



Universidade Federal  
do Rio de Janeiro  
Escola Politécnica

## AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SOB SOLICITAÇÕES NORMAIS COM BASE NA TEORIA DA CONFIABILIDADE

Rodrigo Martins De Franco

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos  
Luiz Eloy Vaz

Rio de Janeiro  
Setembro de 2010



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**  
**ESCOLA POLITÉCNICA**  
**Curso de Engenharia Civil**  
**Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas**

**AVALIAÇÃO DA SEGURANÇA EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO SOB SOLICITAÇÕES NORMAIS COM BASE NA TEORIA DA CONFIABILIDADE**

**RODRIGO MARTINS DE FRANCO**

Projeto de Graduação apresentado ao corpo docente do Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovado por:

---

Sergio Hampshire de Carvalho Santos  
Prof. Associado, D.Sc., EP/UFRJ  
(Orientador)

---

Luiz Eloy Vaz  
Prof. Titular, Dr. - Ing., EP/UFRJ  
(Co-orientador)

---

Cláudia Ribeiro Eboli  
Prof.<sup>a</sup> Associada, D.Sc., EP/UFRJ

Setembro/2010

## **AGRADECIMENTOS**

---

Aos meus pais, Maria Lucia e Mario, e à minha irmã Mariana, por todo o apoio e ajuda financeira, e por palavras de incentivo nos momentos difíceis. Vocês são o meu exemplo e a base da minha vida.

À minha namorada, Flávia, pela companhia única e pela paciência nos momentos de ausência para a realização deste projeto.

Ao professor Sergio Hampshire pela competência com que orientou este trabalho e o tempo que generosamente dedicou transmitindo-me os melhores e mais úteis ensinamentos, com paciência, lucidez e confiança.

Ao professor Luiz Eloy Vaz, que juntamente esteve orientando-me transmitindo seus ensinamentos para que eu realizasse este projeto final.

Aos amigos de graduação, pela convivência agradável, companheirismo e descontração que ajudaram a tornar esse caminho mais prazeroso.

À toda “família Noronha Engenharia S.A” pelo incentivo, paciência, companheirismo e aprendizado.

## **RESUMO**

---

A análise de confiabilidade é uma ferramenta que permite determinar a probabilidade de uma estrutura não atender aos requisitos para os quais foi concebida, durante sua vida útil, considerando a aleatoriedade das variáveis contidas em seu projeto.

Este trabalho consiste em avaliar a confiabilidade estrutural em seções de concreto armado através do método FORM, utilizando o programa Vap 1.6[13].

Os resultados obtidos para o índice de confiabilidade das estruturas em questão são comparados com o valor indicado por normas internacionais. Com base neles, são apresentadas, ao final deste trabalho, diversas conclusões e sugestões que podem contribuir para melhor calibração dos coeficientes de ponderação contidos nas normas brasileiras e atentar para as diversas finalidades e recursos desta ferramenta.

## SUMÁRIO

---

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Considerações Gerais.....</b>	<b>1</b>
<b>1.2. Objetivos e Justificativas .....</b>	<b>2</b>
<b>1.3. Escopo do Trabalho .....</b>	<b>2</b>
<b>2. MÉTODOS DE PROJETO.....</b>	<b>3</b>
<b>2.1. Método de Projeto Semi-Probabilístico .....</b>	<b>3</b>
<b>2.2. Método de Projeto Probabilístico .....</b>	<b>4</b>
<b>3. BASES PARA CÁLCULO.....</b>	<b>5</b>
<b>3.1. Estados Limites .....</b>	<b>5</b>
<b>3.1.1. Estados Limites Últimos.....</b>	<b>5</b>
<b>3.1.2. Estados Limites de Serviço.....</b>	<b>6</b>
<b>3.2. Ações.....</b>	<b>6</b>
<b>3.2.1. Classificação .....</b>	<b>6</b>
<b>3.2.2. Valores das ações.....</b>	<b>7</b>
<b>3.2.2.1. Valores característicos .....</b>	<b>7</b>
<b>3.2.2.2. Valores representativos.....</b>	<b>8</b>
<b>3.2.2.3. Valores de cálculo.....</b>	<b>8</b>
<b>3.2.2.4. Ponderação das ações no estado limite último (ELU) .....</b>	<b>8</b>
<b>3.3. Tipos de Carregamento .....</b>	<b>9</b>
<b>3.3.1. Carregamento Normal .....</b>	<b>10</b>
<b>3.3.2. Carregamento Especial .....</b>	<b>10</b>
<b>3.3.3. Carregamento Excepcional .....</b>	<b>10</b>
<b>3.3.4. Carregamento de Construção.....</b>	<b>11</b>
<b>3.4. Estádios de comportamento à flexão .....</b>	<b>11</b>
<b>3.4.1. Estádio I .....</b>	<b>13</b>
<b>3.4.2. Estádio Ia .....</b>	<b>13</b>
<b>3.4.3. Estádio II.....</b>	<b>13</b>
<b>3.4.4. Estádio III .....</b>	<b>14</b>
<b>3.5. Hipóteses básicas no dimensionamento à flexão no ELU .....</b>	<b>14</b>
<b>3.6. Pilares.....</b>	<b>16</b>

3.6.1.	Dimensões Mínimas .....	16
3.6.2.	Cálculo Simplificado – Flexo-compressão Normal.....	17
<b>4.</b>	<b><i>CONCEITOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL</i></b> .....	<b>19</b>
<b>4.1.</b>	<b>Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidades .....</b>	<b>19</b>
4.1.1.	Principais Parâmetros de Variáveis Aleatórias.....	22
4.1.2.	Distribuições de Probabilidades .....	23
4.1.2.1.	Distribuição Normal ou Gaussiana .....	23
4.1.2.2.	Distribuição Lognormal .....	26
4.1.2.3.	Distribuições de Probabilidades de Valores Extremos .....	31
4.1.2.4.	Distribuições Teóricas de Valores Extremos Máximos e Mínimos .....	31
4.1.3.	Distribuições Normais Equivalentes.....	36
<b>4.2.</b>	<b>Definição de Probabilidade de Falha.....</b>	<b>37</b>
<b>4.3.</b>	<b>Problema Fundamental de Confiabilidade - Sistemas do Tipo R – S .....</b>	<b>39</b>
<b>4.4.</b>	<b>Métodos para Análise de Confiabilidade Estrutural .....</b>	<b>41</b>
4.4.1.	Método FORM (First Order Reliability Method) .....	41
4.4.1.1.	Transformação das Variáveis U para Variáveis Normal Padrão V .....	44
4.4.1.2.	Determinação do Ponto de Projeto .....	46
4.4.1.3.	Fator de Importância das Variáveis .....	46
4.4.2.	Simulação de Monte Carlo .....	48
4.4.2.1.	Determinação da Probabilidade de Falha .....	48
<b>4.5.</b>	<b>Projeto Baseado em Confiabilidade (“Reliability-Based Design”)</b> .....	<b>50</b>
<b>5.</b>	<b><i>ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO</i></b>	
	<b>52</b>	
<b>5.1.</b>	<b>Considerações sobre as Variáveis .....</b>	<b>52</b>
<b>5.2.</b>	<b>Estudo das vigas e das lajes no dimensionamento à flexão simples.....</b>	<b>54</b>
5.2.1.	Definição da função de falha .....	54
5.2.2.	Análise para as vigas .....	56
5.2.2.1.	Viga 15 x 50.....	56
5.2.2.2.	Viga 20 x 75.....	61
5.2.2.3.	Viga 20 x 100.....	65
5.2.2.4.	Resultados.....	70
5.2.3.	Análise para as lajes.....	73

5.2.3.1. Laje 100 x 10 .....	73
5.2.3.2. Laje 100 x 15 .....	77
5.2.3.3. Resultados.....	82
<b>5.3. Estudo dos Pilares .....</b>	<b>86</b>
5.3.1. Definição da função de falha .....	86
5.3.2. Pilar 12 x 60.....	87
5.3.3. Pilar 15 x 60.....	92
5.3.4. Pilar 20 x 60.....	98
5.3.5. Resultados.....	103
<b>6. CONCLUSÃO E SUGESTÕES.....</b>	<b>108</b>
<b>7. BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>110</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 2-1– Esquema do método dos coeficientes parciais (semi-probabilístico) .....	4
Figura 3-1– Trecho de viga, material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, solicitada à flexão pura.....	11
Figura 3-2– Diagrama M-k na seção transversal da viga de concreto armado.....	12
Figura 3-3 – Distribuição das tensões normais no concreto nos diversos estádios .....	14
Figura 3-4 – Simplificação do diagrama parábola-retângulo para o concreto.....	15
Figura 3-5 – Domínios no estado limite último de uma seção transversal .....	15
Figura 3-6 - Arranjo de armadura caracterizando o parâmetro $\alpha_s$ .....	18
Figura 4-1– Função densidade de probabilidade e distribuição cumulativa, respectivamente.....	21
Figura 4-2– Funções de densidade de probabilidade normais.....	24
Figura 4-3– Função cumulativa da distribuição normal padrão.....	25
Figura 4-4– Ilustração gráfica da probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ .....	26
Figura 4-5– (a) Função densidade e (b) cumulativa da distribuição lognormal. ....	27
Figura 4-6 – PDF dos valores extremos máximos para uma parente $N(25,5)$ .....	34
Figura 4-7 – CDF dos valores extremos máximos para uma parente $N(25,5)$ . ....	34
Figura 4-8 – PDF dos valores extremos mínimos para uma parente $N(25,5)$ . ....	35
Figura 4-9 – CDF dos valores extremos mínimos para uma parente $N(25,5)$ . ....	35
Figura 4-10 – Transformação para normal equivalente.....	37
Figura 4-11– Função de falha. ....	38
Figura 4-12 – PDF's da solicitação $f_S(x)$ e da resistência $f_R(x)$ .....	40
Figura 4-13 – Representação da superfície de falha no espaço reduzido. ....	42
Figura 4-14 – Representação gráfica do método FORM.....	44
Figura 4-15 – Representação gráfica do vetor normal unitário no ponto de projeto para o caso de duas variáveis. ....	47
Figura 4-16 – Ilustração da relação entre o estimador da probabilidade de falha e o estimador do seu desvio padrão. ....	49
Figura 5-1 – Tela do programa Vap 1.6 para entrada dos parâmetros das variáveis ...	54
Figura 5-2 – Resistências e Solicitação numa seção típica.....	55
Figura 5-3 – Tela para entrada da função de falha .....	56
Figura 5-4 – Gráfico Vigas - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	71
Figura 5-5 – Gráfico Vigas - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	71

Figura 5-6 – Gráfico Vigas - $A_{s,\text{máx}}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	72
Figura 5-7 – Gráfico Vigas - $A_{s,\text{máx}}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	72
Figura 5-8 – Gráfico Lajes - $A_{s,\text{mín}}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	83
Figura 5-9 – Gráfico Lajes - $A_{s,\text{mín}}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	83
Figura 5-10 – Gráfico Lajes - $A_{s,\text{máx}}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	84
Figura 5-11 – Gráfico Lajes - $A_{s,\text{máx}}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	84
Figura 5-12 – Fatores de importância para Viga 15 x 50, $A_{s,\text{mín}}$ .....	85
Figura 5-13 – Fatores de importância para Laje 100 x 15, $A_{s,\text{mín}}$ .....	85
Figura 5-14 – Gráfico Pilares – Caso 1 e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	105
Figura 5-15 – Gráfico Pilares – Caso 1 e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	105
Figura 5-16 – Gráfico Pilares – Caso 2 e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	106
Figura 5-17 – Gráfico Pilares – Caso 2 e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	106
Figura 5-18 – Gráfico Pilares – Caso 3 e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	107
Figura 5-19 – Gráfico Pilares – Caso 3 e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	107

## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 3-1 – Coeficiente $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$ .....	9
Tabela 3-2 – Coeficiente $\gamma_{f2}$ .....	9
Tabela 3-3 - Valores do coeficiente adicional $\gamma_n$ em função de b .....	16
Tabela 4-1– Algumas Distribuições de Probabilidades .....	29
Tabela 5-1– Resumo com as geometrias das peças .....	52
Tabela 5-2 – Resumo Viga 15x50 - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	59
Tabela 5-3 – Parâmetros de entrada.....	59
Tabela 5-4 - Resumo Viga 15x50 - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	59
Tabela 5-5 - Parâmetros de entrada .....	59
Tabela 5-6 - Resumo Viga 15x50 - $A_{s,máx}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	60
Tabela 5-7 - Parâmetros de entrada .....	60
Tabela 5-8 - Resumo Viga 15x50 - $A_{s,máx}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	60
Tabela 5-9 - Parâmetros de entrada .....	60
Tabela 5-10 – Resumo Viga 20x75 - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	63
Tabela 5-11 – Parâmetros de entrada.....	63
Tabela 5-12 – Resumo Viga 20x75 - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	64
Tabela 5-13 – Parâmetros de entrada.....	64
Tabela 5-14 – Resumo Viga 20x75 - $A_{s,máx}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	64
Tabela 5-15 – Parâmetros de entrada.....	64
Tabela 5-16 – Resumo Viga 20x75 - $A_{s,máx}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	65
Tabela 5-17 – Parâmetros de entrada.....	65
Tabela 5-18 – Resumo Viga 20x100 - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	68
Tabela 5-19 – Parâmetros de entrada.....	68
Tabela 5-20 – Resumo Viga 20x100 - $A_{s,min}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	68
Tabela 5-21 – Parâmetros de entrada.....	68
Tabela 5-22 – Resumo Viga 20x100 - $A_{s,máx}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	69
Tabela 5-23 – Parâmetros de entrada.....	69
Tabela 5-24 – Resumo Viga 20x100 - $A_{s,máx}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	69
Tabela 5-25 – Parâmetros de entrada.....	69

Tabela 5-26 – Índice de confiabilidade $\beta$ para vigas - $A_{s,\min}$ .....	70
Tabela 5-27 – Índice de confiabilidade $\beta$ para vigas - $A_{s,\max}$ .....	70
Tabela 5-28 – Resumo Laje 100x10 - $A_{s,\min}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	75
Tabela 5-29 – Parâmetros de entrada.....	75
Tabela 5-30 – Resumo Laje 100x10 - $A_{s,\min}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	76
Tabela 5-31 – Parâmetros de entrada.....	76
Tabela 5-32 – Resumo Laje 100x10 - $A_{s,\max}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	76
Tabela 5-33 – Parâmetros de entrada.....	76
Tabela 5-34 – Resumo Laje 100x10 - $A_{s,\max}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	77
Tabela 5-35 – Parâmetros de entrada.....	77
Tabela 5-36 – Resumo Laje 100x15 - $A_{s,\min}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	80
Tabela 5-37 – Parâmetros de entrada.....	80
Tabela 5-38 – Resumo Laje 100x15 - $A_{s,\min}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	80
Tabela 5-39 – Parâmetros de entrada.....	80
Tabela 5-40 – Resumo Laje 100x15 - $A_{s,\max}$ e $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	81
Tabela 5-41 – Parâmetros de entrada.....	81
Tabela 5-42 – Resumo Laje 100x15 - $A_{s,\max}$ e $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	81
Tabela 5-43 – Parâmetros de entrada.....	81
Tabela 5-44 – Índice de confiabilidade $\beta$ para lajes - $A_{s,\min}$ .....	82
Tabela 5-45 – Índice de confiabilidade $\beta$ para lajes - $A_{s,\max}$ .....	82
Tabela 5-46 – Índice de confiabilidade $\beta$ para lajes com coeficiente adicional $\gamma = 1,4$ - $A_{s,\min}$ .....	82
Tabela 5-47 – Índice de confiabilidade $\beta$ para lajes com coeficiente adicional $\gamma = 1,4$ - $A_{s,\max}$ .....	82
Tabela 5-48- Caso 1 - $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	91
Tabela 5-49- Caso 2 - $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	91
Tabela 5-50- Caso 3 - $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	91
Tabela 5-51- Caso 1 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	91
Tabela 5-52- Caso 2 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	92
Tabela 5-53- Caso 3 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	92

Tabela 5-54- Caso 1 – $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	96
Tabela 5-55- Caso 2 – $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	96
Tabela 5-56- Caso 3 – $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	97
Tabela 5-57- Caso 1 – $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	97
Tabela 5-58- Caso 2 – $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	97
Tabela 5-59- Caso 3 – $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	97
Tabela 5-60- Caso 1 – $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	102
Tabela 5-61- Caso 2 – $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	102
Tabela 5-62- Caso 3 – $f_{ck} = 25\text{MPa}$ .....	102
Tabela 5-63- Caso 1 – $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	102
Tabela 5-64- Caso 2 – $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	103
Tabela 5-65- Caso 3 – $f_{ck} = 35\text{MPa}$ .....	103
Tabela 5-66 – Índice de confiabilidade $\beta$ para Pilares – Caso 1 .....	103
Tabela 5-67 – Índice de confiabilidade $\beta$ para Pilares – Caso 2 .....	103
Tabela 5-68 – Índice de confiabilidade $\beta$ para Pilares – Caso 3 .....	104
Tabela 5-69 – Índice de confiabilidade $\beta$ para Pilares com coeficiente adicional $\gamma_n$ - Caso 1 .....	104
Tabela 5-70 – Índice de confiabilidade $\beta$ para Pilares com coeficiente adicional $\gamma_n$ - Caso 2 .....	104
Tabela 5-71 – Índice de confiabilidade $\beta$ para Pilares com coeficiente adicional $\gamma_n$ - Caso 3 .....	104

# 1. INTRODUÇÃO

## 1.1. Considerações Gerais

O projeto de uma estrutura tem por objetivo atender requisitos de segurança com economia, a fim de se projetar uma estrutura “ótima”, que possua boa durabilidade e bom desempenho em serviço.

Durante toda sua utilização, a estrutura estará sujeita a acidentes e desgastes causados por inúmeros fatores, tais como corrosões e trincas. Estes desgastes poderão causar uma falha estrutural como um todo ou em parte dela.

De uma forma geral, podemos citar que os requisitos básicos de segurança para uma estrutura são:

- Atender a todos os requisitos para os quais ela foi concebida (estado limite de serviço);
- Atender ao estado extremo de solicitação e/ou ações repetidas que ocorrerão durante sua vida útil e na fase construtiva (estado limite de ruptura).

A escolha do nível de segurança está intimamente ligada aos prejuízos e riscos de morte que uma possível falha estrutural possa acarretar. Para avaliar tal nível de segurança, um tipo de ferramenta utilizada é a Teoria da Confiabilidade.

A análise de confiabilidade se propõe, entre outros resultados, a determinar uma probabilidade de falha na qual uma estrutura está sujeita, considerando as inúmeras incertezas associadas às diversas variáveis do projeto, através das distribuições de probabilidades. As incertezas podem estar presentes nas solicitações, nas propriedades dos materiais resistentes, nos parâmetros do solo a ser considerado numa análise, e na geometria da estrutura. Todas essas possíveis incertezas fazem com que a probabilidade de falha seja sempre diferente de zero.

É válido ressaltar que a qualidade dos resultados obtidos através da análise de confiabilidade depende diretamente da qualidade dos dados estatísticos relacionados ao problema e da precisão do modelo matemático das funções de falha.

No mundo, as atuais normas de projeto utilizam fatores parciais de carga e resistência. Diferentemente de alguns anos atrás, esses fatores são obtidos através de modelos calibrados

com o uso da confiabilidade estrutural, onde de maneira bastante sensata, são impostos valores considerados aceitáveis para a probabilidade de falha de uma estrutura.

### ***1.2. Objetivos e Justificativas***

O presente trabalho tem como principal objetivo examinar o índice de confiabilidade estrutural, ou respectiva probabilidade de falha em seções de concreto armado comparando-as com os índices de referência alvo recomendados por normas internacionais.

### ***1.3. Escopo do Trabalho***

O trabalho está dividido nos seguintes capítulos:

CAPÍTULO 2: Aborda de uma maneira geral os conceitos básicos dos Métodos Semi-Probabilístico e Probabilístico.

CAPÍTULO 3: Apresenta conceitos gerais de diversos assuntos relacionados às estruturas de concreto armado contidos na NBR 6118[1], que serão usados nos exemplos de aplicação do estudo proposto.

CAPÍTULO 4: Apresenta os conceitos da Teoria de Confiabilidade utilizados para o desenvolvimento do presente trabalho.

CAPÍTULO 5: Apresenta os casos estudados tanto para Pilares, Vigas e Lajes e resultados obtidos das análises.

## 2. MÉTODOS DE PROJETO

### 2.1. *Método de Projeto Semi-Probabilístico*

A norma brasileira de concreto armado, NBR 6118[1], baseia-se no Método de Projeto Semi-Probabilístico (MSP). Este método foi criado com o objetivo de introduzir a aleatoriedade das variáveis e a segurança de maneira mais fácil no projeto estrutural.

Ao usar o MSP, os engenheiros abrem mão de um parâmetro fundamental. Passam a desconhecer a medida de segurança adotada no projeto, pois no MSP ela não fica definida.

Este item é de grande relevância, visto que os engenheiros devem aceitar o fato de fazerem projetos com segurança desconhecida, mas mesmo que empiricamente, sabe-se ser aceitável.

Cabe ainda ressaltar que o desconhecimento da segurança no MSP constitui a principal razão para impulsionar o progresso dos Métodos Probabilísticos, já que não é racional o fato de se projetar estruturas comseguranças não claramente especificadas.

Na época da criação do MSP, alguns argumentos fizeram com que sua criação fosse fortalecida. Entre eles podemos citar:

- As teorias estruturais usadas pelo Método de Projeto Probabilístico ainda não se encontravam suficientemente desenvolvidas;
- A inexistência de dados universalmente confiáveis para a definição estatística das variáveis que devem ser levadas em conta no projeto estrutural;
- Os métodos probabilísticos se encontravam muito pouco divulgados e ainda muito pouco acessíveis à maioria dos projetos estruturais;
- O pouco desenvolvimento dos computadores para resolver problemas numéricos trabalhosos.

A idéia básica do MSP é projetar uma estrutura de forma que haja certa folga entre sua resistência e sua solicitação. Para isso, usamos coeficientes parciais sobre os valores característicos nas ações e nas resistências, com o propósito de que as resistências possuam baixa probabilidade de serem superadas pelos esforços solicitantes, como ilustra a Figura 2-1 abaixo:

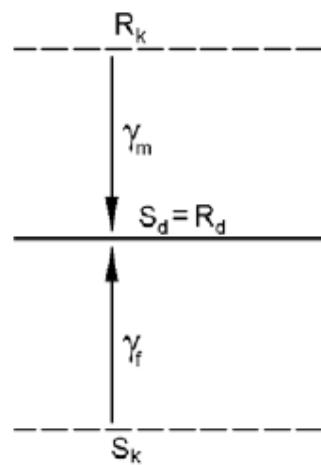


Figura 2-1– Esquema do método dos coeficientes parciais (semi-probabilístico)

## 2.2. *Método de Projeto Probabilístico*

O Método de Projeto Probabilístico representa um avanço em relação ao MSP utilizado pelas normas de projeto atuais.

Neste método o objetivo é projetar uma estrutura para que ela tenha uma dada probabilidade de falha ( $P_f$ ).

A probabilidade de falha é obtida a partir de modelos para os modos de comportamento para o dimensionamento ou verificação das estruturas. Essas expressões recebem um tratamento probabilístico ao considerar a aleatoriedade das variáveis de projeto.

Portanto, podemos assumir que a configuração de falha da estrutura é definida pelas teorias determinísticas e que a probabilidade de falha de uma estrutura é dada pela aleatoriedade das variáveis a partir de uma dada configuração de falha.

### **3. BASES PARA CÁLCULO**

#### ***3.1. Estados Limites***

O conceito de segurança satisfatória em peças de concreto armado está condicionado à verificação dos estados limites, que são situações em que a estrutura apresenta desempenho inadequado à finalidade da construção, ou seja, são estados em que a estrutura se encontra imprópria para o uso. Os estados limites podem ser classificados em estados limites últimos ou estados limites de serviço, conforme sejam referidos à situação de ruína ou de desempenho em serviço, respectivamente. Assim, a segurança pode ser diferenciada com relação à capacidade de carga e à capacidade de utilização da estrutura.

##### ***3.1.1. Estados Limites Últimos***

São aqueles que correspondem à máxima capacidade portante da estrutura, ou seja, sua simples ocorrência determina a paralisação, no todo ou em parte, do uso da construção. São exemplos:

- a) Perda de equilíbrio como corpo rígido: tombamento, escorregamento ou levantamento;
- b) Resistência ultrapassada: ruptura do concreto;
- c) Alongamento excessivo da armadura:  $\varepsilon_s > 1,0\%$ ;
- d) Aderência ultrapassada: escorregamento da barra;
- e) Transformação em mecanismo: estrutura hipostática;
- f) Flambagem;
- g) Instabilidade dinâmica – ressonância;
- h) Fadiga – cargas repetitivas.

### *3.1.2. Estados Limites de Serviço*

São aqueles que correspondem a condições precárias em serviço. Sua ocorrência, repetição ou duração causam efeitos estruturais que não respeitam condições especificadas para o uso normal da construção ou que são indícios de comprometimento da durabilidade. Podem ser citados como exemplos:

- a) Danos estruturais localizados que comprometem a estética ou a durabilidade da estrutura – fissuração;
- b) Deformações excessivas que afetem a utilização normal da construção ou o seu aspecto estético – flechas;
- c) Vibrações excessivas que causem desconforto a pessoas ou danos a equipamentos sensíveis.

## *3.2. Ações*

Ações são causas que provocam esforços ou deformações nas estruturas. Na prática, as forças e as deformações impostas pelas ações são consideradas como se fossem as próprias ações, sendo as forças chamadas de ações diretas e as deformações, ações indiretas.

### *3.2.1. Classificação*

As ações que atuam nas estruturas podem ser classificadas, segundo sua variabilidade com o tempo, em permanentes, variáveis e excepcionais.

#### *a) Ações permanentes*

As ações permanentes são aquelas que ocorrem com valores constantes ou com pequena variação em torno da média, durante praticamente toda a vida da construção.

Elas podem ser subdivididas em ações permanentes diretas – peso próprio da estrutura ou de elementos construtivos permanentes (paredes, pisos e revestimentos, por exemplo), peso dos equipamentos fixos, empuxos de terra não-removíveis etc. – e ações permanentes indiretas – retração, recalques de apoio, protensão.

Em alguns casos particulares, como reservatórios e piscinas, o empuxo de água pode ser considerado uma ação permanente direta.

b) Ações variáveis

São aquelas cujos valores têm variação significativa em torno da média, durante a vida da construção. Podem ser fixas ou móveis, estáticas ou dinâmicas, pouco variáveis ou muito variáveis. São exemplos: cargas de uso (pessoas, mobiliário, veículos etc.) e seus efeitos (frenagem, impacto, força centrífuga), vento, variação de temperatura, empuxos de água, etc.

c) Ações excepcionais

Correspondem a ações de duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, mas que devem ser consideradas no projeto de determinadas estruturas. São, por exemplo, as ações decorrentes de explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes ou abalos sísmicos.

### *3.2.2. Valores das ações*

#### *3.2.2.1. Valores característicos*

Os valores característicos quantificam as ações cuja variabilidade no tempo pode ser adequadamente expressa através de distribuições de probabilidade.

Para ações permanentes, o valor característico é o valor médio, correspondendo ao quantil de 50%, seja quando os efeitos forem desfavoráveis, seja quando os efeitos forem favoráveis.

Para as ações variáveis, os valores característicos correspondem a valores que têm probabilidade entre 25% e 35% de serem ultrapassados no sentido desfavorável, durante um período de 50 anos. As ações variáveis que produzam efeitos favoráveis não são consideradas.

