



NEUTRALIZADOR DINÂMICO DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS
VISCOELÁSTICOS APLICADO EM SISTEMAS ROTODINÂMICOS

Paulo Cezar Büchner

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Fernando Augusto de Noronha
Castro Pinto


Rio de Janeiro
Abril de 2017

NEUTRALIZADOR DINÂMICO DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS
VISCOELÁSTICOS APLICADO EM SISTEMAS ROTODINÂMICOS

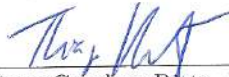
Paulo Cezar Büchner

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:



Prof. Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto, Dr.Ing.



Prof. Thiago Gamboa Ritto, D.Sc.



Prof. Marcelo Amorim Savi, D.Sc.



Prof. Luiz Bevilacqua, Ph.D.



Prof. Kátia Lucchesi Cavalca Dedini, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

ABRIL DE 2017

Büchner, Paulo Cezar

Neutralizador dinâmico de vibrações torcionais viscoelásticos aplicado em sistemas rotodinâmicos/Paulo Cezar Büchner. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XVIII, 115 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Fernando Augusto de Noronha Castro
Pinto

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 109 – 115.

1. Controle passivo. 2. Controle de vibrações. 3. Derivadas fracionárias. 4. Viscoelasticidade. 5. Rotores. 6. Slipring. I. Pinto, Fernando Augusto de Noronha Castro. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*A Deus.
As minhas Anas: Cristine -
esposa e Carolina - minha filha.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tornar essa empreitada possível.

Ao Professor Fernando pela paciência, experiência e orientação.

Aos professores da UFRJ, os quais eu tive o privilégio de conhecer.

Aos amigos que fiz no LAVI: Eduardo, Guilherme, Frederico, Diego, Davi, Reniene, Luana, Pedro, Tiago, Anderson, Daniel, Bia, Arantes, Fredi e Willian. Um agradecimento especial ao Jefferson, Reniene e Alexandra pelo companheirismo nos momentos difíceis.

À Universidade Federal de Viçosa e professores do DEP - Departamento de Engenharia de Produção e Mecânica, pelo apoio e pelos recursos.

À Universidade Federal do Rio de Janeiro pela oportunidade.

À minha família pela paciência e compreensão - não foram dias fáceis.

A todos o meu sincero muito obrigado!

Epígrafe

“Se você ouve uma voz dentro de você dizer ‘você não pode pintar’, então pinte sem dúvida, e essa voz será silenciada.”
(*Vincent Van Gogh*)

“A arte de interrogar não é tão fácil como se pensa. É mais uma arte de mestres do que de discípulos; é preciso ter aprendido muitas coisas para saber perguntar o que não se sabe.”
(*Jean-Jacques Rousseau*)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

NEUTRALIZADOR DINÂMICO DE VIBRAÇÕES TORCIONAIS
VISCOELÁSTICOS APLICADO EM SISTEMAS ROTODINÂMICOS

Paulo Cezar Büchner

Abril/2017

Orientador: Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto

Programa: Engenharia Mecânica

Os neutralizadores dinâmicos de vibração viscoelásticos são dispositivos empregados no controle passivo de vibrações. As principais características que os tornam uma escolha vantajosa estão diretamente relacionadas aos materiais viscoelásticos utilizados na construção desses sistemas auxiliares. Esta tese de doutorado versa sobre a modelagem de neutralizadores dinâmicos aplicados ao problema de vibrações torcionais em rotores, cujo resultado final é definir os parâmetros do material viscoelástico e geométricos do neutralizador, ou seja, nesta abordagem, o material é definido posteriormente, a partir da resposta do sistema físico, obtida através dos métodos de análise modal ou elementos finitos. Dessa forma, pode-se selecionar ou, eventualmente, sintetizar o elastômero que melhor se adapte ao problema em tela. Logo, é essa a característica que diferencia o modelo proposto nessa pesquisa de outros modelos já conhecidos, nos quais os parâmetros do sistema auxiliar são determinados a partir de um material pré-selecionado. O comportamento dinâmico do material viscoelástico linear foi descrito através do modelo fracionário de quatro parâmetros e para validar os resultados dessa modelagem foi utilizada uma bancada de rotodinâmica, a qual permitiu avaliar o neutralizador em movimento sob o efeito de vibração torcional. A introdução do forçamento de torção se deu por meio de um sistema de excitação angular controlado remotamente. A solução para aplicar esse tipo de excitação supera, dessa forma, algumas das dificuldades da análise torcional com o sistema girando. Os resultados comprovam a eficácia do modelo fracionário proposto e evidenciam o potencial do neutralizador viscoelástico para o controle de vibrações torcionais em rotores.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

VISCOELASTIC TORSIONAL VIBRATION NEUTRALIZER APPLIED IN ROTODYNAMIC SYSTEM

Paulo Cezar Büchner

April/2017

Advisor: Fernando Augusto de Noronha Castro Pinto

Department: Mechanical Engineering

Dynamic viscoelastic vibration neutralizers are devices used in the passive control of vibrations. The main characteristics that make them an advantageous choice are directly related to the viscoelastic materials used in the construction of these auxiliary systems. This doctoral thesis deals with the modeling of dynamic neutralizers applied to the problem of torsional vibrations in rotors, the final result of which is to define the viscoelastic and geometric parameters of the neutralizer, that is, in this approach, the material is defined later, from the Response of the physical system, obtained through modal analysis methods or finite elements. In this way, one can select or, eventually, synthesize the elastomer that best suits the on-screen problem. Therefore, this is the characteristic that differentiates the model proposed in this research from other already known models, in which the parameters of the auxiliary system are determined from a pre-selected material. The dynamic behavior of the linear viscoelastic material was described through the fractional model of four parameters and to validate the results of this modeling, a rotodynamic workbench was used, which allowed to evaluate the neutralizer in motion under the effect of torsional vibration. The introduction of torsional forcing was done by means of a remotely controlled angular excitation system. The solution to apply this excitation type overcomes, therefore, some of the difficulties of the torsional analysis with the spinning system. The results prove the effectiveness of the proposed fractional model and show the potential of the viscoelastic neutralizer for the control of torsional vibrations in rotors.

Sumário

Epígrafe	vi
Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Símbolos	xv
Lista de Abreviaturas	xviii
1 Introdução	1
1.1 Proposta da tese	4
1.2 Metodologia	5
1.3 Estrutura do trabalho	7
2 Revisão Bibliográfica	9
3 Fundamentação Teórica	20
3.1 Introdução	20
3.2 Rotodinâmica	21
3.2.1 Vibração Torcional	22
3.3 Materiais Viscoelásticos	25
3.3.1 Restrições da termodinâmica	32
3.3.2 Caracterização de Materiais Viscoelásticos	33
3.3.3 Princípio da superposição tempo temperatura	36
3.4 Cálculo fracionário	37
3.4.1 Integral Fracionária	38
3.4.2 Derivadas Fracionárias	40
3.5 Neutralizador Dinâmico de Vibrações	41
3.5.1 Quantidades Equivalentes Generalizadas	45
4 Bancada Experimental	58
4.1 Introdução	58

4.2	Sistema de medição	63
5	Modelagem do Sistema Rotodinâmico	65
5.1	Introdução	65
5.2	Modelagem do Rotor	66
5.3	Modelagem do sistema de excitação	67
5.4	Modelagem do Sistema de medição de vibração torcional	69
5.5	Modelagem do Neutralizador	71
6	Resultados	78
6.1	Resultados simulados	78
6.2	Resultados experimentais	98
6.3	Sistema de excitação	98
7	Conclusão e Sugestões	106
7.1	Conclusões	106
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	108
	Referências Bibliográficas	109

Lista de Figuras

1	Eixo.	23
2	Modelos Mecânicos.	27
3	Modelo Linear Padrão ou Zener.	28
4	Curva de Propriedade de MV.	31
5	Varição das propriedades com a frequência.	34
6	Varição das propriedades com a temperatura.	35
7	Resposta ao impulso.	40
8	Elemento viscoelástico sob cisalhamento	43
9	Monograma de Frequência Reduzida	44
10	Modelo simples de NDV com MV.	46
11	Diagrama de corpo livre do NDV.	47
12	Pontos fixos.	55
13	Otimização pelo método dos pontos fixos.	56
14	Bancada Experimental.	58
15	Rotor.	59
16	Acoplamento rígido.	59
17	Disco de Inércia.	60
18	Sistema trifásico de indução.	60
19	Controlador PWM.	61
20	Esquema de montagem do <i>slip ring</i>	62
21	Placa de aquisição NI 9234.	62
22	Acelerômetro MEMS MMA7361.	63
23	Sistema de Medição.	63
24	Calibrador de acelerômetros	64
25	Resultado da calibração.	64
26	Montagem do rotor.	66
27	Montagem do Rotor [mm].	66
28	Diagrama de corpo livre - DCL.	67
29	Detalhes da montagem do disco de excitação.	68

30	Disco de excitação.	68
31	Montagem dos acelerômetros para medição do sinal de torção.	70
32	Detalhe da montagem com o NDV.	71
33	Detalhe da montagem com o NDV.	72
34	Vista frontal do NDV.	72
35	Movimento relativo: anel sintonizador - disco de inércia.	73
36	Comprimento do elemento viscoelástico.	74
37	Anél sintonizador.	76
38	Órbita da massa desbalanceadora com o rotor parado.	78
39	Órbita da massa desbalanceadora - sentidos de giro opostos.	79
40	Órbita da massa desbalanceadora - sentidos de giro opostos.	79
41	Órbita da massa desbalanceadora - sentido de giro concordante.	80
42	Órbita da massa desbalanceadora - sentido de giro concordante.	80
43	Simulação do sinal: rotor 10 Hz e excitação 45 Hz.	81
44	Simulação sinal de torção: excitação 15 Hz.	82
45	Simulação de sinais de torção.	83
46	Simulação do torque - sentido de rotação.	84
47	Simulação do torque: excitação 900 rpm.	85
48	Simulação do torque: rotor 900 rpm excitação 2700 rpm.	86
49	Simulação do Momento: rotação 900 rpm e excitação 3000 rpm.	87
50	Simulação do Momento: rotação 200 rpm e excitação 600 rpm.	88
51	Método de Holzer.	89
52	Método de Holzer - adaptado.	90
53	Diagrama de Campbell.	91
54	Elementos finitos(Rotor) - 3 modos.	92
55	Elementos finitos (Rotor) - 8 modos.	93
56	Elementos finitos (Rotor) - um modo.	93
57	Elementos finitos (Rotor) - 5 modos.	94
58	Resultado da simulação - Dados modais do rotor (FEM).	94
59	Simulação final - 52 Hz.	95
60	Otimização por algoritmos genético - produzida pelo código Rotor.	96
61	Sinal do rotor girando 10Hz e a excitação em 32Hz.	98
62	Sinal do rotor girando a 10H e a excitação em 46Hz.	99
63	Sinal de torção, no tempo e o espectro, em 5Hz	100
64	Vibração axial medido nos discos de inércia/excitação, excitação 10Hz . . .	101
65	Vibração axial medido nos discos de inércia/excitação, excitação 10Hz . . .	102
66	Análise modal - Impacto do martelo.	103
67	Montagem final do NDV.	104

68	Controle com neutralizador.	105
----	-------------------------------------	-----

Lista de Tabelas

1	Restrições da Termodinâmica.	34
2	Frequências Naturais não amortecidas.	88
3	Parâmetros do material viscoelástico (Neoprene).	97
4	Parâmetros do material viscoelástico - complementar.	97

Lista de Símbolos

A_o	Área do seguimento de material viscoelástico., p. 77
C	Constante de amortecimento viscoso - Ns/m , p. 56
D^{α_n}	Derivada de ordem fracionária α_n , p. 56
D^{β_m}	Derivada de ordem fracionária β_m , p. 56
$E(t)$	Função relaxação, p. 56
F_u	Força de desbalanceamento - sistema de excitação [N]., p. 58
G	Módulo de cisalhamento Dinâmico, p. 56
G_o	Módulo de cisalhamento, assíntota inferior - [Pa], p. 56
J	Momento polar de área, p. 56
J_o	Momento de inércia de massa - $[kgm^2]$, p. 56
L	Fator de forma, p. 56
$L_{vão}$	Comprimento do eixo, medido entre os mancais $[m]$, p. 56
M	Variável que pode assumir valores 1,2,3,..., p. 56
N	Número natural 1,2,3,..., p. 56
P	Potência - W , p. 56
R_{ext}	Raio externo da folga, que coincide com o raio interno do anel sintonizador., p. 77
R_{int}	Raio interno da folga, que coincide com o raio externo do disco de inércia., p. 77
T_0	Temperatura de referência [K], p. 35
T_n	Torque nominal - $[Nm]$, p. 56

T_w	Temperatura de trabalho [K], p. 35
T_∞	Temperatura [K], p. 56
X_o	Amplitude do movimento, p. 56
Z_a	Impedância mecânica do neutralizador, p. 56
Γ	Função gama, generalização do fatorial, p. 56
Ω_R	frequência reduzida, p. 42
Ω_a	Frequência de antirressonância [rad/s], p. 56
$\ddot{\theta}$	Aceleração angular [rad/s^2], p. 62
\ddot{x}_1	Sinal do acelerômetro 1 [m/s^2], p. 62
\ddot{x}_2	Sinal do acelerômetro 2 [m/s^2], p. 62
η	Fator de perda, p. 56
γ	Ângulo devido ao movimento relativo anel-disco, observado a partir do eixo., p. 77
\bar{M}	matriz massa elementar, p. 23
\mathfrak{C}	Constante de integração, p. 56
\mathfrak{F}	Operador de <i>Fourier</i> , p. 56
\mathfrak{L}	Operador de <i>Laplace</i> , p. 56
π	Constante que vale 3,141592..., p. 56
$\sigma(t)$	Tensão em função do tempo, p. 56
\sim	Quando colocado sob a variável, indica que se trata de um vetor, p. 56
τ	Instante de tempo, p. 56
θ_1	Constantes do material viscoelástico, p. 35
$\tilde{f}(\Omega)$	Transformada de Fourier de $f(t)$, p. 56
$\tilde{f}(s)$	Transformada de Laplace de $f(t)$, p. 56
$\varepsilon(t)$	Deformação em função do tempo, p. 56

φ	Ângulo relativo ao comprimento do material viscoelástico., p. 77
ϑ	Fator geométrico, p. 56
b	Constante de tempo de relaxação, p. 30
b_o	Largura do disco de inércia., p. 77
e	Constante de Euler e vale 2,7182818..., p. 56
f	Frequência - [Hz], p. 56
h	Espessura do material viscoelástico, p. 56
k_t	a constante de rigidez, p. 24
m	Número natural 1,2,3,..., p. 56
m_a	Massa do absorvedor - [kg], p. 56
m_p	Massa do sistema primário - [kg], p. 56
n	Número natural 1,2,3,..., p. 56
s	Variável de <i>Laplace</i> , p. 56
s_a	Comprimento do arco formado pelo movimento relativo anel-disco., p. 77
t	É uma variável independente representando o tempo - [s], p. 56

Lista de Abreviaturas

ADF	Anelastic Displacement Fields, p. 14
ADF	<i>Anelastic Displacement Fields</i> , p. 11
ADV	absorvedores dinâmicos de vibração, p. 1
ATF	<i>Augmenting Thermodynamic Fields</i> , p. 11
DCL	diagrama de corpo livre, p. 45
FRF	Função Resposta em Frequência, p. 7
GHM	Golla-Hunghes-McTavish, p. 11
MEMS	Micro Electro Mechanical System, p. 6
MGDL	múltiplos graus de liberdade, p. 41
NDV	neutralizadores dinâmicos de vibração, p. 1
SI	Sistema Internacional de Unidades, p. 7

Capítulo 1

Introdução

Com a consolidação da globalização estabeleceu-se um cenário de competitividade que se acirra cada vez mais. Para sobreviver a essa realidade e estar em conformidade com as exigências desse mercado, as empresas necessitam investir no desenvolvimento de novas tecnologias em produtos, processos e serviços.

Conseqüentemente, para atender as crescentes demandas - em termos de quantidade, qualidade e menores custos - máquinas e equipamentos estão sendo projetados para trabalharem com altas velocidades de operação, em arquiteturas cada vez menores.

Nessas circunstâncias de trabalho, as estruturas mecânicas estão sujeitas às intensas vibrações, que podem levá-las a falhar ou quebrar, colocando em risco a segurança da operação e a qualidade final do produto ou serviço. Portanto, o controle de vibrações torna-se um procedimento imprescindível para o correto e seguro funcionamento de máquinas, equipamentos e processos.

Devido a relevância desse assunto, o controle de vibrações é um dos temas recorrentes nas pesquisas e, em vista disso, vários métodos de controle e prevenção podem ser encontrados nas diversas publicações científicas ao longo dos anos.

Alguns desses métodos de controle baseiam-se na alteração de parâmetros do projeto ou na mudança dos padrões de operação das máquinas; em outros, na adição de dispositivos auxiliares, que são classificados de acordo com o tipo de atuação como: passivos, semi-ativos ou ativos.

Destaca-se o controle passivo, face a sua simplicidade e aos menores custos associados na sua implementação (HARTOG, 1956). Entre os métodos de controle passivo, os neutralizadores dinâmicos de vibração (NDV), ou absorvedores dinâmicos de vibração (ADV), são os mais frequentemente utilizados (BALACHANDRAN e MAGRAB, 2011; RAO, 2008). Esses dispositivos, também definidos como sistemas secundários, são projetados basicamente a partir da idealização do sistema massa-mola (oscilador mecânico).

Os neutralizadores são fixos à estrutura da máquina ou do equipamento (denominados de sistemas primários) com o objetivo de neutralizar ou atenuar as amplitudes de vibrações - em uma banda estreita de frequências (RAO, 2011).

A introdução desses novos elementos, os neutralizadores, sob a perspectiva do seu funcionamento, não envolve a dissipação de energia, mas sim uma redistribuição das frequências naturais (BALACHANDRAN e MAGRAB, 2011). Por esse motivo, e para muitos autores, o termo neutralizador dinâmico de vibrações seria o mais apropriado (ESPINDOLA *et al.*, 2009; HARTOG, 1956).

Quando o sistema primário mais o secundário (sistema composto) operam em condição de sintonia, como será visto, o sistema secundário acaba submetido a uma quantidade considerável de energia. Isso pode fazê-lo experimentar intensas amplitudes de vibração, levando-o à gerar ruídos, falhar ou quebrar.

O problema das grandes amplitudes de vibração que acometem os neutralizadores é resolvido com a introdução de amortecimento na estrutura desses dispositivos.

Face as suas características de dissipação de energia e baixo impacto sobre a massa do sistema, os materiais viscoelásticos têm se tornado opção de preferência na construção de neutralizadores, com o desígnio de introduzir amortecimento.

Esses materiais poliméricos apresentam um comportamento entre o elástico (mola) e o amortecedor viscoso, relacionados ao armazenamento e a dissipação de energia, respectivamente (MOSCHEN, 2006). O arranjo desses elementos em série, paralelo ou misto define o que é conhecido como modelo mecânico do material viscoelástico. Termo esse utilizado no estudo da viscoelasticidade (MAINARDI, 2010).

Com base em tais arranjos, de molas e amortecedores, vários modelos mecânicos têm sido construídos com a finalidade de representar, com a melhor aproximação possível, a resposta dos diferentes tipos de materiais viscoelásticos sob as condições de *creep* (ou Fluência), relaxação e excitação (MOSCHEN, 2006).

A formulação matemática, abstraída a partir desses modelos mecânicos, de acordo com Bagley e Torvik (1986); Bavastri, Febbo, Gonçalves, e Lopes (2014); Carrella, Friswell, Zotov, Ewins, e Tichonov (2009); Cruz (2004); Mainardi (2010); Moschen (2006), compõe a equação constitutiva do material viscoelástico, ou seja, a equação de tensão e deformação.

Inicialmente essa formulação foi feita com derivadas de ordem inteira, porém, essa abordagem vem sendo substituída pela utilização das derivadas de ordem generalizada ou, como é mais conhecida, derivadas fracionárias.

A modelagem em termos de derivadas inteiras faz surgir algumas dificuldades: a primeira, com a finalidade de ajustar-se a equação ao comportamento real do material, tende-se a expandir a ordem das derivadas; segundo, com essa expansão, novos coeficientes precisam ser identificados, implicando, conseqüentemente, no aumento da quantidade de parâmetros do material que precisam ser caracterizados, ou seja, identificados.

De acordo com Bagley e Torvik (1986) e Pritz (2003), mesmo aumentando-se indefinidamente a ordem das derivadas inteiras, percebe-se que não há uma melhora na aproximação do resultado do modelo com a resposta real do material.

Por outro lado, verificam-se notáveis vantagens com a formulação feita através das derivadas fracionárias. Um dos principais benefícios é o reduzido número de parâmetros a serem identificados, outro é o ajuste da curva de resposta, que tem sensível aproximação daquela relativa ao comportamento real do material viscoelástico. Além disso, segundo Bagley e Torvik (1983) e Espindola, Pereira, Bavastri, e Lopes (2009), constatou-se uma íntima relação entre modelo fracionário e a teoria molecular desses polímeros.

Uma grande variedade de materiais possui comportamento viscoelástico, como por exemplo as resinas, esmaltes, acrílicos, borrachas, aço (em altas temperaturas) e vidros.

O campo de aplicação dos materiais viscoelásticos, com o objetivo de controle de vibrações, encontra-se em franca expansão. Isso deve-se ao fato do custo relativamente baixo desses materiais, da facilidade de vulcanização e ao avanço da tecnologia, que tem permitido a produção de elastômeros de acordo com os parâmetros do sistema físico. Além, evidentemente, das características já descritas anteriormente.

Visto que a introdução dos neutralizadores com materiais viscoelásticos tem um baixo impacto sobre a massa do sistema, essa solução revela-se como uma boa alternativa ao controle de vibrações torcionais em rotores.

Os sistemas rotodinâmicos, como será visto nas próximas linhas, apresentam sérios problemas com trepidações. Os rotores possuem aspectos inerentes ao próprio processo de fabricação desses elementos de máquinas e a forma de operação dos mesmos, que influencia na geração de vibração. Ou seja, as imperfeições introduzidas pelo processo de usinagem - por exemplo - e as condições do processo, onde o rotor está sendo empregado, podem introduzir esse fenômeno vibratório em particular. Como pode ser observado em árvores de virabrequins, de máquinas ferramentas, perfuratrizes e turbinas.

Verifica-se na prática que a vibração torcional, em geral, tem pouco ou nenhum relacionamento com a vibração lateral e, portanto, é de difícil detecção através de monitoramento convencional, feito de forma indireta - como as medições realizadas nos mancais, por exemplo (MUSZYNSKA, 2005). Porém, a presença das vibrações torcionais são igualmente prejudiciais para as máquinas e os equipamentos.

Essas trepidações angulares ocorrem com maior frequência em motores de combustão interna, compressores radiais, brocas de perfuração, caixas de engrenagens, eixos de transmissão e eixos árvores de máquinas ferramentas.

O controle das vibrações de torção em rotores é feito frequentemente com a aplicação de neutralizadores torcionais, nos quais a dissipação de energia é feita por meio viscoso ou por atrito.

Uma forma alternativa de dissipação de energia vibratória nos neutralizadores, como já mencionado, se dá através da aplicação de materiais viscoelásticos. Esses polímeros podem ser empregados de forma indireta, como nas estruturas auxiliares, ou direta, na forma de tiras de borrachas aplicadas em painéis restritos (*constrain layers*) ou na construção de *stockbridge*.

A inserção dos neutralizadores adicionam novos graus de liberdade ao sistema, consequentemente, haverá uma elevação do número de equações governantes a serem resolvidas o que, por sua vez, irá refletir em um aumento do esforço computacional, necessário para resolver o sistema de equações do sistema composto.

Uma das formas de se restringir a expansão da quantidade de equações governantes, conforme os neutralizadores são introduzidos, é aplicar o conceito de parâmetros equivalentes (BAVASTRI, 1997). Essa abordagem, permite conter o crescimento do número de modos do sistema composto, pois a formulação do problema levará em conta apenas os graus de liberdade do sistema primário. Some-se a isso, há a possibilidade de um tratamento modo a modo, o que significa reter apenas os modos de interesse ou de maior valor de resposta.

Com base na descrição feita até esse ponto, observa-se que o problema de vibrações torcionais apresenta características bem distintas de outros modos de vibração em rotores. Salientam-se as dificuldades em se monitorar esse fenômeno e definir um sistema de controle de vibrações, pois a superfície alvo está em movimento e a vibração decorrente não é percebida pelos métodos indiretos.

Face o rotor estar girando, os métodos de controle ativo, por exemplo, trazem consigo dificuldades adicionais, relacionadas ao espaço disponível, aos meios de alimentação de energia e transmissão de sinais (*input/output*). Por outro lado, os métodos de controle passivo apresentam-se como uma alternativa eficiente a essas dificuldades. Pois, além de mitigar as amplitudes de vibrações, os neutralizadores, em especial os fabricados com materiais viscoelásticos, têm um impacto menor sobre a massa do sistema composto, devido ao seu tamanho reduzido, adaptarem-se às formas complexas e apresentarem custo relativamente baixo de produção.

1.1 Proposta da tese

Esta tese apresenta um modelo de controle de vibração torcional passivo aplicado ao problema de vibrações torcionais em rotores.

Para alcançar este desígnio, empregou-se o conceito dos chamados neutralizadores ou absorvedores dinâmicos de vibrações. Sendo o modelo de neutralizador escolhido aquele construído com materiais viscoelásticos.

Na modelagem proposta nesta tese, as propriedades do material viscoelástico são definidas posteriormente, *a posteriori*, a partir da resposta do sistema primário. Assim sendo, tais propriedades do elastômero tornam-se variáveis de saída do projeto do neutralizador. Procedimento esse que se diferencia daqueles usualmente aplicados até o momento, onde as características do neutralizador são estabelecidas a partir de um material pré-selecionado, *a priori*.

A formulação do modelo adotado nesta pesquisa baseia-se no conceito das derivadas

fracionárias, onde o comportamento dinâmico dos elastômeros é descrito através do conhecido modelo viscoelástico linear, ou modelo de quatro parâmetros.

Concomitantemente à modelagem proposta, a escolha dos parâmetros é feita com o auxílio de métodos de otimização não linear e algoritmos genéticos. Haja vista, durante o processo de sintonização, algumas opções de configuração viáveis são geradas. Logo, deseja-se que o modelo indique aqueles parâmetros que resultem na configuração do neutralizador com o melhor desempenho de controle.

Com a finalidade de definir os parâmetros ótimos, escolheu-se como função objetivo o máximo valor da resposta em frequência. Esse método de otimização será integrado à rotina de programação batizada de Rotor.

A estratégia de modelagem adotada nessa tese leva em conta a possibilidade de analisar-se um sistema com elevado número de graus de liberdade. Por essa razão, e de forma complementar, implementou-se o conceito de quantidades equivalentes. Essa abordagem permite reduzir o problema de dimensões $n + p \times n + p$, com grande quantidade de autovalores e autovetores, para outro de dimensões $\tilde{n} + p \times n + p$, com alguns poucos modos, $\tilde{n} \ll n$, e restritos a uma determinada faixa de interesse.

Os resultados do modelo de controle de vibrações torcionais do sistema rotodinâmico foram validados na bancada experimental, onde pode-se induzir a vibração torcional e, ao mesmo tempo, adquirir os sinais de resposta com o rotor em movimento. Dessa forma, pode-se verificar a eficiência do neutralizador viscoelástico na redução da vibração torcional. A solução encontrada para análise do sistema de forma remota supera, assim, parte das dificuldades frequentemente relatadas em diversos trabalhos científicos.

1.2 Metodologia

Inicialmente foi definido o sistema rotodinâmico, objeto da aplicação experimental da presente pesquisa. A concepção desse protótipo teve como objetivo principal atribuir características práticas e gerais, isto é, conferir ao protótipo aspectos semelhantes a de uma aplicação mais verídica.

Conjuntamente com a construção da bancada de rotodinâmica, foram projetados e construídos o sistema de excitação e de aquisição de sinais. Ao final dessa etapa de construção, procedeu-se a caracterização da bancada, através de uma análise modal, e a calibração dos acelerômetros modelos Micro Electro Mechanical System (MEMS) embarcados no disco de inércia.

O modelo matemático referente a esse sistema rotodinâmico foi implementado em Matlab para obtenção das simulações da resposta dinâmica do rotor, acoplado ao pacote comercial ModeFrontier, que auxiliou na parte de otimização. Pode-se, dessa forma, automatizar os cálculos de uma série de parâmetros, como por exemplo: calcular as frequências naturais, os modos de vibrar do sistema, gerar o diagrama de Campbell,

calcular os parâmetros geométricos do neutralizador e as propriedades do material viscoelástico.

Essa rotina construída em Matlab, com o objetivo de generalizar o procedimento de análise, estende-se a sistemas com múltiplos graus de liberdade.

Amostras de materiais viscoelásticos disponíveis foram ensaiadas no Dynamic Mechanical Analyser (DMA), a partir do qual obteve-se as propriedades desses polímeros. O ensaio limitou-se a identificar os parâmetros e o comportamento do material à variação de frequência e temperatura.

A formulação inicial da modelagem do rotor foi desenvolvida começando pela análise do diagrama de corpo livre e a aplicação da segunda lei de Newton. Assim, foram obtidas as equações governantes do sistema primário. Para o cálculo das frequências naturais e os modos de vibrar.

O torque introduzido pelo disco de excitação foi modelado e algumas simulações foram realizadas para verificar o comportamento dinâmico dessa excitação.

Nesse trabalho, a resposta dinâmica do material viscoelástico foi formulada considerando o modelo viscoelástico linear, ou seja, o modelo a derivadas fracionárias de quatro parâmetros. Associada a essa formulação, o modelamento desenvolvido empregou o conceito de quantidades equivalentes e uma formulação reduzida, truncada, limitada aos modos de interesse. Dessa forma, o modelo proposto pode trabalhar com uma quantidade reduzida de dados

A determinação da massa do neutralizador foi estabelecida em concordância com os critérios definidos por Hartog (1956). O objetivo de alinhar o projeto do sistema auxiliar com esses critérios é minimizar a influência da massa do neutralizador sobre a massa do sistema composto. Essa metodologia foi adaptada ao sistema torcional, levando-se em conta a relação de inércias e a respectiva participação modal. Assim, atribuiu-se uma ponderação adicional relacionada à resposta do sistema no modo a ser controlado. Nesse procedimento específico, fez-se uma alteração do método proposto por Espindola (1996), no qual utilizou-se a matriz modal do sistema composto para o cálculo da massa de sintonização. Ao invés disso, foi aplicada a matriz modal do sistema primário. Uma vez que esta é, de fato, conhecida.

Por conseguinte, a Função Resposta em Frequência (FRF) da massa de inércia, excitada pelo disco de excitação, foi calculada. Inicialmente calculou-se a FRF somente do sistema primário e em seguida do sistema composto.

De forma a se estabelecer uma linha de comparação, o procedimento adotado nessa etapa foi calcular o tamanho dos insertos de material viscoelástico a partir das propriedades de um polímero conhecido, no caso a borracha de neoprene. A razão disso é para obter valores de referência para comparação com os resultados obtidos pela modelagem. Uma vez que não haveria os recursos necessários para sintetizar um material específico, que eventualmente fosse indicado pelo modelo.

Definidas a massa e a geometria do neutralizador, aplicou-se métodos de otimização para definir a frequência de anti-ressonância e o fator de perda. A partir dessas informações pode-se computar o módulo complexo do polímero e a ordem da derivada fracionária. Que são os parâmetros necessários para seleção ou processamento do material viscoelástico.

1.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho está dividido em sete capítulos.

Neste primeiro capítulo, apresenta-se uma introdução e a contextualização histórica sobre a modelagem de neutralizadores dinâmicos de vibrações viscoelásticos aplicados em sistemas rotodinâmicos. Destaca-se a importância da utilização desse modelo de neutralizadores no controle de vibrações torcionais. Encerra-se esse tópico com a exposição do objetivo e da metodologia aplicados à presente pesquisa.

Em seguida, no Capítulo 2, algumas das principais literaturas utilizadas, que serviram de referência para o desenvolvimento desse trabalho, são revisadas. Apresenta-se assim, o estado da arte sobre os temas aqui abordados.

A fundamentação teórica, é o assunto do Capítulo 3, introduz os principais conceitos sobre rotodinâmica e as vibrações torcionais; materiais viscoelásticos, os modelos mecânicos, o comportamento dinâmico desses materiais e o atendimento às restrições da termodinâmica desse modelo; apresenta-se uma introdução ao cálculo fracionário e neutralizadores dinâmicos de vibrações. Constrói-se, dessa forma, o arcabouço teórico que dá suporte à modelagem do problema de vibrações torcionais e o respectivo controle passivo, através da aplicação dos neutralizadores dinâmicos viscoelásticos. A formulação dos modelos mecânicos e da resposta dinâmica, em termos de derivadas fracionárias, foram desenvolvidos. As vibrações laterais foram levadas em conta nesse estudo, face a necessidade de distinguir-se os seus efeitos daqueles oriundos das vibrações torcionais. Esse capítulo encerra-se com a discussão da aplicação de neutralizadores dinâmicos de vibrações com materiais viscoelástico em um problema de vibração torcional em rotores. Mostra-se a solução de otimização através do método dos pontos fixos e o emprego de outros métodos de otimização. Estes últimos, necessário pois, verifica-se que nos sistemas reais, de fato, os tais pontos fixos inexistem.

No Capítulo 4, são apresentados em detalhes os aspectos construtivos e de funcionamento da bancada experimental. Os sistemas de excitação e medição introduzidos, ambos projetados para permitir a análise do rotor em movimento: o primeiro, para induzir o modo de torcional no rotor; e o segundo, para aquisição o sinal de vibração torcional. Uma análise do sistema de excitação é feita para entender-se os seus efeitos sobre o sistema rotodinâmico. O Capítulo 5 versa sobre a modelagem do sistema rotodinâmico e

detalham-se os aspectos construtivos e de funcionamento do rotor. Descrevem-se os acessórios que compõe o rotor e a respectiva participação no comportamento dinâmico do sistema. Um destaque é dado ao disco de excitação e ao sistema de medição. O primeiro é responsável por introduzir o forçamento e o segundo, o sistema de medição, concebido para medir as grandezas com o sistema girando.

Segue-se o Capítulo 6, no qual é reservado a apresentação da parte experimental. São comparados os resultados das simulações com aqueles adquiridos a partir da bancada experimental. Os resultados são analisados e discutidos.

Encerra-se essa tese com o Capítulo 7, onde são apresentadas as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

Nesse capítulo faz-se uma revisão das principais referências utilizadas como suporte para o desenvolvimento da presente pesquisa.

As máquinas rotativas trabalham com grandes densidades de energia. Isto deve-se ao fato dessas máquinas operarem em altas velocidades de rotação, se comparadas a outras de mesma dimensão, em arquiteturas cada vez menores. Conseqüentemente, são desenvolvidas elevadas cargas e deformações nos eixos, o que induz à geração de vibrações e ruídos nessas máquinas (VANCE *et al.*, 2010). Segundo Vance, Zeidan, e Murphy (2010), essa condição de trabalho também resulta em instabilidades dinâmicas nas faixas de rotação próximas às rotações, ou velocidades, críticas desses eixos.

A análise do comportamento dinâmico de rotores são frequentemente realizadas para previsão das velocidades críticas, identificação das frequências naturais de vibração, laterais e torcional, prever o efeito do desbalanceamento sobre o rotor e verificar alguma eventual instabilidade.

Segundo Kämer (1993), Lalanne e Ferraris (1997) e Pereira (2003), essa análise dinâmica inicia a partir do estudo do modelo conhecido como *Jeffcott rotor* ou rotor de laval, o qual é constituído por um disco rígido (contendo desbalanceamento) e um eixo, o qual encontra-se apoiado sobre dois mancais. Através da análise desse modelo é possível compreender como a amplitude se torna máxima na velocidade crítica e porque a massa desbalanceada se movimenta internamente a órbita do rotor. São apresentas três formas de reduzir a amplitude do giro síncrono, como o balanceamento dinâmico do rotor, alteração da velocidade de operação e a introdução de amortecimento no sistema rotor-mancal. Pereira (2003) observa que frequências naturais estão diretamente ligadas à rigidez dos mancais, quando essa rigidez é muito pequena, a forma de vibrar em flexão do eixo é inexistente para os dois primeiros modos. Um mancal é definido como anisotrópico, ou assimétrico, quando os coeficientes de rigidez, num plano transversal ao eixo de rotação, são diferentes.

Uma análise sobre a influência do suporte na dinâmica do sistema rotodinâmico foi apresentada por Cavalca, Cavalcante, e Okabe (2005) e propõe uma metodologia para

análise da influência da fundação, ou da estrutura, sobre o sistema mancal-rotor, usando os parâmetros modais, além disso, sugere a utilização de fundações rígidas para pequenos rotores, nos quais as vibrações estarão relacionadas apenas à dinâmica do comportamento do rotor. Entretanto, salientam os autores, que para rotores de grande porte, é difícil de evitar a interação entre o suporte e o rotor. Nesses casos, a inércia, os efeitos de rigidez, o amortecimento associado com o rotor e a estrutura são relevantes.

De acordo com Muszynska (2005), o modo de vibração torcional está relacionado com a função principal do rotor - que é transmitir o torque do motor até a outra extremidade do eixo onde está o carregamento. Esse modo de vibração é muitas vezes negligenciado, pois a vibração torcional não se propaga para os suportes e, por essa razão, ela não pode ser sentida no corpo da máquina, ou propagada para o ar, na forma de onda acústica. Por essa razão, esse fenômeno é muitas vezes negligenciado e não é observado, ou detectado, por meio de medições indiretas - por exemplo, como no caso da aquisição dos sinais com acelerômetros instalados sobre os mancais. Esse tipo de trepidação pode ser observada apenas com instrumentos dedicados ao monitoramento de movimento angular. De acordo com (MUSZYNSKA, 2005), as vibrações torcionais são igualmente danosas e muito perigosas, principalmente por causa do baixo amortecimento apresentado nesse modo de vibração.

Um estudo sobre a deterioração de brocas devido as vibrações torcionais foi estudada por Khulief, Al-sulaiman, e Bashmal (2007), que salienta sendo esse fenômeno uma das principais causas de deterioração desse tipo de ferramenta de perfuração. Por essa razão, salienta ser de crucial importância o entendimento do complexo mecanismo vibratório experimentado pelos sistemas de perfuração de poços para melhorar o seu desempenho. Vibrações devida ao processo *stick-slip* é conhecido por excitar severamente as trepidações torcionais e axiais em brocas de perfuração. Nesse trabalho, os autores apresentaram um modelo para descrever o comportamento dinâmico de brocas sob o efeito das forças presentes no processo de perfuração, levando em conta os efeitos giroscópicos, o acoplamento axial/flexão e flexão/torção devidos ao contato da broca com a parede do poço e o fluxo de lama.

Uma das grandes dificuldades na análise de sistemas rotativos reside na aquisição dos sinais dos eixos girantes. De acordo com Wang, Davies, Starkey, e Routson (1992), prever as frequências naturais de sistemas de transmissões é uma tarefa complexa e alguns detalhes podem não ser antecipados pelo modelo. Assim, faz-se necessário realizar as medições do sistema físico sob condições de operação. Para um completo entendimento do comportamento dinâmico dos eixos é mister fazer um estudo dos movimentos laterais e torcionais simultaneamente. É nesse aspecto que os sistemas de medição existentes apresentam suas limitações. Segundo Wang, Davies, Starkey, e Routson (1992), além de serem de alto custo, estes sistemas de medição não analisam o sistema mecânico levando-se em conta o acoplamento dos dois efeitos. Os autores propuseram fazer um

estudo para a medição das vibrações laterais e torcionais simultaneamente em vários pontos do eixo, para isso utilizaram-se de sensores ópticos e fitas listradas coladas ao eixo.

