



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ESCOLA POLITÉCNICA
Curso de Engenharia Civil
Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas



**ANÁLISE DO EFEITO DE SEGUNDA ORDEM EM PILARES
SEGUNDO A NBR6118 E MÉTODOS EXATOS**

CARLOS EDUARDO LOBO DE SOUZA

Projeto de Graduação apresentado ao corpo docente do Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovado por:

Sergio Hampshire de Carvalho Santos (Orientador)
Professor Associado, D. Sc., EP/UFRJ

Henrique Innecco Longo
Professor Associado, D. Sc., EP/UFRJ

Francisco José Costa Reis
Professor Adjunto, M. Sc., EP/UFRJ

Março/2011

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Sérgio Hampshire de Carvalho Santos, pelos conselhos, pela atenção, pelos incentivos e ensinamentos durante a minha vida acadêmica.

À minha família, pelo apoio moral, necessário para que eu concluísse a graduação. Ao meu Pai, Luiz Fernando, por ter me dado todo suporte e ter confiado em mim, principalmente nos momentos mais difíceis. À minha mãe, Sonia Regina, por toda a dedicação e conselhos que contribuíram para que eu me tornasse uma pessoa de bem.

Ao meu irmão Guilherme, pela amizade, por ser um exemplo para mim e por ter me incentivado a escolher a carreira de engenheiro civil.

Aos meus amigos de faculdade, André Pimenta, Telmo Resende, Aníbal Novaes, João Flávio Braz, Rafael Lucas, Carlos Riobom e José Vargas Bazán .

Aos mestres Henrique longo pela atenção, ajuda e companheirismo, Claudia Éboli por exigir sempre o melhor de mim nas disciplinas de Concreto II e Elasticidade I, Costa Reis e Fernando Uchôa pela qualidade e conteúdo de suas aulas e pelos conselhos para o mercado profissional e Ricardo Valeriano pelos conceitos importantes ministrados em sua disciplina de Elasticidade II.

Ao meu Chefe Cleber Loureiro pelo aprendizado, mostrando-me que ser um bom profissional de engenharia não se resume a calcular, mas ter bom senso, ter alta capacidade de interpretar desenhos, manter um ambiente de harmonia com os companheiros de profissão e por demonstrar que para ser um líder não é preciso ser autoritário, mas sim saber escutar a opinião de todos e exigir seu potencial ao máximo no momento certo.

A todos os meus companheiros de trabalho da Eltec Engenharia, pelos ensinamentos, paciência, responsabilidade e amizade que foram fundamentais para o meu crescimento pessoal e profissional.

À Deus por ser meu alicerce, sempre me mostrando o caminho certo a ser seguido.

ÍNDICE

1. Introdução	7
2. Introdução ao conceito de momento de 2 ^a ordem	8
3. Cálculo exato do momento de 2 ^a ordem	9
4. Métodos Aproximados para análise dos efeitos de 2 ^a ordem	15
5. Cálculo do 1º exemplo de pilar a partir dos métodos aproximados e exatos da NBR6118.	16
5.1. Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada	18
5.2. Método do Pilar-Padrão com a rigidez k aproximada	19
5.3. Método do Pilar-Padrão acoplado aos diagramas M, N e 1/r ($90 \leq \lambda \leq 140$)	20
5.4. Método exato sem fluência	22
5.5. Método exato com a consideração da fluência	27
5.6. Consideração da excentricidade adicional estipulada na NBR6118, item 15.8.4	30
6. Cálculo do 2º exemplo de pilar a partir dos métodos aproximados e exatos da NBR6118.	33
6.1. Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada	34
6.2. Método do Pilar-Padrão com a rigidez k aproximada	34
6.3. Método do Pilar-Padrão acoplado aos diagramas M, N e 1/r ($90 \leq \lambda \leq 140$)	35
6.4. Método exato sem a consideração da fluência	36
6.5. Método exato com a consideração da fluência	40
6.6. Consideração da excentricidade adicional estipulada na NBR6118, item 15.8.4	42

7. Cálculo do 3º exemplo de pilar a partir dos métodos aproximados e exatos da NBR6118 _____	44
7.1. Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada _____	45
7.2. Método do Pilar-Padrão com a rigidez k aproximada _____	45
7.3. Método do Pilar-Padrão acoplado aos diagramas M, N e 1/r ($90 \leq \lambda \leq 140$) _____	47
7.4. Método exato sem a consideração da fluência _____	48
7.5. Método exato com a consideração da fluência _____	51
7.6. Consideração da excentricidade adicional estipulada na NBR6118, item 15.8.4 _____	55
8. Cálculo do 4º exemplo de pilar a partir do método exato _____	57
8.1. Desconsiderando o efeito da fluência. _____	58
8.2. Considerando o efeito da fluência. _____	66
9. Cálculo do 5º exemplo de pilar a partir do método exato . _____	69
9.1. Desconsiderando o efeito da fluência . _____	69
9.2. Considerando o efeito da fluência . _____	77
10. Cálculo do 6º exemplo de pilar a partir do método exato . _____	80
10.1. Desconsiderando o efeito da fluência. _____	80
10.2. Considerando o efeito da fluência. _____	89
11. Conclusão. _____	Erro! Indicador não definido.
12. Referências bibliográficas. _____	95

RESUMO

O dimensionamento de pilares de concreto armado é uma atividade comum na rotina dos engenheiros estruturais. Os cálculos para a armadura deste elemento são muitas vezes feitos a partir de ábacos, como os de Montoya, os quais nos fornecem a taxa de armadura da seção do pilar em função da força normal e dos momentos fletores.

No entanto, estes esforços aplicados são apenas iniciais. O pilar em consequência das solicitações tende a flambar adquirindo um acréscimo de momento, devido aos chamados efeitos de segunda ordem, que correspondem ao esforço normal multiplicado pela deformada devida aos deslocamentos horizontais do pilar. Para avaliar o quanto este esforço é significativo, foram estabelecidos em norma critérios, em função da esbeltez do elemento de pilar. Esta esbeltez é comparada a um valor limite, cuja definição é fornecida pela norma NBR6118. Caso seja verificada a relevância do momento de segunda ordem, este momento pode ser calculado por método simplificado ou exato. A NBR6118 sugere quatro métodos diferentes que devem ser escolhidos de acordo com a esbeltez do pilar, os quais serão descritos neste trabalho.

O presente trabalho se propõe a fazer um estudo exato dos momentos de segunda ordem. Para isto foram apresentados seis exemplos diferentes de pilares. E em todos eles foram desenvolvidos cálculos de acordo com todos os métodos previstos em norma, independentemente do índice de esbeltez do pilar. O objetivo é relacionar todos os resultados com o método exato, para se ter uma idéia da precisão de cada um. Além do efeito de segunda ordem, foi estudado também para todos os exemplos o caso da fluência, embora a análise deste fenômeno seja obrigatória, de acordo com a NBR6118, somente quando o índice de esbeltez é superior a 90.

ABSTRACT

The sizing of the columns in reinforced concrete is a common task in the routine of the structural engineers. The calculations for the reinforcement design of these elements are often made using abacuses as those of Montoya, who provide the reinforcement ratio in the section of a column as a function of the applied axial forces and bending moments.

However, these applied forces are only initial ones. The column, as a result of these forces, tend to sway acquiring an additional moment due to so-called second-order effects, which correspond to the axial forces multiplied by the deformation due to horizontal displacements of the column. To evaluate if this effect is significant, criteria have been established in the standards, depending on the slenderness of the element. This slenderness is compared to limits, whose definition is given by the Brazilian Standard NBR6118. Depending on the relevance of the second-order moments, the second-order effects can be calculated by simplified or exact methods. The NBR6118 suggests four different methods that should be chosen according to the slenderness of the column.

This study proposes to perform an exact study of second-order moments. To that purpose, six different examples of columns are presented. All these columns have been analyzed in accordance with all the methods specified in the standard, regardless of the slenderness ratio of the column. The purpose is to relate all results to the exact method to give an idea of how accurate each method is. Besides the second-order effects, the creep effects have also been incorporated, although this phenomenon according to the standard NBR6118 shall be only considered when the slenderness ratio is greater than 90.

1. Introdução

O dimensionamento de pilares faz parte da rotina do engenheiro estrutural, que ao fazer os cálculos, deve ficar atento a todas as verificações previstas para garantir que o pilar tenha sua funcionalidade e segurança preservadas ao longo da vida útil da estrutura. O engenheiro civil deve estar atento ao efeito de segunda ordem, que em alguns casos aumenta de maneira considerável o valor do momento atuante no elemento. Este efeito pode em alguns casos ser calculado por métodos aproximados previstos na NBR 6118 (Ref. 2), os quais encontram-se a favor da segurança e que facilitam o trabalho do engenheiro. No entanto, para aplicar estes métodos é necessário que o pilar esteja na faixa limite do índice de esbeltez estabelecido.

No presente trabalho, foi feito um estudo do cálculo exato dos pilares com efeito de segunda ordem, utilizando programa MK-UFRJ (Ref. 3.). Foram realizados seis exemplos para nosso estudo. Os primeiros três exemplos foram realizados aplicando-se os momentos mínimos constantes de 1^a ordem em todos os pontos do pilar. Nos exemplos restantes foram utilizados os mesmos dados dos exemplos anteriores, porém ao invés de serem utilizados os momentos mínimos, foram aplicados momentos nas extremidades do pilar. Através do estudo realizado, podemos fazer comparações entre os métodos exatos e aproximados da norma brasileira, além de avaliarmos o efeito da fluênci, que deve ser obrigatoriamente considerado quando o pilar é muito esbelto.

2. Introdução ao conceito de momento de 2^a ordem

Seja um pilar qualquer sob efeito de uma ação vertical N , aplicada a uma distância infinitesimal, do centro de gravidade do pilar. Esta ação fará com que o pilar sofra uma deformação, à qual irá resultar em um pequeno deslocamento Δ , porém agora não mais em grandezas infinitesimais. A ação do momento proveniente da força vertical N vezes o deslocamento Δ é chamado de momento de 2^a ordem.

A NBR6118 estabelece alguns métodos simplificados para o cálculo dos efeitos de 2^a ordem em um determinado conjunto de pilares e descarta tais efeitos para outro conjunto de pilares. A determinação destes conjuntos é feita em função do índice de esbeltez dos pilares.

Para esta finalidade foi estabelecido um parâmetro λ_1 , que serve de referência para identificar se existe a necessidade de se considerar o efeito de 2^a ordem. A norma considera que os efeitos de 2^a ordem podem ser desprezados quando $\lambda < \lambda_1$. Para os outros pilares, isto é, com $\lambda > \lambda_1$, devemos considerar este efeito.

Para pilares que estão no intervalo $35 < \lambda < 90$, a norma sugere cálculos aproximados, tais como o método do pilar padrão com curvatura aproximada e o método do pilar padrão com rigidez aproximada. Para pilares com $\lambda > 90$ devemos utilizar o método do pilar padrão com o auxílio do diagrama momento Vs curvatura acoplado, além de considerar o efeito da fluência. Com $\lambda > 140$, devemos calcular o pilar através do método exato.

3. Cálculo exato do momento de 2^a ordem

Para o início da explicação do método de cálculo exato, será deduzida a fórmula da curvatura em função da deformada, aproximada através da equação da parábola de segundo grau.

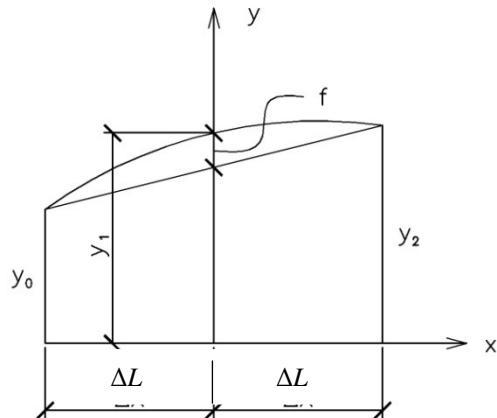


Figura 1 – Parábola de segundo grau

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

Para $x = 0$, temos:

$$y_1 = C$$

Para $x = \Delta L$, temos:

$$y_2 = A\Delta L^2 + B\Delta L + C$$

Para $x = -\Delta L$, temos:

$$y_0 = A\Delta L^2 - B\Delta L + C$$

Somando $y_0 + y_2$ obtemos:

$$y_0 + y_2 = 2A\Delta L^2 + 2C$$

$$y_0 + y_2 = 2A\Delta L^2 + 2y_1$$

$$\frac{y_0 + y_2}{2} = A\Delta L^2 + y_1 \quad \text{onde } y_1 = f + \frac{y_0 + y_2}{2}$$

$$\frac{y_0 + y_2}{2} = A\Delta L^2 + f + \frac{y_0 + y_2}{2}$$

$$A = -\frac{f}{\Delta L^2}$$

$$\text{Equação da parábola: } y = Ax^2 + Bx + C$$

$$\text{Primeira derivada da equação da parábola: } y' = 2Ax + B$$

$$\text{Segunda derivada da equação da parábola: } y'' = 2A$$

Substituindo o termo encontrado para A na expressão da segunda derivada,

$$\text{obtemos: } y'' = 2A = 2\frac{f}{\Delta L^2} = \frac{1}{r}. \text{ Com isso temos: } \frac{1}{r} = 2\frac{f}{\Delta L^2}$$

Através da dedução da fórmula da curvatura, podemos dar prosseguimento ao cálculo de nosso pilar, no caso da aplicação do momento mínimo, constante na altura do pilar. Neste caso particular, podemos trabalhar com a metade do comprimento efetivo do pilar, em virtude da simetria de sua deformada. Definimos o f correspondente (em função dos deslocamentos) para cada ponto do trecho considerado do pilar.

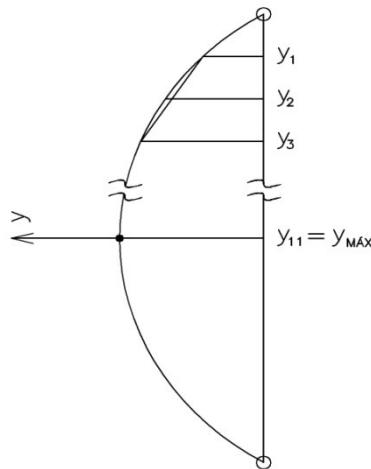


Figura 2 – Deformada do Pilar

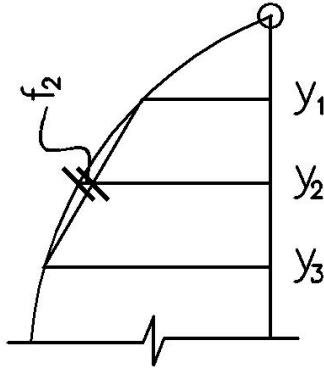


Figura 3 – Detalhe da deformada do pilar

Considerando o semi-pilar dividido em dez segmentos:

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = y_1 - \frac{0 + y_2}{2} \rightarrow \frac{2f_1}{\Delta L^2} = \frac{2y_1 - y_2}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_1$$

$$f_2 = y_2 - \frac{y_1 + y_3}{2} \rightarrow \frac{2f_2}{\Delta L^2} = \frac{2y_2 - \left(\frac{y_1 + y_3}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_2$$

$$f_3 = y_3 - \frac{y_2 + y_4}{2} \rightarrow \frac{2f_3}{\Delta L^2} = \frac{2y_3 - \left(\frac{y_2 + y_4}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_3$$

$$f_4 = y_4 - \frac{y_3 + y_5}{2} \rightarrow \frac{2f_4}{\Delta L^2} = \frac{2y_4 - \left(\frac{y_3 + y_5}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_4$$

$$f_5 = y_5 - \frac{y_4 + y_6}{2} \rightarrow \frac{2f_5}{\Delta L^2} = \frac{2y_5 - \left(\frac{y_4 + y_6}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_5$$

$$f_6 = y_6 - \frac{y_5 + y_7}{2} \rightarrow \frac{2f_6}{\Delta L^2} = \frac{2y_6 - \left(\frac{y_5 + y_7}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_6$$

$$f_7 = y_7 - \frac{y_6 + y_8}{2} \rightarrow \frac{2f_7}{\Delta L^2} = \frac{2y_7 - \left(\frac{y_6 + y_8}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_7$$

$$f_8 = y_8 - \frac{y_7 + y_9}{2} \rightarrow \frac{2f_8}{\Delta L^2} = \frac{2y_8 - \left(\frac{y_7 + y_9}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_8$$

$$f_9 = y_9 - \frac{y_8 + y_{10}}{2} \rightarrow \frac{2f_9}{\Delta L^2} = \frac{2y_9 - \left(\frac{y_8 + y_{10}}{\Delta L^2} \right)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_9$$

$$f_{10} = y_{10} - y_9 \rightarrow \frac{2f_{10}}{\Delta L^2} = 2 \frac{(y_{10} - y_9)}{\Delta L^2} = \left(\frac{1}{r} \right)_{10}$$

Podemos transformar as equações das curvaturas acima deduzidas em um produto vetorial $\Delta \times y = \frac{1}{r}$ composto pelas matrizes apresentadas a seguir

Sendoo $\Delta =$

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} & \frac{-1}{\Delta L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{\Delta L^2} & \frac{2}{\Delta L^2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
\text{Sendo } \frac{1}{r} = & \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{r}\right)_0 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_1 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_2 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_3 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_4 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_5 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_6 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_7 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_8 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_9 \\ \left(\frac{1}{r}\right)_{10} \end{pmatrix} & \text{a matriz da curvatura e } y = & \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix} & \text{a matriz de deslocamento}
\end{aligned}$$

Este produto matricial é o mesmo que $\Delta^{-1} \times \frac{1}{r} = y$, que será usado em todas as iterações. Através desta transformação, obtemos melhores resultados em termos de convergência tanto para os momentos quanto para as curvaturas.

Para começarmos o processo iterativo deve-se definir um momento inicial como ponto de partida para o processo. Então partiremos da equação da linha deformada aproximada expressa por uma senóide, ou seja $y_{(x)} = y_{\max} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L_e}\right)$

Onde $y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx}$ e l_e é o comprimento efetivo do pilar

Com isso pode-se afirmar que o momento fletor da primeira iteração em cada ponto do pilar é:

$$M_{di} = N_d \times (e) + N_d \times y(x), \text{ onde a excentricidade } e \text{ é igual a } 0,015 + 0,03h$$

no caso da aplicação de momento mínimo.

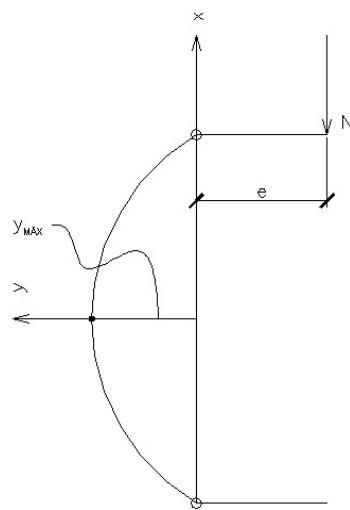


Figura 4 – Carga atuante no pilar

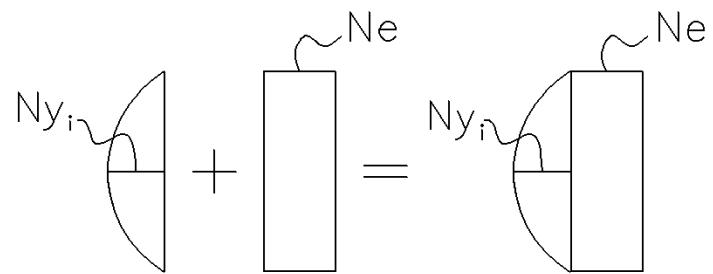


Figura 5 – Momentos atuantes no pilar

A excentricidade inicial é considerada a mesma em todos os pontos do pilar (11 pontos considerados), consequentemente a parcela ($N_d \times (e)$) também. Além disso, esta parcela apresenta o mesmo valor em todas as iterações.

Com os momentos da primeira iteração determinados, entramos com seus valores no programa MK-UFRJ e obtemos as respectivas curvaturas. Com as curvaturas determinadas, podemos utilizar o produto matricial $\Delta^{-1} \times \frac{1}{r} = y$ e obter novos deslocamentos e com estes deslocamentos obter novos momentos através da equação $M_{di} = N_d \times (e) + N_d \times y(x)$, que será utilizada em todas as iterações. Vale ressaltar que a matriz Δ é a mesma em todas as iterações

Através destes momentos fletores, entramos novamente no programa MK-UFRJ e obtemos novas curvaturas para continuarmos o processo de iterações até que haja a convergência tanto de momentos quanto das curvaturas.

