

# Histerese na Permeabilidade Relativa para o Armazenamento de Gás em Aqüífero<sup>1</sup>

Daniel Magalhães Moura Neto

Projeto Final

**Orientador** : Christian Emilio Schaerer Serra

**Co-orientador** : Antonio Claudio Gomez de Souza

Departamento de Eletrônica e de Computação

Escola Politécnica — Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Rio de Janeiro — Brasil

<sup>1</sup>Projeto Final de Curso submetido ao Departamento de Eletrônica e de Computação como parte dos requisitos para a conclusão do curso de Engenharia Eletrônica e Computação da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Dedico este trabalho aos meus pais,  
Maysa e Francisco,  
e à minha irmã Cecília.



# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a equipe do Laboratório de Dinâmica dos Fluidos do IMPA, em particular aos professores Dan Marchesin e Marcus Sarkis, que me deu apoio durante o desenvolvimento deste projeto final. Faço um agradecimento especial ao meu orientador, Christian, pelas discussões e cuidadosas sugestões relativas a este trabalho.

Agradeço aos professores e funcionários da UFRJ pelo ensino recebido.

Agradeço também aos meus amigos da faculdade que tornaram essa etapa mais prazerosa.

Gostaria de agradecer também a minha namorada, Nathália, que me apoiou para conclusão deste trabalho.

E por fim, um eterno agradecimento a minha mãe, meu pai, e minha irmã que sempre estiverem ao meu lado durante a faculdade e a vida.



# Sumário

Lista de Figuras . . . . .	vi
Lista de Tabelas . . . . .	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Modelo Matemático do Armazenamento de Gás em Aquífero</b>	<b>5</b>
2.1 Balanço de Massa e Momento . . . . .	5
2.2 Histerese na Permeabilidade Relativa . . . . .	8
<b>3 Algoritmo Numérico</b>	<b>11</b>
3.1 Método de Godunov Corrigido . . . . .	12
3.2 Problema de Riemann . . . . .	13
<b>4 Software de simulação</b>	<b>25</b>
4.1 Camada de apresentação . . . . .	26
4.1.1 Página inicial . . . . .	27
4.1.2 Simulação nova . . . . .	27
4.1.3 Resultado da simulação . . . . .	30
4.1.4 Simulações antigas . . . . .	31
4.2 Camada de negócios . . . . .	31
4.2.1 CGI . . . . .	31
4.2.2 Modelo . . . . .	35
4.2.3 Matlab . . . . .	36

<b>5 Resultados Obtidos</b>	<b>39</b>
<b>6 Conclusão</b>	<b>41</b>
Referências . . . . .	41

# Lista de Figuras

1.1	Reservatório aquífero . . . . .	2
2.1	Porosidade e permeabilidade . . . . .	6
2.2	Cilindro . . . . .	7
2.3	Funções de fluxo $F$ quando: (a) $g = 0$ , (b) $v = 0$ , (c) $v < 0$ e (d) $v > 0$ . . . . .	10
3.1	(a) Pontos e curvas importantes (b) $\Omega$ sub-regiões de $L$ . . . . .	13
3.2	Solução de Riemann para $L \in A$ (a) figura completa, (b) trecho ampliado. . . . .	16
3.3	Solução de Riemann para (a) $L \in A$ e $R_7 \in R_A^{VII}$ , (b) $L \in B$ . . . . .	17
3.4	Solução de Riemann para $L \in C$ . . . . .	20
3.5	Solução de Riemann para (a) $L_1 \in D$ (b) $L_2 \in D$ . . . . .	22
3.6	Sub-regiões $R$ de $\Omega$ para $L \in E$ . . . . .	24
4.1	Entrada e saída . . . . .	25
4.2	Três camadas . . . . .	26
4.3	Simulação nova: reservatório, fluidos e parâmetros físicos. . . . .	27
4.4	Simulação nova: estado inicial e fronteiras. . . . .	29
4.5	Simulação nova: malha e tempo. . . . .	30
4.6	Diagrama de classes do modelo . . . . .	36
4.7	Diagrama de classes do componente matlab . . . . .	36
5.1	(a) Solução do problema de Riemann (b) Resultado da simulação . . . . .	40