A utilização de técnicas usando vibrômetros a laser têm sido considerada em várias pesquisas para medição de vibrações em eixo rotativos. Assim como o emprego de sensores ópticos, o laser mostra-se como uma solução para esse fim, pois não há o contato com a superfície girante. Conforme Bell e s. J. Rothberg (2000), além de medir a vibração torcional do eixo pode-se ainda determinar o sentido de giro e medir em qualquer posição. O princípio de funcionamento está fundamentado na detecção da mudança da frequência Doppler na luz refletida pela superfície alvo. Os autores afirmam não ser possível isolar os termos da equação referente ao efeito de torção e rotação, um do outro, com apenas um feixe laser. Nessa condição, sendo possível isolar somente os termos relacionados à vibração lateral.

Para medição de Vibrações Torcionais, Resor, Trethewey, e Maynard (2005) experimentaram uma técnica utilizando *encoder*, onde foi produzido um *array* para segmentar o tempo e posteriormente compará-lo com a leitura feita através do sensor óptico. Com a rotação do eixo, o sensor detectou os seguimentos pintados sobre uma fita colada ao redor do eixo (marcas de zebra), a qual funcionou como um *encoder*. Segundo Resor, Trethewey, e Maynard (2005), esta técnica apresenta algumas dificuldades, pois a menor diferença na execução dos seguimentos sobre a fita causa erros na leitura. Além de fitas com marcas impressas sobre elas, segundo o autor, ainda há outras opções, tais como utilizar os dentes de engrenagens. Porém, o menor erro de fabricação já pode gerar erro semelhante ao percebido com aquele obtido a partir da impressão de marcas em uma fita.

Como são necessários mais de um feixe de laser para caracterização da vibração torcional, Xiang, Yang, e Gan (2012) utilizam um método para dividir o raio laser e depois recombiná-lo para obtenção da informação da vibração torcional. Isso é devido ao fato de que o raio dividido mantém uma relação de fase bem definida após a recombinação, mesmo que os dois raios derivados tenham percorrido distâncias diferentes. Segundo Xiang, Yang, e Gan (2012), isso é definido como coerência temporal, a diferença máxima na trajetória, para a qual mantém-se a relação de fase, é definido como coerência de comprimento.

Hartog (1956) apresenta um estudo sobre a aplicação de neutralizadores para controle de vibrações em navios, onde as oscilações devidas ao balanço da embarcação produziam excessivo mal estar nos passageiros. Também é desenvolvido o método de otimização dos pontos fixos, a partir do qual são definidos parâmetros ótimos que servirão para a construção dos neutralizadores. Esse método se baseia na observação da sobreposição da função resposta em frequência do sistema primário sem amortecimento com o neutralizador sobre função resposta em frequência do sistema sem o sistema auxiliar. Verificou-se que essas curvas se cruzam em dois pontos bem definidos e que, ajustando

esses pontos para que tenha a mesma ordenada, obtêm-se os parâmetros ótimos do neutralizador.

Chen e Wu (2014) apresentam um trabalho sobre controle de vibrações usando absorvedores dinâmicos distribuídos em uma viga, com o objetivo de melhorar o desempenho de isolamento do sistema primário (viga). A modelagem foi realizada usando o método da matriz transferência, sobre o modelo da viga de Euler. O resultado da aplicação desses absorvedores distribuídos, dentro da faixa de interesse, apresentou uma redução significava da força transmitida à fundação.

Segundo Savi, Paula, e Lagoudas (2011), absorvedores de vibrações sintonizados são dispositivos consolidados no controle passivo de vibrações em sistemas primário sujeitos a forças externas. Os autores apresentam um estudo de dinâmica não linear de absorvedores de vibração adaptativos, aplicando uma liga com memória de forma. A pesquisa inicia com a investigação de um sistema de um grau de liberdade, para apresentar as características da resposta dinâmica. Em seguida, o estudo considera um absorvedor sintonizado com um elemento de liga com memória de forma, submetido a pequenas deformações para ser evitada alguma mudança de forma devida ao estresse do material. Em princípio, analisa-se a influência do inserto de material inteligente, que é causada pela mudança de rigidez, correspondente a transformação de fase induzida pela temperatura, e depois pela influência do comportamento histerético, causado pela transformação de fase devida ao estresse induzido. O autor salienta a propriedade do controle com materiais inteligentes que permite reduzir, tanto a amplitude de resposta do sistema na frequência de forçamento, como as duas novas frequências, que surgem decorrentes da instalação do absorvedores. Além disso, destaca a importância do salto dinâmico e do comportamento dependente da temperatura.

Um sistema rotodinâmico foi investigado por Shabaneh e Zu (2000), nesse estudo foram introduzidos materiais viscoelásticos nos mancais. A flexibilidade do eixo foi incorporada à modelagem utilizando o modelo de Timoshenko e material considerado ter um comportamento linear, seguindo o arranjo mecânico (mola e amortecedor viscoso) de Kelvin-Voigt. O trabalho de Shabaneh e Zu (2000) levou em conta a análise de um sistema sob as condições livre e forçada, com e sem amortecimento. Uma comparação entre os resultados do modelo de rotor Jeffcott e de Timoshenko revelou que a primeira frequência fundamental de ambos os modelos ficaram muito próximas; e para o sistema não amortecido essas frequências se diferenciaram.

Para solução do problema de elevadas intensidade de vibração em estruturas mecânicas, Bavastri (1997), Espindola (1996) e Bavastri, da S. Ferreira, de Espíndola, e de O. Lopes (2008) propuseram o emprego de neutralizadores dinâmicos de vibrações (NDV's) construídos com materiais viscoelásticos. Para o dimensionamento desses dispositivos, segundo os autores, é necessário identificar as velocidades críticas do sistema rotodinâmico em estudo, conseqüentemente a condição de maior resposta do sistema.

Esses parâmetros foram obtidos com a análise de um diagrama de Campbell, onde é grafada uma curva que relaciona a frequência natural em função da rotação do eixo. Foi necessário traçar um subdiagrama para avaliar o comportamento da matriz rigidez. Os elastômeros foram aplicados em algumas partes do sistema rotodinâmico, como entre o alojamento e a pista externa do rolamento e sob o mancal. A modelagem da resposta do material viscoelástico usada foi baseada no modelo fracionário unidimensional.

Neutralizadores Dinâmicos de Vibração (NDV), conhecidos também por Absorvedores Dinâmicos de Vibração, são dispositivos que são fixados nas estruturas principais das máquinas, designadas como sistema primário, com o objetivo de reduzir ou eliminar as vibrações e a irradiação de ruído. Esses dispositivos têm mostrado ao longo do tempo sua eficiência no cumprimento dessa função, a de mitigar amplitude de vibração. Segundo Espindola, Pereira, Bavastri, e Lopes (2009), a introdução de materiais viscoelásticos na construção dos NDV's tem tomado cada vez mais espaço, dentre as várias vantagens está a sua facilidade de ser moldado às estruturas complexas. As pesquisas recentes encaminham-se no sentido de generalizar a teoria de absorvedores de vibração, definindo uma teoria geral para projeto ótimo de absorvedores para uma estrutura mais complexa do que a de um grau de liberdade. Espindola, Pereira, Bavastri, e Lopes (2009) apresentam uma das teorias sobre NDV com materiais viscoelásticos, cuja modelagem é feita com base no cálculo fracionário. São introduzidas questões como quantidades generalizadas equivalentes, os quais, conforme (Bavastri, 1997; Cruz, 2004), resulta na redução do tamanho das matrizes a serem tratadas, diminuindo o esforço computacional. Introduce o conceito da relação de massas. Ou seja, a relação entre a massa dos absorvedores e a massa dos sistema primário, que não devem ultrapassar um determinado valor. Um exemplo prático de aplicação em um *constrained layer* é apresentado, junto com a resposta do tratamento com aplicação de materiais viscoelásticos. Como resultado, conseguiu-se uma redução de 10dB na amplitude de vibração.

Segundo de Espindola, Bavastri, e Lopes (2010), absorvedores dinâmicos de vibrações (ADV) são um meio eficiente e barato de atenuar vibrações em muitas estruturas complexas. Estes dispositivos podem ser construídos com base em diferentes materiais, como viscoso, histeréticos ou viscoelásticos. Sendo os viscosos o mais estudados, com sua aplicação clássica em eixos virabrequins e prédios com grandes alturas. Os neutralizadores tipo histerético tem sua aplicação mais conhecida em amortecedores do tipo *stockbrigde*, aplicados em linhas de transmissão elétrica. Outro modelo bem sucedido é o absorvedor viscoelástico devido, principalmente, pela modelagem via cálculo fracionário, o qual apresenta grande consistência na representação do comportamento dinâmico do material. Além disso, os trabalhos envolvendo esse tipo de material tem adotado essa técnica como base para construção de neutralizadores, tornando-se praticamente uma padrão adotado. É mostrado que um material histerético pode ser derivado de um modelo viscoelástico de quatro parâmetros. Uma análise do modelo proposto é feita

em um pêndulo, onde absorvedores construídos com materiais histéricos e viscoelásticos são comparados. Destaca-se que, apesar do comparativo de eficiência apontar uma taxa elevada de redução na amplitude de vibração, o autor salienta que é uma avaliação equivocada, uma vez que não foram consideradas a inércia do absorvedor. Apesar disso, a utilização de absorvedores viscoelásticos comportam-se muito bem nesse tipo de aplicação.

Para um projeto de controle de vibrações eficaz com materiais viscoelásticos, é necessário a caracterização dinâmica desses polímeros. Lopes, Bavastrri, Espíndola, e Neto (2004) propuseram um método de caracterização dinâmica integrada de elastômeros via derivadas fracionárias. Onde determinou-se o módulo de elasticidade e o correspondente fator de perda. Segundo os autores, essas propriedades são fortemente dependentes da frequência e da temperatura. Com o emprego das derivadas fracionárias pode-se obter as várias funções transmissibilidades de forma simultânea e integrada. Face às dependências citadas, as propriedades dinâmicas desses materiais devem ser obtidas em uma faixa ampla de frequência e temperatura. A caracterização de dois materiais foram alcançadas via função transmissibilidade complexa, pela qual foram levantados o módulo de armazenamento e o fator de perda. Foram apresentados os resultados para caracterização da borracha butílica e silicone, cuja função transmissibilidade modelada possui excelente aproximação da curva empírica do material.

Uma modelagem das características dinâmicas de um atuador de material elastômero dielétrico viscoelástico é apresentada por Zhang, Tang, Li, Wang, e Chen (2015). Os autores fazem uma modelagem utilizando a equação de Euler-Lagrange para caracterizar o desempenho dinâmico de um elastômero dielétrico viscoelástico sob carregamentos diversos. Os autores observaram que a frequência de ressonância tem dependência do modo de deformação, do carregamento e do campo elétrico aplicado. Uma análise sobre um comportamento caótico é desenvolvida e identificou-se um movimento não linear quasi-periódico.

Segundo BAVASTRI *et al.* (2014), absorvedores dinâmicos de vibrações são dispositivos eficientes para controle de ruído em sistemas mecânicos. O autor destaca que o controle de dispositivos com características não lineares tem sido alvo de estudos nos últimos anos, onde sistemas primário, secundários ou ambos podem ser não lineares em termos de rigidez. Destaca que o amortecimento visco tem sido usado largamente nas simulações numéricas, porém, avalia haver uma grande dificuldade em representar a situação real. Os autores fazem um estudo de um sistema não linear com um grau de liberdade. Propõe uma metodologia para otimizar o projeto de absorvedores dinâmicos de vibração fixados nesse sistema. A formulação é baseada no conceito de quantidades equivalentes generalizados com o método do balanço harmônico. O modelo de quatro parâmetros é usado no projeto do absorvedor viscoelástico. Observam-se em alguns resultados que os absorvedores viscoelásticos linearizaram o sistema composto (primário

mais o secundário), o que se deve ao fato do material viscoelástico dissipar uma grande quantidade de energia vibratória introduzida.

Em Datta e Ray (2015), foi realizado um estudo de camadas constritas, onde uma lâmina fina de metal foi fixada sobre um material polimérico. O foco da pesquisa foi a análise do problema através do método de elementos finitos, cuja formulação do problema baseou-se na equação constitutiva a partir do conceito de derivadas fracionárias. O tratamento se deu no domínio do tempo tri-dimensional da camada constritora.

Um estudo sobre não linearidade aplicada em neutralizadores de vibração foi investigada por Brennan e Gatti (2012), com o objetivo de melhorar a sua eficiência. Nesse trabalho é aplicado o método de balanço harmônico para analisar o sistema. Mostra-se como a não-linearidade afeta o pico de ressonância para deslocá-lo para uma alta frequência longe da frequência de sintonização, dessa forma o dispositivo construído baseado nessa teoria torna-se robusto contra dessintonização. O autor salienta que o efeito da não linearidade é similar à adição de massa no neutralizador. Além disso, destaca que com a manipulação adequada dos parâmetros, pode-se ainda aumentar a banda de frequência de atuação do neutralizador.

Cahndra e Sekahar (2014) apresenta um estudo para estimar amortecimento em sistema mancais de rotores. O objetivo estabelecido foi desenvolver a FRF do sistema mancal rotor para estimar o amortecimento a partir de uma excitação tipo *swept-sine*. Para tornar o sinal da FRF mais realístico, os autores introduziram ruídos e mostram os procedimentos adotados para remove-los. Para validar o método proposto, os autores fizeram diversas comparações com outros estudos.

Ceccon (2008) apresentou um trabalho sobre controle passivo de vibrações torcionais usando neutralizadores dinâmicos aplicando material viscoelástico. O elastômero usado foi a borracha butílica. A modelagem da resposta dinâmica do material viscoelástico foi formulada com derivadas fracionárias. Devido às dificuldades para medição da vibração de torção em rotação, o experimento restringiu-se a oscilar o eixo com o auxílio de um servo motor e a resposta foi adquirida empregando-se acelerômetros lineares sem a rotação do rotor.

Recentemente muitos problemas em viscoelasticidade, eletroquímica, processos de difusão, entre outros, foram formulados por derivadas e integrais de ordem generalizadas. Em razão do aumento da utilização dessa ferramenta K.Diethelm, Ford, Freed, e L. (2005) apresentam uma seleção de métodos numéricos baseados em derivadas e integrais de ordem fracionária. Os principais métodos abordados foram o de Riemann-Liouville e Caputo, nos quais destaca-se a utilização da função de Mittag-Leffler como solução proposta.

A modelagem de materiais viscoelásticos por elementos finitos foi implementada por McTavish, Hughes, Soucy, e Graham (1992), a qual recebeu o nome de Golla-Hughes-McTavish (GHM), em homenagem a seus pesquisadores. O estudo proposto foi o de

modelar o material viscoelástico de forma linear, unidimensional e com uma equação constitutiva para predição da relação entre a tensão e a deformação.

Em Bagley e Torvik (1983) e Bagley e Torvik (1986) dispõe sobre a relação entre modelo fracionário e o comportamento molecular dos materiais viscoelásticos; verificou-se que o modelo tem uma forte correlação com os dados experimentais, além disso, a pesquisa prova que tal modelo atende rigorosamente aos requisitos da termodinâmica, ou seja, o trabalho interno e a taxa de dissipação de energia não negativos.

Bavastri (1997), Cruz (2004), Silva Neto (2004) e Mainardi (2010) concluem que os modelos matemáticos de materiais viscoelásticos baseados em derivadas de ordem fracionária são muito eficientes na representação reológica desses materiais. O que é observado pela excelente aproximação dos dados do modelo com o resultados experimentais.

De acordo com Oldham e Spanier (1974), Ross (1977), Rogers (1983), Hilfer (2000) e Herrmann (2011), as derivadas de ordem fracionária, arbitrária, ou ainda generalizada, não são triviais e não oferecem simples interpretação física, como o fazem aquelas de ordem inteira, em que o operador linear tem a forma d^n/dx^n , onde n é um número inteiro. Sob o prisma do cálculo fracional, n pode assumir um valor real qualquer. Por essa razão o termo derivadas de ordem generalizada.

Segundo Li e Deng (2007), em 30 de setembro de 1695, Leibniz escreveu uma carta a L'Hôpital e discutiu o significado das derivadas de ordem inteira (d^n/dx^n). L'Hôpital conjecturou: "O que seria se a ordem fosse $n=1/2$?". Então, Leibniz o respondeu: "Isto resultaria em um paradoxo, do qual um dia consequências úteis serão extraídas". Ainda de acordo com Li e Deng (2007), apenas nas últimas décadas as equações diferenciais de ordem generalizadas forneceram um contexto natural para discussão de vários tipos de questões modeladas através do cálculo fracionário, como sistemas viscoelásticos, por exemplo. Talvez por isso o conhecimento sobre o cálculo fracional não tenha sido tão divulgado e utilizado nos meios acadêmicos. Há três tipos de abordagem mais usuais do cálculo fracionário: a formulação dada por Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville e a de Caputo. Cada uma delas tem suas particularidades e propõe solucionar algum entrave ocorrido no cálculo fracionário.

Jones (1990) e Christensen (2003) discutem o princípio de superposição frequência-temperatura, onde faz uma análise do conceito de frequência reduzida com base no princípio da superposição. Utiliza a equação de Arrhenius e mostra que o quociente entre a temperatura de ativação e a temperatura de referência, conforme definida pela norma ASTM E 75-98, é igual ao logaritmo de base dez da frequência de referência e que a temperatura reduzida está relacionada com a frequência reduzida por meio da temperatura de ativação.

McTavish, Hughes, Soucy, e Graham (1992) e Golla e Hughes (1985), apresentam um modelo para representação do módulo complexo dos materiais viscoelásticos, comercialmente conhecido como GHM. Este modelo a priori não havia sido criado para

representar o comportamento de materiais viscoelásticos, porém ele tem sido amplamente empregado para esse fim para representar o comportamento desses materiais no domínio da frequência. O conceito por trás do modelo GHM está baseado na idealização do material viscoelástico através de miniosciladores. Muitos autores têm lançado mão desse método para representar o módulo complexo e o fator de perda desses elastômeros.

Lesieutre e Bianchini (1995) desenvolveram um outro modelo para representar o módulo complexo e o fator de perda dos materiais viscoelásticos, conhecido como *Anelastic Displacement Fields (ADF)*. Esse modelo é desenvolvido no domínio do tempo para materiais que possuem um comportamento que está dentro da viscoelasticidade linear. O princípio fundamenta-se na representação do deslocamento total de campo de um material viscoelástico em duas partes; a primeira parte elástica e a segunda inelástica. Essa parte inelástica (*anelastic*) descreve a deformação não instantânea e proporcional à tensão. Segundo os autores, a grande vantagem do método sobre outros modelos, por exemplo o GHM e ADF, é a modelagem matemática ser desenvolvida no domínio do tempo.

A viscoelasticidade linear pode ser definida em termos de modelos mecânicos com molas e amortecedores lineares, os quais geram modelos constitutivos que são equações diferenciais ordinárias (Roilance, 2001). Uma das propriedades desses materiais, especialmente aqueles definidos como termoreologicamente simples, é que tem influência da variação da temperatura. Aumentando ou reduzindo a temperatura de trabalho corresponde apenas a uma mudança na posição no gráfico *Creep* versus tempo, sem alterar a forma de resposta do material.

A formulação dos modelos baseados em derivadas fracionárias se apresenta como uma poderosa ferramenta para descrever o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos reais (PRITZ, 2003). Um modelo de cinco parâmetros foi estudado para descrever o comportamento assimétrico do fator de perda e o comportamento desse material em altas frequências. Segundo Pritz (2003), o modelo de quatro parâmetros mostra-se como um modelo apropriado para prever o comportamento dinâmico de materiais poliméricos sobre uma larga faixa de frequência com uma base teórica robusta e sólida. No entanto, ele não descreve o comportamento da assimetria do pico do fator de perda e o comportamento em altas frequências.

Friswell, Dutt, Adhikari, e Lees (2010) fizeram uma análise no domínio do tempo de um rotor viscoelástico usando modelos de variáveis internas. A análise de estruturas contendo materiais viscoelásticos no domínio do tempo pode ser conduzida com os métodos ADF, *Augmenting Thermodynamic Fields (ATF)*, ou GHM. O autor optou por usar o método ATF e a abordagem da pesquisa utilizou uma formulação aproximada das variáveis internas, ao invés de fazê-la de forma convencional. Verificou-se que a introdução de amortecimento no rotor produziu uma matriz de rigidez antissimétrica. Apesar dos materiais viscoelástico serem dependentes da temperatura e da frequência,

em certas situações faz-se necessário uma análise no domínio do tempo, como é o caso quando há trincas no eixo que fazem com que a rigidez seja uma função do tempo.

Pacheco (2013) and Pacheco, Bavastri, e Pereira (2014) estudou uma forma de caracterização dos materiais viscoelásticos aplicando à série de prony, cujas constantes foram deduzidas através do emprego de técnicas como algoritmos genéticos e programação não linear, os quais foram implementados na análise por elementos finitos. Nesse trabalho, o autor também levou em conta a influência da pressão e da temperatura sobre o comportamento do material. Segundo Pacheco (2013), os resultados apresentaram-se potencialmente interessantes para caracterização dos materiais viscoelásticos.

Oyadiji e Tomlinson (1995) fizeram a caracterização de um material viscoelástico utilizando o método da rigidez direta. Esse método destina-se a determinar as propriedades do módulo complexo do material. Uma amostra é fixado sobre um suporte de rigidez muito superior a do elastômero. Em seguida, os autores submeteram a viga composta à excitação aleatória e o sinal da força resultante foi adquirido, em uma temperatura determinada. A rigidez é, então, obtida a partir das características de amplitude e fase desse sinal. O resultado experimental apresentou um erro inferior a 5%. Porém, apesar dos fatores de correções terem sido aplicadas, os erros sistemáticos persistiram no sinal.

Em (Silva Neto, 2004), é proposto um método utilizando a função transferência, aplicando a formulação fracionária, para identificação dos parâmetros dos materiais viscoelásticos, que segundo o autor, simplifica os ensaios e elimina algumas das dificuldades encontradas em outros métodos, como por exemplo da viga vibrantes, o qual apresenta imprecisões devidas a algumas simplificações usadas no modelo. Um método empregando matriz de transferência em rotores, Tsai e Huang derivaram a matriz transferência para avaliar o comportamento de *offset* dos eixos de rotores. Verificaram que as velocidades críticas dos rotores não são alteradas devidas ao desalinhamento.

O primeiro trabalho a utilizar técnicas de otimização não linear para encontrar as características ótimas de neutralizadores, é atribuído a Kitis, Wang, e Pilkey (1983), cujos resultados foram obtidos a partir da análise experimental em uma viga engastada, onde essa técnica foi empregada para o projeto de dois neutralizadores com o objetivo de reduzir a resposta do sistema. A formulação desenvolvida na modelagem permitiu o tratamento do sistema no espaço físico, no entanto, com a formulação do problema de otimização de forma reduzida, obteve-se uma diminuição significativa do tempo de processamento para procura dos parâmetros ótimos do neutralizador. Porém, deve-se ter cautela na aplicação dessa técnica, proposta por esse autor, pois, o sistema composto terá $n + p$ equações. Assim, se o modelo do sistema primário for obtido via elementos finitos, pode-se gerar um elevado número n de graus de liberdade e, conseqüentemente, uma grande quantidade de equações governantes. Associado à quantidade de p neutralizadores, necessários para controlar a resposta do sistema composto resultante, essa técnica pode tornar esse processo, de determinar os parâmetros ótimos, uma tarefa bastante

morosa em termos de processamento.

Noori e Farshianfar (2013), apresentam uma solução ao problema de otimização H_∞ e H_2 para variantes de absorvedores, aplicados em vigas estruturais. O problema para H_∞ é resolvido pelo método dos pontos fixos para minimizar as amplitudes de vibração, assim como H_2 , para minimizar a energia total de vibração de um viga sob forçamento randômico. Um absorvedor dinâmico é proposto e os resultados são comparados. Além disso, a otimização por H_2 apresentou menor redução do que o outro método. Define-se como H_∞ com o processo de otimização desenvolvido por Ormondroyd e Den Hartog, baseada na teoria dos pontos fixos; enquanto que H_2 , usa os critérios de otimização propostos por Crandall e Mark, onde ajustam-se os parâmetros do absorvedor para reduzir a área sob a curva de resposta em frequência.

Michalski (2004) fez uma análise experimental em uma bancada de rotodinâmica utilizando mancais hidrodinâmicos. Essa mesma bancada, apesar das dimensões do eixo e discos serem diferentes, servirá como base para a presente pesquisa. O autor apresenta um histórico sobre o projeto e construção dessa bancada, além de estabelecer a evolução da pesquisa de rotodinâmica no LAVI/COPPE. Em seu estudo, Michalski (2004) concentrou-se na análise do comportamento dos parâmetros dos mancais utilizando técnicas lineares e não-lineares. As vibrações laterais para variação de três configurações de rotores foram observadas. O autor desenvolveu modelos para previsão do comportamento dinâmico do rotor, onde analisou o movimento de órbita dos discos, condição de transientes e dos efeitos oleodinâmicos. Os resultados obtidos por Michalski (2004) servirão como uma referência de partida para o modelo proposto no presente estudo. Na análise de rotodinâmica percebeu-se uma pequena, e praticamente desprezável, influência das não linearidades. Ainda de acordo com Michalski (2004), isso se deve aos pequenos deslocamentos verificados na dinâmica de rotores, por isso, têm sido tratados de forma linear.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

3.1 Introdução

Esse capítulo está dividido em quatro partes: rotodinâmica, materiais viscoelásticos, cálculo fracionário e neutralizadores dinâmicos de vibrações.

Esse estudo concentra-se, basicamente, no controle dos efeitos do fenômeno das vibrações torcionais sobre o sistema rotodinâmico, no entanto, uma análise sobre vibrações laterais é necessária. Haja vista, os efeitos desse modo de vibrar podem estar presentes durante a operação do rotor. Portanto, faz-se necessário conhecê-los e, desse modo, distingui-los do modo torcional. Por essa razão uma revisão sobre vibração lateral é apresentada em anexo.

Apresenta-se ainda nessa seção o tema viscoelasticidade, onde são introduzidos os conceitos sobre materiais viscoelásticos, a respectiva definição, a forma de modelagem, as restrições termodinâmicas, além das principais características que os tornam especialmente importante para o controle de vibrações.

Nesse contexto, tendo em vista a modelagem adotada para descrever o comportamento desses materiais poliméricos, uma seção é dedicada à introdução do cálculo fracionário, onde os conceitos essenciais e suficientes para a modelagem da resposta dinâmica dos materiais viscoelásticos são apresentados.

Por fim, encerra-se esse capítulo, fundamentação teórica, com o tema neutralizadores dinâmicos de vibrações. O assunto engloba as estratégias do controle passivo, construção dos neutralizadores dinâmicos, o conceito do método de otimização por meio dos pontos fixos e encerra-se com a abordagem do conceito de otimização. A partir do qual, pretende-se obter os parâmetros construtivos dos neutralizadores.

3.2 Rotodinâmica

Rotodinâmica é a definição dada à área do conhecimento que estuda a dinâmica dos rotores. Esses elementos de máquinas são construídos, com maior frequência, a partir de barras de seção circular, inteiriças ou vazadas, com diâmetros contínuos ou escalonados ao longo do seu comprimento. As designações árvore ou eixo serão empregadas ao longo desse texto para referirem-se a esse elemento estrutural.

A função principal do rotor é a de transmitir potência e movimento, portanto, esse elemento constitui a parte central das máquinas rotativas.

Essa área de estudo diferencia-se da análise de vibração estrutural devido a presença do efeito giroscópicos, das forças acopladas e da ocorrência de precessão (*whirling*). Características que estão relacionadas ao tipo de movimento realizado pelo rotor (VANCE *et al.*, 2010).

O desbalanceamento é uma das fontes primárias de vibração em rotores. A presença dessa força centrípeta é decorrente das massas desbalanceadas residuais do próprio rotor, oriundas dos defeitos de fabricação e introduzidas pelos acessórios - como, por exemplo, engrenagens, polias e pás (SALDARRIAGA, 2007).

Outra fonte de vibração está associada a forma de trabalho do rotor, que depende do processo de fabricação envolvido ou da forma de operação.

Essas forças que atuam sobre o rotor podem, eventualmente, excitar uma de suas frequências naturais, fazendo com que a amplitude de vibração se eleve rapidamente. Essa frequência de rotação específica, relacionada às forças de desbalanceamento, denomina-se velocidade crítica.

Quando a velocidade crítica de uma árvore é alcançada tem-se a condição definida como ressonância (ADAMS JR., 2010). Ou seja, é o estado em que a frequência de excitação iguala-se a uma das frequências naturais do rotor.

O rotor pode vibrar de duas formas básicas, são elas a lateral e a torcional. Esses dois modos de vibrar, em baixas frequências, são praticamente independentes (PEREIRA, 2003).

Define-se como vibração lateral a oscilação que ocorre no plano transversal ao eixo do rotor. Induzem esse tipo de movimento as forças como aquelas devidas as massas desbalanceadas (MUSZYNSKA, 2005). Nessa análise é comum levar-se em conta alguma força axial.

No segundo caso, as vibrações torcionais, as oscilações ocorrem em torno da linha de centro do eixo, em um movimento que se sobrepõe à rotação do rotor.

São fontes desse tipo de vibração as trepidações oriundas a variação do torque, o engajamento de engrenagens, os processos envolvidos (trituração ou perfuração, por exemplo) e as condições de partida ou curto circuito do motor (LALANNE e FERRARIS, 1997).

Conhecer esses dois modos de vibração do rotor torna-se necessário para distingui-los

um do outro. Principalmente quando do trato da análise de sinais e do projeto de um controle de vibrações eficiente.

3.2.1 Vibração Torcional

As Vibrações Torcionais (*VT*) são decorrentes de uma oscilação angular entre planos adjacentes perpendiculares ao eixo do rotor. Há uma sobreposição do movimento de vibração sobre a rotação do eixo.

A *VT* tem sua ocorrência predominante em eixos de transmissão de potência e brocas de perfuração. Onde, devida à trepidação, podem surgir tensões internas no material e causar elevada ciclagem, e conseqüentemente, resultar na falha por fadiga do eixo.

Em raras situações haverá alguma relação entre a vibração torcional e a vibração lateral. Conseqüentemente, estes dois fenômenos vibratórios, apesar de poderem coexistir, praticamente não interagem entre si significativamente (ADAMS JR., 2010).

A equação governante para um sistema eixo-disco com um grau de liberdade sob torção é dada por

$$I_o\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta = M_t(t), \quad (1)$$

onde I_o é o momento de inércia de massa, c_t a constante de amortecimento viscoso torcional, k_t a constante de rigidez torcional e $M_t(t)$ o momento ou torque aplicado ao eixo.

A rigidez desse eixo pode ser calculada através de

$$k_t = \frac{GJ}{L}, \quad (2)$$

na qual G é o módulo de cisalhamento do material do eixo em consideração, esse valor é de aproximadamente 76 GPa, L é o comprimento do eixo no trecho sob a ação do esforço de torção (torque), e J é o momento polar de área, dado por $J = \pi D^4/32$.

A energia cinética para um cilindro sob torção (Figura 1a) é obtida por

$$T = \frac{I_o\dot{\theta}^2}{2}, \quad (3)$$

em que $\dot{\theta}$ é a velocidade angular e o momento de massa de inércia que é calculado para um elemento (disco ou eixo) de raio R (ou diâmetro do disco D) como

$$I_o = \frac{\rho\pi R^4}{2} = \frac{\rho\pi D^4}{32} = \rho J. \quad (4)$$

Logo, a energia cinética por comprimento desse elemento (figura 1) será da forma I_oL . Esse elemento pode ser discretizado e a sua massa dividida e concentrada nas suas extremidades, ou seja, nos nós.

Portanto, a energia cinética para o elemento diferencial sob torção é determinada por

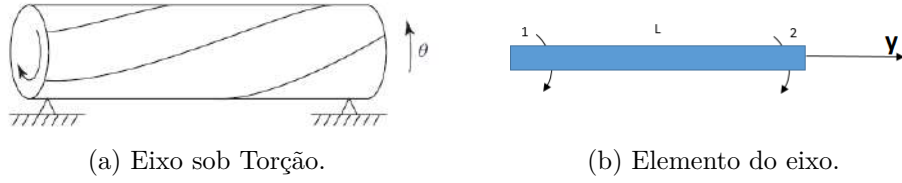


Figura 1: Eixo.

$$T = \frac{\rho\pi R^4 L}{8}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) = \frac{1}{2} \frac{\rho\pi R^4 L}{4}(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2). \quad (5)$$

O parâmetro $\dot{\theta}_i$ é a velocidade angular em um nó específico e $i = 1, 2, \dots$ é o índice que indica a qual nó refere-se tal velocidade.

De 5 o fator correspondente a matriz massa é

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{\rho\pi R^4 L}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Para interpolar os ângulos de torção, das extremidades dos elementos, usa-se a seguinte relação linear

$$\theta = \left[1 - \frac{y}{L}, \frac{y}{L} \right] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

(LALANNE e FERRARIS, 1997; PEREIRA, 2003). Onde y é a coordenada de posição, que se estende ao longo do eixo Y .

Sendo

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L I_\theta \dot{\theta}^2 dy \quad (8)$$

a energia cinética, e substituindo $\dot{\theta}$ por 7, isso resulta em

$$T = \frac{I_\theta L}{12} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

que tem como matriz massa elementar ($\bar{\mathbf{M}}$) igual a

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{I_\theta L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

De forma análoga, a energia de deformação é calculada como

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 dy, \quad (11)$$

onde J é o momento polar de inércia e G é o módulo de cisalhamento. Considerando na

controle de vibrações e ruídos. Onde os mesmos são empregados na construção de isoladores e neutralizadores dinâmicos.

Esses polímeros, de acordo com Espindola, Pereira, Bavastri, e Lopes (2004) e Datta e Ray (2015), podem ainda ser aplicados diretamente nos painéis sanduíches e nas ligações estruturais, cujos resultados, no controle passivo de vibrações, têm se destacado.

Além disso, os elastômeros apresentam grande facilidade de aplicação, podendo inclusive ser vulcanizados, fato esse que lhes atribui uma grande versatilidade (ESPINDOLA *et al.*, 2009; RIANDE *et al.*, 2000).

Nesta secção, discorre-se sobre algumas particularidades e a modelagem dos materiais viscoelásticos, aplicados no projeto de neutralizadores dinâmicos de vibrações.

É com base na teoria apresentada nas próximas linhas que os próximos passos serão dados no projeto de um neutralizador para eixos rotativos a fim de controlar os efeitos das vibrações torcionais.

Viscoelasticidade Linear

A viscoelasticidade linear é uma teoria que dá aporte para descrever-se a resposta dinâmica dos materiais viscoelásticos através de equações diferenciais lineares de ordem inteira ou fracionária.

Nos casos em que a deformação seja suficientemente pequena, e a equação constitutiva possa ser expressa como uma equação diferencial linear com coeficientes constantes, então o material é definido como viscoelástico linear (MAINARDI, 2010).

Observa-se que o ângulo de fase e a razão de amplitude dos sinais de tensão e deformação são propriedades do material, constituindo-se funções da frequência e da temperatura.

Os materiais viscoelásticos lineares, quando submetidos à tensão de cisalhamento harmônica, mostram uma deformação de cisalhamento que não está em fase com a tensão aplicada, como seria o caso para sólidos perfeitamente elásticos, e nem em quadratura, como nos fluídos perfeitamente viscosos (CRUZ, 2004; MOSCHEN, 2006).

As propriedades dinâmicas desses materiais poliméricos possuem - conforme Bagley e Torvik (1986), Silva Neto (2004) e Mainardi (2010) - forte dependência em relação à frequência de excitação, temperatura, magnitude da carga dinâmica e pré-carga estática.

A fim de obter melhores resultados na modelagem da resposta dinâmica desse material, torna-se necessário caracterizar o polímero usado.

O processo de caracterização é feito com base em algumas técnicas que serão detalhadas mais à frente, cujo resultado final é a obtenção do módulo de armazenamento e o respectivo fator de perda da amostra.

Modelo Viscoelástico

O modelo do comportamento dinâmico viscoelástico dos materiais é idealizado a partir de arranjos construídos com o uso de molas lineares e amortecedores viscosos.

As diferentes combinações desses elementos tem o propósito de representar o comportamento elástico e viscoso do material viscoelástico sob o efeito da tensão, deformação ou relaxação, e *creep* (fluência). Cada uma dessas possíveis combinações recebe a denominação de modelo mecânico do material viscoelástico (Figura 2).

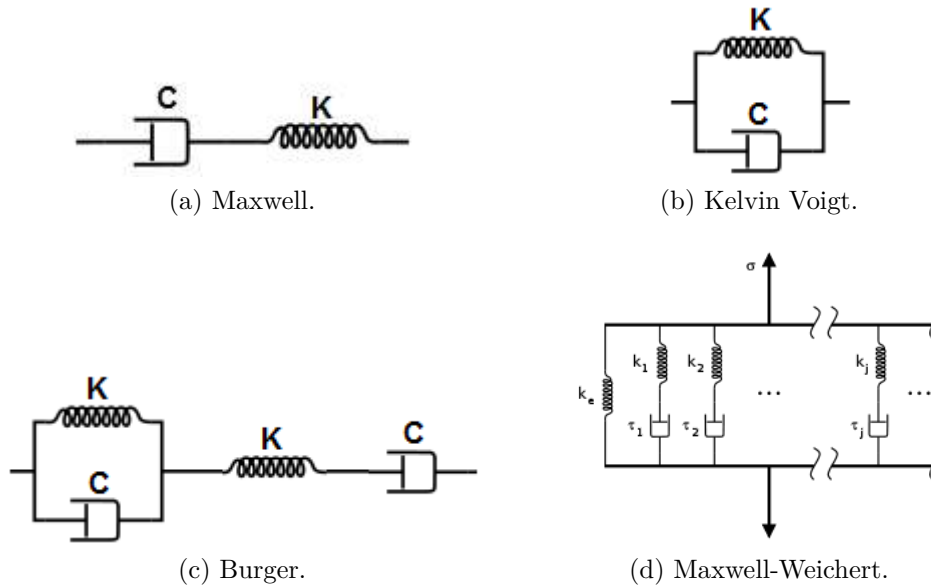


Figura 2: Modelos Mecânicos.

Muitos desses modelos tornaram-se notórios ao longo do tempo e, por essa razão, passaram a ser chamados de modelos mecânicos clássicos.

Entre os modelos mais conhecidos estão os modelos de Maxwell (Figura 2a), Linear Padrão ou Zener (Figura 3), Kelvin-Voigt (Figura 2b), Burgers (Figura 2c) e de Weichert (Figura 2d).

A relação tensão deformação pode ser expressa por $\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t)$, onde E_0 é o módulo de elasticidade e $\varepsilon(t)$ a deformação válida para um sólido elástico, pode ser formulada por meio de uma equação com operadores diferenciais como em

$$\begin{aligned} \sigma(t) + b_1 \frac{d}{dt} \sigma(t) + b_2 \frac{d^2}{dt^2} \sigma(t) + \dots + b_n \frac{d^n}{dt^n} \sigma(t) = \\ a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d}{dt} \varepsilon(t) + a_2 \frac{d^2}{dt^2} \varepsilon(t) + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m} \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (21)$$

em que a_0, a_1, \dots, a_n e b_0, b_1, \dots, b_m são constantes do material.