4. Métodos Aproximados para análise dos efeitos de 2^a ordem

Os métodos prescritos pela NBR6118 são: método da curvatura aproximada, da rigidez aproximada, método acoplado ao diagrama momento-curvatura e a consideração da fluência pela NBR6118.

Vale salientar que os métodos aproximados, como estão usualmente a favor da segurança, apresentam resultados maiores para os momentos solicitantes que os encontrados no método exato.

Após os cálculos com um modelo inicial de partida, vamos fazer algumas modificações no exemplo com a finalidade de analisar como o aumento do índice de esbeltez, aumento do esforço normal, o aumento da seção transversal ou o aumento de armadura influenciam os resultados.

5. Cálculo do 1º exemplo de pilar a partir dos métodos aproximados e exatos da NBR6118.

Cálculo dos efeitos de 2^a Ordem do 1º Exemplo de seção 15x25

Seja o pilar P1 da estrutura abaixo objeto de nosso estudo (Ref. 4.):

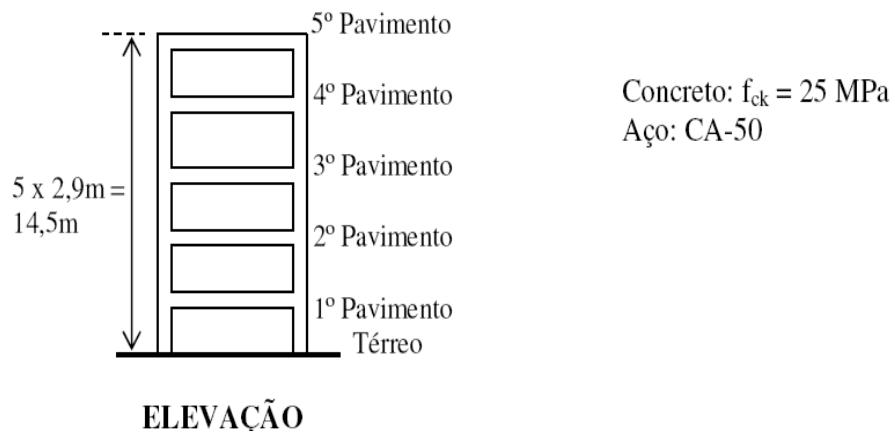
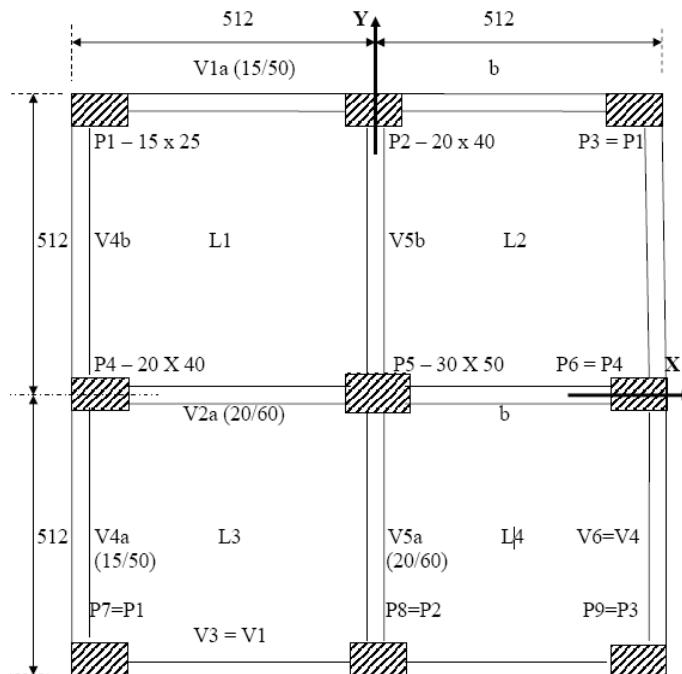


Figura 6 – Planta e elevação da edificação.

Será desenvolvido inicialmente o cálculo do pilar para momento mínimo. Para o cálculo do pilar, devemos verificar sua esbeltez para utilizar o método pelo qual podemos calcular, caso necessário, o efeito de 2º ordem. No entanto, no presente

trabalho vamos avaliar todos os métodos, mesmo não sendo necessário, para vermos as diferenças de precisão entre os mesmos.

Sendo a direção com menor dimensão do pilar aquela que possui a menor inércia, basta verificar o efeito de 2^a ordem para esta direção, pois de fato é ela que fornece o maior índice de esbeltez.

Cálculo do comprimento efetivo do índice l_e de esbeltez

$$l_e = \min(l_0 + h_{pilar}; l_0 + h_{viga})$$

$$l_e = \min(2,40 + 0,15; 2,40 + 0,50) = 2,55m$$

$$\lambda = \frac{l_e}{h} \times \sqrt{12} \quad \therefore \lambda = \frac{2,55}{0,15} \times \sqrt{12} = 58,89$$

Onde l_0 é a distância livre entre a viga inferior e superior, h_{pilar} é a dimensão do pilar na direção considerada e h_{viga} é a altura da viga.

Verificação do efeito de 2^a ordem:

De acordo com a NBR6118, para que seja necessário o cálculo do efeito de 2^a ordem, devemos analisar se o índice de esbeltez λ é maior do que o λ_l definido a seguir:

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times e_l / h}{\alpha_b};$$

$$e_l = 0,015 + 0,03h = 0,015 + 0,03 \times 0,15 = 0,0195 \quad (\text{para o momento mínimo});$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times 0,0195 / 0,15}{1} = 26,6 \rightarrow \lambda_l = 35$$

logo devemos considerar o efeito de 2^a ordem.

Escolha do método do efeito de 2^a ordem:

Na faixa de esbeltez de $35 < \lambda < 90$, a norma permite fazermos o cálculo pelo método do pilar-padrão com curvatura aproximada ou pelo método do pilar-padrão com a rigidez κ aproximada, além de não precisar ser considerado o fenômeno da fluênciça. No entanto vamos aplicar todos os métodos e considerar o efeito da fluênciça em todos os exemplos, por dois motivos: para ampliarmos nosso conhecimento no

assunto, que é bastante complexo e também para sabermos se estes efeitos deveriam ser realmente desprezados nos casos já citados.

Carga Normal de Cálculo no Pilar:

$$N_d = -473,8kN;$$

Cálculo do momento mínimo

$$e = 0,015 + 0,03 \times h$$

$$M_{1dm\min} = N_d \times e \therefore M_{1dm\min} = 473,8 \times 0,0195 = 9,24kNm$$

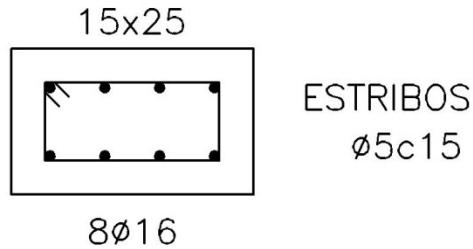


Figura 7 – Seção transversal do pilar P1

5.1. Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d} + N_d \frac{l_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1dm\min}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{473,8}{0,15 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \therefore v = 0,707$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,15 \times (0,707 + 0,5)} = 0,028 \leq \frac{0,005}{0,15} = 0,033 \therefore \frac{1}{r} = 0,0276m^{-1}$$

$$M_{d,tot} = 1,0 \times 9,24 + 473,8 \times \frac{(2,55)^2}{10} \times 0,0276$$

$$M_{d,tot} = 17,73kNm$$

5.2. Método do Pilar-Padrão com a rigidez k aproximada

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$k = 32 \left(1 + \frac{5M_{d,tot}}{hN_d} \right) v$$

Para este cálculo será utilizada a expressão do 2º grau a seguir, obtida por substituição da segunda equação acima na primeira, o que evita a iteração sucessiva:

$$A \times (M_{d,tot})^2 + B \times (M_{d,tot}) + C = 0$$

$$\text{Donde } \begin{cases} A = 5h \\ B = h^2 \cdot N_d - \frac{N_d \cdot l_e^2}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1,d} \\ C = -N_d \cdot h^2 \cdot \alpha_b \cdot M_{1,d} \end{cases}$$

sendo $M_{1,d}$ e N_d considerados em valor absoluto

Obtemos:

$$A = 5 \times 0,15 = 0,75$$

$$B = 0,15^2 \times 473,8 - \frac{473,8 \times 2,55^2}{320} - 5 \times 0,15 \times 1,0 \times 9,23 = -5,89$$

$$C = -473,8 \times 0,15^2 \times 1,0 \times 9,24 = -98,50$$

$$0,75 \times (M_{d,tot})^2 - 5,89 \times (M_{d,tot}) - 98,50 = 0$$

$$M_{d,tot} = 16,04 \text{ kNm}$$

Os demais métodos a seguir necessitam do diagrama momento Vs curvatura. Este diagrama específico para estes pilares, com as solicitações e a armadura previamente sugeridas, foi obtido utilizando o programa MK-UFRJ.

5.3. Método do Pilar-Padrão acoplado aos diagramas M, N e 1/r

$(90 \leq \lambda \leq 140)$

O fenômeno da fluência deve ser considerado obrigatoriamente apenas para $\lambda > 90$.

É inicialmente desconsiderada a fluência.

Neste método vamos utilizar a equação do método da rigidez aproximada. Ela é obtida como descrito a seguir.

Seja o gráfico abaixo, reproduzido da NBR 6118.

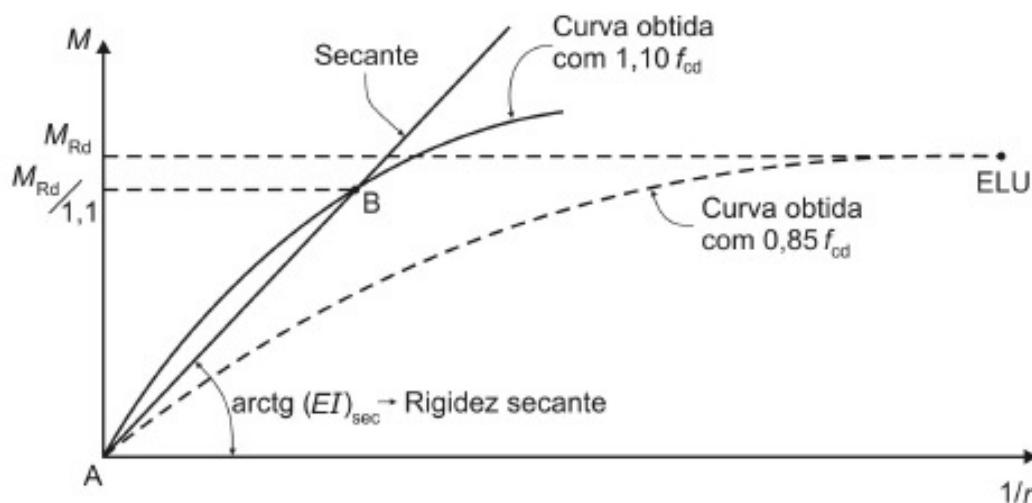


Figura 8 – Diagrama momento Vs curvatura

A partir do diagrama momento-curvatura deste pilar, podemos obter a rigidez secante $(EI)_{sec}$, através da NBR 6118, como mostra a figura, e em seguida a rigidez do pilar.

A equação da rigidez secante adimensional, item 15.3.1 NBR 6118 é a seguinte:

$$\kappa = (EI)_{sec} / (A_c h^2 f_{cd})$$

Com o esforço normal $N_d = 473,8kN$ e a armadura $A_s = 16cm^2$ podemos calcular o μ correspondente e com isso o momento resistente de cálculo correspondente a este esforço normal. O μ é retirado do ábaco adimensional de dimensionamento na flexão composta reta, conforme a Ref. 4.

$$\eta = \frac{N_d}{b.h.f_{cd}}; \quad \mu = \frac{M_d}{b.h^2.f_{cd}}; \quad \omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b.h.f_{cd}}$$

$$M_{Rd} = \mu \cdot b \cdot h^2 \cdot f_{cd}$$

$$M_{Rd} = 26,8 \text{ kNm}$$

$$\text{Temos que: } \frac{M_{Rd}}{1,1} = 24,4 \text{ kNm}$$

Com a relação momento Vs curvatura, utilizamos a saída do programa MK-UFRJ e obtemos $\frac{1}{r} = \frac{28,02976}{1000}$.

Os dados de entrada neste programa são os seguintes:

$$1) \text{ Esforço Normal: } N = \frac{N_d}{1,1} = \frac{473,8}{1,1} = 430,7 \text{ kN, baseado no item 15.3.1}$$

2) Resistência à compressão do concreto é obtida com $1,30 \times f_{cd}$, conforme sugerido no mesmo item na figura 15.1 da NBR6118.

3) Resistência de cálculo do aço igual a f_{yd} .

4) A seção do pilar e sua armadura previamente definida.

$$\text{logo } (EI)_{sec} = \frac{M_{Rd}}{\frac{1}{r}} = \frac{24,4 \times 1000}{28,02976} = 870,5$$

$$\kappa = (EI)_{sec} / (A_c h^2 f_{cd}) = \frac{870,5}{(0,15 \times 0,25) \times 0,15^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 57,8$$

A partir da equação da rigidez aproximada obtemos que:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_b = 1,0 \\ M_{1d} = 9,24 \text{ kNm} \\ \lambda = 58,89 \\ \nu = 0,707 \\ \kappa = 57,8 \end{array} \right\} M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{\nu}}} = \frac{1,0 \times 9,24}{1 - \frac{58,89^2}{120 \times \frac{57,8}{0,707}}} = 14,29 \text{ kNm}$$

$$M_{d,tot} = 14,29 \text{ kNm}$$

5.4. Método exato sem fluência

O cálculo do método exato será feito com o auxílio do programa Mathcad (Ref.5). Para tal, devemos utilizar a saída do programa MK-UFRJ para obter os valores correspondentes entre momentos e curvaturas e inseri-los no Mathcad.

A linha deformada para a primeira iteração virá da aproximação do método do pilar padrão com curvatura aproximada. Temos o seguinte resultado para a curvatura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{h(\nu + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \\ \nu &= \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{473,8}{0,15 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad \nu = 0,707 \\ \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{0,15 \times (0,707 + 0,5)} = 0,028 \leq \frac{0,005}{0,15} = 0,033 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0276 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

A seguir serão calculados $y_{máx}$ e $y(x)$ em cada ponto do pilar:

$$y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx} = \frac{2,55^2}{10} \times 0,0276 = 0,01795 \text{ m}$$

$$y_{(x)} = y_{máx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L_e} \right)$$

	0
0	0
1	$2.80795 \cdot 10^{-3}$
2	$5.54676 \cdot 10^{-3}$
3	$8.14899 \cdot 10^{-3}$
4	0.01055
5	0.01269
6	0.01452
7	0.01599
8	0.01707
9	0.01773
10	0.01795

Assim o momento total em cada ponto do pilar é obtido por:

$$M_{di} = N_d \times (e) + N_d \times y (x),$$

$$\text{Onde } e = 0,015 + 0,03 \times h = 0,015 + 0,03 \times 0,15 = 0,0195m$$

Os momentos totais da primeira iteração são:

$$\text{M1iteracao} := \begin{pmatrix} 9.23 \\ 10.57 \\ 11.87 \\ 13.10 \\ 14.23 \\ 15.25 \\ 16.12 \\ 16.82 \\ 17.33 \\ 17.64 \\ 17.74 \end{pmatrix}$$

Com estes momentos determinados, podemos utilizar a saída do programa MK-UFRJ e determinar as curvaturas correspondentes.

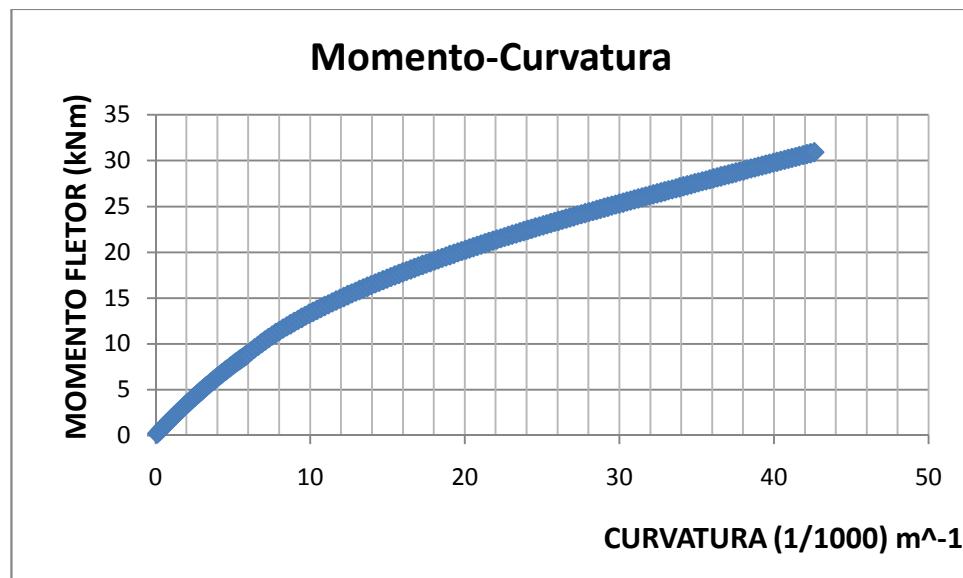


Figura 9-Diagrama momento Vs curvatura- cálculo sem fluência

As curvaturas são:

	0
0	$6.39918 \cdot 10^{-3}$
1	$7.31254 \cdot 10^{-3}$
2	$8.4912 \cdot 10^{-3}$
3	$9.9465 \cdot 10^{-3}$
4	0.01118
5	0.01244
6	0.0137
7	0.01471
8	0.01522
9	0.01573
10	0.01599

curviteração1MK =

Agora podemos partir para a segunda iteração utilizando a equação $\Delta^{-1} \times \frac{1}{r} = y$,

observando que devemos obter novos deslocamentos utilizando as curvaturas obtidas anteriormente. A matriz Δ será sempre a mesma.

Os deslocamentos da segunda iteração são os seguintes:

	0
0	$5.20133 \cdot 10^{-5}$
1	$1.94967 \cdot 10^{-3}$
2	$3.72844 \cdot 10^{-3}$
3	$5.36919 \cdot 10^{-3}$
4	$6.84824 \cdot 10^{-3}$
5	$8.14548 \cdot 10^{-3}$
6	$9.24055 \cdot 10^{-3}$
7	0.01011
8	0.01075
9	0.01113
10	0.01126

$d^{-1} \cdot \text{curviteracao1MK} =$

Com estes deslocamentos podemos obter os momentos da segunda iteração através da equação $M_{di} = N_d \times (e) + N_d \times y(x)$, e depois disto continuar a fazer várias iterações até atingir a convergência desejada. Será colocado a seguir um quadro resumo com os resultados obtidos para os momentos e curvaturas.

Momento -1 ^a iteração	curvaturas	Momento -2 ^a iteração	curvaturas
9.23	$6.39918 \cdot 10^{-3}$	9.26	$6.39918 \cdot 10^{-3}$
10.57	$7.31254 \cdot 10^{-3}$	10.16	$7.08146 \cdot 10^{-3}$
11.87	$8.49120 \cdot 10^{-3}$	11	$7.77960 \cdot 10^{-3}$
13.1	$9.9465 \cdot 10^{-3}$	11.78	$8.49120 \cdot 10^{-3}$
14.23	$11.18378 \cdot 10^{-3}$	12.48	$9.21412 \cdot 10^{-3}$
15.25	$12.43649 \cdot 10^{-3}$	13.09	$9.94650 \cdot 10^{-3}$
16.12	$13.69958 \cdot 10^{-3}$	13.62	$10.43918 \cdot 10^{-3}$
16.82	$14.71474 \cdot 10^{-3}$	14.03	$10.93490 \cdot 10^{-3}$
17.33	$15.22328 \cdot 10^{-3}$	14.33	$11.18378 \cdot 10^{-3}$
17.64	$15.73220 \cdot 10^{-3}$	14.51	$11.43326 \cdot 10^{-3}$
17.74	$15.98676 \cdot 10^{-3}$	14.57	$11.68332 \cdot 10^{-3}$

Momento -3 ^a iteração	curvaturas	Momento -4 ^a iteração	curvaturas
9.26	6.39918*10^-3	9.26	6.39918*10^-3
9.98	6.85214*10^-3	9.91	6.85214*10^-3
10.63	7.31254*10^-3	10.51	7.31254*10^-3
11.29	8.01542*10^-3	11.06	7.77960*10^-3
11.76	8.49120*10^-3	11.54	8.25265*10^-3
12.22	9.97201*10^-3	11.95	8.73102*10^-3
12.6	9.21412*10^-3	12.29	8.97201*10^-3
12.91	9.70143*10^-3	12.56	9.21412*10^-3
13.13	9.94650*10^-3	12.75	9.45278*10^-3
13.26	9.94650*10^-3	12.86	9.70143*10^-3
13.3	10.19243*10^-3	12.9	9.70143*10^-3

Momento -5 ^a iteração	curvaturas	Momento -6 ^a iteração	curvaturas
9.26	6.39918*10^-3	9.26	6.39918*10^-3
9.89	6.85214*10^-3	9.88	6.85214*10^-3
10.46	7.31254*10^-3	10.44	7.31254*10^-3
10.98	7.77960*10^-3	10.95	7.77960*10^-3
11.43	8.25265*10^-3	11.39	8.01542*10^-3
11.82	8.43120*10^-3	11.78	8.49120*10^-3
12.15	8.73102*10^-3	12.09	8.73102*10^-3
12.41	9.21412*10^-3	12.35	8.97201*10^-3
12.59	9.21412*10^-3	12.53	9.21412*10^-3
12.7	9.45278*10^-3	12.64	9.45278*10^-3
12.74	9.45278*10^-3	12.68	9.45278*10^-3

Observamos que a variação de momentos e curvaturas caem a medida que as iterações ocorrem. Poderia ser feita mais uma iteração, mas a ordem de grandeza dos resultados já se apresenta satisfatória, estando o valor de 12,68 kNm adequado para o presente estudo.

