad)	mx	my
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25	433,95	- 156,57	0,38	129,72	556,15
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60	397,26	- 521,94	0,52	107,47	565,07

mx								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,020	0,030	0,988	257,41	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,017	0,025	0,990	212,81	8,25	8,25	12,5	12,50

my								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,086	0,133	0,947	1.151,69	8,25	26,49	20	10,00
Mín M11	0,087	0,135	0,946	1.171,26	8,25	26,94	20	10,00

Tabela 5.5 – Região E – Método de Leonhardt

Região E	Momentos negativos
----------	--------------------

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos Principais			Momentos	
					m1	m2	$\alpha$ (rad)	mx	my
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25	- 156,57	433,95	0,38	- 278,78	-
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60	- 521,94	397,26	0,52	- 689,74	- 232,14

mx								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,043	0,065	0,974	561,15	8,25	12,91	12,5	10,00
Mín M11	0,106	0,167	0,933	1.449,35	8,25	33,34	20	7,50

my								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	As <sub>min</sub> (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	-	-	1,000	-	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,036	0,054	0,979	465,17	8,25	10,70	16	17,50

Tabela 5.6 – Região E – Método de Leonhardt

Segue a seguir a figura resumo das armaduras:

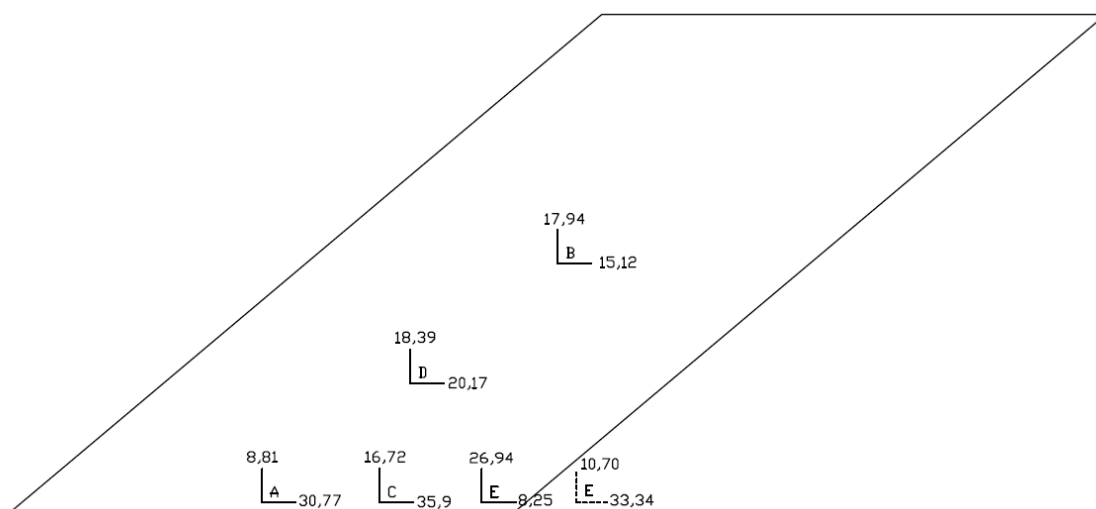


Figura 5.7 – Resumo Armaduras ( cm<sup>2</sup>/m) - Leonhardt

### 5.3. Método de Wood & Armer

#### 5.3.1. Introdução

É um método que consiste em dimensionar uma laje baseada no critério de Johansen, ou critério das linhas de plastificação.

Na realidade, o método de Wood é a particularização do método de Armer, sendo o primeiro desenvolvido apenas para armaduras com direções ortogonais entre si e o segundo é generalizado para armaduras com direções oblíquas.

Nos parágrafos seguintes segue um breve desenvolvimento do método e segue também o dimensionamento para laje do projeto em questão.

#### 5.3.2. Critério de escoamento

Foi desenvolvido por Johansen e consiste em definir a resistência de uma laje submetida aos esforços de flexão gerados por um campo geral de momentos, como se podem observar nas figuras a seguir:

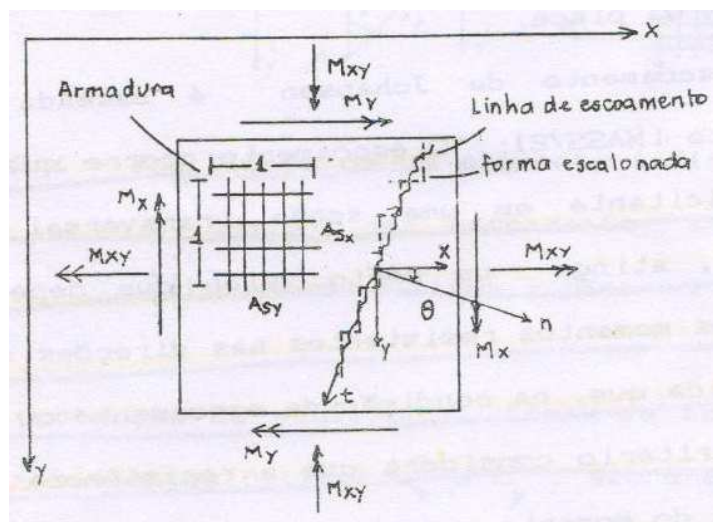


Figura 5.8 – Solicitações [5]

O desenvolvimento do critério foi elaborado a partir de armaduras ortogonais, entretanto, o critério aqui desenvolvido será generalizado, ou seja, atendendo o caso de armaduras esconsas.