Uma alternativa à equação 21 é escrevê-la na sua forma reduzida, que é apresentada como

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} [\sigma(t)] = E_o \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n \frac{d^n}{dt^n} [\varepsilon(t)]. \quad (22)$$

Onde a tensão $\sigma(t)$ e a deformação $\varepsilon(t)$ são funções do tempo t ; os parâmetros E_o e E_n são constantes; e b_m está relacionado ao tempo de relaxação. $m = 1, n = 1, M$ e N são números inteiros e representam a ordem das derivadas.

Pode-se, então, substituir a ordem da derivada inteira pela ordem generalizada. A equação 21 pode ser, portanto, reescrita como

$$\begin{aligned} \sigma(t) + b_1 \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}} \sigma(t) + b_2 \frac{d^{\beta_2}}{dt^{\beta_2}} \sigma(t) + \dots + b_n \frac{d^{\beta_n}}{dt^{\beta_n}} \sigma(t) = \\ a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}} \varepsilon(t) + a_2 \frac{d^{\alpha_2}}{dt^{\alpha_2}} \varepsilon(t) + \dots + a_m \frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} \varepsilon(t), \end{aligned} \quad (23)$$

cuja equação reduzida é

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m D^{\beta_m} [\sigma(t)] = E_o \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N E_n D^{\alpha_n} [\varepsilon(t)]. \quad (24)$$

Nessa equação 24, D^{β_m} e D^{α_n} representam as derivadas de ordem β_m e α_n , não inteira.

A equação 22 foi formulada com base na análise do modelo mecânico linear padrão ou Zener (Figura 3). Nessa configuração em particular o amortecedor está em série com uma mola, conforme o modelo de Maxwell, e ambos estão em paralelo a uma segunda mola. Onde, $K_1 = K_2$, por exemplo, representam a rigidez de cada mola.

Pritz (2003) salienta que a expansão da ordem dessas derivadas de tensão e defor-

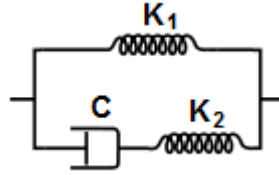


Figura 3: Modelo Linear Padrão ou Zener.

mação, de forma arbitrária, não implica em conformidade do modelo com os requisitos da mecânica. Para ter algum significado que satisfaça essas restrições é necessário, mas não suficiente, que $m = n$ ou $m = n + 1$. Os condicionantes para atender ao requisitos da termodinâmica serão desenvolvidos no capítulo sobre materiais viscoelásticos (Seção 3.3).

Algumas possíveis formulações para as derivadas fracionárias serão apresentadas na seção 3.4 que trata sobre o tema cálculo fracionário.

Aplicar-se-á a definição dada por Riemann e Liouville, que segue

$$D^\alpha [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau, \quad (25)$$

onde (Γ) é a função gama ou fatorial generalizado (CRUZ, 2004; ESPINDOLA, 1996; MAINARDI, 2010).

Torna-se conveniente aplicar a transformada de Fourier na equação 24, haja vista, o comportamento dos materiais viscoelásticos serem dependentes da frequência.

Além disso, as transformadas de Fourier (\mathfrak{F}) e de Laplace (\mathfrak{L}) comportam-se de maneira similar como ocorre no cálculo de ordem inteira.

Lançando-se mão dessas propriedades e aplicando-as na equação constitutiva (Equação 24), resulta em

$$\left[1 + \sum_{m=1}^M b_m (i\Omega)^{\beta_m} \right] \tilde{\sigma}(\Omega) = \left[E_o + \sum_{n=1}^N E_n (i\Omega)^{\alpha_n} \right] \tilde{\varepsilon}(\Omega). \quad (26)$$

Rearranjando os termos

$$E_c(\Omega) = \frac{\tilde{\sigma}(i\Omega)}{\tilde{\varepsilon}(i\Omega)} = \frac{[E_o + \sum_{n=1}^N E_n (i\Omega)^{\alpha_n}]}{[1 + \sum_{m=1}^M b_m (i\Omega)^{\beta_m}]}. \quad (27)$$

Essa equação pode ser escrita como

$$E_c(\Omega) = E(\Omega) + iE'(\Omega), \quad (28)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade complexo, que é uma função da frequência e da temperatura. Ele é composto por $E(\Omega)$, a parte real, definido como módulo de armazenamento e por $E'(\Omega)$, a parte imaginária, que é o módulo de perda. Essa equação pode assumir a forma

$$E_c(\Omega) = E(\Omega)(1 + i\eta). \quad (29)$$

Sendo $\eta(\Omega)$ o fator de perda, determinado pela relação $\eta = E'(\Omega)/E(\Omega)$. A unidade imaginária é definida por $i^2 = -1$. O módulo de perda $E'(\Omega)$, está associado à capacidade de dissipar energia de deformação do material em forma de calor.

Evidentemente, seria possível utilizar a equação 26 na forma de derivadas de ordem inteira, porém, a natureza de ambas são bem diferentes.

Bagley e Torvik (1986) salientam que essa equação, expressa em termos de derivadas de ordem generalizada, tem relação direta com a teoria molecular dos materiais viscoelásticos.

Uma particularidade encontrada na representação da equação constitutiva nesses termos é que a derivada no tempo t_0 depende de toda a história de $f(t)$, ou seja $t \in (-\infty, t_0]$, isto é, ela é causal. Essa é, portanto, a propriedade tão apreciada das derivadas de ordem fracionária, e que explica a sua adequação em representar o comportamento dos materiais viscoelásticos (ESPINDOLA *et al.*, 2009).

Ao passo que, a equação constitutiva em termos das derivadas de ordem inteira é uma

propriedade local, depende apenas de t_o e da vizinhança deste (ESPINDOLA *et al.*, 2009).

Observando a equação 26, e colocando em evidência os termos comuns e procedendo as devidas divisões, tem-se

$$E_c(\Omega) = \frac{E_o + (i\Omega)^\alpha E_1}{1 + (i\Omega)^\beta b_1}. \quad (30)$$

A equação 30 é conhecida como modelo de cinco parâmetros (PRITZ, 2003). Para adaptá-la aos materiais viscoelásticos é necessário fazer as considerações como $M = N = 1$ e $\alpha = \beta$, por razões que serão esclarecidas apropriadamente na subseção 3.3.1. Esses são, pois, os condicionantes impostos ao modelo para adequá-lo às restrições da termodinâmica (CRUZ, 2004; ESPINDOLA *et al.*, 2009).

Pode ser observado na equação 30, com potências de ordem fracionárias, que o módulo complexo é dependente da frequência. Esse modelo, portanto, descreve o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos em uma ampla faixa de frequência (BAGLEY e TORVIK, 1986; CRUZ, 2004; ESPINDOLA *et al.*, 2009; ESPÍNDOLA *et al.*, 2005).

Tem-se que para sólidos isotrópicos $E = 2(1+\nu)G$. Onde ν é a razão de Poisson e G é o módulo de cisalhamento, sabe-se que para um material incompressível o valor de $\nu = 0,5$, o que leva a relação $E = 3G$. Portanto, pode-se observar que haverá uma equação similar a equação 30 para o módulo de cisalhamento G , o que leva a

$$G_c(\Omega) = \frac{G_o + (i\Omega)^\alpha G_1}{1 + (i\Omega)^\beta b_1}. \quad (31)$$

Substituindo os termos $b = b_1^{1/\alpha}$, $G_\infty = G_1/b_1$ e aplicando as restrições mencionadas, tem-se

$$G_c(\Omega) = \frac{G_o + (ib\Omega)^\alpha G_\infty}{1 + (ib\Omega)^\alpha}. \quad (32)$$

Sob esse formato, trata-se do modelo de quatro parâmetros para materiais viscoelásticos. O parâmetro b tem dimensão de tempo e é conhecido como constante de tempo de relaxação, sendo o mais sensível à temperatura.

Os parâmetros G_o e G_∞ são as assintotas, inferior e superior, respectivamente (CECCON, 2008; CRUZ, 2004; MOSCHEN, 2006).

Na figura 4, são mostrados o comportamento do módulo complexo e o fator de perda, ambos em função da frequência. Na parte superior dessa figura são indicadas as assintotas inferior G_0 e superior G_∞ ; η , por sua vez, ilustrado na parte de baixo da figura; b é a constante de relaxação; e α determina a inclinação da curva, como indicado, e refere-se à potência fracionária.

O modelo de quatro parâmetros, segundo Silva Neto (2004) e Mainardi (2010), é referido como modelo do cálculo fracionário da viscoelasticidade.

Conforme Bagley e Torvik (1983) e Bagley e Torvik (1986), a formulação via derivadas fracionárias e de quatro parâmetros ajusta-se satisfatoriamente aos dados experimentais

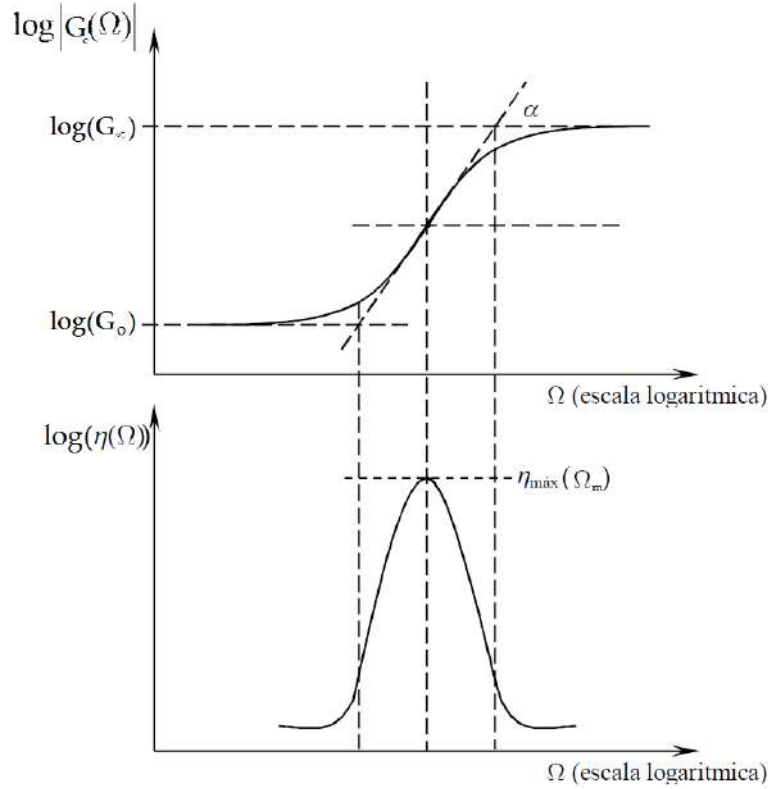


Figura 4: Curva de Propriedade de MV.
Fonte: Adaptada de Silva Neto (2004).

em uma ampla faixa de frequência e para uma extensa lista de materiais poliméricos.

Porém, Pritz (2003) observou que esse modelo é válido apenas quando a curva em frequência do fator de perda for simétrica em torno do seu valor máximo ($\eta_{m\acute{a}x}$), caso contrário, deve-se usar o modelo de cinco parâmetros. Essa assimetria tem ocorrência normalmente em altas frequências.

Esses parâmetros estão associados principalmente com a faixa de transição do material e o respectivo significado gráfico é ilustrado na figura 4.

A equação 32 pode ser apresentada de outra forma, levando-se em conta a relação $i^\alpha = e^{i\alpha\pi/2} = \cos(\alpha\pi/2) + i \sen(\alpha\pi/2)$, o que resulta em

$$G_c(\Omega) = \frac{G_o + G_\infty(b\Omega)^\alpha [\cos(\alpha\pi/2) + i \sen(\alpha\pi/2)]}{1 + (b\Omega)^\alpha [\cos(\alpha\pi/2) + i \sen(\alpha\pi/2)]}. \quad (33)$$

Assim, o módulo dinâmico pode ser calculado como

$$G(\Omega) = \frac{G_o + G_\infty(b\Omega)^\alpha [\cos(\alpha\pi/2) + G_\infty(b\Omega)^{2\alpha}]}{1 + 2(b\Omega)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + (b\Omega)^{2\alpha}} \quad (34)$$

e o respectivo fator de perda na forma

$$\eta(\Omega) = \frac{(G_\infty - G_o)(b\Omega)^\alpha \sen(\alpha\pi/2)}{G_o + (G_o + G_\infty)(b\Omega)^\alpha \cos(\alpha\pi/2) + G_\infty(b\Omega)^{2\alpha}}. \quad (35)$$

3.3.1 Restrições da termodinâmica

Nesse tópico são apresentados os condicionantes, segundo Bagley e Torvik (1986), sob os quais o modelo viscoelástico deve ser submetido para que atenda as restrições da termodinâmica, ou seja, o trabalho interno e a energia de dissipação não negativos. Assim, para essa demonstração, supondo uma relaxação uniaxial, a equação 24 torna-se

$$\sigma(t) + bD^\beta[\sigma(t)] = E_o\varepsilon(t) + E_1D^\alpha[\varepsilon(t)]. \quad (36)$$

O material viscoelástico considerado é termoreologicamente simples e dependente da temperatura, possibilitando uma distribuição uniforme no tempo e ao longo da geometria.

As fontes externas de calor e a dissipação interna permanecem inalteradas se o coeficiente de condutividade térmica for suficientemente grande e o elemento de geometria muito pequeno. Assim, seja $\varepsilon(t) = \text{sen}(\omega t)$ e

$$\sigma(t) = A \text{sen}(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (37)$$

a taxa de trabalho interno é dada como

$$\sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) = A\omega \cos(\omega t) \text{sen}(\omega t) + B\omega \cos(2\omega t) \quad (38)$$

No caso da temperatura do corpo ser constante, essa expressão é equivalente, termo a termo, a definição da termodinâmica $\dot{p} = \dot{\psi} + \dot{\delta}$. Em que \dot{p} representa a taxa de trabalho mecânico interno, $\dot{\psi}$ é a taxa de mudança na energia livre, e $\dot{\delta}$ a taxa de dissipação de energia. Usa-se essa relação para impor no modelo as condições necessárias para atender as restrições da termodinâmica. Assim, fazendo o coeficiente $B \geq 0$, garante-se que a parcela da energia de dissipação, na equação 38 será não negativa. Observa-se, porém, que a parte imaginária da equação 32 deve ser não negativa para frequência positivas.

$$\text{Imag}[G_c(\omega)] \geq 0 \quad 0 < \omega < \infty \quad (39)$$

Uma análise similar pode ser feita para o trabalho interno, assim, integrando $\dot{p} = \dot{\psi} + \dot{\delta}$ e equação 38 no tempo; e fazendo $A \geq 0$, tem-se o trabalho não negativo. Nota-se que parte real de 32 será não negativa para todas as frequências, isto é

$$\text{Re}[G_c(\omega)] \geq 0 \quad 0 < \omega < \infty \quad (40)$$

Se as condições de restrição em 39 e 40 forem atendidas, o modelo preverá um trabalho interno e uma taxa de dissipação não negativos.

Por fim, para encontrar os condicionantes dos parâmetros na equação 32 que satisfaçam as restrições da termodinâmica, é preciso separar a parte real e imaginária do módulo

complexo G_c . Isso é feito multiplicando-se o numerador e o denominador da equação 32, pelo conjugado complexo do próprio denominador, e impor que a parte real e a imaginária sejam maior ou igual a zero.

Sendo o numerador, 0 sempre positivo, para garantir as restrições, é preciso impor que os numeradores seja positivos. Avaliando-se os casos extremos, isto é, quando a frequência do movimento torna-se muito pequena e depois muito grande, disto resulta que

$$G_0 \geq 0 \quad (41)$$

e

$$G_1 b \omega^{\alpha-\beta} \cos\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - \beta)\right) \geq 0. \quad (42)$$

Em baixas frequências, a parte imaginária é

$$G_1 \omega^\alpha \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) - G_0 b \omega^\beta \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right) \geq 0, \quad (43)$$

e para altas frequências

$$G_1 b \omega^{\alpha+\beta} \sin\left(\frac{\pi}{2}(\alpha - \beta)\right) \geq 0. \quad (44)$$

Por definição, e como poderá ser concluído no final desta seção, $1 \leq \alpha$ e $\beta \leq 1$, a inequação 42 é satisfeita quando

$$G_1 b \geq 0 \quad (45)$$

Uma conclusão prévia, observando 42 e 44, é que $\alpha \geq \beta$, mas de 43, tem-se que $\alpha \leq \beta$, portanto

$$\alpha = \beta \quad (46)$$

Conforme Bagley e Torvik (1986), análise de dados experimentais mostram que $\alpha \cong \beta$. Levando esse resultado em 43, tem-se que

$$G_1 > G_0 b. \quad (47)$$

A análise da parte real, incluindo os resultado das inequações 41, 46 e 47 resulta em

$$\frac{1}{b} + \frac{G_0}{G_1} \geq 0. \quad (48)$$

Um resumo das condições que devem ser adotadas, para que esse modelo seja compatível com as restrições da termodinâmica, é apresentado na tabela 1.

3.3.2 Caracterização de Materiais Viscoelásticos

A escolha por utilizar um material viscoelástico, para construção de um neutralizador dinâmico de vibração, implica na necessidade de identificar as propriedades desse

Tabela 1: Restrições da Termodinâmica.

n	restrição	n	restrição	n	restrição
1.	$G_0 \geq 0$	3.	$b > 0$	5.	$\alpha = \beta$
2.	$G_1 > 0$	4.	$G_1/b \geq G_0$		

Fonte: Adaptada de Bagley e Torvik (1986).

polímero. Isto é essencial para que o modelo possa reproduzir de forma mais próxima possível o comportamento dinâmico do sistema físico.

O processo de identificação dessas propriedades é conhecido como caracterização do material viscoelástico. Quando, sob condições controladas (temperatura, força e frequência), são obtidos os parâmetros como fator de perda e o módulo de armazenamento.

Segundo a variação da frequência ou temperatura, esses materiais poliméricos apresentam três regiões distintas. Como pode ser observada na figura 5, variando-se a frequência, a região I, é onde o material apresenta alta resiliência e baixo fator de perda. Tanto o módulo quanto a própria resiliência são constantes. Na região, II, o módulo se eleva rapidamente, concomitantemente o fator de perda também se eleva com a frequência até atingir um valor máximo, o qual define o ponto de transição do material. A partir desse ponto, conforme a frequência é incrementada, o fator de perda começa a reduzir (CRUZ, 2004; SILVA NETO, 2004).

Toda essa faixa de frequência, que ocorre esse aumento do fator de perda, é de grande interesse para o projeto de neutralizadores, em especial, na frequência onde esse fator é máximo.

A última região, o módulo é muito alto e por isso a região III, altas frequência, o material apresenta um comportamento vítreo e o fator de perda é irrelevante. Portanto, não há interesse em aplicar o material viscoelástico nessa região.

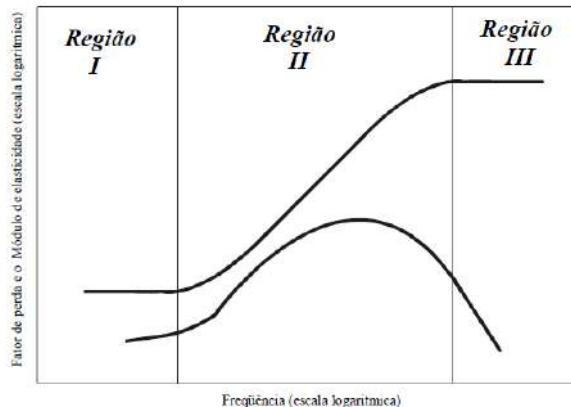


Figura 5: Variação das propriedades com a frequência.

Fonte: (SILVA NETO, 2004).

Na próxima figura, mostra-se o comportamento do material viscoelástico com a variação da temperatura (Figura 6). Nota-se o comportamento similar do fator de perda,

a variação na frequência como na temperatura.

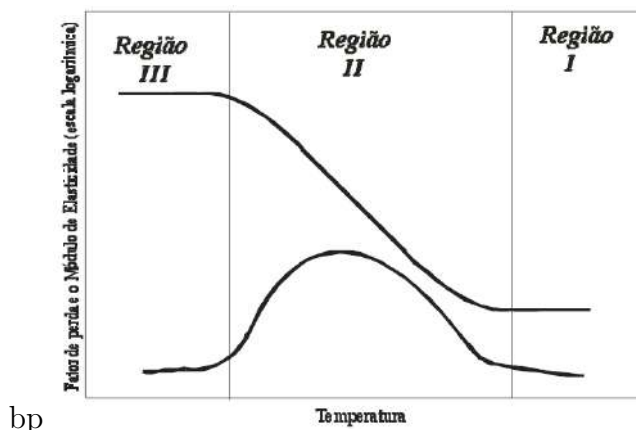


Figura 6: Variação das propriedades com a temperatura.
Fonte: (SILVA NETO, 2004).

No caso do módulo de armazenamento o ocorre uma diminuição do valores do módulo de armazenamento com a temperatura.

Há dois métodos preferenciais para se fazer essa caracterização, um deles é via método da viga vibrante e o outro é através da transmissibilidade.

O método ressonante (viga vibrante) tem como principal característica ser insensível aos erros de ganho e fase nos sistemas de transdução, porém, a desvantagem é que a medição das propriedades viscoelásticas é feita de forma indireta SILVA NETO (2004). Isto é, o fator de perda e o módulo dinâmico são obtidos das propriedades modais, a partir de expressões analíticas fechadas que contém algumas simplificações, as quais podem levar a resultados divergentes do comportamento real do material.

No caso do método não ressonante, no entanto, uma força é transmitida para o elemento de inércia através da amostra de material viscoelástico, enquanto a deformação é medida com um transdutor. Os parâmetros como o amortecimento são obtidos diretamente pelo ângulo de fase entre as forças, o deslocamento e a flexibilidade ou por meio da relação entre a força e o deslocamento.

Em Cruz (2004), um novo método de se obter esses parâmetros foi proposto e fundamenta-se na função transferência e no modelo fracionário.

Esse procedimento é feito dentro de um forno de temperatura controlada. Segundo Espíndola, Cruz, Lopes, e Bavastri (2005), essa metodologia apresenta maior simplicidade, pois emprega a função transmissibilidade de um sistema com um grau de liberdade e reduz a necessidade de maiores simplificações.

3.3.3 Princípio da superposição tempo temperatura

O princípio da superposição tempo-temperatura é um conceito da física de polímeros. Este princípio é usado para determinar as propriedades dos materiais viscoelásticos lineares a partir da observação do comportamento dinâmico destes, em uma temperatura de referência.

Sabe-se que o módulo elástico de um polímero amorfo, aumenta com a taxa de carregamento, porém, este decresce com o aumento da temperatura.

Entretanto, as curvas do módulo instantâneo, como uma função do tempo, não alteram a sua forma, assim como ocorre na temperatura. Logo, percebe-se que há apenas um deslocamento para a esquerda ou para a direita da curva referência.

Assim, conhecendo-se essa curva de referência, frequentemente chamada de curva mestre (*master curve*), em uma dada temperatura, pode-se usá-la para determinar outras curvas em várias temperaturas. Sendo suficiente para isso, aplicar o fator de deslocamento.

Termoreologicamente simples é o termo atribuído aos materiais que, após algumas derivações termodinâmicas, permitam conhecer as propriedades a partir de uma temperatura de referência. Verifica-se graficamente que as curvas, módulo de elasticidade versus frequência e módulo de elasticidade versus temperatura, são deslocadas horizontalmente por um valor fixo (SILVA NETO, 2004). Para implementar o princípio da superposição tempo-temperatura são necessários executar os seguintes passos:

- determinar as curvas em função da frequência das propriedades mecânicas isotérmicas de materiais viscoelásticos em várias temperaturas e para uma faixa pequena de frequência;
- computar os fatores de deslocamento para correlacioná-los com as propriedades mecânicas, para a faixa de frequência e temperatura;
- e determinação da curva mestra para uma ampla faixa de frequências.

O fator de deslocamento é determinado a partir de dados experimentais, empregando-se um método conhecido como WLF, devido a seus autores Malcolm L. Williams, Robert F. Landel e Jhon D. Ferry.

A equação relativa ao fator de deslocamento ($\alpha_T(T_w)$) tem a forma

$$\log(\alpha_T(T_w)) = \frac{-\theta_1(T_w - T_0)}{\theta_2 + T_w - T_0}, \quad (49)$$

onde os parâmetros T_0 é a temperatura de referência (normalmente tomada com o valor de 273,15K), θ_1 e θ_2 são constantes que dependem do material viscoelástico, obtidos a partir de dados experimentais. Essa equação WLF é recomendada pela norma ASTM E 756-98 para ajustes dos dados experimentais da função deslocamento (SILVA NETO, 2004).

Outra forma para determinação desse fator de deslocamento é através do método de Arrhenius (LI, 2000), na forma

$$\log(\alpha_T) = \frac{E_a}{2,303R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (50)$$

onde E_a é a energia de ativação, R nessa equação refere-se a constante universal dos gases, T_0 é a temperatura de referência e T_w é a temperatura de trabalho em Kelvin [K] (BRINSON e CATHERINE, 2008; GURP e PALMEN, 1998).

3.4 Cálculo fracionário

O cálculo fracionário e o cálculo clássico surgiram praticamente à mesma época. Tem-se, inclusive, o registro histórico desse acontecimento que data de 30 de setembro de 1695.

Em carta a Leibniz, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), L'Hopital, Guillaume François Antoine (1661-1704), fez um questionamento sobre a ordem da notação de diferencial: "e se n em $d^n y/dx^n$? for substituído por $n = 1/2$ ". Leibniz teria respondido da seguinte forma: "Este é um aparente paradoxo do qual, um dia, serão tiradas consequências úteis"(ROSS, 1977).

A partir desse ponto da história, vários matemáticos e físicos se interessaram pelo cálculo fracionário, entre os ilustres cientistas estão Leonard Euler, Pierre-Simon Laplace, Jean B. J. Fourier, Sylvestre F. Lacroix, Niels H. Abel, Joseph Liouville, Georg F. B Riemann entre outros. Na atualidade, alguns dos estudiosos que se destacam são Oldham, Christensen, Michele Caputo, Francesco Mainardi, Bagley e Samko.

No Brasil o cálculo fracionário tem se disseminado por vários institutos de matemática e se concentrado em alguns nichos de pesquisas sobre materiais viscoelásticos.

O uso do cálculo fracionário nesse trabalho tem como argumento principal a íntima relação entre essa ferramenta de modelagem e as propriedades físico-químicas dos materiais viscoelásticos.

De acordo com Bagley e Torvik (1986), Espindola, Pereira, Bavastri, e Lopes (2009) e Mainardi (2010), as equações de ordem não inteira ajustam-se com maior exatidão e simplicidade ao comportamento dinâmico desses materiais.

Segundo Moschen (2006) e Mainardi (2010), o cálculo de ordem arbitrária ou ordem fracionária é a generalização da diferenciação e da integração.

Nas últimas três décadas o cálculo fracionário tem despertado interesse e vem sendo aplicado com maior frequência. O cálculo fracionário tem encontrado espaço em várias áreas e está sendo usado para resolver problemas envolvendo química, física, produção e engenharia em geral.

Muitos fenômenos são bem explicados através do cálculo fracionário (CF), alguns

exemplos são as características no código de DNA, evolução do mercado financeiro, dinâmica de terremotos e o aumento da temperatura do planeta (CAMARGO e DE OLIVEIRA, 2015).

3.4.1 Integral Fracionária

Para o entendimento do cálculo fracionário, define-se inicialmente a integral e em seguida a derivada. Essa ordem de apresentação, ainda que inversa a do cálculo clássico, mostra-se como a melhor abordagem para estabelecer o entendimento dessa teoria. Além disso, torna evidente a real conexão entre a integral e a derivada de ordem arbitrária (CAMARGO e DE OLIVEIRA, 2015; MAINARDI, 2010).

São muitas as definições encontradas para as derivadas de ordem não inteira, cada uma delas está relacionada à solução de um determinado problema.

Definição 1. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Define-se a função Gel'fand Shilov (em homenagem aos autores Gel'fand e Shilov -1964) de ordem n e α como

$$\phi_n := \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \phi_\alpha := \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (51)$$

respectivamente. Sendo \mathbb{N} o conjunto dos número inteiros e positivos e \mathbb{R} o conjunto dos números reais.

Definição 2. Define-se a integral de ordem inteira ou integral iterada usando o operador I agindo sobre a função $f(t)$ como

$$\begin{aligned} If(t) &= \int_0^t f(t_1)dt_1 \\ I^2f(t) &= I[If(t)] = \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2)dt_2dt_1 \\ &\vdots \\ I^n f(t) &= \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n)dt_ndt_{n-1} \cdots dt_3dt_2dt_1 \end{aligned} \quad (52)$$

Teorema 1. Seja $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(t)$ uma função integrável, tem-se

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) := \int_0^t \phi_n(t - \tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau, \quad (53)$$

em que $*$ representa o produto de convolução de Laplace.

A prova desse teorema é obtida por indução no parâmetro n . Fazendo-se $n = 1$ resulta em

$$If(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau)d\tau = \phi_1 * f(t) \quad (54)$$

Mostra-se, para concluir, que se $I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t)$, então, $I^{n+1} f(t) = \phi_{n+1}(t) * f(t)$. Assim,

$$I^{n+1} = I[I^n f(t)] = I[\phi_n(t) * f(t)], \quad (55)$$

isto é,

$$I[\phi_n(t) * f(t)] = \int_0^t \phi_n(u) * f(u) du = \int_0^t \int_0^u \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau du. \quad (56)$$

Pode-se inverter a ordem da integral, conforme o teorema de Goursat, o que resulta em

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \left[\int_\tau^t \frac{(u-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) du \right] d\tau. \quad (57)$$

Integrando o termo entre colchetes, tem-se

$$I^{n+1} f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^n}{n!} f(\tau) d\tau = \phi_{n+1}(t) * f(t). \quad (58)$$

Logo, o resultado esperado. Com base nesse teorema, de acordo com Camargo e de Oliveira (2015), pode-se generalizar a ordem da integral. Define-se assim, a integral de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$.

Definição 3. Sendo $f(t)$ uma função integrável, define-se a integral de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$ de $f(t)$, como sendo

$$I^\alpha f(t) = \phi_\alpha * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\tau) d\tau. \quad (59)$$

Se α assumir um número natural, então, o resultado volta a ser o mesmo da integral de ordem inteira. Na equação 59, o termo Γ é a função gama que representa o fatorial generalizado.

Definição 4 (Integral de Riemann-Liouville). Seja $Re(\alpha) > 0$ e seja f uma função contínua e integrável por partes em $J' = (0, \infty)$ e integrável sobre qualquer sub-intervalo finito de $J = [0, \infty)$. Logo, para $t > 0$, a expressão

$${}_0D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad (60)$$

que é a conhecida integral de Riemann e Liouville.

É uma integral de convolução em que a função $f(t)$, como pode ser observada, é convoluída com a função resposta ao impulso. Sendo, portanto, $h_\alpha = t^{\alpha-1}/\alpha$ a referida resposta ao impulso.

Na figura 7, observa-se a função resposta ao impulso para alguns valores do parâmetro α .

No caso de $\alpha = 1$, tem-se o integrador convencional (de ordem inteira) e essa função resposta ao impulso converte-se em uma função degrau correspondendo assim, a um filtro

ideal (Figura 7).

Dessa forma, a função resposta tem uma perfeita memória e captura toda a história da função de entrada. Ao passo que, na medida que $\alpha \rightarrow 0$, se tem uma singularidade no núcleo da integral $(t - \xi)^{\alpha-1}$, para o tempo igual a zero, que é equilibrada pela função gama no denominador.

A integral fracionária torna-se, assim, um operador instantâneo e, portanto, a função resposta ao impulso aproxima-se de uma função delta de Dirac.

3.4.2 Derivadas Fracionárias

No estudo do calculo fracionário, verifica-se uma grande variedade de definições acerca do tema derivada fracionária. Porém, não há, de fato, uma interpretação física e, ou, geométrica clara do conceito das derivadas de ordem generalizada e são poucas as iniciativas aceitas com esse intento.

Ao contrário do que ocorre com as derivadas de ordem inteira, onde essa interpretação física e, ou, geométrica é mais evidente (CAMARGO e DE OLIVEIRA, 2015; CRUZ, 2004).

Definição 5. Seja f uma função da classe C e seja $\mu > 0$. Seja n o menor inteiro maior que μ . A derivada fracionária de f de ordem μ é definida como

$$D^\mu f(t) = D^n [D^{-\alpha} f(t)] \quad \mu > 0, \quad t > 0$$

$$D^\mu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad (61)$$

na qual $\alpha = n - \mu > 0$. Assume-se aqui, que $D^\mu = D^{n-\alpha} = D^n D^{-\alpha}$. Isso resulta, como

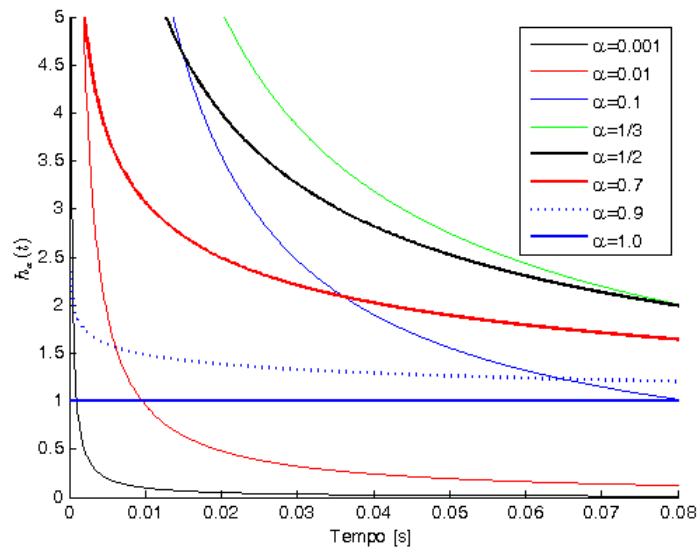


Figura 7: Resposta ao impulso.

pode ser visto em CRUZ (2004), de que D^μ é uma continuação analítica do operador fracionário $D^{-\mu}$. A equação 61 é a conhecida derivada no sentido de Riemman e Liouville.

Fazendo $\mu \in \mathbb{Z}$ e $\mu > 0$, então $D^\mu f(t)$ pode existir para $t > 0$, caso $f(t)$ tenha $D^\mu f(t)$ sobre J , então $f(t)$ pertence a classe C , isto é uma função contínua e diferenciável, cuja derivada também é contínua e derivável. Logo

$$\begin{aligned} \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) &= \frac{d^\mu}{dt^\mu} \frac{d}{dt} \int_0^t f(\xi) d\xi = D^{\mu+1} \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t (t-\xi)^{1-1} f(\xi) d\xi \\ &= D^{\mu+1} D^{-1} f(t) = D^\mu f(t), \end{aligned} \quad (62)$$

que retoma a clássica derivada de ordem inteira.

Um dos notáveis inconvenientes do cálculo fracionário é a não nulidade apresentada pelas derivadas de uma função constante, no sentido de Riemann-Liouville, segundo Samko, Kilbas, e Marichev (1993), o que resulta numa dissipação não nula para um sistema em equilíbrio, invalidando assim, a causalidade.

De acordo com Mainardi (2010), as derivadas segundo Caputo alteraram a definição para modelo de Riemann-Liouville e são definidas como D_*^μ , que têm a forma

$$\begin{aligned} D_*^\mu f(t) &= D^{-\alpha}, \mu > 0, t > 0 \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \frac{d^n}{dt^n} f(\xi) d\xi, n-1 < \mu < n, \end{aligned} \quad (63)$$

sendo $n \in \mathbb{Z}$ e $\alpha = n - \mu > 0$.

Nessa seção fez-se uma breve apresentação dessa poderosa ferramenta matemática, a qual vem para completar o cálculo convencional - o cálculo de ordem inteira. Maiores detalhes sobre as definições e rigor do cálculo fracionário, sugere-se a consulta das referências: Ross (1977), Mainardi (2010), Herrmann (2011), Rossikhin e Shitikova (1995) e Camargo e de Oliveira (2015).

3.5 Neutralizador Dinâmico de Vibrações

Os neutralizadores dinâmicos de vibrações são classificados como controle passivo. Esses dispositivos são construídos com base no modelo do oscilador harmônico e tem a função de neutralizar a amplitude de vibração do sistema primário.

Efetivamente, a instalação dos neutralizadores resulta na redistribuição das frequências naturais e, por essa razão, a denominação neutralizador dinâmico de vibração seria a mais apropriada (LOPES *et al.*, 2004).

No presente texto prevalecem as expressões neutralizador dinâmico de vibrações ou apenas neutralizador de vibrações. Eventualmente, o termo absorvedor dinâmico de vibrações, ou absorvedor de vibrações, foi utilizado. Uma vez que essa denominação é

amplamente empregada na literatura.

O projeto desse sistema auxiliar tem no processo de sintonização uma de suas etapas principais, o qual consiste na sintonia da frequência natural do neutralizador com a frequência natural, ou de excitação, do sistema primário. Por conseguinte, os parâmetros do sistema auxiliar são determinados, isto é, a massa, rigidez e o amortecimento.

Em síntese, ajustam-se esse parâmetros de tal forma que a frequência natural resultante seja igual à frequência da fonte de vibração que se deseja controlar.

Percebe-se na prática que somente alguns poucos modos são importantes na composição da resposta vibratória do sistema, dentro de certa faixa de interesse. Logo, a solução pode ser restrita a apenas alguns autovalores e autovetores (BAVASTRI, 1997; CECCON, 2008; CRUZ, 2004).

Além disso, faz-se necessário ajustar os parâmetros construtivos do neutralizador, o que implica em aplicar algum processo de otimização. O objetivo desse procedimento é atribuir ao neutralizador características específicas que proporcionem a melhor eficiência possível.

Um dos métodos de otimização frequentemente utilizados para construção de neutralizadores é o método dos pontos fixos. Esse método, como já destacado, é aplicado em sistemas não amortecidos, ou que possuem um amortecimento muito pequeno.

Inércia do NDV

O primeiro parâmetro a ser observado na construção dos NDV's é a relação entre as massas, ou seja, a razão entre as massas do sistema primário e do sistema secundário, isto é, $\mu = m_a/m$ (HARTOG, 1956; MEIROVITCH, 2001; RAO, 2011).

Uma relação proposta por Espindola, Pereira, Bavastri, e Lopes (2009) para sistemas com múltiplos graus de liberdade (MGDL) é dada por

$$\mu_{s_j} = \left(\sum_{i=1}^p m_{ai} \phi_{k_i s_j}^2 \right) / m_{s_j} \rightarrow j = 1, \dots, p, \quad (64)$$

onde $\phi_{k_i s_j}$ é um elemento do autovetor normalizado da linha k_i e coluna s_j .

Verificou-se experimentalmente que a razão de massas deve ficar dentro dos limites $0,1 \leq \mu = m_a/m_p \leq 0,25$ (CRUZ, 2004; ESPÍNDOLA *et al.*, 2005; HARTOG, 1956). Logo essa restrição define uma proporção entre os dois sistemas, onde o sistema auxiliar não produzirá alteração significativa no sistema composto e, ao mesmo tempo, preserve a sua capacidade de neutralizar os efeitos da vibração no sistema primário. Isto, conseqüentemente, limita o tamanho do NDV.