O gráfico com a deformada do pilar é apresentado a seguir. Este gráfico apresenta os dados da última iteração, por isso seus valores são menores que os encontrados na matriz de deslocamentos apresentada anteriormente, pois estes são os deslocamentos da primeira iteração. Aliás, todos os gráficos, tanto das deformadas quanto de momento Vs curvatura, são referentes a última iteração.

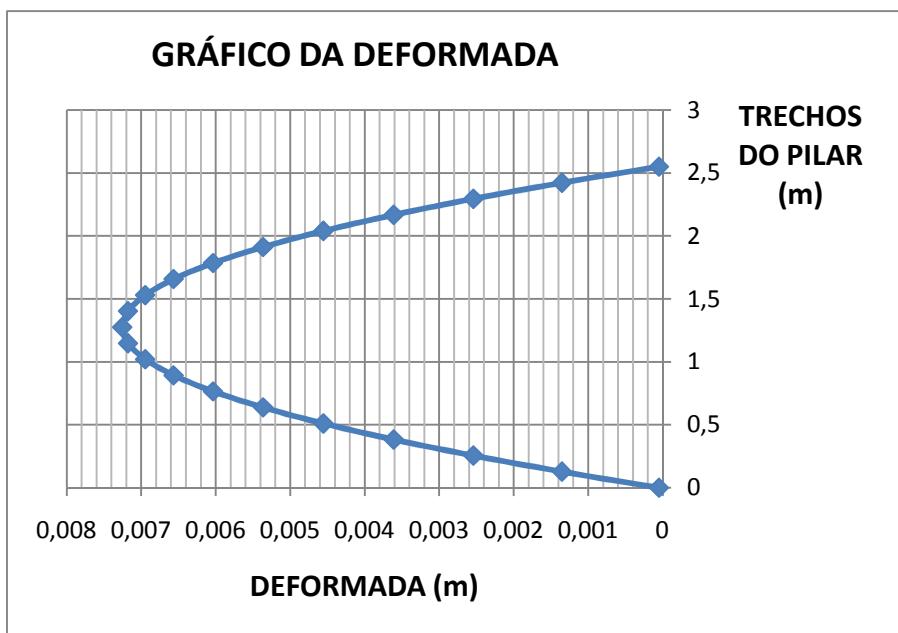


Figura 10- Gráfico da deformada para o exemplo 1-cálculo sem fluência

5.5. Método exato com a consideração da fluência

Consideraremos a fluência através da alteração do diagrama tensão-deformação do concreto, sendo as deformações específicas do concreto, para um determinado nível de tensões, multiplicadas por $(1 + \Psi)$, sendo Ψ o coeficiente de fluência, tomado igual a dois neste estudo.

Para a aplicação no programa MK-UFRJ, que não tem a opção de alterar o diagrama tensão-deformação do concreto, deve-se seguir a sequência de operações descrita a seguir.

- 1- Dividir o f_{yd} por três;
- 2- Multiplicar a armadura estipulada por três;
- 3- Após rodarmos o programa, multiplicar as curvaturas obtidas por três.

O procedimento do cálculo é idêntico ao método exato sem fluência, apresentando como diferença somente os dados de entrada no MK-UFRJ.

Os momentos determinados na 1^a iteração são os mesmos determinados no cálculo exato. O processo passa a ter diferenças numéricas quando obtemos as curvaturas, visto que as mesmas encontram-se multiplicadas por três. Depois disto o processo se repete, da mesma forma que o cálculo sem fluência, até que a convergência seja obtida.

Serão apresentados os resultados do MK-UFRJ em forma de gráfico.

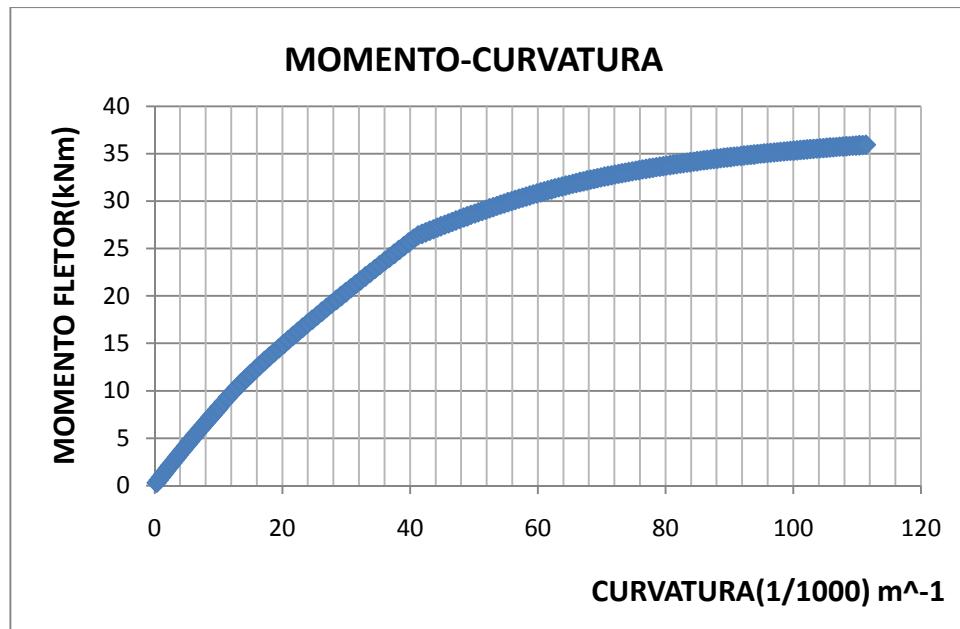


Figura 11-Diagrama momento Vs curvatura- cálculo com fluência

Também é apresentado um quadro resumo de todas as iterações.

Momento -1 ^a iteração	curvaturas	Momento -2 ^a iteração	curvaturas
9.23	11.46480*10^-3	9.28	11.46480*10^-3
10.57	13.59621*10^-3	10.79	13.59621*10^-3
11.87	15.77184*10^-3	12.2	15.77184*10^-3
13.1	17.23989*10^-3	13.49	17.97804*10^-3
14.23	19.46115*10^-3	14.64	20.20557*10^-3
15.25	20.95164*10^-3	15.64	21.69915*10^-3
16.12	22.44795*10^-3	16.48	23.19786*10^-3
16.82	23.94876*10^-3	17.16	24.70050*10^-3
17.33	24.70050*10^-3	17.64	25.45302*10^-3
17.64	25.45302*10^-3	17.93	26.20620*10^-3
17.74	25.45302*10^-3	18.03	26.20620*10^-3

Momento -3 ^a iteração	curvaturas	Momento -4 ^a iteração	curvaturas
9.28	11.46480*10^-3	9.28	11.46480*10^-3
10.84	14.31729*10^-3	10.86	14.31729*10^-3
12.29	16.50438*10^-3	12.32	16.50438*10^-3
13.62	17.97804*10^-3	13.65	17.97804*10^-3
14.81	20.20557*10^-3	14.85	20.20557*10^-3
15.84	21.69915*10^-3	15.89	22.44795*10^-3
16.71	23.94876*10^-3	16.76	23.94876*10^-3
17.39	24.70050*10^-3	17.45	24.70050*10^-3
17.9	25.45302*10^-3	17.95	26.20620*10^-3
18.2	26.20620*10^-3	18.25	26.20620*10^-3
18.3	26.20620*10^-3	18.36	26.95995*10^-3

Momento -5 ^a iteração	curvaturas	Momento -6 ^a iteração	curvaturas
9.28	11.46480*10^-3	9.28	11.46480*10^-3
10.87	14.31729*10^-3	10.88	14.31729*10^-3
12.35	16.50438*10^-3	12.36	16.50438*10^-3
13.69	17.97804*10^-3	13.71	18.71856*10^-3
14.91	20.20557*10^-3	14.93	20.95164*10^-3
15.96	22.44795*10^-3	15.99	22.44795*10^-3
16.84	23.94876*10^-3	16.88	23.94876*10^-3
17.54	24.70050*10^-3	17.58	25.45302*10^-3
18.05	26.20620*10^-3	18.09	26.20620*10^-3
18.36	26.95995*10^-3	18.41	26.95995*10^-3
18.46	26.95995*10^-3	18.51	26.95995*10^-3

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

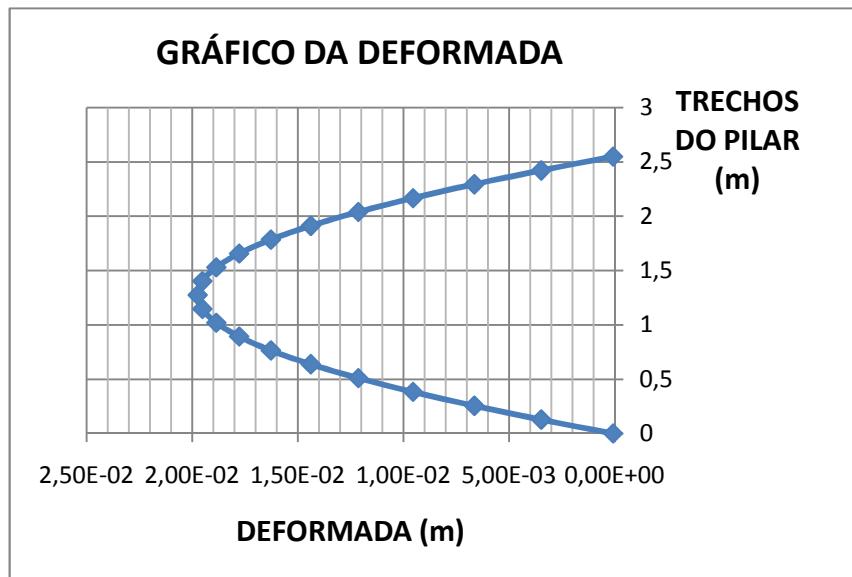


Figura 12- Gráfico da deformada para o exemplo 1-cálculo com fluência

5.6. Considerando a excentricidade adicional estipulada na NBR6118, item 15.8.4

Temos que a excentricidade adicional é dada por:

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \left(2,718^{\frac{\phi N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right)$$

Observar que 2,718 é uma aproximação do número neperiano e , e que:

$$M_{sg} = \sum M_{gi,k} + \psi_{2j} \sum M_{qj,k}, \quad M_{qj} = 0$$

$$M_{sg} = \frac{9,24}{1,4} = 6,60 \text{ kNm}$$

$$N_{sg} = \sum N_{gi,k} + \psi_{2j} \sum N_{qj,k}, \quad N_{qj} = 0$$

$$N_{sg} = \frac{473,8}{1,4} = 338,4 \text{ kN}$$

$$N_e = \frac{10E_{ci}I_c}{l_e^2} \begin{cases} E_{ci} = 5600\sqrt{25} = 28000 \text{ MPa} \\ I_c = 0,25 \times (0,15)^3 / 12 = 7,03 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \\ l_e = 2,55 \text{ m} \end{cases}$$

$$N_e = \frac{10 \times 28000 \times 10^3 \times 7,03 \times 10^{-5}}{2,55^2} = 3027 \text{ kN}$$

$\varphi = 2,0$ (coeficiente de fluência considerado)

Da NBR6118 temos que:

$$\theta_{lmáx} = \left(\frac{1}{100\sqrt{H}} \right)$$

H = altura total da edificação

$$\theta_{lmáx} = \left(\frac{1}{100\sqrt{H}} \right) = \frac{1}{100\sqrt{14,5}} = \frac{1}{380,8}$$

$$\theta_1 = \frac{e_a}{2,90} \therefore e_a = 0,007616 \text{ m}$$

$$e_{cc} = \left(\frac{6,60}{338,4} + 0,007616 \right) \left(2,718^{\frac{2 \times 338,4}{3027 - 338,4}} - 1 \right) \therefore e_{cc} = 0,00776 \text{ m}$$

Com o e_{cc} calculado, podemos adicioná-lo à excentricidade de primeira ordem, e calcular o momento mínimo de primeira ordem.

$$M_{1d,\min} = 473,8 \times (0,0195 + 0,00776) = 12,92 \text{ kNm}$$

$$M_{Rd} = 26,8 \text{ kNm}$$

então conforme já visto, temos que: $\frac{M_{Rd}}{1,1} = 24,4 \text{ kNm}$ e que:

$$\frac{1}{r} = \frac{28,02796}{1000};$$

$$\text{logo } (EI)_{\text{sec}} = \frac{1,1}{\frac{1}{r}} = \frac{24,4 \times 1000}{28,02976} = 870,5$$

$$\kappa = (EI)_{\text{sec}} / (A_c h^2 f_{cd}) = \frac{870,5}{(0,15 \times 0,25) \times 0,15^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 57,8$$

A partir da equação da rigidez aproximada obtemos que:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_b = 1,0 \\ M_{1d} = 12,92 \text{ kNm} \\ \lambda = 58,89 \\ v = 0,707 \\ \kappa = 57,8 \end{array} \right\} M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}} = \frac{1,0 \times 12,92}{1 - \frac{58,89^2}{120 \times \frac{57,8}{0,707}}} = 19,98 \text{ kNm}$$

$$M_{d,tot} = 19,98 \text{ kNm}$$

6. Cálculo do 2º exemplo de pilar a partir dos métodos aproximados e exatos da NBR6118.

Características do pilar:

1) Vamos considerar o pilar com seção 18x25, e altura efetiva de 3,60m.

2) A armadura é composta por 2 camadas de 4Φ16

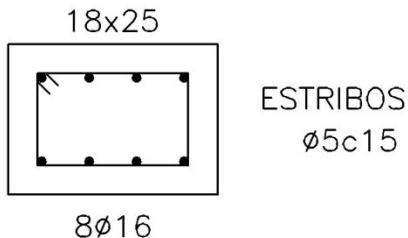


Figura 13 – Seção do pilar P1

$$le = 3,60m$$

$$\lambda = \frac{le}{h} \times \sqrt{12} \quad \therefore \lambda = \frac{3,60}{0,18} \times \sqrt{12} = 69,28$$

Verificação do efeito de 2ª ordem:

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times e_l / h}{\alpha_b};$$

$$e_l = 0,015 + 0,03h = 0,015 + 0,03 \times 0,18 = 0,0204$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times 0,0204 / 0,18}{1} = 26,4 \rightarrow \lambda_l = 35$$

logo devemos considerar o efeito de 2ª ordem.

Força de cálculo normal do pilar:

$$N_d = -473,8kN;$$

Cálculo do momento mínimo

$$M_{1dmín} = N_d \times e \quad \therefore M_{1dmín} = 473,8 \times 0,0204 = 9,67kNm$$

6.1. Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada

$$\begin{aligned}
 M_{d,tot} &= \alpha_b M_{1d} + N_d \frac{l_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d \min} \\
 \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \\
 v &= \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{473,8}{0,18 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,589 \\
 \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{0,18 \times (0,589 + 0,5)} = 0,0255 \leq \frac{0,005}{0,18} = 0,0278 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0255 m^{-1} \\
 M_{d,tot} &= 1,0 \times 9,67 + 473,8 \times \frac{(3,60)^2}{10} \times 0,0255 \\
 M_{d,tot} &= 25,33 kNm
 \end{aligned}$$

6.2. Método do Pilar-Padrão com a rigidez k aproximada

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$k = 32 \left(1 + \frac{5M_{d,tot}}{hN_d} \right) v$$

$$A \times (M_{d,tot})^2 + B \times (M_{d,tot}) + C = 0$$

$$\text{Donde } \begin{cases} A = 5h \\ B = h^2 \cdot N_d - \frac{N_d l_e^2}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1,d} \\ C = -N_d \cdot h^2 \cdot \alpha_b \cdot M_{1,d} \end{cases} ,$$

Obtemos:

$$A = 5 \times 0,18 = 0,9$$

$$B = 0,18^2 \times 473,8 - \frac{473,8 \times 3,60^2}{320} - 5 \times 0,18 \times 1,0 \times 9,67 = -12,54$$

$$C = -473,8 \times 0,18^2 \times 1,0 \times 9,67 = -148,4$$

$$0,90 \times (M_{d,tot})^2 - 12,54 \times (M_{d,tot}) - 148,4 = 0$$

$$M_{d,tot} = 21,60 \text{ kNm}$$

Os demais métodos a seguir necessitam do diagrama momento vs. curvatura. Este diagrama específico para este pilar, com suas solicitações e armadura previamente sugeridas, foi obtido utilizando o programa MK-UFRJ.

6.3. Método do Pilar-Padrão acoplado aos diagramas M, N e 1/r ($90 \leq \lambda \leq 140$)

Este cálculo será realizado da mesma maneira que no Exemplo 1, porém deve-se alterar a dimensão da seção do pilar nos dados de entrada do MK-UFRJ.

$$\kappa = (EI)_{sec} / (A_c h^2 f_{cd})$$

O momento resistente de cálculo para $N_d = 473,8 \text{ kN}$ e $A_s = 16 \text{ cm}^2$ é de:

$$M_{Rd} = 42,5 \text{ kNm},$$

então temos que: $\frac{M_{Rd}}{1,1} = 38,6 \text{ kNm}$.

Com a relação momento vs curvatura, obtemos que $\frac{1}{r} = \frac{23,99265}{1000}$;

$$\text{logo } (EI)_{sec} = \frac{\frac{M_{Rd}}{1,1}}{\frac{1}{r}} = \frac{38,6 \times 1000}{23,99265} = 1608,8$$

$$\kappa = (EI)_{\text{sec}} / (A_c h^2 f_{cd}) = \frac{1608,8}{(0,18 \times 0,25) \times 0,18^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 61,8$$

A partir da equação da rigidez aproximada obtemos:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_b = 1,0 \\ M_{1d} = 9,67 \text{ kNm} \\ \lambda = 69,28 \\ v = 0,589 \\ \kappa = 61,8 \end{array} \right\} M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}} = \frac{1,0 \times 9,67}{1 - \frac{69,30^2}{120 \times \frac{61,8}{0,589}}} = 15,63$$

$$M_{d,tot} = 15,63 \text{ kNm}$$

6.4. Método exato sem a consideração da fluência

O cálculo do método exato será realizado da mesma maneira que no Exemplo 1, porém no programa Mathcad devemos alterar o comprimento efetivo do pilar.