As premissas de cálculo levam em consideração a não influência dos esforços de membrana e nem dos esforços cisalhantes no colapso da laje. Também se assume que

existe uma quantidade mínima de armadura que garanta o não esmagamento do concreto antes do escoamento do aço. Adota-se um ângulo  $\beta$  entre as armaduras e um ângulo  $\theta$  formado entre a direção normal à linha de ruptura e a direção x paralelas a uma das armaduras, eixo onde o momento solicitante atua.

Chama-se de momento resistente normal último o momento que atua na direção da linha de escoamento (charneira plástica) e pode ser encontrado por equilíbrio, que pode ser feito através da figura a seguir.

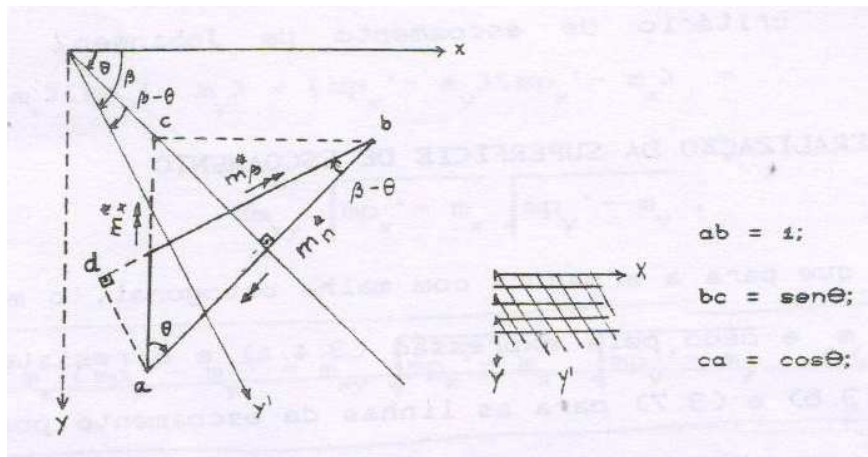


Figura 5.9 – Equilíbrio – armadura esconsa [5]

Notação:

$m^*$  = momento resistente (geral);

$m'$  = momento resistente positivo;

$m''$  = momento resistente negativo;

$m$  = momento solicitante.

Considerando a direção x:

$$m_n^* \cdot \overline{ab} = m_x^* \cdot \overline{ca} \cdot \cos \theta \quad (5.16)$$

Da geometria:

$$m_n^* = m_x^* \cdot \cos^2 \theta$$

Considerando a direção  $y'$ :

$$m_n^* \cdot \overline{ab} = m_\beta^* \cdot \overline{bd} \cdot \cos(\beta - \theta) \quad (5.17)$$

Da geometria:

$$m_n^* = m_\beta^* \cdot \cos^2(\beta - \theta)$$

Através da sobreposição das resistências:

$$m_n^* = m_x^* \cdot \cos^2 \theta + m_\beta^* \cdot \cos^2(\beta - \theta) \quad (5.18)$$

Chegam-se as equações dos momentos solicitantes também através do equilíbrio:

$$m_n = m_x \cdot \cos^2 \theta + m_y \cdot \sin^2 \theta - m_{xy} \cdot \sin 2\theta \quad (5.19)$$

Quando o momento solicitante ( $m_n$ ) atinge o valor do momento resistente ( $m_n^*$ ), tem-se a condição de escoamento:

$$m_n = m_n^* \quad (5.20)$$

Então, o critério de escoamento de Johansen pode ser definido como:

$$m_n^* - m_n \geq 0 \quad (5.21)$$

Para casos de lajes com armaduras positivas e negativas, basta analisar os casos separadamente. A equação acima pode ser reescrita da seguinte forma:

$$mp_n'' \leq m_n \leq mp_n' \quad (5.22)$$

Onde  $mp_n'$  representa o momento resistente para armadura positiva (bordo inferior) e  $mp_n''$  representa o momento resistente para armadura negativa (bordo superior).



### 5.3.2.1. Análise da superfície de escoamento

#### 1- Armadura Positiva

Temos:

$$m_n \leq mp'_n \quad (5.23)$$

$$m_x \cdot \cos^2 \theta + m_y \cdot \sin^2 \theta - m_{xy} \cdot \sin 2\theta \leq mp'_x \cdot \cos^2 \theta + mp'_\beta \cdot \cos^2 (\beta - \theta)$$

Fazendo alguns arranjos e usando cálculos trigonométricos:

$$f(\theta) = \frac{mp'_x - m_x + mp'_\beta \cos^2 \beta}{\tan \theta} + (mp'_\beta \cdot \sin^2 \beta - m_y) \cdot \tan \theta + 2 \cdot (mp'_\beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + m_{xy}) \geq 0$$