# Lista de Tabelas

3.1	Solução de Riemann para $L \in A$ . . . . .	18
3.2	Solução de Riemann para $L \in B$ . . . . .	19
3.3	Solução de Riemann para $L \in C$ . . . . .	21
3.4	Solução de Riemann para $L_1 \in D$ . . . . .	21
3.5	Solução de Riemann para $L_2 \in D$ . . . . .	23
3.6	Solução de Riemann para $L \in E$ . . . . .	24
4.1	Parâmetros resultado_simulacao.cgi . . . . .	32
4.2	Parâmetros nova_simulacao.cgi . . . . .	32
4.3	Erros nova_simulacao.cgi . . . . .	33
4.4	Parâmetros novo_meio.cgi . . . . .	33
4.5	Erros novo_meio.cgi . . . . .	34
4.6	Parâmetros novo_fluido.cgi . . . . .	34
4.7	Erros novo_fluido.cgi . . . . .	34
4.8	Parâmetros grafico_sF.cgi . . . . .	35

# Capítulo 1

## Introdução

O gás natural (GN) é um combustível de origem fóssil, com elevado rendimento energético, resultante da decomposição da matéria orgânica fóssil encontrada no interior da Terra, acumulada em rochas porosas, freqüentemente acompanhado por petróleo [5, 11].

O GN apresenta várias vantagens [12, 13] quando comparado com as fontes de energia tradicionais, tais como facilidade de transporte, segurança, menor corrosão de equipamentos e manutenção mais barata. Além disso, o GN apresenta muitas vantagens nas questões ambientais pois, é um combustível menos poluente que o óleo, possuindo uma combustão mais limpa, não exigindo tratamento dos gases de combustão.

A tendência de consolidar o GN, no Brasil, como fonte de energia é um fato. Ainda que, atualmente, a participação do gás natural seja de 7,5% da matriz energética brasileira, a Petrobrás está tentando firmar um crescimento progressivo, que possibilite chegar a 15% da matriz até 2015 [13], aumentando a sua diversificação.

Para viabilizar tal crescimento, a Petrobrás (GASPETRO) lançou mão de dois grandes projetos. O gasoduto Bolívia-Brasil que é o maior e mais complexo projeto da GASPETRO, tem uma estrutura que exigiu até hoje o maior volume de recursos, com 3.150 km de extensão e custo total em torno de US\$ 2 bilhões, e o gasoduto Uruguaiana-Porto Alegre que faz parte do projeto de importação de GN da Argentina com o objetivo de atender parte da demanda de combustíveis e energia elétrica no Rio Grande do Sul [12].

Um dos problemas existentes na tecnologia do GN consiste na necessidade de armazená-lo próximo dos locais de consumo, de forma a balancear o consumo com a produção, especialmente em regiões sensíveis a câmbios de consumo. O armazenamento, normalmente, é feito em tanques ou no subsolo.

O armazenamento no subsolo é considerado como o mais eficiente, devido à alta capacidade de estocagem [14]. Por exemplo, em 1996 / 1997, existiam 580 reservatórios subterrâneos de gás no mundo, com uma capacidade de  $262 \times 10^9 m^3$ . Outras formas de armazenamento apresentam capacidade limitada, por exemplo, mecanismos baseados em LNG (*Liquefied Natural Gas*) tem apenas uma capacidade de armazenamento de  $7,6 \times 10^9 m^3$ .

O armazenamento no subsolo se classifica em três tipos: cavernas de sal (que apresentam uma alta dependência geográfica), antigos reservatórios e aquíferos. Neste último, o princípio de armazenamento consiste em criar um campo artificial, injetando gás no seu interior.