Como visto no cálculo pela curvatura aproximada, temos o seguinte resultado para a curvatura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \\ v &= \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{473,8}{0,18 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,589 \\ \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{0,18 \times (0,589 + 0,5)} = 0,0255 \leq \frac{0,005}{0,15} = 0,033 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0255 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

A seguir serão calculados $y_{máx}$ e $y(x)$ em cada ponto do pilar

$$y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx} = \frac{3,6^2}{10} \times 0,0255 = 0,03304m$$

$$y_{(x)} = y_{máx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L_e} \right)$$

	0
0	0
1	5.16846·10 ⁻³
2	0.01021
3	0.015
4	0.01942
5	0.02336
6	0.02673
7	0.02944
8	0.03142
9	0.03263
10	0.03304

A partir destes deslocamentos o método iterativo é realizado como no Exemplo

1. São apresentados a seguir os dados de saída do programa MK-UFRJ.

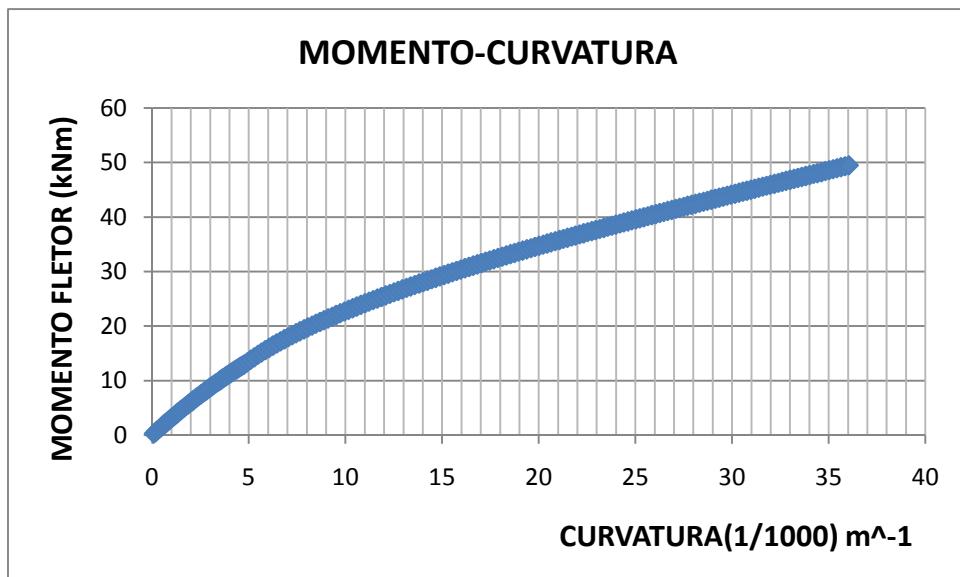


Figura 14-Diagrama momento Vs curvatura- cálculo sem fluência

Com os dados do gráfico anterior, podemos fazer as tabelas a seguir, com os momentos e suas curvaturas correspondentes.

Momento -1 ^a iteração	curvaturas	Momento -2 ^a iteração	curvaturas
9.67	$3.40278*10^{-3}$	9.69	$3.40278*10^{-3}$
12.11	$4.37500*10^{-3}$	10.95	$3.88889*10^{-3}$
14.5	$5.47404*10^{-3}$	12.15	$4.37500*10^{-3}$
16.78	$6.44391*10^{-3}$	13.26	$4.91244*10^{-3}$
18.87	$7.65175*10^{-3}$	14.27	$5.28497*10^{-3}$
20.73	$8.68546*10^{-3}$	15.17	$5.66485*10^{-3}$
22.33	$9.73690*10^{-3}$	15.92	$6.05138*10^{-3}$
23.61	$10.58728*10^{-3}$	16.54	$6.44391*10^{-3}$
24.55	$11.44341*10^{-3}$	16.99	$6.64224*10^{-3}$
25.13	$11.87305*10^{-3}$	17.26	$6.64224*10^{-3}$
25.32	$11.87305*10^{-3}$	17.35	$6.64224*10^{-3}$

Momento -3 ^a iteração	curvaturas	Momento -4 ^a iteração	curvaturas
9.69	$3.40278*10^{-3}$	9.69	$3.40278*10^{-3}$
10.51	$3.79167*10^{-3}$	10.39	$3.69444*10^{-3}$
11.27	$4.08333*10^{-3}$	11.04	$3.98611*10^{-3}$
11.96	$4.37500*10^{-3}$	11.62	$4.18056*10^{-3}$
12.57	$4.66667*10^{-3}$	12.13	$4.47222*10^{-3}$
13.1	$4.91244*10^{-3}$	12.57	$4.66667*10^{-3}$
13.55	$5.09775*10^{-3}$	12.94	$4.76389*10^{-3}$
13.91	$5.28497*10^{-3}$	13.23	$4.91244*10^{-3}$
14.16	$5.28497*10^{-3}$	13.44	$5.09775*10^{-3}$
14.31	$5.47404*10^{-3}$	13.56	$5.09775*10^{-3}$
14.36	$5.47404*10^{-3}$	13.6	$5.09775*10^{-3}$

Momento -5 ^a iteração	curvaturas	Momento -6 ^a iteração	curvaturas
9.69	$3.40278*10^{-3}$	9.69	$3.40278*10^{-3}$
10.36	$3.69444*10^{-3}$	10.35	$3.69444*10^{-3}$
10.97	$3.98611*10^{-3}$	10.95	$3.88889*10^{-3}$
11.52	$4.18056*10^{-3}$	11.49	$4.18056*10^{-3}$
12	$4.37500*10^{-3}$	11.96	$4.37500*10^{-3}$
12.42	$4.56944*10^{-3}$	12.37	$4.56944*10^{-3}$
12.76	$4.66667*10^{-3}$	12.7	$4.66667*10^{-3}$
13.03	$4.91244*10^{-3}$	12.97	$4.76389*10^{-3}$
13.23	$4.91244*10^{-3}$	13.16	$4.91244*10^{-3}$
13.35	$4.91244*10^{-3}$	13.27	$4.91244*10^{-3}$
13.38	$5.09775*10^{-3}$	13.31	$4.91244*10^{-3}$

Momento -7 ^a iteração	curvaturas
9.69	3.40278*10^-3
10.34	3.69444*10^-3
10.94	3.88889*10^-3
11.47	4.18056*10^-3
11.94	4.37500*10^-3
12.35	4.56944*10^-3
12.68	4.66667*10^-3
12.94	4.76389*10^-3
13.13	4.91244*10^-3
13.24	4.91244*10^-3
13.28	4.91244*10^-3

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

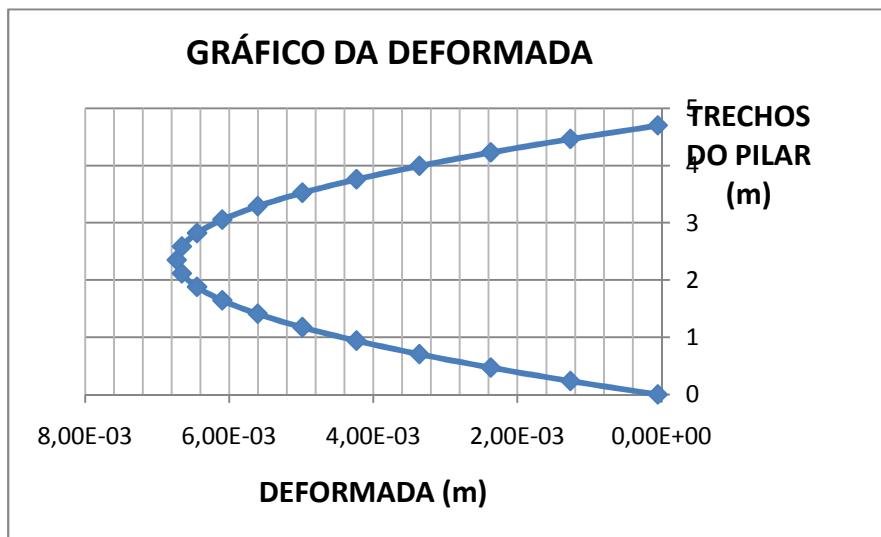


Figura 15- Gráfico da deformada para o exemplo 2-cálculo sem fluência

6.5. Método exato com a consideração da fluênci

Devemos realizar as mesmas considerações do Exemplo 1 para o cálculo da fluênci.

Os momentos determinados na 1^a iteração são os mesmos do cálculo exato sem fluênci. Novamente, o processo passa a ter diferenças numéricas somente quando obtemos as curvaturas, visto que as mesmas encontram-se multiplicadas por três. Depois disto o processo se repete até que a convergência seja obtida.

É mostrado a seguir o gráfico com os dados de saída do MK-UFRJ.

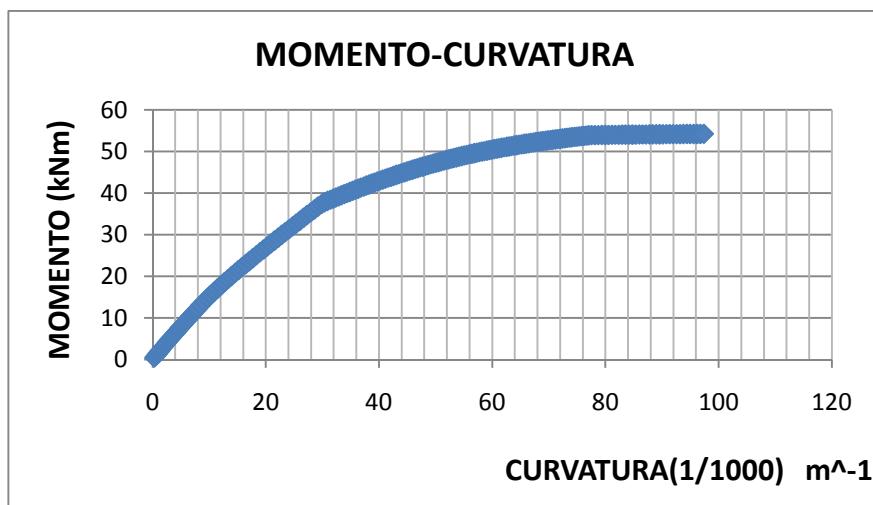


Figura 16-Diagrama momento Vs curvatura- cálculo com fluênci

A seguir serão mostrados os resultados de momentos e curvaturas para todas as iterações.

Momento -1 ^a iteração	curvaturas	Momento -2 ^a iteração	curvaturas
9.67	6.12501*10^-3	9.71	6.41667*10^-3
12.11	7.88769*10^-3	11.82	7.88769*10^-3
14.5	9.64077*10^-3	13.79	9.04920*10^-3
16.78	11.44902*10^-3	15.64	10.84134*10^-3
18.87	13.29507*10^-3	17.29	12.06084*10^-3
20.73	14.54085*10^-3	18.75	13.29507*10^-3
22.33	16.42581*10^-3	19.98	13.91670*10^-3
23.61	17.05752*10^-3	20.96	15.16725*10^-3
24.55	18.32490*10^-3	21.68	15.79566*10^-3
25.13	18.96024*10^-3	22.12	15.79566*10^-3
25.32	18.96024*10^-3	22.26	16.42581*10^-3

Momento -3 ^a iteração	curvaturas	Momento -4 ^a iteração	curvaturas
9.71	0	9.71	$6.41667*10^{-3}$
11.59	$7.58334*10^{-3}$	11.46	$7.58334*10^{-3}$
13.34	$9.04920*10^{-3}$	13.18	$9.04920*10^{-3}$
14.95	$10.23887*10^{-3}$	14.59	$9.64077*10^{-3}$
16.39	$11.44902*10^{-3}$	15.93	$10.84134*10^{-3}$
17.66	$12.06984*10^{-3}$	17.09	$12.06984*10^{-3}$
18.72	$13.29507*10^{-3}$	18.07	$12.67632*10^{-3}$
19.56	$13.91670*10^{-3}$	18.84	$13.29507*10^{-3}$
20.17	$14.54085*10^{-3}$	19.39	$13.91670*10^{-3}$
20.54	$14.54085*10^{-3}$	19.73	$13.91670*10^{-3}$
20.67	$14.54085*10^{-3}$	19.84	$13.91670*10^{-3}$

Momento -5 ^a iteração	curvaturas	Momento -6 ^a iteração	curvaturas
9.71	$6.41667*10^{-3}$	9.71	$6.41667*10^{-3}$
11.4	$7.58334*10^{-3}$	11.36	$7.58334*10^{-3}$
12.97	$8.46453*10^{-3}$	12.88	$8.46453*10^{-3}$
14.41	$9.64077*10^{-3}$	14.27	$9.64077*10^{-3}$
15.69	$10.84134*10^{-3}$	15.52	$10.84134*10^{-3}$
16.81	$11.44902*10^{-3}$	16.6	$11.44902*10^{-3}$
17.74	$12.06084*10^{-3}$	17.51	$12.06084*10^{-3}$
18.48	$12.67632*10^{-3}$	18.22	$12.67632*10^{-3}$
19.01	$13.29507*10^{-3}$	18.75	$13.29507*10^{-3}$
19.34	$13.91670*10^{-3}$	19.07	$13.29507*10^{-3}$
19.44	$13.91670*10^{-3}$	19.17	$13.29507*10^{-3}$

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

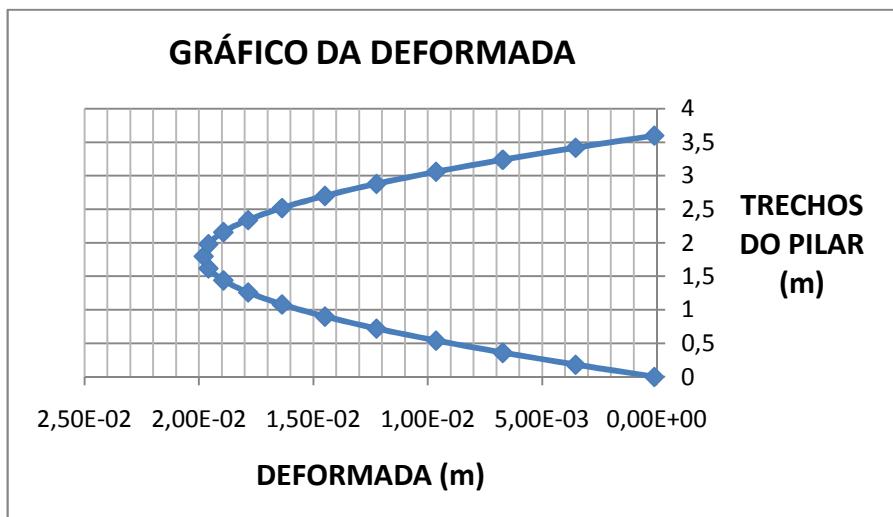


Figura 17- Gráfico da deformada para o exemplo 2-cálculo com fluência

6.6. Consideração da excentricidade adicional estipulada na NBR6118, item 15.8.4

Vamos calcular para a seção de 18x25 com 2 camadas de 4Φ16.

Cálculo da excentricidade de fluência e_{cc} :

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \left(2,718^{\frac{\varphi N_{sg}}{Ne - N_{sg}}} - 1 \right)$$

$$M_{sg} = \sum M_{gi,k} + \psi_{2j} \sum M_{qj,k}, \quad M_{qj} = 0$$

$$M_{sg} = 6,90 \text{ kNm}$$

$$N_{sg} = \sum N_{gi,k} + \psi_{2j} \sum N_{qj,k}, \quad N_{qj} = 0$$

$$N_{sg} = 338,4 \text{ kN}$$

$$N_e = \frac{10E_{ci}I_c}{l_e^2} \begin{cases} E_{ci} = 5600\sqrt{25} = 28000 \text{ Mpa} \\ I_c = 0,25 \times (0,18)^3 / 12 = 1,215 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ l_e = 3,60 \text{ m} \end{cases}$$

$$N_e = \frac{10 \times 28000 \times 10^3 \times 12,15 \times 10^{-5}}{3,60^2} = 2625 \text{ kN}$$

$\varphi = 2,0$ (coeficiente de fluência considerado)

Da Norma temos que: $\theta_{l_{\max}} = \left(\frac{I}{100\sqrt{H}} \right)$

$$\theta_{l_{\max}} = \left(\frac{1}{100\sqrt{H}} \right) = \frac{1}{100\sqrt{18}} = \frac{1}{424,3}$$

$$\theta_1 = \frac{e_a}{3,6} \therefore e_a = 0,008485m$$

$$e_{cc} = \left(\frac{6,90}{338,4} + 0,008485 \right) \left(2,718^{\frac{2 \times 338,4}{2625 - 338,4}} - 1 \right) \therefore e_{cc} = 0,009945m$$

$$M_{1d,\min} = 473,8 \times (0,0204 + 0,009945) = 14,38kNm$$

$$M_{Rd} = 42,5kNm$$

$$\text{então temos que: } \frac{M_{Rd}}{1,1} = 38,6kNm$$

$$\text{Com a relação momento - curvatura, obtemos } \frac{1}{r} = \frac{23,99265}{1000},$$

$$\text{logo } (EI)_{sec} = \frac{M_{Rd}}{\frac{1}{r}} = \frac{38,6 \times 1000}{23,99265} = 1608,8$$

$$\kappa = (EI)_{sec} / (A_c h^2 f_{cd}) = \frac{1608,8}{(0,18 \times 0,25) \times 0,18^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 61,8$$

A partir da equação da rigidez aproximada obtemos:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_b = 1,0 \\ M_{1d} = 14,38 \text{ kNm} \\ \lambda = 69,28 \\ v = 0,589 \\ \kappa = 61,8 \end{array} \right\} M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}} = \frac{1,0 \times 14,38}{1 - \frac{69,28^2}{120 \times \frac{61,8}{0,589}}} = 23,24 \text{ kNm}$$

$$M_{d,tot} = 23,24 \text{ kNm}$$

7. Cálculo do 3º exemplo de pilar a partir dos métodos aproximados e exatos da NBR6118

Características do pilar:

- 1) Vamos considerar o pilar com seção de 18x25, e altura efetiva de 4,70m, com isso vamos ter um índice de esbeltez próximo de 90.
- 2) A armadura é composta por 2 camadas de 4Φ12,5

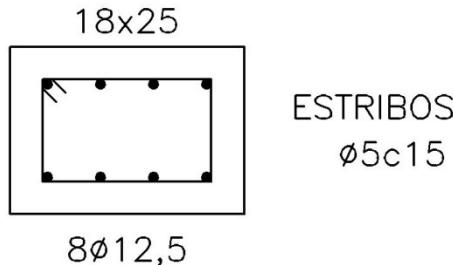


Figura 18 – Seção do pilar P1

$$le = 4,70 \text{ m}$$

$$\lambda = \frac{le}{h} \times \sqrt{12} \quad \therefore \lambda = \frac{4,70}{0,18} \times \sqrt{12} = 90,45$$

Devido ao índice de esbeltez elevado vamos diminuir os esforços pela metade:

$$N_d = 236,9 \text{ kN} \quad e \quad M_{1d,\min} = 4,83 \text{ kNm}$$

Verificação do efeito de 2^a ordem:

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times e_1 / h}{\alpha_b};$$

$$e_1 = 0,015 + 0,03h = 0,015 + 0,03 \times 0,18 = 0,0204$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times 0,0204 / 0,18}{1} = 26,4 \rightarrow \lambda_l = 35$$

logo devemos considerar o efeito de 2^a ordem.

Solicitações do Pilar:

$$N_d = -236,9kN;$$

$$M_{1dm\min} = N_d \times e \therefore M_{1dm\min} = 236,9 \times 0,0204 = 4,83kNm$$

7.1. Método do Pilar-Padrão com curvatura aproximada

$$M_{d,tot} = \alpha_b M_{1d} + N_d \frac{l_e^2}{10} \frac{1}{r} \geq M_{1d\min}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{236,9}{0,18 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,2948$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,18 \times (0,2948 + 0,5)} = 0,035 \leq \frac{0,005}{0,18} = 0,02778 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0333m^{-1}$$

$$M_{d,tot} = 1,0 \times 4,83 + 236,9 \times \frac{(4,70)^2}{10} \times 0,02778$$

$$M_{d,tot} = 19,37kNm$$

7.2. Método do Pilar-Padrão com a rigidez k aproximada

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$k = 32 \left(1 + \frac{5M_{d,tot}}{hN_d} \right) v$$

$$A \times (M_{d,tot})^2 + B \times (M_{d,tot}) + C = 0$$

$$\text{Donde } \begin{cases} A = 5h \\ B = h^2 \cdot N_d - \frac{N_d \cdot l_e^2}{320} - 5 \cdot h \cdot \alpha_b \cdot M_{1,d} \\ C = -N_d \cdot h^2 \cdot \alpha_b \cdot M_{1,d} \end{cases}$$

Obtemos:

$$A = 5 \times 0,18 = 0,90$$

$$B = 0,18^2 \times 236,9 - \frac{236,9 \times 4,70^2}{320} - 5 \times 0,18 \times 1,0 \times 4,83 = -13,02$$

$$C = -236,9 \times 0,18^2 \times 1,0 \times 4,83 = -37,07$$

$$0,90 \times (M_{d,tot})^2 - 13,02 \times (M_{d,tot}) - 37,07 = 0$$

$$M_{d,tot} = 16,90 \text{ kNm}$$

Os demais métodos necessitam do diagrama momento Vs curvatura, obtido utilizando o programa MK-UFRJ.