Função que estabelece o critério de resistência para armadura esconsa. Para se chegar a um mínimo de resistência, basta derivar e igualar a 0 a expressão anterior. Então se pode chegar ao ângulo que favorece a formação de charneira plástica:

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{mp'_x + mp'_\beta \cos^2 \beta - m_x}{mp'_\beta \cdot \sin^2 \beta - m_y}}$$

Substituindo a equação acima na função do critério de resistência e igualando a 0, em que não há excesso de resistência, temos a equação da superfície de colapso para a armadura positiva, definida para a linha de escoamento positiva:

$$(mp'_x + mp'_\beta \cdot \cos^2 \beta - m_x) \cdot (mp'_\beta \cdot \sin^2 \beta - m_y) = (mp'_\beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + m_{xy})^2 \quad (5.24)$$

#### 2- Armadura negativa

Temos:

$$mp''_n \leq m_n \quad (5.25)$$

Repetindo o processo realizado para a armadura positiva, temos a equação da superfície de colapso para a armadura negativa, definida para a linha de escoamento negativa:

$$(mp''_x + mp''_\beta \cdot \cos^2 \beta - m_x) \cdot (mp''_\beta \cdot \sin^2 \beta - m_y) = (mp''_\beta \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta + m_{xy})^2 \quad (5.26)$$

### 5.3.3. O Método

No presente trabalho serão desenvolvidas as equações de Armer, pois o método de Wood é a sua particularização, ou seja,  $\beta=90^\circ$ .

O método consiste em determinar a quantidade de armadura mínima que resulte em um momento resistente maior que o momento solicitante em uma seção qualquer e com direção arbitrária. Para isso, faz-se a minimização da diferença entre as componentes normais dos momentos resistentes  $(m_n^*)$  e dos momentos solicitantes  $(m_n)$ . As equações do método fornecem os momentos resistentes últimos nas direções da armadura, podendo assim ser dimensionadas como flexão simples.

#### 5.3.3.1. Armadura Positiva

$$m_n^* - m_n \geq 0 \quad (5.27)$$

$$mp'_x \cdot \cos^2 \theta + mp'_\beta \cdot \cos^2 (\beta - \theta) - (m_x \cdot \cos^2 \theta + m_y \cdot \sin^2 \theta - m_{xy} \cdot \sin 2\theta) \geq 0$$

Fazendo alguns arranjos, usando cálculos trigonométricos e definindo  $k = \tan \theta$ :

$$f(k) = mp'_x - m_x + mp'_\beta + (\cos^2 \beta + 2 \cdot \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot k + \sin^2 \beta \cdot k^2) - m_y \cdot k^2 + 2 \cdot m_{xy} \cdot k \geq 0 \quad (5.28)$$

Como o método consiste em minimizar o excesso de momento normal resistente, então:

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 f(k)}{\partial k^2} > 0$$

Resolvendo a derivada primeira, tem-se o momento de dimensionamento na direção  $y'$ :

$$mp'_\beta = \frac{1}{\sin^2 \beta} \left( \frac{m_y k - m_{xy}}{\cot \beta + k} \right) \quad (5.30)$$

Substituindo o momento  $mp'_\beta$  em  $f(k)$ :

$$f(k) = mp'_x - m_x + (m_y \cdot k - m_{xy}) \cdot (\cot \beta + k) - m_y \cdot k^2 + 2 \cdot m_{xy} \cdot k \geq 0$$

Logo, o mínimo em  $x$  é:

$$mp'_x = m_x - (m_y \cdot k - m_{xy}) \cdot \cot g\beta - m_{xy} \cdot k \geq 0 \quad (5.31)$$

Somam-se as expressões abaixo nas equações 5.30 e 5.31, respectivamente:

$$m_{xy} \cdot \cot g\beta - m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta - m_y \cdot \cot g^2\beta;$$

$$m_y \cdot \cot g\beta - m_y \cdot \cot g\beta.$$

Têm-se as equações modificadas dos momentos resistentes:

$$mp'_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta - (\cot g\beta + k) \cdot (m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta) \quad (5.32)$$

$$mp'_\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \left( m_y - \frac{m_{xy} + m_y \cot g\beta}{\cot g\beta + k} \right) \quad (5.33)$$

Aplica-se a derivada segunda em  $f(k)$ :

$$mp'_\beta \geq \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot m_y$$

Então:

$$\frac{m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta}{\cot g\beta + k} \leq 0$$

Para satisfazer a equação acima, os valores do numerador e do denominador devem possuir sinais contrários. As equações dos momentos resistentes podem ser reescritas:

$$mp'_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta + K \cdot |m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta| \quad (5.34)$$

$$mp'_\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \left( m_y + \frac{|m_{xy} + m_y \cot g\beta|}{K} \right) \quad (5.35)$$

Onde:

$$K = |\cot g\beta + k|$$

é uma constante arbitrária e positiva.