Um aquífero pode ser definido como uma formação geológica capaz de armazenar e transmitir água. Existem dois tipos de aquífero, o confinado e o livre, ilustrados na Figura 1.1. O primeiro é limitado por camadas impermeáveis no topo e na base e é completamente saturado de água. O livre é parcialmente saturado de água e é limitado por uma camada impermeável apenas na base.

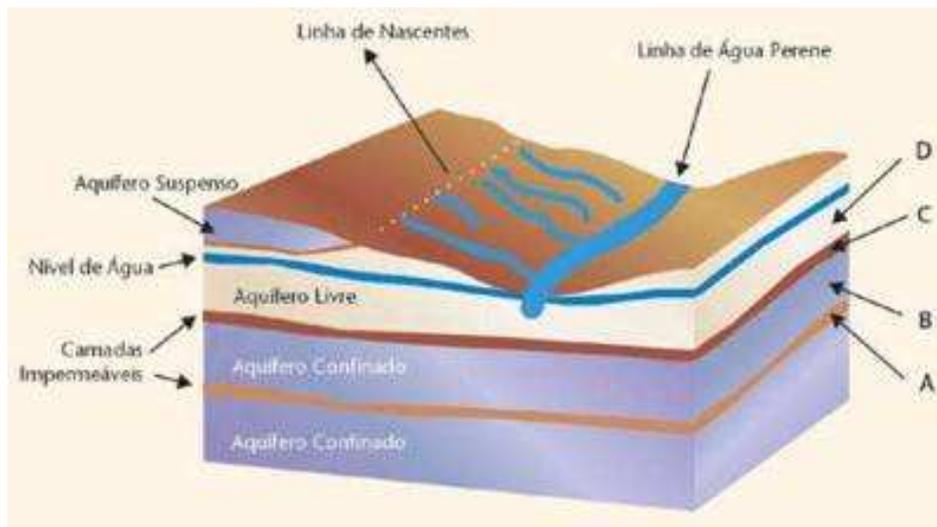


Figura 1.1: Reservatório aquífero

Hoje em dia, o armazenamento subterrâneo responde por 98% da capacidade de armazenamento mundial [14]. Conseqüentemente, é de suma importância desenvolver técnicas que permitam entender o comportamento do reservatório, o que envolve conhecimentos geológicos e monitoramento sísmico, descrição do fluxo no interior do reservatório (através de simulações numéricas utilizando computação de alto desempenho), topologia de poços, entre outros. Com base neste conhecimento e metodologias, é possível otimizar e aprimorar as técnicas de armazenamento.

Um dos problemas, que se encontra para desenvolver softwares de simulação, consiste na carência de modelos matemáticos adequados para capturar os efeitos da histerese presente no processo cíclico de armazenagem e produção de gás no subsolo.

Este trabalho tem o propósito de desenvolver um *software*, baseado em um novo modelo matemático que permite capturar a histerese observada na permeabilidade relativa. O fenômeno da histerese é particularmente importante em processos cíclicos, como por exemplo em WAG [2], bem como em processos térmicos de recuperação de óleo viscoso [2, 5, 8] e em processos de armazenamento de gás em aquíferos [9].

A histerese é um fenômeno observado no problema bifásico que não pode ser desconsiderado já que seus efeitos aumentam a diferença da previsão do estado de um reservatório com o seu estado real. Por isso é importante considerar os efeitos da histerese pois prevendo melhor o estado do reservatório é possível fazer uma melhor avaliação da viabilidade econômica do reservatório e desenvolver algoritmos para melhorar o aproveitamento dele.

O entendimento deste fenômeno acarreta diretamente no aumento do desempenho do reservatório e na redução dos custos operacionais. De fato, como a histerese altera o comportamento do fluxo de gás no aquífero, os simuladores convencionais, não conseguem prever adequadamente a distribuição do gás no aquífero. Por outro lado, os simuladores baseados nas técnicas desenvolvidas com captura de histerese, além de fornecer um panorama claro de como o gás se encontra distribuído no interior do reservatório, permitirá determinar a distribuição real do gás no aquífero e seu volume de trabalho.