7.3. Método do Pilar-Padrão acoplado aos diagramas M, N e 1/r ($90 \leq \lambda \leq 140$)

Este cálculo será realizado da mesma maneira que no Exemplo 1, porém deve-se alterar o valor da força normal aplicada no pilar e manter as dimensões da seções do pilar iguais ao do pilar do Exemplo 2 no MK-UFRJ.

$$\kappa = (EI)_{sec} / (A_c h^2 f_{cd})$$

Momento resistente de cálculo para $N_d = 236,9kN$ e $A_s = 9,84cm^2$:

$$M_{Rd} = 34kNm$$

Então temos que: $\frac{M_{Rd}}{1,1} = 30,9kNm$

Com a relação momento vs curvatura obtemos $\frac{1}{r} = \frac{28,13804}{1000}$;

$$\text{logo } (EI)_{sec} = \frac{M_{Rd}}{1,1} = \frac{30,9 \times 1000}{28,13804} = 1098,2$$

$$\kappa = (EI)_{sec} / (A_c h^2 f_{cd}) = \frac{1098,2}{(0,18 \times 0,25) \times 0,18^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 42,18$$

A partir da equação da rigidez aproximada obtemos:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_b = 1,0 \\ M_{1d} = 4,83kNm \\ \lambda = 90,45 \\ v = 0,2948 \\ \kappa = 42,18 \end{array} \right\} M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}} = \frac{1,0 \times 4,83}{1 - \frac{90,45^2}{120 \times \frac{42,18}{0,2948}}} = 9,23kNm$$

$$M_{d,tot} = 9,23kNm$$

7.4. Método exato sem a consideração da fluênci

O cálculo do método exato será realizado da mesma maneira que no Exemplo 1, alterando-se somente o valor de N_d e mantendo as dimensões do pilar iguais às do Exemplo 2 nos dados de entrada do MK-UFRJ. Já no programa Mathcad, devemos alterar o comprimento efetivo do pilar e manter as dimensões da seção do Exemplo 2.

O cálculo do método exato será feito com o auxílio do programa Mathcad.

Como visto no cálculo pela curvatura aproximada, temos o seguinte resultado para a curvatura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{h(v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \\ v &= \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{236,9}{0,18 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,2948 \\ \frac{1}{r} &= \frac{0,005}{0,18 \times (0,2948 + 0,5)} = 0,02778 \leq \frac{0,005}{0,15} = 0,033 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,02778m^{-1} \end{aligned}$$

A seguir serão calculados $y_{máx}$ e $y(x)$ em cada ponto do pilar:

$$y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx} = \frac{4,7^2}{10} \times 0,02778 = 0,06136m$$

$$y_{(x)} = y_{máx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L_e} \right)$$

	0
0	0
1	9.59899·10 ⁻³
2	0.01896
3	0.02786
4	0.03607
5	0.04339
6	0.04964
7	0.05467
8	0.05836
9	0.06061
10	0.06136

Y(X) =

A partir destes deslocamentos o método iterativo é realizado como nos Exemplos 1 e 2. Serão mostrados a seguir os dados de saída do MK-UFRJ.

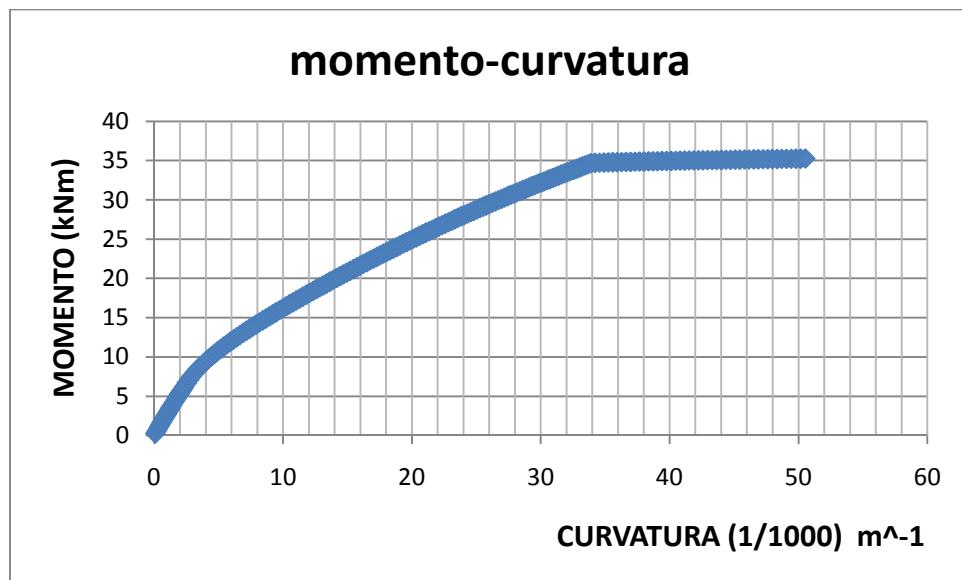


Figura 19-Diagrama momento Vs curvatura- cálculo sem fluência

A seguir serão apresentados os resultados dos momentos e curvaturas de todas as iterações.

Momento -1 ^a iteração	curvaturas	Momento -2 ^a iteração	curvaturas
4.83	1.84722*10^-3	4.84	1.84722*10^-3
7.11	2.73866*10^-3	5.94	2.23611*10^-3
9.32	4.02013*10^-3	7	2.73866*10^-3
11.43	5.66529*10^-3	8.01	3.14890*10^-3
13.38	7.40768*10^-3	8.94	3.79668*10^-3
15.11	8.94488*10^-3	9.78	4.24692*10^-3
16.59	10.50343*10^-3	10.49	4.94498*10^-3
17.78	11.80979*10^-3	11.08	5.42302*10^-3
18.66	12.59461*10^-3	11.51	5.66529*10^-3
19.19	13.37913*10^-3	11.77	5.90950*10^-3
19.37	13.37913*10^-3	11.86	5.90950*10^-3

Momento -3 ^a iteração	curvaturas	Momento -4 ^a iteração	curvaturas
4.84	1.84722*10^-3	4.84	1.84722*10^-3
5.38	2.04167*10^-3	5.19	1.94444*10^-3
5.89	2.23611*10^-3	5.51	2.13889*10^-3
6.36	2.54094*10^-3	5.81	2.23611*10^-3
6.79	2.73866*10^-3	6.06	2.34857*10^-3
7.17	2.73866*10^-3	6.29	2.54094*10^-3
7.5	2.94142*10^-3	6.47	2.54094*10^-3
7.76	3.14890*10^-3	6.62	2.54094*10^-3
7.95	3.14890*10^-3	6.73	2.54094*10^-3
8.07	3.36079*10^-3	6.79	2.73866*10^-3
8.11	3.36079*10^-3	6.82	2.73866*10^-3

Momento -5 ^a iteração	curvaturas	Momento -6 ^a iteração	curvaturas
4.84	$1.84722*10^{-3}$	4.84	$1.84722*10^{-3}$
5.14	$1.94444*10^{-3}$	5.13	$1.94444*10^{-3}$
5.42	$2.04167*10^{-3}$	5.39	$2.04167*10^{-3}$
5.67	$2.13889*10^{-3}$	5.63	$2.13889*10^{-3}$
5.88	$2.23611*10^{-3}$	5.84	$2.23611*10^{-3}$
6.07	$2.34857*10^{-3}$	6.01	$2.34857*10^{-3}$
6.22	$2.34857*10^{-3}$	6.16	$2.34857*10^{-3}$
6.34	$2.54094*10^{-3}$	6.28	$2.54094*10^{-3}$
6.43	$2.54094*10^{-3}$	6.36	$2.54094*10^{-3}$
6.48	$2.54094*10^{-3}$	6.41	$2.54094*10^{-3}$
6.5	$2.54094*10^{-3}$	6.43	$2.54094*10^{-3}$

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

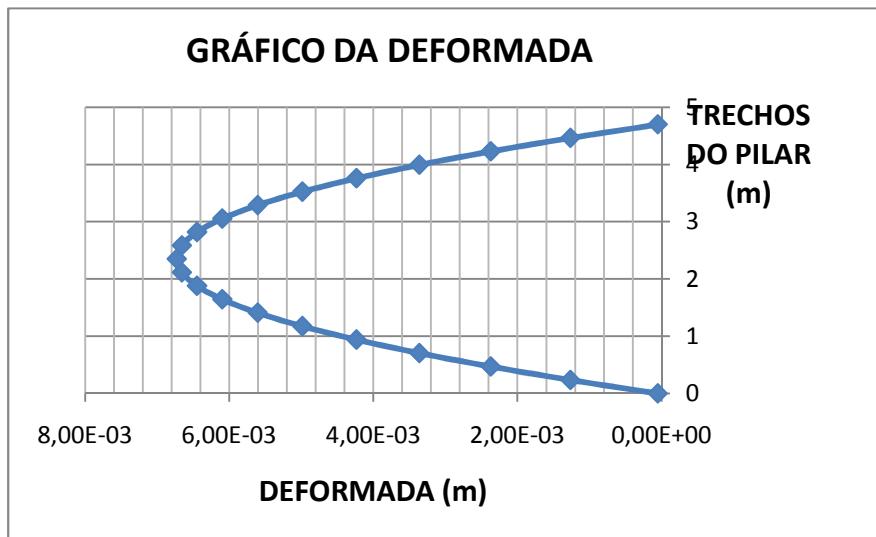


Figura 20- Gráfico da deformada para o exemplo 3-cálculo sem fluência

7.5. Método exato com a consideração da fluência

Devemos realizar as mesmas considerações do Exemplo 1 para o cálculo da fluência.

Os momentos determinados na 1^a iteração são os mesmos do cálculo exato sem fluência. Novamente, o processo passa a ter diferenças numéricas somente quando obtemos as curvaturas, visto que as mesmas encontram-se multiplicadas por três. Depois disto o processo se repete até que a convergência seja obtida.

Serão apresentados a seguir os dados de saída do MK-UFRJ.

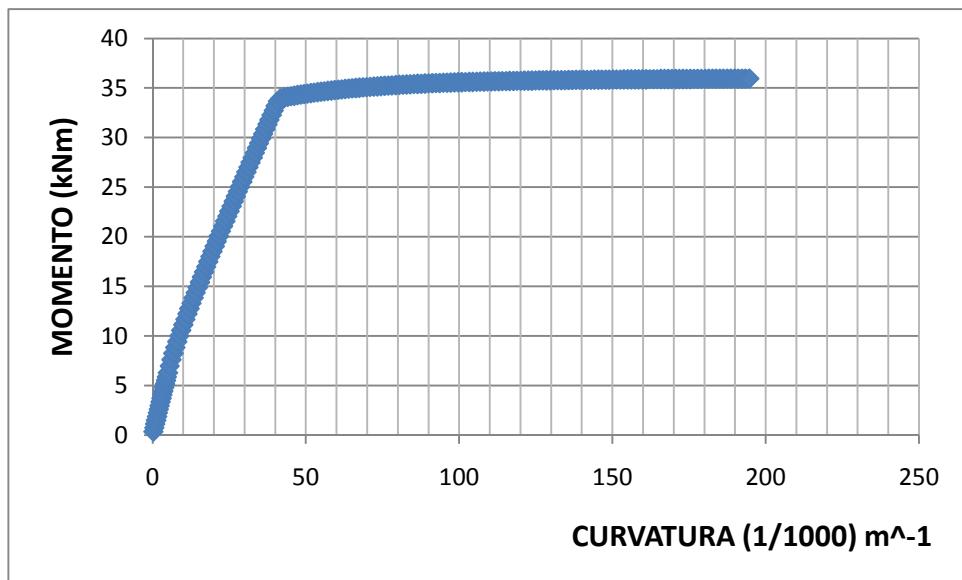


Figura 21-Diagrama momento Vs curvatura- cálculo com fluência

Também serão mostradas tabelas com os momentos e curvaturas de todas as iterações.

Momento -1 ^a iteração	curvaturas	Momento -2 ^a iteração	curvaturas
4.84	4.08333*10^-3	4.86	4.08333*10^-3
7.11	6.20133*10^-3	6.72	5.59887*10^-3
9.32	8.08092*10^-3	8.49	7.44417*10^-3
11.43	10.69929*10^-3	10.16	9.37797*10^-3
13.38	13.39077*10^-3	11.69	10.69929*10^-3
15.11	15.43653*10^-3	13.04	12.71322*10^-3
16.59	17.49597*10^-3	14.19	14.07072*10^-3
17.78	18.87372*10^-3	15.12	15.43653*10^-3
18.66	20.25387*10^-3	15.79	16.12179*10^-3
19.19	20.94456*10^-3	16.2	16.80834*10^-3
19.37	20.94456*10^-3	16.34	16.80834*10^-3

Momento -3 ^a iteração	curvaturas	Momento -4 ^a iteração	curvaturas
4.86	4.08333*10^-3	4.86	4.08333*10^-3
6.39	5.59887*10^-3	6.17	5.01204*10^-3
7.84	6.81708*10^-3	7.39	6.20133*10^-3
9.19	8.08092*10^-3	8.54	7.44417*10^-3
10.43	9.37797*10^-3	9.58	8.72592*10^-3
11.52	10.69929*10^-3	10.49	9.37797*10^-3
12.45	12.03846*10^-3	11.27	10.69929*10^-3
13.19	12.71322*10^-3	11.89	11.36697*10^-3
13.73	13.39077*10^-3	12.34	12.03846*10^-3
14.06	14.07072*10^-3	12.61	12.03846*10^-3
14.17	14.07072*10^-3	12.71	12.03846*10^-3

Momento -5 ^a iteração	curvaturas	Momento -6 ^a iteração	curvaturas
4.86	4.08333*10^-3	4.86	4.08333*10^-3
6.02	5.01204*10^-3	5.93	5.01204*10^-3
7.12	6.20133*10^-3	6.94	5.59887*10^-3
8.14	6.81708*10^-3	7.87	6.81708*10^-3
9.06	8.08092*10^-3	8.7	7.44417*10^-3
9.86	8.72592*10^-3	9.43	8.08092*10^-3
10.54	9.37797*10^-3	10.05	9.37797*10^-3
11.09	10.03605*10^-3	10.54	9.37797*10^-3
11.48	10.69929*10^-3	10.91	10.03605*10^-3
11.72	11.36697*10^-3	11.13	10.03605*10^-3
11.79	11.36697*10^-3	11.21	10.69929*10^-3

Momento -7 ^a iteração	curvaturas	Momento -8 ^a iteração	curvaturas
4.86	4.08333*10^-3	4.86	4.08333*10^-3
5.87	4.66668*10^-3	5.84	4.66668*10^-3
6.81	5.59887*10^-3	6.76	5.59887*10^-3
7.68	6.81708*10^-3	7.61	6.20133*10^-3
8.46	7.44417*10^-3	8.37	7.44417*10^-3
9.15	8.08092*10^-3	9.04	8.08092*10^-3
9.72	8.72592*10^-3	9.59	8.72592*10^-3
10.18	9.37797*10^-3	10.04	9.37797*10^-3
10.51	9.37797*10^-3	10.35	9.37797*10^-3
10.71	10.03605*10^-3	10.55	9.37797*10^-3
10.78	10.03605*10^-3	10.62	10.03605*10^-3

Momento -9 ^a iteração	curvaturas	Momento -10 ^a iteração	curvaturas
4.86	4.08333*10^-3	4.86	4.08333*10^-3
5.83	4.66668*10^-3	5.81	4.66668*10^-3
6.73	5.59887*10^-3	6.71	5.59887*10^-3
7.56	6.20133*10^-3	7.52	6.20133*10^-3
8.32	7.44417*10^-3	8.26	6.81708*10^-3
8.96	8.08092*10^-3	8.9	8.08092*10^-3
9.52	8.72592*10^-3	9.43	8.08092*10^-3
9.95	8.72592*10^-3	9.86	8.72592*10^-3
10.26	9.37797*10^-3	10.17	9.37797*10^-3
10.45	9.37797*10^-3	10.35	9.37797*10^-3
10.51	9.37797*10^-3	10.41	9.37797*10^-3

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

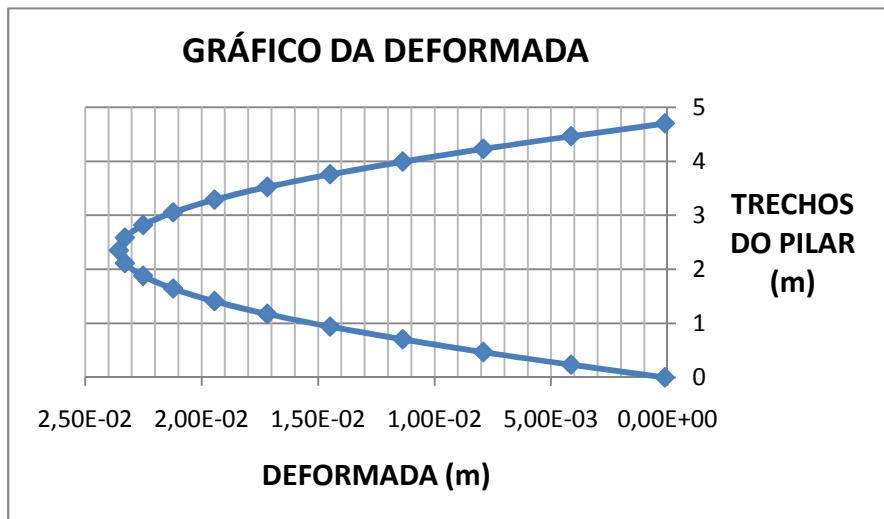


Figura 22- Gráfico da deformada para o exemplo 3-cálculo com fluência

7.6. Considerando a excentricidade adicional estipulada na NBR6118, item 15.8.4

Vamos calcular para a seção de 18x25 com 2 camadas de 4Φ12,5

Cálculo da excentricidade de fluência e_{cc} :

$$e_{cc} = \left(\frac{M_{sg}}{N_{sg}} + e_a \right) \left(2,718^{\frac{\varphi N_{sg}}{N_e - N_{sg}}} - 1 \right)$$

$$M_{sg} = \sum M_{gi,k} + \psi_{2j} \sum M_{qj,k}, \quad M_{qj} = 0$$

$$M_{sg} = 3,45 \text{ kNm}$$

$$N_{sg} = \sum N_{gi,k} + \psi_{2j} \sum N_{qj,k}, \quad N_{qj} = 0$$

$$N_{sg} = 169,2 \text{ kN}$$

$$N_e = \frac{10E_{ci}I_c}{l_e^2} \begin{cases} E_{ci} = 5600\sqrt{25} = 28000 \text{ Mpa} \\ I_c = 0,25 \times (0,18)^3 / 12 = 12,15 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \\ l_e = 4,70 \text{ m} \end{cases}$$

$$N_e = \frac{10 \times 28000 \times 10^3 \times 12,15 \times 10^{-5}}{4,70^2} = 1540 \text{ kN}$$

$$\varphi = 2,0 \text{ (coeficiente de fluência dado de norma)}$$

Da Norma temos que: $\theta_{l_{máx}} = \left(\frac{I}{100\sqrt{H}} \right)$

$$\theta_{l_{máx}} = \left(\frac{1}{100\sqrt{H}} \right) = \frac{1}{100\sqrt{23,5}} = \frac{1}{484,8}$$

$$\theta_l = \frac{e_a}{4,7} \therefore e_a = 0,009695 \text{ m}$$

$$e_{cc} = \left(\frac{3,45}{169,2} + 0,009695 \right) \left(2,718540^{\frac{2 \times 169,2}{1540-169,2}} - 1 \right) \therefore e_{cc} = 0,008423$$

$$M_{1d,\min} = 236,9 \times (0,0204 + 0,008423) = 6,83 kNm$$

$$\kappa = (EI)_{\sec} / (A_c h^2 f_{cd})$$

Momento resistente de cálculo para $N_d = 236,9 kN$ e $A_s = 9,84 cm^2$

$$M_{Rd} = 34 kNm,$$

Então temos que: $\frac{M_{Rd}}{1,1} = 30,9 kNm$ e com a relação momento vs. curvatura:

$$\text{Obtemos } \frac{1}{r} = \frac{28,13804}{1000};$$

$$\text{logo } (EI)_{\sec} = \frac{\frac{M_{Rd}}{1,1}}{\frac{1}{r}} = \frac{30,9 \times 1000}{28,13804} = 1098,2$$

$$\kappa = (EI)_{\sec} / (A_c h^2 f_{cd}) = \frac{1098,2}{(0,18 \times 0,25) \times 0,18^2 \times \frac{25000}{1,4}} = 42,18$$

A partir da equação da rigidez aproximada obtemos:

$$M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_b = 1,0 \\ M_{1d} = 6,83 \text{ kNm} \\ \lambda = 90,45 \\ v = 0,2948 \\ \kappa = 42,18 \end{array} \right\} M_{d,tot} = \frac{\alpha_b \times M_{1d,\min}}{1 - \frac{\lambda^2}{120 \times \frac{k}{v}}} = \frac{1,0 \times 6,83}{1 - \frac{90,45^2}{120 \times \frac{42,18}{0,2948}}} = 13,05 \text{ kNm}$$

$$M_{d,tot} = 13,05 \text{ kNm}$$

8. Cálculo do 4º exemplo de pilar a partir do método exato

Para o nosso próximo exemplo, como citado na introdução, utilizaremos o pilar apresentado no Exemplo 1, mas agora com momentos aplicados nas extremidades. Para facilitar a apresentação, o valor destes momentos será a divisão do momento mínimo de primeira ordem pelo fator α_b , cujo valor é função dos momentos aplicados nas extremidades, com mesmo valor absoluto e sinais contrários. Com isso, os cálculos deverão ser refeitos apenas para o método exato, com o auxílio do programa Mathcad visto anteriormente, permanecendo numericamente válidos os demais cálculos aproximados do Exemplo 1.