Pode-se considerar que os braços de alavanca nas duas direções sejam iguais. Então a armadura total será aproximadamente a soma de  $mp'_x$  e  $mp'_\beta$ . Então, tornando mínima essa soma, com o intuito de chegar a armadura mais econômica:

$$\frac{\partial}{\partial K} \left( m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta + K \cdot |m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta| + \frac{1}{\sin^2\beta} \left( m_y + \frac{|m_{xy} + m_y \cot g\beta|}{K} \right) \right) = 0$$

$$K = \frac{1}{|\sin\beta|}$$

Finalmente, substituindo o valor de  $K$  nos momentos resistentes, chega-se aos valores que conduzirão a armaduras mínimas:

$$mp'_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta + \left| \frac{m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta}{\sin\beta} \right| \quad (5.36)$$

$$mp'_\beta = \frac{m_y}{\sin^2\beta} + \left| \frac{m_{xy} + m_y \cot g\beta}{\sin\beta} \right| \quad (5.37)$$

Tendo em vista que o critério de escoamento de Johansen não leva em consideração que os momentos resistentes tenham sinais contrários (negativo para armadura positiva e positivo para armadura negativa), pode-se em alguns casos de dimensionamento encontrar momentos com sinais contraditórios. Então:

Se  $mp'_x < 0$ , adotar:

$$mp'_x = 0$$

$$mp'_\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot \left[ m_y + \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cot g\beta)^2}{m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta} \right| \right] \quad (5.38)$$

Se  $mp'_\beta < 0$ , adotar:

$$mp'_\beta = 0$$

$$mp'_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta + \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta)^2}{m_y} \right| \quad (5.39)$$

Ou seja, se ambos os momentos resistentes assumirem valores negativos não há necessidade de armadura positiva.

### 5.3.3.2. Armadura negativa

Para se chegar aos momentos resistente para esse caso, basta repetir o procedimento de forma análoga:

$$mp_x'' = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2 \beta - \left| \frac{m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta}{\operatorname{sen}\beta} \right| \quad (5.40)$$

$$mp_\beta'' = \frac{m_y}{\operatorname{sen}^2 \beta} - \left| \frac{m_{xy} + m_y \cot g\beta}{\operatorname{sen}\beta} \right| \quad (5.41)$$

Se  $mp_x'' > 0$ , adotar:

$$mp_x'' = 0$$

$$mp_\beta'' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \cdot \left[ m_y - \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cot g\beta)^2}{m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2 \beta} \right| \right] \quad (5.42)$$

Se  $mp_\beta'' > 0$ , adotar:

$$mp_\beta'' = 0$$

$$mp_x'' = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2 \beta - \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta)^2}{m_y} \right| \quad (5.43)$$

Ou seja, se ambos os momentos resistentes assumirem valores positivos não há necessidade de armadura negativa.

### 5.3.4. Resumo

#### 1 - Momentos resistentes positivos

$$mp'_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta + \left| \frac{m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta}{\operatorname{sen}\beta} \right|$$

$$mp'_\beta = \frac{m_y}{\operatorname{sen}^2\beta} + \left| \frac{m_{xy} + m_y \cot g\beta}{\operatorname{sen}\beta} \right|$$

Se  $mp'_x < 0$ , adotar:

$$mp'_x = 0$$

$$mp'_\beta = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} \cdot \left[ m_y + \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cot g\beta)^2}{m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta} \right| \right]$$

Se  $mp'_\beta < 0$ , adotar:

$$mp'_\beta = 0$$

$$mp'_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta + \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta)^2}{m_y} \right|$$

Se  $mp'_x = 0$  e  $mp'_\beta < 0$ , não há necessidade de armadura positiva.

#### 2 - Momentos resistentes negativos

$$mp''_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta - \left| \frac{m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta}{\operatorname{sen}\beta} \right|$$

$$mp''_\beta = \frac{m_y}{\operatorname{sen}^2\beta} - \left| \frac{m_{xy} + m_y \cot g\beta}{\operatorname{sen}\beta} \right|$$

Se  $mp''_x > 0$ , adotar:

$$mp''_x = 0$$

$$mp''_\beta = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\beta} \cdot \left[ m_y - \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cot g\beta)^2}{m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot g^2\beta} \right| \right]$$

Se  $mp''_{\beta} > 0$ , adotar:

$$mp''_{\beta} = 0$$

$$mp''_x = m_x + 2 \cdot m_{xy} \cdot \cot g\beta + m_y \cdot \cot^2 g\beta - \left| \frac{(m_{xy} + m_y \cdot \cot g\beta)^2}{m_y} \right|$$

Se  $mp''_x > 0$  e  $mp''_{\beta} > 0$ , não há necessidade de armadura negativa.

### 5.3.5. Dimensionamento da laje do projeto utilizando Wood & Armer

Para fins comparativos, a laje será resolvida utilizando o método desenvolvido acima utilizando dois ângulos entre as armaduras.

#### 5.3.5.1. Armaduras ortogonais entre si ( $\beta=90^\circ$ )

Pode se observar na figura abaixo a direção das armaduras.