### *3.2.2.2. Valores representativos*

Os valores definidos como representativos para as ações podem ser os próprios valores característicos das ações permanentes ou variáveis, valores convencionais excepcionais, que são os valores arbitrados para as ações excepcionais, ou ainda os valores reduzidos, em função da combinação de ações.

Nas verificações de estados limites últimos, quando a ação considerada é combinada com a ação principal, os valores reduzidos para as ações não principais são determinados através da expressão  $\psi_0 F_k$ , que considera muito baixa a probabilidade de ocorrência simultânea dos valores característicos de duas ou mais ações variáveis de naturezas diferentes.

Nas verificações de estados limites de serviço, os valores reduzidos são determinados através das expressões  $\psi_1 F_k$  e  $\psi_2 F_k$ , que estimam valores freqüentes e quase permanentes, respectivamente, de uma ação que acompanha a ação principal.

### *3.2.2.3. Valores de cálculo*

Os valores de cálculo,  $F_d$ , para as ações são definidos pela NBR 6118 [1]. Esses valores levam em conta a variabilidade das ações, a simultaneidade da atuação das ações, desvios gerados na construção não explicitamente considerados no cálculo e as aproximações feitas no projeto do ponto de vista das solicitações.

Os valores de cálculo das ações são obtidos a partir dos valores representativos, multiplicando-os pelos respectivos coeficientes de ponderação  $\gamma_f$ .

$$F_d = \gamma_f \cdot F_k \quad (3-1)$$

### *3.2.2.4. Ponderação das ações no estado limite último (ELU)*

No estado limite último, as ações devem ser majoradas através da aplicação dos coeficientes de ponderação  $\gamma_f$ , que são definidos pela NBR 6118 [1].

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} \quad (3-2)$$

Tabela 3-1 – Coeficiente  $\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f3}$

Combinações de ações	Ações							
	Permanentes (g)		Variáveis (q)		Protensão (p)		Recalques de apoio e retração	
	D	F	G	T	D	F	D	F
Normais	1,4 <sup>1)</sup>	1,0	1,4	1,2	1,2	0,9	1,2	0
Especiais ou de construção	1,3	1,0	1,2	1,0	1,2	0,9	1,2	0
Excepcionais	1,2	1,0	1,0	0	1,2	0,9	0	0

Onde:

D é desfavorável, F é favorável, G representa as cargas variáveis em geral e T é a temperatura.

<sup>1)</sup>Para as cargas permanentes de pequena variabilidade, como o peso próprio das estruturas, especialmente as pré-moldadas, esse coeficiente pode ser reduzido para 1,3.

Tabela 3-2 – Coeficiente  $\gamma_{f2}$

	Ações	$\gamma_2$		
		$\psi_a$	$\psi_1$ <sup>1)</sup>	$\psi_2$
Cargas accidentais de edifícios	Locais em que não há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas <sup>2)</sup>	0,5	0,4	0,3
	Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevada concentração de pessoas <sup>3)</sup>	0,7	0,6	0,4
	Biblioteca, arquivos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento	Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura	Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3

<sup>1)</sup> Para os valores de  $\psi_1$  relativos às pontes e principalmente aos problemas de fadiga, ver seção 23.

<sup>2)</sup> Edifícios residenciais.

<sup>3)</sup> Edifícios comerciais, de escritórios, estações e edifícios públicos.

### 3.3. Tipos de Carregamento

Entende-se por tipo de carregamento o conjunto das ações que têm probabilidade não desprezível de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um determinado período de tempo pré-estabelecido. Pode ser de longa duração ou transitório, conforme seu tempo de duração.

Em cada tipo de carregamento, as ações devem ser combinadas de diferentes maneiras, a fim de que possam ser determinados os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura. Devem ser estabelecidas tantas combinações quantas forem necessárias para que a segurança seja verificada em relação a todos os possíveis estados limites (últimos e de serviço).

Pode-se distinguir os seguintes tipos de carregamento, passíveis de ocorrer durante a vida da construção: carregamento normal, carregamento especial, carregamento excepcional e carregamento de construção.

### *3.3.1. Carregamento Normal*

O carregamento normal decorre do uso previsto para a construção, podendo-se admitir que tenha duração igual à vida da estrutura. Este tipo de carregamento deve ser considerado tanto na verificação de estados limites últimos quanto nos de serviço.

Um exemplo deste tipo de carregamento é dado pela consideração, em conjunto, das ações permanentes e variáveis ( $g + q$ ).

### *3.3.2. Carregamento Especial*

O carregamento especial é transitório e de duração muito pequena em relação à vida da estrutura, sendo, em geral, considerado apenas na verificação de estados limites últimos. Este tipo de carregamento decorre de ações variáveis de natureza ou intensidade especiais, cujos efeitos superam os do carregamento normal. O vento é um exemplo de carregamento especial.

### *3.3.3. Carregamento Excepcional*

O carregamento excepcional decorre da atuação de ações excepcionais, sendo, portanto, de duração extremamente curta e capaz de produzir efeitos catastróficos. Este tipo de carregamento deve ser considerado apenas na verificação de estados limites últimos e para determinados tipos de construção, para as quais não possam ser tomadas, ainda na fase de concepção estrutural, medidas que anulem ou atenuem os seus efeitos.

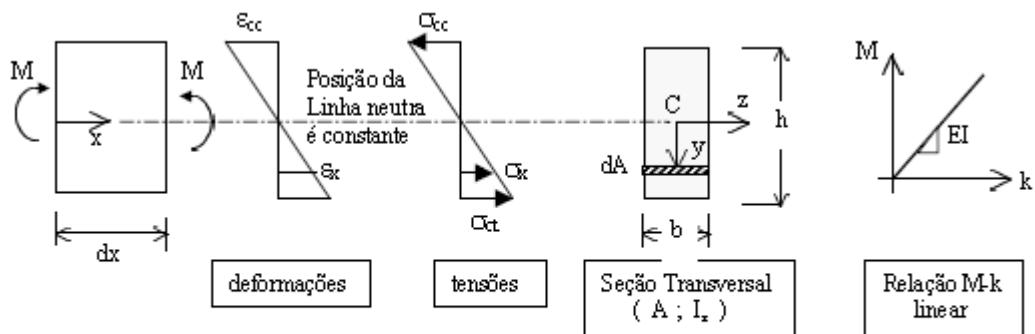
### 3.3.4. Carregamento de Construção

O carregamento de construção é transitório, pois, como a própria denominação indica. Refere-se à fase de construção, sendo considerado apenas nas estruturas em que haja risco de ocorrência de estados limites já na fase executiva. Devem ser estabelecidas tantas combinações quantas forem necessárias para a verificação das condições de segurança em relação a todos os estados limites que são de se prever durante a fase de construção. Como exemplo, tem-se: cimbramento e descimbramento.

### 3.4. Estadios de comportamento à flexão

Os esforços numa estrutura são obtidos da análise de um modelo estrutural, onde o comportamento do material é pressuposto (elástico, plástico, linear, não-linear). A dificuldade de se estabelecer um modelo de análise para as peças de concreto armado reside no fato de que o comportamento à flexão apresenta diferentes fases, isto é, a rigidez à flexão  $EI$  depende da intensidade das solicitações e da armadura da seção, que em geral são incógnitas do problema.

O comportamento de um trecho de viga, de material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, solicitado à flexão pura é ilustrado na figura 3-1 abaixo



$$k = (\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{ct}) / h = \text{curvatura}$$

$\varepsilon_{ct}$  = alongamento específico máximo

$\varepsilon_{cc}$  = encurtamento específico máximo, em valor absoluto

Figura 3-1– Trecho de viga, material homogêneo, isotrópico e elástico-linear, solicitada à flexão pura

Para essa hipótese de viga, a posição da linha neutra é definida exclusivamente pela geometria da seção transversal, pois o material não fissurou ainda e o comportamento à tração e à compressão do material é o mesmo. A rigidez à flexão  $EI$  é uma constante, dada pelas características geométricas da seção transversal e pelo módulo de elasticidade do material, sendo seu valor independente da intensidade da solicitação. Portanto, para qualquer valor da solicitação  $M$ , a curvatura é diretamente determinada através da relação linear  $M-k$ :  $k = M / (EI)$ . A partir da curvatura pode-se determinar as deformações e as tensões.

As vigas em concreto armado têm comportamento não-linear, a rigidez  $EI$  não é constante, ao contrário, ela depende da intensidade da solicitação e da armadura existente na peça. À medida que a solicitação aumenta são formadas fissuras no concreto tracionado, mudando assim a inércia (inércia fissurada). O diagrama momento-curvatura que se obtém para o carregamento progressivo de um trecho de viga em concreto armado com armadura longitudinal de tração de área  $A_s$  constante, tem o aspecto representado na figura 4.

Neste diagrama  $M-k$  são observadas 4 fases distintas de comportamento à flexão ao longo do carregamento. Em todas as fases, conhecidas como estádios de comportamento, a hipótese da seção plana permanece válida, porém, a posição da linha neutra e a distribuição das tensões normais, de tração e compressão variam fase a fase.

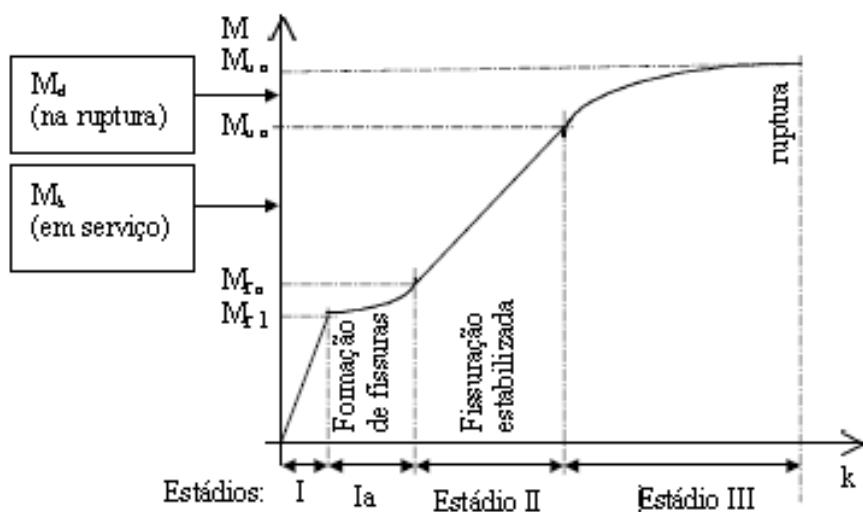


Figura 3-2– Diagrama  $M-k$  na seção transversal da viga de concreto armado

### *3.4.1. Estádio I*

No Estádio I,  $M \leq M_{r1}$ . Para as pequenas deformações decorrentes da baixa intensidade da solicitação  $M$ , o comportamento do concreto e do aço pode ser admitido como elástico-linear, tanto à compressão como à tração, pois se admite que o esforço não ultrapassou a resistência do material na fibra mais alongada. O comportamento no estádio I é o descrito pela Resistência dos Materiais. Para  $M = M_{r1}$ , na fibra inferior, a mais alongada, inicia-se a plastificação do concreto à tração.

### *3.4.2. Estádio Ia*

No Estádio Ia,  $M_{r1} \leq M \leq M_{rn}$ . Esse estádio apresenta relação  $M-k$  não linear, com plastificação do concreto à tração. A relação é não-linear pois com o surgimento das fissuras, a inércia não é mais constante. A tensão de resistência à tração do concreto é da ordem de 10% da resistência à compressão. A fissuração na parte tracionada do concreto não representa a ruína da peça, pois se a armadura for dimensionada adequadamente, essa pode substituir o concreto tracionado do ponto de vista estático.

Para  $M = M_{rn}$  o panorama de fissuração da viga tende a se estabilizar numa configuração definitiva.

### *3.4.3. Estádio II*

No Estádio II,  $M_{rn} \leq M \leq M_{u0}$ . Os esforços de tração são absorvidos unicamente pela armadura disposta na zona do concreto tracionado. Assim, é usual se desprezar totalmente a contribuição do concreto à tração. O concreto à compressão continua em regime linear-elástico até que em  $M = M_{u0}$ , na fibra mais encurtada, inicia-se a plastificação à compressão do concreto.

### 3.4.4. Estádio III

No Estádio III,  $M_{u0} \leq M \leq M_{un}$ . A relação M-k é não-linear, com plastificação progressiva do concreto à compressão. Em  $M = M_{un}$ , atinge-se a situação limite, com ruptura da seção por compressão do concreto. Nesta fase, pode também ocorrer um alongamento excessivo da armadura tracionada, o que é, convencionalmente, considerado como uma situação última da peça fletida.

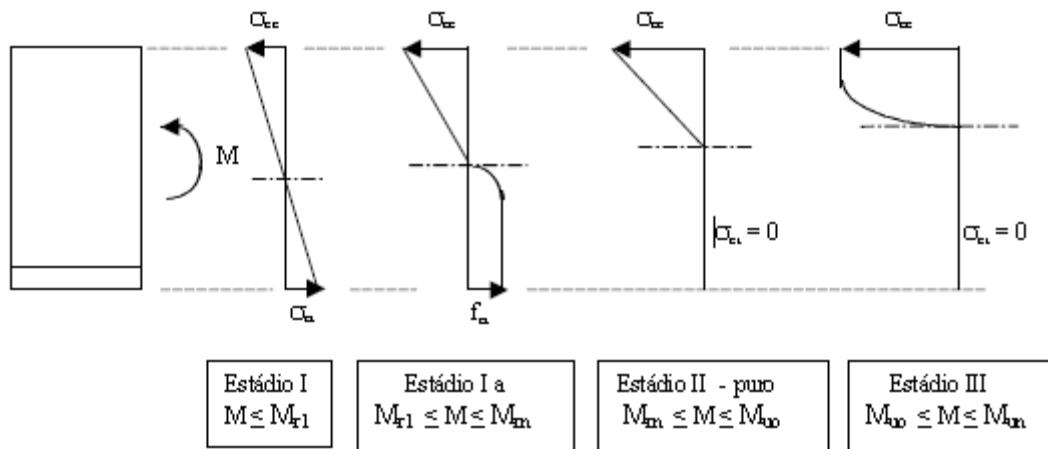


Figura 3-3 – Distribuição das tensões normais no concreto nos diversos estádios

Em geral, o funcionamento das peças de concreto armado para as cargas de serviço se dá no estádio II. Desta forma, nos cálculos envolvendo a verificação dos estados limites de serviço, o funcionamento da seção é suposto sob as hipóteses do estádio II. Para a verificação dos estados limites últimos, considera-se o funcionamento da seção no estádio III, tomindo-se os valores de cálculo para as solicitações e para as resistências dos materiais.

### 3.5. Hipóteses básicas no dimensionamento à flexão no ELU

No estudo da capacidade resistente, são considerados os estados limites últimos, para os quais o comportamento da seção à flexão é admitido no estádio III, sob as seguintes hipóteses básicas:

- as seções transversais se mantêm planas após a deformação
- a deformação das barras de aço é admitida como igual à deformação do concreto em seu entorno;
- as tensões de tração no concreto normais à seção transversal são desprezadas;

- as distribuições de tensões no concreto se fazem com o diagrama parábola-retângulo, com a resistência do concreto igual a  $0.85 f_{cd}$ . Este diagrama pode ser simplificado para um diagrama retangular com profundidade igual a  $0.85x$ , sendo  $x$  a profundidade efetiva da linha neutra, e tensão igual a  $0.80 f_{cd}$  ou  $0.85 f_{cd}$ , caso a largura da seção diminua ou não a partir da linha neutra em direção à borda mais comprimida, como mostrado na figura 3-4;

- os estados limites últimos são caracterizados quando a distribuição de deformações na seção transversal atingirem uma das configurações definidas nos diversos domínios de dimensionamento à compressão, tração e flexão simples ou composta, normal ou oblíqua, estabelecidos pela NBR 6118 [1] como mostrado na figura 3-5.

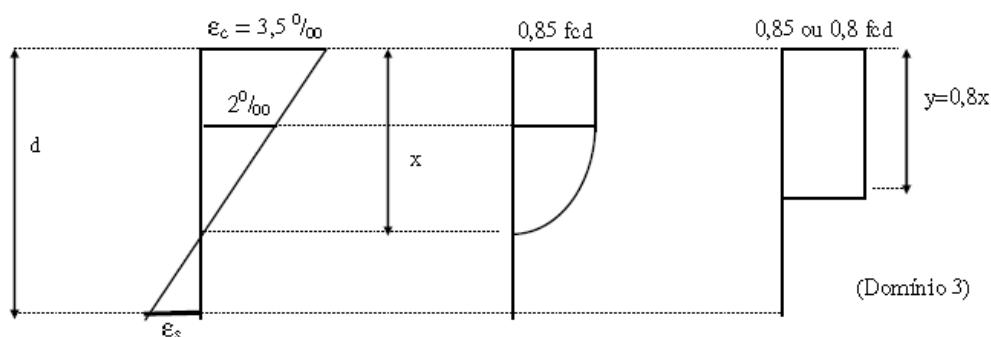
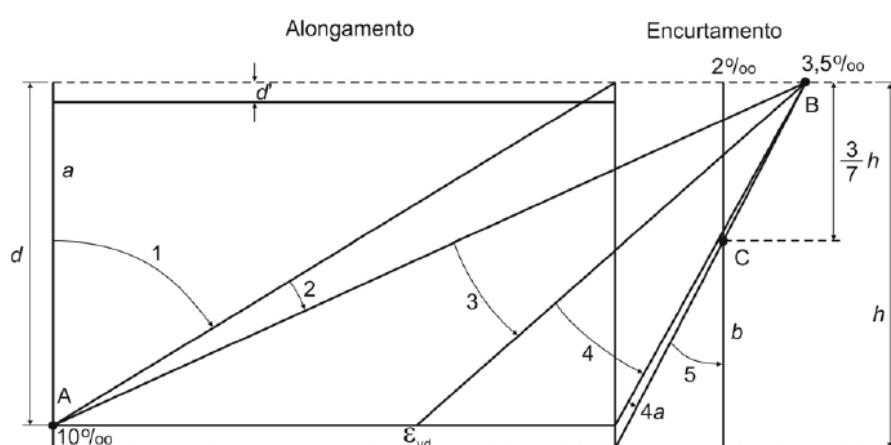


Figura 3-4 – Simplificação do diagrama parábola-retângulo para o concreto.



#### Ruptura convencional por deformação plástica excessiva:

- reta a: tração uniforme;
- domínio 1: tração não uniforme, sem compressão;
- domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_c < 3,5\%$  e com o máximo alongamento permitido);

#### Ruptura convencional por encurtamento limite do concreto:

- domínio 3: flexão simples (seção subarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e com escoamento do aço ( $\epsilon_a \geq \epsilon_{yc}$ );
- domínio 4: flexão simples (seção superarmada) ou composta com ruptura à compressão do concreto e aço tracionado sem escoamento ( $\epsilon_a < \epsilon_{yc}$ );
- domínio 4a: flexão composta com armaduras comprimidas;
- domínio 5: compressão não uniforme, sem tração;
- reta b: compressão uniforme.

Figura 3-5 – Domínios no estado limite último de uma seção transversal

### 3.6. Pilares

Pilares são elementos estruturais lineares de eixo reto, usualmente dispostos na vertical, em que as forças normais de compressão são preponderantes e cuja função principal é receber as ações atuantes nos diversos níveis e conduzi-las até as fundações.

Junto com as vigas, os pilares formam os pórticos, que na maior parte dos edifícios são os responsáveis por resistir às ações verticais e horizontais e garantir a estabilidade global da estrutura.

As ações verticais são transferidas aos pórticos pelas lajes, e as ações horizontais decorrentes do vento são levadas aos pórticos pelas paredes externas.

#### 3.6.1. Dimensões Mínimas

Com o objetivo de evitar um desempenho inadequado e propiciar boas condições de execução, a NBR 6118[1], estabelece que a seção transversal dos pilares, qualquer que seja a sua forma, não deva apresentar dimensão menor que 19cm. Em casos especiais, permite-se a consideração de dimensões entre 19cm e 12cm, desde que no dimensionamento se multipliquem as ações por um coeficiente adicional  $\gamma_n$ , indicado na Tabela 3-3, onde:

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05.b \quad (3-3)$$

sendo b a menor dimensão da seção transversal do pilar (em cm).

Tabela 3-3 - Valores do coeficiente adicional  $\gamma_n$  em função de b

<b>b (cm)</b>	<b><math>\geq 19</math></b>	<b>18</b>	<b>17</b>	<b>16</b>	<b>15</b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>12</b>
<b><math>\gamma_n</math></b>	<b>1,00</b>	<b>1,05</b>	<b>1,10</b>	<b>1,15</b>	<b>1,20</b>	<b>1,25</b>	<b>1,30</b>	<b>1,35</b>

Portanto, o coeficiente  $\gamma_n$  deve majorar os esforços solicitantes finais de cálculo nos pilares, quando de seu dimensionamento.

Todas as recomendações referentes aos pilares são válidas nos casos em que a maior dimensão da seção transversal não exceda cinco vezes a menor dimensão ( $h \leq 5b$ ). Quando esta condição não for satisfeita, o pilar deve ser tratado como pilar parede.

Em qualquer caso, não se permite pilar com seção transversal de área inferior a 360 cm<sup>2</sup>.

### 3.6.2. Cálculo Simplificado – Flexo-compressão Normal

A NBR 6118 apresenta processos aproximados para o dimensionamento à flexão composta normal e à flexão composta oblíqua.

O cálculo para o dimensionamento de seções retangulares ou circulares com armadura simétrica, sujeitas a flexo-compressão normal, em que a força normal reduzida ( $\nu$ ) seja maior ou igual a 0,7, pode ser realizado como um caso de compressão centrada equivalente, onde:

$$\nu = \frac{Nsd}{Ac.fcd} \quad (3-4)$$

$$\frac{e}{h} = \frac{Msd}{Nsd.h} \quad (3-5)$$

$$\beta = \frac{1}{(0.39 + 0.01\alpha) - 0.8 \frac{d'}{h}} \quad (3-6)$$

$$Nsd, eq = Nsd \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right) \text{ e } Msd, eq = 0 \quad (3-7)$$

sendo o valor de  $\alpha$  dado por:

$\alpha = -1/\alpha_s$ , se  $\alpha_s < 1$  em seções retangulares;

$\alpha = \alpha_s$ , se  $1 \leq \alpha_s \leq 6$  em seções retangulares;

$\alpha = 6$ , se  $\alpha_s > 6$  em seções retangulares;

$\alpha = -4$ , em seções circulares.

Supondo que todas as barras sejam iguais,  $\alpha_s$  é dado por:

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} \quad (3-8)$$

Sendo  $n_h$  e  $n_v$  mostrados na figura 3-6

O arranjo de armadura adotado para detalhamento (Figura 3-6) deve ser fiel aos valores de  $\alpha_s$  e  $d'/h$  pressupostos.

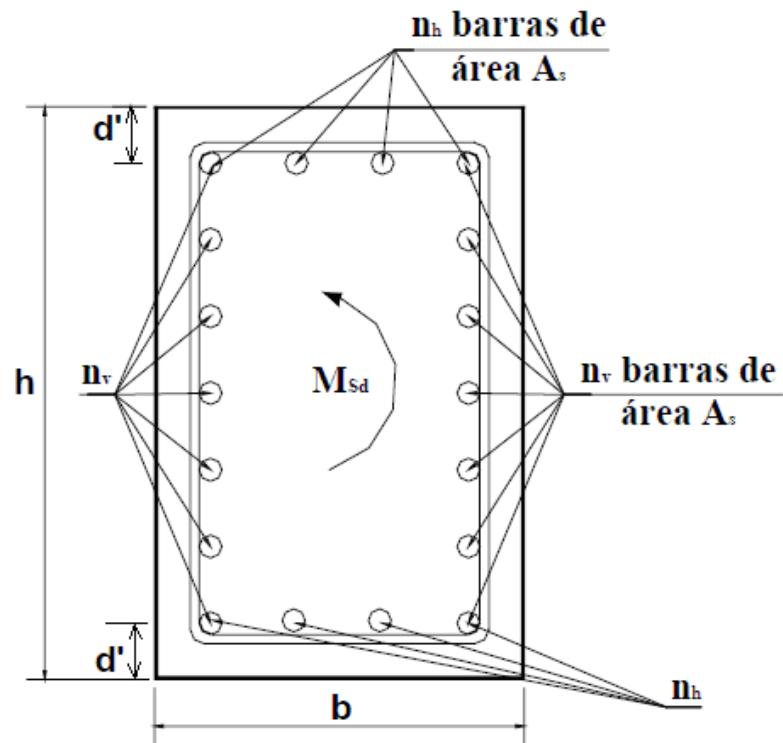


Figura 3-6 - Arranjo de armadura caracterizando o parâmetro  $\alpha_s$

## **4. CONCEITOS DE CONFIABILIDADE ESTRUTURAL**

O cálculo estrutural em engenharia tem como princípio básico assegurar o desempenho satisfatório da estrutura, de acordo com as solicitações definidas no projeto, durante sua vida útil, de tal forma a se obter um nível aceitável entre segurança e custo do empreendimento. Porém, garantir um nível aceitável de segurança com custo mínimo, não é uma tarefa fácil, pois tanto as solicitações quanto as resistências das estruturas são difíceis de serem previstas com exatidão.

O princípio básico da confiabilidade estrutural é avaliar a segurança de uma estrutura, ou seja, assegurar que a mesma tenha uma baixa probabilidade de falhar atendendo aos objetivos para os quais ela foi projetada, ao longo da sua vida útil. A análise de confiabilidade estrutural tem como propósito quantificar esta falha. É importante ressaltar que não existe estrutura 100% confiável, ou seja, sempre existirá o risco de ela vir a falhar. Porém, este risco deve ser mantido em níveis aceitáveis de acordo com critérios de segurança e economia.

Em geral, os problemas de engenharia não possuem valores quantitativos exatos para que se possa equacionar e resolver o problema de maneira direta e precisa. Existe, por tanto, uma natureza probabilística tanto da ação como da resistência. Por tanto, apresentar-se-ão os principais conceitos sobre a teoria da probabilidade que serão necessários para o entendimento da metodologia probabilística para a interpretação e avaliação da confiabilidade estrutural.

### ***4.1. Variáveis Aleatórias e Distribuições de Probabilidades***

Se os resultados dos experimentos de um determinado fenômeno são previsíveis, o fenômeno é chamado de determinístico. Por outro lado, se os resultados dos experimentos não forem previsíveis o fenômeno é chamado de aleatório ou randômico. Neste caso, cada experimento deve ser associado a um valor de probabilidade de ocorrência do evento relacionado ao fenômeno em observação. Intuitivamente pode-se observar que: (a) a probabilidade está relacionada com a frequência de ocorrência do evento ao longo de uma sequência com um grande número de experimentos, (b) ela deverá estar situada entre 0 e 1 e (c) a soma da probabilidade de todos os possíveis resultados do fenômeno deverá ser igual a 1.

Em resumo, variável aleatória é uma função que associa elementos de conjuntos reais a evento do espaço amostral de um experimento. Esta função é usualmente representada por uma letra maiúscula. Valores específicos de uma variável aleatória são representados por letras minúsculas.

Considerando  $X$  uma variável aleatória, sua função densidade de probabilidade PDF (Probability Density Function)  $f_X(x)$  é definida de acordo com a expressão abaixo:

$$P\left(x - \frac{dx}{2} \leq X \leq x + \frac{dx}{2}\right) = f_X(x)dx \quad (4-1)$$

e a probabilidade da variável  $X$  assumir um valor entre  $a$  e  $b$  é dado por:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx \quad (4-2)$$

Para ser considerada uma PDF, algumas condições devem ser atendidas. Assim, a definição de PDF de uma variável aleatória  $X$  implica em:

- a)  $f_X(x) \geq 0.0$  para qualquer valor de  $x$ ;
- b)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.0$  área unitária; (4-3)
- c)  $\int_a^b f_X(x)dx = P(a \leq X \leq b)$ .