É importante ressaltar que agora teremos 21 pontos para nossa análise, ao invés dos 11 utilizados anteriormente, em virtude da variação dos momentos aplicados ao longo do pilar, sendo assim, adotando o comprimento total efetivo do pilar.

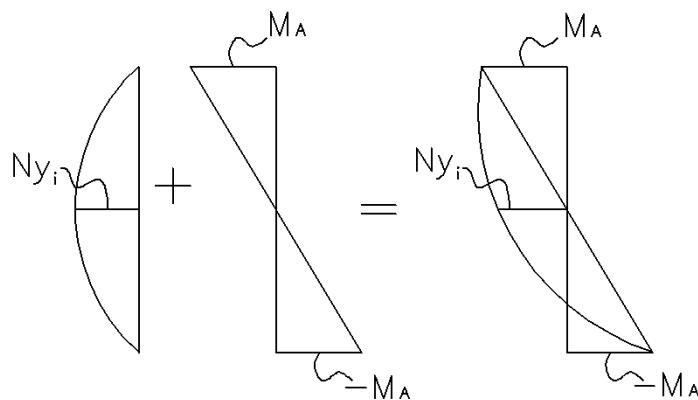


Figura 23 – Momentos aplicados no pilar

Verificação dos efeitos de 2^a ordem

$$\lambda = \frac{le}{h} \times \sqrt{12} \quad \therefore \lambda = \frac{2,55}{0,15} \times \sqrt{12} = 58,89$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times e_1 / h}{\alpha_b};$$

$$e_1 = 0,015 + 0,03h = 0,015 + 0,03 \times 0,15 = 0,0195$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times 0,0195 / 0,15}{0,4} = 66,56$$

Logo, não há necessidade de se considerar o efeito de 2^a ordem

8.1. Cálculo exato desconsiderando o efeito da fluência.

No MK-UFRJ foram considerados os dados de entrada e de saída apresentados para o Exemplo 1.

Com a saída do programa MK-UFRJ obtemos o diagrama momento vs. curvatura cujos valores serão utilizados no programa Mathcad, para a realização das iterações.

Como visto no cálculo pela curvatura aproximada, temos o seguinte resultado para a curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{473,8}{0,15 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,707$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,15 \times (0,707 + 0,5)} = 0,028 \leq \frac{0,005}{0,15} = 0,033 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0276$$

A seguir serão calculados $y_{máx}$ e $y(x)$ em cada ponto do pilar:

$$y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx} = \frac{2,55^2}{10} \times 0,0276 = 0,01795m$$

$$y_{(x)} = y_{máx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L_e} \right)$$

Y(X)
0
2.81E-03
5.55E-03
8.15E-03
0.01055
0.1269
0.01452
0.01599
0.01707
0.01773
0.01795
0.01773
0.01707
0.01599
0.01452
0.1269
0.01055
8.15E-03
5.55E-03
2.81E-03
0

Estes valores serão utilizados na multiplicação pela força normal, para obtermos a matriz apresentada a seguir, que é uma matriz cujos valores estão em função dos deslocamentos:

M=Nd x Y(X)
0
1.33041
2.62806
3.86099
4.99886
6.01364
6.88034
7.57762
8.08832
8.39986
8.50457
8.39986
8.08832
7.57762
6.88034
6.01364
4.99886
3.86099
2.62806
1.33041
0

Depois da matriz acima determinada, devemos partir para o cálculo da matriz composta pelos momentos aplicados nas extremidades, para posteriormente somá-las e assim obtermos os momentos totais atuantes no pilar.

A matriz formada pelos momentos aplicados nas extremidades é obtida da seguinte forma:

$$M_i = M_{i-1} - \Delta M ,$$

Onde:

$$\Delta M = \frac{M_A - (-M_A)}{\Delta X} = \frac{\frac{9,2391}{0,4} - \left(\frac{-9,2391}{0,4}\right)}{20} = \frac{23,09775 + 23,09775}{20} = 2,309775 \text{ kNm}$$

Com isso, se subtraímos o valor de 2,309775 do valor de 23,09775, obtemos o momento de 20,78797kNm e assim sucessivamente até chegarmos a todos os elementos da matriz M_i , apresentada abaixo:

Matriz Mi
23.09775
20.78797
18.4782
16.16842
13.85865
11.54887
9.2391
6.92932
4.61955
2.30977
0
-2.30978
-4.61955
-6.92933
-9.2391
-11.54888
-13.85865
-16.16843
-18.4782
-20.78798
-23.09775

Assim o momento total em cada ponto do pilar é obtido pela equação abaixo:

$$M_{di} = M_i + N_d \times y(x),$$

Somando estas duas matrizes obtidas anteriormente, obtemos os momentos totais da primeira iteração:

Momento-1 ^a iteração
23.09775
22.11838
21.10626
20.02942
18.85751
17.56251
16.11944
14.50695
12.70787
10.70964
8.50457
6.09009
3.46877
0.6483
-2.35876
-5.53524
-8.85979
-12.30743
-15.85014
-19.45757
-23.09775

Com estes momentos determinados, podemos utilizar a saída do programa MK-UFRJ e determinar as curvaturas correspondentes. Agora podemos partir para a segunda iteração utilizando a equação $\Delta^{-1} \times \frac{1}{r} = y$, tendo em mente que devemos obter novos deslocamentos utilizando as curvaturas obtidas anteriormente. A matriz dos momentos M_i serão as mesmas em todas as iterações.

Os dados de saída do MK-UFRJ para este caso de cálculo são iguais ao do Exemplo 1.

A seguir serão mostradas tabelas com os momentos e curvaturas de todas as iterações.

Momento-1 ^a iteração	curvaturas	Momento-2 ^a iteração	curvaturas
23.09775	0	23.09775	0
22.11838	23.57011×10^{-3}	21.64287	22.57001×10^{-3}
21.10626	21.56594×10^{-3}	20.00645	19.79912×10^{-3}
20.02942	19.79912×10^{-3}	18.20392	16.75052×10^{-3}
18.85751	17.76846×10^{-3}	16.2489	13.69958×10^{-3}
17.56251	15.73220×10^{-3}	14.15702	11.18378×10^{-3}
16.11944	13.69958×10^{-3}	11.94397	8.73102×10^{-3}
14.50695	11.43326×10^{-3}	9.6254	6.62468×10^{-3}
12.70787	9.45728×10^{-3}	7.21877	4.66667×10^{-3}
10.70964	7.54528×10^{-3}	4.7393	2.91667×10^{-3}
8.50457	5.71667×10^{-3}	2.20171	1.28333×10^{-3}
6.09009	3.85000×10^{-3}	-0.37991	-0.23333×10^{-3}
3.46877	2.10000×10^{-3}	-2.99118	-1.75×10^{-3}
0.6483	0.46667×10^{-3}	-5.61863	-3.5×10^{-3}
-2.35876	-1.4×10^{-3}	-8.24967	-5.48333×10^{-3}
-5.53524	-3.5×10^{-3}	-10.86993	-7.54528×10^{-3}
-8.85979	-5.95447×10^{-3}	-13.46323	-10.19243×10^{-3}
-12.30743	-8.97201×10^{-3}	-16.01067	-13.44634×10^{-3}
-15.85014	-13.19338×10^{-3}	-18.489	-17.25961×10^{-3}
-19.45757	-18.78496×10^{-3}	-20.86572	-21.31427×10^{-3}
-23.09775	0	-23.09775	0

Momento-3 ^a iteração	curvaturas	Momento-4 ^a iteração	curvaturas
23.09775	0	23.09775	0
21.37258	22.06850*10^-3	21.29145	22.06850*10^-3
19.47358	18.78496*10^-3	19.31516	18.53102*10^-3
17.42207	15.47771*10^-3	17.1942	15.22328*10^-3
15.24156	12.43649*10^-3	14.95402	12.18498*10^-3
12.95552	9.70143*10^-3	12.61805	9.21412*10^-3
10.58334	7.31254*10^-3	10.20736	7.08146*10^-3
8.14392	5.36667*10^-3	7.74035	5.13333*10^-3
5.65347	3.50000*10^-3	5.232	3.26667*10^-3
3.12708	1.86667*10^-3	2.69669	1.63333*10^-3
0.57822	0.35000*10^-3	0.14701	0.11667*10^-3
-1.98052	-1.16667*10^-3	-2.40537	-0.0014*10^-3
-4.53747	-2.8*10^-3	-4.94876	-3.03333*10^-3
-7.08093	-4.55*10^-3	-7.47059	-4.9*10^-3
-9.59744	-6.62468*10^-3	-9.95737	-6.85214*10^-3
-12.07171	-8.73102*10^-3	-12.39313	-8.97201*10^-3
-14.48787	-11.43326*10^-3	-14.76164	-11.9339*10^-3
-16.82553	-14.71474*10^-3	-17.04209	-14.96895*10^-3
-19.05962	-18.02276*10^-3	-19.2092	-18.27695*10^-3
-21.16077	-21.81735*10^-3	-21.2375	-21.81735*10^-3
-23.09775	0	-23.09775	0

Momento-5 ^a iteração	curvaturas
23.09775	0
21.27355	$21.81735*10^{-3}$
19.27938	$18.53102*10^{-3}$
17.14248	$15.22328*10^{-3}$
14.88832	$11.93390*10^{-3}$
12.54032	$9.21412*10^{-3}$
10.12134	$7.08146*10^{-3}$
7.64782	$5.01667*10^{-3}$
5.13477	$3.15000*10^{-3}$
2.59655	$1.51667*10^{-3}$
0.04575	$0.11667*10^{-3}$
-2.50595	$-1.51667*10^{-3}$
-5.04686	$-3.15*10^{-3}$
-7.56441	$-4.9*10^{-3}$
-10.04422	$-6.85214*10^{-3}$
-12.47125	$-9.21412*10^{-3}$
-14.82918	$-11.9339*10^{-3}$
-17.09519	$-14.96895*10^{-3}$
-19.2459	$-18.27695*10^{-3}$
-21.25585	$-21.81735*10^{-3}$
-23.09775	0

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

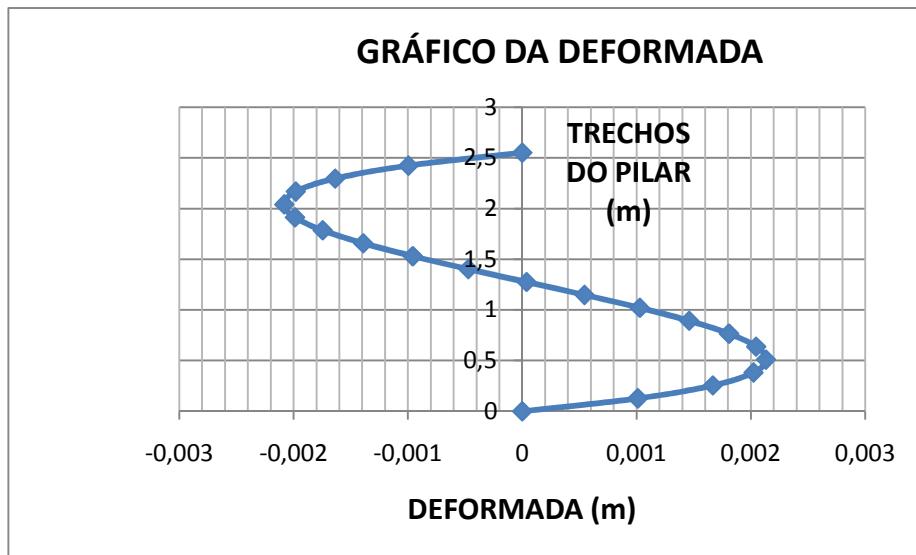


Figura 24- Gráfico da deformada para o exemplo 4-cálculo sem fluência

8.2. Cálculo exato considerando o efeito da fluênciā.

Para o cálculo exato com fluênciā, o processo é idêntico ao apresentado para o cálculo sem fluênciā. O único parâmetro que muda são as curvaturas que são multiplicadas por três, aumentando assim o valor dos deslocamentos e consequentemente também o dos momentos.

A seguir serão mostradas as tabelas com os valores dos momentos totais e as curvaturas em cada iteração.

Momento-1 ^a iteração	curvaturas	Momento-2 ^a iteração	curvaturas
23.09775	0	23.09775	0
22.11838	$33.75732*10^{-3}$	22.12431	$33.75732*10^{-3}$
21.10626	$31.49001*10^{-3}$	20.89085	$31.49001*10^{-3}$
20.02942	$29.97897*10^{-3}$	19.41486	$28.46877*10^{-3}$
18.85751	$27.71415*10^{-3}$	17.70796	$25.45302*10^{-3}$
17.56251	$25.45302*10^{-3}$	15.7876	$21.69915*10^{-3}$
16.11944	$22.44795*10^{-3}$	13.6712	$18.71856*10^{-3}$
14.50695	$20.20557*10^{-3}$	11.3819	$15.04266*10^{-3}$
12.70787	$17.23989*10^{-3}$	8.93697	$11.4648*10^{-3}$
10.70964	$13.59621*10^{-3}$	6.35926	$7.70001*10^{-3}$
8.50457	$10.76739*10^{-3}$	3.67682	$4.55001*10^{-3}$
6.09009	$7.35000*10^{-3}$	0.91145	$1.05000*10^{-3}$
3.46877	$4.2000*10^{-3}$	-1.91053	$-2.45001*10^{-3}$
0.6483	$0.69999*10^{-3}$	-4.76485	$-5.94999*10^{-3}$
-2.35876	$-2.79999*10^{-3}$	-7.62457	$-9.45*10^{-3}$
-5.53524	$-6.65001*10^{-3}$	-10.46273	$-13.59621*10^{-3}$
-8.85979	$-11.4648*10^{-3}$	-13.24966	$-17.97804*10^{-3}$
-12.30743	$-16.50438*10^{-3}$	-15.94829	$-22.44795*10^{-3}$
-15.85014	$-22.44795*10^{-3}$	-18.5198	$-26.95995*10^{-3}$
-19.45757	$-28.46877*10^{-3}$	-20.01841	$-31.49001*10^{-3}$
-23.09775	0	-23.09775	0

Momento-3 ^a iteração	curvaturas	Momento-4 ^a iteração	curvaturas
23.09775	0	23.09775	0
21.84671	$33.00153*10^{-3}$	21.69687	$33.00153*10^{-3}$
20.33565	$30.73440*10^{-3}$	20.0418	$29.97897*10^{-3}$
18.58206	$26.95995*10^{-3}$	18.15001	$26.20620*10^{-3}$
16.6092	$23.19786*10^{-3}$	16.05057	$22.44795*10^{-3}$
14.44028	$19.46115*10^{-3}$	13.77245	$18.71856*10^{-3}$
12.10424	$15.77184*10^{-3}$	11.34444	$15.04266*10^{-3}$
9.62403	$12.16929*10^{-3}$	8.79495	$11.46480*10^{-3}$
7.02795	$8.75001*10^{-3}$	6.15173	$7.70001*10^{-3}$
4.34357	$5.25000*10^{-3}$	3.44112	$4.20000*10^{-3}$
1.59988	$2.10000*10^{-3}$	0.69007	$1.05000*10^{-3}$
-1.17886	$-1.40001*10^{-3}$	-2.07716	$-2.45001*10^{-3}$
-3.96568	$-4.89999*10^{-3}$	-4.8336	$-5.94999*10^{-3}$
-6.73363	$-8.4*10^{-3}$	-7.5523	$-9.45*10^{-3}$
-9.45575	$-12.16929*10^{-3}$	-10.2063	$-12.87999*10^{-3}$
-12.10509	$-15.77184*10^{-3}$	-12.76657	$-17.23989*10^{-3}$
-14.64971	$-20.20557*10^{-3}$	-15.20537	$-20.95164*10^{-3}$
-17.05585	$-23.94876*10^{-3}$	-17.48853	$-24.7005*10^{-3}$
-19.2891	$-28.46877*10^{-3}$	-19.58724	$-28.46877*10^{-3}$
-21.3147	$-32.24574*10^{-3}$	-21.46668	$-32.24574*10^{-3}$
-23.09775	0	-23.09775	0

Momento-5 ^a iteração	curvaturas
23.09775	0
21.64079	$32.24574*10^{-3}$
19.92965	$29.22372*10^{-3}$
17.9876	$26.20620*10^{-3}$
15.84371	$22.44795*10^{-3}$
13.52691	$17.97804*10^{-3}$
11.06595	$14.31729*10^{-3}$
8.48912	$10.76739*10^{-3}$
5.82398	$6.99999*10^{-3}$
3.09954	$3.84999*10^{-3}$
0.34275	$0.69999*10^{-3}$
-2.42212	$-3.15*10^{-3}$
-5.16813	$-6.3*10^{-3}$
-7.86831	$-9.80001*10^{-3}$
-10.4957	$-13.59621*10^{-3}$
-13.02389	$-17.23989*10^{-3}$
-15.41929	$-21.69915*10^{-3}$
-17.65332	$-25.45302*10^{-3}$
-19.6971	$-29.22372*10^{-3}$
-21.52161	$-32.24574*10^{-3}$
-23.09775	0

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

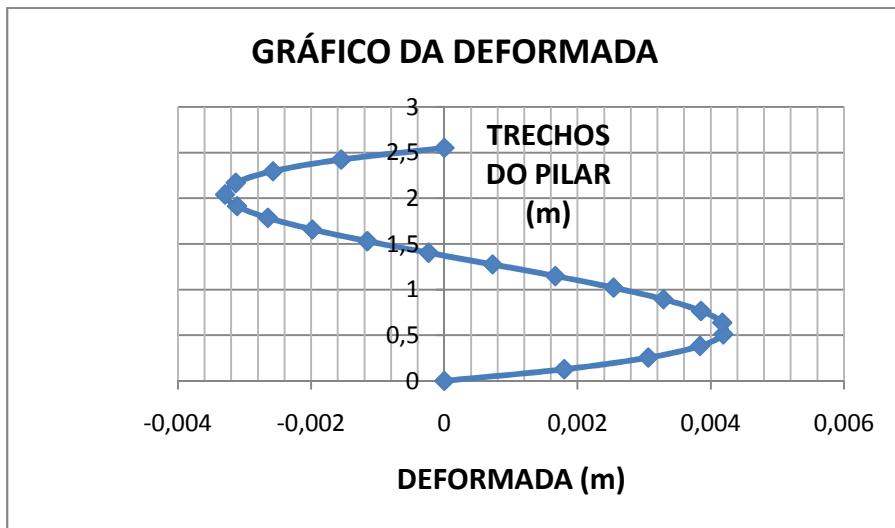


Figura 25- Gráfico da deformada para o exemplo4-cálculo com fluênci

9. Cálculo do 5º exemplo de pilar a partir do método exato .

Será realizado o mesmo procedimento utilizado no Exemplo 4, mas agora para os dados do pilar do Exemplo 2. No MK-UFRJ foram considerados os dados de entrada e de saída apresentados para o Exemplo 2.

$$\lambda = \frac{le}{h} \times \sqrt{12} \quad \therefore \lambda = \frac{3,60}{0,18} \times \sqrt{12} = 69,28$$

Verificação do efeito de 2º ordem

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times e_l / h}{\alpha_b};$$

$$e_l = 0,015 + 0,03h = 0,015 + 0,03 \times 0,18 = 0,0204$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times 0,0204 / 0,18}{0,4} = 66,04$$

logo devemos considerar o efeito de 2^a ordem

9.1. Cálculo exato desconsiderando o efeito da fluência.

Com a saída do programa MK-UFRJ obtemos o diagrama momento vs. curvatura cujos valores serão utilizados no programa Mathcad, para a realização das iterações.

Como visto no cálculo pela curvatura aproximada, temos o seguinte resultado para a curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{473,8}{0,18 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,589$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,18 \times (0,589 + 0,5)} = 0,0255 \leq \frac{0,005}{0,18} = 0,027 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0255$$

A seguir serão calculados $y_{máx}$ e $y(x)$ em cada ponto do pilar

$$y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx} = \frac{3,6^2}{10} \times 0,0255 = 0,03305m$$

$$y_{(x)} = y_{máx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L_e} \right)$$

Utilizando o resultado do Mathcad, obtivemos os seguintes deslocamentos para a primeira iteração.