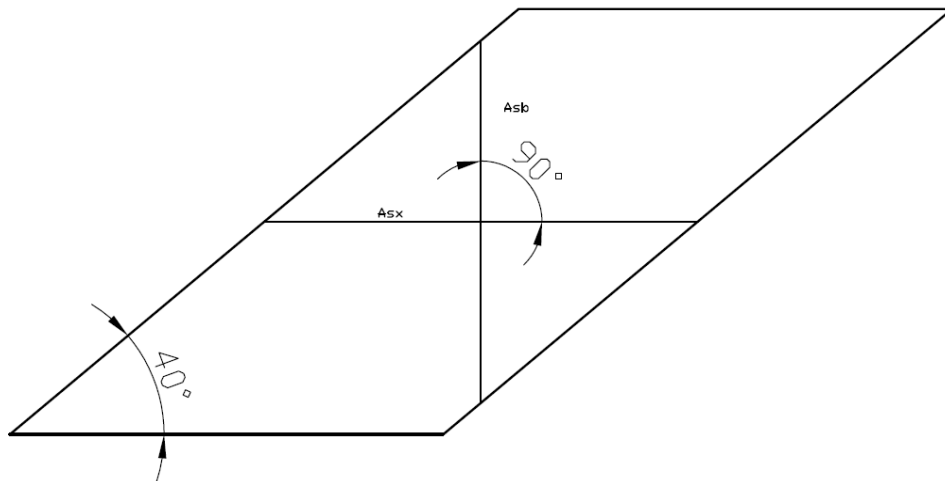


Figura 5.10 – Direção Armaduras – Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$

A seguir serão apresentadas tabelas de dimensionamento para as diversas regiões de interesse. Os momentos estão kNm/m.

Região A

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
A	Máx M11	545,26	28,20	- 94,89	640,16	123,09
A	Mín M11	248,32	11,41	- 180,55	428,86	191,96

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,098	0,154	0,938	1.337,78	8,25	30,77	20	10,00
Mín M11	0,066	0,101	0,960	876,34	8,25	20,16	16	10,00

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,019	0,028	0,989	244,11	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,030	0,044	0,982	383,16	8,25	8,81	12,5	12,50

Tabela 5.7 – Região A – Método de Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$

Região B

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
B	Máx M11	273,61	345,09	- 117,15	390,76	462,24
B	Mín M11	135,50	179,37	- 168,57	304,07	347,94

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,042	0,063	0,975	657,25	9,75	15,12	16	12,50
Mín M11	0,033	0,049	0,980	508,45	9,75	11,69	12,5	10,00

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,050	0,075	0,970	781,31	9,75	17,97	16	10,00
Mín M11	0,037	0,056	0,977	583,52	9,75	13,42	16	15,00

Tabela 5.8 – Região B – Método de Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$



Região C

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
C	Máx M11	545,26	37,12	- 193,38	738,64	230,50
C	Mín M11	272,98	16,53	- 341,70	614,69	358,23

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,114	0,180	0,928	1.560,69	8,25	35,90	25	12,50
Mín M11	0,095	0,148	0,941	1.280,97	8,25	29,46	20	10,00

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,035	0,053	0,979	461,79	8,25	10,62	12,5	10,00
Mín M11	0,055	0,084	0,966	726,78	8,25	16,72	16	10,00

Tabela 5.9 – Região C – Método de Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$

Região D

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
D	Máx M11	311,29	270,97	- 161,65	472,94	432,61
D	Mín M11	169,34	129,83	- 270,75	440,08	400,58

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,060	0,092	0,963	876,84	9,00	20,17	20	15,00
Mín M11	0,056	0,085	0,966	813,68	9,00	18,71	20	15,00

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,055	0,084	0,966	799,37	9,00	18,39	16	10,00
Mín M11	0,051	0,078	0,969	738,21	9,00	16,98	16	10,00

Tabela 5.10 – Região D – Método de Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$

Região E	Momentos positivos
----------	--------------------

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25	129,72	556,15
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60	107,47	565,07

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,020	0,030	0,988	257,41	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,017	0,025	0,990	212,81	8,25	8,25	12,5	12,50

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,086	0,133	0,947	1.151,69	8,25	26,49	20	10,00
Mín M11	0,087	0,135	0,946	1.171,26	8,25	26,94	20	10,00

Tabela 5.11 – Região E – Método de Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$

Região E	Momentos negativos
----------	--------------------

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp''_x$	$mp''_\beta$
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25	- 193,08	-
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60	- 689,74	- 232,14

$mp''_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,030	0,044	0,982	385,43	8,25	8,86	12,5	12,50
Mín M11	0,106	0,167	0,933	1.449,35	8,25	33,34	20	7,50

$mp''_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	-	-	1,000	-	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,036	0,054	0,979	465,17	8,25	10,70	16	17,50

Tabela 5.12 – Região E – Método de Wood & Armer -  $\beta=90^\circ$

Segue a seguir a figura resumo das armaduras:

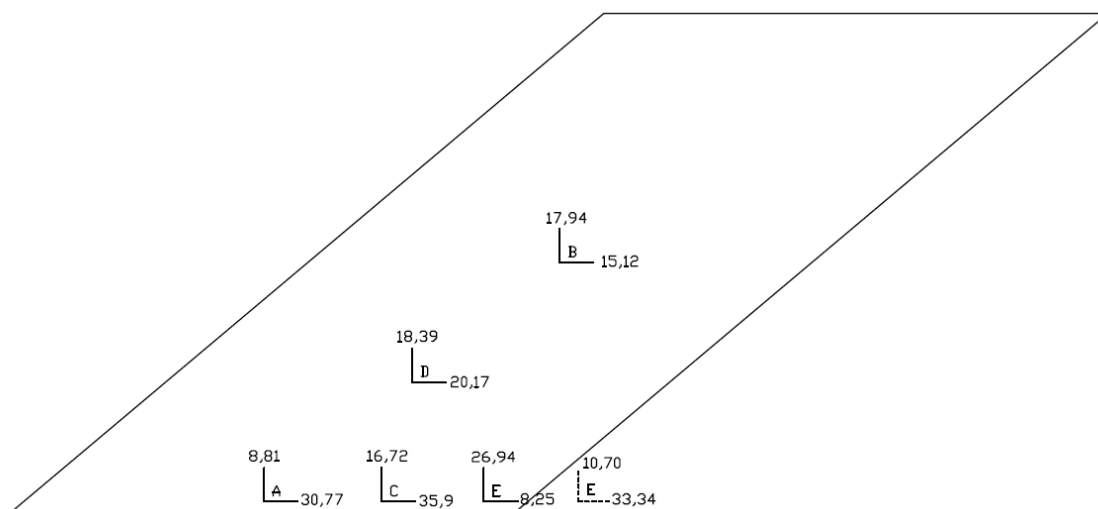


Figura 5.10 – Resumo Armaduras ( cm<sup>2</sup>/m) – Wood & Armer – ( 90 °)

### 5.3.5.2. Armaduras obliquas entre si ( $\beta=40^\circ$ )

Pode se observar na figura abaixo a direção das armaduras.

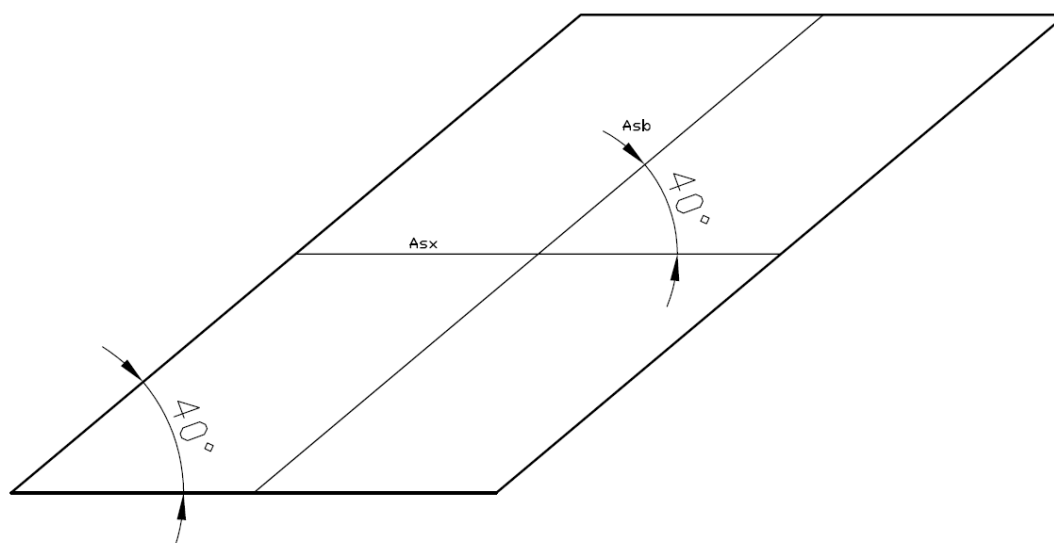


Figura 5.11 – Direção Armaduras – Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

A seguir serão apresentadas tabelas de dimensionamento para as diversas regiões de interesse. Os momentos estão kNm/m.

#### Região A

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
A	Máx M11	545,26	28,20	- 94,89	454,48	163,60
A	Mín M11	248,32	11,41	- 180,55	93,91	287,34

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,070	0,107	0,957	931,14	8,25	21,42	20	12,50
Mín M11	0,014	0,021	0,991	185,74	8,25	8,25	12,5	12,50

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,025	0,038	0,985	325,67	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	0,044	0,067	0,973	578,87	8,25	13,31	16	15,00

Tabela 5.13 – Região A – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

Região B

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
B	Máx M11	273,61	345,09	- 117,15	942,04	1.292,75
B	Mín M11	135,50	179,37	- 168,57	58,79	504,43

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,101	0,159	0,936	1.649,25	9,75	37,93	25	12,50
Mín M11	0,006	0,009	0,996	96,73	9,75	9,75	12,5	12,50

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,139	0,225	0,910	2.328,38	9,75	53,55	25	7,50
Mín M11	0,054	0,082	0,967	855,15	9,75	19,67	16	10,00

Tabela 5.14 – Região B – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

Região C

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
C	Máx M11	545,26	37,12	- 193,38	369,09	321,86
C	Mín M11	272,98	16,53	- 341,70	-	524,47