A partir dessa razão de massas pode-se encontrar uma relação equivalente para as inércias do sistema torcional composto.

Essa relação, definida por $\mu_I = I_a/I_1$, é obtida através do uso dos momentos de inércia

de massa de cada um dos elementos, ou seja, $I_1 = 1/2mr_1^2$ e $I_a = 1/2m_a(r_E^2 + r_I^2)$. Onde I_1 é o momento de inércia de massa do sistema principal (disco de inércia), I_a é o momento de inércia de massa do neutralizador. r_1 é o raio do disco de inércia, r_E e r_I são os raios externo e interno do anel sintonizador, respectivamente.

Logo, a razão de inércia (equação 65) é calculada como

$$\mu_I = \frac{I_a}{I_p} = \frac{m_a}{m_1} \frac{(r_E^2 + r_I^2)}{r_1^2} = \mu \frac{(r_E^2 + r_I^2)}{r_1^2}. \quad (65)$$

Rigidez do NDV

Uma associação entre o módulo de armazenamento (do material viscoelástico) e a rigidez é estabelecida pela equação

$$K_a = LG(\Omega) = \vartheta G(\Omega) [1 + i\eta(\Omega)], \quad (66)$$

onde, como já definido anteriormente (Equação 29), $\eta(\Omega) = Im[G_c(\Omega)]/Re[G_c(\Omega)]$ e o fator de forma é dado por $L = A/h$ (Figura 8). Por sua vez, a frequência, em que o fator de perda é máximo, é calculada pela relação

$$\Omega_m = \frac{1}{b} \left(\frac{G_o}{G_\infty} \right)^{\frac{1}{2\alpha}}. \quad (67)$$

A frequência anti-ressonante (Ω_a) do neutralizador, utilizando materiais viscoelásticos, deverá ser ajustada de forma a se aproximar ao máximo do valor de Ω_m . Fazer $\Omega_a \equiv \Omega_m$ passa, então, a ser um dos requisitos de projeto do NDV.

Os valores para a frequência máxima podem ser calculados a partir da equação 67 com os dados das propriedades do material viscoelástico.

Na sequência, apresenta-se um elemento de material viscoelástico sob cisalhamento puro. Pode-se observar na figura 8 a indicação da altura h (ou espessura do inserto), b_o a largura e a área A sob carregamento do elemento polimérico.

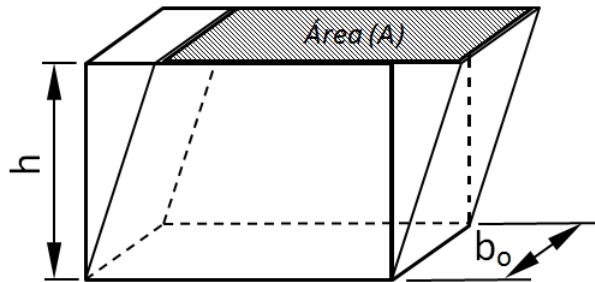


Figura 8: Elemento viscoelástico sob cisalhamento

O fator de forma é calculado com base na geometria do elemento polimérico e depende

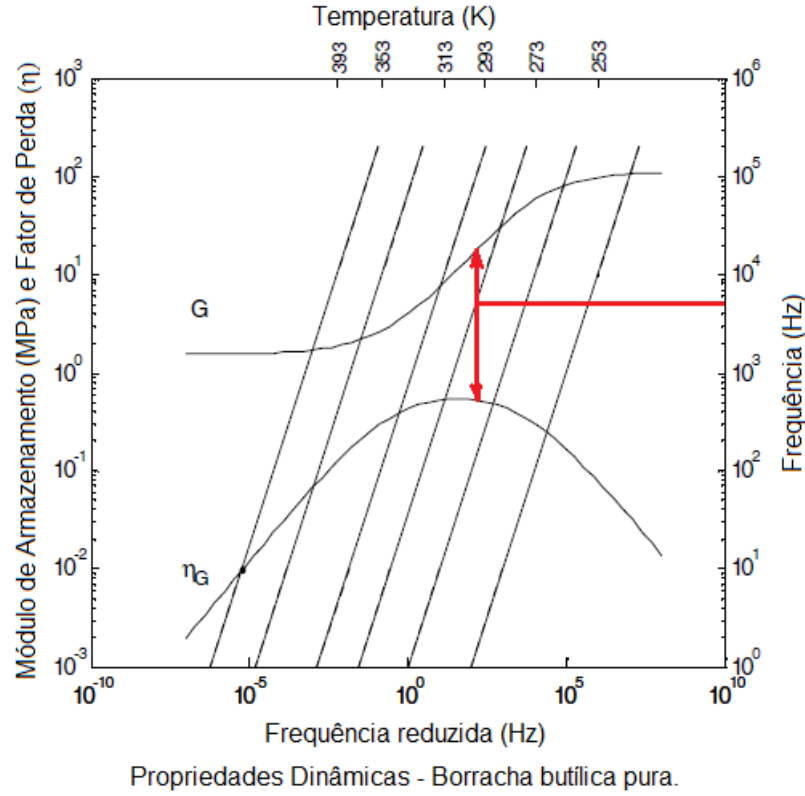


Figura 9: Monograma de Frequência Reduzida
 Fonte: BAVASTRI *et al.* (2008).

da área (A) e da espessura (h). Assim, a rigidez dinâmica é dada por

$$K_c(\Omega) = LG_c(\Omega) = \frac{A}{h}G_c(\Omega), \quad (68)$$

onde L é o fator de forma do inserto viscoelástico.

Uma forma de se obter o módulo de armazenagem e o fator de perda, para uma determinada temperatura e para alguns materiais, é com o auxílio de monogramas de frequência reduzida (Ω_R).

Esse monograma pode ser utilizado acompanhado-se a linha vermelha na figura 9. Isto é, entra-se com a frequência desejada, na ordenada à direita do monograma, e segue-se na horizontal, para a esquerda, até encontrar as linhas isotermas. Escolhe-se a temperatura de interesse. Na direção vertical, os pontos sobre as curvas apontados pelas flechas, darão o módulo de armazenagem (curva superior) e o respectivo fator de perda (curva inferior). Nessa mesma direção, seguindo para baixo até a abcissa, tem-se a frequência reduzida.

Essa frequência é dada pela relação $\Omega_R = \alpha_T(T_w)\Omega$, onde α_T é conhecido como fator de deslocamento (conforme a equação 49), T_w é a temperatura de trabalho (escolhida) em escala absoluta.

A caracterização dinâmica de uma ampla gama de materiais pode ser obtida lançando mão do princípio da superposição de frequências. No qual, a mudança de uma propriedade

com a temperatura é equivalente a um deslocamento em relação ao eixo da frequência da curva de mesma propriedade (CECCON, 2008; MOSCHEN, 2006; SILVA NETO, 2004).

O valor do módulo dinâmico é dado pela equação

$$G'(\Omega) = \frac{G_o + (G_\infty + G_o)(\Omega b)^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) + G_\infty(\Omega b)^{2\alpha}}{1 + 2(\Omega b)^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) + (\Omega b)^{2\alpha}} \quad (69)$$

e o respectivo módulo de dissipação é dado por

$$G''(\Omega) = \frac{(G_\infty - G_o)(\Omega b)^\alpha \sen(\frac{\pi\alpha}{2})}{1 + 2(\Omega b)^\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2}) + (\Omega b)^{2\alpha}}. \quad (70)$$

A respectiva ordem fracionária é calculada da forma

$$\alpha = \frac{2}{\pi} \arcsen \left[\eta_{m\acute{a}x}(G_\infty - G_o) \frac{2\sqrt{G_o G_\infty} + (G_\infty + G_o)\sqrt{1 + \eta_{m\acute{a}x}^2}}{\eta_{m\acute{a}x}^2(G_\infty + G_o)^2 + (G_\infty - G_o)^2} \right]. \quad (71)$$

Reforça-se que a notação relativa à temperatura foi suprimida por questões de simplicidade de notação. Não obstante, as propriedades do material polimérico são sensíveis a variação desse parâmetro. No entanto, nesse trabalho não se fez uma avaliação profunda da influência desse parâmetro.

3.5.1 Quantidades Equivalentes Generalizadas

À medida que os neutralizadores dinâmicos de vibração são introduzidos no modelo do sistema primário, cresce o número de graus de liberdade do sistema composto. Assim, haverá tantas equações do movimento quanto o número de graus de liberdade.

Conseqüentemente, a complexidade do modelo matemático aumenta em decorrência do número de equações que precisam ser resolvidas.

Além disso, a inclusão desses novos elementos tem impacto direto sobre a massa do sistema físico (estrutura mecânica).

Uma estratégia para amenizar os efeitos relacionados à introdução desses sistemas auxiliares é lançar mão do conceito de quantidades equivalentes generalizadas.

Esse conceito permite a transformação de coordenadas usando a matriz modal do sistema primário, que é invariante durante o processo de otimização do neutralizador (CRUZ, 2004).

Segundo Espíndola, Bavastri, e Lopes (2008), a partir dessa transformação de coordenadas, pode-se obter o espaço modal do sistema composto sem a necessidade de resolver um complexo problema de autovalor. Condição esta, necessária, caso todos os graus de liberdade fossem levados em conta.

De acordo com essa teoria, pode-se, então, escolher apenas as coordenadas correspon-

dentos à faixa de frequências de interesse, onde o problema de resposta mais intensa está presente. Com isso, consegue-se conter o número de equações governantes por resolver (BAVASTRI *et al.*, 2008). O exemplo a seguir é apresentado para ilustrar como esse princípio pode ser aplicado.

A figura 10 mostra esquematicamente um neutralizador, de inércia I_a e deslocamento angular $\theta_a(\Omega)$, instalado sobre a árvore de um rotor. Esse rotor tem deslocamento angular $\theta(\Omega)$ e atua sobre ele um torque $T(\Omega)$.

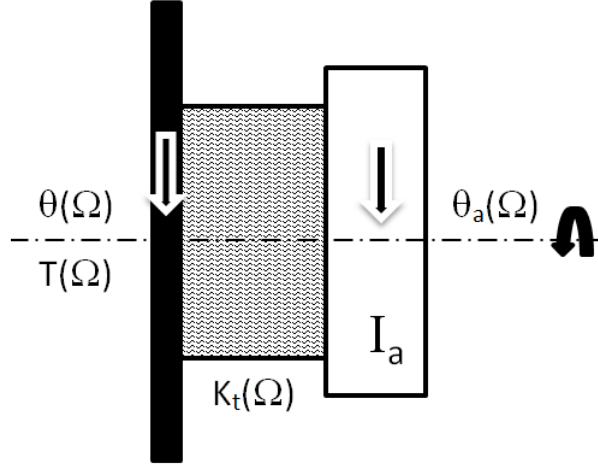


Figura 10: Modelo simples de NDV com MV.

O elemento de inércia está conectado ao rotor através de um material viscoelástico de rigidez $K_t(\Omega) = LG_c(\Omega)$, onde L é o fator de forma, e $G_c(\Omega) = G(\Omega)[1 + i\eta(\Omega)]$ o módulo de cisalhamento complexo. $T(\Omega)$ representa os esforços (Momentos) transmitido pela árvore ao neutralizador. Adotou-se como sentido positivo de giro dos elementos aquele indicado pela flecha mais à direita.

Na sequência, é feita a análise do diagrama de corpo livre (DCL) do neutralizador, esboçado na figura 11. A partir da observação do dcl extrai-se as equações para a determinação dos parâmetros equivalentes.

Com base nesse procedimento, tem-se o seguinte sistema de equações

$$K_t(\Omega)[\theta(\Omega) - \theta_a(\Omega)] = T(\Omega) \quad (72a)$$

$$-\Omega^2 I_a \theta_a(\Omega) + K_t(\Omega)[\theta_a(\Omega) - \theta(\Omega)] = 0. \quad (72b)$$

O fator de forma é calculado como $L = A/h$, em que h é a espessura do material e A é a área sob carregamento (como apresentado na figura 8). Os deslocamentos angulares do rotor e do neutralizador são indicados por $\theta(\Omega)$ e $\theta_a(\Omega)$, respectivamente.

Isolando o deslocamento angular $\theta(\Omega)$ em 72b, resulta em

$$\theta_a(\Omega) = \frac{K_t(\Omega)}{K_t(\Omega) - \Omega^2 I_a} \theta(\Omega) \text{ ou } \theta(\Omega) = \frac{K_t(\Omega) - \Omega^2 I_a}{K_t(\Omega)} \theta_a(\Omega), \quad (73)$$

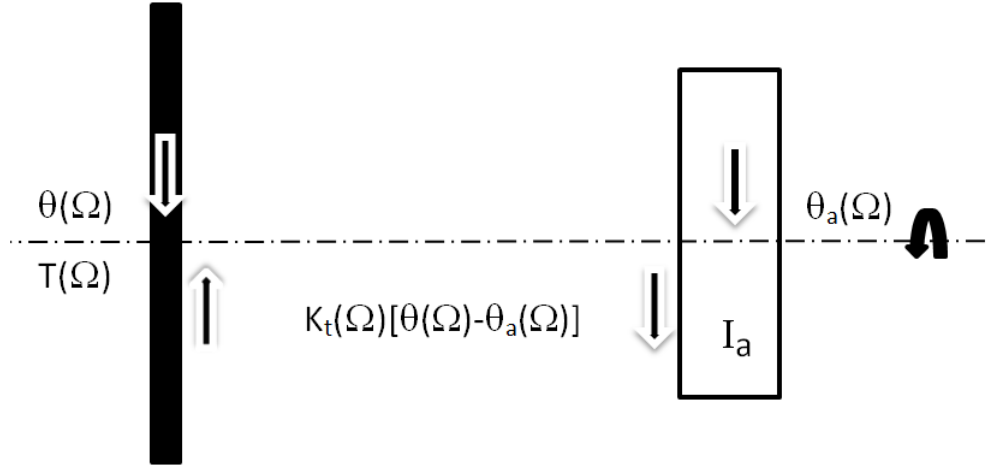


Figura 11: Diagrama de corpo livre do NDV.

introduzindo este resultado na primeira relação da equação 72a. Assim,

$$T(\Omega) = \underbrace{K_t(\Omega) \left[1 - \frac{K_t(\Omega)}{K_t(\Omega) - \Omega^2 I_a} \right]}_{K_t^a(\Omega)} \theta(\Omega). \quad (74)$$

Portanto, $T(\Omega) = K_t^a(\Omega)\theta(\Omega)$, em que K_t^a é a rigidez equivalente percebida pela árvore, devida à inércia introduzida no sistema em razão da presença do neutralizador.

Logo, da equação 73, para que o sistema principal não se desloque ($\theta(\Omega) = 0$), iguala-se o numerador igual a zero, tem-se

$$\Omega_a^2 = \frac{K_t(\Omega_a)}{I_a} = \frac{LG_c(\Omega_a)}{I_a} = \frac{LG(\Omega)(1 + i\eta(\Omega))}{I_a}, \quad (75)$$

que resulta na frequência de anti-ressonância. Lembrando que $i = \sqrt{-1}$ indica parte imaginária e $\eta(\Omega)$ o fator de perda do material viscoelástico.

Da equação 74, a rigidez equivalente, pode ser escrita na forma

$$K_t^a(\Omega) = \frac{K_t(\Omega)\Omega^2 I_a}{\Omega^2 I_a - K_t(\Omega)} = \frac{LG_c(\Omega)\Omega^2 I_a}{\Omega^2 I_a - K_t(\Omega)}. \quad (76)$$

Adotando-se as definições $LG_c(\Omega) = LG_c(\Omega_a)r(\Omega)$, $\varepsilon = \Omega/\Omega_a$ e as substituindo na equação da rigidez equivalente (Equação 76), pode-se reescrevê-la como

$$K_t^a(\Omega) = I_a \Omega^2 \frac{r(\Omega)(1 - i\eta(\Omega))}{\varepsilon^2 - r(\Omega)(1 - i\eta(\Omega))}. \quad (77)$$

Deve-se observar que $T(\Omega)$ é transformada de Fourier do torque resultante $f_t(t)$ agindo no rotor e, portanto, experimentado pelo neutralizador no ponto de instalação.

Sabe-se que a relação entre a rigidez dinâmica $K(\Omega)$, inércia dinâmica $M(\Omega)$ e impedância $Z(\Omega)$ é $K(\Omega) = -\Omega^2 M(\Omega) = i\Omega Z(\Omega)$.

Nota-se que a equação 77 pode ser separada e expressa de forma semelhante a $T(\Omega)/\theta(\Omega) = -m_e\Omega^2 + i\Omega c_e(\Omega)$.

Portanto, através dessa análise, chega-se aos conhecidos parâmetros equivalentes (ESPINDOLA *et al.*, 2009). Sendo que a massa equivalente é computada por

$$m_e(\Omega) = -I_a \frac{r(\Omega)\{\varepsilon^2 - r(\Omega)[1 - \eta^2(\Omega)]\}}{[\varepsilon^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2} \quad (78)$$

e o amortecimento equivalente por

$$c_e(\Omega) = I_a \Omega_a \frac{r(\Omega)\{\varepsilon^2 - r(\Omega)[1 - \eta^2(\Omega)]\}}{[\varepsilon^2 - r(\Omega)]^2 + [r(\Omega)\eta(\Omega)]^2}. \quad (79)$$

Outas relações com quantidades equivalentes generalizadas podem ser encontradas em Bavastri (1997).

Sistema torcional com múltiplos graus de liberdade

Semelhante à formulação para o sistema com um grau de liberdade, equação 1, o sistema com múltiplos graus de liberdade, na forma torcional, é dado pela equação

$$M\ddot{\underline{q}}(t) + C_t\dot{\underline{q}}(t) + K_t\underline{q}(t) = \underline{f}(t), \quad (80)$$

na qual M , C_t e K_t são respectivamente, as matrizes inércia (Eq. 15), amortecimento e rigidez torcionais (Eq. 20). Sendo $\underline{q}(t)$ o vetor contendo as coordenadas generalizadas; $\dot{\underline{q}}(t)$ e $\ddot{\underline{q}}(t)$ são as derivadas temporais; e $\underline{f}(t)$ é o vetor forçamento generalizado, contendo a $f_i(t)$ força ou torque, agindo sobre o rotor.

Considerando o caso de vibração livre, $\underline{f}(t) = 0$, a solução adotada para resolver o sistema de equações homogêneas é $\underline{q}(t) = \underline{\phi}e^{st}$, em que $\underline{\phi} = [C_1, C_2, \dots, C_n]^T$. Substituindo essa solução na equação 80, resulta em

$$[s^2M + sC_t + K_t]\underline{\phi} = 0. \quad (81)$$

Como a solução trivial $\underline{\phi} = 0$ não tem sentido, então faz-se $\det[s^2M + sC_t + K_t] = 0$, que resulta no polinômio característico de ordem $2n$. Cujas raízes s_1, s_2, \dots, s_{2n} são os autovalores. Substituindo cada uma dessas raízes na equação 81, determina-se o respectivo vetor $\underline{\phi}_j$, de valores relativos, denominado autovetor, ou modos naturais de vibração.

Considerando o caso particular de um sistema não amortecido, tem-se a equação 80 $[s^2M + K_t]\underline{\phi} = 0$, podendo ser escrita na forma $K_t\underline{\phi} = \Omega^2 M\underline{\phi}$. Os autovalores desse problema são imaginários puros conjugados, ou seja, $s_j = i\Omega_j$ e $s_j^* = -i\Omega_j$, relações complementares para essa fundamentação estão disponíveis no anexo, em ortogonalidade dos autovetores.

Uma forma conveniente de analisar a equação 80 é no domínio da frequência. Pois, o comportamento dos materiais viscoelásticos são descritos nesse domínio.

Portanto, aplicando a transformada de Fourier (\mathfrak{F}) na equação governante, tem-se

$$[-\Omega^2 M + i\Omega C_t + K_t] \underline{Q}(\Omega) = F(\Omega), \quad (82)$$

em que $\mathfrak{F}(q(t)) = \underline{Q}(\Omega)$ e $\mathfrak{F}(f(t)) = \underline{F}(\Omega)$.

A versão de vibração livre do sistema 82 resulta na equação homogênea

$$[-\Omega^2 M + i\Omega C_t + K_t] \underline{Q}(\Omega) = 0. \quad (83)$$

Definindo-se as relações $\Omega_j = -is_j$ e $\phi = \underline{Q}(\Omega)$, percebe-se que as equações 81 e 83 são equivalentes. Ω_j é a j-ésima frequência natural ou própria do sistema não amortecido, que pode ser complexa, caso haja algum tipo de dissipação de energia.

Os autovetores, por sua vez, formam uma base ortogonal e as equações de movimento, quando representadas nessa base, podem ser desacopladas, assim como as respectivas soluções (RIPPER NETO, 2007).

Logo, para desacoplar esse sistema de equações, usa-se uma transformação de coordenadas, definida como

$$\underline{Q}(\Omega) = \Psi \underline{P}(\Omega). \quad (84)$$

Levando essa transformação à equação 82 converte-se, assim, as coordenadas físicas ($\underline{Q}(\Omega)$) em coordenadas principais ($\underline{P}(t)$), que resulta em

$$[-\Omega^2 M + i\Omega C_t + K_t] \Psi \underline{P}(\Omega) = F(\Omega). \quad (85)$$

Pré-multiplicando a equação 85 e por Ψ^T , que é a transposta da matriz modal ortogonal, e substituindo-se $N(\Omega) = \Psi^T \underline{F}(\Omega)$, tem-se

$$[-\Omega^2 \mathbf{I} + \Psi^T C_t \Psi + \Lambda] \underline{P}(\Omega) = N(\Omega), \quad (86)$$

na qual, \mathbf{I} é a matriz identidade. Em relação a $\Psi^T C_t \Psi$, não se pode afirmar que seja diagonal, sabe-se, entretanto, que essa matriz é aproximadamente diagonal em estruturas com baixo amortecimento.

Pode-se, contudo, aplicar modelo de amortecimento viscoso, ou hysterético, proporcional para normalizar a matriz $\Psi^T C_t \Psi$ (EWINS, 1984).

No caso do amortecimento viscoso proporcional, pode-se modelá-lo da seguinte forma

$$C_t = a_0 K_t + a_1 M, \quad (87)$$

na qual a_0 e a_1 são os coeficientes de Rayleigh. A relação entre o amortecimento e a frequência natural é

$$\zeta_n = \frac{a_0}{2\Omega_n} + a_1 \frac{\Omega_n}{2}. \quad (88)$$

Para determinar os coeficientes a_0 e a_1 , usam-se dois fatores de amortecimento, ζ_i e ζ_j , assim

$$\begin{Bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Omega_i^{-1} & \Omega_i \\ \Omega_j^{-1} & \Omega_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix}, \quad (89)$$

onde Ω_i e Ω_j são frequências relativas aos modos escolhidos.

No caso particular $\zeta_i = \zeta_j = \zeta$, tem-se

$$a_1 = \frac{2\pi}{\Omega_i + \Omega_j} \text{ e } a_0 = \Omega_i \Omega_j a_1 \quad (90)$$

Assim, pré-multiplicando a equação 87 por Ψ^T e pós-multiplicando por Ψ , tem-se

$$\Psi^T C_t \Psi = \alpha [\diagdown k_{tr} \diagup] + \gamma [\diagdown I_r \diagup] = [\diagdown c_{tr} \diagup], \quad (91)$$

resultando, dessa forma, na diagonalização da matriz amortecimento. O termo c_{tr} é a constante de amortecimento e I_r , a inércia modal. A notação $[\diagdown \quad \diagup]$ e $\text{diag}(\quad)$ são equivalentes e indicam a matriz diagonal.

Definem-se as seguintes relações $\zeta_r = c_{tr}/c_{cr}$ a razão de amortecimento, c_{tr} é amortecimento crítico. $c_{tr} = 2I_r \Omega_r \zeta_r$.

Relembrando que o índice t indica tratar-se de um parâmetro torcional e r está relacionado ao modo de vibração.

Inserindo essas relações na equação 86

$$[-\Omega^2 \mathbf{I} + i\Omega \text{diag}(2\zeta_r \Omega_r) + \Lambda] \underline{P}(\Omega) = N(\Omega). \quad (92)$$

Aplicando a transformada de Fourier nessa equação, resulta em

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & -\Omega_j^2 + i2\zeta_j \Omega_r \Omega_j + \Omega_r^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} P(\Omega) = \Psi^T F(\Omega). \quad (93)$$

O espaço gerado por esta transformação recebe o nome de espaço modal (onde $P(\Omega)$ são as coordenadas principais). Nesse espaço, as equações estão desacopladas. Isto permite resolver cada uma dessas equações separadamente, similar ao que foi feito com o sistema de um grau de liberdade (BAVASTRI, 1997).

Conforme pode ser observado em 86, as matrizes foram diagonalizadas e, portanto, houve o desacoplamento das equações.

Rearranjando os termos da equação 93, tem-se

$$P(\Omega) = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & -\Omega_j^2 + i2\zeta_j\Omega_r\Omega_j + \Omega_r^2 & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \Psi^T F(\Omega). \quad (94)$$

Como a transformada Fourier da equação 84 tem a forma de $Q(\Omega) = \Psi P(\Omega)$ e substituindo essa relação em 94, tem-se

$$Q(\Omega) = H(\Omega) F(\Omega). \quad (95)$$

Onde $H(\Omega)$ é a função resposta em frequência ou receptância. Assim, a FRF para o k -ésima coordenada generalizada, excitada na s -ésima coordenada será dada por

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{kr}\Psi_{sr}}{-\Omega^2 + \Omega_r^2 + i2\zeta_r\Omega_r\Omega}, \quad (96)$$

de forma similar, a matriz receptância do modelo hysterético é calculada como

$$\alpha_{ks}(\Omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Psi_{kr}\Psi_{sr}}{-\Omega^2 + \Omega_r^2 + i2\eta_r\Omega_r\Omega}. \quad (97)$$

Sistema composto

A inclusão dos neutralizadores de vibrações acrescentariam, em primeira análise, novos graus de liberdade ao sistema. No entanto, aplicando-se o conceito de quantidades equivalentes, percebe-se que há uma alteração nas matrizes inércia e amortecimento do sistema composto e, portanto, as equações governantes do sistema composto podem ser escritas apenas com as coordenadas generalizadas do sistema primário.

Define-se, deste modo, o sistema composto na forma

$$[-\Omega^2 M^c + i\Omega C_t^c + K_t^c]Q(\Omega) = F(\Omega), \quad (98)$$

respectivamente a inércia é dada por

$$M^c = M + M^e = M + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & I_e q_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & I_e q_p \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (99)$$

e a matriz amortecimento por

$$C_t^c = C_t + C_t^e = C_t + \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & C_{t1}^e & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_{tp}^e \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

O sistema composto não se tornará desacoplado, pois, parte das matrizes M^e e C_t^c conterão os termos equivalentes.

Apesar do modelo analítico de uma estrutura mecânica possuir um grande número de graus de liberdade, nas aplicações práticas, percebe-se que apenas alguns poucos modos tem maior contribuição à vibração mais intensa do sistema.

Isto posto, toma-se apenas os autovalores de interesse, aqueles relativos aos modos que se deseja controlar. Reduzindo o problema envolvendo um grande número de graus de liberdade para outro menos complexo, envolvendo a análise de alguns poucos autovalores.

Propõe-se, assim, a transformação de coordenadas para o sistema primário truncado na forma

$$\tilde{Q}(\Omega) = \tilde{\Phi} \tilde{P}(\Omega), \quad (101)$$

em que $\tilde{P}(\Omega)$ é um vetor $\tilde{n} \times 1$ e $\tilde{n} \ll n$. Levando essa transformação (Equação 101) para equação 98 e pré-multiplicando pela matriz modal truncada $\tilde{\Phi}^T$, tem-se

$$[-\Omega^2(\text{diag}(\tilde{I}_j) + \tilde{M}^e(\Omega)) + i\Omega(\text{diag}(\tilde{c}_j) + \tilde{C}^e(\Omega)) + \text{diag}(\tilde{k}_j)]\tilde{P}(\Omega) = \tilde{N}(\Omega). \quad (102)$$

Onde, $\tilde{N}(\Omega) = \tilde{\Phi}^T \tilde{P}(\Omega)$ e essa equação 102 é a forma truncada de 98.

Os elementos de \tilde{M}^e , dependentes da frequência Ω , como visto na definição dos parâmetros equivalentes, são dados por:

$$\tilde{M}_{sr}^e(\Omega) = \sum_{i=1}^p m_i^e \tilde{\Phi}_{si} \tilde{\Phi}_{ri} \quad \text{e} \quad \tilde{C}_{sr}^e(\Omega) = \sum_{i=1}^p m_i^e \tilde{\Phi}_{si} \tilde{\Phi}_{ri}. \quad (103)$$

Logo, agrupando-se os termos de 102

$$\tilde{D}(\Omega) = \tilde{D}_o(\Omega) - \Omega^2 \tilde{M}^e + i\Omega \tilde{C}^e(\Omega), \quad (104)$$

em que

$$\tilde{D}_o(\Omega) = \text{diag}(-\tilde{I}_j \Omega^2 + i\Omega \tilde{c}_j + \tilde{k}_j). \quad (105)$$

Para encontrar a solução em coordenadas físicas, leva-se a equação 104 em 102, a qual fica na forma $\tilde{P}(\Omega) = \tilde{D}(\Omega)^{-1} \tilde{N}(\Omega)$ ou $\tilde{P}(\Omega) = \tilde{D}(\Omega)^{-1} \tilde{\Phi}^T \tilde{F}(\Omega)$, substituindo-se esse resultado na equação 101, que fica como

$$\tilde{Q}(\Omega) = \tilde{\Phi} \tilde{D}(\Omega)^{-1} \tilde{\Phi}^T \tilde{F}(\Omega). \quad (106)$$

Portanto, fazendo a equivalência entre a equação 106 com um sistema de um grau de liberdade, pode-se calcular a receptância do sistema composto:

$$\tilde{\alpha}(\Omega) = \tilde{\Phi} \tilde{D}(\Omega)^{-1} \tilde{\Phi}^T, \quad (107)$$

um de seus elementos pode ser calculado como

$$\tilde{\alpha}_{ks}(\Omega) = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{D}_{ij}^{-1}(\Omega) \tilde{\Phi}_{si} \tilde{\Phi}_{kj}. \quad (108)$$

Essa matriz resposta em frequência pode ser calculada caso os parâmetros modais do sistema primário e as características dos neutralizadores forem conhecidos.

Uma das informações importantes para o projeto do neutralizador dinâmico está relacionada ao valor da massa dessa estrutura auxiliar. Deve-se estabelecer um equilíbrio entre a massa do neutralizador e a massa do sistema primário.

Segundo Cruz (2004), para se definir a massa do neutralizador pode-se levar em conta a relação de massas, como estabelecida por Hartog (1956). No entanto, essa é uma relação para um sistema com um grau de liberdade. Deve-se, portanto, extrapolá-la para sistemas de múltiplos graus de liberdade.

Logo, despreza-se o acoplamento da equação 101 e faz-se uma análise modo a modo. Como visto anteriormente, essas equações são acopladas, porém, elas são diagonalmente dominantes. Portanto, utiliza-se essa aproximação para definir a massa do neutralizador, o que garante um bom desempenho (ESPINDOLA *et al.*, 2009).

Dessa forma, \tilde{I}^e é a inércia e C_t^e o amortecimento equivalentes de cada neutralizador fixados à estrutura da máquina. Por simplicidade de análise, pode-se considerar os p neutralizadores terem o mesmo tamanho.

$$\left[-\Omega^2 \left(\tilde{I}_j + I^e(\Omega) \sum_{i=1}^p \tilde{\Phi}_{ij}^2 \right) + i\Omega \left(\tilde{c}_j + c^e(\Omega) \sum_{i=1}^p \tilde{\Phi}_{ij}^2 \right) + k_j \right] \tilde{P}(\Omega) = N_j(\Omega), \quad (109)$$

sendo $j = 1, 2, \dots, \tilde{n}$ e $H_j(\Omega) = \tilde{P}_j k_j / N_j$, portanto

$$H_j(\Omega) = \frac{k_j}{(k_j - \Omega^2 \tilde{I}_j + i\Omega \tilde{c}_j) + \sum_{i=1}^p \tilde{\Phi}_{ij}^2 (-\Omega^2 I^e(\Omega) + i\Omega c^e(\Omega))}. \quad (110)$$

Para um sistema com um grau de liberdade, a admitância assume a forma

$$H(\Omega) = \frac{k}{(k - \Omega^2 I + i\Omega c) + (-\Omega^2 I^e(\Omega) + i\Omega c^e(\Omega))}. \quad (111)$$

Conceitos de otimização

A introdução dos neutralizadores dinâmicos de vibrações tem como objetivo eliminar ou reduzir as excessivas trepidações na estrutura principal.

Foram ressaltados alguns aspectos que cercam a construção dos neutralizadores, como o processo de sintonização, por exemplo. Onde, utiliza-se a frequência do modo de vibração que se deseja controlar para obtenção dos parâmetros construtivos desse dispositivo.

Entretanto, esse procedimento pode resultar em uma ampla gama de escolhas, devido às possíveis combinações entre os parâmetros físicos dessa estrutura (massa, rigidez e amortecimento) no processo de sintonização.

Em razão disso, é necessário utilizar algum processo que auxilie a busca daqueles parâmetros que atribuirão ao neutralizador maior eficácia na função de atenuar as amplitudes de vibrações. Tais parâmetros são denominados parâmetros ótimos e ao processo de procura dos valores correspondentes, define-se como otimização.

Evidencia-se, todavia, que a busca pelo valor ótimo não trata-se de uma escolha única, mas sim, de selecionar a alternativa, entre as várias possíveis, que proporcionará o melhor resultado.

Segundo Hartog (1956) (Jacob Peter Den Hartog, 1901-1989) e Rao (2011), o processo precursor de otimização, aplicado na construção de neutralizadores, é o conhecido método dos pontos fixos. O procedimento consiste em ajustar as ordenadas desses pontos, relativas à resposta do sistema, fazendo-as coincidir e, conjuntamente, terem sua amplitude reduzida.

Esses pontos, cuja posição é estabelecida segundo os parâmetros do sistema, apresentam-se quando da sobreposição gráfica das curvas de resposta do sistema composto sobre a do sistema primário (Figura 12).

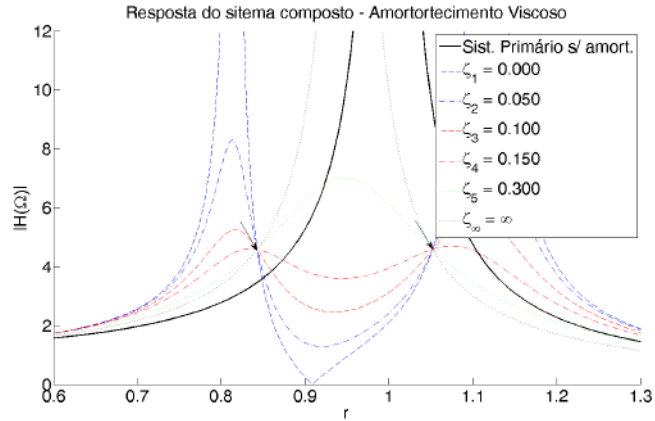


Figura 12: Pontos fixos.

O método de otimização por meio dos pontos fixos é implementado fazendo-se esses pontos terem a mesma ordenada (indicados pelas flechas na figura). Isto é, o mínimo valor do módulo da resposta é encontrado quando os pontos fixos estiverem à mesma altura e os picos próximos a estes (CRUZ, 2004), linha traço-ponto em vermelho, conforme ilustrado na figura 13.

Não obstante, como destacado anteriormente, verifica-se que em sistemas físicos sempre haverá algum amortecimento, logo, isso implica na inexistência de tais pontos fixos (BAVASTRI, 1997).

Assim, de forma alternativa a esse método, ao invés da utilização desses pontos, uma vez que estes não podem ser determinados, escolhem-se as frequências em torno do modo onde o sistema apresenta maior resposta.

Observa-se, porém, que na tentativa de se determinar os parâmetros que atribuem a melhor performance ao neutralizador, forma-se uma nuvem de pontos próximos dessas frequências.

No caso em tela, esse processo refere-se a determinação dos parâmetros físicos do neutralizador. Portanto, a configuração dimensional desse dispositivo, produto desse processo de otimização, permite a construção de um neutralizador capaz de minimizar a máxima amplitude da resposta do sistema primário com o menor impacto sobre a massa dessa estrutura.

A otimização dos parâmetros físicos do neutralizador é alcançada igualando-se as derivadas da resposta do sistema primário a zero, em cada ponto invariante (ponto fixo). Esse procedimento resulta na obtenção dos respectivos valores de amortecimentos. Por conseguinte, de posse desses valores, pode-se calcular o amortecimento médio.

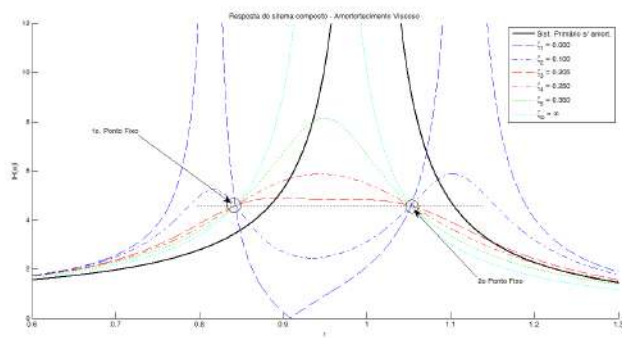


Figura 13: Otimização pelo método dos pontos fixos.

Esse método, porém, baseia-se na idealização de uma estrutura primária sem amortecimento. Contudo, como já exposto, um sistema físico real possui, de fato, algum tipo de dissipação.

Portanto, nas estruturas primárias esses pontos fixos inexistem e, assim, uma forma alternativa de análise é implementada. Por exemplo, em substituição aos pontos fixos, procede-se à análise em uma faixa de frequências.

Percebe-se, todavia, que as diversas curvas de respostas - obtidas a partir da variação do amortecimento do sistema secundário - formam uma nuvem de pontos em torno das frequências limites da banda escolhida.

O problema gerado é escolher os pontos, dentre os vários possíveis, que resultem em ordenadas aproximadas e com as menores amplitudes.

A simples observação do exposto nas linhas que se antecederam leva, logicamente, à formulação do problema de otimização.

Por definição, essas questões de otimização envolvem a solução dos problemas de maximização ou minimização de uma função, com uma ou mais variáveis. Em um determinado domínio que, frequentemente, deve atender a certas restrições.

Basicamente, as rotinas computacionais desenvolvidas para resolver esse tipo de problema são determinísticas ou probabilísticas.

Fundamentalmente o problema de otimização é constituído por:

- variáveis de projeto, que se alteram ao longo do processo de otimização;
- restrições, que são funções de igualdade ou desigualdade sobre as variáveis de projeto, as quais limitam ou estabelecem critérios de variações;
- espaço de busca, o qual é o conjunto, espaço ou região que contém as soluções possíveis, ou viáveis, sobre as variáveis de projeto. Sendo esse espaço delimitado pelas restrições;
- função objetivo, função de uma ou mais variáveis, que se pretende otimizar, ou seja, minimizar ou maximizar;

- ponto ótimo, ponto definido pelas variáveis de projeto, os quais maximizam ou minimizam a função objetivo;
- e o valor ótimo, que é o valor da função objetivo no ponto ótimo.