Y(X)
0
5.17E-03
0.01021
0.015
0.01942
0.02336
0.02673
0.02944
0.03142
0.03263
0.03304
0.03263
0.03142
0.02944
0.02673
0.02336
0.01942
0.015
0.01021
5.17E-03
0

Estes valores serão utilizados na multiplicação pela força normal, para obtermos a matriz apresentada a seguir, que é uma matriz cujos valores estão em função dos deslocamentos:

M=Nd x Y(X)
0
2.44881
4.83733
7.10674
9.20115
11.069
12.6643
13.94775
14.88777
15.4612
15.65393
15.4612
14.88777
13.94775
12.6643
11.069
9.20115
7.10674
4.83733
2.44881
0

Determinação da Matriz M_i

$$M_i = M_{i-1} - \Delta M :$$

$$\Delta M = \frac{M_A - (-M_A)}{\Delta X} = \frac{\frac{9,66552}{0,4} - \left(\frac{-9,66552}{0,4}\right)}{20} = \frac{24,1638 + 24,1638}{20} = 2,41638 \text{ kNm}$$

Com isso, se subtraímos o valor de 2,41638 do valor de 24,1638, obtemos o momento de 21,74742kNm e assim sucessivamente até chegarmos a todos os elementos da matriz M_i , apresentada abaixo:

Matriz Mi
24.1638
21.74742
19.33104
16.91466
14.49828
12.0819
9.66665
7.24914
4.83276
2.41638
0
-2.41638
-4.83276
-7.24914
-9.66665
-12.0819
-14.49828
-16.91466
-19.33104
-21.74742
-24.1638

Assim o momento total em cada ponto do pilar é obtido por:

$$M_{di} = M_i + N_d \times y(x),$$

Somando estas duas matrizes, obtemos os momentos totais da primeira iteração:

Momento-1 ^a iteração
24.1638
24.19623
24.16837
24.0214
23.69943
23.1509
22.32982
21.19689
19.72053
17.87758
15.65393
13.04482
10.05501
6.69861
2.99878
-1.0129
-5.29713
-9.80792
-14.49371
-19.29861
-24.1638

A seguir serão mostradas tabelas com os momentos e curvaturas de todas as iterações.

Momento-1 ^a iteração	curvaturas	Momento-2 ^a iteração	curvaturas
24.1638	0	24.1638	0
24.19623	11.01475*10^-3	22.87336	10.16124*10^-3
24.16837	11.01475*10^-3	21.41383	9.10423*10^-3
24.0214	11.01475*10^-3	19.78521	8.26951*10^-3
23.69943	10.80085*10^-3	17.9875	7.04267*10^-3
23.1509	10.37406*10^-3	16.02399	6.05138*10^-3
22.32982	9.73690*10^-3	13.90122	5.28497*10^-3
21.19689	9.10423*10^-3	11.62899	4.18056*10^-3
19.72053	8.06272*10^-3	9.21699	3.20833*10^-3
17.87758	7.04267*10^-3	6.68122	2.23611*10^-3
15.65393	5.85732*10^-3	4.03733	1.36111*10^-3
13.04482	4.91244*10^-3	1.30354	0.48611*10^-3
10.05501	3.59722*10^-3	-1.50568	-0.48611*10^-3
6.69861	2.23611*10^-3	-4.37011	-1.45833*10^-3
2.99878	0.97222*10^-3	-7.26887	-2.52778*10^-3
-1.0129	-0.388889*10^-3	-10.18255	-3.98611*10^-3
-5.29713	-1.75*10^-3	-13.09026	-4.91244*10^-3
-9.80792	-3.5*10^-3	-15.97111	-6.05138*10^-3
-14.49371	-5.47404*10^-3	-18.79823	-7.65175*10^-3
-19.29861	-7.85678*10^-3	-21.54132	-9.31456*10^-3
-241638	0	-24.1638	0

Momento-3 ^a iteração	curvaturas	Momento-4 ^a iteração	curvaturas
24.1638	0	24.1638	0
22.36053	9.73690*10^-3	22.23185	9.73690*10^-3
20.40127	8.47711*10^-3	20.15043	8.47711*10^-3
18.30225	7.24463*10^-3	17.93887	7.04267*10^-3
16.07628	6.24693*10^-3	15.6161	6.05138*10^-3
13.7422	5.09775*10^-3	13.19743	4.91244*10^-3
11.31523	4.08333*10^-3	10.70051	3.79167*10^-3
8.80713	3.11111*10^-3	8.1409	2.81944*10^-3
6.23485	2.13889*10^-3	5.53354	1.84722*10^-3
3.61331	1.16667*10^-3	2.89334	0.97222*10^-3
0.95746	0.38889*10^-3	0.23523	0.09722*10^-3
-1.7193	0.58333*10^-3	-2.42885	-0.77778*10^-3
-4.40351	-1.45833*10^-3	-5.08398	-1.75*10^-3
-7.08027	-2.43056*10^-3	-7.71671	-2.625*10^-3
-9.73463	-3.40278*10^-3	-10.31214	-3.69444*10^-3
-12.35019	-4.56994*10^-3	-12.85533	-4.76389*10^-3
-14.90456	-5.66485*10^-3	-15.32836	-5.85732*10^-3
-17.38352	-6.84185*10^-3	-17.71444	-7.04267*10^-3
-19.76959	-8.06272*10^-3	-19.99548	-8.26951*10^-3
-22.03819	-9.52546*10^-3	-22.15275	-9.7369*10^-3
-24.1638	0	-24.1638	0

Momento-5 ^a iteração	curvaturas
24.1638	0
22.20407	9.73690×10^{-3}
20.09526	8.26951×10^{-3}
17.85613	7.04267×10^{-3}
15.50888	5.85732×10^{-3}
13.06873	4.91244×10^{-3}
10.55317	3.79167×10^{-3}
7.97941	2.72222×10^{-3}
5.36236	1.84722×10^{-3}
2.71696	0.87500×10^{-3}
0.05663	0.09722×10^{-3}
-2.60518	-0.875×10^{-3}
-5.25506	-1.75×10^{-3}
-7.87808	-2.72222×10^{-3}
-10.4608	-3.69444×10^{-3}
-12.9868	-4.76389×10^{-3}
-15.43968	-5.85732×10^{-3}
-17.80263	-7.04267×10^{-3}
-20.05748	-8.26951×10^{-3}
-22.18537	-9.7369×10^{-3}
-24.1638	0

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

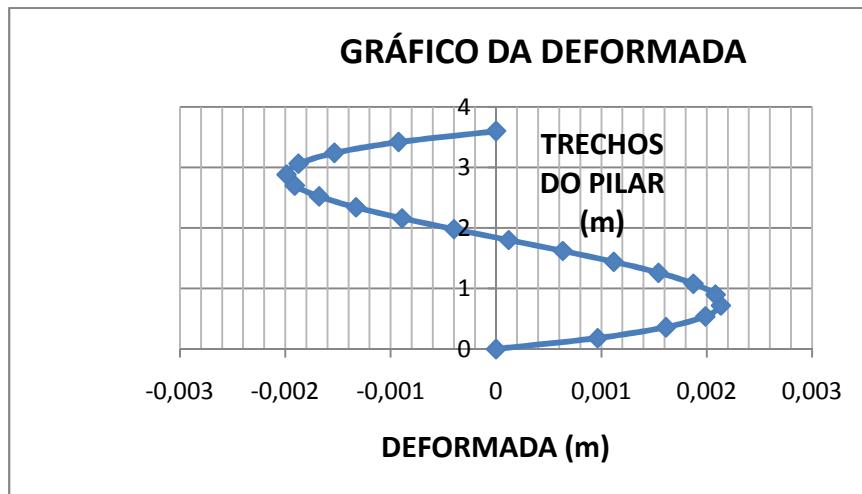


Figura 26- Gráfico da deformada para o exemplo5-cálculo sem fluência

9.2. Cálculo exato considerando o efeito da fluênciá.

Para o cálculo exato com fluênciá, o processo é idêntico ao apresentado para o cálculo sem fluênciá. Novamente o único parâmetro que muda são as curvaturas que são multiplicadas por três, aumentando assim o valor dos deslocamentos e consequentemente também o valor dos momentos

A seguir serão mostradas as tabelas com os valores dos momentos totais e as curvaturas em cada iteração.

Momento-1ª iteração	curvaturas	Momento-2ª iteração	curvaturas
24.1638	0	24.1638	0
24.19623	$17.69061*10^{-3}$	23.6115	$17.05752*10^{-3}$
24.16837	$17.69061*10^{-3}$	22.78762	$16.42581*10^{-3}$
24.0214	$17.69061*10^{-3}$	21.69217	$15.79566*10^{-3}$
23.69943	$17.05752*10^{-3}$	20.32516	$14.54085*10^{-3}$
23.1509	$17.05752*10^{-3}$	18.69629	$13.29507*10^{-3}$
22.32982	$16.42581*10^{-3}$	16.80557	$11.44902*10^{-3}$
21.19689	$15.16725*10^{-3}$	14.66269	$9.64077*10^{-3}$
19.72053	$13.91670*10^{-3}$	12.28698	$8.46453*10^{-3}$
17.87758	$12.67632*10^{-3}$	9.69764	$6.41667*10^{-3}$
15.65393	$10.84134*10^{-3}$	6.9137	$4.37499*10^{-3}$
13.04482	$8.46453*10^{-3}$	3.96333	$2.62500*10^{-3}$
10.05501	$6.70833*10^{-3}$	0.88302	$0.58332*10^{-3}$
6.69861	$4.37499*10^{-3}$	-2.30027	$-1.45833*10^{-3}$
2.99878	$2.04168*10^{-3}$	-5.55072	$-3.50001*10^{-3}$
-1.0129	$-0.87501*10^{-3}$	-8.83251	$-5.54166*10^{-3}$
-5.29713	$-3.5*10^{-3}$	-12.10087	$-7.88769*10^{-3}$
-9.80792	$-6.41667*10^{-3}$	-15.3155	$-10.23837*10^{-3}$
-14.49371	$-9.64077*10^{-3}$	-18.43163	$-12.67632*10^{-3}$
-19.29861	$-13.29507*10^{-3}$	-21.39976	$-15.16725*10^{-3}$
-241638	0	-24.1638	0

Momento-3 ^a iteração	curvaturas	Momento-4 ^a iteração	curvaturas
24.1638	0	24.1638	0
23.04342	$17.05752*10^{-3}$	22.76751	$16.42581*10^{-3}$
21.66119	$15.79566*10^{-3}$	21.10936	$15.16725*10^{-3}$
20.0268	$13.91670*10^{-3}$	19.20873	$13.29507*10^{-3}$
18.14993	$12.67632*10^{-3}$	17.09447	$12.06084*10^{-3}$
16.04985	$10.84134*10^{-3}$	14.7856	$10.23837*10^{-3}$
13.74567	$9.04920*10^{-3}$	12.31032	$8.46453*10^{-3}$
11.26573	$7.29168*10^{-3}$	9.69611	$6.41667*10^{-3}$
8.6378	$5.54166*10^{-3}$	6.96998	$4.66668*10^{-3}$
5.87993	$3.79167*10^{-3}$	4.15877	$2.62500*10^{-3}$
3.02355	$2.04168*10^{-3}$	1.28935	$0.87501*10^{-3}$
0.10002	$0.29166*10^{-3}$	-1.61141	$1.16667*10^{-3}$
-2.86381	$-2.04168*10^{-3}$	-4.51664	$-2.91666*10^{-3}$
-5.8366	$-3.79167*10^{-3}$	-7.39053	$-4.66668*10^{-3}$
-8.787	$-5.83332*10^{-3}$	-10.20622	$-6.70833*10^{-3}$
-11.68367	$-7.58334*10^{-3}$	-12.93236	$-8.46453*10^{-3}$
-14.49527	$-9.64077*10^{-3}$	-15.54208	$-10.84134*10^{-3}$
-17.18579	$-12.06084*10^{-3}$	-18.00381	$-12.67632*10^{-3}$
-19.71914	$-13.9167*10^{-3}$	-20.28039	$-14.54085*10^{-3}$
-22.05788	$-15.79566*10^{-3}$	-22.34334	$-16.42581*10^{-3}$
-24.1638	0	-24.1638	0

Momento-5 ^a iteração	curvaturas	Momento-6 ^a iteração	curvaturas
24.1638	0	24.1638	0
22.66713	$16.42581*10^{-3}$	22.60691	$16.42581*10^{-3}$
20.91831	$15.16725*10^{-3}$	20.79787	$15.16725*10^{-3}$
18.93666	$13.29507*10^{-3}$	18.75599	$13.29507*10^{-3}$
16.75091	$11.44902*10^{-3}$	16.51002	$11.44902*10^{-3}$
14.38001	$9.64077*10^{-3}$	14.08829	$9.64077*10^{-3}$
11.85195	$7.88769*10^{-3}$	11.51857	$7.58334*10^{-3}$
9.19394	$6.12501*10^{-3}$	8.82776	$5.83332*10^{-3}$
6.43743	$4.08333*10^{-3}$	6.04292	$3.79167*10^{-3}$
3.60928	$2.33334*10^{-3}$	3.1954	$2.04168*10^{-3}$
0.74083	$0.58332*10^{-3}$	0.31207	$0.29166*10^{-3}$
-2.14104	$-1.45833*10^{-3}$	-2.58023	$-1.74999*10^{-3}$
-5.04083	$-3.20832*10^{-3}$	-5.45013	$-3.50001*10^{-3}$
-7.89584	$-5.25*10^{-3}$	-8.27078	$-5.25*10^{-3}$
-10.67922	$-6.9999*10^{-3}$	-11.01084	$-7.29168*10^{-3}$
-13.35961	$-9.0492*10^{-3}$	-13.64345	$-9.0492*10^{-3}$
-15.91007	$-10.84134*10^{-3}$	-16.13714	$-10.84134*10^{-3}$
-18.2941	$-12.67632*10^{-3}$	-18.4644	$-12.67632*10^{-3}$
-20.48353	$-14.54085*10^{-3}$	-20.59706	$-14.54085*10^{-3}$
-22.44974	$-16.42581*10^{-3}$	-22.50651	$-16.42581*10^{-3}$
-24.1638	0	-24.1638	0

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

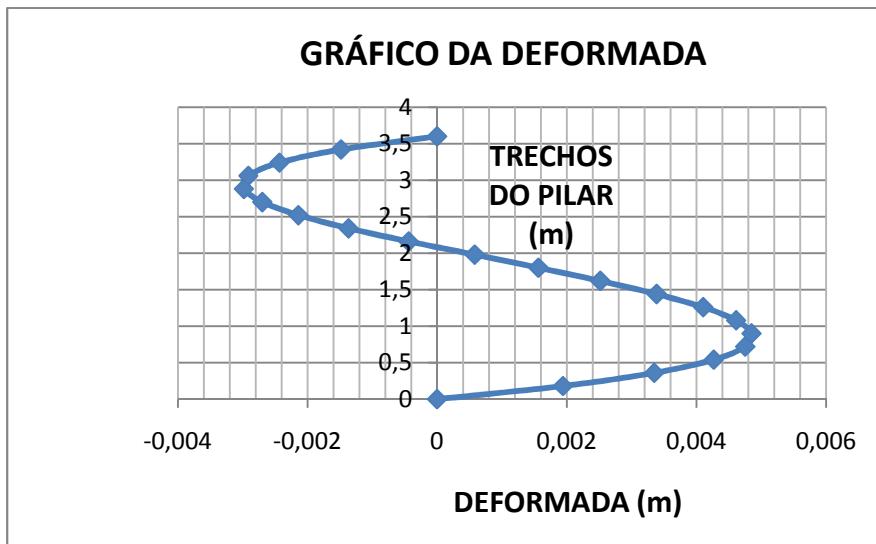


Figura 27- Gráfico da deformada para o exemplo5-cálculo com fluência

10. Cálculo do 6º exemplo de pilar a partir do método exato .

Será realizado o mesmo procedimento utilizado no exemplo 4, mas só que agora para os dados do pilar da Exemplo 3. No MK-UFRJ foram considerados os dados de entrada e de saída apresentados para o Exemplo 3.

No MK-UFRJ foram considerados os dados de entrada apresentados para o Exemplo 3. Os dados de saída também são os mesmos.

$$\lambda = \frac{le}{h} \times \sqrt{12} \quad \therefore \lambda = \frac{4,70}{0,18} \times \sqrt{12} = 90,45$$

Verificação do efeito de 2º ordem

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times e_1 / h}{\alpha_b};$$

$$e_1 = 0,015 + 0,03h = 0,015 + 0,03 \times 0,15 = 0,0204$$

$$\lambda_l = \frac{25 + 12,5 \times 0,0204 / 0,18}{0,4} = 66,04$$

logo devemos considerar o efeito de 2ª ordem

10.1. Cálculo exato desconsiderando o efeito da fluência.

Com a saída do programa MK-UFRJ obtemos o diagrama momento vs. curvatura cujos valores serão utilizados no programa Mathcad, para a realização das iterações.

Como visto no cálculo pela curvatura aproximada, temos o seguinte resultado para a curvatura:

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h(v + 0,5)} \leq \frac{0,005}{h}$$

$$v = \frac{N_{sd}}{A_c f_{cd}} = \frac{236,9}{0,18 \times 0,25 \times \frac{25000}{1,4}} \quad \therefore \quad v = 0,2948$$

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{0,18 \times (0,2948 + 0,5)} = 0,03495 \leq \frac{0,005}{0,18} = 0,0278 \quad \therefore \quad \frac{1}{r} = 0,0278$$

A seguir serão calculados $y_{máx}$ e $y(x)$ em cada ponto do pilar

$$y_{máx} = \frac{l_e^2}{10} \times \left| \frac{1}{r} \right|_{máx} = \frac{4,7^2}{10} \times 0,0278 = 0,0614m$$

$$y_{(x)} = y_{máx} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{L_e} \right)$$

Utilizando os resultados do Mathcad, obtivemos os seguintes deslocamentos para a primeira iteração.

Y(X)
0
9.59E-03
0.01896
0.02786
0.03607
0.04339
0.04964
0.05467
0.05836
0.06061
0.06136
0.06061
0.05836
0.05467
0.04964
0.04339
0.03607
0.02786
0.01896
9.59E-03
0

Estes valores serão utilizados na multiplicação pela força normal, para obtermos a matriz apresentada a seguir, que é uma matriz cujos valores estão em função dos deslocamentos:

M=Nd x Y(X)
0
2.274
4.49201
6.59941
8.54431
10.27882
11.76023
12.95207
13.82498
14.35748
14.53645
14.35748
13.82498
12.95207
11.76023
10.27882
8.54431
6.59941
4.49201
2.274
0

Determinação da Matriz M_i

$$M_i = M_{i-1} - \Delta M :$$

$$\Delta M = \frac{M_A - (-M_A)}{\Delta X} = \frac{\frac{4,83276}{0,4} - \frac{-4,83276}{0,4}}{20} = \frac{12,0819 + 12,0819}{20} = 1,20819 \text{ kNm}$$

Com isso, se subtraímos o valor de 1,20819 do valor de 12,0819, obtemos o momento de 10,873712kNm e assim sucessivamente até chegarmos a todos os elementos da matriz M_i , apresentada abaixo:

Matriz Mi
12.0819
10.87371
9.66552
8.45733
7.24914
6.04095
4.83276
3.62457
2.41638
1.20819
0
-1.20819
-2.41638
-3.62457
-4.83276
-6.04095
-7.24914
-8.45733
-9.66552
-10.87371
-12.0819

Assim o momento total em cada ponto do pilar é obtido por:

$$M_{di} = M_i + N_d \times y(x),$$

Somando estas duas matrizes, obtemos os momentos totais da primeira iteração:

Momento-1 ^a iteração
12.0819
13.14771
14.15753
15.05674
15.79345
16.31977
16.59299
16.57664
16.24136
15.56567
14.53645
13.14929
11.4086
9.3275
6.92747
4.23787
1.29517
-1.85792
-5.17351
-8.59971
--12.0819

A seguir serão mostradas tabelas com os momentos e curvaturas de todas as iterações.