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,057	0,086	0,965	749,63	8,25	17,24	20	17,50
Mín M11	-	-	1,000	-	8,25	8,25	12,5	12,50

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,049	0,075	0,970	650,62	8,25	14,96	16	12,50
Mín M11	0,081	0,125	0,950	1.082,43	8,25	24,90	20	12,50

Tabela 5.15 – Região C – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

Região D

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
D	Máx M11	311,29	270,97	- 161,65	561,77	906,73
D	Mín M11	169,34	129,83	- 270,75	-	425,95

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,072	0,110	0,956	1.049,43	9,00	24,14	20	12,50
Mín M11	-	-	1,000	-	9,00	9,00	12,5	12,50

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,116	0,184	0,927	1.747,46	9,00	40,19	25	10,00
Mín M11	0,054	0,083	0,967	786,63	9,00	18,09	16	10,00

Tabela 5.16 – Região D – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

Região E Momentos positivos

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp'_x$	$mp'_\beta$
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25	273,13	1.186,39
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60	-	499,45

$mp'_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,042	0,063	0,975	549,48	8,25	12,64	16	15,00
Mín M11	-	-	1,000	-	8,25	8,25	12,5	12,50

$mp'_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	As (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,182	0,306	0,878	2.650,33	8,25	60,96	25	7,50
Mín M11	0,077	0,119	0,953	1.028,07	8,25	23,65	20	12,50

Tabela 5.17 – Região E – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

Região E	Momentos negativos
----------	--------------------

Região	Solicitação	M11	M22	M12	Momentos resistentes	
					$mp''_x$	$mp''_\beta$
E	Máx M11	- 74,53	351,90	- 204,25	193,08	-
E	Mín M11	- 291,14	166,46	- 398,60	1.245,63	-

$mp''_x$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	0,030	0,044	0,982	385,43	8,25	8,86	12,5	12,50
Mín M11	0,192	0,324	0,871	2.805,55	8,25	64,53	25	7,50

$mp''_\beta$								
Solicitação	kmd	kx	kz	Rsd (kN)	$As_{min}$ (cm <sup>2</sup> /m)	$As$ (cm <sup>2</sup> /m)	Bitola (mm)	Esp( cm)
Máx M11	-	-	1,000	-	8,25	8,25	12,5	12,50
Mín M11	-	-	1,000	-	8,25	8,25	12,5	12,50

Tabela 5.18 – Região E – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$

Segue a seguir a figura resumo das armaduras:

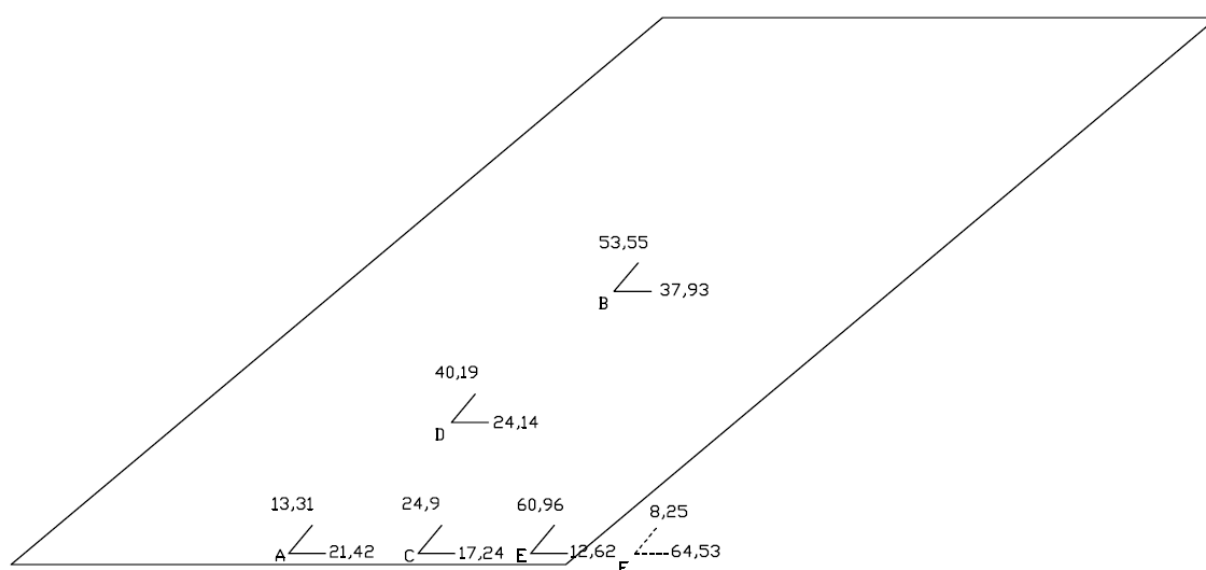


Figura 5.12 – Resumo Armaduras ( cm<sup>2</sup>/m) – Wood & Armer – ( 40 °)