Se  $X$  é uma variável aleatória, a distribuição de probabilidade pode ser caracterizada por sua função cumulativa de probabilidades  $F_X(x)$ , cuja abreviatura é CDF (“Cumulative Distribution Function”), e é definida por:

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(x)dx \quad (4-4)$$

$F_X(a)$  indica a probabilidade da variável  $X$  assumir valores menores ou iguais a  $a$ . Uma função de distribuição cumulativa, deve atender as seguintes propriedades:

- a)  $F_X(-\infty) = 0.0$ ;  
 b)  $0 \leq F_X(x) \leq 1.0$  ;  
 c)  $F_X(\infty) = 1.0$  .
- (4-5)

As funções densidade de probabilidade e distribuição cumulativa de uma variável  $X$  são representadas graficamente pela Figura 4-1:

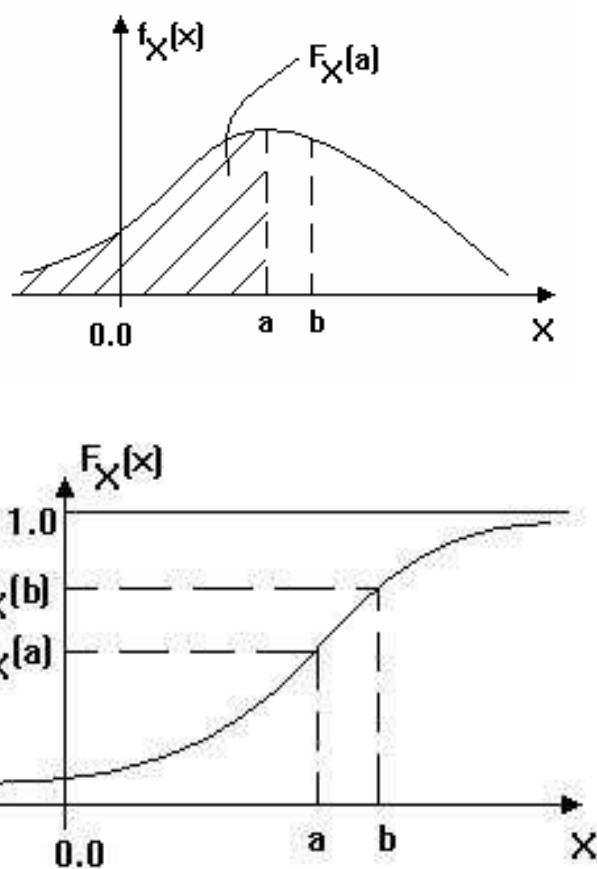


Figura 4-1 – Função densidade de probabilidade e distribuição cumulativa, respectivamente.

#### 4.1.1. Principais Parâmetros de Variáveis Aleatórias

a) Média

O valor médio, ou a média, ou o valor esperado de uma variável aleatória  $X$  é definido como:

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \quad (4-6)$$

sendo  $f_X(x)$  a PDF de X definida anteriormente

b) Variância

É uma quantidade que traduz a dispersão dos dados em torno de uma média. A variância é expressa por:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - 2\mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx + \mu_X^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X^2 \quad (4-7)$$

c) Desvio padrão

É a medida de dispersão mais utilizada e é igual a raiz quadrada da variância:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} \quad (4-8)$$

d) Coeficiente de variação

Somente com a variância e o desvio padrão fica difícil mensurar se a dispersão dos resultados é grande ou pequena. O indicativo dessa amplitude é dado pelo coeficiente de variação, e é definido como a razão entre o desvio padrão e a média:

$$COV = \delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (4-9)$$

#### *4.1.2. Distribuições de Probabilidades*

Como dito anteriormente qualquer função que satisfaça as condições dadas pelas equações (4-3) pode ser usada como uma distribuição de probabilidades. O uso prático desta função depende da capacidade dela representar estatisticamente um determinado fenômeno que está sendo investigado. Porém, na literatura já existem várias funções que atendem às condições citadas anteriormente e que podem ser usadas na prática da engenharia. Algumas destas serão citadas a seguir.

##### *4.1.2.1. Distribuição Normal ou Gaussiana*

É uma das distribuições mais recorrentes e aplicadas para representar inúmeras variáveis aleatórias. A função densidade de probabilidade desta distribuição é dada por:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \quad (4-10)$$

Esta distribuição tem somente como parâmetros a média  $\mu_x$  e o desvio padrão  $\sigma_x$ . Uma notação resumida desta distribuição é  $N(\mu_x, \sigma_x)$ . A sua função cumulativa só pode ser avaliada por integração numérica ou usando tabelas disponíveis em livros de estatística. Na Figura 4-2 são mostradas três funções de densidade de probabilidade normal com diferentes variâncias (0,5; 0,7; 1) e média (0,0). Quanto mais dilatada é a base da PDF maior é a dispersão com relação à média.

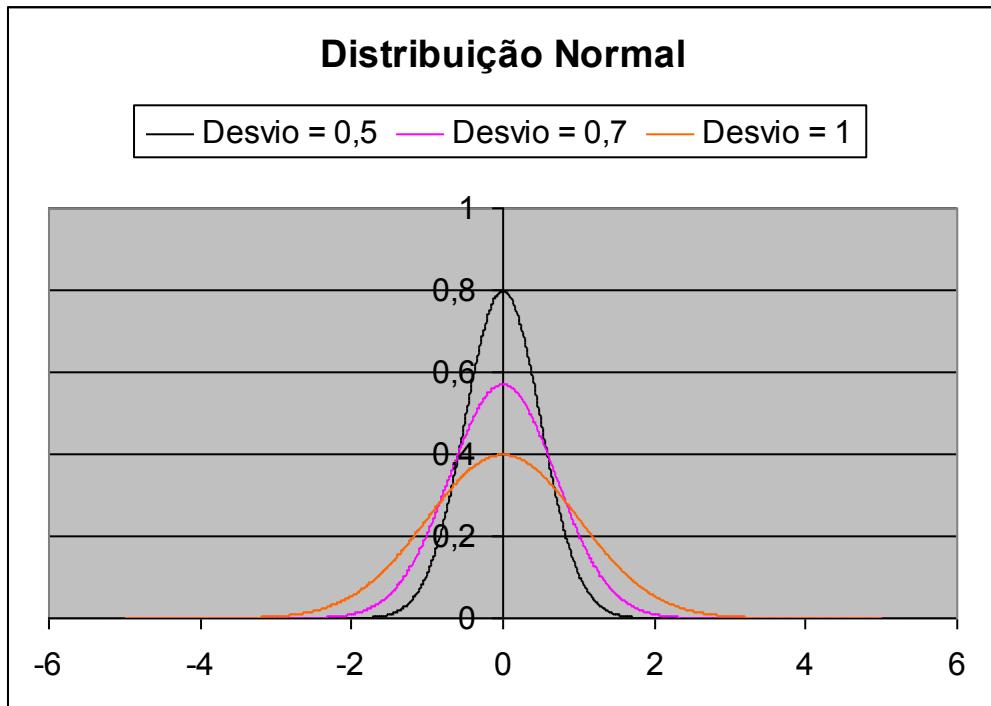


Figura 4-2– Funções de densidade de probabilidade normais.

Uma alternativa equivalente e muito valiosa para a expressão (4-10) é obtida através da introdução de uma variável auxiliar, também conhecida como variável reduzida ou padrão, definida como:

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (4-11)$$

que conduz à conhecida distribuição normal *padrão* de probabilidades (representada na Figura 4-2 pela curva de cor laranja):

$$f_Y(y) = \phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \quad (4-12)$$

cuja média e desvio padrão são iguais a 0 a 1, respectivamente. A função cumulativa de probabilidades desta distribuição é usualmente denotada por  $\Phi(y)$  e é definida por:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad (4-13)$$

Na Figura 4-3 esta distribuição é ilustrada graficamente.

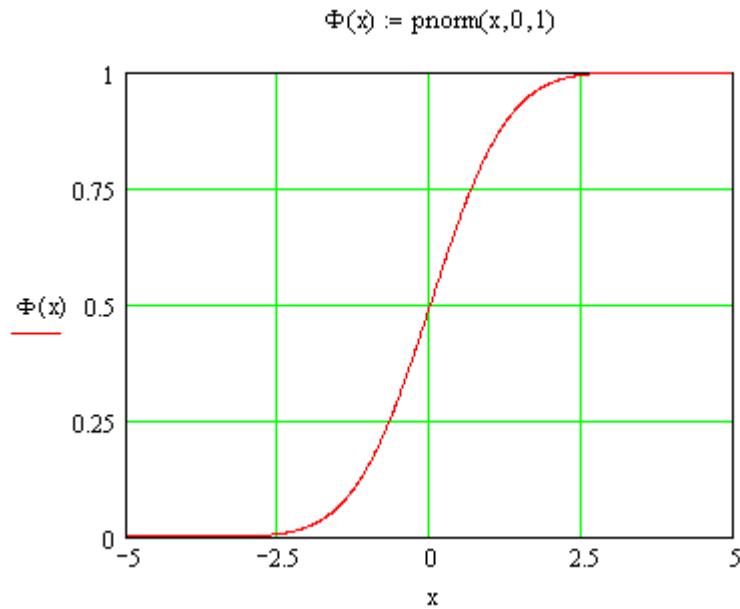


Figura 4-3– Função cumulativa da distribuição normal padrão.

Seja uma variável  $X$  com distribuição de probabilidade normal  $N(\mu_X, \sigma_X)$ . A probabilidade de a mesma assumir valores entre  $a$  e  $b$  conforme a Figura 4-4, representada pela área escura, pode ser obtida usando as expressões (4-10) e (4-13):

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{(a-\mu_X)}{\sigma_X}}^{\frac{(b-\mu_X)}{\sigma_X}} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu_X}{\sigma_X}\right) \quad (4-14)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a função cumulativa normal padrão.

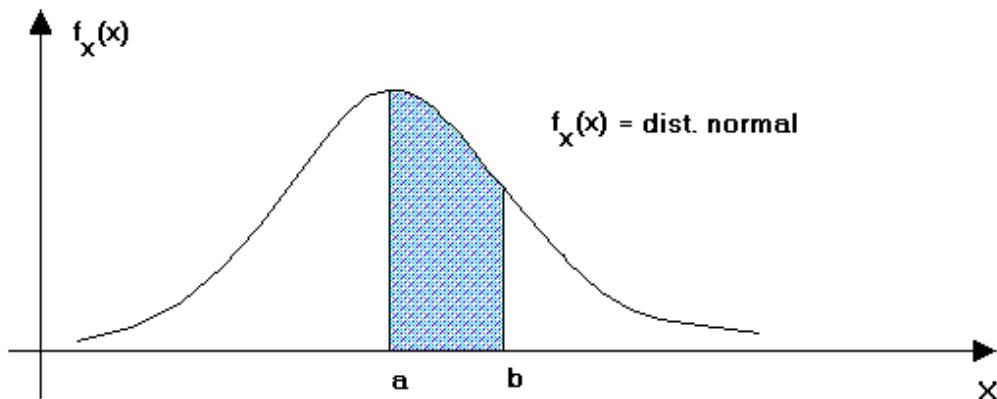


Figura 4-4— Ilustração gráfica da probabilidade  $P(a \leq X \leq b)$ .

#### 4.1.2.2. Distribuição Lognormal

Uma variável  $X$  tem distribuição lognormal quando estatisticamente  $\ln(X)$  pode ser representado por uma distribuição normal. A PDF de uma variável lognormal é definida como:

$$f_x(x) = \frac{1}{\xi x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right]^2\right\} \quad (4-15)$$

onde  $\lambda = E[\ln(x)] = \mu_{\ln x}$  e  $\xi = \sqrt{Var[\ln(x)]} = \sigma_{\ln x}$  são, respectivamente, a média e o desvio padrão de  $\ln(X)$ , os quais são os parâmetros dessa distribuição.  $\lambda$  e  $\xi$  se relacionam com a média e o desvio padrão da variável do seguinte modo:

$$\xi^2 = \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2\right] \quad (4-16)$$

$$\lambda = \ln(\mu_x) - \frac{1}{2}\xi^2$$

A Figura 4-5(a) representa uma PDF do tipo lognormal para diferentes desvios padrões, enquanto que a Figura 4-5(b) representa a CDF lognormal. Percebe-se que a PDF

admite valores somente para  $X \geq 0$ , ou seja, somente valores positivos, conforme se observa nas figuras a seguir.

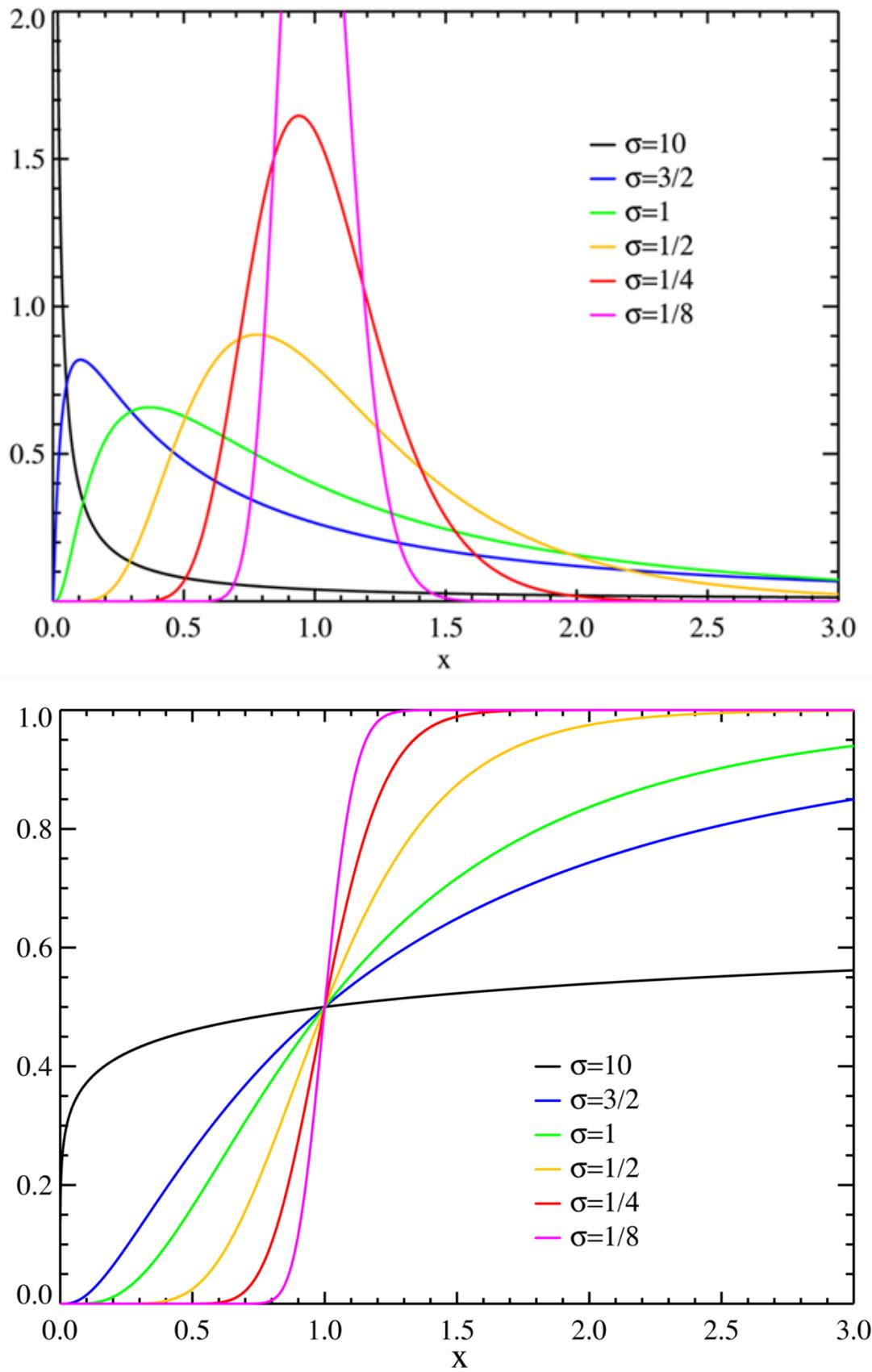


Figura 4-5– (a) Função densidade e (b) cumulativa da distribuição lognormal.

Se  $X$  é uma variável aleatória lognormal,  $P(a \leq X \leq b)$  pode ser calculada como:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left[\frac{\ln(b) - \lambda_X}{\xi_X}\right] - \Phi\left[\frac{\ln(a) - \lambda_X}{\xi_X}\right] \quad (4-17)$$

Notar que a equação acima corresponde exatamente à Equação (4-14), onde a variável reduzida é definida como  $Y = \frac{\ln(X) - \lambda_X}{\xi_X}$ .

Além das distribuições Normal e Lognormal, existem muitas outras. A Tabela 4-1 apresenta um resumo daquelas mais empregadas para modelar as variáveis relacionadas à análise de confiabilidade estrutural.

Tabela 4-1– Algumas Distribuições de Probabilidades

Distribuição	$f_X(x)$ (PDF)	$F_X(x)$ (CDF)	$E(X)$ (Média)	$\text{Var}(X)^{1/2}$ (Desvio Padrão)
<b>Normal</b>	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	$\mu$	$\sigma$
<b>Lognormal</b>	$\frac{1}{\xi x \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right]^2\right\}$	$\Phi\left[\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right]$	$\exp\left[\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right]$	$E(X) = \sqrt{\exp(\xi^2) - 1}$
<b>Exponencial</b>	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$1 - \exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
<b>Rayleigh</b>	$\frac{x}{\sigma_R^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sigma_R}\right]^2\right\}$	$1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{\sigma_R}\right]^2\right\}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_R$	$\left(\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}\right)\sigma_R$

<b>Uniforme</b>	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
<b>Tipo I máximos (Gumbel)</b>	$\alpha \exp\{-\alpha(x-u) - \exp[-\alpha(x-u)]\}$	$\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$	$u + \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}$
<b>Tipo I mínimos</b>	$\alpha \exp\{\alpha(x-u) - \exp[\alpha(x-u)]\}$	$1 - \exp\{-\exp[\alpha(x-u)]\}$	$u - \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}$
<b>Tipo II máximos</b>	$\frac{k}{v} \left(\frac{v}{x}\right)^{k+1} \exp\left[-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right]$	$\exp\left[-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right]$	$v\Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)$	$v\left[\Gamma\left(1 - \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$
<b>Tipo III (Weibull)</b>	$\frac{k}{v} \left(\frac{v}{x}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right]$	$1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right]$	$v\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$v\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

**Nota:**  $\Gamma(\cdot)$  é a função Gamma.

#### *4.1.2.3. Distribuições de Probabilidades de Valores Extremos*

Em inúmeros problemas de engenharia, os valores extremos (máximos ou mínimos) de uma variável aleatória são de interesse. Na engenharia estrutural, os máximos valores dos carregamentos atuantes na estrutura durante sua vida útil e os valores mínimos de resistência da mesma são as variáveis importantes para o projeto.

A maneira ideal de se avaliar a distribuição de probabilidades de valores extremos seria ajustar uma função de distribuição de probabilidades às amostras de valores extremos observados. Por exemplo, a determinação da distribuição de valores extremos anuais de uma variável aleatória seria feita ajustando-se uma distribuição de probabilidades aos valores máximos (ou mínimos) observados anualmente durante muitos anos (no mínimo 20 a 25 anos). Na prática, na grande maioria das vezes, não se dispõe de bancos de dados com uma amostragem significativa de valores extremos para proceder de tal forma.

Em virtude do que foi dito anteriormente, surgiu a chamada Estatística de Extremos que possibilita definir a distribuição de valores extremos (máximos ou mínimos) de uma variável aleatória  $X$  a partir da função distribuição de probabilidades da mesma (observe-se que esta variável inclui todo o intervalo de variação da variável em questão). Este tópico será abordado nas seções seguintes.

#### *4.1.2.4. Distribuições Teóricas de Valores Extremos Máximos e Mínimos*

Tomando-se diferentes conjuntos de observações (com  $N$  amostras cada um) de uma variável aleatória  $X$ , verifica-se que o valor máximo observado em cada uma delas geralmente é diferente. Portanto, a população dos valores máximos de  $X$  constituem uma população própria, ou seja, o valor máximo extremo da variável aleatória  $X$  também é uma variável aleatória com uma distribuição própria de probabilidades. Da mesma forma se aplica para o valor mínimo.

Considere uma variável aleatória  $X$  com função de distribuição cumulativa  $F_x(x)$ . De uma amostra de tamanho  $N$  tomada de uma população (valores de  $x$ ), cada amostra será  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , onde os índices representam o primeiro, o segundo, ..., e o  $i$ -ésimo valor observado em cada uma das amostras. Uma vez que cada valor observado é imprevisível antes da observação, pode-se assumir que cada observação é um valor de uma variável aleatória e, portanto  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  é uma realização de variáveis aleatórias  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ . Sendo assim, o valor máximo extremo de uma amostra de tamanho  $N$ , será também uma variável aleatória:

$$Y_N = \max(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (4-18)$$

Se  $Y_N$  é o maior valor entre  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  e é menor que  $y$ , logo todas as outras variáveis aleatórias da amostra serão menores que  $y$  também. Assumindo-se que cada valor coletado numa amostra da variável  $X$  é independente dos demais e que  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  são identicamente distribuídos como a variável  $X$ , tem-se que:

$$F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x) = \dots = F_{X_N}(x) = F_X(x) \quad (4-19)$$

Assim, a função cumulativa do valor máximo extremo pode ser definida como:

$$\begin{aligned} F_{Y_N}(y) &= P(Y_N \leq y) \\ F_{Y_N}(y) &= P(X_1 \leq y, X_2 \leq y, \dots, X_N \leq y) \\ F_{Y_N}(y) &= P(X_1 \leq y) \cdot P(X_2 \leq y) \dots P(X_N \leq y) \\ F_{Y_N}(y) &= [F_X(y)]^N \end{aligned} \quad (4-20)$$

A correspondente função densidade de probabilidades é:

$$f_{Y_N}(y) = \frac{\partial F_{Y_N}(y)}{\partial y} = N[F_X(y)]^{N-1} f_X(y) \quad (4-21)$$

onde  $f_X(\cdot)$  é a função densidade de probabilidades da variável inicial  $X$ .

O valor mínimo de uma amostra de tamanho  $N$  pode ser definido como:

$$Y_1 = \min(X_1, X_2, \dots, X_N) \quad (4-22)$$

Se  $Y_1$  é o menor valor entre  $(X_1, X_2, \dots, X_N)$  e é maior que  $y$ , então todas as outras variáveis aleatórias da amostra serão também maiores que  $y$ . Assumindo-se as mesmas hipóteses definidas acima, tem-se que:

$$\begin{aligned}
1 - F_{Y_1}(y) &= P(Y_N > y) \\
1 - F_{Y_1}(y) &= P(X_1 > y, X_2 > y, \dots, X_N > y) \\
1 - F_{Y_1}(y) &= [1 - F_{X_1}(y)] \cdot [1 - F_{X_2}(y)] \cdots [1 - F_{X_N}(y)] \\
1 - F_{Y_1}(y) &= [1 - F_X(y)]^N
\end{aligned} \tag{4-23}$$

Assim, a função cumulativa do valor mínimo extremo pode ser definida como:

$$F_{Y_1}(y) = 1 - [1 - F_X(y)]^N \tag{4-24}$$

A correspondente função densidade de probabilidades é:

$$f_{Y_1}(y) = \frac{\partial F_{Y_1}(y)}{\partial y} = N[1 - F_X(y)]^{N-1} f_X(y) \tag{4-25}$$

No método apresentado, a distribuição de probabilidades de  $X$  é chamada de distribuição *parente*[8]. A variável  $N$  se refere ao número de amostras da variável  $X$  coletadas durante um determinado período de tempo. Por exemplo, se  $N$  for o número de amostras coletadas no período de um ano as distribuições definidas por (4-21) e (4-23) se referem ao valor máximo extremo anual e ao valor mínimo extremo anual, respectivamente.

Nas figuras (4-6) e (4-7) são apresentadas as funções densidade de probabilidades e cumulativas do valor máximo, obtidas a partir de uma distribuição normal (distribuição parente) com média 25 e desvio padrão 5, ou seja,  $N(25,5)$ . As Figuras (4-8) e (4-9) são apresentadas as funções correspondentes ao valor mínimo.

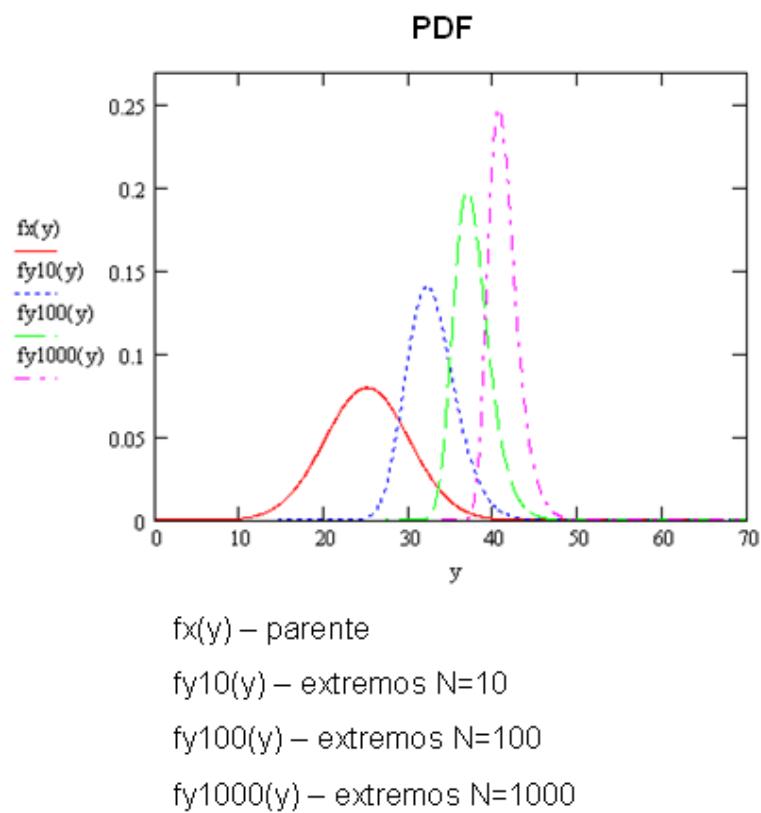


Figura 4-6 – PDF dos valores extremos máximos para uma parente N(25,5).