Em particular, analisamos aqui a histerese quando se considera os termos da velocidade e a ação da gravidade simultaneamente. Modelos de histerese foram apresentados em [3, 6, 8] e a

importância da histerese na permeabilidade relativa na simulação da segregação em aquíferos foi apresentada em [9], onde foi desenvolvido uma discretização de forma a incluir a histerese no processo de segregação gravitacional de dois fluidos imiscíveis. Na seção 2, realizamos uma extensão da formulação apresentada em [9] para incluir a histerese nos termos associados à velocidade.

Na seção 3, o algoritmo necessário para o desenvolvimento do simulador é apresentado. Na seção 4, o *software* é descrito. Na seção 5 resultados são apresentados. A parte numérica foi desenvolvida em linguagem C++ de forma a torná-lo compatível com *softwares* de visualização, como o Matlab, e pensando em futuras implementações bidimensionais. Os resultados obtidos através da simulação mostram a eficiência do *software* em capturar a histerese na solução teórica (problema de Riemann) apresentada na seção 3. As conclusões e perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas na seção 6, onde ressaltamos as vantagens da técnica discutida neste trabalho.

# Capítulo 2

## Modelo Matemático do Armazenamento de Gás em Aquífero

Nesta seção, inicialmente, introduzimos as leis básicas de balanço de massa e momento. Em seguida, descrevemos um modelo da permeabilidade relativa que incorpora os efeitos de histerese.

### 2.1 Balanço de Massa e Momento

Para modelar o aquífero consideramos dois fluidos imiscíveis e incompressíveis, um dos quais chamamos de fase molhante (água) e o outro de fase não-molhante (gás), se deslocando em um meio poroso. Para representar a primeira fase utilizamos o índice  $w$  e para a outra o índice  $g$ . Um meio poroso é formado por um meio sólido perfurado por poros interconectados onde os fluidos ficam alojados, ilustrado na Figura 2.1. A porosidade é dada pela variável  $\phi$  que representa a porcentagem do espaço que é ocupada pelos fluidos. A porcentagem do poro que cada fluido ocupa é chamada de saturação e é representada por  $s$ . Assumimos que o poro é completamente ocupado por ambos os fluidos, assim  $s_w + s_g = 1$ .

Os fluidos se movimentam devido à ação de forças de pressão e gravitacionais. Para simular o aquífero consideramos um cilindro inclinado com ângulo  $\psi$  em relação a horizontal com o eixo

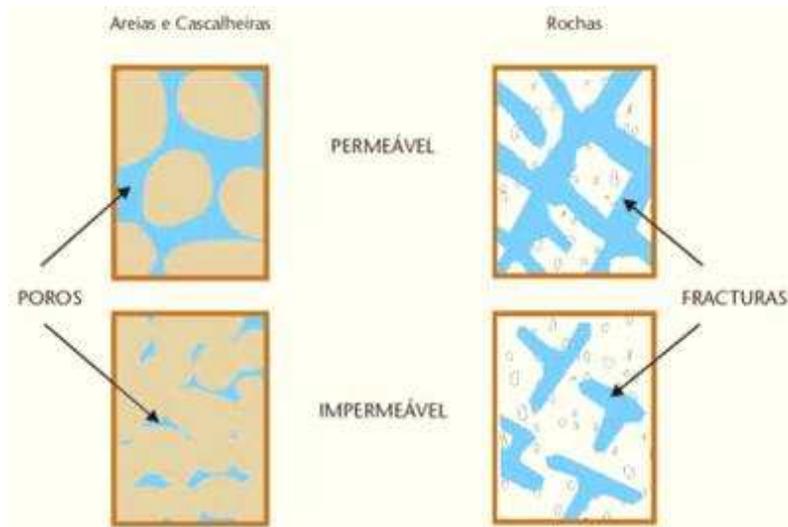


Figura 2.1: Porosidade e permeabilidade

$z$  passando pelo eixo do tubo, conforme ilustrado na figura 2.2. Queremos saber a saturação da fase molhante ao longo do eixo  $z$ .