Momento-1 ^a iteração	curvaturas	Momento-2 ^a iteração	curvaturas
12.0819	0	12.0819	0
13.14771	7.15469*10^-3	11.84524	5.90950*10^-3
14.15753	7.91676*10^-3	11.51498	5.66529*10^-3
15.05674	8.94488*10^-3	11.08115	5.42302*10^-3
15.79345	9.72234*10^-3	10.53029	4.94498*10^-3
16.31977	10.24275*10^-3	9.85223	4.47680*10^-3
16.59299	10.50343*10^-3	9.04018	3.79668*10^-3
16.57664	10.50343*10^-3	8.0907	3.36079*10^-3
16.24136	10.24275*10^-3	7.00382	2.73866*10^-3
15.56567	9.46271*10^-3	5.78293	2.23611*10^-3
14.53645	8.42937*10^-3	4.43824	1.65278*10^-3
13.14929	7.15469*10^-3	2.98327	1.06944*10^-3
11.4086	5.66529*10^-3	1.43469	0.58333*10^-3
9.3275	4.02013*10^-3	-0.188	-0.09722*10^-3
6.92747	2.73866*10^-3	-1.86328	-0.68056*10^-3
4.23787	1.55556*10^-3	-3.57439	-1.36111*10^-3
1.29517	-0.48611*10^-3	-5.30586	-2.04167*10^-3
-1.85792	-0.68056*10^-3	-7.03097	-2.73866*10^-3
-5.17351	-1.94444*10^-3	-8.74717	-3.57681*10^-3
-8.59971	-3.57681*10^-3	-10.43793	-4.70956*10^-3
-12.0819	0	-12.0819	0

Momento-3 ^a iteração	curvaturas	Momento-4 ^a iteração	curvaturas
12.0819	0	12.0819	0
11.2649	5.42302*10^-3	11.11507	5.42302*10^-3
10.3706	4.70956*10^-3	10.07728	4.47680*10^-3
9.40217	4.02013*10^-3	8.97789	3.79668*10^-3
8.36279	3.36079*10^-3	7.8259	3.14890*10^-3
7.25872	2.94142*10^-3	6.62994	2.54094*10^-3
6.09609	2.34857*10^-3	5.39549	2.04167*10^-3
4.88378	1.84722*10^-3	4.13033	1.55556*10^-3
3.6275	1.36111*10^-3	2.84099	1.06944*10^-3
2.33539	0.87500*10^-3	1.53385	0.58333*10^-3
1.01403	0.38889*10^-3	0.21526	0.09722*10^-3
-0.32896	-0.19444*10^-3	-1.10842	-0.38889*10^-3
-1.68593	-0.68056*10^-3	-2.42955	-0.875*10^-3
-3.05054	-1.16667*10^-3	-3.74178	-1.36111*10^-3
-4.41388	-1.65278*10^-3	-5.03875	-1.94444*10^-3
-5.76831	-2.23611*10^-3	-6.31409	-2.54094*10^-3
-7.10493	-2.73866*10^-3	7.56018	-2.94142*10^-3
-8.41485	-3.57681*10^-3	-8.77044	-3.57681*10^-3
-9.68893	-4.24692*10^-3	-9.9339	-4.4768*10^-3
-10.91622	-5.18286*10^-3	-11.418	-5.18286*10^-3
-12.0819	0	-12.0819	0

Momento-5 ^a iteração	curvaturas
12.0819	0
11.08608	$5.42302*10^{-3}$
10.01931	$4.47680*10^{-3}$
8.89398	$3.79668*10^{-3}$
7.71897	$3.14890*10^{-3}$
6.50276	$2.54094*10^{-3}$
5.25332	$2.04167*10^{-3}$
3.97716	$1.94444*10^{-3}$
2.68065	$1.45833*10^{-3}$
1.37015	$0.97222*10^{-3}$
0.05202	$0.09722*10^{-3}$
-1.26739	$-0.48611*10^{-3}$
-2.5817	$-0.97222*10^{-3}$
-3.88457	$-1.45833*10^{-3}$
-5.16963	$-1.94444*10^{-3}$
-6.42926	$-2.54094*10^{-3}$
-7.65564	$-3.1489*10^{-3}$
-8.84353	$-3.79668*10^{-3}$
-9.98464	$-4.4768*10^{-3}$
-11.06717	$-5.18286*10^{-3}$
-12.0819	0

O gráfico com a deformada do pilar é apresentado a seguir.

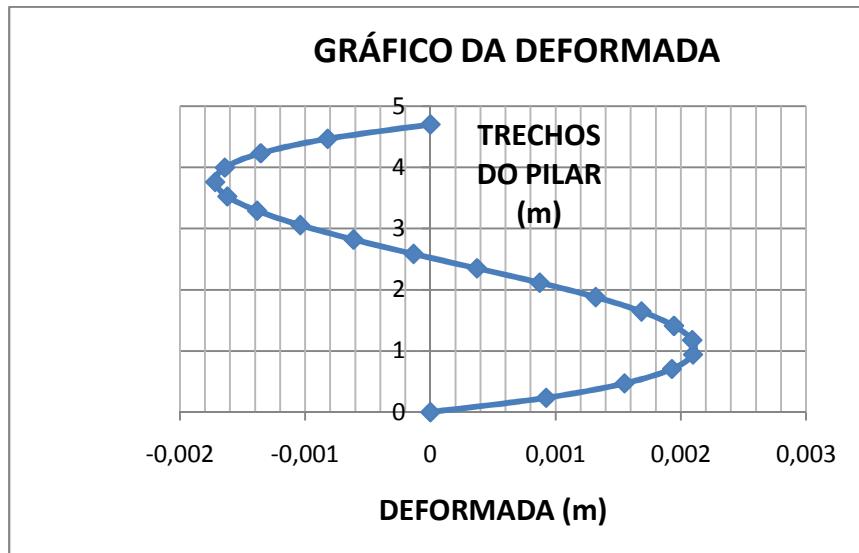


Figura 28- Gráfico da deformada para o exemplo 6-cálculo sem fluência

10.2. Cálculo exato considerando o efeito da fluênciá.

Para o cálculo exato com fluênciá, o processo é idêntico ao apresentado para o cálculo sem fluênciá. Novamente o único parâmetro que muda são as curvaturas que são multiplicadas por três, aumentando assim o valor dos deslocamentos e consequentemente também o valor dos momentos

A seguir serão mostradas as tabelas com os valores dos momentos totais e as curvaturas em cada iteração.

Momento-1ª iteração	curvaturas	Momento-2ª iteração	curvaturas
12.0819	0	12.0819	0
13.14771	$12.71322*10^{-3}$	12.57011	$12.03846*10^{-3}$
14.15753	$14.07072*10^{-3}$	12.892	$12.71322*10^{-3}$
15.05674	$15.43653*10^{-3}$	13.0298	$12.71322*10^{-3}$
15.79345	$18.87372*10^{-3}$	12.96565	$12.71322*10^{-3}$
16.31977	$16.80834*10^{-3}$	12.65457	$12.03846*10^{-3}$
16.59299	$17.49597*10^{-3}$	12.1236	$11.36697*10^{-3}$
16.57664	$17.49597*10^{-3}$	11.36373	$10.69929*10^{-3}$
16.24136	$16.80834*10^{-3}$	10.37497	$9.37797*10^{-3}$
15.56567	$16.12179*10^{-3}$	9.1663	$8.08092*10^{-3}$
14.53645	$14.75274*10^{-3}$	7.74672	$6.81708*10^{-3}$
13.14929	$12.71322*10^{-3}$	6.13413	$5.01204*10^{-3}$
11.4086	$10.69929*10^{-3}$	4.35521	$3.50001*10^{-3}$
9.3275	$8.08092*10^{-3}$	2.43632	$-0.204168*10^{-3}$
6.92747	$5.59887*10^{-3}$	0.41171	$-0.58332*10^{-3}$
4.23787	$3.5001*10^{-3}$	-1.68616	$-1.45833*10^{-3}$
1.29517	$-1.16667*10^{-3}$	-3.82981	$-3.20832*10^{-3}$
-1.85792	$-1.45833*10^{-3}$	-5.9582	$-5.01204*10^{-3}$
-5.17351	$-4.08333*10^{-3}$	-8.06751	$-6.81708*10^{-3}$
-8.59971	$-7.44417*10^{-3}$	-10.1234	$-9.37797*10^{-3}$
-12.0819	0	-12.0819	0

Momento-3 ^a iteração	curvaturas	Momento-4 ^a iteração	curvaturas
12.0819	0	12.0819	0
11.93515	$11.36697*10^{-3}$	11.59833	$10.69929*10^{-3}$
11.6309	$10.69929*10^{-3}$	10.96606	$10.03605*10^{-3}$
11.16033	$10.69929*10^{-3}$	10.1938	$9.37797*10^{-3}$
10.52344	$9.37797*10^{-3}$	9.28157	$8.08092*10^{-3}$
9.72022	$8.72592*10^{-3}$	8.24665	$6.81708*10^{-3}$
8.7595	$7.44417*10^{-3}$	7.09757	$6.20133*10^{-3}$
7.65007	$6.20133*10^{-3}$	5.8511	$4.66667*10^{-3}$
6.40067	$5.59887*10^{-3}$	4.52349	$3.79167*10^{-3}$
5.02857	$4.08333*10^{-3}$	3.12264	$2.62500*10^{-3}$
3.55076	$2.91666*10^{-3}$	1.66837	$1.45833*10^{-3}$
1.98375	$1.74999*10^{-3}$	0.17594	$0.29166*10^{-3}$
0.35118	$0.29166*10^{-3}$	-1.33939	$1.16667*10^{-3}$
-1.32718	$-1.16667*10^{-3}$	-2.85853	$-2.3333*10^{-3}$
-2.97884	$-2.33334*10^{-3}$	-4.36241	$-3.50001*10^{-3}$
-4.62286	$-3.79167*10^{-3}$	-5.83576	$-4.66668*10^{-3}$
-6.2478	$-5.01204*10^{-3}$	-7.2595	$-6.20133*10^{-3}$
-7.83077	$-6.81708*10^{-3}$	-8.61768	$-7.44417*10^{-3}$
-9.34817	$-8.08092*10^{-3}$	-9.88667	$-8.72592*10^{-3}$
-10.77638	$-10.03605*10^{-3}$	-11.04993	$-10.03605*10^{-3}$
-12.0819	0	-12.0819	0

Momento-5 ^a iteração	curvaturas	Momento-6 ^a iteração	curvaturas
12.0819	0	12.0819	0
11.4546	$10.69929*10^{-3}$	11.379	$10.69929*10^{-3}$
10.68732	$10.03605*10^{-3}$	10.53613	$9.37797*10^{-3}$
9.78875	$8.72592*10^{-3}$	9.56195	$8.72592*10^{-3}$
8.76748	$7.44417*10^{-3}$	8.47362	$7.44417*10^{-3}$
7.64049	$6.20133*10^{-3}$	7.28789	$6.20133*10^{-3}$
6.42432	$5.59887*10^{-3}$	6.02104	$5.01204*10^{-3}$
5.12702	$4.08333*10^{-3}$	4.68093	$3.79167*10^{-3}$
3.76866	$3.20832*10^{-3}$	3.28741	$2.62500*10^{-3}$
2.3607	$2.04168*10^{-3}$	1.85191	$1.45833*10^{-3}$
0.91839	$0.87501*10^{-3}$	0.3897	$0.29166*10^{-3}$
-0.543	$-0.58332*10^{-3}$	-1.08396	$-0.87501*10^{-3}$
-2.0082	$-1.74999*10^{-3}$	-2.54999	$-2.04168*10^{-3}$
-3.48866	$-2.91666*10^{-3}$	-3.99312	$-3.20832*10^{-3}$
-4.9386	$-4.08333*10^{-3}$	-5.3981	$-4.37499*10^{-3}$
-6.34274	$-5.59887*10^{-3}$	-6.74965	$-5.59887*10^{-3}$
-7.68584	$-6.81708*10^{-3}$	-8.02795	$-6.81708*10^{-3}$
-8.9478	$-8.08092*10^{-3}$	-9.21707	$-8.08092*10^{-3}$
-10.11237	$-9.37797*10^{-3}$	-10.30046	$-9.37797*10^{-3}$
-11.16279	$-10.69929*10^{-3}$	-11.26117	$-10.69929*10^{-3}$
-12.0819	0	-12.0819	0

O gráfico com a deformada final do pilar é apresentado a seguir.

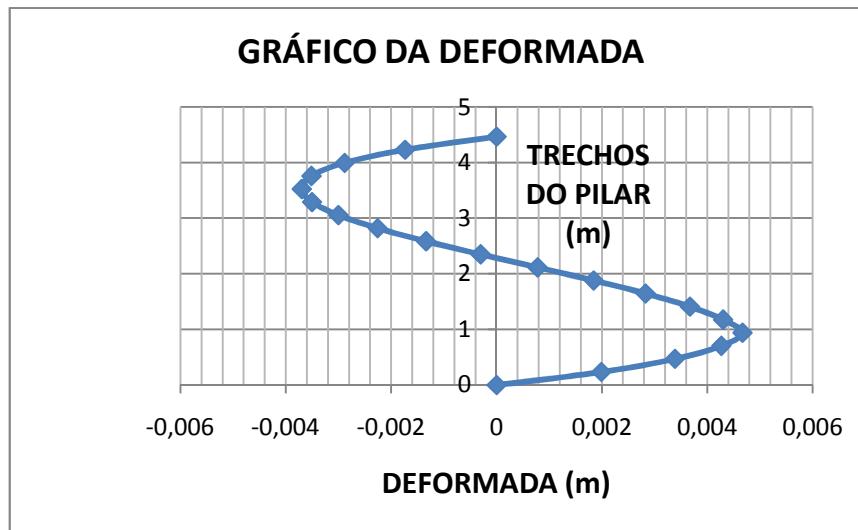


Figura 29- Gráfico da deformada para o exemplo 6-cálculo com fluência

11. Conclusão.

Inicialmente será apresentada uma tabela com todos os resultados obtidos neste trabalho para podermos comentá-los na conclusão.

Em todos os casos o $f_{ck}=25\text{MPa}$.

$$N_d = 473,8 \text{ kN}$$

$$l_e = 2,55\text{m}$$

$$M_{1,d} = 9,24 \text{ kNm}$$

Exemplo	Método	Momento(kNm)
Exemplo1	<i>Método do pilar padrão com curvatura aproximada</i>	17,74
	<i>Método do pilar padrão com rigidez aproximada</i>	16,04
seção 15x25 - 2x4Φ16	<i>Método do pilar padrão com diagrama M vs K acoplado</i>	14,29
$\lambda=58,89$	<i>Método exato sem fluência As = 2x4Φ16</i>	12,68
Cálculo com fluência	<i>Seção 15x25 - 2x4Φ16 - 1º método exato</i>	18,51
	<i>Seção 15x25 - 2x4Φ16 - 2º método empírico</i>	19,98

$$N_d = 473,8 \text{ kN}$$

$$l_e = 3,60\text{m}$$

$$M_{1,d} = 9,67 \text{ kNm}$$

Exemplo	Método	Momento(kNm)
Exemplo2	<i>Método do pilar padrão com curvatura aproximada</i>	25,33
	<i>Método do pilar padrão com rigidez aproximada</i>	21,60
seção 18x25 - 2x4Φ16	<i>Método do pilar padrão com diagrama M vs K acoplado</i>	15,63
$\lambda=69,30$	<i>Método exato sem fluência As = 2x4Φ16</i>	13,28
Cálculo com fluência	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ16 - 1º método exato</i>	19,17
	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ16 - 2º método empírico</i>	23,24

$$N_d = 236,9 \text{ kN}$$

$$l_e = 4,70\text{m}$$

$$M_{1,d} = 4,83\text{kNm}$$

Exemplo	Método	Momento(kNm)
Exemplo3	<i>Método do pilar padrão com curvatura aproximada</i>	19,37
	<i>Método do pilar padrão com rigidez aproximada</i>	16,90
seção 18x25 - 2x4Φ12,5	<i>Método do pilar padrão com diagrama M vs K acoplado</i>	9,23
$\lambda=90,45$	<i>Método exato sem fluência As = 2x4Φ12,5</i>	6,43
Cálculo com fluência	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ12,5 - 1º método exato</i>	10,41
	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ12,5 - 2º método empírico</i>	13,05

$$N_d = 473,8 \text{ kN}$$

$$le = 2,55\text{m}$$

$$M_{\text{aplicado}} = 23,09\text{kNm}$$

Exemplo	Método	Momento(kNm)
Exemplo4	<i>Método do pilar padrão com curvatura aproximada</i>	17,74
	<i>Método do pilar padrão com rigidez aproximada</i>	16,04
seção 15x25 - 2x4Φ16	<i>Método do pilar padrão com diagrama M VS K acoplado</i>	14,29
$\lambda=58,89$	<i>Método exato sem fluência As = 2x4Φ16</i>	23,09
Cálculo com fluência	<i>Seção 15x25 - 2x4Φ16 - 1º método exato</i>	23,09
	<i>Seção 15x25 - 2x4Φ16 - 2º método empírico</i>	19,98

$$N_d = 473,8 \text{ kN}$$

$$le = 3,60\text{m}$$

$$M_{\text{aplicado}} = 24,16\text{kNm}$$

Exemplo	Método	Momento(kNm)
Exemplo5	<i>Método do pilar padrão com curvatura aproximada</i>	25,33
	<i>Método do pilar padrão com rigidez aproximada</i>	21,60
seção 18x25 - 2x4Φ16	<i>Método do pilar padrão com diagrama M VS K acoplado</i>	15,63
$\lambda=69,30$	<i>Método exato sem fluência As = 2x4Φ16</i>	24,16
Cálculo com fluência	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ16 - 1º método exato</i>	24,16
	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ16 - 2º método empírico</i>	23,24

$$N_d = 236,9 \text{ kN}$$

$$le = 4,70\text{m}$$

$$M_{\text{aplicado}} = 12,08\text{kNm}$$

Exemplo	Método	Momento(kNm)
Exemplo6	<i>Método do pilar padrão com curvatura aproximada</i>	19,37
	<i>Método do pilar padrão com rigidez aproximada</i>	16,90
seção 18x25 - 2x4Φ12,5	<i>Método do pilar padrão com diagrama M VS K acoplado</i>	9,23
$\lambda=90,45$	<i>Método exato sem fluência As = 2x4Φ12,5</i>	12,08
Cálculo com fluência	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ12,5 - 1º método exato</i>	12,08
	<i>Seção 18x25 - 2x4Φ12,5 - 2º método empírico</i>	13,05

Nos exemplos notamos que o método do pilar padrão com curvatura aproximada é conservador, mostrando-se assim ser um método adequado e confiável para ser usado em nosso cotidiano para o dimensionamento de pilares, visto que está normalmente a favor da segurança.

Outros aspectos importantes a analisar nos resultados de nosso estudo: o fato do método exato no exemplo 3 apresentar valor bem reduzido em relação aos métodos aproximados; nos exemplos 2 e 3, mesmo sendo dispensada a consideração da fluênci, ocorreu um aumento significativo dos momentos.

No exemplo 3, a discrepância citada para o método geral ocorre certamente devido ao fato da carga normal ser reduzida em relação aos exemplos 1 e 2, uma vez que o método exato é função de carga normal aplicada no elemento. Se aumentarmos a carga normal para o mesmo valor dos exemplos 1 e 2, o pilar não passará quando for considerado o efeito da fluênci porque o índice de esbeltez é maior do que o do exemplo 2.

Novamente em relação à fluênci, notamos que nos exemplos 1 ao 3, o aumento no efeito de 2^a ordem foi significativo. A forma aproximada da Norma em tratar da fluênci através da consideração de uma excentricidade adicional, mostrou-se conservadora se comparada com o método exato. Desse modo, a norma trata de forma segura o efeito da fluênci.

Outro aspecto a ressaltar é de que o método exato nunca deve ser aplicado sem a consideração da fluênci, já que assim os resultados são contra a segurança.

Nos exemplos 4, 5 e 6, onde tivemos momentos aplicados nas extremidades, os efeitos de segunda ordem não alteram significativamente os valores dos momentos. Observar que os momentos máximos apresentados na tabela para os métodos exatos são os momentos de extremidade, já que os momentos totais ao longo do pilar são sempre inferiores a estes momentos. Podemos interpretar isto devido ao fato da consideração da deformada senoidal ser um critério extremamente conservador, não simulando a realidade das deformações para estes casos.

Concluímos que em pilares com grande índice de esbeltez, é recomendada a análise pelo cálculo exato para chegarmos a resultados mais coerentes com a realidade, devido ao refinamento do método.

12. Referências bibliográficas.

- [1] MONTOYA, P.J. – Hormigon Armado: ábacos para el cálculo de secciones em el estado último de agotamiento. Barcelona. 1979
- [2] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 6118:2007 - Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro. 2007.
- [3] Programa MK-UFRJ do Engenheiro Fábio Orsini para cálculo de diagramas momento VS curvatura.
- [4] SANTOS, S.H.C – Apostila de Concreto Armado III. Rio de Janeiro. 2010.
- [5] Programa computacional Mathcad.