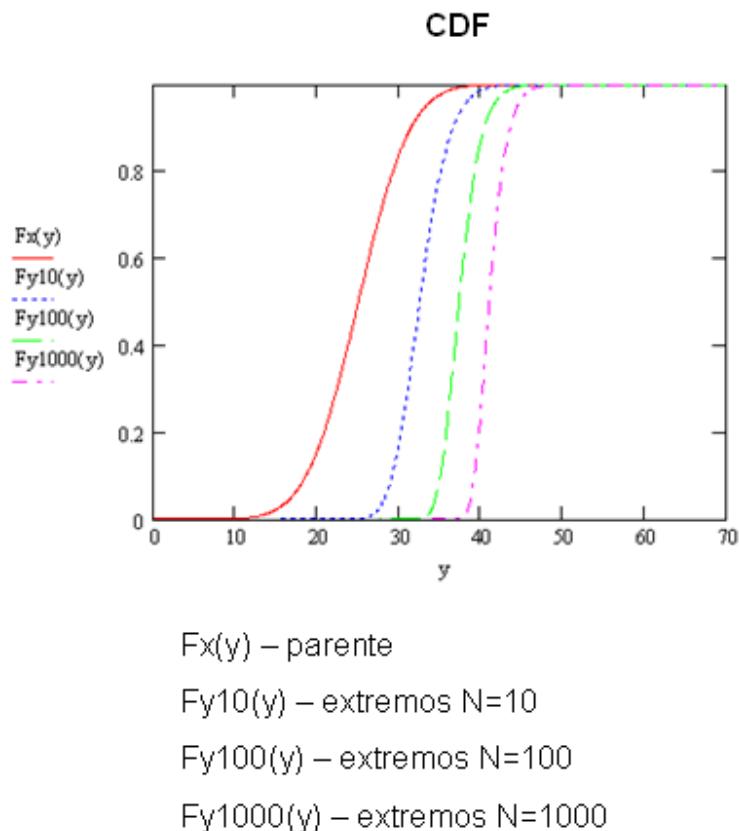
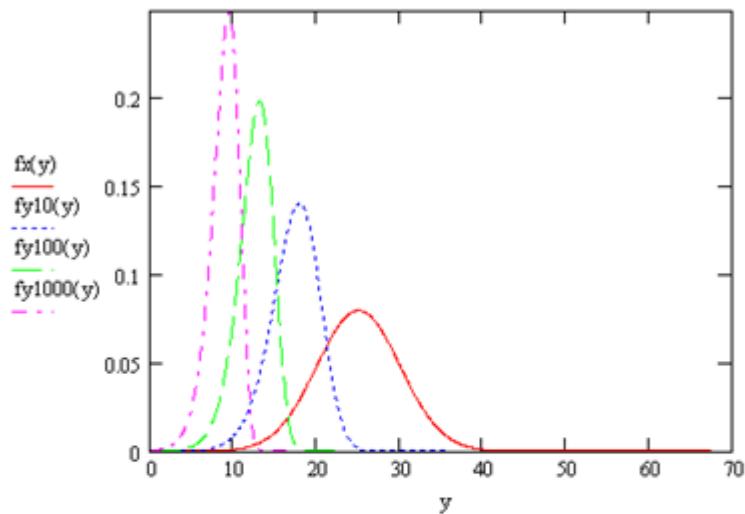


Figura 4-7 – CDF dos valores extremos máximos para uma parente N(25,5).

**PDF**



$f_x(y)$  – parente

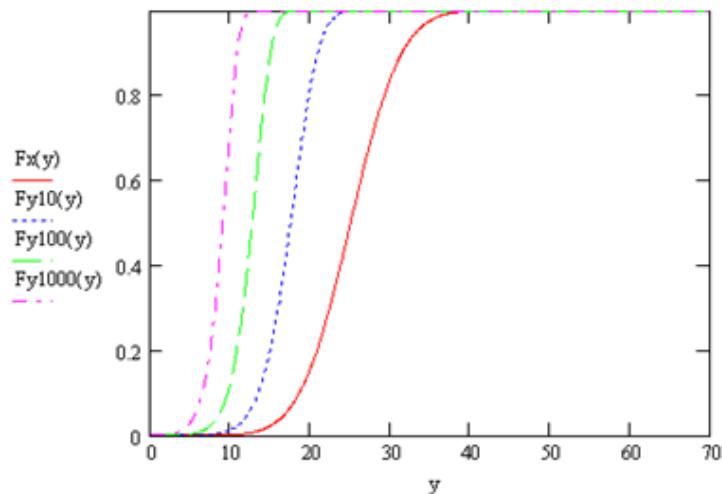
$f_{y10}(y)$  – extremos N=10

$f_{y100}(y)$  – extremos N=100

$f_{y1000}(y)$  – extremos N=1000

Figura 4-8 – PDF dos valores extremos mínimos para uma parente  $N(25,5)$ .

**CDF**



$F_x(y)$  – parente

$F_{y10}(y)$  – extremos N=10

$F_{y100}(y)$  – extremos N=100

$F_{y1000}(y)$  – extremos N=1000

Figura 4-9 – CDF dos valores extremos mínimos para uma parente  $N(25,5)$ .

#### 4.1.3. Distribuições Normais Equivalentes

Caso a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  não seja normal, uma distribuição normal equivalente pode ser obtida de tal forma que a função cumulativa e a função densidade de probabilidade desta distribuição, sejam iguais as aquelas da distribuição real de  $X$  num ponto determinado  $x^*$ . Estes parâmetros são calculados pela resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) &= F_X(x^*) \\ \frac{1}{\sigma_X^N} \phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) &= f_X(x^*)\end{aligned}\tag{4-26}$$

onde:

$\mu_X^N$ ,  $\sigma_X^N$  – média e desvio padrão da distribuição normal equivalente no ponto  $x^*$ , respectivamente;

$\phi(\cdot)$ ,  $\Phi(\cdot)$  – funções densidade e cumulativa da distribuição normal padrão, respectivamente;

$f_X(\cdot)$ ,  $F_X(\cdot)$  – funções densidade e cumulativa da variável  $X$ , respectivamente.

Resolvendo o sistema de equações (4-26) obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_X^N &= \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\}}{f_X(x^*)} \\ \mu_X^N &= x^* - \sigma_X^N \Phi^{-1}[F_X(x^*)]\end{aligned}\tag{4-27}$$

onde  $\Phi^{-1}(\cdot)$  corresponde à inversa da distribuição cumulativa normal padrão. Em outras palavras,  $\Phi^{-1}(p)$  corresponde ao valor da variável reduzida cuja probabilidade de ocorrerem valores menores ou iguais a ela seja igual a  $p$ . A Figura 4-10 ilustra esta transformação graficamente.

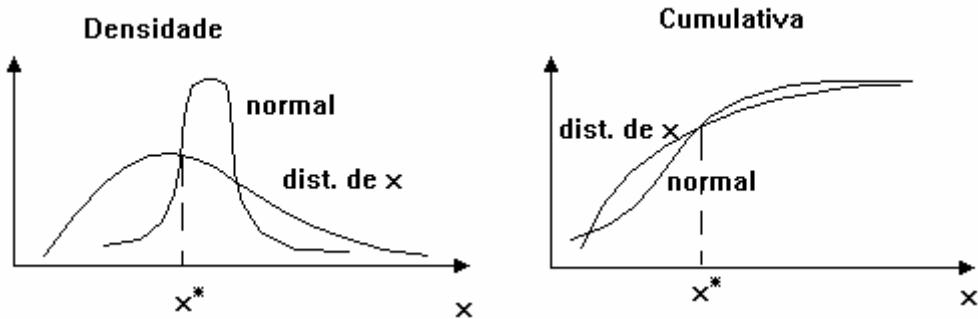


Figura 4-10 – Transformação para normal equivalente.

Observa-se na Figura 4-10 que no ponto  $x^*$  tanto a PDF e a CDF da distribuição não normal de  $X$  é igualado com a distribuição normal.

#### 4.2. Definição de Probabilidade de Falha

A probabilidade de falha é uma medida muito importante na análise de segurança de estruturas ou de sistemas em engenharia e pode ser resumida como sendo a capacidade de resistência da estrutura durante sua vida útil em relação à solicitação imposta à mesma. A avaliação da probabilidade de falha é baseada numa função de *performance* do sistema em estudo. Esta função também é conhecida como função de estado limite, ou função de falha ou margem de segurança, e é denominada  $G(\mathbf{U})$  (ou simplesmente  $Z$ ), onde  $\mathbf{U}$  é o vetor de todas as variáveis aleatórias consideradas na análise.

A Figura 4-11 mostra uma função de falha bidimensional  $G$  representada pelas variáveis aleatórias  $U_1$  e  $U_2$ . Observa-se que a função de falha divide a superfície de falha em duas regiões, uma indicada por  $G(U_1, U_2) < 0$ , que representa a região no domínio da falha e outra da segurança, indicada por  $G(U_1, U_2) > 0$ . A linha que delimita a região de falha com a segura, onde  $G(U_1, U_2) = 0$ , é conhecida como superfície de falha.

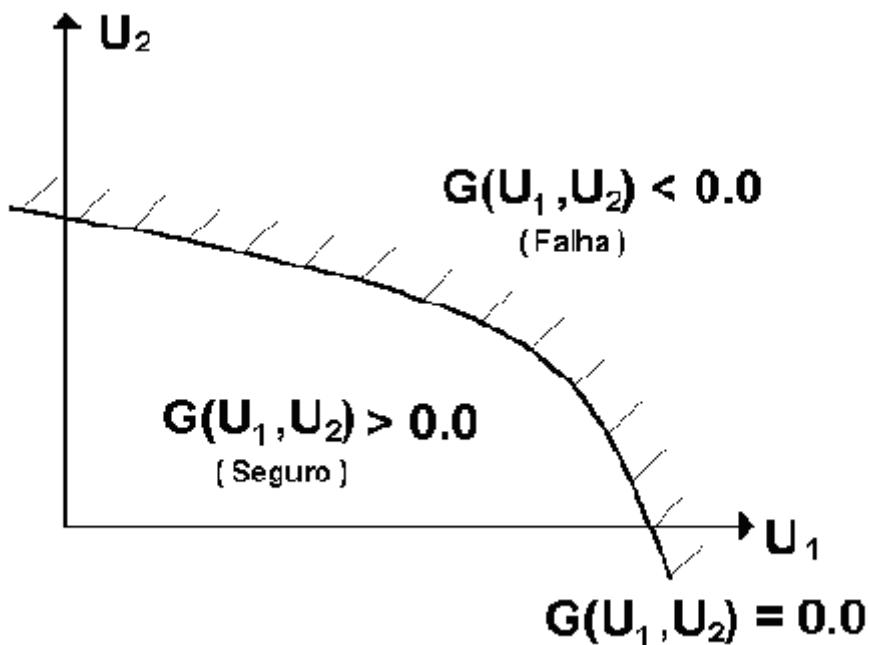


Figura 4-11– Função de falha.

Para a avaliação da segurança de uma estrutura, o interesse recai justamente na possibilidade de acontecerem falhas, ou seja, na probabilidade da função de falha assumir valores pertencentes ao domínio de falha. Esta probabilidade de falha é definida por:

$$P_f = P(G(\mathbf{U}) \leq 0) \quad (4-28)$$

Sabendo-se que  $f_u(\mathbf{U})$  representa a função densidade de probabilidades conjunta de todas as variáveis randômicas  $\mathbf{U}$  envolvidas na análise, a probabilidade de falha pode ser reescrita como:

$$P_f = \int_F f_u(\mathbf{U}) du \quad (4-29)$$

onde  $F$  indica o domínio de falha ( $G(\mathbf{U}) \leq 0$ ).

Outro conceito importante que deve ser mencionado é a confiabilidade de uma estrutura,  $C$ , que é definida como o complemento da probabilidade de falha  $P_f$ , ou seja:

$$C = 1 - P_f \quad (4-30)$$

Dependendo do número e da complexidade das funções das variáveis envolvidas, a solução da expressão (4-29) se torna bastante difícil, uma vez que ela envolve a avaliação de uma integral n-dimensional em um domínio complexo ( $G(\mathbf{U}) \leq 0$ ), onde n é o número de variáveis aleatórias pertencentes a U. Mesmo com o desenvolvimento de técnicas modernas de integração numérica e com computadores cada vez mais eficientes, na prática a avaliação da equação (4-29), por integração, tem se restringido a problemas com 5 a 6 variáveis aleatórias no máximo. Em função destas dificuldades, foram desenvolvidos diversos métodos para a avaliação da confiabilidade estrutural. No Item 4.4 serão apresentados o método numérico FORM e a simulação de Monte Carlo.

#### **4.3. Problema Fundamental de Confiabilidade - Sistemas do Tipo R – S**

Com todo o exposto acima, podemos entender melhor o conceito de confiabilidade como um problema de suprimento versus demanda (Sistema R-S). Com isso, a título de exemplo, para uma barra de aço pode-se definir as seguintes variáveis aleatórias:

$R$  – variável aleatória correspondente à resistência;

$S$  – variável aleatória correspondente à solicitação.

O objetivo da confiabilidade é estimar a probabilidade de que o evento ( $R > S$ ) ocorra durante toda a vida útil especificada para uma estrutura. O evento complementar ( $R < S$ ) corresponde à falha.

Assim, a função de falha  $G(\mathbf{U})$ , com  $\mathbf{U} = (R, S)$ , pode ser escrita como:

$$G(\mathbf{U}) = Z = R - S \quad (4-31)$$

É também comum na análise de confiabilidade estrutural definir  $G(\mathbf{U})$  ou  $Z$  como *margem de segurança*. Assumindo que as distribuições de probabilidades de  $R$  e  $S$  são conhecidas e estatisticamente independentes, a probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (4-32)$$

ou como

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_r^{\infty} f_R(r) f_S(s) ds dr = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_S(r)) f_R(r) dr \quad (4-33)$$

onde  $f_R(r)$  e  $f_S(s)$  são as funções densidade de probabilidades e  $F_R(s)$  e  $F_S(r)$  são as funções cumulativas de probabilidades de  $R$  e  $S$ , respectivamente.

$$fR(x) := dnorm(x, \mu_R, \sigma_R) \quad fS(x) := dnorm(x, \mu_S, \sigma_S)$$

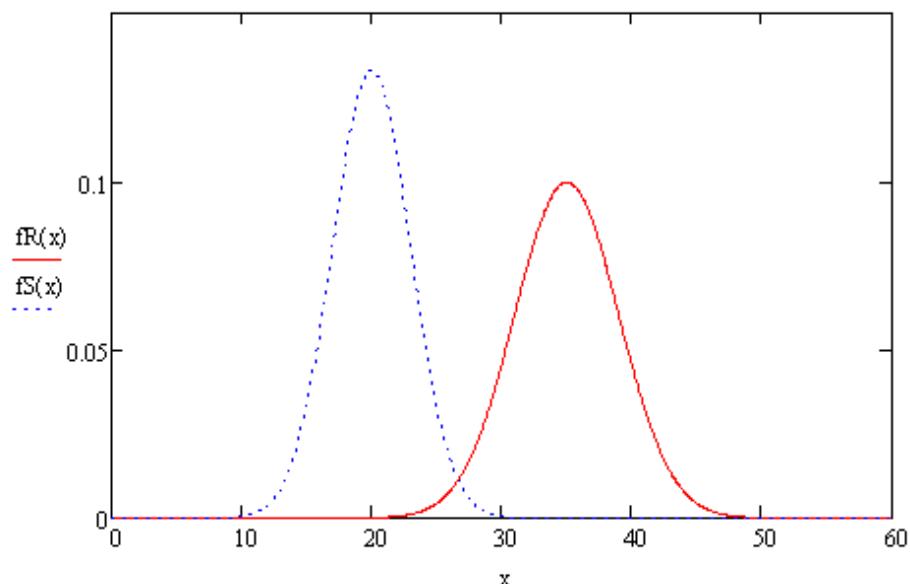


Figura 4-12 – PDF's da solicitação  $f_S(x)$  e da resistência  $f_R(x)$ .

Da observação da Figura 4-12, nota-se que a sobreposição das duas curvas depende da posição relativa entre elas. Logo, se as curvas  $f_S(s)$  e  $f_R(r)$  estão mais distantes, a  $P_f$  diminui, por outro lado, se elas estão mais próximas a  $P_f$  aumenta. A região de superposição depende do grau de dispersão de  $f_S(s)$  e  $f_R(r)$  e estas dispersões podem ser expressas em termos das variâncias de  $R$  e  $S$ .

Se as distribuições de  $R$  e  $S$  são normais, e sabendo que uma combinação linear de variáveis aleatórias normais resulta numa variável normal, tem-se:

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \text{ (média)} \quad \text{e} \quad \sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \text{ (desvio padrão)}$$

Utilizando-se da distribuição normal padronizada, a probabilidade de falha pode ser indicada como:

$$P_f = P(Z \leq 0.0) = \Phi\left(\frac{0.0 - \mu_z}{\sigma_z}\right) = \Phi(-\beta) \quad \text{ou} \quad (4-34)$$

$$P_f = 1 - \Phi(\beta)$$

onde  $\Phi(\cdot)$  é a distribuição cumulativa normal padrão e  $\beta$  é o *índice de confiabilidade* que é expresso como:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4-35)$$

Deve-se observar que a avaliação da probabilidade de falha utilizando a expressão (4-35) é bem mais simples que empregar a expressão (4-32) ou a (4-33). A equação (4-35) representa a mesma coisa que as outras duas, porém devido às propriedades da distribuição normal, o cálculo se torna bem mais simples.

#### **4.4. Métodos para Análise de Confiabilidade Estrutural**

Como dito nos itens anteriores, o estudo de confiabilidade tem como objetivo a avaliação da probabilidade de falha calculada com a integral da Equação (4-29). Para problemas reais, onde se encontram várias variáveis dependentes entre si, com distribuição não-normal e função de falha complexa, a avaliação numérica da Equação (4-29) pode se tornar uma tarefa muito complexa. Por esse motivo, métodos alternativos são geralmente empregados na sua avaliação. Estes métodos se dividem em métodos analíticos e Métodos baseados na Simulação de Monte Carlo.

##### **4.4.1. Método FORM (First Order Reliability Method)**

No Item 4.3 foi obtido o índice de confiabilidade  $\beta$  considerando-se um sistema do tipo  $R - S$  (Resistência – Solicitação), onde  $R$  e  $S$  são variáveis aleatórias com distribuição normal e estatisticamente independentes. A equação determinada para  $\beta$  foi:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4-35 \text{ repetida})$$

Pode-se também obter  $\beta$  utilizando-se variáveis reduzidas, que são variáveis com média 0 e desvio padrão 1.

O primeiro passo consiste em transformar as variáveis  $R$  e  $S$  em variáveis reduzidas  $r$  e  $s$ , obtidas através das seguintes equações:

$$s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (4-36)$$

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$$

A função de falha  $G(\mathbf{U})$  ou  $Z$  no espaço reduzido passa a ser escrita como:

$$Z = R - S, \text{ logo:}$$

$$Z = r\sigma_R + \mu_R - s\sigma_S - \mu_S \quad (4-37)$$

Após a transformação das variáveis e obtenção da função de falha no espaço reduzido, a superfície de falha  $G(\mathbf{U}) = Z = 0.0$  neste espaço fica como mostra a Figura 4-13.

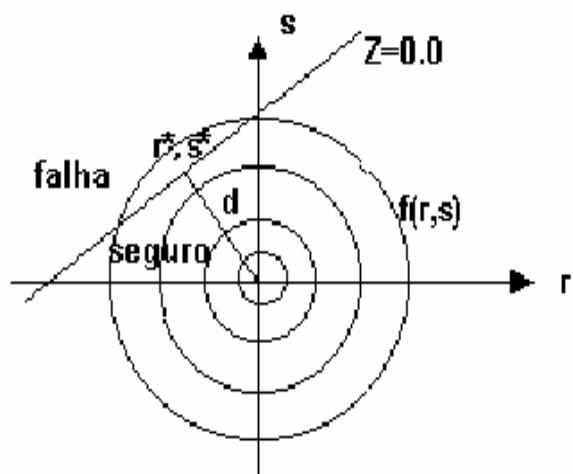


Figura 4-13 – Representação da superfície de falha no espaço reduzido.

A Figura 4-13 mostra da mesma forma que na Figura 4-11, a superfície de falha  $G(\mathbf{U}) = Z = 0.0$  que separa a região do domínio da falha do domínio seguro. O ponto  $(r^*, s^*)$  sobre a superfície de falha é o ponto pertencente à reta  $G(\mathbf{U}) = Z = 0.0$  mais próximo da origem do espaço normal padrão. Este ponto é chamado de ponto de projeto ou ponto mais provável de falha. Assim, a distância  $d$  representa a mínima distância entre a superfície de falha e a origem. Através da geometria analítica pode-se deduzir que:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4-38)$$

Observa-se que a distância  $d$  é idêntica à fórmula do índice de confiabilidade  $\beta$  da Equação (4-35).

O método FORM adota o processo descrito anteriormente, onde se busca a função de falha no espaço reduzido, através da transformação das variáveis no espaço original para o espaço reduzido e, em seguida, calculando-se a menor distância entre a origem e o ponto de projeto sobre a superfície de falha.

A seguir são apresentados de forma ampla os principais passos do método FORM:

- Transformação das variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$ , que podem ter distribuições quaisquer e serem dependentes entre si ou não, em variáveis  $\mathbf{V}$  normais padrões estatisticamente independentes;
- A função de falha  $G(\mathbf{U})$  passa a ser função da variável  $\mathbf{V}$  e escrita como  $g(\mathbf{V})$ ;
- A superfície de falha  $g(\mathbf{V}) = 0.0$  é aproximada por uma superfície linear no ponto de menor distância com a origem, identificado como  $\mathbf{V}^*$ , que é o ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas.
- Calcula-se o índice de confiabilidade  $\beta$ , que é representado pela distância entre a origem e o ponto  $\mathbf{V}^*$ , através de:  $\beta = |\mathbf{V}^*|$ .
- A probabilidade de falha  $P_f$  pode ser simplesmente calculada como:  $P_f = \Phi(-\beta)$

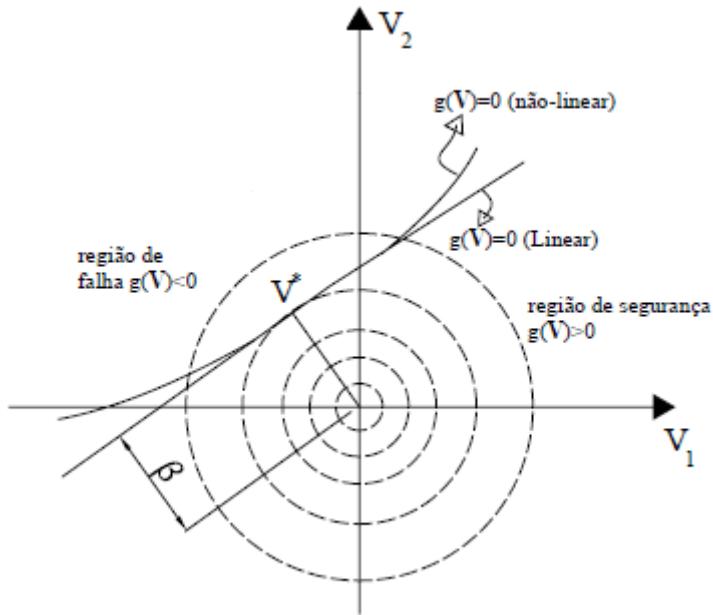


Figura 4-14 – Representação gráfica do método FORM.

Como pode ser observado na Figura 4-14 o método FORM é um método que calcula a probabilidade de falha de forma aproximada e dependendo da forma da função  $g(\mathbf{V})$  no espaço das variáveis reduzidas esta aproximação pode ser a favor da segurança quando  $g(\mathbf{V})$  for convexa em torno do ponto de projeto (como é o caso da Figura 4-14) ou ser contra a segurança no caso contrário. No entanto, para casos práticos de estruturas, a diferença entre o valor real e o valor aproximado da probabilidade de falha é aceitável.

Em função do que foi exposto, nota-se que há dois passos principais para a obtenção da probabilidade de falha  $P_f$  pelo método FORM. São eles, a transformação das variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$  para variáveis normais padrão e a busca ao ponto de projeto  $\mathbf{V}^*$ . Como será visto a seguir, a transformação das variáveis pode ser feita utilizando as distribuições normais equivalentes e o ponto de projeto pode ser obtido através da solução de um problema de otimização.

#### 4.4.1.1. Transformação das Variáveis U para Variáveis Normal Padrão V

O método de transformação de variáveis mais utilizado em confiabilidade estrutural é conhecido como transformação de Nataf[3], o qual transforma variáveis normais correlacionadas em variáveis estatisticamente independentes.

A transformação de Nataf pode ser esquematizada da seguinte maneira: (a) Verificar se as variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$  são normais. (b) Caso não sejam, há necessidade de obterem-se as

normais equivalentes. (c) Em seguida, obtém-se as variáveis normais padrão e estatisticamente independentes.

Na maioria dos casos as variáveis não são normais fazendo-se necessário então, uma transformação em normal equivalente, como foi detalhado no Item 4.1.3. Deve ser colocado que a transformação em normal equivalente, apresentada no Item 4.1.3, não considera casos onde as variáveis são correlacionadas. No caso de variáveis correlacionadas também é possível usar a mesma transformação para obtermos as normais equivalentes, desde que os coeficientes de correlação entre as variáveis originais sejam corrigidos para coeficientes de correlação entre as normais equivalentes. Essa correção é feita da seguinte maneira:

Sejam duas variáveis  $U_i$  e  $U_j$  com distribuições de probabilidade quaisquer e dependentes entre si, sendo essa dependência definida pelo coeficiente de correlação  $\rho_{ij}$ . Então, o coeficiente de correlação equivalente  $\rho_{ij}^E$  entre as variáveis  $U_i$  e  $U_j$  com distribuições normais equivalentes pode ser definido como:

$$\rho_{ij}^E = F \rho_{ij} \quad (4-39)$$

onde  $F$  é um valor que depende de  $\rho_{ij}$  e dos coeficientes de variação das variáveis  $U_i$  e  $U_j$ .

Após a obtenção das variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$  como normais ou normais equivalentes, correlacionadas ou não entre si, as variáveis normais padrão e estatisticamente independentes podem ser obtidas pela seguinte transformação:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}^{-1} (\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (4-40)$$

onde:

$\mathbf{m}$  – vetor com as médias normais ou normais equivalentes das variáveis  $\mathbf{U}$ ;

$\boldsymbol{\sigma}$  – matriz diagonal dos desvios padrões normais ou normais equivalentes das variáveis  $\mathbf{U}$ ;

$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{L}^{-1}$  –  $\mathbf{L}$  matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz  $\boldsymbol{\rho}$  dos coeficientes de correlação de  $\mathbf{U}$ .

#### 4.4.1.2. Determinação do Ponto de Projeto

A determinação do ponto de projeto  $\mathbf{V}^*$  no método FORM é condição essencial para a obtenção da probabilidade de falha. Por definição, o ponto de projeto  $\mathbf{V}^*$  é o ponto sob a superfície de falha, mais próximo à origem.

Para determinação desse ponto de projeto foram desenvolvidos vários algoritmos, porém o algoritmo HLRF (*Hasofer-Lind and Rackwitz-Fiessler Algorithm*) é o mais usado na análise de confiabilidade estrutural.

O ponto de projeto é a solução de um problema de otimização P1 sujeito a uma restrição:

$$\begin{aligned} \text{P1: minimize } & |\mathbf{V}| \\ \text{sujeito a } & g(\mathbf{V}) = 0 \end{aligned} \quad (4-41)$$

O algoritmo HLRF pode ser resumido pela seguinte expressão recursiva:

$$V^{K+1} = \frac{1}{|\nabla g(V^K)|^2} [\nabla g(V^K)^T V^K - g(V^K)] \nabla g(V^K) \quad (4-42)$$

onde:

$\nabla g(\mathbf{V}^K)$  – gradiente da função de falha no espaço reduzido no ponto  $\mathbf{V}^K$ ;  
 $g(\mathbf{V}^K)$  – valor da função de falha no ponto  $\mathbf{V}^K$ .

#### 4.4.1.3. Fator de Importância das Variáveis

O método analítico FORM fornece, além da probabilidade de falha, outras medidas de grande importância para análises práticas de confiabilidade. Estas medidas são conhecidas como medidas de sensibilidade. Existem diferentes tipos de medidas de sensibilidade. Neste trabalho foi analisada apenas uma delas, o fator de importância.

O fator de importância de cada variável aleatória  $i$  envolvida na análise de confiabilidade é definido por:

$$I_i = \alpha_i^2 \quad (4-43)$$

onde  $\alpha_i$  é cosseno diretor com relação à variável  $U_i$  do vetor unitário  $\alpha$  normal à superfície de falha no ponto de projeto e no espaço das variáveis reduzidas mostrado na Figura 4-15 dado por:

$$\alpha_i = \frac{\nabla g(\mathbf{V}^*)_i}{|\nabla g(\mathbf{V}^*)|} \quad (4-44)$$

onde  $\nabla g(\mathbf{V}^*)_i$  é a componente do gradiente da função de falha no espaço reduzido definido no ponto de projeto  $\mathbf{V}^*$  e  $|\nabla g(\mathbf{V}^*)|$  corresponde ao seu módulo.