O deslocamento dos fluidos no aquífero pode ser descrito usando a lei de conservação de massa para as fases e a lei de D'Arcy. A conservação de massa para cada uma das fases é:

$$\partial_t(\rho_w \phi s_w) + \nabla \cdot (\rho_w u_w) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_t(\rho_g \phi s_g) + \nabla \cdot (\rho_g u_g) = 0, \quad (2.1)$$

onde o primeiro termo representa o acúmulo e o segundo o transporte de massa de cada uma das fases. Aqui,  $\rho$  e  $u$  representam, respectivamente, a densidade e a velocidade dos fluidos. A lei de D'Arcy, de natureza empírica, determina a velocidade de cada uma das fases em função do gradiente de pressão e da gravidade e é dada por:

$$u_w = -\frac{k_w}{\mu_w}(\nabla p_w - \rho_w g \nabla Z) \quad (2.2)$$

e

$$u_g = -\frac{k_g}{\mu_g}(\nabla p_g - \rho_g g \nabla Z), \quad (2.3)$$

onde  $p$ ,  $k$  e  $\mu$  são a pressão, a permeabilidade e a viscosidade dos fluidos, respectivamente, e  $g$

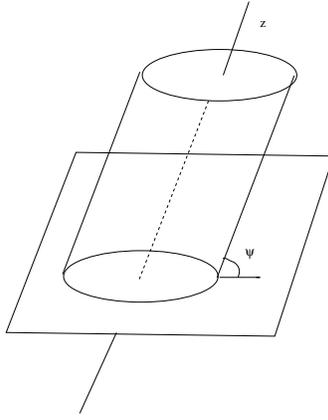


Figura 2.2: Cilindro

é o módulo da aceleração da gravidade e  $Z$  é a profundidade com o sentido da gravidade [1].

A permeabilidade do meio poroso representa a facilidade que os fluidos têm para se deslocar dentro do meio, na Figura 2.1 está exemplificado o que é um meio permeável e impermeável. Definimos as permeabilidades efetivas como  $k_w := k k_{rw}$  e  $k_g := k k_{rg}$ , onde  $k$  é a permeabilidade do meio poroso e  $k_{rw}$  e  $k_{rg}$  são chamadas de permeabilidade relativa da fase molhante e da não-molhante. Definimos ainda as funções de fluxo fracional para ambas as fases  $\lambda_w := \frac{k_{rw}}{\mu_w \lambda}$  e  $\lambda_g := \frac{k_{rg}}{\mu_g \lambda}$ , onde  $\lambda := \frac{k_{rw}}{\mu_w} + \frac{k_{rg}}{\mu_g}$ ; e  $v$ , a velocidade total como a soma da velocidade das duas fases,  $v := u_w + u_g$ . Com as definições acima e as equações (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos:

$$\phi \partial_t s_w - \nabla \cdot (k \lambda \lambda_w \lambda_g \nabla p_c) + \nabla \cdot (\lambda_w v) + \nabla \cdot (k \lambda \lambda_w \lambda_g g \nabla Z (\rho_w - \rho_g)) = 0. \quad (2.4)$$

Com base em [9] consideramos, neste trabalho, que os efeitos da pressão capilar são modelados principalmente pelos termos da permeabilidade relativa. Desta forma, os termos difusivos associados à pressão capilar serão desconsiderados. Considerando o fluxo unidimensional então  $\nabla Z = g \sin \psi$ , a equação (2.4) se reduz a

$$\partial_t s_w + \partial_z F = 0, \quad (2.5)$$

onde

$$F := \frac{\lambda_w v + k \lambda \lambda_w \lambda_g g \sin \psi (\rho_w - \rho_g)}{\phi} \quad (2.6)$$

é chamada de função fluxo.