De forma geral pode ser apresentado como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimizar } f(\underline{x}) & \text{onde } f : R^{nd} \rightarrow R \\ & \text{com } \underline{x} \in R^{nd} \\ \text{sujeito a} & \\ h_i(\underline{x}) = 0 & i = 1, 2, 3, \dots, m_i \\ g_j(\underline{x}) \geq 0 & j = 1, 2, 3, \dots, l_j \end{array} \right.$$

Sendo $f(\underline{x})$ a função objetivo, $h_i(\underline{x})$ e $g_j(\underline{x})$ as condições de igualdade e desigualdade. A região viável está localizada na interseção dessas restrições, onde o conjunto de pontos se concentra.

Os problemas de otimização resolvidos pelos métodos clássicos podem ser separados em duas classes, conforme as características da função objetivo e restrições, em programação linear e programação não linear.

Na programação linear a função objetivo e as restrições são funções lineares da variável, ou variáveis, de projeto.

Ao passo que, na programação não linear, a função objetivo ou alguma das restrições são funções não lineares da variável de projeto.

Otimização não linear

Pela técnica de otimização não linear a formulação do problema se dá da seguinte forma. Achar \underline{X} que minimize $f(\underline{X}) = \max_{\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2} (|\alpha(\Omega, \underline{X})|)$, sendo $X_1 \leq X \leq X_2$. $f : \mathbb{R}^{nl} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função objetivo não-linear, $\underline{X} \in \mathbb{R}^{nl}$ é o vetor de projeto. $C_1 = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$ é um fator de escala, refere-se a frequência média na faixa de interesse.

Para a implementação das técnicas de otimização será empregado um pacote comercial conhecido como ModeFrontier[®], o qual tem interface com o Matlab[®]. Aqui este *software* será utilizado apenas como uma ferramenta de desenvolvimento - devida a sua versatilidade de configuração e integração com outros pacotes de modelagem. Naturalmente, esta pode ser substituída por qualquer outro *solver*, inclusive do próprio Matlab. Assim, a rotina de programação desenvolvida irá conciliar a modelagem com uma ferramenta de otimização. O propósito de aplicar-se métodos de otimização é auxiliar na escolha dos parâmetros do material viscoelástico do neutralizador.

Capítulo 4

Bancada Experimental

4.1 Introdução

A bancada experimental utilizada nessa pesquisa é uma adaptação da bancada construída por Abrantes e Michalski (2002) e usada no trabalho de Michalski (2004), em que o objetivo foi determinar o comportamento dinâmico de mancais hidrodinâmicos.

Nesta oportunidade, essa bancada foi preparada para receber os elementos necessários à pesquisa sobre os neutralizadores dinâmicos de vibração viscoelásticos. As principais mudanças foram realizadas no diâmetro do eixo do rotor - substituiu-se a barra de $\varnothing 8$ mm pela de $\varnothing 10$ mm -, a introdução das estruturas de nylon com o suporte de escovas, que compõe o sistema de medição e alimentação - esses projetados com base no princípio de *slip-ring* (PINTO, 2007) - e a inclusão do sistema de excitação torcional.

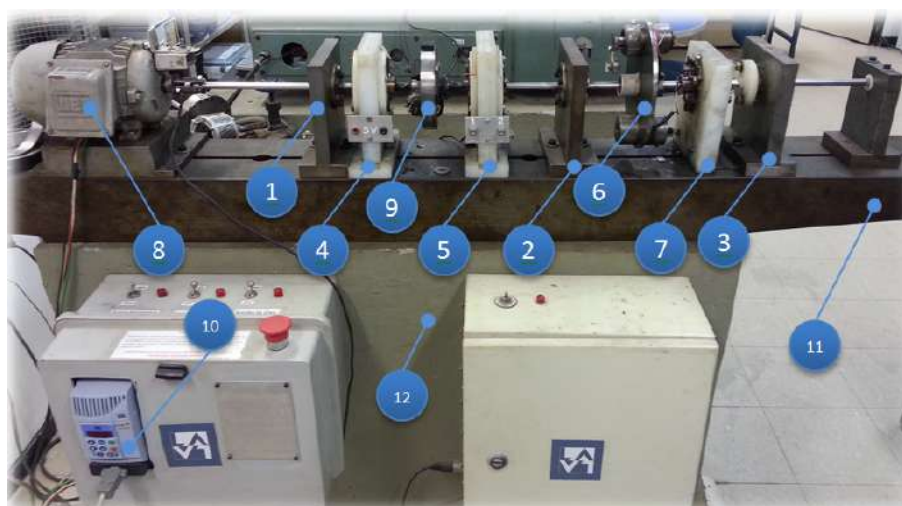


Figura 14: Bancada Experimental.

Formam a bancada experimental (Figura 14): o motor de acionamento (8); uma barra de aço SAE 1045 (não indicada, denominada eixo, de $\varnothing 10\text{mm} \times 1000\text{mm}$); três mancais

com rolamentos rígidos de esferas (1, 2, 3); três estruturas de nylon (4, 5, 7), que acomodam os suportes de escovas; o sistema de excitação (6); inversor de frequências (10); a mesa de ferro fundido (11); e a base de concreto (12).

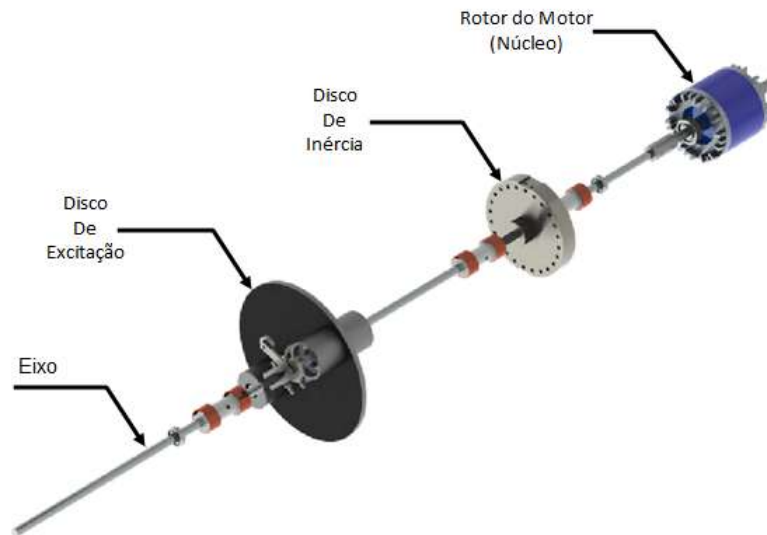


Figura 15: Rotor.

Como pode ser observado na figura 15, o rotor é formado pelo eixo, discos de inércia e de excitação, formando a árvore do rotor do sistema rotodinâmico, que por sua vez é conectada ao eixo do motor de acionamento através de um acoplamento rígido (Figura 16).

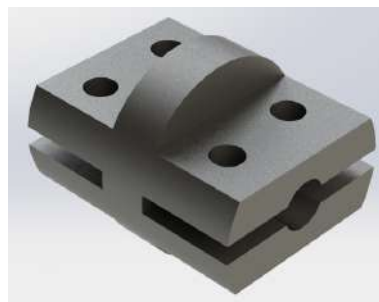


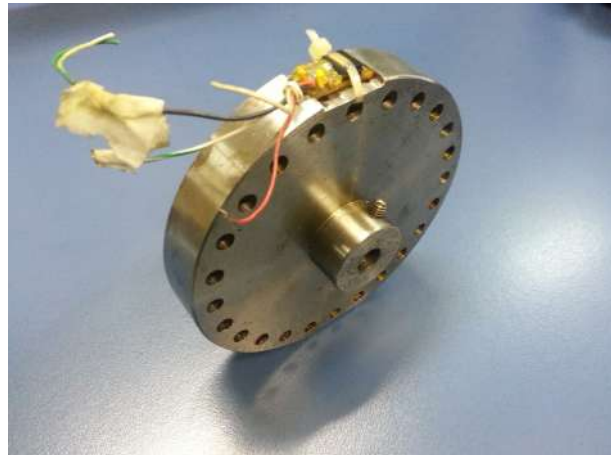
Figura 16: Acoplamento rígido.

O rotor apoiada-se em mancais com rolamentos rígidos de esferas numerados de 1 a 3, como indicados na figura 14, sendo os mancais de número 2 e 3 os mais afastados do motor de acionamento. O objetivo desse arranjo na montagem foi minimizar os efeitos da vibração lateral sobre o disco de inércia - situado entre os mancais 1 e 2 -, devido ao desbalanceamento do disco de excitação.

Apresenta-se na figura 17 o disco de inércia, onde 17a e 17b referem-se ao modelo em *SolidWorks* (SW) e o disco usinado, respectivamente. Nota-se nessas figuras uma das opções de fixação dos acelerômetros, na forma de ranhuras axiais no diâmetro maior.



(a) Modelo do Disco (SW).



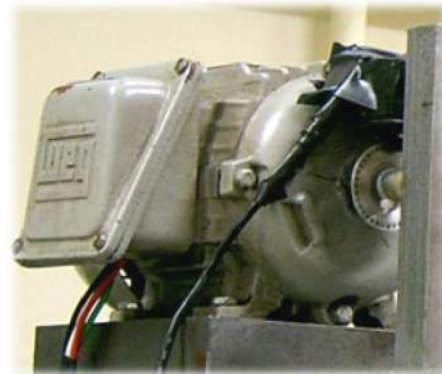
(b) Disco de Inércia com MEMS.

Figura 17: Disco de Inércia.

O motor de acionamento marca WEG (Figura 18b), 2 polos, potência de 0,25 kW e corrente 1,3 A, rotação nominal 3390 rpm é energizado através de um inversor de frequência, modelo WEG CFW 08 (Figura 18a). Com esse equipamento pode-se controlar a rotação do motor de acionamento e, dessa forma, o giro do rotor.



(a) Inversor CFW 08.



(b) Motor.

Figura 18: Sistema trifásico de indução.

Fonte: www.weg.net.

A configuração desse inversor de frequências pode ser realizada com a entrada dos parâmetros diretamente no painel frontal - conhecido como interface homem-máquina (IHM) - ou por meio de software, via porta de comunicação serial do equipamento. Os parâmetros principais ajustáveis são: a frequência de alimentação do motor; rampa de aceleração e de desaceleração; os parâmetros de partida e parada do motor; e inversão do sentido de rotação. Há ainda a possibilidade de efetuar alguns comandos à distância, de forma remota, por meio de um cabo ligado aos bornes de entrada do inversor (Figura

18a).

Define-se operação remota como aquela feita a distância, longe do local onde o trabalho está sendo realizado ou a máquina está em funcionamento. Esse comando pode ser realizado com algum circuito de raio frequência ou por meio de cabos (chicotes).

O funcionamento do sistema de excitação baseia-se na força de desbalanceamento produzida por uma massa desbalanceada, montada na extremidade do eixo do motor CC. Essa massa desenvolve uma órbita composta pelo movimento de rotação, em torno do eixo do motor CC, e translação, ao redor do eixo do rotor. Assim, ao acionar-se o motor CC, uma força de desbalanceamento é gerada. O efeito dessa força é variar a velocidade de rotação do rotor (aceleração e desaceleração do disco), produzindo, dessa forma, uma oscilação angular.

Nas figuras mostradas em 29 são indicadas a posição do motor CC, da massa desbalanceadora e de uma massa de balanceamento, a qual foi instalada com o objetivo de equilibrar as massas do disco de excitação.

Devido a disposição dos elementos ao longo do comprimento do rotor, com o sistema de excitação entre os últimos dois mancais, o efeito de vibração torcional deve ser destacado e a influência de outros modos, diminuída.

A frequência de excitação de desbalanceamento pode ser ajustada manualmente, de forma remota, com o auxílio de um potenciômetro, que permite variar a rotação do motor CC de 0 a 6500rpm. O circuito eletrônico que executa essa operação é mostrado na figura 19. Trata-se de um circuito PWM (*Pulse Width Modulation* ou Modulação de Largura de Pulso).

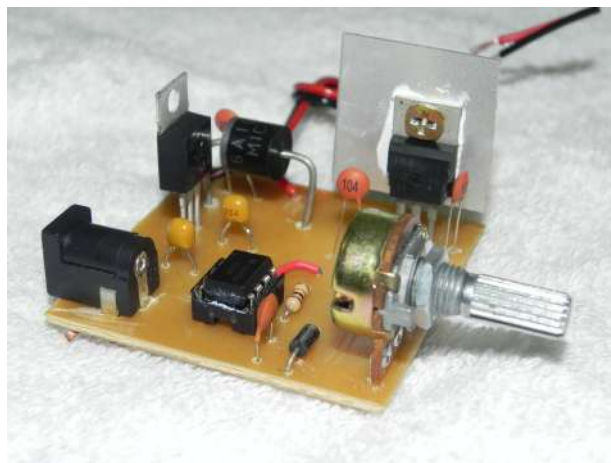
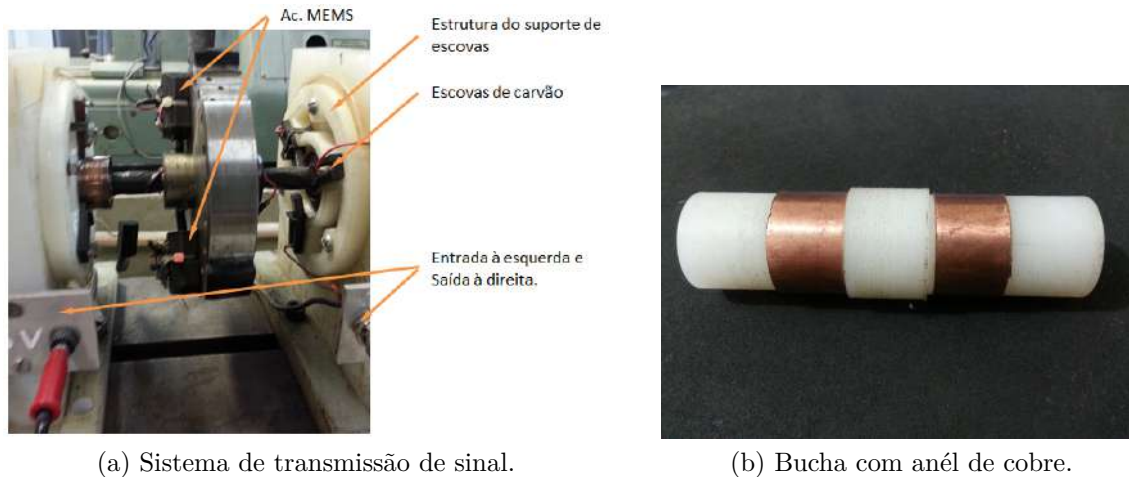


Figura 19: Controlador PWM.

Esse circuito PWM, em particular, tem como característica o controle de motores CC de tensão 0 até 12V e corrente de 0 até 20A. A tensão de alimentação pode ser feita através de uma bateria ou uma fonte de 12V. Invertendo-se a polaridade da ligação do motor, muda-se o sentido de giro.

Para transmissão do sinal e a alimentação dos sensores e do motor, foi utilizado o princípio de *slip rings* (Figura 20a). Esse sistema foi construído com placas e tarugos de nylon, suporte de escovas de carvão e anéis de cobre (Figura 20).

A figura 20a mostra o suporte com três escovas. Essa configuração é favorável, pois



(a) Sistema de transmissão de sinal.

(b) Bucha com anel de cobre.

Figura 20: Esquema de montagem do *slip ring*.

reduz-se o risco de haver perda de contato durante a rotação. Essas escovas são pressionadas contra o anel de cobre (20b) através de molas.

Tanto os acelerômetro quanto o motor CC necessitam de uma alimentação de tensão. Com a utilização do sistema *slip-ring* é possível levar a tensão necessária para os acelerômetros e o motor CC, com o rotor girando. Pode-se, desse mesmo modo, fazer a leitura do sinal de vibração. A ligação entre os acelerômetros e a placa de aquisição de dados da National Instruments (Figura 21) se dá de forma direta.



Figura 21: Placa de aquisição NI 9234.

Fonte: <http://sine.ni.com/nips/cds/view/p/lang/pt/nid/208802>.

Essa placa de aquisição de dados NI 9234 tem capacidade de aquisição de 51,2ks/s (amostras por segundo), 24 bits e 4 canais.

No que se refere as estruturas do sistema de alimentação/aquisição, cada uma delas tem capacidade para conectar uma via de alimentação e outra de terra, ou ligar duas saídas de sinais. Portanto, para operar um ou dois acelerômetros são necessárias duas estruturas. Uma delas para alimentação e terra e a outra para os sinais de aceleração medidos.

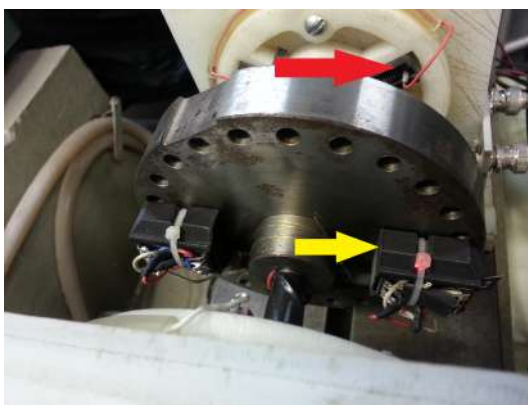
A figura 22 mostra o circuito eletrônico do MEMS.



Figura 22: Acelerômetro MEMS MMA7361.
Fonte: www.freescale.com

4.2 Sistema de medição

Como já introduzido anteriormente, o sistema de medição é composto por dois acelerômetros MEMS, fixos no disco de inércia, buchas com anéis de cobre, uma estrutura com escovas de carvão. Esse sistema é responsável pela ligação entre a parte estática, onde estão a placa de aquisição de dados e o computador, com a parte dinâmica, composta pelos acelerômetros.



(a) Esquema de medição



(b) Medição de vibração torcional.

Figura 23: Sistema de Medição.

Em seguida, foi realizado o ajuste do sistema de medição (com o sistema parado). Os sinais de aceleração linear, devidos aos acelerômetros MEMS, são calibrados com

o auxílio dos acelerômetros modelos ICP's (Figuras 23a e 23b). Os acelerômetros modelo ICP's, por sua vez, foram calibrados com um calibrador de acelerômetros (Figura 24).



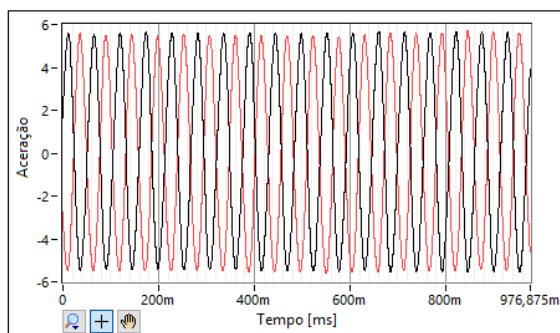
Figura 24: Calibrador de acelerômetros

Fonte:PCB Piezotronics.

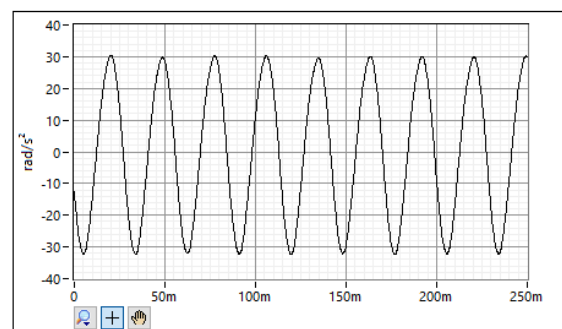
Os acelerômetros ICP's foram instalados em paralelo com os sensores MEMS e serviram de referência para ajustá-los.

O resultado desse procedimento é apresentado na próxima figura 25. No lado esquerdo vê-se os sinais adquiridos de cada acelerômetro (MEMS), em m/s^2 , e no lado direito o sinal de aceleração angular (rad/s^2). Observa-se que estes sinais foram previamente filtrados com filtro passa baixo do tipo *Butherworth*, ordem de 40 , rms (root means squared), 40 médias e frequência de corte em 150 Hz.

A flecha amarela, na figura figura 23, indica a posição dos acelerômetros MEMS e a vermelha o local de montagem das escovas.



(a) Ac. MEMS individual (m/s^2).



(b) Ac. Angular - rad/s^2 .

Figura 25: Resultado da calibração.

Como pode ser observado, os resultados do teste mostram uma concordância com os sinais simulados.

Capítulo 5

Modelagem do Sistema Rotodinâmico

5.1 Introdução

Uma das grandes dificuldades encontradas no estudo sobre vibrações torcionais está relacionada às circunstâncias como esse fenômeno se apresenta, isto é, com a árvore girando.

Conduzir observações nessas condições demanda da disponibilidade de recursos especificamente desenvolvidos para monitorar a oscilação angular com a árvore em movimento.

Segundo Muszynska (2005), as vibrações torcionais são difíceis de serem medidas de forma indireta, ou seja, através de mancais ou estruturas. Pois, os movimentos oscilatórios, devidos à vibração torcional durante a rotação do rotor, praticamente não se manifestam nessas partes estáticas das máquinas. Por essa razão, esse fenômeno é frequentemente negligenciado.

No entanto, e de forma análoga ao que ocorre na vibração lateral, quando a frequência de excitação torcional coincide com uma das frequências naturais de torção da árvore, tem-se o fenômeno da ressonância, o qual é tão prejudicial ao sistema rotodinâmico quanto aquele produzido pelas vibrações transversais.

No caso da vibração lateral, as velocidades críticas são definidas a partir da relação entre as frequências de rotação e a natural de flexão do rotor.

Por sua vez, a correspondência para definir as velocidades críticas de torção são estabelecidas entre as frequências de excitação e a natural torcional. Evidentemente, as velocidades críticas são aquelas onde as frequências de rotação, ou excitação, coincidem com das frequências naturais. Nota-se, portanto, que para o primeiro caso, a excitação é devida ao desbalanceamento, e no segundo, ao processo ou forma de operar do rotor.

Esse capítulo é dedicado a modelagem do sistema rotodinâmico e dos elementos que o constituem. Inicialmente faz-se a introdução da modelagem do disco de excitação, em

seguida apresenta-se o sistema de medição e por final faz-se modelagem do rotor.

5.2 Modelagem do Rotor

Nessa secção é feita a apresentação da modelagem do rotor. Deve-se notar que o procedimento aqui adotado pode ser estendido para qualquer outro sistema rotodinâmico.

O exemplo escolhido para o desenvolvimento nesse estudo é apresentado na figura 26, onde podem ser identificados quatro elementos principais: o eixo, rotor do motor, disco de inércia e o disco de excitação. A árvore, ou eixo, foi construída, nesse caso, a partir de uma barra de secção circular constante.

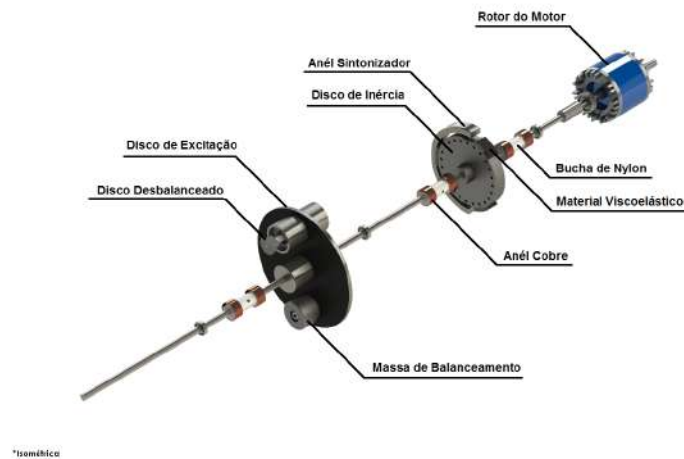


Figura 26: Montagem do rotor.

Considerou-se, inicialmente, uma análise na forma de massas concentradas, ou seja, levando-se em conta as inércias relativas ao núcleo do motor de acionamento, disco de inércia e ao disco de excitação. Em relação ao eixo, inicialmente, foi contabilizada apenas a rigidez torcional introduzida por esse elemento. As dimensões da árvore estão definidas na figura 27.

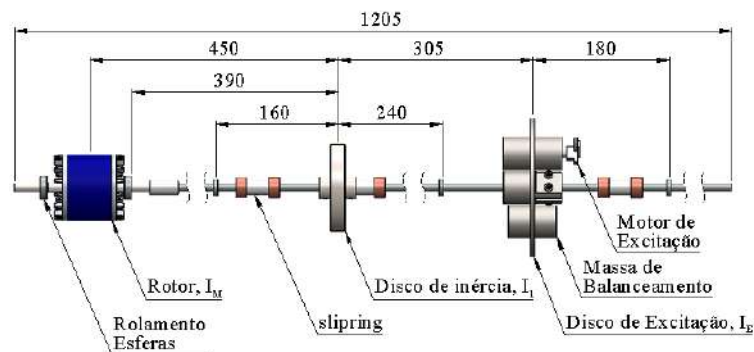


Figura 27: Montagem do Rotor [mm].

As equações governantes desse sistema foram construídas a partir da análise do diagrama de corpo livre (DCL), conforme o esquema ilustrado na figura 28 e aplicou-se a segunda lei de Newton.

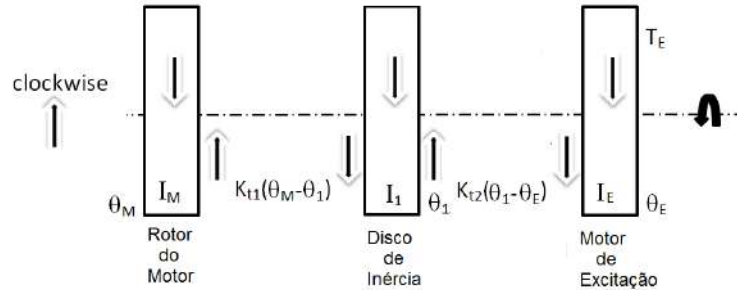


Figura 28: Diagrama de corpo livre - DCL.

Dessa forma, chegou-se ao sistema de equações governantes, o qual na forma matricial apresenta-se como

$$\begin{bmatrix} I_M & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_M \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_E \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{tM} & -k_{tM} & 0 \\ -k_{tM} & k_{tM} + k_{t1} & -k_{tE} \\ 0 & -k_{tE} & k_{tE} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_M \\ \theta_1 \\ \theta_E \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ T_E \end{Bmatrix}. \quad (112)$$

Em que I_M , I_1 e I_E são as inércias do rotor do motor, disco de inércia e disco de excitação, respectivamente; K_{t1} e K_{t2} referem-se a rigidez equivalente nos trechos 1 e 2; T_E é o torque de excitação e θ_M , θ_1 e θ_E são os deslocamentos angulares de cada elemento inercial.

Salienta-se, no entanto, que essa análise considera um sistema primário sem amortecimento, linear, invariante no tempo, cuja solução está alinhada com o que foi desenvolvido no capítulo fundamentação teórica.

5.3 Modelagem do sistema de excitação

O sistema de excitação é formado por um disco, motor de corrente contínua (CC) e uma massa desbalanceadora (Figuras 29a e 29b). Esse sistema de excitação é montado na extremidade do eixo, na posição oposta ao motor de acionamento e, como mencionado, está disposto entre os dois últimos mancais.



Figura 29: Detalhes da montagem do disco de excitação.

A sistema de excitação, o qual tem como função induzir um movimento torcional que se sobrepõe à rotação do sistema rotodinâmico.

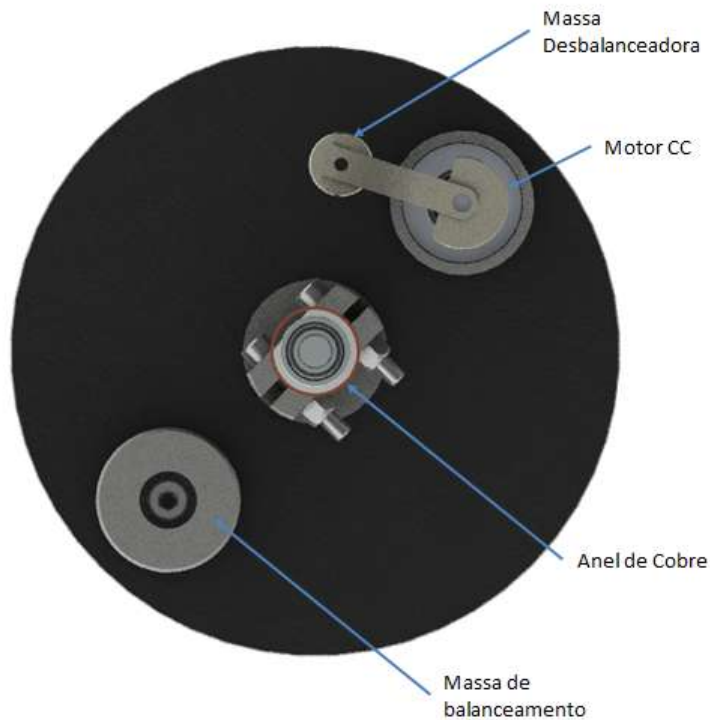


Figura 30: Disco de excitação.

Ao entrar em operação, o eixo do motor CC gira e conduz a massa desbalanceadora em um movimento circular, conseqüentemente, gerando uma força centrípeta de intensidade F_u , dada por

$$F_u = m_u e_u \omega_u^2, \tag{113}$$

onde m_u é a massa desbalanceadora (ou de desbalanceamento), e_u a excentricidade e ω_u a frequência de rotação do motor.

Conforme essa massa desbalanceadora segue se deslocando, a força de desbalanceamento produzida pela mesma altera a sua direção. Em consequência disso, produz um torque alternativo sobre o disco de excitação, fazendo-o acelerar ou desacelerar. A máxima intensidade desse torque é atingida quanto a direção dessa força de desbalanceamento é tangente à órbita desenvolvida pelo motor CC, em torno do eixo do rotor.

A frequência como isso ocorre pode ser ajustada à distância, através de um circuito modelo PWM (Modulação de largura de pulso). O contato entre esse circuito e o motor CC é feito através de escovas e anel de cobre, esse esquema de montagem é conhecido como sistema *slipring* (PINTO, 2007).

Observa-se, contudo, que a intensidade da força de desbalanceamento resultante, como mencionado, não é apenas dependente da rotação do motor de excitação - condição que ocorre somente quando o rotor está parado -, mas dependerá adicionalmente da própria rotação do rotor. Dessa forma, a intensidade de F_u deve levar em conta o vetor posição dado na equação 114.

$$\overrightarrow{QE} = \left\{ \begin{array}{c} u + e_1 \text{sen}(\Omega t) + e_2 \text{sen}(\Omega_1 t) \\ \text{constante} \\ w + e_1 \text{cos}(\Omega t) + e_2 \text{cos}(\Omega_1 t) \end{array} \right\}. \quad (114)$$

Onde u e w representam o deslocamento devido a deformação do eixo do rotor; e_1 é a distância entre o eixo do motor de excitação e o eixo do rotor; e_2 é a excentricidade da massa desbalanceadora (é o comprimento do braço no motor CC); e ω_1 e ω_2 são as velocidades angulares do rotor e do motor CC, respectivamente.

5.4 Modelagem do Sistema de medição de vibração torcional

Em rotores sob o efeito de vibração torcional a aquisição do sinal é feita de modo direto, isto é, medindo-se o fenômeno sobre a superfície da peça ou estrutura que está trepidando.

Um método para medição de sinais de torção foi proposto por Ewins (1984), cujo desenho esquemático é mostrado na figura 31.

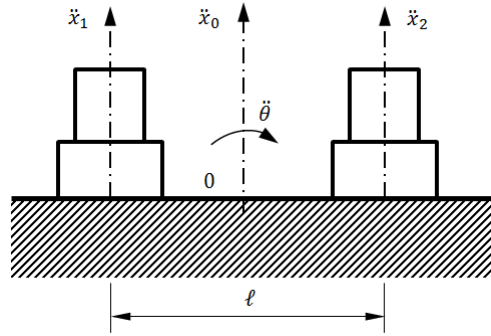


Figura 31: Montagem dos acelerômetros para medição do sinal de torção.

Fonte: EWINS (1984).

Nesse método de aquisição de sinais, os dois sensores são instalados sobre a superfície a medir (Figura 31), em lados opostos ao eixo de rotação. Procedese, então, a aquisição e depois a subtração dos sinais de cada acelerômetro. O resultado é dividido pela distância l entre eles, ou seja,

$$\ddot{\theta} = \frac{(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2)}{l}. \quad (115)$$

Tem-se dessa forma a aceleração angular em rad/s^2 .

5.5 Modelagem do Neutralizador

Os neutralizadores são sistemas secundários, baseados no princípio do oscilador harmônico (massa-mola), projetados para gerar uma força de reação aos movimentos oscilatórios excessivos do sistema primário, no local de instalação. De forma similar, a finalidade dos neutralizadores de vibração torcional é gerar um momento de reação às oscilações angulares que se sobrepõe ao movimento de rotação do eixo.

No que se refere a concepção dos neutralizadores dinâmicos viscoelásticos, há basicamente duas formas de se elaborar o projeto dessas estruturas. A primeira delas parte de um material conhecido e a segunda, as propriedades do polímero são definidas a partir do comportamento do sistema rotodinâmico.

O resultado dessa última abordagem, eventualmente, pode gerar especificações de algum material que não se encontre disponível. Não obstante, dado ao avanço da ciência de polímeros, poder-se-á sintetizar esse elastômero.

A figura 32 apresenta o modelo de neutralizador adotado nessa pesquisa. Como pode ser observado, esse sistema secundário é formado por um anel (massa de sintonização) montado sobre o disco de inércia. Esses elementos são mantidos afastados um do outro, e concêntricos, devido aos inserts de material viscoelástico colados entre eles.

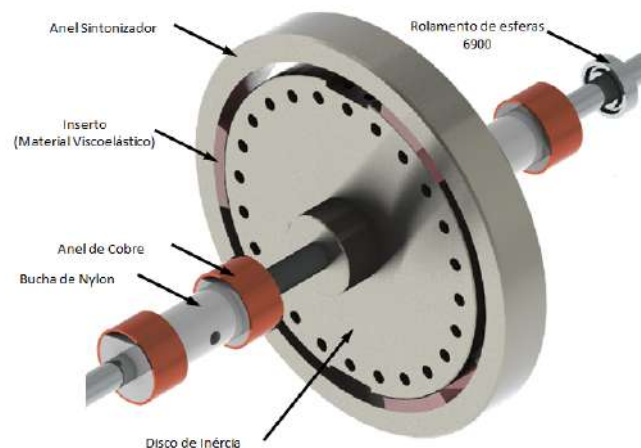


Figura 32: Detalhe da montagem com o NDV.

Um esboço da montagem completa do sistema rotodinâmico é ilustrada na figura 33, onde podem ser observados o disco de excitação, o núcleo do motor (rotor do motor) e o disco de inércia com o NDV.

Na prática usual, devido as limitações de espaços ou local para montagem desses dispositivos, a instalação se dá mais frequentemente na extremidade livre da árvore do rotor.

Contudo, para essa opção de instalação do sistema auxiliar, é necessário, em muitas ocasiões, levar-se em conta a rigidez do eixo correspondente ao comprimento entre o ponto de aplicação do neutralizador e o próximo elemento inercial. O que muitas vezes é negligenciado.

Algumas dimensões do neutralizador viscoelástico, em situações mais realísticas, podem ser pré-determinadas, pois, elas estão vinculadas à configuração geométrica do rotor (devida ao formato construtivo desse elemento de máquina).

Por exemplo, para o caso em foco, as dimensões impostas como restrições geométricas são a largura b_o , diâmetro interno D_I e a forma cilíndrica do neutralizador. Logo, resta a ser definido apenas o diâmetro externo D_E e o comprimento c do inserto polimérico.

Nas linhas que se seguem, será estabelecida uma relação entre o comprimento do inserto polimérico e a rigidez desse material, representada pelo módulo de armazenamento $G(\Omega)$.

Portanto, com o objetivo de determinar esse fator, segue-se uma análise sobre a perda de perpendicularidade, figura 35, devida ao movimento relativo entre o anel sintonizador



Figura 33: Detalhe da montagem com o NDV.

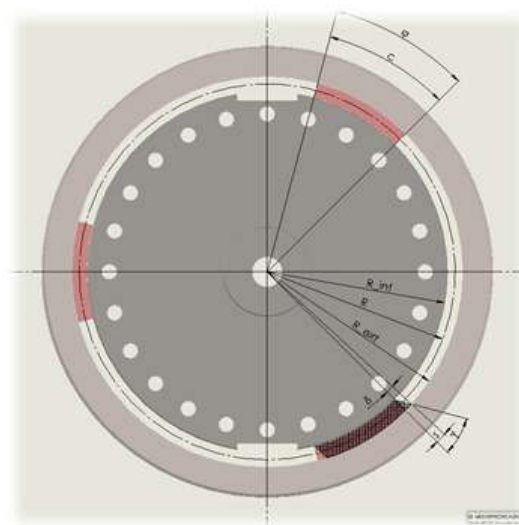


Figura 34: Vista frontal do NDV.

e o disco de inércia.

Define-se, dessa forma, a perda de perpendicularidade como

$$\gamma = \frac{ds}{dR}, \quad (116)$$

onde γ é o ângulo formado pelo movimento relativo entre o disco de inércia e o anel sintonizador, medido em relação à base do material viscoelástico (no ponto de contato com o disco de inércia), onde s é o respectivo deslocamento linear, medido sobre o perímetro formado pelo raio interno do anel sintonizador.

O momento $M_t(\Omega)$ (ou apenas M_t), que age sobre o neutralizador, é decorrente da oscilação do anel sintonizador. A magnitude desse momento é proporcional ao deslocamento angular δ , medido a partir do centro do eixo do rotor, e a rigidez de cisalhamento do inserto elastomérico ($K_t(\Omega)$ ou apenas K_t , por simplicidade de notação). Calculado como

$$M_t = K_t \delta. \quad (117)$$

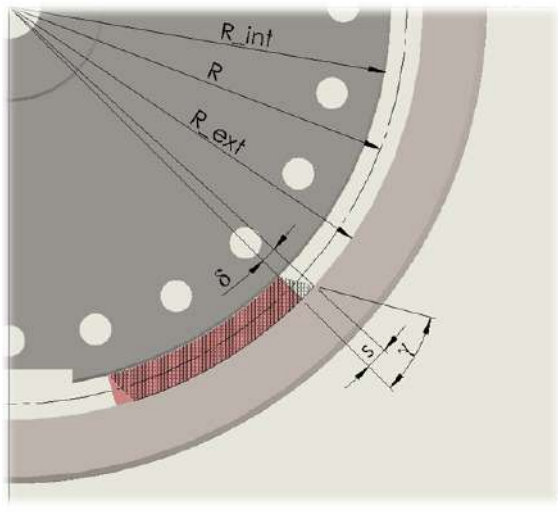


Figura 35: Movimento relativo: anel sintonizador - disco de inércia.

Como o material viscoelástico foi fixado entre o disco de inércia e o anel sintonizador, os insertos são submetidos a dois tipos básicos de esforços, compressão e cisalhamento. Visto que o material viscoelástico sob compressão possui, para essas condições de montagem e operação, uma resistência muito superior, poder-se desconsiderar o efeito à compressão. Portanto, será contabilizada somente a solicitação por cisalhamento, devida ao movimento relativo entre o anel e o disco de inércia. Define-se a tensão de cisalhamento $\tau(R)$ como

$$\tau(R) = \frac{F(R)}{A_t(R)} = \frac{M_t}{RA_t(R)}, \quad (118)$$

em que $F(R)$ é o carregamento e $A_t(R)$ a área total sob carregamento.