O cosseno diretor  $\alpha_i$  fisicamente significa a sensibilidade da variável  $U_i$ .

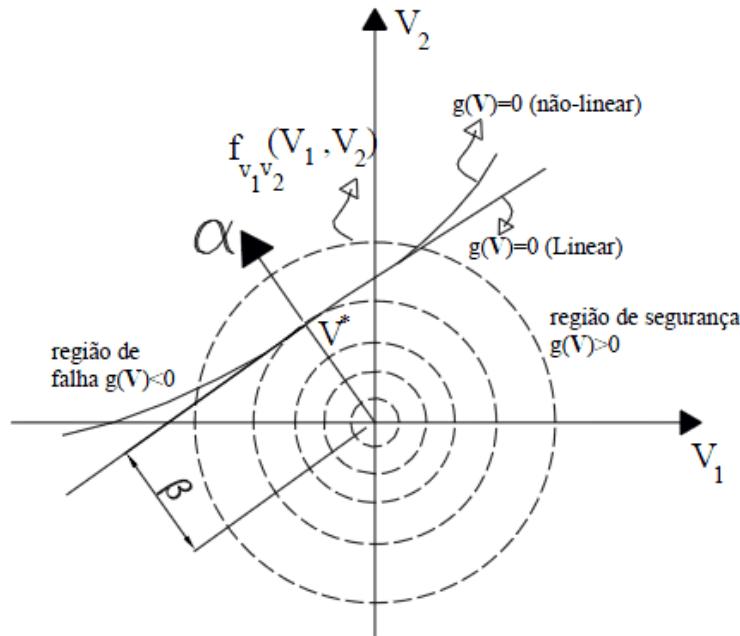


Figura 4-15 – Representação gráfica do vetor normal unitário no ponto de projeto par o caso de duas variáveis.

A seguinte propriedade é válida para o fator de importância das variáveis:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 1 \quad (4-45)$$

Os fatores de importância indicam, como o próprio nome diz, qual é a importância relativa de cada variável no valor final da probabilidade de falha. Somente as variáveis com fatores de importância altos contribuem efetivamente para a probabilidade de falha. As variáveis com fator de importância baixo podem ser consideradas como determinísticas.

#### *4.4.2. Simulação de Monte Carlo*

O método de Monte Carlo é um método de análise estatística de fácil compreensão, cuja idéia básica é simular um experimento, utilizando uma sequência de números pseudoaleatórios.

Como este método exige um número de simulações geralmente muito grande para reproduzir a probabilidade de ocorrência dos atributos com boa precisão, somente nas últimas décadas, com o desenvolvimento de potentes computadores, ele começou a ser largamente aplicado.

Em muitas aplicações, este método simula diretamente o sistema físico ou matemático, não havendo necessidade de utilizar funções que descrevam o comportamento do sistema. A única exigência é que o sistema seja descrito por uma função de densidade de probabilidade.

Uma vez conhecida a PDF, a simulação de Monte Carlo se dá através da amostragem aleatória dessa função. A amostra obtida é usada para aproximar a função de interesse.

A grande desvantagem deste método é o elevado número de realizações para se obter a probabilidade de falha. Desta forma, o uso deste método em problemas muito complexos pode-se tornar inviável ou computacionalmente caro.

##### *4.4.2.1. Determinação da Probabilidade de Falha*

Na simulação Monte Carlo a probabilidade de falha  $P_f$  é estimada por:

$$P_f = \frac{\sum_{j=1}^N \{I[G(\mathbf{U}) \leq 0]\}}{N} \quad (4-46)$$

onde  $N$  é o tamanho da amostra de números aleatórios gerados e a função  $I( \cdot )$  é chamada de função indicadora, que define a região de falha e a região de segurança, dada por:

$$I[G(\mathbf{U}) \leq 0] = \begin{cases} 1, & G(\mathbf{U}) \leq 0 \\ 0, & G(\mathbf{U}) > 0 \end{cases} \quad (4-47)$$

É importante salientar que a Equação (4-46) não fornece uma solução exata e sim uma aproximação que converge para a solução exata à medida que o tamanho da amostra  $N$  aumenta. Com isso pode-se dizer que à medida que a probabilidade de falha diminui, um tamanho maior da amostra  $N$  se faz necessário, como pode ser visto na Figura 4-16.

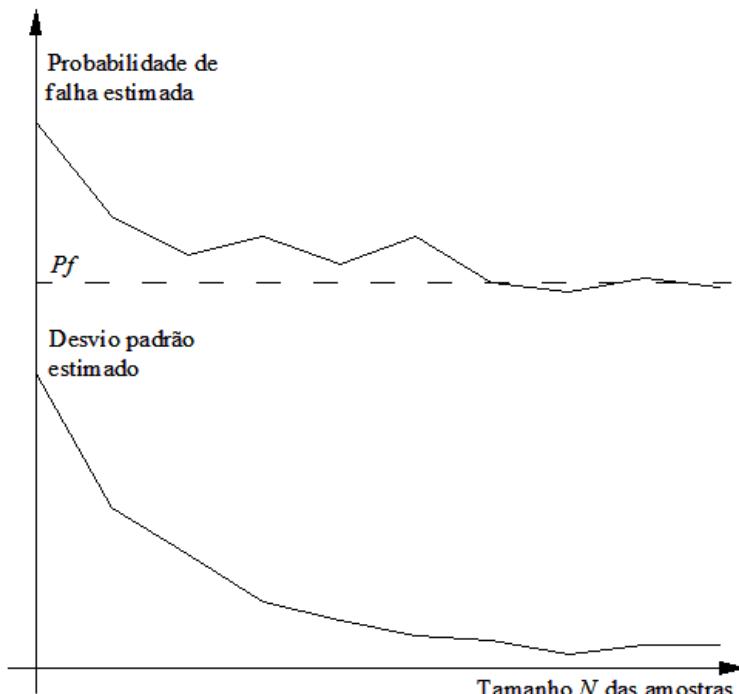


Figura 4-16 – Ilustração da relação entre o estimador da probabilidade de falha e o estimador do seu desvio padrão.

Uma maneira de verificar a convergência do método de Monte Carlo, ou seja, de verificar se o tamanho da amostra  $N$  usada está resultando num bom estimador da probabilidade de falha, é calcular o coeficiente de variação  $\delta P_f$  de uma amostra contendo valores de  $P_f$  obtidos rodando várias vezes a simulação Monte Carlo para a mesma função  $G(\mathbf{U})$ . Assim:

$$\delta P_f = \frac{\sigma_{P_f}}{\mu_{P_f}} \quad (4-48)$$

onde  $\sigma_{Pf}$  é o desvio padrão da amostra e  $\mu_{Pf}$  é a média da amostra.

Assume-se que valores de  $\delta_{Pf}$  na ordem de 0,025 a 0,050 indicam uma boa aproximação do estimador.

#### **4.5. Projeto Baseado em Confiabilidade (“Reliability-Based Design”)**

Devido às incertezas relacionadas às propriedades dos materiais, à geometria, ao processo de fabricação e principalmente aos carregamentos, variabilidades são inevitáveis nas respostas estruturais de peças de concreto. Para assegurar que a estrutura exerça, ao longo da sua vida útil, a função para a qual foi projetada dentro de um nível de segurança desejado, estas incertezas devem ser levadas em conta no projeto. Os projetos baseados em normas tradicionais lidam com as incertezas utilizando valores conservadores destas quantidades incertas e/ou dos fatores de segurança. Um tratamento mais realista das incertezas pode ser encontrado na filosofia dos projetos baseados em confiabilidade (“reliability-based design”), que vem se desenvolvendo desde a última metade do século passado e está ganhando cada vez mais espaço, sendo uma ferramenta indispensável para qualquer engenheiro em um futuro próximo.

Num projeto baseado em confiabilidade, o objetivo é dimensionar a estrutura de modo que um valor prescrito (valor alvo) para a probabilidade de falha seja alcançado, i.e.,

$$P_f^C \leq P_f^{Alvo} \quad (4-49)$$

onde:

$P_f^{Alvo}$  é a probabilidade de falha alvo;

$P_f^C$  é a probabilidade de falha do componente estrutural que está sendo projetado.

O projeto baseado em confiabilidade de uma estrutura começa com a caracterização estatística (médias, desvios padrões, distribuições, etc.) das variáveis aleatórias  $\mathbf{U}$  que governam o problema e a escolha do valor alvo  $P_f^{Alvo}$  para a probabilidade de falha. A escolha desse valor pode estar relacionada a critérios de risco-economia, às consequências da falha, valores médios de probabilidade de falha de componentes de estruturas existentes consideradas seguras ou simplesmente ser feita de acordo com valores sugeridos por agências reguladoras.

Depois disto, define-se um projeto inicial (uma tentativa de dimensões iniciais para os membros da estrutura) e avalia-se, através de um método de análise de confiabilidade, a probabilidade de falha da função de estado limite  $G(\mathbf{U})$  considerada para a peça estudada. O projeto é modificado (dimensões alteradas) e a confiabilidade novamente avaliada até o valor "alvo" da probabilidade de falha ser alcançado. Este processo iterativo de dimensionamento, baseado na busca de uma probabilidade de falha alvo, é chamado *dimensionamento baseado em confiabilidade*.

## 5. ANÁLISE DE CONFIABILIDADE EM SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO

Neste capítulo serão mostrados as análises e os resultados do estudo realizado em elementos estruturais (viga, laje e pilares), com base na Teoria da Confiabilidade, a fim de se avaliar a sua segurança. O primeiro passo do trabalho foi definir a geometria das peças a serem estudadas, que estão resumidas na Tabela 5-1 abaixo.

Tabela 5-1 – Resumo com as geometrias das peças

PEÇAS DE CONCRETO ESTUDADAS	Geometria (cm)	
	Vigas	15 x 50 20 x 75 20 x 100
	Lajes	100 x 10 100 x 15
	Pilares	12 x 60 15 x 60 20 x 60

### 5.1. Considerações sobre as Variáveis

Para as variáveis estudadas neste trabalho, de acordo com [11] e [12], e baseado na experiência brasileira em construção, temos as seguintes considerações:

#### RESISTÊNCIAS

Todas as distribuições são normais, exceto para as cargas acidentais, onde é considerada a distribuição de Gumbel.

- Resistência do Concreto:

$$\mu = 1,196 f_{ck}$$

$COV = 0,15$  (0,05 são devidos à diferença entre a resistência em corpos de prova e nas peças)

- Resistência do Aço:

$$\mu = 1,089 f_{yk}$$

$$COV = 0,05$$

- Área de Aço:

$$\mu = A_s$$

$$COV = 0,015$$

## SOLICITAÇÕES

- Cargas Permanentes:

Momento ( $M_G$ ):  $\mu = 1,05M_G$

$$COV = 0,1$$

Normal ( $N_G$ ):  $\mu = 1,05N_G$

$$COV = 0,1$$

- Cargas Acidentais:

Momento ( $M_L$ ):  $\mu = 0,934M_L$

$$COV = 0,2$$

Normal ( $N_L$ ):  $\mu = 0,934N_L$

$$COV = 0,2$$

## DIMENSÕES

Todas as distribuições são normais.

- Vigas e Lajes:

Largura da Viga ( $b$ ):  $\mu = b$

$$\sigma = 0,01\text{m}$$

Altura útil da Viga ( $d_{viga}$ ):  $\mu = d_{viga}$

$$\sigma = 0,03\text{ m}$$

Altura útil da Laje ( $d_{laje}$ ):  $\mu = d_{laje}$

$$\sigma = 0,015\text{ m}$$

- Pilares:

Comprimento do Pilar ( $b$ ):  $\mu = b$

$$\sigma = 0,024 \text{ m}$$

Largura do Pilar ( $h$ ):  $\mu = h$

$$\sigma = 0,01 \text{ m}$$

Distância do eixo das barras à face do concreto ( $d'$ ):  $\mu = d'$

$$\sigma = 0,005 \text{ m}$$

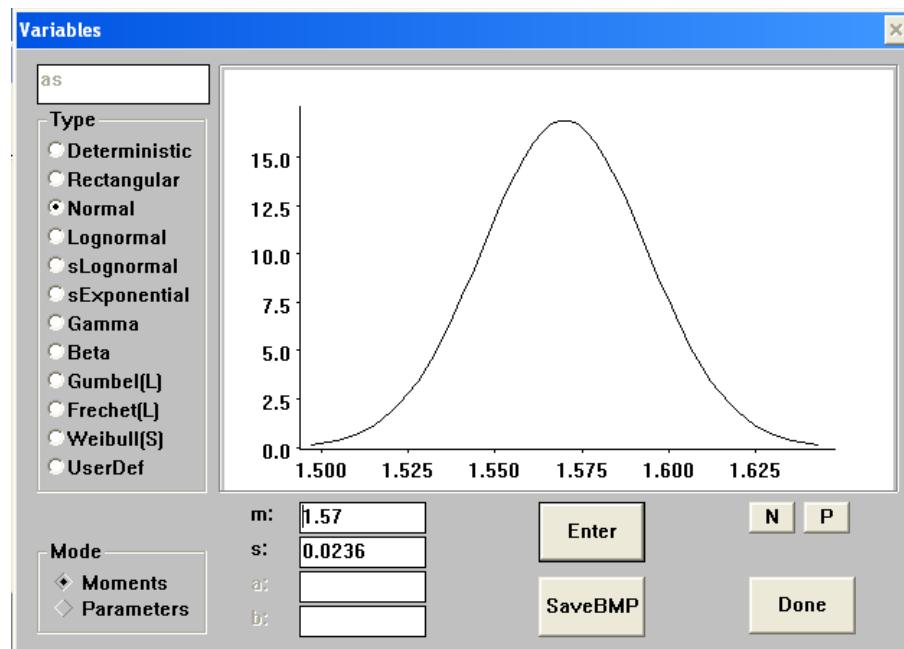


Figura 5-1 – Tela do programa Vap 1.6 para entrada dos parâmetros das variáveis

## 5.2. Estudo das vigas e das lajes no dimensionamento à flexão simples

### 5.2.1. Definição da função de falha

A da função de falha é definida de acordo com as geometria definida na Figura 5-2 abaixo:

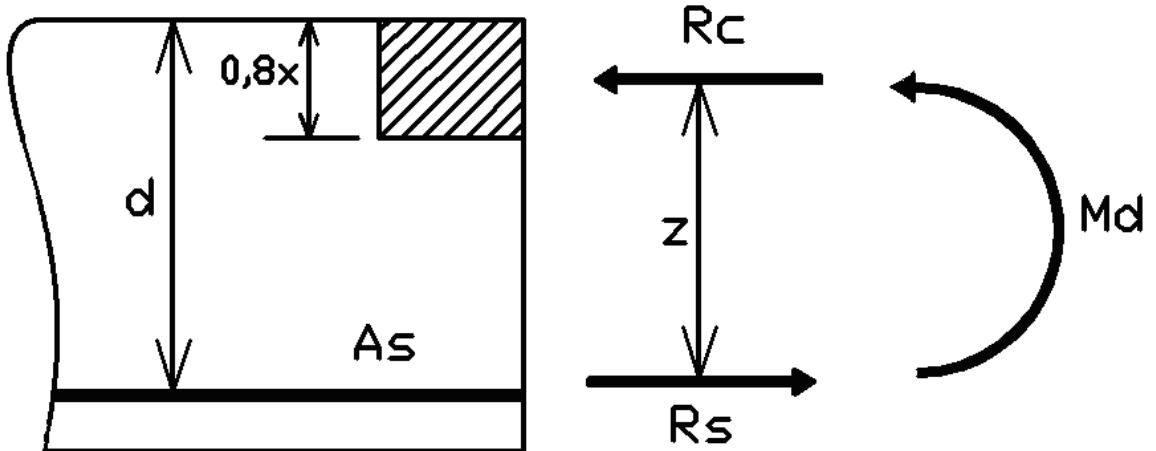


Figura 5-2 – Resistências e Solicitação numa seção típica

Sendo:

$R_c$  = força resultante das tensões de compressão do concreto

$R_s$  = força de tração na armadura inferior

x = profundidade da linha neutra

d = altura útil da seção

Para o dimensionamento, no caso de armadura simples:

$$R_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot 0,8x \quad (5-1)$$

$$R_s = R_c = A_s \cdot f_{yd} \quad (5-2)$$

$$M_d = R_s \cdot z \quad (5-3)$$

Com isso, a equação de equilíbrio probabilístico da flexão em lajes e vigas é dada por:

$$Z = \theta_M \cdot [R - S] = \theta_M \cdot \left[ A_s \cdot f_y \cdot \left( d - 0,5 \cdot \frac{A_s \cdot f_y}{0,85 \cdot b \cdot f_c} \right) - (M_G + M_L) \right] \quad (5-4)$$

Onde:

$\theta_M$  : Coeficiente de modelagem na flexão simples;

$f_c$  : Tensão presente no concreto na ruptura;

$f_y$  : Tensão presente no aço na ruptura;

$M_G$ : Momento de carga permanente;

$M_L$ : Momento de carga accidental.

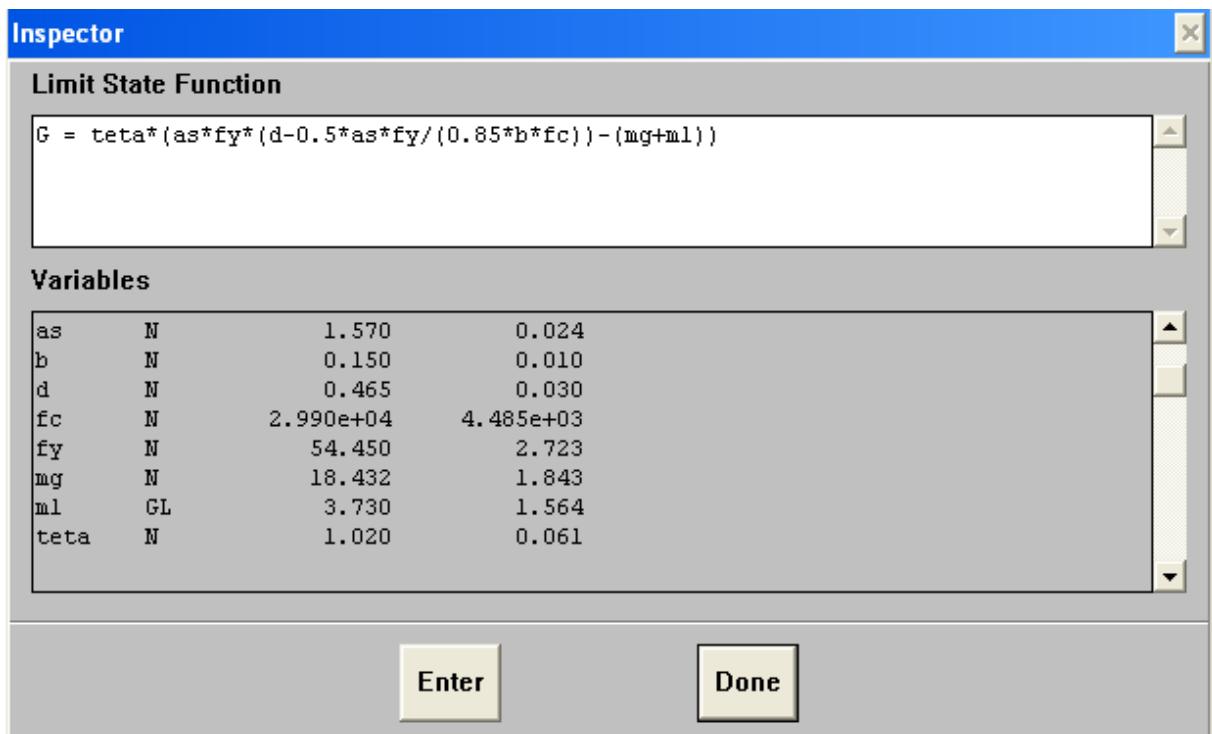


Figura 5-3 – Tela para entrada da função de falha

### 5.2.2. Análise para as vigas

Para todos os casos estudados em vigas, foram considerados dois tipos de armadura, sendo uma armadura mínima de acordo com a Norma NBR 6118[1], e uma armadura máxima a partir do  $kmd_{lim}$ .

#### 5.2.2.1. Viga 15 x 50

I) Armadura mínima –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 15 \cdot 50 = 1,125\text{cm}^2 \quad (5-5)$$

$$A_{s,adotado} = 1,57\text{cm}^2 (2\Phi10)$$

$$M_{d,correspondente} = 30,72 \text{ kN.m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{30,72}{0,15 \cdot 0,465^2 \cdot \frac{25.000}{1,4}} = 0,053 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-6)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,081 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-7)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,081 = 0,968 \quad (5-8)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{30,72}{0,968 \cdot 0,465 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 1,57 \text{ cm}^2 \quad (5-9)$$

II) Armadura mínima  $-f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_{s,min} = 0,201\% \cdot b \cdot h = \frac{0,201}{100} \cdot 15 \cdot 50 = 1,5 \text{ cm}^2 \quad (5-10)$$

$$A_{s,adotado} = 1,57 \text{ cm}^2 (2\Phi10)$$

$$M_{d,correspondente} = 31,01 \text{ kN.m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{31,01}{0,15 \cdot 0,465^2 \cdot \frac{35.000}{1,4}} = 0,038 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-11)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,058 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-12)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,058 = 0,977 \quad (5-13)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{31,01}{0,977 \cdot 0,465 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 1,57 \text{ cm}^2 \quad (5-14)$$

III) Armadura máxima  $-f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 138,44 \text{ kN.m} \quad (5-15)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 9,14 \text{ cm}^2 \quad (5-16)$$

$$A_{s,adotado} = 8,61 \text{ cm}^2 (7\Phi 12,5)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 93,13 \text{ kN.m} \quad (5-17)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 130,38 \text{ kN.m} \quad (5-18)$$

IV) Armadura máxima  $-f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 197,47 \text{ kN.m} \quad (5-19)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 12,92 \text{ cm}^2 \quad (5-20)$$

$$A_{s,adotado} = 12,56 \text{ cm}^2 (4\Phi 20)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 137,13 \text{ kN.m} \quad (5-21)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 191,98 \text{ kN.m} \quad (5-22)$$

As tabelas abaixo mostram de forma resumida as variáveis calculadas e os parâmetros de entrada no estudo de confiabilidade considerando suas variações probabilísticas.

Tabela 5-2 – Resumo Viga 15x50 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=25\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,15 m
Altura (h)	0,50 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,465 m
Momento característico ( $M_k$ )	21,94 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	1,57 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	2Φ10

Tabela 5-3 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 29900,000$	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * \text{COV}$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * \text{COV}$	ML
As	Área de Aço	Normal	$As = 1,570$	0,015	0,0236	As
b	Largura da Viga	Normal	$b = 0,150$	0,06667	0,0100	0,15 m
d	Altura útil	Normal	$d = 0,465$	0,06452	0,0300	0,465 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\theta = 1,020$	0,06	0,0612	1

Tabela 5-4 - Resumo Viga 15x50 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,15 m
Altura (h)	0,50 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,465 m
Momento característico ( $M_k$ )	22,15 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	1,57 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	2Φ10

Tabela 5-5 - Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 41860,000$	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * \text{COV}$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * \text{COV}$	ML
As	Área de Aço	Normal	$As = 1,570$	0,015	0,0236	As
b	Largura da Viga	Normal	$b = 0,150$	0,06667	0,0100	0,15 m
d	Altura útil	Normal	$d = 0,465$	0,06452	0,0300	0,465 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\theta = 1,020$	0,06	0,0612	1

Tabela 5-6 - Resumo Viga 15x50 -  $A_{s,máx}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=25\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,15 m
Altura (h)	0,50 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,436 m
Momento característico ( $M_k$ )	93,13 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	8,61 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	7Φ12,5

Tabela 5-7 - Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	$fy_k = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 8,610	0,015	0,1292	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,150	0,06667	0,0100	0,15 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,436	0,06882	0,0300	0,436 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-8 - Resumo Viga 15x50 -  $A_{s,máx}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,15 m
Altura (h)	0,50 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,440 m
Momento característico ( $M_k$ )	137,13 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	12,56 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	4Φ20

Tabela 5-9 - Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	$fy_k = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 12,560	0,015	0,1884	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,150	0,06667	0,0100	0,15 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,440	0,06818	0,0300	0,440 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

### 5.2.2.2. Viga 20 x 75

I) Armadura mínima -  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 20,75 = 2,25 \text{ cm}^2 \quad (5-23)$$

$$A_{s,adotado} = 2,355 \text{ cm}^2 (3\Phi10)$$

$$M_{d,correspondente} = 71,47 \text{ kN.m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{71,47}{0,20,0,715^2 \cdot \frac{25.000}{1,4}} = 0,039 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-24)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,059 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-25)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,059 = 0,976 \quad (5-26)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{71,47}{0,976 \cdot 0,715 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 2,355 \text{ cm}^2 \quad (5-27)$$

II) Armadura mínima -  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_{s,min} = 0,201\% \cdot b \cdot h = \frac{0,201}{100} \cdot 20,75 = 3 \text{ cm}^2 \quad (5-28)$$

$$A_{s,adotado} = 3,14 \text{ cm}^2 (4\Phi10)$$

$$M_{d,correspondente} = 95,42 \text{ kN.m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{95,42}{0,20 \cdot 0,715^2 \cdot \frac{35.000}{1,4}} = 0,037 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-29)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,056 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-30)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,056 = 0,978 \quad (5-31)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{95,42}{0,978 \cdot 0,715 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 3,14 \text{ cm}^2 \quad (5-32)$$

III) Armadura máxima  $-f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 471,39 \text{ kN.m} \quad (5-33)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 19,48 \text{ cm}^2 \quad (5-34)$$

$$A_{s,adotado} = 18,84 \text{ cm}^2 (6\Phi 20)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 325,66 \text{ kN.m} \quad (5-35)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 455,92 \text{ kN.m} \quad (5-36)$$

IV) Armadura máxima  $-f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 642,81 \text{ kN.m} \quad (5-37)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 26,92 \text{ cm}^2 \quad (5-38)$$

$$A_{s,adotado} = 24,55 \text{ cm}^2 (5\Phi 25)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 418,81 \text{ kN.m} \quad (5-39)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 586,34 \text{ kN.m} \quad (5-40)$$

Com isso, temos resumidamente:

Tabela 5-10 – Resumo Viga 20x75 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=25 \text{ MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	0,75 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,715 m
Momento característico ( $M_k$ )	51,05 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	2,355 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	3Φ10

Tabela 5-11 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
$f_c$	Resistência do Concreto	Normal	$1,196 f_{ck} = 29900,000$	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
$f_y$	Resistência do Aço	Normal	$1,089 f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
$A_s$	Área de Aço	Normal	$A_s = 2,355$	0,015	0,0353	As
b	Largura da Viga	Normal	$b = 0,200$	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	$d = 0,715$	0,042	0,0300	0,715 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\theta = 1,020$	0,06	0,0612	1

Tabela 5-12 – Resumo Viga 20x75 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura mínima - fck=35MPa	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	0,75 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,715 m
Momento característico ( $M_k$ )	68,16 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	3,14 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	4Φ10

Tabela 5-13 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	fyk = 500 MPa
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * \sigma$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * \sigma$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 3,140	0,015	0,0471	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,715	0,042	0,0300	0,715 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-14 – Resumo Viga 20x75 -  $A_{s,máx}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura máxima - fck=25MPa	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	0,75 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,697 m
Momento característico ( $M_k$ )	325,66 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	18,84 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	6Φ20