## 2.2 Histerese na Permeabilidade Relativa

Usamos o *Scanning Hysteresis Model* (SHM), [6, 8, 9], para modelar o fenômeno da histerese observada experimentalmente [3, 4]. Consideramos, unicamente a histerese na permeabilidade relativa da fase não molhante. Esta permeabilidade relativa depende de um parâmetro que foi introduzido por Plorh *et al* [8] e também pela tendência da saturação da água, se está aumentando (embebição) ou diminuindo (drenagem). Esse parâmetro é chamado de parâmetro de histerese e é representado por  $\pi$ .

Baseado em [8, 9], temos as seguintes funções de permeabilidade, para a fase molhante

$$k_{rw}(s_w) := \gamma s_w^\beta, \quad (2.7)$$

onde  $\beta > 1$  e  $\gamma$  é um parâmetro a ser ajustado; para a drenagem e embebição da fase não-molhante

$$k_{rg}^d(s_w) := (1 - s_w)^\eta \text{ quando } \partial_t s_w < 0 \quad \text{e} \quad k_{rg}^i(s_w) := (1 - s_w)^\theta \text{ quando } \partial_t s_w > 0 \quad (2.8)$$

onde  $1 < \theta < \eta$ ; e para a região de *scanning* entre a drenagem e a embebição da fase não-molhante

$$k_{rg}(s_w, \pi) := \frac{(1 - \pi)^\xi}{(1 - \alpha\pi)^\zeta} (1 - \alpha s_w)^\zeta, \quad (2.9)$$

e cada valor de  $\pi$  ( $0 \leq \pi \leq 1$ ) determina uma curva de *scanning*. Neste trabalho, vamos usar os valores  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\eta = 3$ ,  $\theta = 2$ ,  $\xi = 2$ ,  $\zeta = 1$  e  $\alpha = 0.5$ , sugeridos em [9]. Definimos

as funções  $s_w^i(\pi)$  e  $s_w^d(\pi)$  implicitamente por:

$$k_{rg}^i(s_w^i(\pi)) = k_{rg}(s_w^i(\pi), \pi) \text{ e} \quad (2.10)$$

$$k_{rg}^d(s_w^d(\pi)) = k_r(s_w^d(\pi), \pi). \quad (2.11)$$

No modelo SHM, a curva de *scanning* associada ao parâmetro  $\pi$  é definida no intervalo de saturação  $s_w^i(\pi) < s_w < s_w^d(\pi)$ . As funções  $\pi^i(s_w)$  e  $\pi^d(s_w)$  são definidas como a inversa das funções  $s_w^i(\pi)$  e  $s_w^d(\pi)$ , definidas nas equações (2.10) e (2.11). Usando as permeabilidades relativas definidas nas equações (2.7), (2.8) e (2.9) observamos que a função de fluxo é função da saturação  $s_w$  e de  $\pi$ , da seguinte forma:

$$F(s_w, \pi) \text{ para } \partial_t \pi = 0, \text{ (região de } scanning) \quad (2.12)$$

$$F^d(s_w) := F(s_w, \pi^d(s_w)) \text{ para } \partial_t s < 0, \text{ (drenagem)} \quad (2.13)$$

$$F^i(s_w) := F(s_w, \pi^i(s_w)) \text{ para } \partial_t s > 0 \text{ (embebição)}. \quad (2.14)$$

Definimos as curvas de drenagem e embebição, respectivamente, por:

$$dr := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F = F^d(s_w)\} \quad \text{e} \quad im := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F = F^i(s_w)\}. \quad (2.15)$$

Definimos, também, a região de *scanning*  $\Omega$  por  $\Omega := \Omega_v \cup \Omega_g$ , onde:

$$\Omega_v := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F^i(s_w) \leq F \leq F^d(s_w)\} \text{ e} \quad (2.16)$$

$$\Omega_g := \{(s_w, F) \in \mathbb{R}^2 \mid F^d(s_w) \leq F \leq F^i(s_w)\}. \quad (2.17)$$