O material foi instalado na forma de seguimentos, também referidos como insertos, e colados na parte cilíndrica do disco de inércia. Assim, a área total é computada pela relação $A_t = nA_o$, sendo A_o a área de cada seguimento e n a quantidade de insertos poliméricos utilizados.

Define-se R como um raio genérico, que indica uma posição arbitrária, localizada entre o raio externo do disco de inércia e o raio interno do anel sintonizador, como indicado na figura 35.

A área de cada seguimento de material viscoelástico é calculada como $A_o = c_a b_o$,

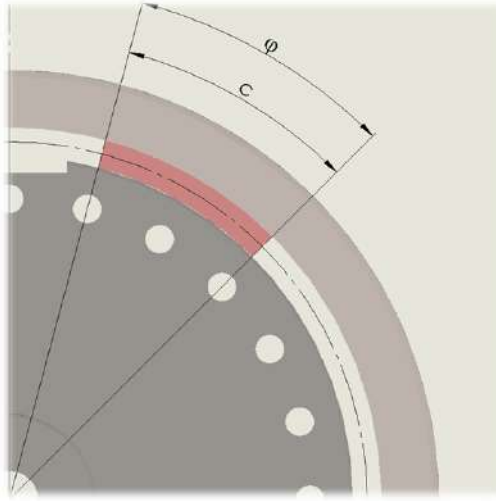


Figura 36: Comprimento do elemento viscoelástico.

onde b_o é a largura do disco e c_a o comprimento do inserto, que acompanha o perímetro do disco de inércia.

O comprimento do material pode ser computado por $c = \varphi R$, onde φ o ângulo relativo a cada inserto de material viscoelástico, conforme ilustrado pela figura 36. O comprimento do arco devido ao movimento relativo entre o anel e o disco de inércia é

$$s_a = R\delta, \quad (119)$$

em que $R \equiv R_{ext}$ e s_a pode ser calculado por

$$s_a = (R_{ext} - R_{int})\gamma = h\gamma \quad (120)$$

onde h é o espaço, ou folga (*gap*), entre o anel e o disco de inércia; essa dimensão determina a espessura do material viscoelástico; R_{ext} é o raio externo, que coincide com o raio interno do anel sintonizador; e R_{int} é o raio interno, como pode ser observado na figura 35, coincide

com o raio do disco de inércia. Dessa forma,

$$R_{ext}\delta = h\gamma \therefore \delta = \frac{h}{R_{ext}}\gamma \quad (121)$$

e como o momento torsor é dado por $M_t = K_t\delta$, pode-se escrevê-lo na forma

$$M_t = K_t \left(\frac{h}{R_{ext}} \right) \gamma. \quad (122)$$

Assim, a tensão de cisalhamento, levando em conta as relações acima, pode ser reorganizada como

$$\tau(R) = \frac{F(R)}{nA_o(R)} = \frac{M_t}{RnA_o(R)} = \frac{1}{R} \left(\frac{M_t}{nA_o(R)} \right). \quad (123)$$

A área dos n seguimentos de material viscoelástico sob carregamento A_o , na equação 123, é calculada pela relação

$$A_o(R) = cb_o, \quad (124)$$

em que b_o é a largura do material viscoelástico introduzido na montagem do neutralizador.

O comprimento c do material viscoelástico, sendo pré-definidos a largura b_o e a espessura h , é dado por

$$c = \varphi R_{ext}, \quad (125)$$

onde φ define o ângulo do arco formado pelo material polimérico colado na superfície cilíndrica do disco de inércia.

Esses insertos feitos de material viscoelásticos fazem, então, a ligação entre o disco de inércia e o anel sintonizador.

Substituindo a equação 124 em 123, a tensão de cisalhamento resulta em

$$\tau(R) = \frac{1}{R} \left(\frac{M_t}{ncb_d} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{M_t}{ncb_o} \right). \quad (126)$$

Outra relação é definida entre a tensão de cisalhamento e o ângulo de perda de perpendicularidade, assim

$$\tau(R) = G(\Omega)\gamma \therefore \gamma = \frac{\tau(R)}{G(\Omega)}. \quad (127)$$

Substituindo 126 em 127, tem-se

$$\gamma = \frac{1}{R} \frac{M_t}{ncb_o}. \quad (128)$$

Sendo que $s_a = (R_{ext} - R_{int})\gamma = h\gamma$, deduzido a partir da figura 35, $ds = \gamma dR$ e usando o resultado obtido em 128 resulta em

$$s_a = \frac{M_t}{n\varphi b_o R_{ext} G(\Omega)} \int_{R_{int}}^{R_{ext}} \frac{1}{R} dR. \quad (129)$$

Aplicando algumas substituições nessa equação, lançando mão das relações dadas em 120 e 121, tem-se o ângulo φ , que define o comprimento do material viscoelástico e pode ser calculado por meio da expressão

$$\varphi = \frac{K_t}{nb_o R_{ext}^2 G(\Omega)} \ln \left(\frac{R_{ext}}{R_{int}} \right). \quad (130)$$

Para uma melhor distribuição e maior facilidade na montagem, recomenda-se pelo menos três insertos, colados equidistantes ao longo do perímetro do disco de inércia. Portanto, isso implica em $n \geq 3$.

Anel sintonizador

Como elemento de inércia do neutralizador dinâmico, o anel sintonizador (Figura 37) tem um papel importante no controle passivo de vibrações. As dimensões desse elemento devem estar em conformidade com as restrições do sistema rotodinâmico (espaço ocupado e massa adicionada) e ao mesmo tempo introduzir a inércia suficiente para conferir a funcionalidade necessária ao neutralizador. Para atender a esse último requisito (HARTOG, 1956), a definição dessa propriedade segue a relação estabelecida pela equação 65.

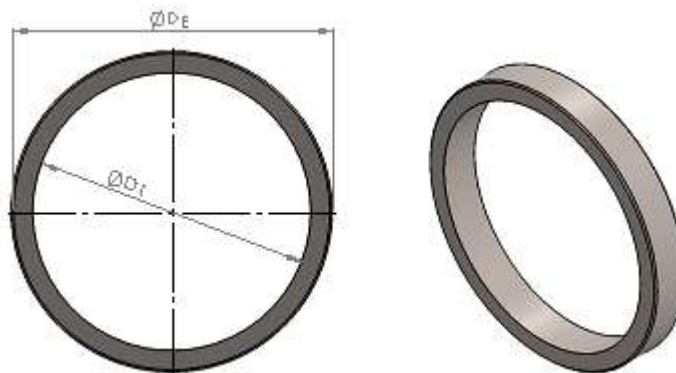


Figura 37: Anel sintonizador.

Alguns parâmetros do anel sintonizador são pré-definidos, pois o neutralizador foi ajustado ao sistema rotodinâmico já existente. Assim, foram atribuídas as dimensões: diâmetro interno $D_I = 130mm$ e largura $b_o = 20mm$ do anel sintonizador, restando definir o diâmetro externo D_E .

Esse valor específico, nesse caso, é definido levando-se em conta a resposta do sistema no local de instalação do NDV. Pode-se obter essa informação através da simulação numérica do modelo do rotor ou por meio da análise modal. Dessa forma, essa participação modal é contabilizada, no ponto de fixação do sistema auxiliar, conforme equação 64.

Uma relação auxiliar para obter-se o diâmetro externo é

$$m_a = \rho V \therefore m_a = \rho \frac{\pi}{4} (D_E^2 - D_I^2) b_o \therefore D_E = \sqrt{\frac{4m_a}{\pi b_o \cdot \rho} + D_I^2}. \quad (131)$$

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados da simulação e experimentais referentes ao sistema rotodinâmico.

6.1 Resultados simulados

Sistema de excitação

Nas próximas figuras, serão apresentadas algumas trajetórias (órbitas) desenvolvidas pela massa desbalanceadora durante a rotação do sistema rotodinâmico. As flechas que tangenciam essas órbitas indicam apenas as direções de deslocamento dessa massa.

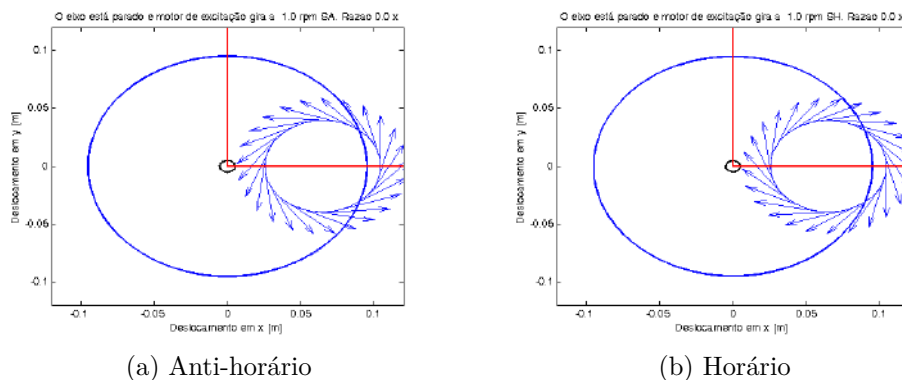


Figura 38: Órbita da massa desbalanceadora com o rotor parado.

Essa análise tem sua importância à medida que o movimento desenvolvido por essa massa de desbalanceamento tem relação direta entre as velocidades do motor CC e rotor. As figuras mostram que em determinadas configurações o sistema de excitação não induz vibração sobre o rotor e, portanto, essas condições de rotação devem ser evitadas.

Inicialmente, como observado na figura 38, o rotor parado (eixo - circunferência preta e disco de excitação - circunferência azul) na posição de 0° , segundo o referencial fixado no

centro do eixo, e o motor de excitação girando nos dois sentidos (indicados pelas flechas azuis).

Em seguida, figuras 39a e 39b, o rotor e a massa desbalanceadora giram em sentidos opostos.

Logo, percebe-se que, como a apresentada pelas figuras 39a e 41a, a massa desenvolve um movimento orbital elíptico ou circular, o qual praticamente acompanha a rotação do rotor. Nesses casos, por exemplo, o sistema de excitação é ineficaz, uma vez que a força de desbalanceamento não mudará seu sentido durante a sua órbita em torno do eixo do rotor.

Percebe-se, porém, que ao alterar-se a razão de velocidades de rotação (rotor e motor de excitação), segundo a figura 39b, há uma alteração na configuração da órbita desenvolvida pela massa desbalanceadora. Esse comportamento, conforme a figura 40, segue padrões bem definidos.

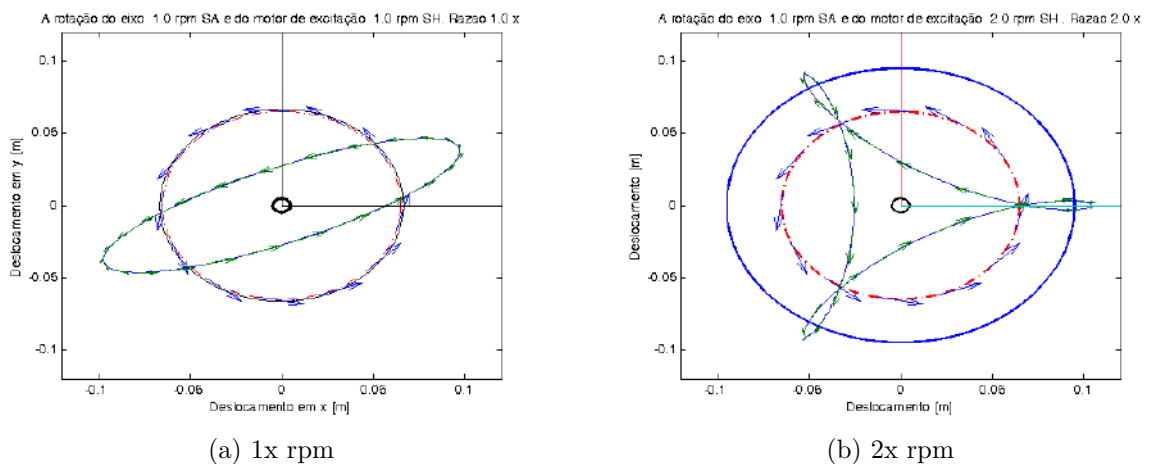


Figura 39: Órbita da massa desbalanceadora - sentidos de giro opostos.

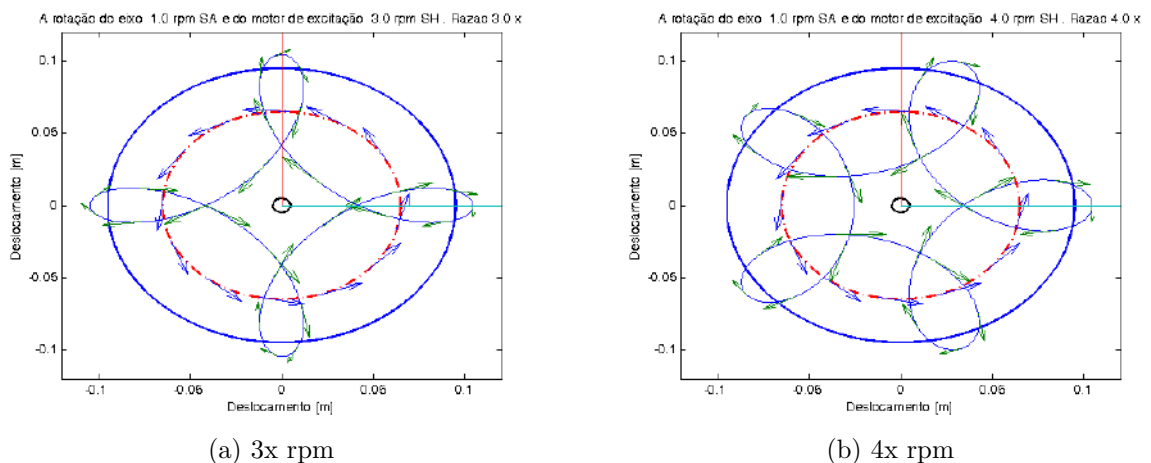


Figura 40: Órbita da massa desbalanceadora - sentidos de giro opostos.

Para outras razões de velocidades, verifica-se um aumento do número de laços na figura geométrica desenhados pela trajetória da massa desbalanceadora. Esses laços indicam modificações na direção do torque produzido pela força F_u .

O sentido da componente tangencial dessa força oscila, ora coincide e ora se opõe ao movimento do rotor, causando um efeito de aceleração e desaceleração do sistema (vibração).

Portanto, o número de laços formados está diretamente relacionado à frequência de inversões que ocorrem em um ciclo, e conseqüentemente à variação do torque no eixo.

No caso da figura 41a, onde as rotações são iguais e tem o mesmo sentido, a órbita da massa desbalanceadora é concêntrica ao movimento circular do disco de excitação. Nessa configuração o disco de excitação não produzirá o efeito de vibração torcional.

Quando o sentido de rotação são opostos, verifica-se que o laço formado é externo à circunferência traço-ponto vermelha (a qual indica a órbita do motor de excitação). Por

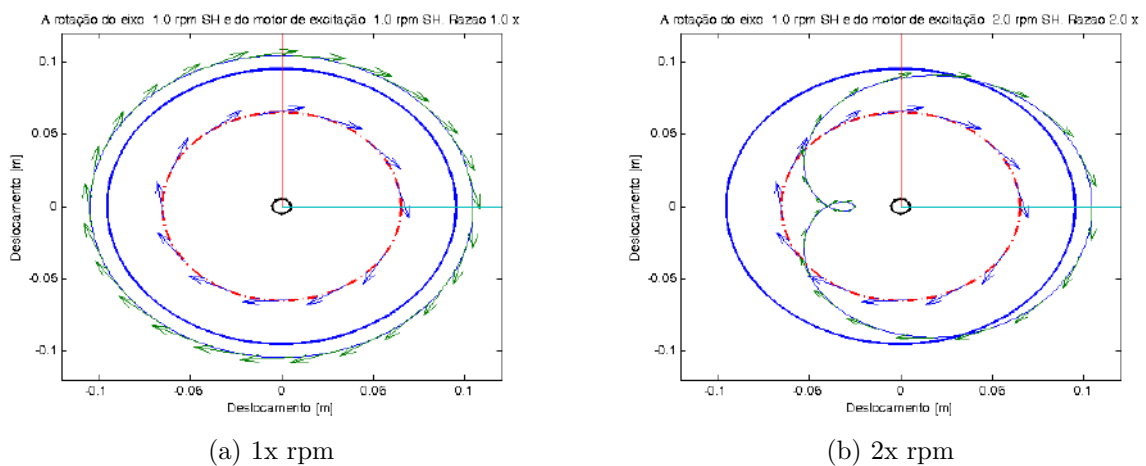


Figura 41: Órbita da massa desbalanceadora - sentido de giro concordante.

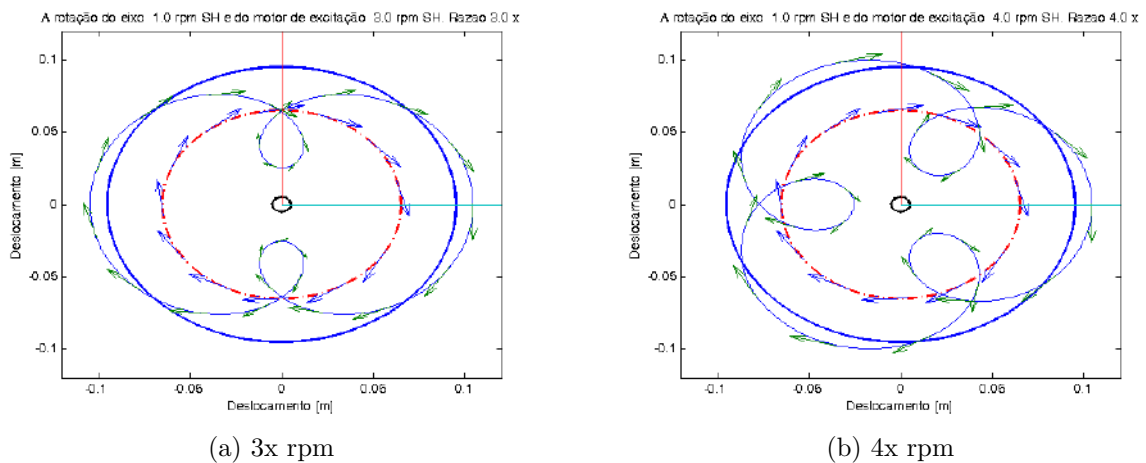


Figura 42: Órbita da massa desbalanceadora - sentido de giro concordante.

outro lado, quando os sentidos de rotação coincidem, esse laço se forma internamente a essa circunferência de centro (Figuras 41b, 42a e 42b).

Sinal de excitação

Os sinais apresentados na figura 43, parte superior, mostram a resposta observada em cada acelerômetro separadamente (cor azul), os quais se sobrepõem a um terceiro sinal relativo à frequência de rotação do rotor (cor vermelha).

Observou-se, no entanto, que além do procedimento descrito por Ewins (1984), faz-se necessário demodular o sinal. Isto é, remover a componente devida ao desbalanceamento do rotor. O resultado da simulação desse processo de demodulação é mostrado na parte inferior dessa mesma figura.

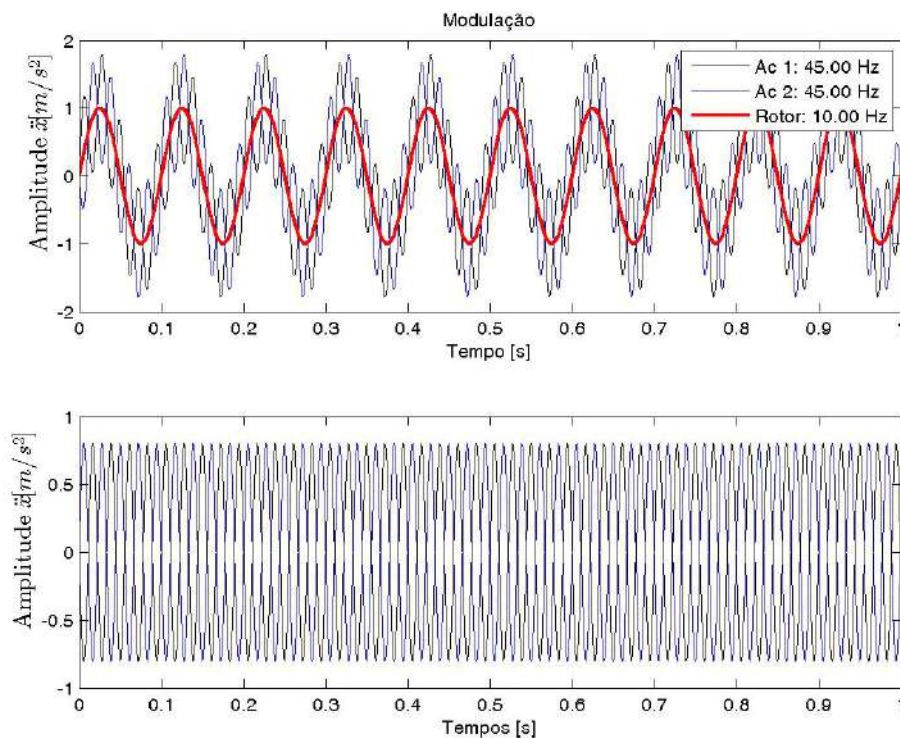


Figura 43: Simulação do sinal: rotor 10 Hz e excitação 45 Hz.

Após esse processamento obtém-se apenas o sinal de torção do rotor, portanto, a aceleração angular em rad/s^2 . Esse sinal e o respectivo espectro são exibidos na figura 44.

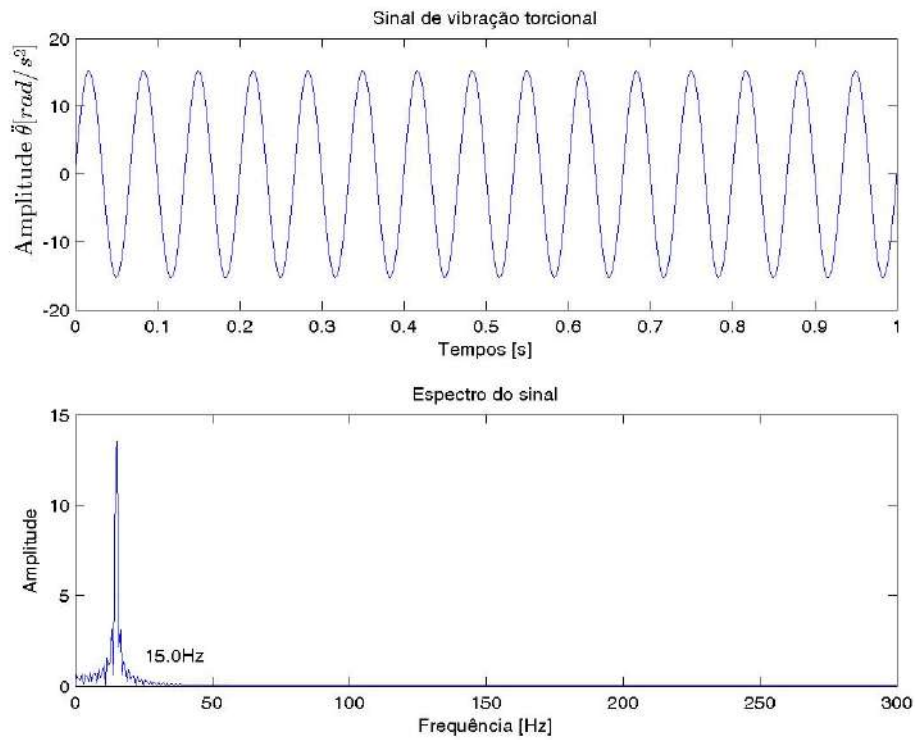
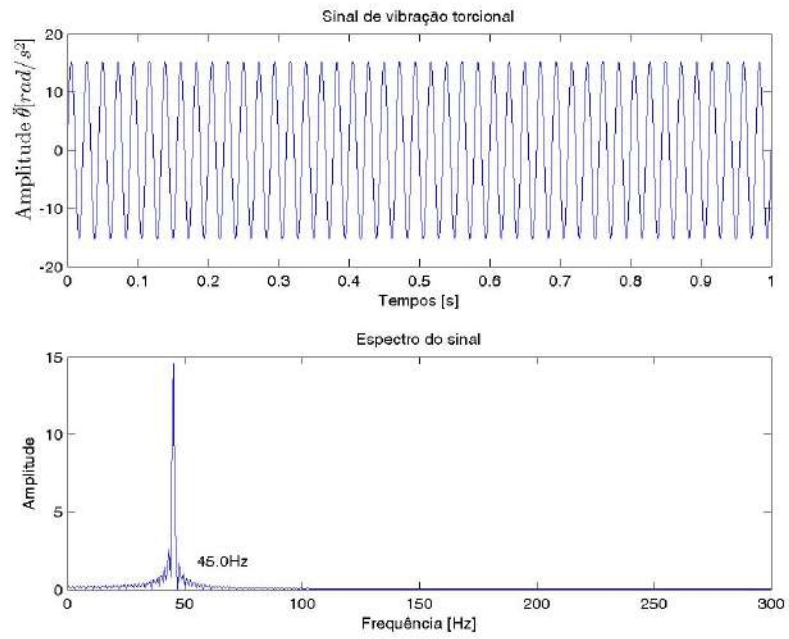


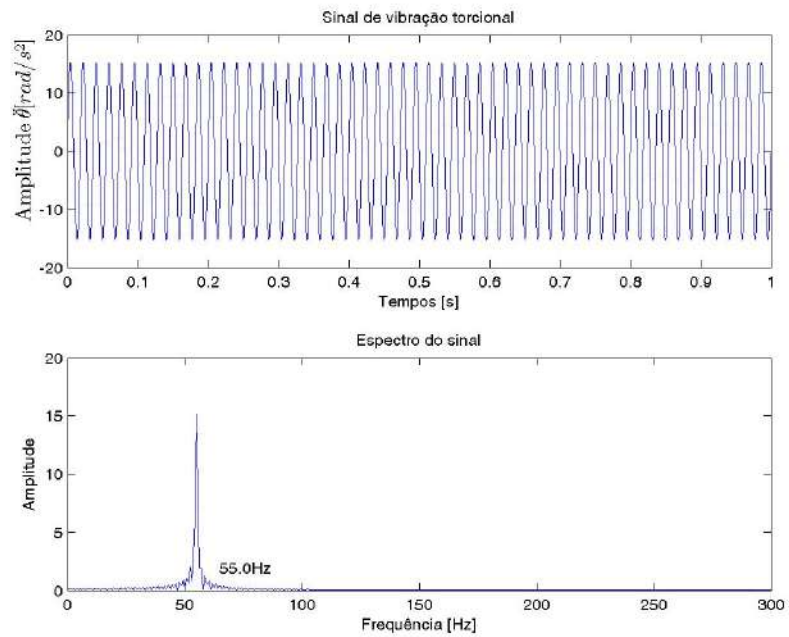
Figura 44: Simulação sinal de torção: excitação 15 Hz.

Com esse procedimento, serão eliminadas quase todas as componentes devidas aos sinais da vibração lateral. Todavia, deve-se estar atento, pois, sempre haverá alguma defasagem entre os sensores e, portanto, algum resíduo do sinal de vibração transversal poderá estar presente.

As figuras 45a e 45b ilustram os resultados do mesmo processamento de sinais, com frequências de excitação 45 Hz e 55 Hz, respectivamente.



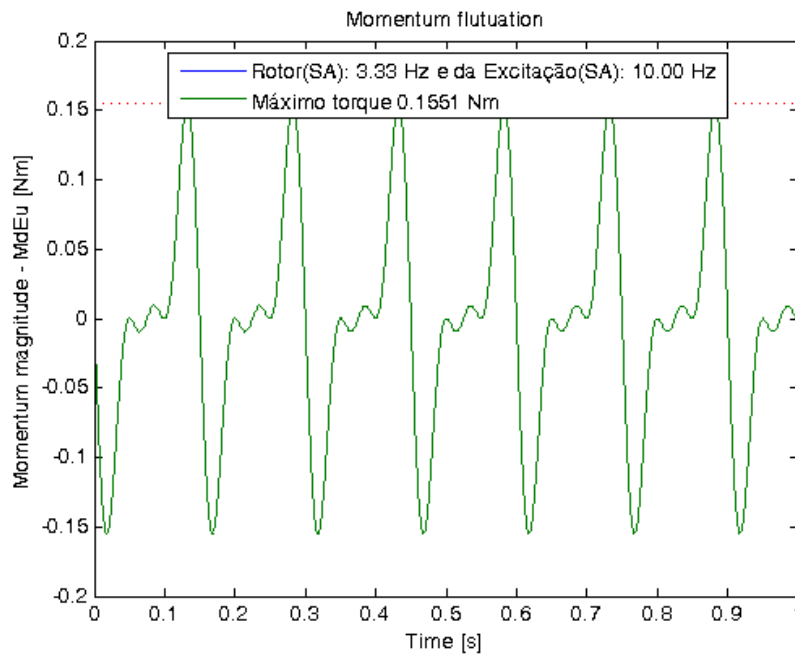
(a) Excitação em 45 Hz.



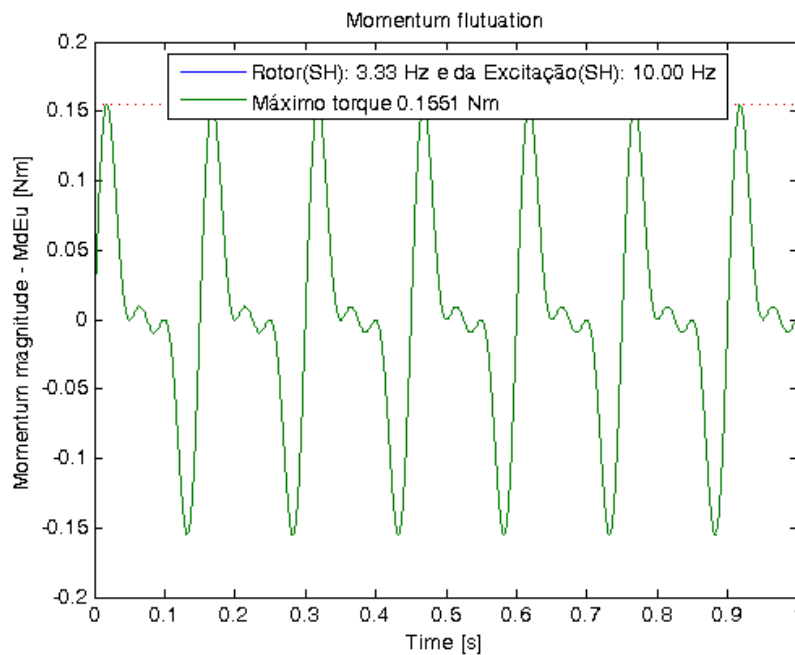
(b) Excitação em 55 Hz.

Figura 45: Simulação de sinais de torção.

Em seguida, determina-se o sinal relativo ao torque (Figura 46). Nota-se, por uma simples inspeção desse sinal, um comportamento característico, que se apresenta na forma de oscilações de menor amplitude em cada ciclo, as quais estão relacionadas à trajetória da massa desbalanceadora.



(a) Oscilações à esquerda.



(b) Oscilações à direita

Figura 46: Simulação do torque - sentido de rotação.

Verifica-se que o sinal se apresenta mais complexo do que um simples sinal harmônico, embora continue sendo periódico. O formato desse sinal, como analisado anteriormente, depende da razão de frequências rotor-excitação e essas oscilações, conseqüentemente, podem resultar na excitação de outros modos de vibrar da estrutura.

A figura 46 mostra dois sinais de torque com a rotor girando em 200 rpm, a excitação

em 600 rpm - no sentido anti-horário (SA) e no sentido horário (SH)- e a amplitude do torque de 0,16 Nm. A relação de frequência roto-excitação é $3\times$. Os sentidos de rotação alteram a forma como essas oscilações menores se apresentam. Assim, conforme o sentido da rotação e excitação, elas mudam de lado, em relação ao pico maior do sinal, para a direita ou à esquerda, como podem ser observadas nas figuras.

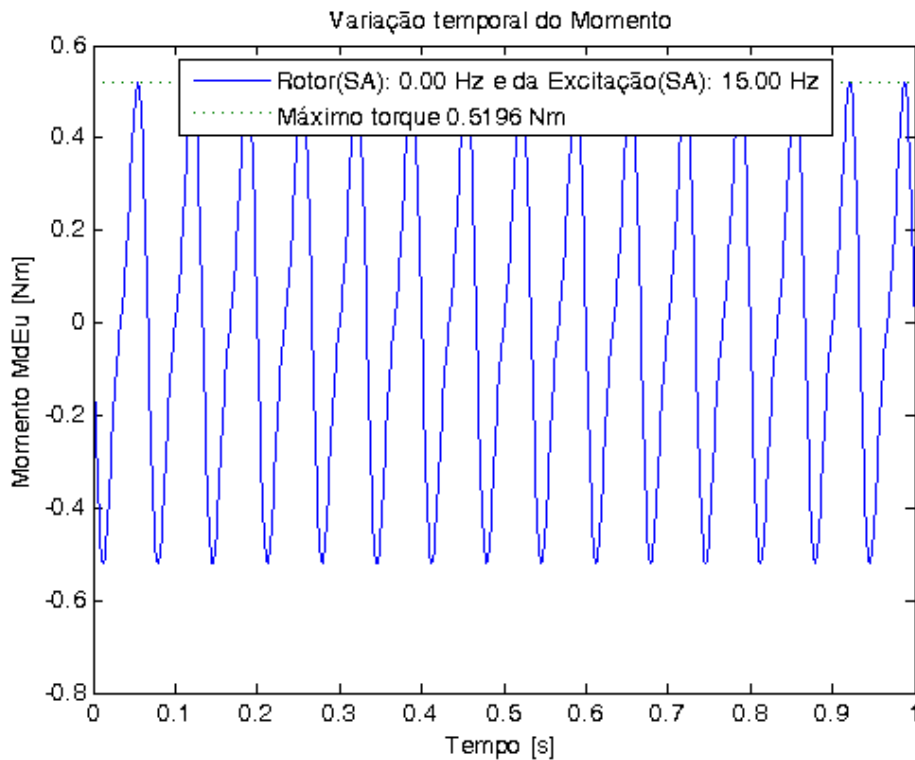


Figura 47: Simulação do torque: excitação 900 rpm.

Um sinal simulado com o rotor parado é apresentado na figura 47, onde a frequência do sinal de excitação foi fixado em 45 Hz e a magnitude resultante do torque foi de aproximadamente 0,52 Nm.

Pode-se notar que as oscilações intermediárias, como as que apareceram na simulação anterior, com o rotor e a excitação girando, não estão presentes.

Na sequência, a simulação mostra o comportamento do rotor movendo-se a 900 rpm e com excitação de 2700 rpm, o torque correspondente é de aproximadamente 3,93 Nm (Figura 48).

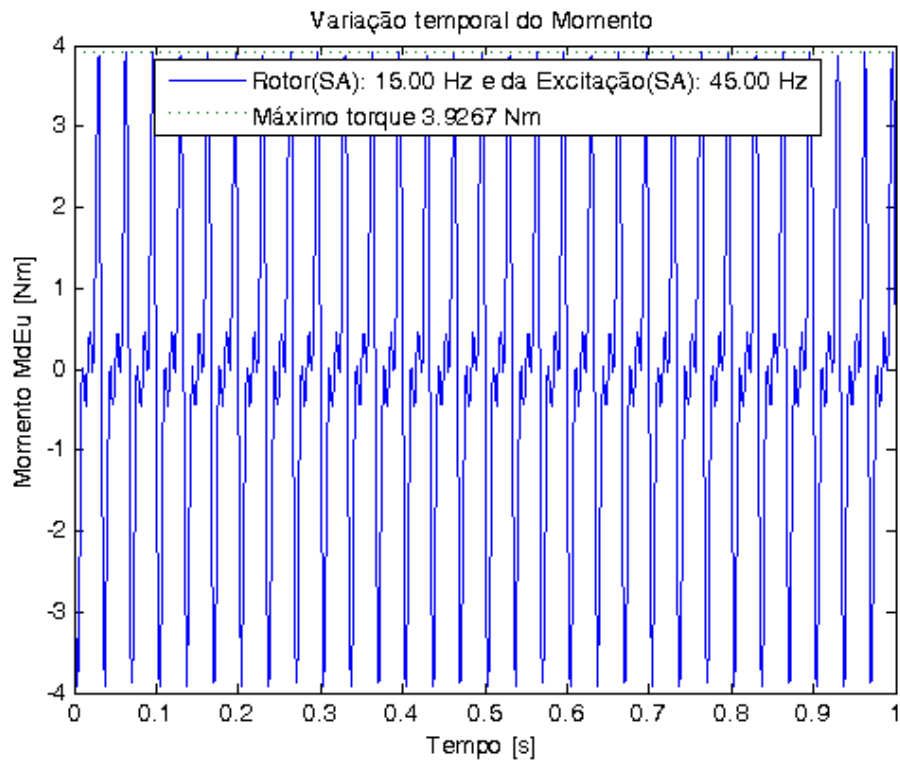


Figura 48: Simulação do torque: rotor 900 rpm excitação 2700 rpm.

As simulações mostram a relação característica de $3\times$ rpm, entre a velocidade de rotação do rotor e a excitação. Para concluir essa análise da trajetória da massa desbalanceadora, na figura 49 uma simulação com o rotor a 900 rpm e excitação a 3000 rpm.

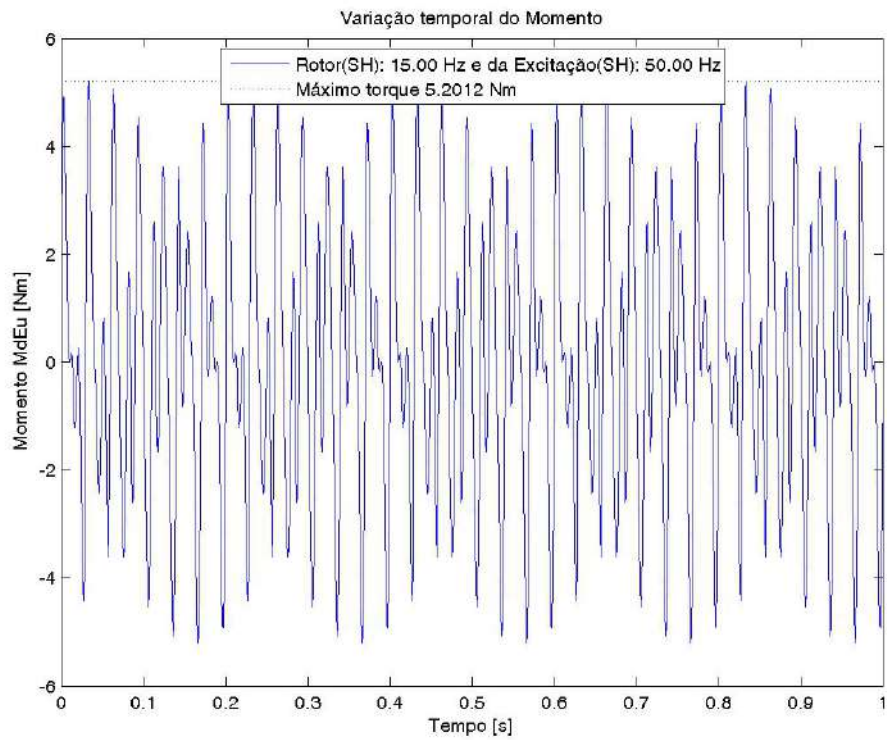


Figura 49: Simulação do Momento: rotação 900 rpm e excitação 3000 rpm.