Tabela 5-15 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	fyk = 500 MPa
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * \sigma$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * \sigma$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 18,840	0,015	0,2826	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,697	0,043	0,0300	0,697 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-16 – Resumo Viga 20x75 -  $A_{s,máx}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	0,75 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,688 m
Momento característico ( $M_k$ )	418,81 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	24,55 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	5Φ25

Tabela 5-17 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fc <sub>k</sub> = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fy <sub>k</sub> = 54,450	0,05	2,7225	fyk = 500 MPa
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * \text{COV}$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * \text{COV}$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 24,550	0,015	0,3683	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,688	0,0436	0,0300	0,688 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

### 5.2.2.3. Viga 20 x 100

I) Armadura mínima -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 20 \cdot 100 = 3\text{cm}^2 \quad (5-41)$$

$$A_{s,adotado} = 3,14\text{cm}^2 (4\Phi10)$$

$$M_{d,correspondente} = 128,67\text{kN.m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{128,67}{0,20 \cdot 0,965^2 \cdot \frac{25.000}{1,4}} = 0,039 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-42)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,058 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-43)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,058 = 0,977 \quad (5-44)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{128,67}{0,977 \cdot 0,965 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 3,14 \text{ cm}^2 \quad (5-45)$$

II) Armadura mínima  $-f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_{s,min} = 0,201\% \cdot b \cdot h = \frac{0,201}{100} \cdot 20 \cdot 100 = 4 \text{ cm}^2 \quad (5-46)$$

$$A_{s,adotado} = 4,92 \text{ cm}^2 (4\Phi 12,5)$$

$$M_{d,correspondente} = 200,78 \text{ kN.m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{200,78}{0,20 \cdot 0,964^2 \cdot \frac{35.000}{1,4}} = 0,043 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-47)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,065 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-48)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,065 = 0,974 \quad (5-49)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{200,78}{0,974 \cdot 0,964 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 4,92 \text{ cm}^2 \quad (5-50)$$

III) Armadura máxima  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$kmd_{\text{lim}} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\text{lim}} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 853,80 \text{ kN.m} \quad (5-51)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 26,22 \text{ cm}^2 \quad (5-52)$$

$$A_{s,\text{adotado}} = 24,55 \text{ cm}^2 (5\Phi 25)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 571,11 \text{ kN.m} \quad (5-53)$$

$$M_{d,\text{correspondente}} = M \cdot 1,4 = 799,55 \text{ kN.m} \quad (5-54)$$

IV) Armadura máxima  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$kmd_{\text{lim}} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\text{lim}} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 1138 \text{ kN.m} \quad (5-55)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 35,81 \text{ cm}^2 \quad (5-56)$$

$$A_{s,\text{adotado}} = 34,37 \text{ cm}^2 (7\Phi 25)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 780,02 \text{ kN.m} \quad (5-57)$$

$$M_{d,\text{correspondente}} = M \cdot 1,4 = 1092 \text{ kN.m} \quad (5-58)$$

Com isso, temos resumidamente:

Tabela 5-18 – Resumo Viga 20x100 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=25\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	1 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,965 m
Momento característico ( $M_k$ )	91,91 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	3,14 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	4Φ10

Tabela 5-19 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
$f_c$	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 29900,000$	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
$f_y$	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
$A_s$	Área de Aço	Normal	$A_s = 3,140$	0,015	0,0471	As
b	Largura da Viga	Normal	$b = 0,200$	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	$d = 0,965$	0,0311	0,0300	0,965 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\theta = 1,020$	0,06	0,0612	1

Tabela 5-20 – Resumo Viga 20x100 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	1 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,964 m
Momento característico ( $M_k$ )	143,41 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	4,92 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	4Φ12,5

Tabela 5-21 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
$f_c$	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 41860,000$	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
$f_y$	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
$A_s$	Área de Aço	Normal	$A_s = 4,920$	0,015	0,0738	As
b	Largura da Viga	Normal	$b = 0,200$	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	$d = 0,964$	0,0311	0,0300	0,964 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\theta = 1,020$	0,06	0,0612	1

Tabela 5-22 – Resumo Viga 20x100 -  $A_{s,máx}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=25\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	1 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,938 m
Momento característico ( $M_k$ )	571,11 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	24,55 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	5Φ25

Tabela 5-23 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 29900,000$	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 24,550	0,015	0,3683	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,938	0,032	0,0300	0,938 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-24 – Resumo Viga 20x100 -  $A_{s,máx}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Viga
Largura (b)	0,20 m
Altura (h)	1 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,915 m
Momento característico ( $M_k$ )	780,02 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	34,37 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	7Φ25

Tabela 5-25 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 41860,000$	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 34,370	0,015	0,5156	As
b	Largura da Viga	Normal	b = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,915	0,0328	0,0300	0,915 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

#### 5.2.2.4. Resultados

A variável  $M_k$  (Momento característico) foi dividida em duas parcelas:  $M_G$  (Momento de carga permanente) e  $M_L$  (Momento de carga accidental). Sendo assim,  $\xi$  refere-se à parcela de  $M_L$  em  $M_k$ . Então assim,  $\xi = 0$  significa todo o  $M_k$  devido a momentos de carga permanente e,  $\xi = 1$  significa todo o  $M_k$  devido a momentos de carga accidental.

Os valores encontrados de  $\beta$  pelo método FORM do programa Vap 1.6 [13], a partir da equação (5-4), foram:

Tabela 5-26 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para vigas -  $A_{s,min}$

As mín $\xi$	$\beta$					
	Viga 15 x 50		Viga 20 x 75		Viga 20 x 100	
	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35
0	4,14	4,20	4,68	4,76	4,89	5,01
0,2	4,48	4,55	5,02	5,10	5,20	5,31
0,4	4,01	4,05	4,21	4,26	4,28	4,35
0,6	3,47	3,50	3,57	3,61	3,60	3,66
0,8	3,06	3,09	3,13	3,17	3,15	3,20
1	2,76	2,79	2,81	2,84	2,82	2,87

Tabela 5-27 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para vigas -  $A_{s,máx}$

As máx $\xi$	$\beta$					
	Viga 15 x 50		Viga 20 x 75		Viga 20 x 100	
	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35
0	4,16	4,11	4,62	4,74	4,73	4,68
0,2	4,43	4,39	4,71	4,83	4,81	4,76
0,4	4,17	4,13	4,51	4,57	4,65	4,61
0,6	3,66	3,63	3,83	3,88	3,92	3,89
0,8	3,26	3,24	3,36	3,41	3,42	3,40
1	2,95	2,93	3,02	3,06	3,07	3,05

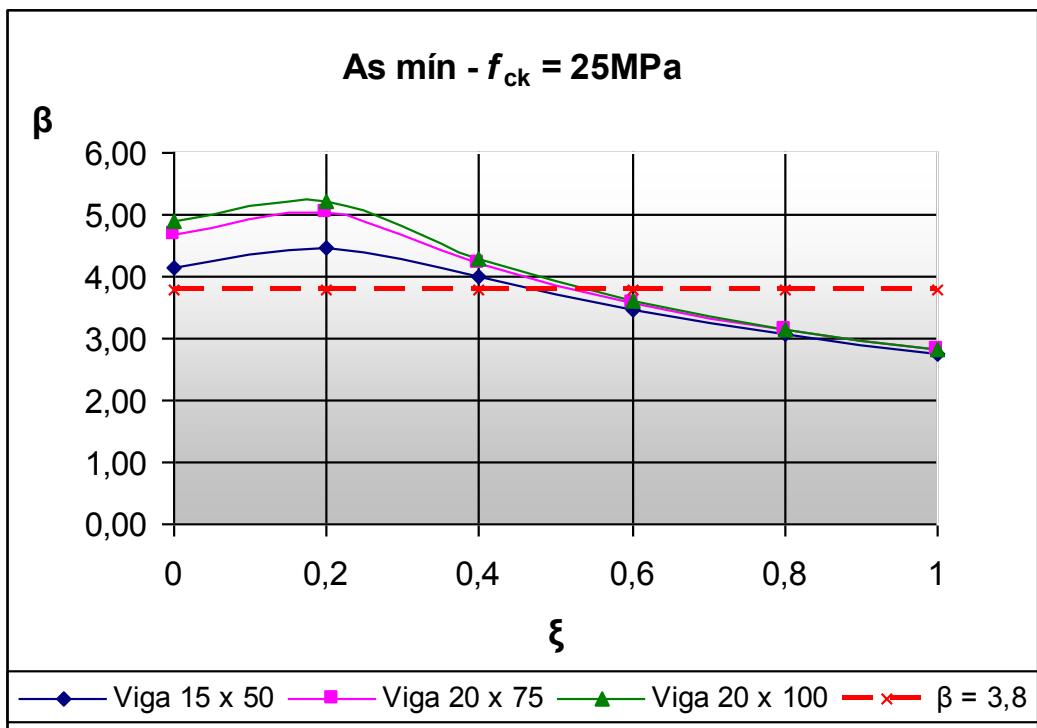


Figura 5-4 – Gráfico Vigas -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

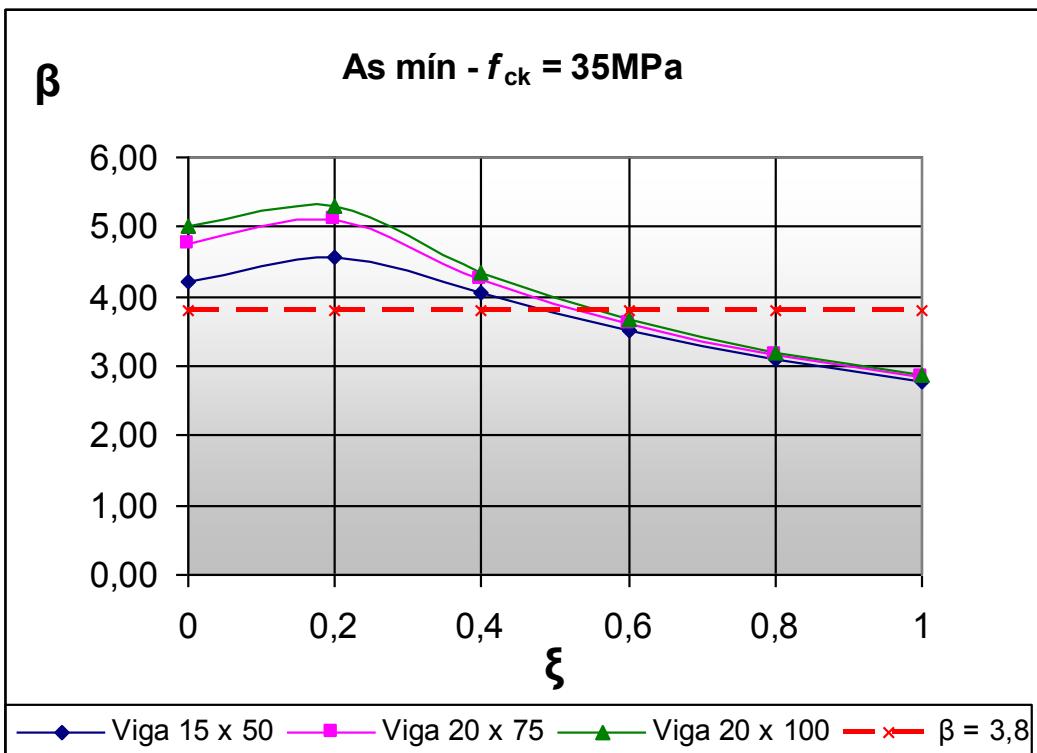


Figura 5-5 – Gráfico Vigas -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

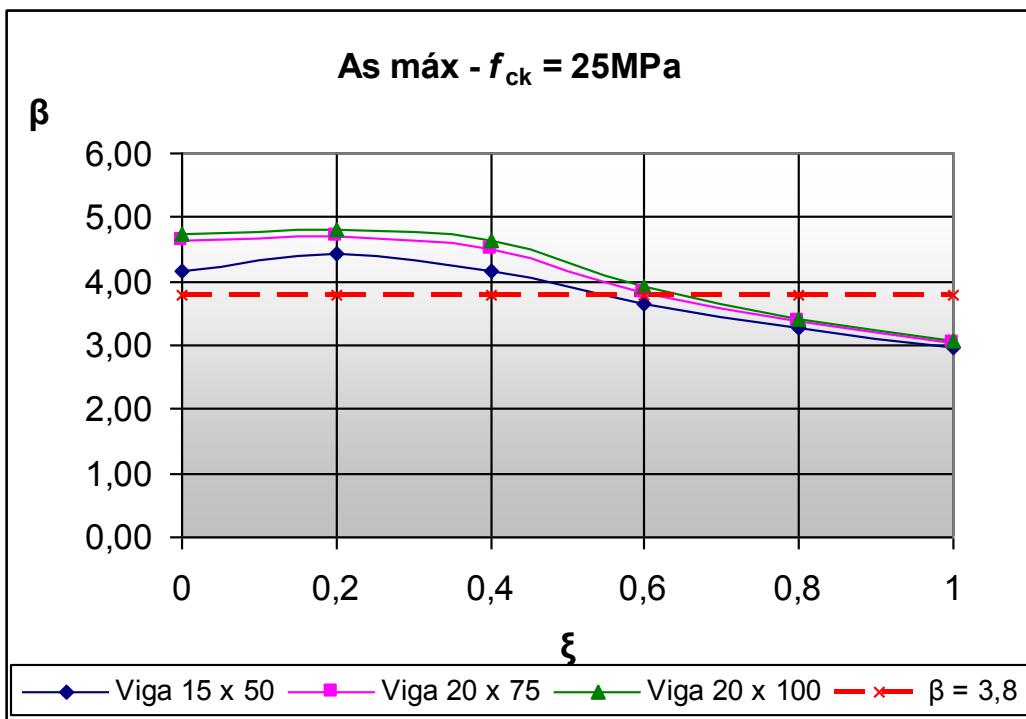


Figura 5-6 – Gráfico Vigas -  $A_{s,\text{máx}}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

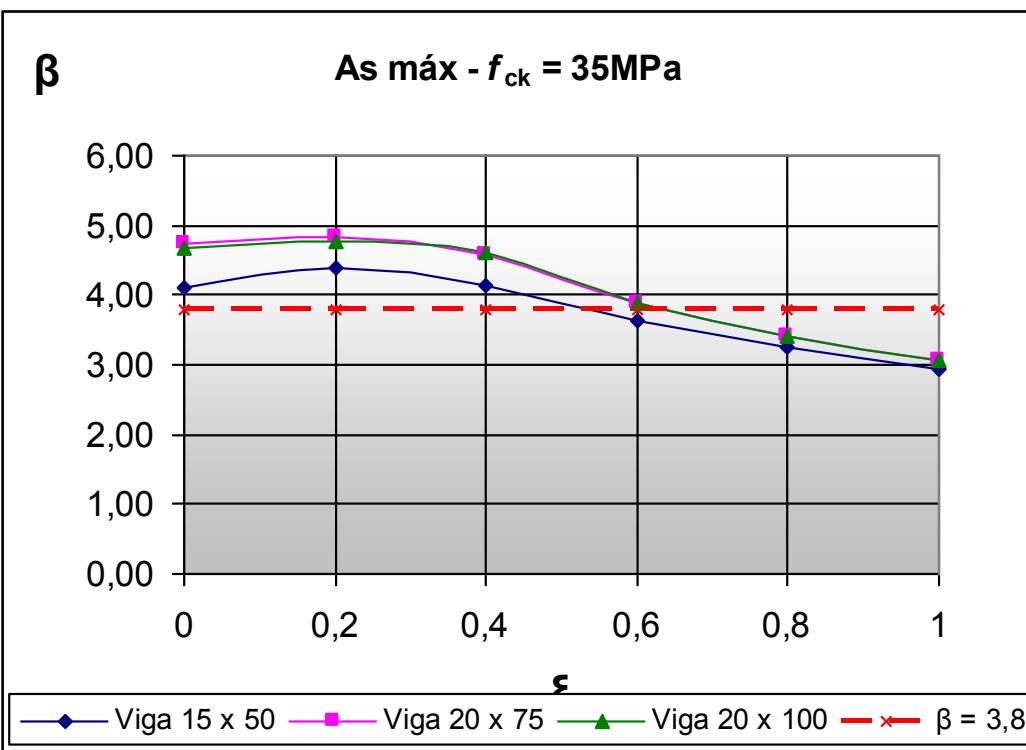


Figura 5-7 – Gráfico Vigas -  $A_{s,\text{máx}}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

### 5.2.3. Análise para as lajes

#### 5.2.3.1. Laje 100 x 10

I) Armadura mínima -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 100 \cdot 10 = 1,5 \text{cm}^2 / \text{m} \quad (5-59)$$

$$A_{s,adotado} = 1,56 \text{cm}^2 / \text{m} (\Phi 6, 3c.20)$$

$$M_{d,correspondente} = 6,31 \text{kN.m} / \text{m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{4,72}{1,0,072^2 \cdot \frac{25.000}{1,4}} = 0,051 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-60)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,077 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-61)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,077 = 0,969 \quad (5-62)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{4,72}{0,969 \cdot 0,072 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 1,56 \text{cm}^2 / \text{m} \quad (5-63)$$

II) Armadura mínima  $-f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_{s,min} = 0,201\% \cdot b \cdot h = \frac{0,201}{100} \cdot 100 \cdot 10 = 2,01 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-64)$$

$$A_{s,adotado} = 2,08 \text{ cm}^2 / \text{m} (\Phi 6,3c15)$$

$$M_{d,correspondente} = 6,31 \text{ kN.m / m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{6,31}{1,0,072 \cdot \frac{35.000}{1,4}} = 0,049 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-65)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,074 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-66)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,074 = 0,970 \quad (5-67)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{6,31}{0,970 \cdot 0,072 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 2,08 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-68)$$

III) Armadura máxima  $-f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 23,8 \text{ kN.m / m} \quad (5-69)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = \frac{0,0403 \cdot 23,8}{0,072} = 9,79 \text{ cm}^2 \quad (5-70)$$

$$A_{s,adotado} = 7,85 \text{ cm}^2 / \text{m} (\Phi 10c10)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 13,64 \text{ kN.m / m} \quad (5-71)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 19,09 \text{ kN.m / m} \quad (5-72)$$

IV) Armadura máxima -  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 33,32 \text{ kN.m / m} \quad (5-73)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 13,70 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-74)$$

$$A_{s,adotado} = 10,47 \text{ cm}^2 / \text{m} (\Phi 10c7,5)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 18,19 \text{ kN.m} \quad (5-75)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 25,46 \text{ kN.m / m} \quad (5-76)$$

Com isso, temos resumidamente:

Tabela 5-28 – Resumo Laje 100x10 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=25 \text{ MPa}$	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,10 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,072 m
Momento característico ( $M_k$ )	3,37 kN.m/m
Armadura ( $A_s$ )	1,56 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	$\Phi 6,3 \text{ mm c.20cm}$

Tabela 5-29 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 29900,000$	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 1,560	0,015	0,0234	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,072	0,20877	0,0150	0,072 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-30 – Resumo Laje 100x10 -  $A_{s,\min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura mínima - fck=35MPa	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,10 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,072 m
Momento característico ( $M_k$ )	4,50 kN.m/m
Armadura ( $A_s$ )	2,08 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	Φ6,3mm c.15cm

Tabela 5-31 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	fyk = 500 MPa
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * \text{COV}$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 2,080	0,015	0,0312	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,072	0,20877	0,0150	0,072 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-32 – Resumo Laje 100x10 -  $A_{s,\max}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura máxima - fck=25MPa	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,10 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,07 m
Momento característico ( $M_k$ )	13,64 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	7,85 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	Φ10mm c.10cm

Tabela 5-33 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	fyk = 500 MPa
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * \text{COV}$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 7,850	0,015	0,1178	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,070	0,21429	0,0150	0,070 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-34 – Resumo Laje 100x10 -  $A_{s,\max}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,10 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,07 m
Momento característico ( $M_k$ )	18,19 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	10,47 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	$\Phi 10\text{mm c.7,5cm}$

Tabela 5-35 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fc = 41860,000	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 10,470	0,015	0,1571	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,070	0,21429	0,0150	0,070 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

### 5.2.3.2. Laje 100 x 15

I) Armadura mínima -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot b \cdot h = \frac{0,15}{100} \cdot 100 \cdot 15 = 2,25 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-77)$$

$$A_{s,adotado} = 2,496 \text{ cm}^2 / \text{m} (\Phi 6,3c.12,5)$$

$$M_{d,correspondente} = 12,84 \text{ kN.m / m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{12,84}{1,0,122^2 \cdot \frac{25.000}{1,4}} = 0,048 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-78)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,073 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-79)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,073 = 0,971 \quad (5-80)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{12,84}{0,971 \cdot 0,122 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 2,496 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-81)$$

II) Armadura mínima  $-f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_{s,min} = 0,201\% \cdot b \cdot h = \frac{0,201}{100} \cdot 100 \cdot 15 = 3,015 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-82)$$

$$A_{s,adotado} = 3,12 \text{ cm}^2 / \text{m} (\Phi 6, 3c10)$$

$$M_{d,correspondente} = 16,1 \text{ kN.m / m}$$

Verificação:

$$k_{md} = \frac{M_d}{b_w \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{16,1}{1,0,122^2 \cdot \frac{35.000}{1,4}} = 0,043 < k_{md\lim} = 0,272 \quad (5-83)$$

$$k_x = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2k_{md}}{0,85}}}{0,80} = 0,065 < k_{x\lim} = 0,50 \quad (5-84)$$

$$k_z = 1 - 0,4 \cdot k_x = 1 - 0,4 \cdot 0,065 = 0,974 \quad (5-85)$$

$$A_s = \frac{M_{sd}}{z \cdot f_{yd} \cdot d} = \frac{16,1}{0,974 \cdot 0,122 \cdot \frac{500.000}{1,15}} = 3,12 \text{ cm}^2 / \text{m} \quad (5-86)$$

III) Armadura máxima  $-f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 69,94 \text{kN.m / m} \quad (5-87)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 16,78 \text{cm}^2 / \text{m} \quad (5-88)$$

$$A_{s,adotado} = 16,4 \text{cm}^2 / \text{m} (\Phi 12,5c7,5)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 48,83 \text{kN.m / m} \quad (5-89)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 68,37 \text{kN.m / m} \quad (5-90)$$

IV) Armadura máxima  $-f_{ck} = 35\text{MPa}$

$$kmd_{\lim} = 0,272$$

$$\alpha = 0,0403$$

$$M_d = kmd_{\lim} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} = 97,92 \text{kN.m / m} \quad (5-91)$$

$$A_s = \frac{\alpha M}{d} = 23,49 \text{cm}^2 / \text{m} \quad (5-92)$$

$$A_{s,adotado} = 20,1 \text{cm}^2 / \text{m} (\Phi 16c10)$$

$$M = \frac{A_s \cdot d}{\alpha} = 59,85 \text{kN.m} \quad (5-93)$$

$$M_{d,correspondente} = M \cdot 1,4 = 83,79 \text{kN.m / m} \quad (5-94)$$

Com isso, temos resumidamente:

Tabela 5-36 – Resumo Laje 100x15 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=25\text{MPa}$	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,15 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,122 m
Momento característico ( $M_k$ )	9,17 kN.m/m
Armadura ( $A_s$ )	2,496 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	Φ6,3mm c.12,5cm

Tabela 5-37 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	$fyk = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 2,496	0,015	0,0374	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,122	0,123102	0,0150	0,122 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-38 – Resumo Laje 100x15 -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura mínima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,15 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,122 m
Momento característico ( $M_k$ )	11,50 kN.m/m
Armadura ( $A_s$ )	3,12 cm <sup>2</sup>
Armadura adotada	Φ6,3mm c.10cm

Tabela 5-39 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 54,450	0,05	2,7225	$fyk = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 3,120	0,015	0,0468	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,122	0,123102	0,0150	0,122 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-40 – Resumo Laje 100x15 -  $A_{s,\max}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=25\text{MPa}$	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,15 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,12 m
Momento característico ( $M_k$ )	48,83 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	16,40 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	$\Phi 12,5\text{mm c.7,5cm}$

Tabela 5-41 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 29900,000$	0,15	4485,0000	$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 16,400	0,015	0,2460	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,120	0,125	0,0150	0,12 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

Tabela 5-42 – Resumo Laje 100x15 -  $A_{s,\max}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Armadura máxima - $f_{ck}=35\text{MPa}$	
Variável	Laje
Largura (b)	1 m
Altura (h)	0,15 m
cobrimento (c)	25mm
Altura útil (d)	0,12 m
Momento característico ( $M_k$ )	59,85 kN.m
Armadura ( $A_s$ )	20,10 $\text{cm}^2$
Armadura adotada	$\Phi 16\text{mm c.10cm}$

Tabela 5-43 – Parâmetros de entrada

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 $f_{ck} = 41860,000$	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 $f_{yk} = 54,450$	0,05	2,7225	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
MG	Carga Permanente	Normal	1,05 MG =	0,1	$\mu * COV$	MG
ML	Carga Acidental	Gumbel	0,934 ML =	0,2	$\mu * COV$	ML
As	Área de Aço	Normal	As = 20,100	0,015	0,3015	As
b	Largura da Laje	Normal	b = 1,000	0	0,0000	1 m
d	Altura útil	Normal	d = 0,120	0,125	0,0150	0,12 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,020	0,06	0,0612	1

### 5.2.3.3.Resultados

Tabela 5-44 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para lajes -  $A_{s,\min}$

As mín $\xi$	$\beta$			
	Laje 100 x 10		Laje 100 x 15	
	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35
0	1,82	1,86	2,85	2,89
0,2	1,91	1,95	3,02	3,07
0,4	1,98	2,02	3,08	3,13
0,6	2,02	2,06	2,94	2,95
0,8	2,03	2,06	2,73	2,77
1	2,01	2,04	2,54	2,57

Tabela 5-45 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para lajes -  $A_{s,\max}$

As máx $\xi$	$\beta$			
	Laje 100 x 10		Laje 100 x 15	
	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35
0	1,81	1,84	2,73	2,87
0,2	1,89	1,91	2,87	3,02
0,4	1,94	1,97	2,94	3,08
0,6	1,99	2,01	2,90	3,02
0,8	2,01	2,03	2,76	2,87
1	2,00	2,03	2,60	2,69

Para a Laje 100 x 10 foi estudado um coeficiente adicional de majoração  $\gamma = 1,4$  (dividindo o  $M_k$  pelo fator  $\gamma$ ) com o intuito de melhorar os resultados para o coeficiente  $\beta$ . Os valores encontrados são apresentados nas Tabelas abaixo, e plotados nos gráficos em sequência. A título de comparação são também plotados nas figuras os resultados da viga 15 x 50.