#### 5.4. Resumo das armaduras

(cm <sup>2</sup> /m)	Leonhardt		W & A (90°)		W & A (40°)	
Região	As <sub>x</sub>	As <sub>y</sub>	As <sub>x</sub>	As <sub>y</sub>	As <sub>x</sub>	As <sub>B</sub>
A	30,77	8,81	30,77	8,81	21,42	13,31
B	15,12	17,94	15,12	17,94	37,93	53,55
C	35,90	16,72	35,90	16,72	17,24	24,90
D	20,17	18,39	20,17	18,39	24,14	40,19
E+	9,25	26,94	9,25	26,94	12,62	60,96
E-	33,34	10,70	33,34	10,70	64,53	8,25

Tabela 5.19 – Região E – Método de Wood & Armer -  $\beta=40^\circ$



## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1. Conclusão e comparação entre os métodos

O objetivo do trabalho foi alcançado. No seu decorrer puderam-se observar as particularidades de uma laje esconsa. A análise realizada no SAP 2000 mostrou de forma clara as mudanças sofridas pelas direções principais devido ao efeito da esconsidade. Como já exposto anteriormente, o dimensionamento segundo essas direções é impraticável.

No capítulo cinco foram apresentadas duas soluções para o problema descrito acima. O dimensionamento da laje através do Método de Leonhardt sugeriu armar a laje utilizando armaduras formando um ângulo de  $90^\circ$  (figura 5.6), o que não é interessante do ponto de vista construtivo, pois acarreta barras com comprimentos diferentes na direção y. Já o Método de Wood & Armer proporcionou maior facilidade construtiva. O método permitiu dispor as armaduras paralelas aos bordos das lajes (figura 5.11), acarretando armaduras de mesmo comprimento nas duas direções.

Para fins comparativos, foi utilizado no método de Wood & Armer o ângulo de  $90^\circ$  entre as armaduras. O resultado encontrado para este caso particular é exatamente o mesmo encontrado no método de Leonhardt, ou seja, para o ângulo de  $90^\circ$  entre as armaduras (Wood), eles se equivalem. Isso é verdade, pois o método de Wood admite inicialmente um equilíbrio entre os momentos solicitantes e resistentes segundo um plano crítico qualquer (aproximação numérica) e o método de Leonhardt é deduzido através de um equilíbrio de momentos solicitantes e resistentes segundo uma direção fissurada (aproximação física), ocasionando em resultados idênticos.

Poderia ter sido feito o dimensionamento para armaduras perpendiculares e paralelas aos bordos apoiados, o que resultaria em uma malha menos densa, pois em algumas regiões da laje a armadura estaria na direção dos momentos principais (figura 4.2).

O tema abordado permitiu o entendimento das particularidades de uma ponte com laje esconsa e do dimensionamento à flexão considerando o efeito da torção em laje.

## **6.2. Sugestão para futuros trabalhos**

Sugere-se também estudar formas de se combater aos elevados momentos negativos na região dos ângulos obtusos, tais como adotar de aparelhos de apoio mais espaçados ou adotar de articulação esférica em um dos cantos obtusos [8].

As dimensões da ponte do projeto acarretaram elevadas taxas de armaduras em determinados trechos. A utilização de concreto protendido pode ser uma alternativa para combater os elevados momentos, e assim estudar o efeito da protensão em uma laje esconsa.

Seria interessante comparar resultados para duas lajes com dimensões semelhantes, porém com ângulos de esconsidade distintos (sugestão: 40° e 70°), além de mudar a condição de apoio para engaste.

## **7. Bibliografia**

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR 6118 - PROJETO DE ESTRUTURAS DE CONCRETO – Procedimento, Rio de Janeiro, 2003.
- [2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR 7188 – CARGA MÓVEL EM PONTE RODOVIÁRIA E PASSARELA – Procedimento, Rio de Janeiro, 1982.
- [3] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR 7187 – PROJETOS DE PONTES DE CONCRETO E PROTENDIDO – Procedimento, Rio de Janeiro, 2003.
- [4] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR 8681 – AÇÕES E SEGURANÇA NAS ESTRUTURAS – Procedimento, Rio de Janeiro, 2003.
- [5] BENEVIDES, MARIA CRISTINA CORRÊA DE SÁ, DIMENSIONAMENTO ÓTIMO EM PONTOS DE LAJES DE CONCRETO ARMADO, Rio de Janeiro, 1991 .
- [6] LEONHARDT, FRITZ; MÖNNIG, EDUARD, Construções de Concreto, volume 1, 1978.
- [7] LEONHARDT, FRITZ; MÖNNIG, EDUARD, Construções de Concreto, volume 2, 1978
- [8] LEONHARDT, FRITZ, Construções de Concreto, volume 6, 1978
- [9] PARSEKIAN, GUILHERME ARIS; CORRÊA, MÁRCIO ROBERTO SILVA, CÁLCULO E ARMAÇÃO DE LAJES DE CONCRETO ARMADO COM CONSIDERAÇÃO DO MOMENTO VOLVENTE, SÃO CARLOS, 1998.
- [10] SANTOS, SÉRGIO HAMPSHIRE DE CARVALHO, Apostila de concreto armado I, 2007.