A região de *scanning*  $\Omega$  tem como fronteira as curvas de drenagem e embebição (veja figura 2.3). O ponto  $X = (s_X, F_X)$  é a interseção das curvas de drenagem e embebição; ele separa as duas regiões de *scanning* ( $\Omega_v$  e  $\Omega_g$ ). A saturação  $s_X$  é dada pela solução da equação

$$F^d(s_X) - F^i(s_X) = 0 \text{ no intervalo } 0 < s_X < 1, \quad (2.18)$$

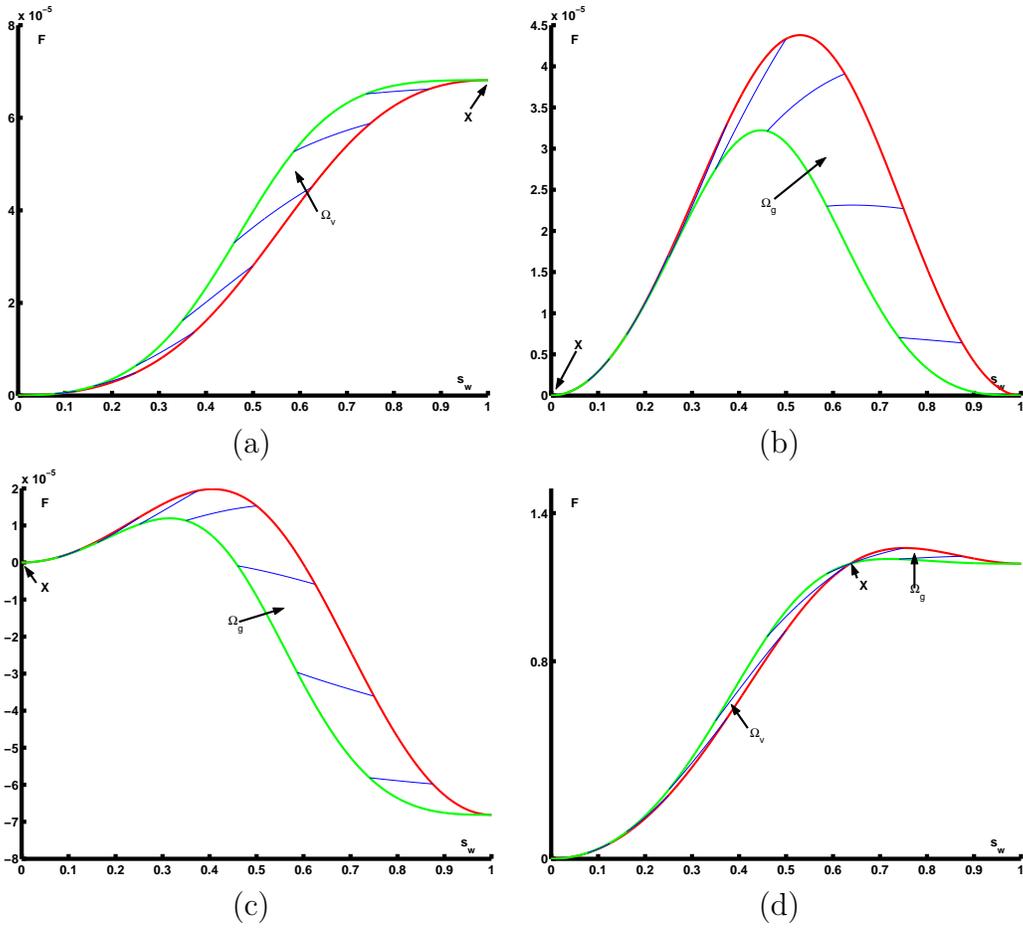


Figura 2.3: Funções de fluxo  $F$  quando: (a)  $g = 0$ , (b)  $v = 0$ , (c)  $v < 0$  e (d)  $v > 0$

e se a equação (2.18) não tiver solução, então:

$$\begin{aligned}
 s_X &= 0 \text{ se } F^d(s_w) < F^i(s_w) \text{ para } 0 < s_w < 1 \text{ e} \\
 s_X &= 1 \text{ se } F^d(s_w) > F^i(s_w) \text{ para } 0 < s_w < 1.
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

Finalmente,  $F_X$  é dado por  $F_X = F^d(s_X)$ . As duas outras interseções da curva de embebição com a de drenagem são dadas por  $X_O$  para  $s_w = 0$  e  $X_F$  para  $s_w = 1$ .