Tabela 5-46 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para lajes com coeficiente adicional  $\gamma = 1,4$  -  $A_{s,\min}$

As mín $\xi$	$\beta$	
	Laje 100 x 10	
	fck = 25	fck = 35
0	2,64	2,67
0,2	2,71	2,73
0,4	2,76	2,78
0,6	2,79	2,81
0,8	2,79	2,81
1	2,76	2,79

Tabela 5-47 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para lajes com coeficiente adicional  $\gamma = 1,4$  -  $A_{s,\max}$

As máx $\xi$	$\beta$	
	Laje 100 x 10	
	fck = 25	fck = 35
0	2,47	2,49
0,2	2,52	2,55
0,4	2,56	2,59
0,6	2,59	2,62
0,8	2,61	2,63
1	2,61	2,63

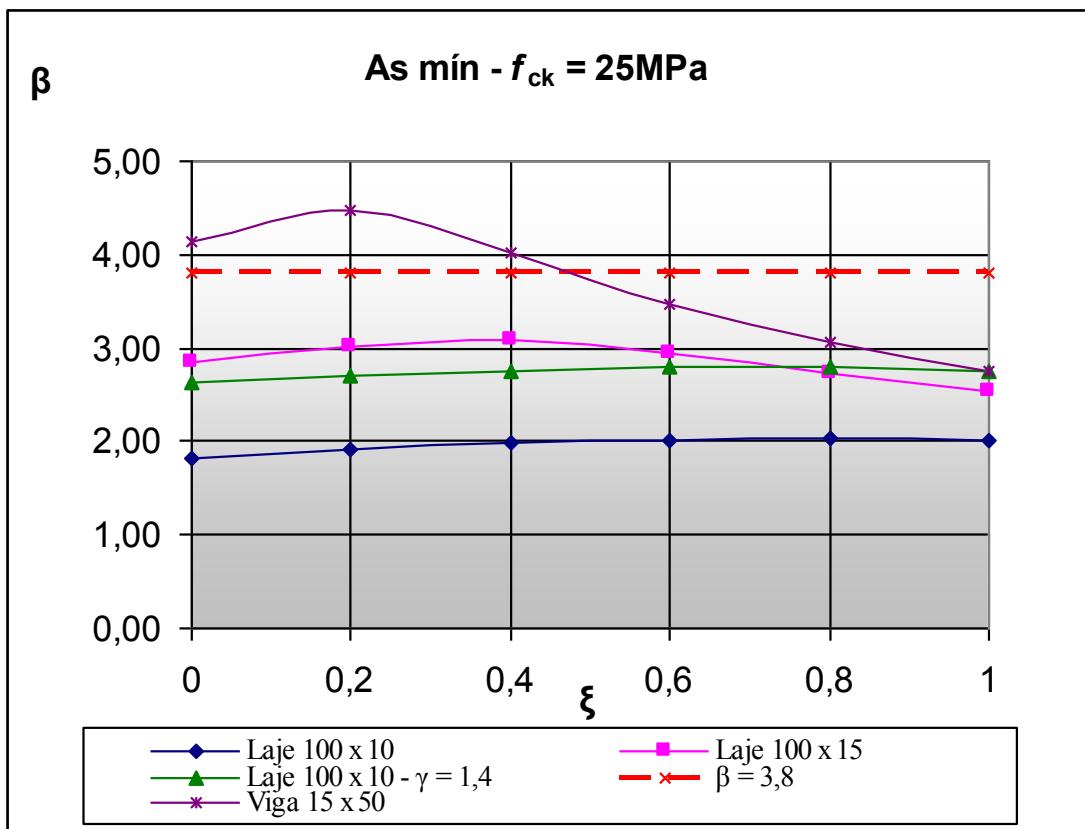


Figura 5-8 – Gráfico Lajes -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

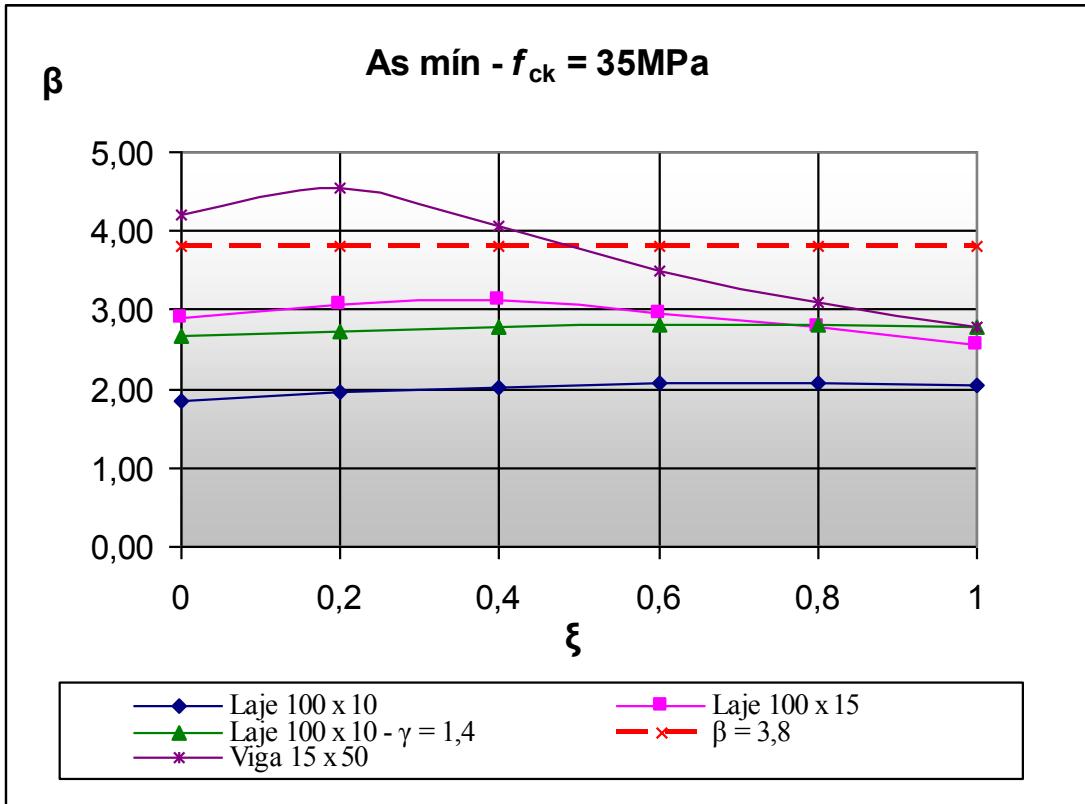


Figura 5-9 – Gráfico Lajes -  $A_{s,min}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

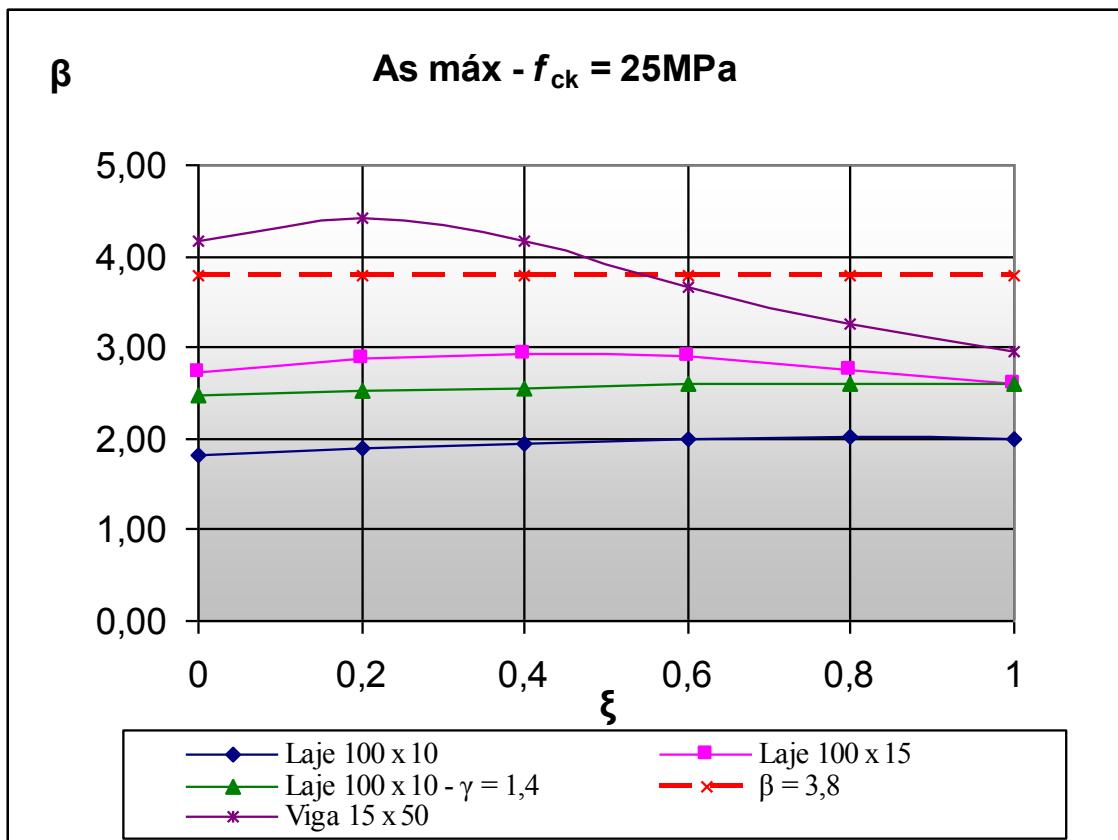


Figura 5-10 – Gráfico Lajes -  $A_{s,\text{máx}}$  e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

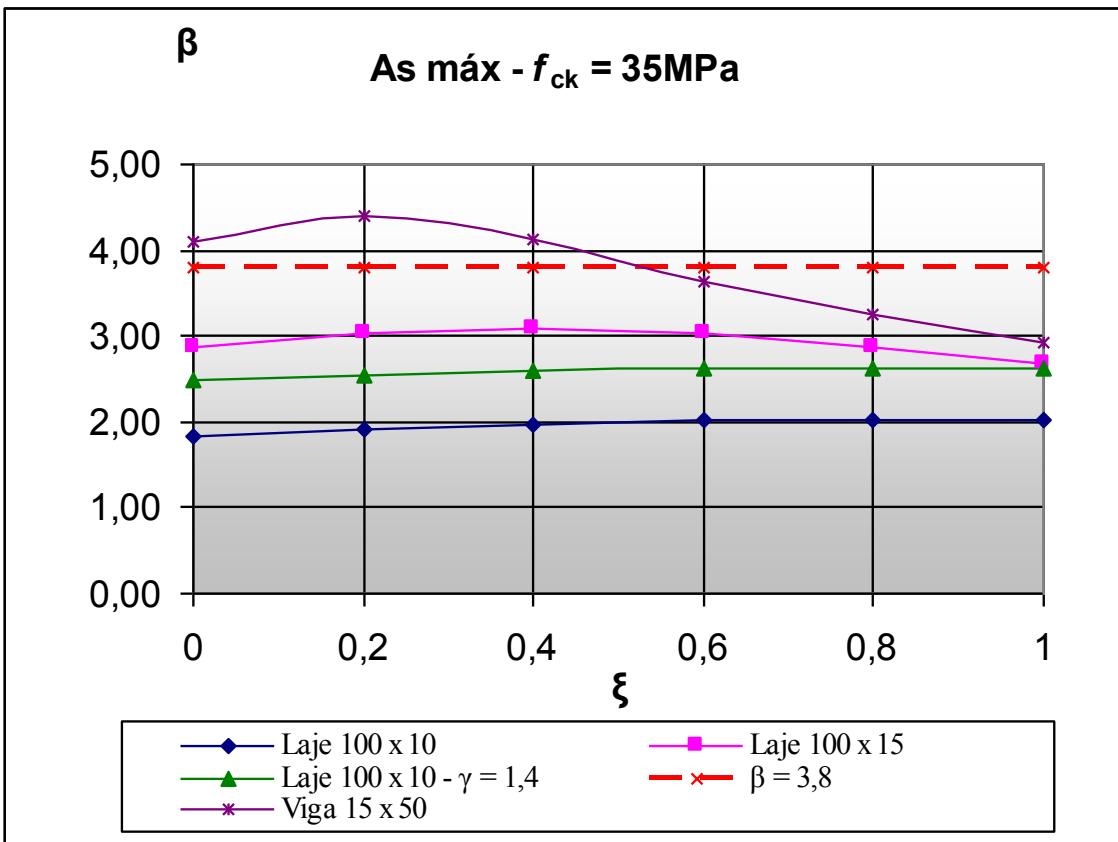


Figura 5-11 – Gráfico Lajes -  $A_{s,\text{máx}}$  e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

É possível notar um comportamento diferente entre as curvas de lajes e vigas. Isso pode ser explicado pela importância de cada variável. Nas lajes a variável  $d$  é a de maior importância no valor final da probabilidade de falha. Isso significa dizer que é ela quem dirige diretamente um maior ou menor valor de  $\beta$ , diferentemente das vigas onde é possível identificar as solicitações como as variáveis mais notáveis, principalmente a variável carga acidental. Os gráficos abaixo, retirados da saída do programa Vap 1.6[13] traduzem melhor este conceito:

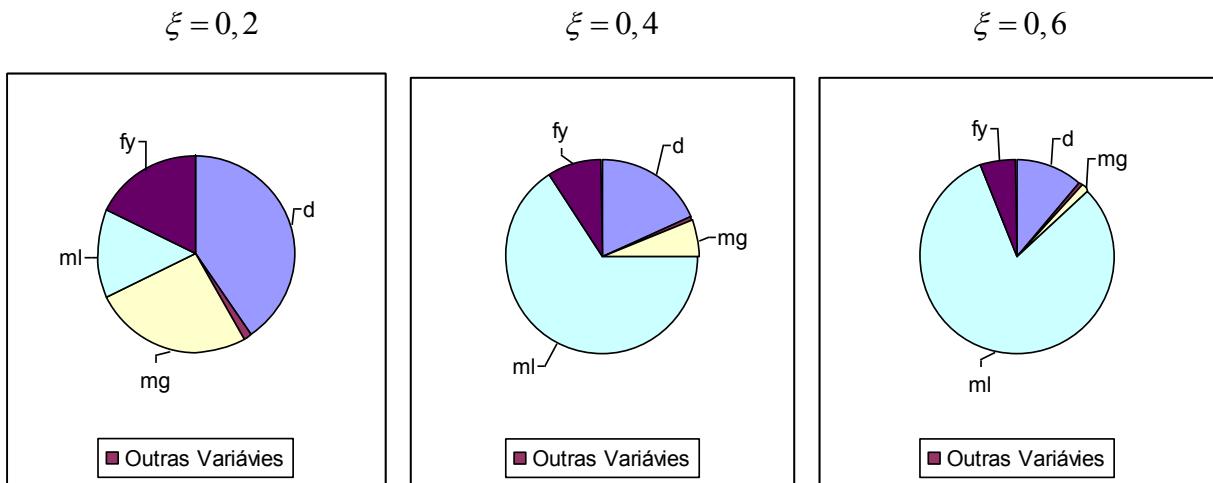


Figura 5-12 – Fatores de importância para Viga 15 x 50,  $A_{s,min}$

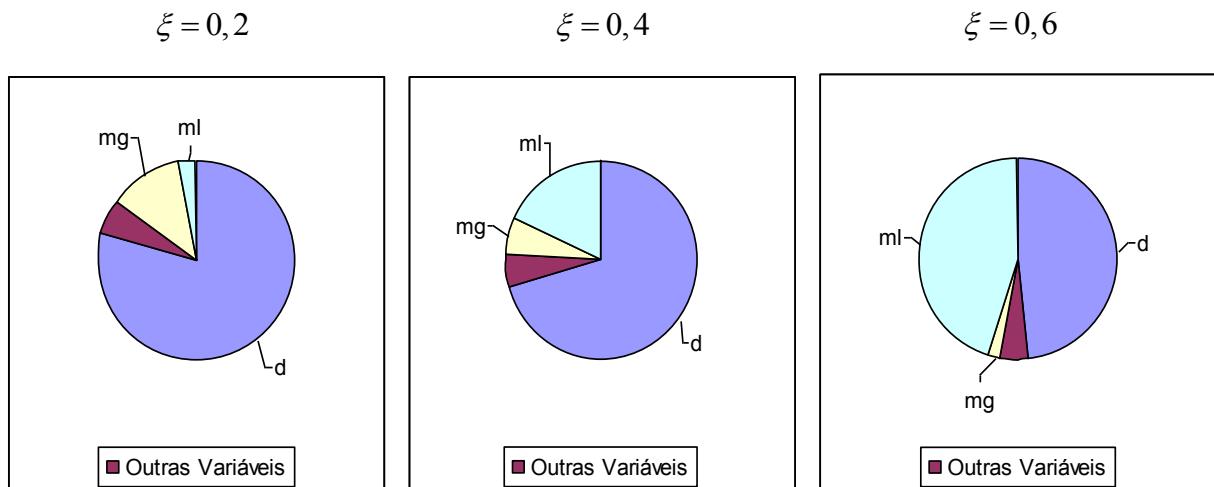


Figura 5-13 – Fatores de importância para Laje 100 x 15,  $A_{s,min}$

### 5.3. Estudo dos Pilares

Como descrito na Tabela 5-1, os estudos de confiabilidade para pilares foram realizados em peças com dimensões 12x60, 15x60 e 20x60 cm<sup>2</sup>. As colunas são consideradas curtas, sem a presença de efeito de segunda ordem. Foram estudados 3 casos de atuação das forças normais e momentos fletores, e seus valores adimensionais são apresentados a seguir:

$$\underline{\text{Caso 1}} - \eta = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = -1,5 \quad (5-95)$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,1 \quad (5-96)$$

$$\underline{\text{Caso 2}} - \eta = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = -1,0 \quad (5-97)$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,1 \quad (5-98)$$

$$\underline{\text{Caso 3}} - \eta = \frac{N_d}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = -1,0 \quad (5-99)$$

$$\mu = \frac{M_d}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0,2 \quad (5-100)$$

#### 5.3.1. Definição da função de falha

A função de falha é definida de acordo com as considerações feitas no Item 3.6.2 deste trabalho, com base no Método Simplificado para dimensionamento à flexão composta, da NBR 6118[1], sendo definida como:

$$Z = \theta_M \cdot [R - S] = \theta_M \cdot \left[ A_s \cdot f_y + 0,85 \cdot b \cdot h \cdot f_c - (N_G + N_L) \cdot \left( 1 + \frac{\mu / \eta}{(0,39 + 0,01 \cdot \alpha) - 0,8 \cdot \frac{d}{h}} \right) \right] \quad (5-101)$$

### 5.3.2. Pilar 12 x 60

I) Caso 1 -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_s = 32,16\text{cm}^2 (16\Phi16)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 7 \quad (5-102)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,12} \right)} = 5,45 \quad (5-103)$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 2444kN \quad (5-104)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106)$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1792kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1280kN \quad (5-107) \text{ e } (5-108)$$

II) Caso 2 -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_s = 17,22\text{cm}^2 (14\Phi12,5)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 6 \quad (5-109)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,12} \right)} = 5,45 \quad (5-103 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 1816kN \quad (5-110)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1175kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 839,3kN \quad (5-111) \text{ e } (5-112)$$

III) Caso 3 -  $f_{ck} = 25MPa$

$$A_s = 40,2cm^2 (20\Phi 16)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 9 \quad (5-113)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,12} \right)} = 5,45 \quad (5-103 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 2781kN \quad (5-114)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1330kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 950kN \quad (5-115) \text{ e } (5-116)$$

IV) Caso 1 -  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_s = 44,22 \text{ cm}^2 (22\Phi16)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 10 \quad (5-117)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,12} \right)} = 5,45 \quad (5-103 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 3387 \text{ kN} \quad (5-118)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 2484 \text{ kN} \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1774,3 \text{ kN} \quad (5-119) \text{ e } (5-120)$$

V) Caso 2 -  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_s = 22,14 \text{ cm}^2 (18\Phi12,5)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 8 \quad (5-121)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,12} \right)} = 5,45 \quad (5-103 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 2460 \text{ kN} \quad (5-122)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1592kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1137,1kN \quad (5-123) \text{ e } (5-124)$$

VI) Caso 3 -  $f_{ck} = 35MPa$

$$A_s = 56,52cm^2 (18\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 8 \quad (5-121 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,12} \right)} = 5,45 \quad (5-103 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 3904kN \quad (5-125)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1867kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1333,6kN \quad (5-126) \text{ e } (5-127)$$

Com isso, temos as seguintes tabelas para entrada no programa Vap 1.6[13]:

Tabela 5-48- Caso 1 –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 32,160	0,015	0,4824	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,120	0,083	0,0100	0,12 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-49- Caso 2 –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 17,220	0,015	0,2583	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,120	0,083	0,0100	0,12 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-50- Caso 3 –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 40,200	0,015	0,603	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,120	0,083	0,0100	0,12 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-51- Caso 1 –  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 44,220	0,015	0,6633	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,120	0,083	0,0100	0,12 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-52- Caso 2 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 22,140	0,015	0,3321	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,120	0,083	0,0100	0,12 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-53- Caso 3 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 56,520	0,015	0,8478	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,120	0,083	0,0100	0,12 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

### 5.3.3. Pilar 15 x 60

I) Caso 1 - $f_{ck} = 25\text{MPa}$

$$A_s = 43,96\text{cm}^2(14\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 6 \quad (5-109 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,15} \right)} = 4,22 \quad (5-128)$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 3212\text{kN} \quad (5-129)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 2506kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1790kN \quad (5-130) \text{ e } (5-131)$$

II) Caso 2 -  $f_{ck} = 25MPa$

$$A_s = 20,1cm^2(10\Phi16)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 4 \quad (5-132)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 4) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,15} \right)} = 4,61 \quad (5-133)$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 2210kN \quad (5-134)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1512kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1080kN \quad (5-135) \text{ e } (5-136)$$

III) Caso 3 -  $f_{ck} = 25MPa$

$$A_s = 36,18cm^2(18\Phi16)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 9 \quad (5-113 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,15} \right)} = 4,22 \quad (5-128 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 2886kN \quad (5-137)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 1564kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1117,1kN \quad (5-138) \text{ e } (5-139)$$

IV) Caso 1 -  $f_{ck} = 35MPa$

$$A_s = 56,52cm^2 (18\Phi20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 8 \quad (5-121 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,15} \right)} = 4,22 \quad (5-128 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 4286kN \quad (5-140)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left(1 + \beta \frac{e}{h}\right)} = 3344kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 2388,6kN \quad (5-141) \text{ e } (5-142)$$

V) Caso 2 -  $f_{ck} = 35MPa$

$$A_s = 28,14cm^2(14\Phi16)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 8 \quad (5-121 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left((0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,15}\right)} = 4,22 \quad (5-128 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 3094kN \quad (5-143)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left(1 + \beta \frac{e}{h}\right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left(1 + \beta \frac{e}{h}\right)} = 2175kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1553,6kN \quad (5-144) \text{ e } (5-145)$$

VI) Caso 3 -  $f_{ck} = 35MPa$

$$A_s = 50,24cm^2(16\Phi20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 8 \quad (5-121 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left((0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,15}\right)} = 4,22 \quad (5-128 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 4023kN \quad (5-146)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 2180kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1557,1kN \quad (5-147) \text{ e } (5-148)$$

Com isso, temos as seguintes tabelas para entrada no programa Vap 1.6[13]:

Tabela 5-54- Caso 1 -  $f_{ck} = 25MPa$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa	
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * COV$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * COV$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 43,960	0,015	0,6594	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,150	0,067	0,0100	0,15 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-55- Caso 2 -  $f_{ck} = 25MPa$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * COV$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * COV$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 20,100	0,015	0,3015	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,150	0,067	0,0100	0,15 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-56- Caso 3 - $f_{ck} = 25\text{MPa}$ 

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 36,180	0,015	0,5427	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,150	0,067	0,0100	0,15 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-57- Caso 1 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$ 

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 56,520	0,015	0,8478	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,150	0,067	0,0100	0,15 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-58- Caso 2 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$ 

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 28,140	0,015	0,4221	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,150	0,067	0,0100	0,15 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-59- Caso 3 - $f_{ck} = 35\text{MPa}$ 

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 50,240	0,015	0,7536	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,150	0,067	0,0100	0,15 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

### 5.3.4. Pilar 20 x 60

I) Caso 1 -  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$A_s = 50,24 \text{ cm}^2 (16\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 7 \quad (5-107 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,20} \right)} = 3,45 \quad (5-149)$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 3932 \text{ kN} \quad (5-150)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 3197 \text{ kN} \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 2283,6 \text{ kN} \quad (5-151) \text{ e } (5-152)$$

II) Caso 2 -  $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$A_s = 25,12 \text{ cm}^2 (8\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 3 \quad (5-153)$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 3) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,20} \right)} = 3,85 \quad (5-154)$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 2876kN \quad (5-155)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left(1 + \beta \frac{e}{h}\right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left(1 + \beta \frac{e}{h}\right)} = 2077kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1583,6kN \quad (5-156) \text{ e } (5-157)$$

III) Caso 3 -  $f_{ck} = 25MPa$

$$A_s = 43,96cm^2 (14\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 6 \quad (5-109 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left(0,39 + 0,01 \cdot 6\right) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,20}} = 3,45 \quad (5-149 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 3668kN \quad (5-158)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left(1 + \beta \frac{e}{h}\right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left(1 + \beta \frac{e}{h}\right)} = 2171kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 1550,7kN \quad (5-159) \text{ e } (5-160)$$

IV) Caso 1 -  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_s = 69,08 \text{ cm}^2 (22\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 10 \quad (5-117 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{(0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,20}} = 3,45 \quad (5-149 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 5451 \text{ kN} \quad (5-161)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 4432 \text{ kN} \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 3165,7 \text{ kN} \quad (5-162) \text{ e } (5-163)$$

V) Caso 2 -  $f_{ck} = 35 \text{ MPa}$

$$A_s = 37,68 \text{ cm}^2 (12\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 5 \quad (5-164)$$

$$\beta = \frac{1}{(0,39 + 0,01 \cdot 5) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,20}} = 3,57 \quad (5-165)$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 4133 \text{ kN} \quad (5-166)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 3045kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 2175kN \quad (5-167) \text{ e } (5-168)$$

VI) Caso 3 -  $f_{ck} = 35MPa$

$$A_s = 56,52cm^2 (18\Phi 20)$$

$$\alpha_s = \frac{(n_h - 1)}{(n_v - 1)} = 8 \quad (5-121 \text{ repetida})$$

$$\beta = \frac{1}{\left( (0,39 + 0,01 \cdot 6) - 0,8 \cdot \frac{0,04}{0,20} \right)} = 3,45 \quad (5-149 \text{ repetida})$$

Esforço normal resistente na seção:

$$N_{Rd} = b \cdot h \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd,2\%} = 4924kN \quad (5-169)$$

Sabendo que:

$$N_{d,eq} = N_d \left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right), \text{ sendo } e = \frac{M_d}{N_d} \quad (5-105) \text{ e } (5-106) \text{ repetidas}$$

E fazendo  $N_{Rd} = N_{d,eq}$ , temos:

$$N_d = \frac{N_{Rd}}{\left( 1 + \beta \frac{e}{h} \right)} = 2914kN \text{ e } N_k = \frac{N_d}{1,4} = 2081,4kN \quad (5-170) \text{ e } (5-171)$$

Com isso, temos as seguintes tabelas para entrada no programa Vap 1.6[13]:

Tabela 5-60- Caso 1 –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 50,240	0,015	0,7536	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-61- Caso 2 –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 25,120	0,015	0,3768	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-62- Caso 3 –  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 29900,000	0,15	4485,0000	fck = 25 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 43,960	0,015	0,6594	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-63- Caso 1 –  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	1,196 fck = 41860,000	0,15	6279,0000	fck = 35 MPa
fy	Resistência do Aço	Normal	1,089 fyk = 45,738	0,05	2,2869	fyk = 500 MPa
NG	Carga Permanente	Normal	1,05 NG =	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	0,934 NL =	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	As = 69,080	0,015	1,0362	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	b = 0,600	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	h = 0,200	0,05	0,0100	0,20 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	d' = 0,040	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	theta = 1,000	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-64- Caso 2 –  $f_{ck} = 35\text{MPa}$ 

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	$1,196 f_{ck} = 41860,000$	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	$1,089 f_{yk} = 45,738$	0,05	2,2869	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
NG	Carga Permanente	Normal	$1,05 \text{ NG} =$	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	$0,934 \text{ NL} =$	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	$As = 37,680$	0,015	0,5652	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	$b = 0,600$	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	$h = 0,200$	0,05	0,0100	0,20 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	$d' = 0,040$	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\thetaeta = 1,000$	0,08	0,0800	1,00

Tabela 5-65- Caso 3 –  $f_{ck} = 35\text{MPa}$ 

Variável	Descrição	Distribuição	Média $\mu$	COV	$\sigma$	Valor Característico
fc	Resistência do Concreto	Normal	$1,196 f_{ck} = 41860,000$	0,15	6279,0000	$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$
fy	Resistência do Aço	Normal	$1,089 f_{yk} = 45,738$	0,05	2,2869	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
NG	Carga Permanente	Normal	$1,05 \text{ NG} =$	0,1	$\mu * \text{COV}$	NG
NL	Carga Acidental	Gumbel	$0,934 \text{ NL} =$	0,2	$\mu * \text{COV}$	NL
As	Área de Aço	Normal	$As = 56,520$	0,015	0,8478	As
b	Comprimento do Pilar	Normal	$b = 0,600$	0,04	0,0240	0,60 m
h	Largura do Pilar	Normal	$h = 0,200$	0,05	0,0100	0,20 m
d'	distância do eixo das barras à face do concreto	Normal	$d' = 0,040$	0,125	0,0050	0,04 m
theta	fator de modelagem	Normal	$\thetaeta = 1,000$	0,08	0,0800	1,00

### 5.3.5. Resultados

Tabela 5-66 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para Pilares – Caso 1

Caso 1 $\xi$	$\beta$					
	Pilar 20 x 60		Pilar 15 x 60		Pilar 12 x 60	
	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35
0	4,20	4,19	4,01	4,00	2,67	2,68
0,2	4,48	4,47	4,29	4,27	2,74	2,74
0,4	4,19	4,19	4,05	4,05	2,78	2,79
0,6	3,68	3,68	3,58	3,59	2,81	2,81
0,8	3,28	3,28	3,20	3,21	2,82	2,82
1	2,97	2,98	2,90	2,92	2,75	2,75

Tabela 5-67 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para Pilares – Caso 2

Caso 2 $\xi$	$\beta$					
	Pilar 20 x 60		Pilar 15 x 60		Pilar 12 x 60	
	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35	fck = 25	fck = 35
0	3,88	3,92	3,60	3,70	2,54	2,55
0,2	4,10	4,14	3,79	3,91	2,61	2,61
0,4	4,05	4,07	3,80	3,89	2,65	2,66
0,6	3,72	3,72	3,56	3,60	2,68	2,69
0,8	3,38	3,37	3,26	3,29	2,69	2,70
1	3,09	3,09	3,01	3,03	2,68	2,69

Tabela 5-68 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para Pilares – Caso 3

Caso 3 $\xi$	$\beta$					
	Pilar 20 x 60 fck = 25 fck = 35		Pilar 15 x 60 fck = 25 fck = 35		Pilar 12 x 60 fck = 25 fck = 35	
0	4,04	4,02	3,42	3,42	2,15	2,15
0,2	4,31	4,27	3,59	3,59	2,23	2,23
0,4	4,11	4,10	3,63	3,63	2,28	2,28
0,6	3,66	3,67	3,41	3,41	2,32	2,32
0,8	3,28	3,30	3,12	3,12	2,33	2,33
1	2,98	3,00	2,86	2,86	2,31	2,31

De acordo com a Tabela 3-3 foram rodadas situações com um coeficiente adicional de majoração para os pilares 12 x 60 e 15 x 60, com o intuito de melhorar os resultados para o coeficiente  $\beta$ . Os valores encontrados são apresentados nas Tabelas abaixo, e plotados nos gráficos em sequência.