O resultado mostra que as oscilações intermediárias, nessa configuração, não podem ser identificadas. Além disso, indica que o sinal gerado pelo sistema de excitação, ainda que periódico, apresenta uma distorção harmônica maior. Sugerindo, assim, que essa proporção de $3\times$ rpm deve ser seguida.

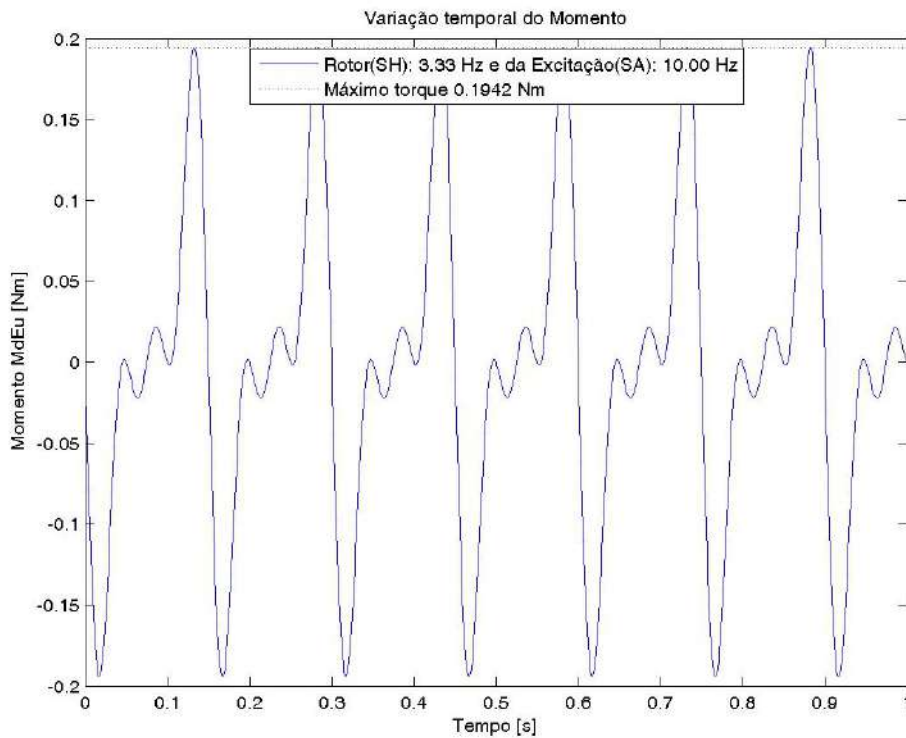


Figura 50: Simulação do Momento: rotação 200 rpm e excitação 600 rpm.

A partir desse estudo do sistema de excitação, pode-se estabelecer a forma do forçamento que atua sobre o rotor, gerada pelo sistema de excitação projetado. A modelagem desse forçamento é, portanto, feita empregando-se o produto vetorial entre vetor posição da massa desbalanceadora e a força de desbalanceamento. A qual, por sua vez, é o produto da massa desbalanceada e o vetor aceleração (segunda derivada no tempo do vetor posição, equação 114).

Modelo rotodinâmico

Foi implementada uma rotina em Matlab para determinar as frequências naturais e foram aplicados dois métodos, um para resolver o problema de autovalor e ou outro pelo método de Holzer (RAO, 2011). Os resultados dessa simulação são apresentados na tabela 2.

Tabela 2: Frequências Naturais não amortecidas.

i	Holzer	Matlab
Ω_0	0,00 Hz	0,00 Hz
Ω_1	52,75 Hz	52,78 Hz
Ω_2	190,06 Hz	190,08 Hz

Esses resultados, obtidos pelo método de Holzer, podem ser observados no gráfico ilustrado na figura 51, esse gráfico foi dividido em duas partes (superior e inferior) para melhor observação das amplitudes.

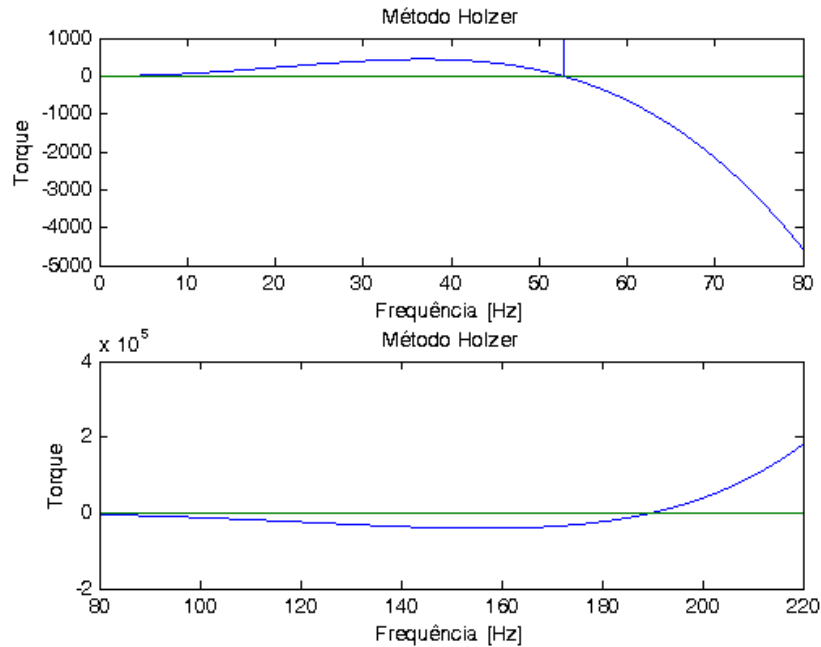


Figura 51: Método de Holzer.

De forma alternativa, foi produzido um outro gráfico com a ordenada em escala logarítmica, como o ilustrado na figura 52. Nessa figura, o resultado desse método é grafado em escala logarítmica, o que possibilitou destacar as respectivas frequências em uma única representação. Deve-se observar que as raízes, ou seja, os valores das frequências, por esse método, são encontradas nos pontos onde a curva de momento cruza com o eixo das abcissas.

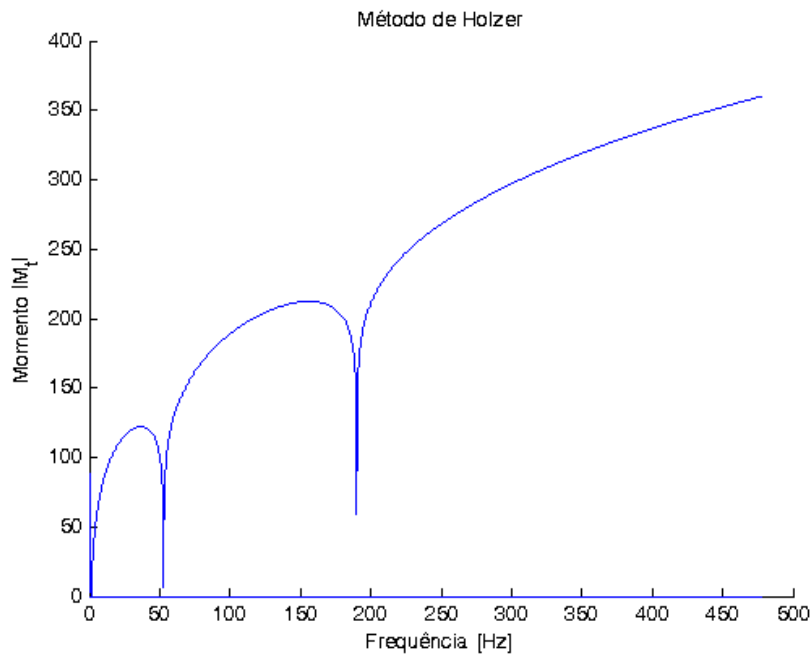


Figura 52: Método de Holzer - adaptado.

As velocidades críticas podem ser investigadas com o auxílio do diagrama de Campbell, como o da figura 53, nesse caso, observa-se a frequência natural torcional (ordenada) em função da rotação do sistema de excitação (abscissa). A reta inclinada, que cruza as linhas relativas às frequências naturais, determina as velocidades críticas de torção (LALANNE e FERRARIS, 1997; LEE, 1993).

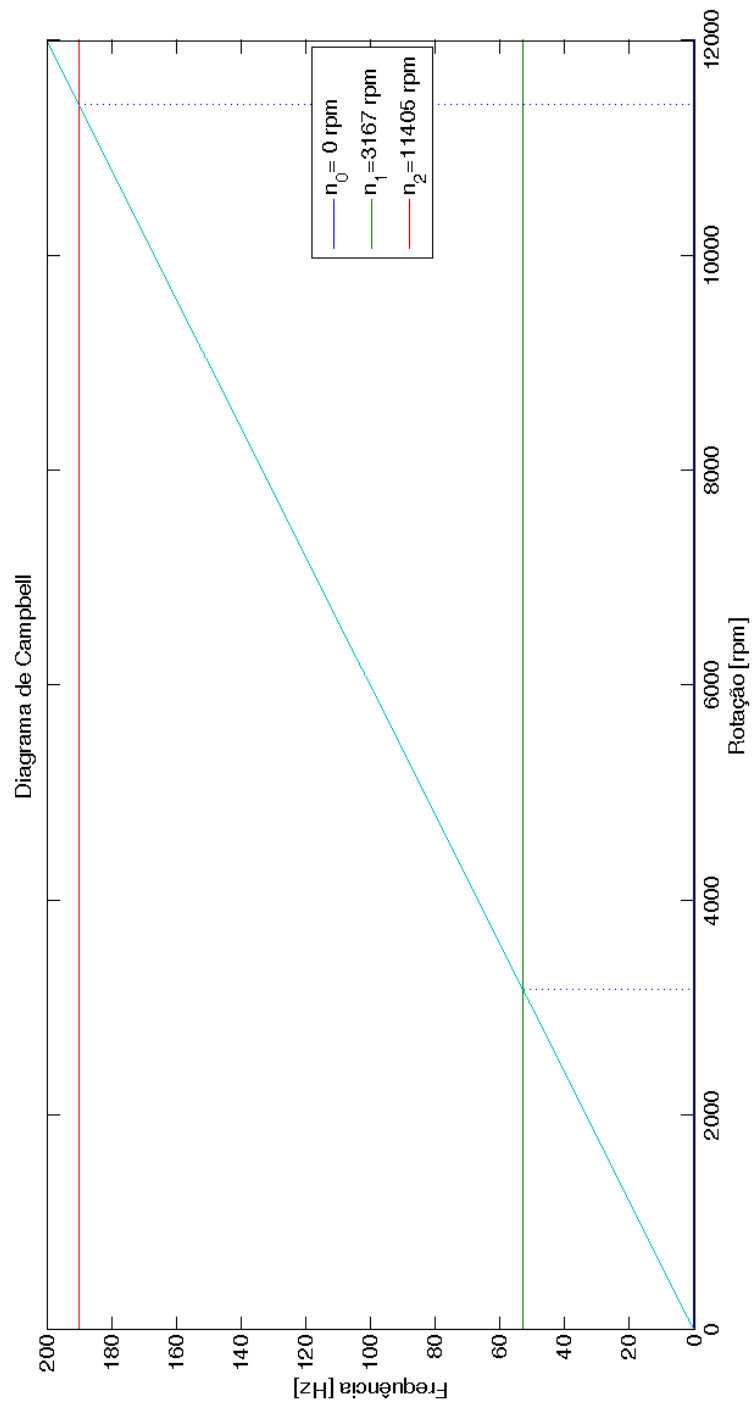


Figura 53: Diagrama de Campbell.

Em seguida, uma investigação foi realizada a partir da implementação do modelo em elementos finitos, levando-se em conta a impedância mecânica do sistema rotodinâmico e a solução do problema de autovalor e autovetor, para definir a matriz receptância, como visto anteriormente, trata-se de uma propriedade do sistema mecânico em análise. Conjuntamente, fez-se a avaliação da resposta considerando um amortecimento viscoso e um hysterético.

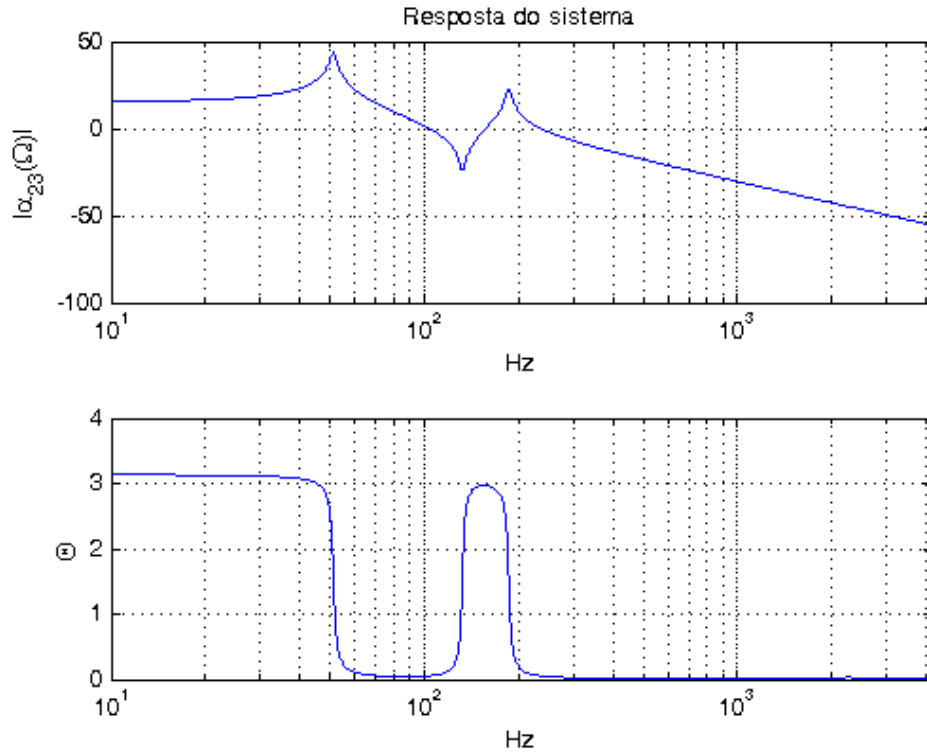


Figura 54: Elementos finitos(Rotor) - 3 modos.

Nessa análise, levou-se em conta as equações 10, 15 e 20 (VANCE *et al.*, 2010), além das demais relação de inércia e rigidez desenvolvidas no capítulo fundamentação teórica. Nas figuras que se seguem, 54 e 55, são apresentadas resposta em frequência do disco de inércia (1) excitado no disco de excitação (3), a simulação com 3 e 8 modos, conjuntamente com as respectivos ângulos de fase θ .

Foram realizadas simulações para alguns modos de vibrar, com razão de amortecimento $\zeta = 0,08$. Na comparação entre as simulações, as respostas com amortecimento viscoso e hysterético apresentaram uma quase sobreposição das curvas, todavia, observa-se uma pequena diferença na amplitude e fase.

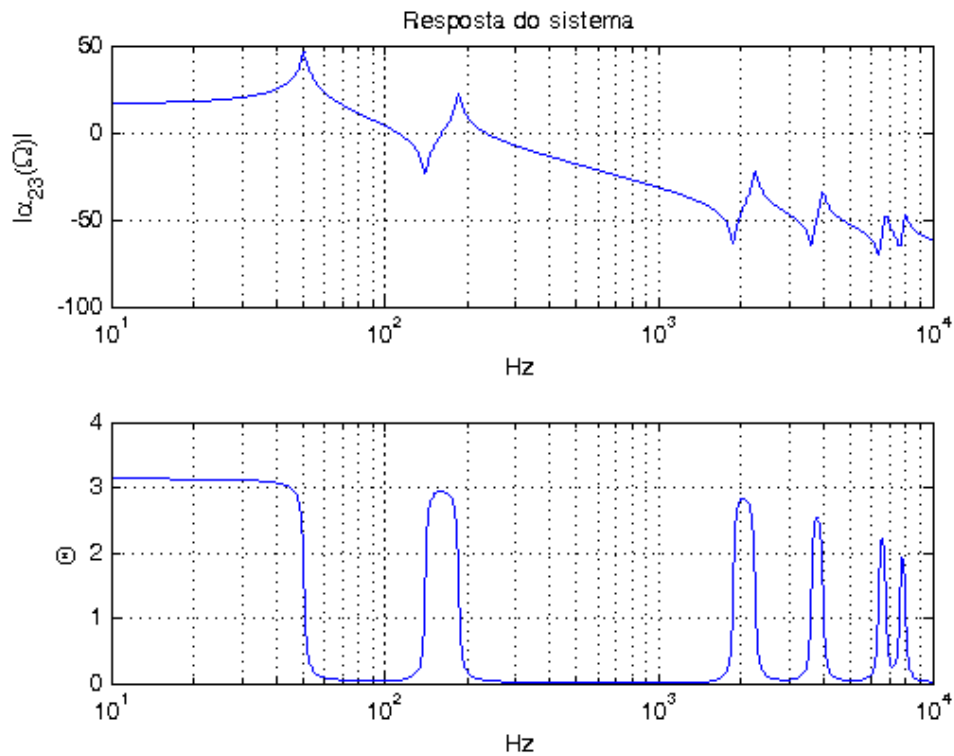


Figura 55: Elementos finitos (Rotor) - 8 modos.

A resposta em frequência do disco de inércia estimulado pelo sistema de excitação, é dada por um elemento da matriz receptância, conforme as equações 96 ou 97, referentes ao modelo viscoso (Figura 55) e histerético (Figura 57), respectivamente.

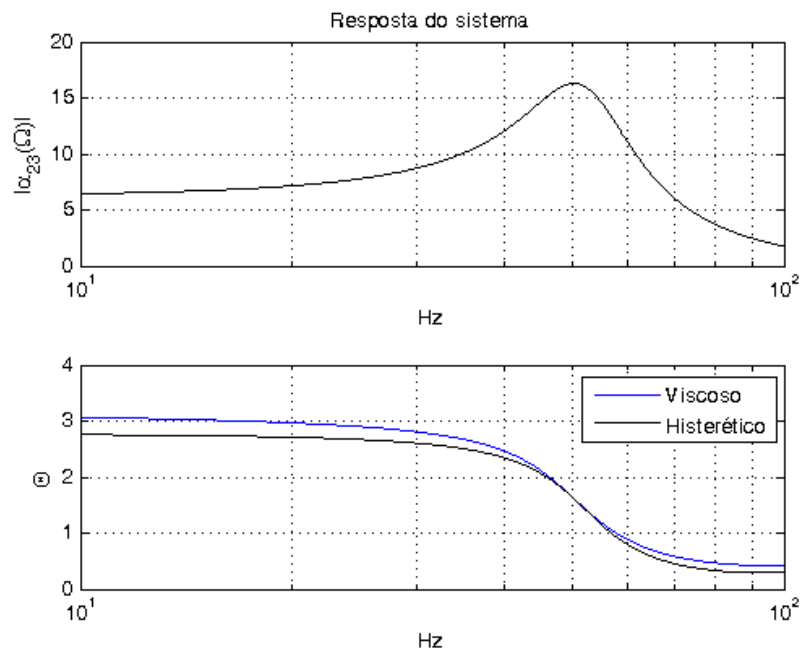


Figura 56: Elementos finitos (Rotor) - um modo.

Por fim, um gráfico com o sistema viscoso e histerético é apresentado na figura 57.

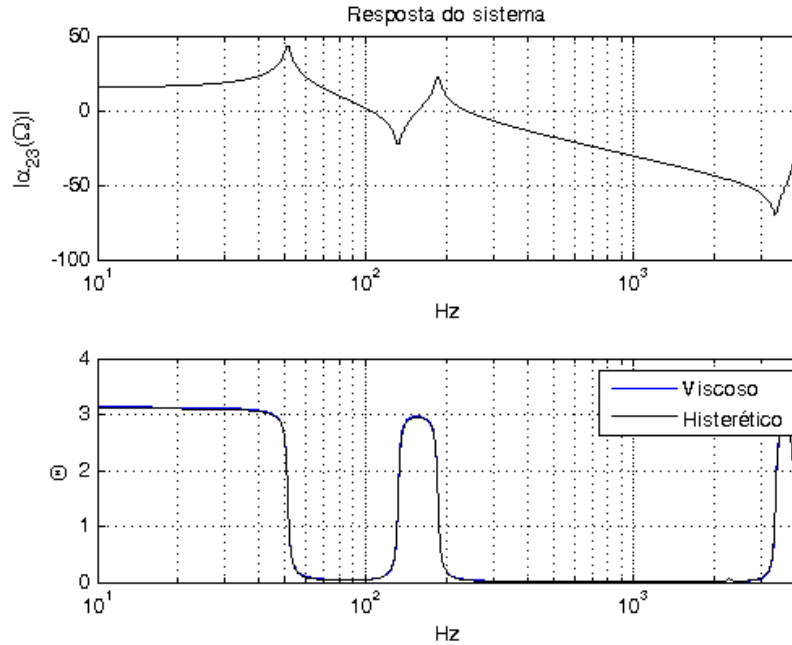


Figura 57: Elementos finitos (Rotor) - 5 modos.

Definição da massa

Levando-se em conta as restrições do sistema físico, características construtivas do rotor, e a participação modal conforme a equação 64 - cujos dados figura 58 - estabeleceu-se uma massa mínima para o neutralizador de $m_a \approx 0,254$ kg. Esse valor para massa do anel sintonizador, portanto, esta de acordo com a razão de massas μ recomenda por Hartog (1956) e Dimarogonas (1995). Substituindo os valores na equação 131, obteve-se dessa forma o valor do diâmetro externo do anel $D_E = 141,3$ mm.

Frequência naturais não amortecidas - Ω_n									
52.53	190.18	1922.78	3928.42	6065.09	8425.99	8430.08	11017.35	13693.76	15932.00
Matriz modal ortonormal - Φ (10^3)									
-0.0170	-0.0383	0.0015	0.0057	0.0014	0.0536	-0.0015	-0.0135	0.0328	-0.0323
-0.0120	-0.0260	-0.6561	-0.6414	-0.4892	0.0409	0.8075	0.7312	0.4245	-0.0270
-0.0070	-0.0136	0.0582	-0.8451	-0.0065	0.0281	-0.8935	-0.6818	-0.6057	-0.0216
-0.0020	-0.0012	0.7328	-0.5520	0.4971	0.0153	0.4996	-0.1333	-0.2235	-0.0161
0.0030	0.0112	-0.0001	0.0002	-0.0001	0.0025	0.0000	-0.0023	0.0059	-0.0107
-0.0019	0.0055	0.0660	0.0044	0.0471	-0.0008	-0.0654	0.5194	0.3951	-0.0068
-0.0067	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0040	0.0000	-0.0005	0.0012	-0.0029
-0.2042	0.1974	-0.3640	-0.0245	0.9736	0.1935	-0.6393	-0.7197	-0.3019	0.1946
-0.3716	0.3648	0.6716	0.0451	-1.0225	0.3609	0.7946	0.7412	0.5406	0.3621
-0.4835	0.4767	-0.8762	-0.0587	0.3216	0.4728	-0.5328	-0.2393	-0.5784	0.4738
-0.5228	0.5159	0.9478	0.0636	0.1067	0.5121	0.3472	0.3216	-0.4426	0.5131

Figura 58: Resultado da simulação - Dados modais do rotor (FEM).

Parâmetros do material viscoelástico

Os parâmetros do material são obtidos a partir do processo de otimização da curva resposta em frequência (FRF), no local, ou locais, onde a resposta do sistema é mais intensa.

Naturalmente pode-se instalar esse dispositivos em diferentes pontos da estrutura. Contudo, deve-se tomar alguma precaução na escolha desses pontos, de tal forma que estes não coincidam com algum nó. Pois, a amplitude de resposta nessa posição será mínima. Conseqüentemente, isto resultaria em um neutralizador ineficiente. O resultado final do processo de otimização simulado é apresentado na figura 59.

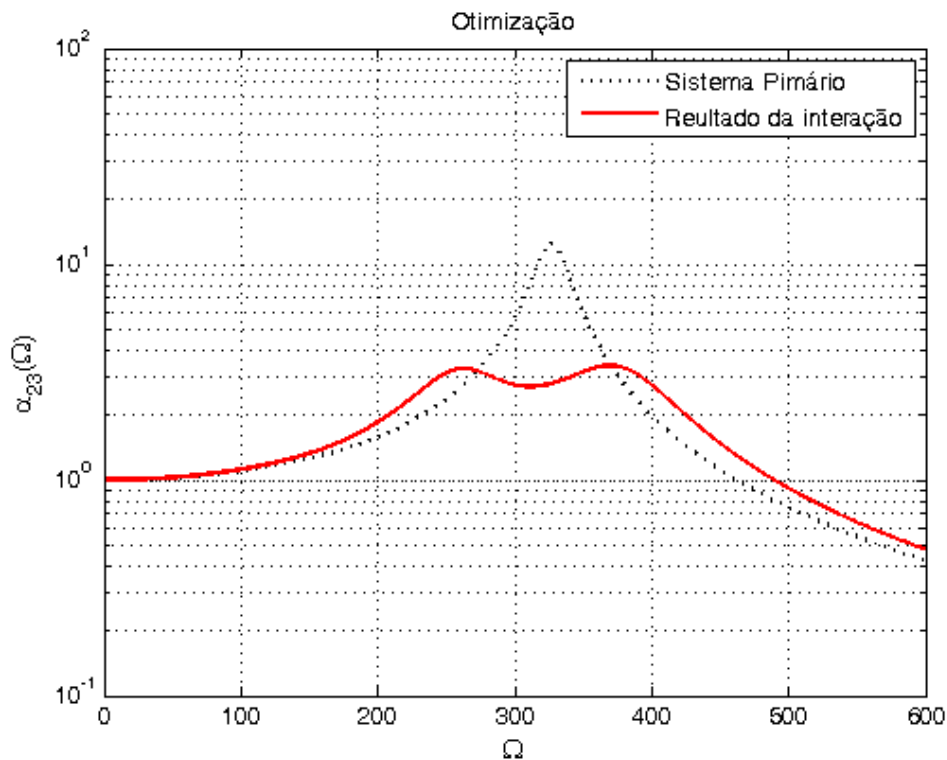


Figura 59: Simulação final - 52 Hz.

Os parâmetros de entrada Ω_a , α , b e G_o , que compõe o como vetor de projeto \underline{x} e os respectivos limites são $[200 \ 420; 0 \ 1; 10^{-6} \ 10^{-3}; 10^3 \ 10^8]$, que são valores comuns na aplicação de otimização de neutralizadores viscoelásticos (CRUZ, 2004).

A probabilidade de cruzamento (*cross-over*) foi determinada em 0,5, número de gerações 80, probabilidade de seleção 0,05 e probabilidade de mutação 0,1. Parâmetros ajustados no software *ModeFrontier*, aplicação de algoritmos genéticos denominado MOGA-II.

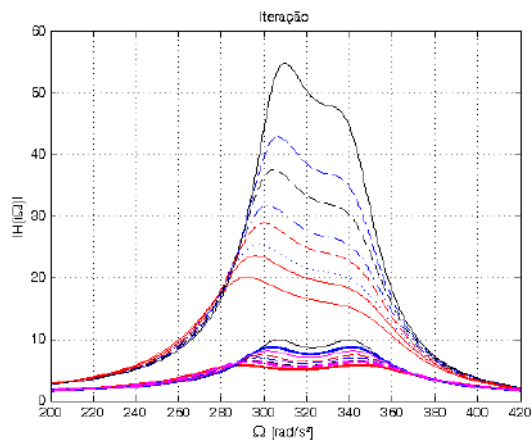
Os parâmetros do material selecionado (neoprene) para calibração do sistema foram obtidos através do DMA. Foram realizados ensaios com 15 amostras, cujos valores médios são apresentados na figura 3, que será apresenta mais adiante.

Nas figuras 60a e 60b mostra-se a interação ocorrida dentro do software Rotor (Mo-

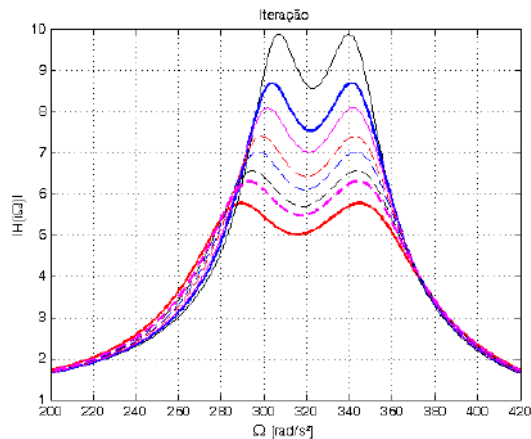
deFrontier/Matlab). Onde os parâmetros, dentro dos limites pré-estabelecidos, são implementados no modelo, até atingir os critérios de parada. Neste caso, por exemplo, foi adotado o critério de igualdade, $|\alpha_{23}(\Omega_A)| - |\alpha_{23}(\Omega_B)| = 0$, que define a amplitude da resposta com a aplicação do neutralizador. A banda foi limitada por $\Omega_A = 300$ rad/s e $\Omega_B = 340$ rad/s. Definindo assim, os valores ótimos quando essa restrição é atendida. No código Rotor o usuário pode selecionar essa banda (entra com os valores pelo teclado ou apontar com o *mouse* no gráfico de resposta).

Simulação do NDV

Na figura 60a observa-se através das curvas mais afastadas (maiores amplitudes) o início da otimização. Em seguida, o seu refinamento, nas curvas mais próximas (amplitude menores), as quais representam a convergência do resultado. Isto é destacado pela curva vermelha contínua na figura 60b, onde as amplitudes em Ω_A e Ω_B são aproximadamente iguais indicando, assim, a otimização dos parâmetros.



(a) Evolução do processo de otimização.



(b) Detalhe do processo iterativo da otimização

Figura 60: Otimização por algoritmos genético - produzida pelo código Rotor.

Procede-se uma comparação dos resultados obtidos via DMA e pelo código computacional Rotor (Tabela 3).

Tabela 3: Parâmetros do material viscoelástico (Neoprene).

i	DMA	Rotor	Diferença
G_o	0,856 10^6 Pa	0,875 10^6 Pa	2,1%
G_∞	2,433 10^6 Pa	2,480 10^6 Pa	1,9%
α	0,565	0,590	4,1%
b	8,761 10^{-3} s	2,79 10^{-3} s	1,7%

Pode-se, a partir desses resultados e com o auxílio da equação 65, definir o valor do fator de forma $L = A/h$. Entretanto, deve-se proceder um ajuste nesse parâmetro, pois, ele tem unidade de metro³, quando utilizada na definição de Ω_a (frequência anti-ressonância) da equação 75. Isto porque, está se utilizando o momento de massa ao invés da massa, como na equação 68. Para isso define-se $L' = ((r_E^2 + r_I^2)/2)L$.

Tabela 4: Parâmetros do material viscoelástico - complementar.

i	DMA	Rotor	Diferença
η_a	0,290	0,313	7,3%
μ_I	0,255	0,255	
μ	0,1	0,1	
Ω_a	287,2 rad/s	292,3 rad/s	1,7%

Assim, o valor calculado para o fator de forma corrigido L' é $3,35 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$. De posse do valores desse fator de forma corrigido, do módulo de armazenamento do material viscoelástico e da frequência anti-ressonância (Tabela 4), pode-se calcular o comprimento do inserto viscoelástico, cujo valor calculado é $c = 18,22 \text{ mm}$ (Equações 130 e 125, respectivamente).

6.2 Resultados experimentais

6.3 Sistema de excitação

A figura 61, na parte superior, são mostrados os sinais de resposta dos acelerômetros MEMS's 1 e 2, separadamente. Percebe-se a modulação devida à rotação do rotor. A resposta desses acelerômetros é observada na figura como os sinais de maior frequência (32Hz), que se cruzam. A oscilação de baixa frequência (10Hz), refere-se a rotação do rotor. Na parte inferior da figura 61, está o espectro do sinal de excitação (torção).

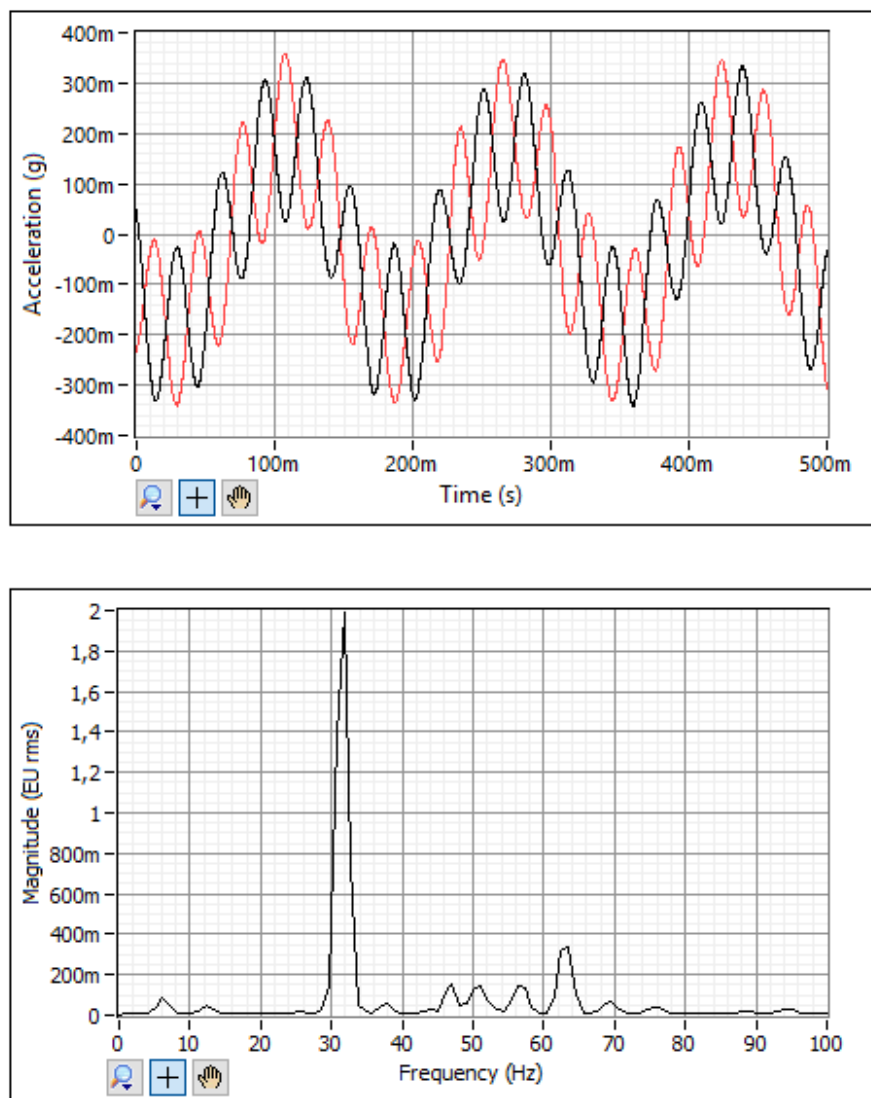


Figura 61: Sinal do rotor girando 10Hz e a excitação em 32Hz.

O próximo exemplo a frequência de excitação foi ajustada para 48 Hz, e a frequência do rotor foi mantida em 10 Hz. Percebe-se a semelhança no comportamento desses dois sinais, a qual se mantém igual, independente de outros ajustes nas frequências do sistema de excitação e do rotor.

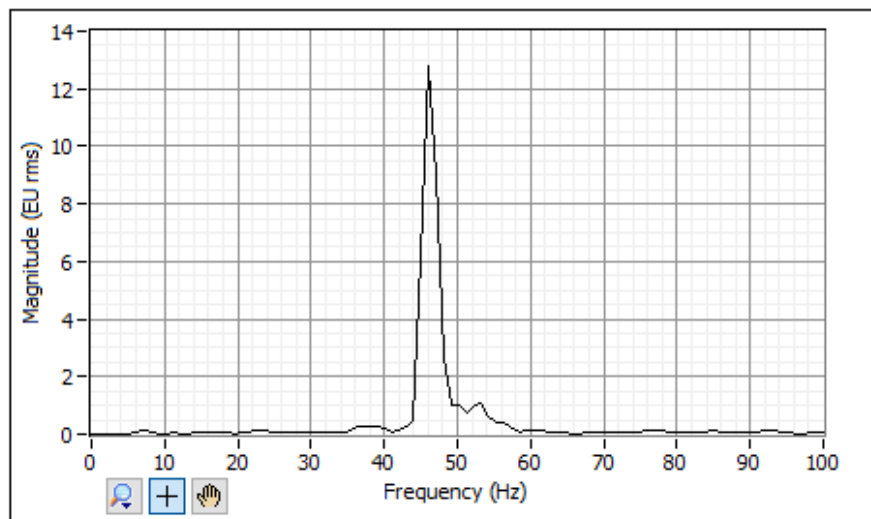
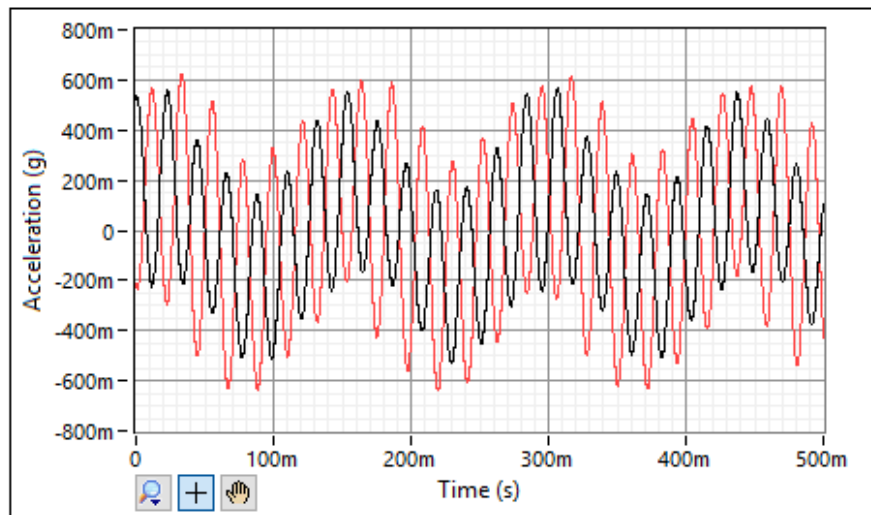


Figura 62: Sinal do rotor girando a 10H e a excitação em 46Hz.

Na medição mostrada na figura 63, pode-se observar o sinal torcional, na parte de superior e o respectivo espectro, na parte inferior. Ajustou-se a frequência do rotor para essa análise em 5 Hz, que é a mínima frequência de rotação que se pode ajustar o motor do rotor - frequências menores do que essa o rotor irá parar (devida às características do inversor de frequência).