Tabela 5-69 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para Pilares com coeficiente adicional  $\gamma_n$  - Caso 1

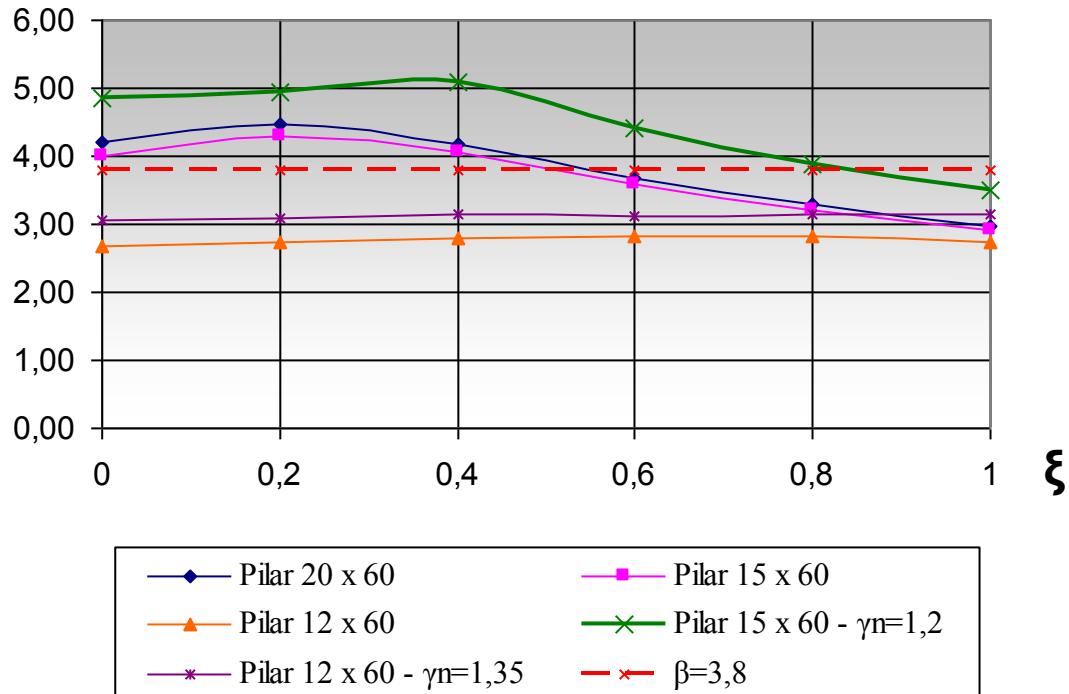
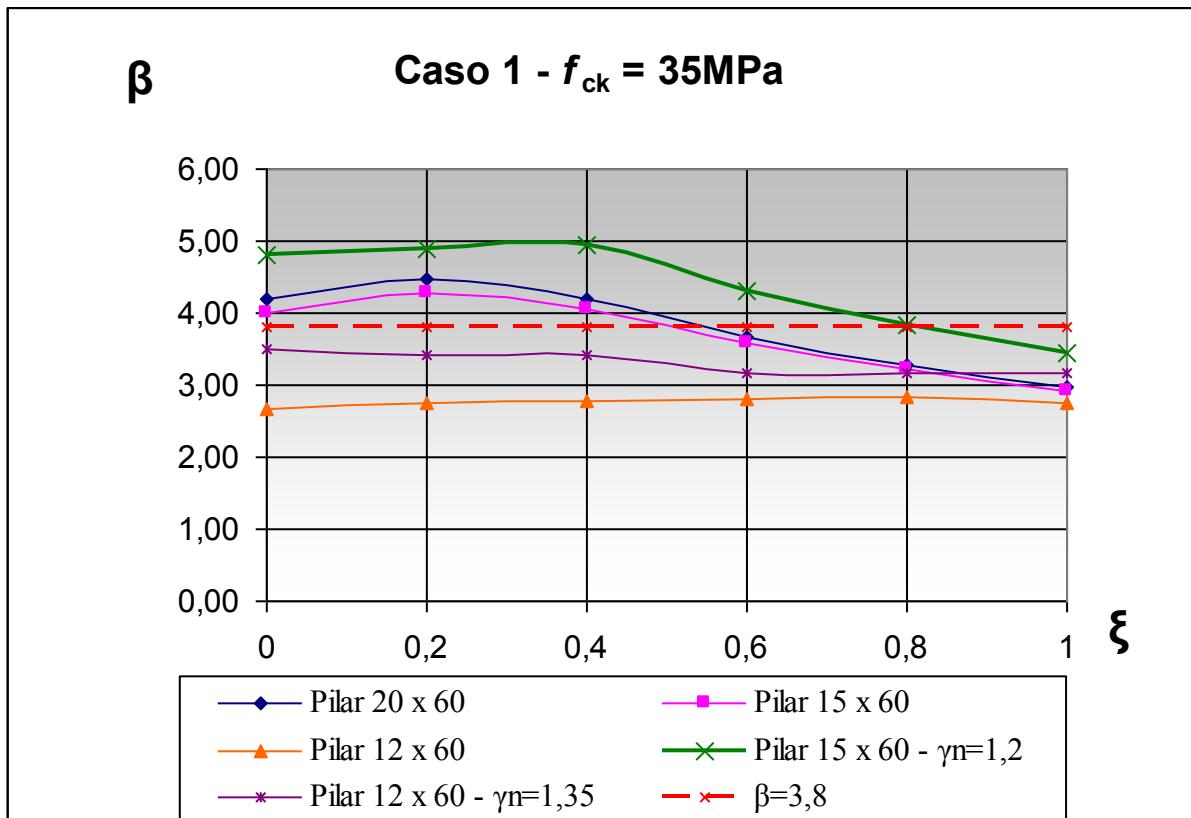
Caso 1 $\xi$	$\beta$ (COM COEFICIENTE ADICIONAL $\gamma$ )			
	Pilar 15 x 60 fck = 25 fck = 35		Pilar 12 x 60 fck = 25 fck = 35	
0	4,86	4,81	3,06	3,50
0,2	4,94	4,90	3,09	3,42
0,4	5,08	4,95	3,15	3,43
0,6	4,40	4,31	3,13	3,16
0,8	3,89	3,82	3,15	3,17
1	3,51	3,45	3,16	3,18

Tabela 5-70 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para Pilares com coeficiente adicional  $\gamma_n$  - Caso 2

Caso 2 $\xi$	$\beta$ (COM COEFICIENTE ADICIONAL $\gamma$ )			
	Pilar 15 x 60 fck = 25 fck = 35		Pilar 12 x 60 fck = 25 fck = 35	
0	4,53	4,61	2,94	3,05
0,2	4,64	4,71	2,97	3,00
0,4	4,69	4,75	3,00	3,02
0,6	4,29	4,40	3,02	3,04
0,8	3,88	3,97	3,04	3,06
1	3,55	3,62	3,05	3,07

Tabela 5-71 – Índice de confiabilidade  $\beta$  para Pilares com coeficiente adicional  $\gamma_n$  - Caso 3

Caso 3 $\xi$	$\beta$ (COM COEFICIENTE ADICIONAL $\gamma$ )			
	Pilar 15 x 60 fck = 25 fck = 35		Pilar 12 x 60 fck = 25 fck = 35	
0	4,03	4,08	2,66	2,64
0,2	4,15	4,20	2,71	2,68
0,4	4,20	4,24	2,74	2,72
0,6	4,03	4,09	2,77	2,75
0,8	3,67	3,73	2,79	2,77
1	3,35	3,41	2,79	2,78

**β****Caso 1 -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$** Figura 5-14 – Gráfico Pilares – Caso 1 e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$ **β****Caso 1 -  $f_{ck} = 35\text{MPa}$** Figura 5-15 – Gráfico Pilares – Caso 1 e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

**β**

**Caso 2 -  $f_{ck} = 25\text{MPa}$**

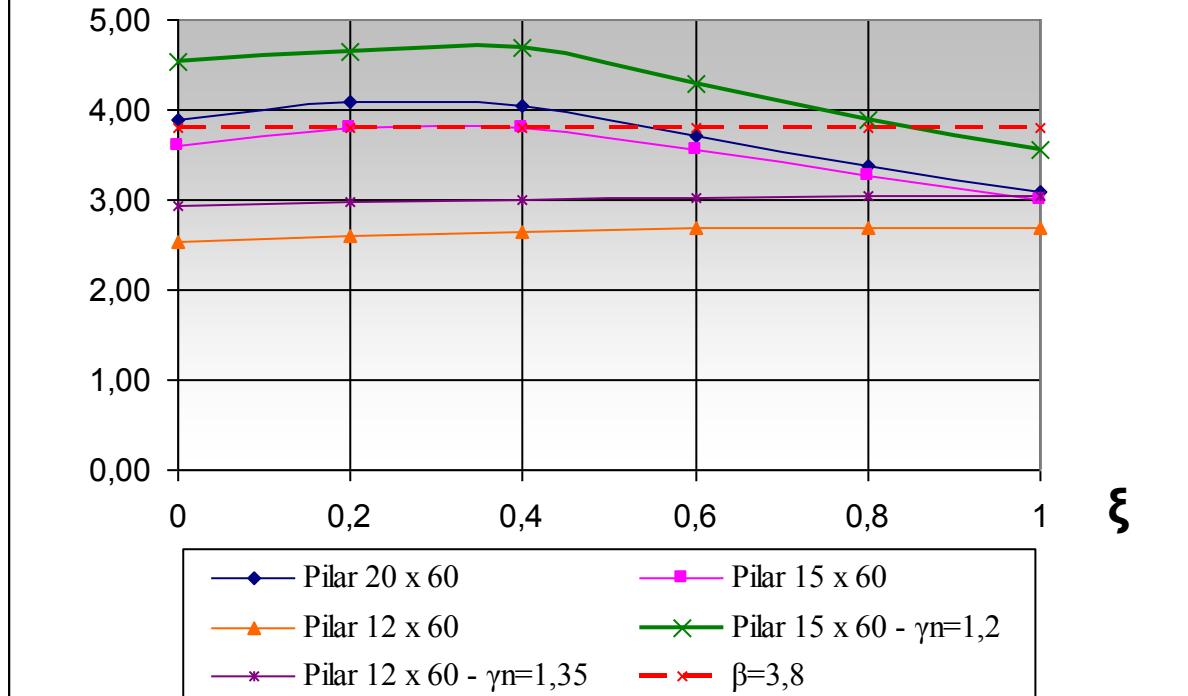


Figura 5-16 – Gráfico Pilares – Caso 2 e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

**β**

**Caso 2 -  $f_{ck} = 35\text{MPa}$**

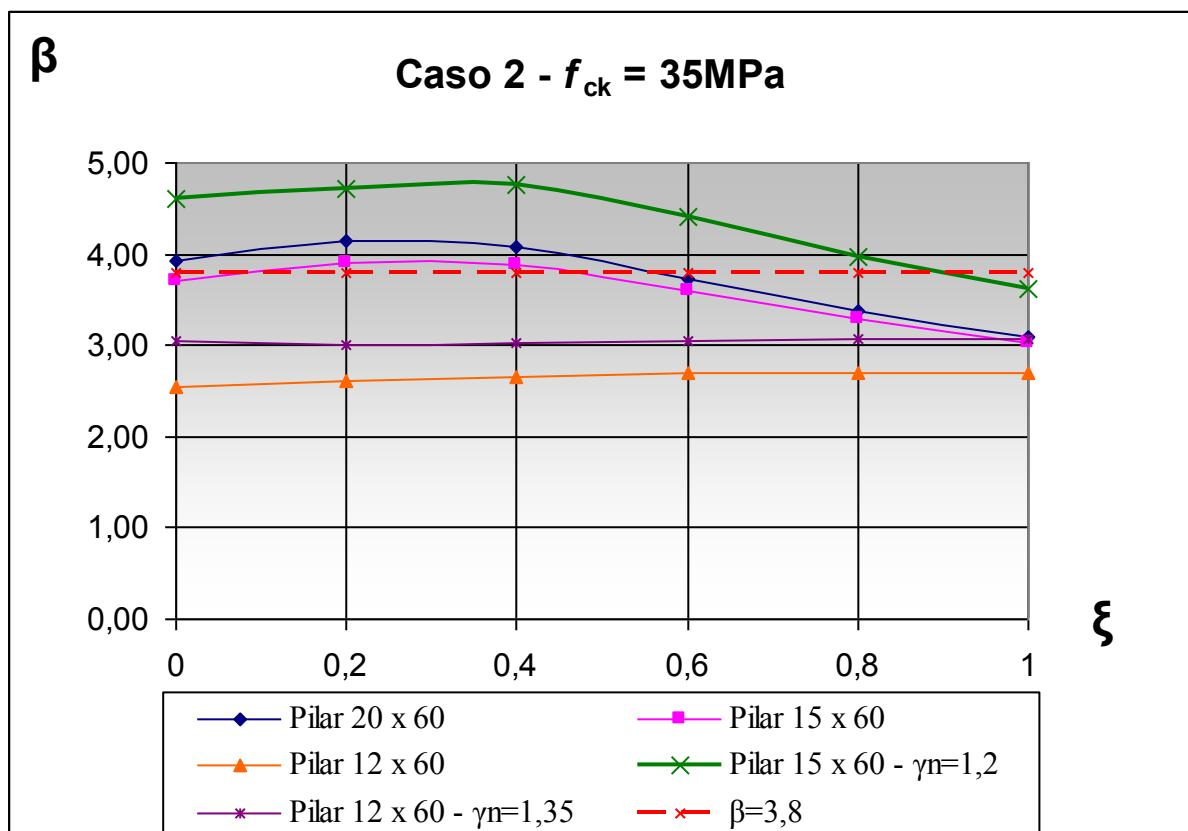


Figura 5-17 – Gráfico Pilares – Caso 2 e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

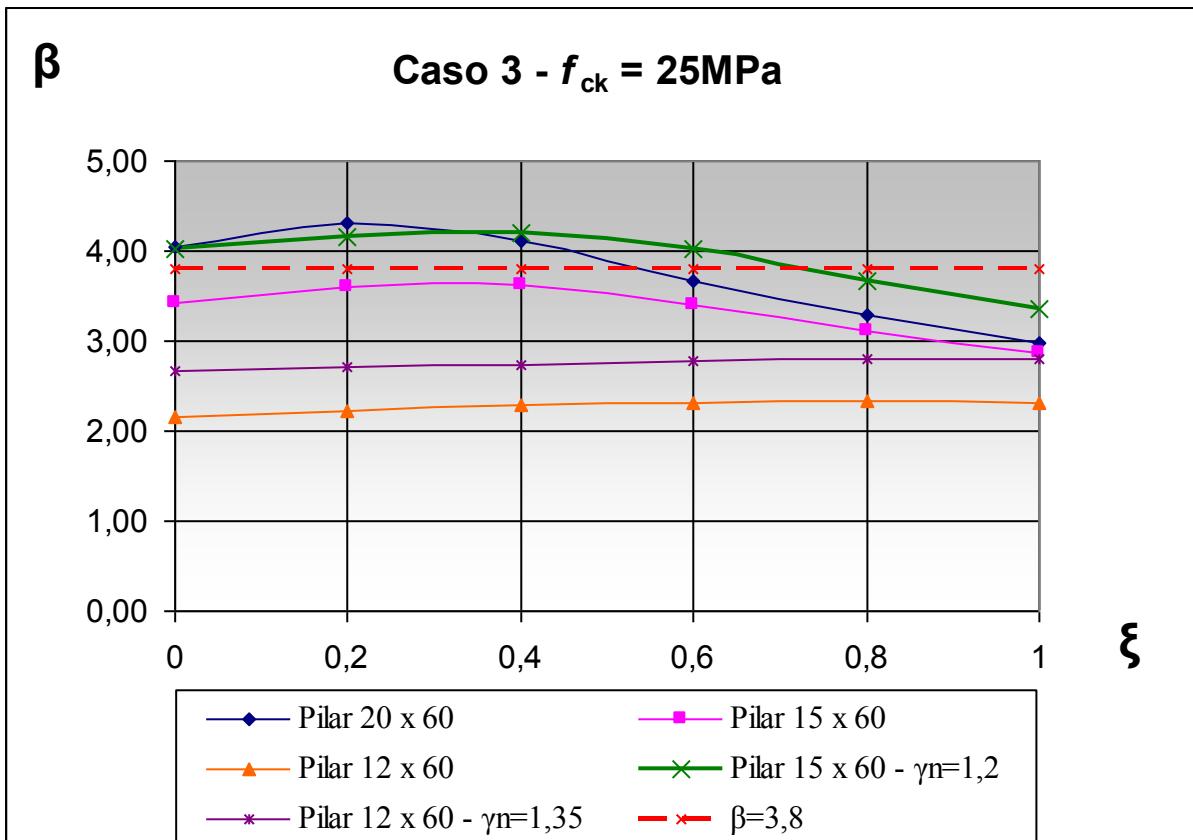


Figura 5-18 – Gráfico Pilares – Caso 3 e  $f_{ck} = 25\text{MPa}$

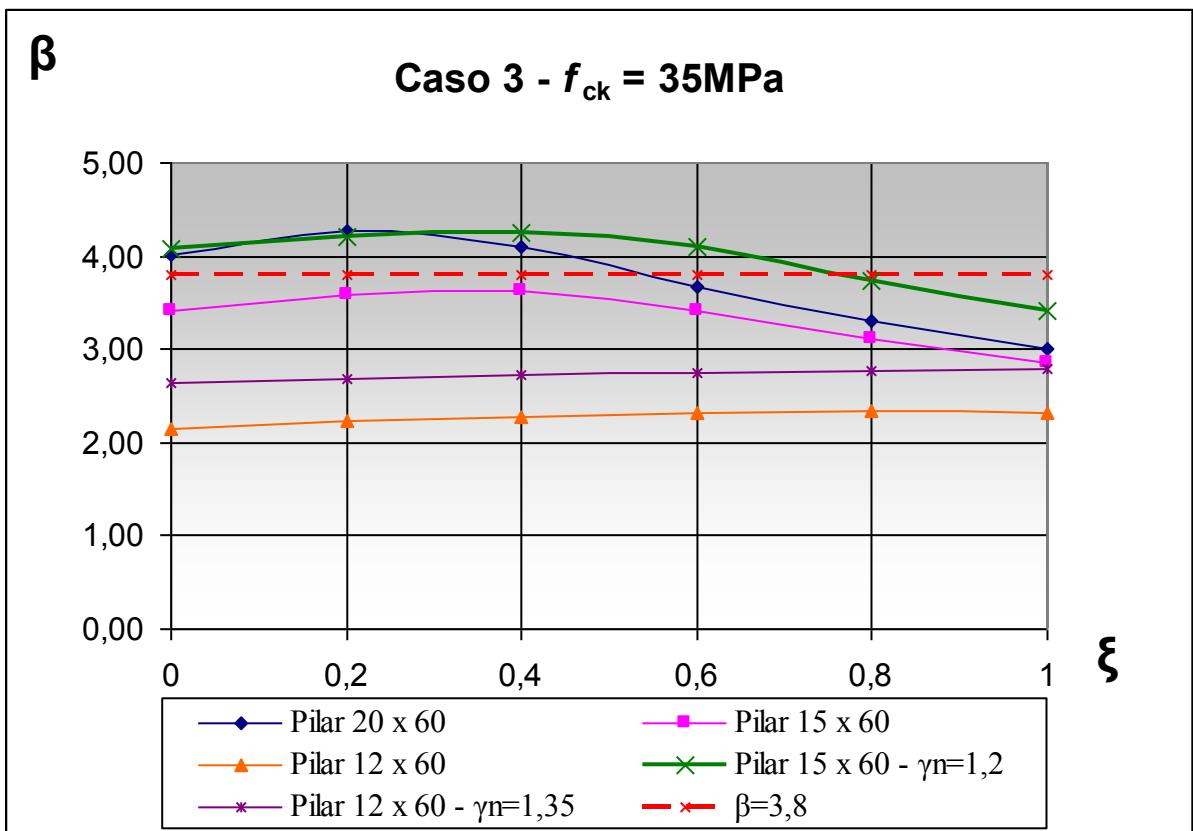


Figura 5-19 – Gráfico Pilares – Caso 3 e  $f_{ck} = 35\text{MPa}$

## 6. CONCLUSÃO E SUGESTÕES

A análise de confiabilidade é um assunto bastante novo, mas que está ganhando um espaço cada vez maior. Em um futuro próximo, certamente fará parte do cotidiano de um engenheiro estrutural, não somente como uma ferramenta de verificação, mas sim como um método de projeto, o “projeto baseado em confiabilidade”, pela qual o engenheiro projetará a estrutura escolhendo um valor alvo de probabilidade de falha.

Em relação aos estudos realizados nesse trabalho, podemos citar alguns pontos relevantes em virtude dos resultados encontrados.

**RESISTÊNCIA DO CONCRETO E PERCENTAGEM DE ARMADURAS:** Os resultados obtidos são praticamente independentes destes dois parâmetros, nos casos analisados.

**VIGAS:** A partir das análises realizadas, podemos observar claramente nos gráficos que a partir de  $\xi = 0,5$ , ou seja, quando a carga devida a ações variáveis é maior que a carga devida a ações permanentes, os índices de confiabilidade caem bastante, o que nos leva a sugerir um acréscimo no coeficiente de majoração para as cargas variáveis.

**LAJES:** Como visto nos gráficos são os elementos com os piores resultados de  $\beta$ . Devido a este fato é altamente recomendável, para aumentar a segurança de elementos de pouca espessura em flexão, um fator adicional de majoração. Neste trabalho utilizou-se um fator de 1,4 em lajes com 10cm de espessura, que assim passam a ter um índice de confiabilidade similar ao de lajes de 15cm.

**PILARES:** Os coeficientes  $\gamma_n$  foram confrontados neste trabalho, e conclui-se que este fator adicional para colunas com dimensão igual ou superior a 15cm são adequados. Tendo em vista os resultados para colunas com espessura inferior a 15 cm, sugere-se que uma futura revisão da Norma proíba colunas com estas dimensões..

Como sugestão para trabalhos futuros, podemos citar os seguintes pontos:

- Análise de outros exemplos de aplicações de funções de falhas na Engenharia Civil, como por exemplo para a resistência ao cisalhamento;
- Estudo mais detalhado da influência de ações variáveis na resposta da estrutura, com a utilização de fatores de majoração de cargas permanentes e acidentais mais adequados;
- Análises mais refinadas em lajes com o intuito de se alcançar valores melhores para o índice  $\beta$ ;

- Estudos voltados para o fator de importância de cada variável, para se definir as variáveis mais representativas na resposta final da probabilidade de falha, para com isso direcionar o projeto baseado em confiabilidade.

## 7. BIBLIOGRAFIA

- [1] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto – Procedimento, 2007.
- [2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT), NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas – Procedimento, 2003.
- [3] DER KIUREGHIAN, A & LIU – Structural reliability under incomplete probability information, 1986.
- [4] ÉBOLI, C.R – Apostila de vigas em Concreto Armado, Rio de Janeiro.
- [5] HART, GARY C. – Uncertainty Analysis Loads and Safety in Structural Engineering, Prentice Hall Inc., 1982.
- [6] JCSS – JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY, The Probabilistic Model Code, disponível no site [www.jcss.ethz.ch](http://www.jcss.ethz.ch).
- [7] MELCHERS, ROBERT – Structural Reliability – Analysis and Prediction – John Wiley & Sons, 1987.
- [8] SAGRILLO, LUIS VOLNEI SUDATI – Apostila do curso de confiabilidade estrutural, PEC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.
- [9] SANTOS, SÉRGIO HAMPSHIRE DE CARVALHO – Apostila de concreto armado I, 2010.
- [10] SANTOS, SÉRGIO HAMPSHIRE DE CARVALHO – Apostila de concreto armado III, 2010.
- [11] STUCCHI, FERNANDO REBOUÇAS & SANTOS, SÉRGIO HAMPSHIRE DE CARVALHO – Evaluation of the Safety Criteria of Brazilian standard NBR 6118 based on Reliability Analyses, Joint IABSE – fib Conference: Codes in Structural Engineering – Dubrovnik, 2010.

- [12] SZERSZEN, MARIA M. & SZWED, ALEKSANDER & NOWAK, ANDRZEJ S. – Reliability Analysis for Eccentrically Loaded Columns, ACI Structural Journal, vol. 102, n. 8, 676-688.
- [13] VAP 1.6 for MS-WINDOWS – Institute of Structural Engineering IBK, ETH Zürich, Switzerland, anexo à publicação “Introduction to Safety and Reliability of Structures”, Jörg Schneider, IABSE Publication SED 5, 2006.