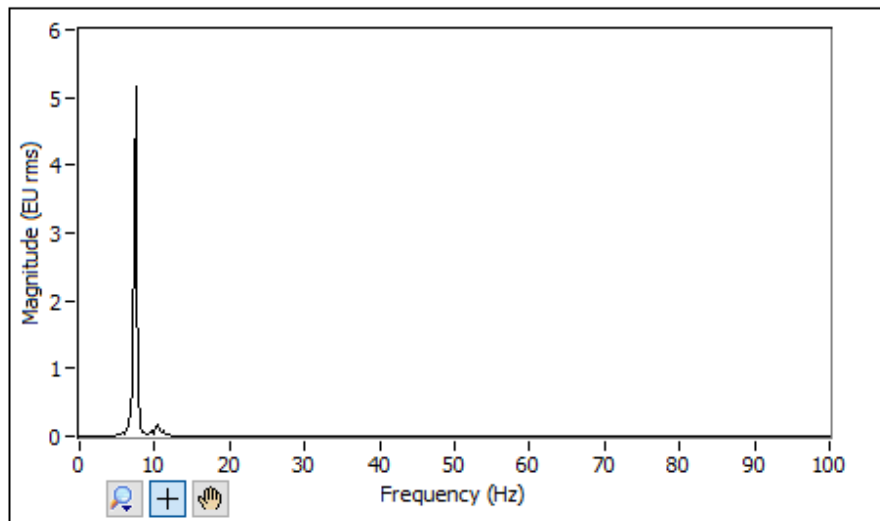
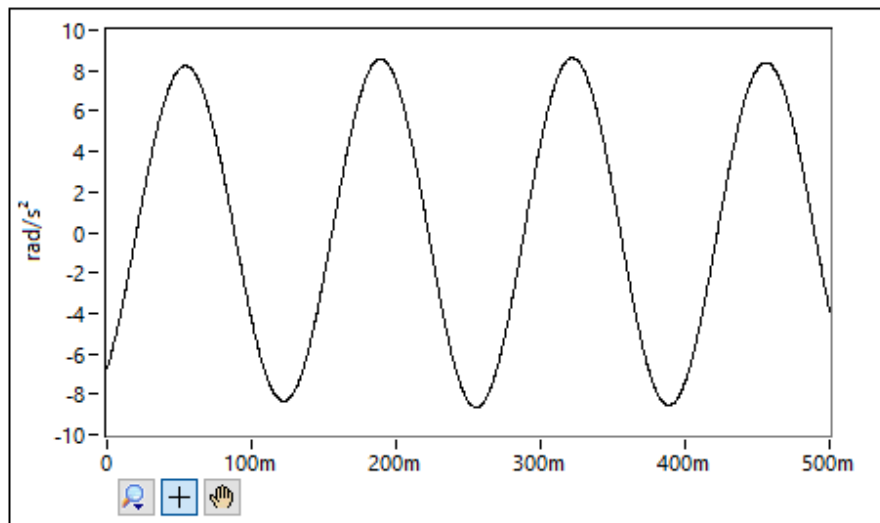


Figura 63: Sinal de torção, no tempo e o espectro, em 5Hz .

Em seguida o sistema de excitação foi ajustado para produzir um determinado torque, no caso com intensidade de 1,5 Nm, o espectro de resposta é mostrado na parte inferior da figura 64. Na parte superior dessa figura, onde está o sinal de torque de excitação, percebe-se a semelhança desse sinal de excitação com o sinal simulado. Além disso, no espectro, apresentado nessa figura, notam-se duas linhas espectrais, uma em 26 Hz e outra, de amplitude menor, em 52 Hz. Mostrando, dessa forma, que o conteúdo harmônico do sinal de excitação, acaba realmente estimulando outras frequência, isto é, harmônicos da frequência fundamental.

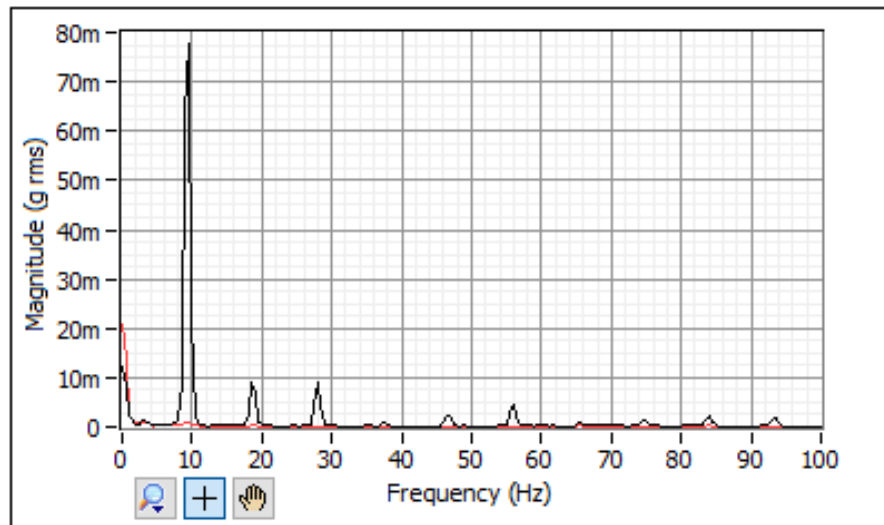


Figura 64: Vibração axial medido nos discos de inércia/excitação, excitação 10Hz .

Fez-se uma verificação se haveria alguma influência do disco de excitação, em decorrência da força de desbalanceamento, na direção axial. Dessa forma, mediu-se o sinal de vibração na direção axial, fixando-se dois acelerômetros na borda inferior dos discos de inércia e do disco de excitação. Observa-se que tal influência é basicamente nula (Figura 65).

Análise modal

Foi realizada, inicialmente, uma análise modal do rotor com um martelo de impacto. O resultado é apresentado na figura 66a, que apresenta a FRF α_{23} (resposta do disco de inércia I_1 excitado no disco de excitação I_E). Complementando, a figura 66b é a coerência do sinal. Esse resultado confirma a presença de um modo na frequência de 52 Hz.

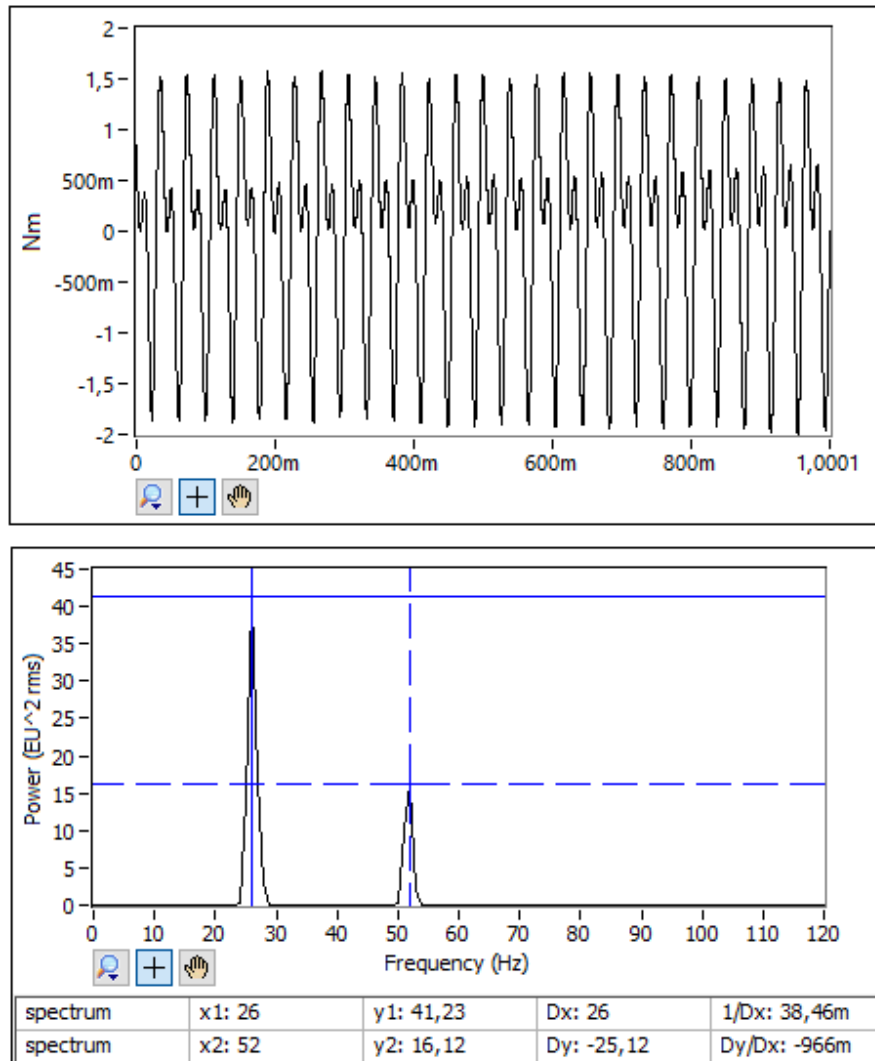
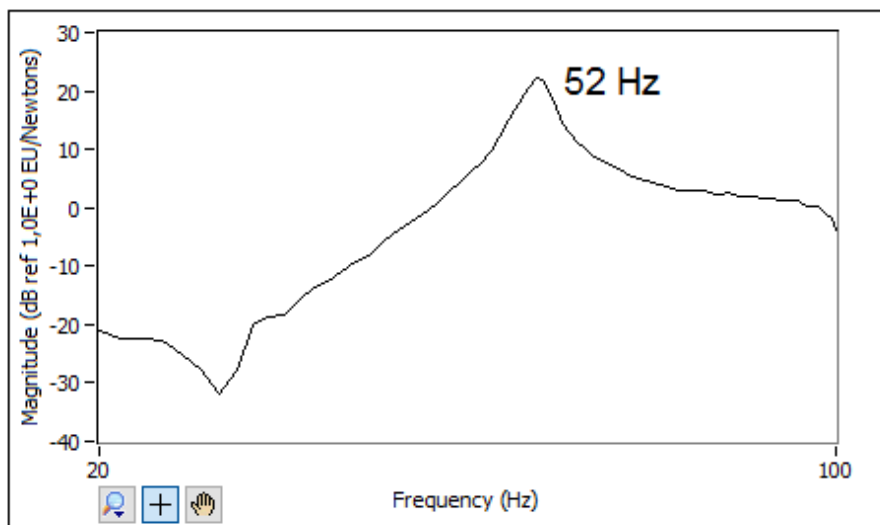
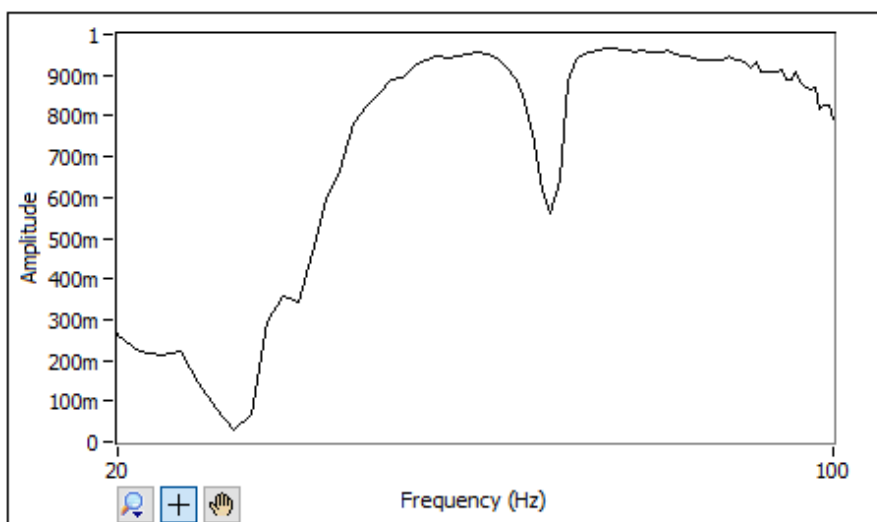


Figura 65: Vibração axial medido nos discos de inércia/excitação, excitação 10Hz .



(a) FRF



(b) Coerência.

Figura 66: Análise modal - Impacto do martelo.

Seguiu-se então para a montagem do NDV sobre o rotor, conforme pode ser observado na figura 67a, e no detalhe (Figura 67b) pode-se observar a instalação do elastômero (Neoprene) e o disco de inércia.

Durante a preparação a superfície foi devidamente preparada para a colagem do material viscoelástico. Foram removidas as oxidações superficiais através de um lixamento (lixa ferro granulação 120), remoção de pó e gordura com álcool etílico 42° e a secagem com papel toalha e algodão; em seguida a preparação do inserto com a remoção da gordura em ambas as faces. Foi depositada sobre a superfície do disco de inércia, igualmente preparado, a porção de cola de secagem rápida marca *superbond/Loctite*.

Essa cola foi testada sob esforço de tração em uma máquina universal de ensaios mecânicos (marca EMIC, modelo DL60000). O rompimento ocorreu em 1658 N, com des-

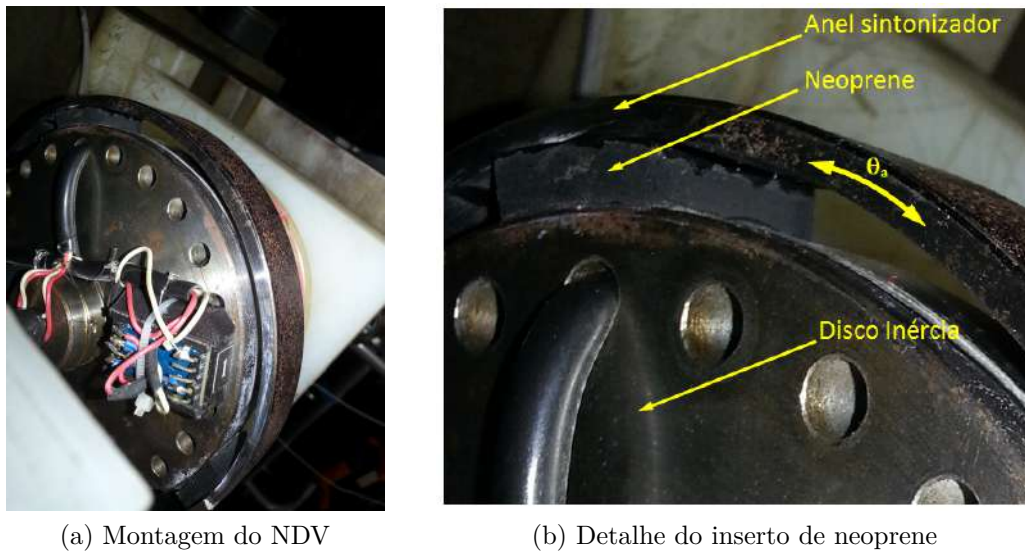


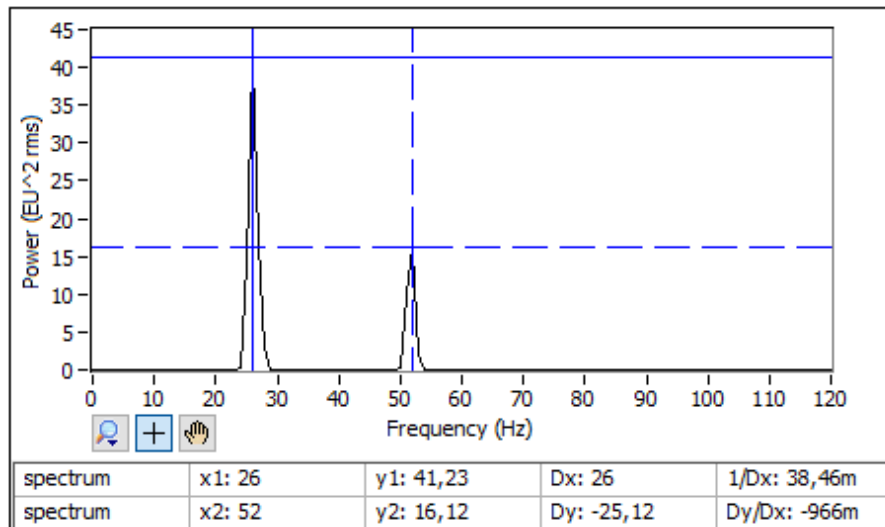
Figura 67: Montagem final do NDV.

colamento parcial médio de 23 %. O aparato projetado é apresentado na figura ??, no apêndice.

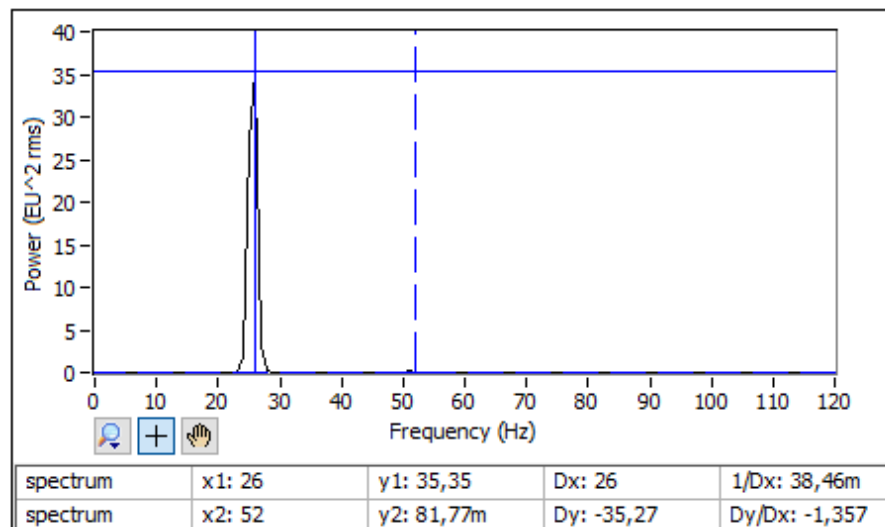
Após a cura da cola, foram realizadas algumas análises com rotor estático, excitado pelo sistema de excitação. No alojamento do motor CC foram instalados os acelerômetros ICP's de forma que foi possível levantar a FRF do sistema rotodinâmico. A figura 68a mostra o espectro desse sinal, percebe-se uma frequência em destaque de 26 Hz e outra em 52 Hz. Devido à adição da massa desbalanceadora, o motor CC não foi capaz de alcançar toda a sua rotação, dependendo parte de sua potência para movimentá-la. Em testes preliminares a frequência de excitação máxima alcançada foi de 40 Hz. No entanto, percebe-se pelo espectro que ao ser ajustada na frequência de 26 Hz houve a excitação da frequência natural torcional.

Ao inserir o neutralizador, percebeu-se que a amplitude em 52 Hz foi suprimida. Esse comportamento manteve-se ao longo de todo o experimento, com a inserção e remoção do anel sintonizador. Confirmando, dessa forma, que a supressão ocorrerá decorrente da instalação do NDV.

Como analisado no item Sistema de Excitação, o movimento da massa excitadora acrescenta um conteúdo com mais de um harmônico, que possivelmente pode excitar outras frequências naturais do sistema. Assim, justifica-se a excitação no modo de 52 Hz.



(a) Excitação em 26 Hz e resposta em 52 Hz



(b) Controle do harmônico

Figura 68: Controle com neutralizador.

Capítulo 7

Conclusão e Sugestões

7.1 Conclusões

A presente pesquisa versou sobre a modelagem de um neutralizador dinâmico de vibrações torcionais, construído com material viscoelástico. O foco da aplicação desse dispositivo foi no controle passivo das trepidações de torção em um sistema rotodinâmico. Como salientado, as principais características que tornam os neutralizadores viscoelásticos uma escolha adequada para o controle passivo está associada ao baixo impacto sobre a massa do sistema composto e sua versatilidade de aplicação em estruturas complexas. Características que estão associadas essencialmente ao polímero empregado na construção desses dispositivos.

De forma diferente do que se tem estabelecido até o momento para neutralizadores viscoelásticos torcionais, nessa tese as propriedades do material viscoelástico foram definidas a partir das condições do estrutura física, refletidas na resposta do sistema rotodinâmico em decorrência de uma excitação. Certamente, há a possibilidade dessas propriedades indicarem um polímero que ainda não exista. Porém, tal material poderá ser fabricado, haja vista, já existem recursos disponíveis para sintetizar esse polímero com propriedades próximas às desejadas.

Nessa pesquisa a resposta do sistema rotodinâmico foi obtida via elementos finitos. Poder-se-ia, também, definir as propriedades do material viscoelástico a partir da análise modal do sistema. Foi implementado um código em matlab, denominado Rotor, para sistematizar os cálculos previstos na modelagem do sistema rotodinâmico/neutralizador. Integrado a esse código, foi utilizada uma ferramenta de otimização (ModeFrontier), esta última com a função de auxiliar à escolha dos parâmetros do neutralizador e as propriedades do material viscoelástico que atribuam, a essa estrutura secundária, o melhor desempenho.

De forma adicional, o modelo proposto também disponibiliza o dimensionamento do neutralizador a partir das propriedade de alguma material conhecido (disponível

no mercado). Essa característica foi alcançada em virtude da escolha da metodologia para construir o modelo. Isto é, primeiro a modelagem foi feita com base em um material conhecido, no caso o neoprene, e depois estabeleceu-se o método inverso para calcular as suas propriedades. A caracterização desse elastômero, para identificação das propriedades - fator de perda e módulo complexo - foi realizada no DMA (Dynamic Mechanical Analyser).

As dimensões do neutralizador foram obtida a partir do fator de forma e utilizou-se para isso a razão dos momentos de inércia, face tratar-se de um sistema rotativo. Essas propriedades físicas, assim definidas, generalizam o modelo.

O arcabouço dessa modelagem foi o modelo fracionário da viscoelasticidade linear. A opção por esse método de modelagem teve como argumento a habilidade do modelo fracionário em descrever, de forma mais realística, o comportamento dinâmico desses materiais poliméricos. Além disso, foi implementado no modelo o conceito de quantidades equivalentes e a possibilidade de uma análise modo a modo. Dessa forma, a rotina desenvolvida já considera a eventualidade da análise de um sistema com vários graus de liberdade.

Face a indisponibilidade de um sistema para monitorar a intensidade da excitação -com o rotor em movimento-, não foi possível obter-se a resposta do disco de inércia devida ao sistema de excitação, de forma dinâmica. Portanto, alguma característica específica dessa condição de operação não pode ser observada. Assim, o presente estudo restringiu-se a monitorar o sistema rotodinâmico com o rotor parado, no que diz respeito a obtenção da FRF (do disco de inércia excitado pelo sistema de excitação).

Um sistema de medição foi projetado com base no princípio de funcionamento *slip-ring*. Quando comparado aos sistemas tradicionais de medição de vibrações, no caso os que empregam acelerômetros do tipo ICP's, as medições realizadas com esse sistema de medição, com acelerômetros MEMS's, apresentaram-se satisfatórias.

Em relação ao sistema de excitação, houve alguma limitação em função da massa desbalanceadora, que reduziu a capacidade do motor CC de desenvolver rotação máxima. Portanto, o sistema de excitação esteve apto a alcançar a primeira ressonância. Contudo, e devido ao conteúdo harmônico do sinal de excitação, houve a possibilidade de excitar a frequência do primeiro modo. Isso permitiu verificar dinamicamente a eficácia do neutralizador.

No que tange a modelagem, concentrada no código Rotor, o qual integra toda a teoria apresentada nessa tese, esta mostrou-se como uma ferramenta mais direta para fornecer os parâmetros do material a ser utilizado e, conseqüentemente, os respectivos parâmetros geométricos do neutralizador. Com base nas propriedades definidas por esse modelo, pode-se selecionar um material polimérico com características mais apropriadas para a aplicação em tela.

Por fim, avalia-se que o neutralizador dinâmico de vibrações torcionais viscoelástico,

construído com as especificações fornecidas pelo modelo do código Rotor, teve a habilidade de mitigar os efeitos das amplitudes de vibração na faixa de frequência de interesse. Portanto, corroborando o potencial da modelagem proposta.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

O efeito do momento introduzido pelo sistema de excitação pode ser intensificado com a instalação de um segundo motor no disco de excitação. No entanto, os braços que ligam as massas desbalanceadoras aos motores devem ser dispostos em sentidos opostos. Dessa forma, em determinadas posições as forças de desbalanceamento serão somadas (formando um binário em torno do eixo do rotor). Por outro lado, quando eles estiverem alinhados com o centro do rotor, colineares, as forças de desbalanceamento serão opostas. Evidentemente, para conseguir esse efeito será necessário que os dois motores operem de forma sincronizada.

Como alternativa para reduzir a massa introduzida pelo sistema de excitação pode-se optar por motores sem escovas (*bushless*), que adicionalmente permitem operações em frequências mais altas.

Na medida em que o sistema rotodinâmico possa operar em frequências mais altas, deve-se levar em conta os possíveis efeitos da assimetria do fator de perda. Conforme Pritz (2003), nessas condições a modelagem do comportamento do material viscoelástico deve ser feita com base no modelo de cinco parâmetros.

Uma etapa natural seria a produção do material viscoelástico com as propriedades indicadas pelo modelo. Além disso, estabelecer uma relação entre os componentes e fatores de processamento da liga polimérica a essas propriedades.

Um estudo dedicado ao efeito da temperatura e intempéries complementar a especificação do elastômero. Uma vez que nas aplicações práticas várias fontes de calor e degradação podem estar presentes.

Aperfeiçoar o sistema de medição através da comunicação *wireless*. Para isso, é preciso desenvolver um circuito com dimensões menores. A alimentação desse sistema sem fio é um dos grandes desafios e torna-se primordial para o aprimoramento desse tipo de sistema de medição embarcado.

Integrar o *softwares* de elementos finitos e otimização de forma a automatizar o processo de obtenção dos parâmetros ótimos do material e do neutralizador de vibrações. Aproveitando a integração natural que há entre esses softwares, por exemplo, o Matlab[®], ANSYS[®] e ModeFrontier[®]. Isso propiciará explorar todas as alternativas de otimização disponibilizadas.

Referências Bibliográficas

- ADAMS JR., M. L., 2010, *Rotating machinery vibration: from analysis to troubleshooting*. 2 ed. New York, CRC Press.
- BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J., 1983, “A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity”, *Journal of Reology*, v. 49, n. 3, pp. 201–210.
- BAGLEY, R. L., TORVIK, P. J., 1986, “On the fractional calculus model of viscoelastic behaviour”, *Journal of Reology*, v. 30, n. 1, pp. 133–155.
- BALACHANDRAN, B., MAGRAB, E. B., 2011, *Vibrações mecânicas*. 2 ed. New York, Cengage.
- BAVASTRI, C. A., 1997, *Redução de vibrações de banda larga em estruturas complexas por neutralizadores viscoelásticos*. Tese de Doutorado, UFSC - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - POSMEC, Florianópolis, SC, Brasil.
- BAVASTRI, C. A., FEBBO, M., GONÇALVES, V. V., et al., 2014, “Optimum viscoelastic absorbers for cubic nonlinear systems”, *Journal of Vibration Control*, v. 20, n. 10 (feb), pp. 1464–1474. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1177/1077546312473322.
- BAVASTRI, C. A., DA S. FERREIRA, E. M., DE ESPÍNDOLA, J. J., et al., 2008, “Modeling of dynamic rotors with flexible bearings due to the use of viscoelastic materials”, *Journal of Brazilian Soc of Mech Sci and Eng*, v. 30, n. 1 (jan.), pp. 22–29.
- BELL, J. R., S. J. ROTHBERG, 2000, “Rotational vibration measurements using laser doppler vibrometry: comprehensive theory and practical application”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 238, n. 4 (maio), pp. 673–690.
- BRENNAN, M. J., GATTI, G., 2012, “The characteristics of a nonlinear vibration neutralizer”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 331, n. 2012 (feb), pp. 3158–3171. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1016/j.jsv.2012.02.010.
- BRINSON, H. F., CATHERINE, B. L., 2008, *Polymer engineering science and viscoelasticity: an introduction*. 1 ed. New York, Springer.

- CAHNDRA, N. H., SEKAHAR, A. S., 2014, “Swept sine testing of rotor-bearing system for damping estimation”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 1, n. 333 (feb), pp. 604–620. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1177/1077546312473322.
- CAMARGO, R. F., DE OLIVEIRA, E. C., 2015, *Cálculo fracionário*. 1 ed. São Paulo, Livraria Física.
- CARRELLA, A., FRISWELL, M., ZOTOV, A., et al., 2009, “Using nonlinear springs to reduce the whirling of a rotating shaft”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, n. 7 (out.), pp. 2228–2235. ISSN: 08883270. doi: 10.1016/j.ymsp.2009.03.006. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S088832700900079X>>.
- CAVALCA, K. L., CAVALCANTE, P. F., OKABE, E. P., 2005, “An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 1, n. 19 (mar.), pp. 157–174.
- CECCON, E. R., 2008, *Controle de vibrações torcional usando neutralizadores dinâmicos viscoelásticos*. Dissertação de Mestrado, UTFPR PPEM - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica e de Materiais, Curitiba, PR, Brasil.
- CHEN, R., WU, T., 2014, “Vibration control of base system using distributed dynamic vibration absorbers”, *Journal of Vibration and Control*, v. 347, n. 2010 (jul), pp. 102–115. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1177/1077546312472923.
- CHRISTENSEN, R. M., 2003, *Theory of viscoelasticity*. 2 ed. New York, Academic Press.
- CRUZ, G. A. M., 2004, *Projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos viscoelásticos baseado no modelo a derivadas fracionárias*. Tese de Doutorado, UFSC - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - POSMEC, Florianópolis, SC, Brasil.
- DATTA, P., RAY, M. C., 2015, “Three-dimensional fractional derivative model of smart constrained layer damping treatment for composite plates”, *Composite Structures*, , n. 30 (mar.).
- DE ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., LOPES, E. M. O., 2010, “On the passive control of vibrations with viscoelastic dynamic absorber of ordinary and pendulum types”, *Journal of the Franklin Institute*, v. 347, n. 2010 (jul), pp. 102–115. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1016/j.jfranklin.2009.09.004.
- DIMAROGONAS, A. D., 1995, “Interval analysis of vibrating systems”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 4, n. 184, pp. 739–749.

- ESPINDOLA, J. J., 1996, “Existence Theorems in the Theory of Mixtures”, *Journal of Elasticity*, v. 42, n. 2 (fev.), pp. 145–163.
- ESPINDOLA, J. J., PEREIRA, P., BAVASTRI, C. A., et al., 2004, “Design of optimum system of viscoelastic vibration absorbers with a Frobenius norm objective function”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 1, n. 164 (mar.), pp. 493–506.
- ESPINDOLA, J. J., PEREIRA, P., BAVASTRI, C. A., et al., 2009, “Design of optimum system of viscoelastic vibration absorbers with a Frobenius norm objective function”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 1, n. 164 (mar.), pp. 493–506.
- ESPÍNDOLA, J. J., CRUZ, G. A. M., LOPES, E. M. O., et al., 2005, “Design of optimum viscoelastic”. In: *Proceedings of the XI DINAME*, pp. 237–253, Ouro Preto-MG BR, mar.
- ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., LOPES, E. M., 2008, “Design of optimum system of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model”, *Journal of Sound and Vibration*, , n. 14 (dez.), pp. 1607–1630.
- EWINS, D. J., 1984, *Modal testing: theory and practice*. 1 ed. New York, Research Studies Press.
- FRISWELL, M. I., DUTT, J. K., ADHIKARI, S., et al., 2010, “Time domain analysis of a viscoelastic rotor using internal variable models”, *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 1, n. 52 (set.), pp. 1319–1324.
- GOLLA, D. F., HUGHES, P. C., 1985, “Dynamics of viscoelastic structures - a time domain, finite element formulation”, *Journal of Applied Mechanics*, v. 52, n. 4, pp. 897–906.
- GURP, M. V., PALMEN, 1998, “Time-temperature superposition for polymeric blends”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, p. 4.
- HARTOG, D., 1956, *Mechanical Vibration*. 2 ed. New York, Springer-Verlag.
- HERRMANN, R., 2011, *Fractional Calculus: an introduction for physicists*. 1 ed. New Jersey, World Scientific.
- HILFER, R., 2000, *Vibration simulation using Matlab and Ansys*. 1 ed. Germany, World Scientific.
- JONES, D. I. G., 1990, “On temperature-frequency analysis of polymer dynamic mechanical behaviour”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 140, n. 1 (feb), pp. 85–102.

- K. DIETHELM, FORD, N. J., FREED, A. D., et al., 2005, “Algorithms for fractional calculus: a selection of numerical methods”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, pp. 743–773.
- KHULIEF, Y. A., AL-SULAIMAN, F. A., BASHMAL, S., 2007, “Vibration analysis of drillstring with self-excited stick-slip oscillations”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 299 (out.), pp. 540–558.
- KITIS, L., WANG, B., PILKEY, W., 1983, “Vibration reduction over a frequency range”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 89, n. 4 (8), pp. 559–569. ISSN: 0022-460X. doi: 10.1016/0022-460X(83)90357-7.
- KÄMER, E., 1993, *Dynamics of rotors and foundations*. 1 ed. New York, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- LALANNE, M., FERRARIS, G., 1997, *Rotordynamics prediction in engineering*. 2 ed. New York, Wiley and Sons.
- LEE, C.-W., 1993, *Vibration analysis of rotors*. Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- LESIEUTRE, G. A., BIANCHINI, E., 1995, “Time of domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields”, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 117, n. 4 (feb), pp. 424–430.
- LI, C., DENG, W., 2007, “Remarks on fractional derivatives”, *Applied Mathematics and Computation*, v. 1, n. 187 (jan.), pp. 777–784.
- LI, R., 2000, “Time-temperature superposition method for glass transition temperature of plastic materials”, *Materials Science and Engineering*, v. 278, pp. 36–45. ISSN: 01486055. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509399006024>>.
- LOPES, E. M. O., BAVASTRI, C. A., ESPÍNDOLA, J. J., et al., 2004, “Caracterização dinâmica integrada de alastômeros por derivadas generalizadas”. In: *III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (COBEM), 2004*, Belém - PA, nov.
- MAINARDI, F., 2010, *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity : an introduction to mathematical models*. 1 ed. London, Imperial College Press.
- MCTAVISH, D. J., HUGHES, P. C., SOUCY, Y., et al., 1992, “Prediction and measurement of modal damping factors for viscoelastic space structures”, *AIAA Journal*, v. 30, n. 5 (may), pp. 1392–1399.

- MEIROVITCH, L., 2001, *Fundamentals of vibrations*. New York, McGraw-Hill.
- MICHALSKI, M. A. C., 2004, *Análise teórico-experimental do comportamento dinâmico de um rotor horizontal suportado por mancais hidrodinâmicos*. Dissertação de Mestrado, UFRJ - COPPE/PEM - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- MOSCHEN, I. D., 2006, *Sobre as funções Mittag-Leffler e o modelo fracionário de materiais viscoelásticos*. Tese de Doutorado, UFSC - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - POSMEC, Florianópolis, SC, Brasil.
- MUSZYNSKA, A., 2005, *Rotordynamics*. 2 ed. Boca Raton, CRC Press.
- NOORI, B., FARSHIANFAR, A., 2013, “Optimum design of dynamic vibration absorbers for a beam based on H_∞ and H_2 optimization”, *Arch Appl Mech*, v. 347, n. 2013 (jul), pp. 1773–1787. doi: 10.1007/s00419-013-0777-y.
- OLDHAM, K. B., SPANIER, J., 1974, *The Fractional Calculus*. New York, Academic Press.
- OYADIJI, S. O., TOMLINSON, G. R., 1995, “Characterization of the dynamic properties of viscoelastic elements by the direct stiffness and master curve methodologies, Part 1: design of load frame and fixtures”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 186 (ago.), pp. 623–647.
- PACHECO, J. E. L., 2013, *Caracterização de materiais viscoelásticos com aplicação de séries de Prony e análise por elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, UFPR PEM - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Curitiba, PR, Brasil.
- PACHECO, J. E. L., BAVASTRI, C. A., PEREIRA, J. T., 2014, “Viscoelastic relaxation modulus characterization: using Prony series”, *Latin American Journal of Solid and Structures*, v. 42, n. 2 (out.), pp. 145–163. doi: 10.1590/1679-78251412.
- PEREIRA, J. C., 2003. “Introdução à Dinâmica de Rotores”. Disponível em: <http://www.grante.ufsc.br/download/Dinamica%20de%20Rotores/DIN-ROT_VF-Apostila-JCarlos.pdf>. Anotações de Aulas. Acesso em: 30/05/2016.
- PINTO, F. A. N. C., 2007, “Magnetic Bearing”. In: *Proceedings of COBEM, 19th International Congress of Mechanical Engineering*, Brasília-DF BR, nov.
- PRITZ, T., 2003, “Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping material”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 0, n. 265 (ago.), pp. 935–952.

- RAO, S. S., 2008, *Mechanical Vibration*. 4 ed. New York, Prentice-Hall.
- RAO, S. S., 2011, *Mechanical Vibration*. 5 ed. New Jersey, Pearson Education.
- RESOR, B. R., TRETHERWEY, M. W., MAYNARD, K. P., 2005, “Compensation for encoder geometry and shaft speed vibration in time interval torsional vibration measurement”, *Journal of Sound and Vibration*, v. 0, n. 286 (out.), pp. 897–920.
- RIANDE, E., DIÁZ-CALLEJA, R., PROLONGO, M. G., et al., 2000, *Polymer viscoelasticity: stress and strain in practice*. New York, Marcel Dekker.
- RIPPER NETO, A. P., 2007, *Vibrações Mecânicas*. 1 ed. Rio de Janeiro, E-papers.
- ROGERS, L., 1983, “An accurate temperature shift function and a new approach to modeling complex modulus”, *Journal of Rheology*, v. 27, n. 4 (jan.), pp. 351 – 372.
- ROSS, B., 1977, “Fractional calculus”, *Mathematics Magazine*, v. 50, n. 3 (maio), pp. 115–122.
- ROSSIKHIN, Y. A., SHITIKOVA, M. V., 1995, “Application of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass systems”, *Acta Mechanica*, v. 1, n. 120 (nov.), pp. 109–125.
- ROYLANCE, D., 2001, “Engineering viscoelasticity”, *Department of Materials Science and Engineering - MIT*, (out.).
- SALDARRIAGA, M. R. V. N., 2007, *Atenuação de vibrações em máquinas rotativas flexíveis usando materiais viscoelásticos nos suportes*. Tese de Doutorado, UFU - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, MG, Brasil.
- SAMKO, S. G., KILBAS, A. A., MARICHEV, O. I., 1993, *Fractional integrals and derivatives*. Singapore, Gordon and Breach Science Publishers.
- SAVI, M. A., PAULA, A. S., LAGOUDAS, D. C., 2011, “Numerical investigation of an adaptive vibration absorber using shape memory alloys”, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, v. 22 (jan), pp. 604–620. ISSN: 1045-389X. doi: 10.1177/1045389X10392612.
- SHABANEH, N. H., ZU, J. W., 2000, “Dynamic analysis of rotor-shaft systems with viscoelastically supported bearing”, *Mechanism and Machine Theory*, v. 35, n. 1 (maio), pp. 1313–1330.
- SILVA NETO, J. M. D., 2004, *Identificação do modelo fracionário de materiais viscoelásticos no domínio da frequência*. Tese de Doutorado, UFSC - Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica - POSMEC, Florianópolis, SC, Brasil.

- TSAI, C., HUANG, S., “Transfer matrix method to vibration analysis of rotors with coupler offsets”, *Shock and Vibration*, v. 1, n. 20, pp. 97–108. doi: 10.3233/SAV-2012-0730.
- VANCE, J., ZEIDAN, F., MURPHY, B., 2010, *Machinery vibration and rotordynamics*. 1 ed. New York, Springer-Verlag.
- WANG, P., DAVIES, P., STARKEY, J. M., et al., 1992, “A torsional vibration measurement system”, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, v. 41, n. 6 (dez.), pp. 803–807.
- XIANG, L., YANG, S., GAN, C., 2012, “Torsional vibration measurement on rotating shaft system using laser doppler vibrometer”, *Optics and Laser in Engineering*, v. 1, n. 50 (mar.), pp. 1596–1601.
- ZHANG, J., TANG, L., LI, B., et al., 2015, “Modeling of the dynamic characteristic of viscoelastic dielectric elastomer actuators subject to different conditions of mechanical load”, *Journal Applied Physics*, , n. 117 (jul). doi: 10.1063/1.4913384.