**Observação.** Na figura 2.3 estão representadas as funções de fluxo, em verde a curva de drenagem, em vermelho a de embebição e em azul as curvas de *scanning*.

# Capítulo 3

## Algoritmo Numérico

Para cada uma das funções de fluxo (2.12), (2.13) e (2.14) a equação (2.5) estabelece diferentes tipos de fluxo descritos pelas seguintes leis de conservação:

1. drenagem e embebição,

$$\partial_t s_w + \partial_z F^d(s_w) = 0, \quad (3.1)$$

$$\partial_t s_w + \partial_z F^i(s_w) = 0, \quad (3.2)$$

2. *scanning*,

$$\partial_t s_w + \partial_z F(s_w, \pi) = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_t \pi = 0, \quad (3.4)$$

onde  $\partial_t \pi = 0$  representa a conservação da variável  $\pi$  na região de *scanning*.

Nesta seção discutimos um algoritmo numérico para a resolução deste problema.

### 3.1 Método de Godunov Corrigido

Na simulação das equações (3.1)-(3.4) utilizamos o método de Godunov Corrigido, apresentado em [9], que é uma extensão do método de Godunov, apresentado em [7], para incluir o parâmetro de histerese  $\pi$ . Para isso, primeiro discretizamos o plano  $z - t$ , onde  $z$  é o eixo do tubo que vamos simular. Se  $L$  é o comprimento do tubo temos  $h_z := L/N_z$ , onde  $N_z$  é o número de pontos da malha espacial. Cada intervalo de tempo é dado por  $h_t$ . Dessa forma obtemos a malha formada pelos pontos  $(z_j, t_n)$ , onde:

$$z_j = jh_z + h_z/2, z_{j\pm 1/2} = z_j \pm h_z/2, j = 0, 1, 2, \dots, N_z - 1 \quad (3.5)$$

$$t_n = nh_t, n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

O método consiste de duas etapas em cada intervalo de tempo. Na primeira etapa (preditor), são resolvidas numericamente, utilizando o método Godunov, as equações (3.1)-(3.3). A segunda etapa (corretor) corrige o parâmetro  $\pi$  no caso em que o estado previsto cai fora da região admissível (*scanning* ou sob as curvas de drenagem ou embebição).

O estado associado a uma célula  $(z_j, t_n)$  é representado como  $(s_j^n, \pi_j^n)$  ou equivalentemente por  $(s_j^n, F(s_j^n, \pi_j^n))$ . Então, o método de Godunov na célula  $[z_{j-1/2}, z_{j+1/2}] \times [t_n, t_{n+1}]$  para a saturação é:

$$s_j^{n+1} = s_j^n - \frac{h_t}{h_z} [F^\#((s_j^n, \pi_j^n), (s_{j+1}^n, \pi_{j+1}^n)) - F^\#((s_{j-1}^n, \pi_{j-1}^n), (s_j^n, \pi_j^n))] \quad (3.7)$$

onde,  $F^\#((s_j^n, \pi_j^n), (s_{j+1}^n, \pi_{j+1}^n))$  e  $F^\#((s_{j-1}^n, \pi_{j-1}^n), (s_j^n, \pi_j^n))$  são os fluxos numéricos nas frentes esquerda e direita da célula. Detalhes do esquema numérico encontram-se em [9].

**Observação.** Para cada par de estados  $(s_w, \pi)$  os fluxos numéricos podem ser determinados diretamente da solução do problema de Riemann que será apresentado a seguir.

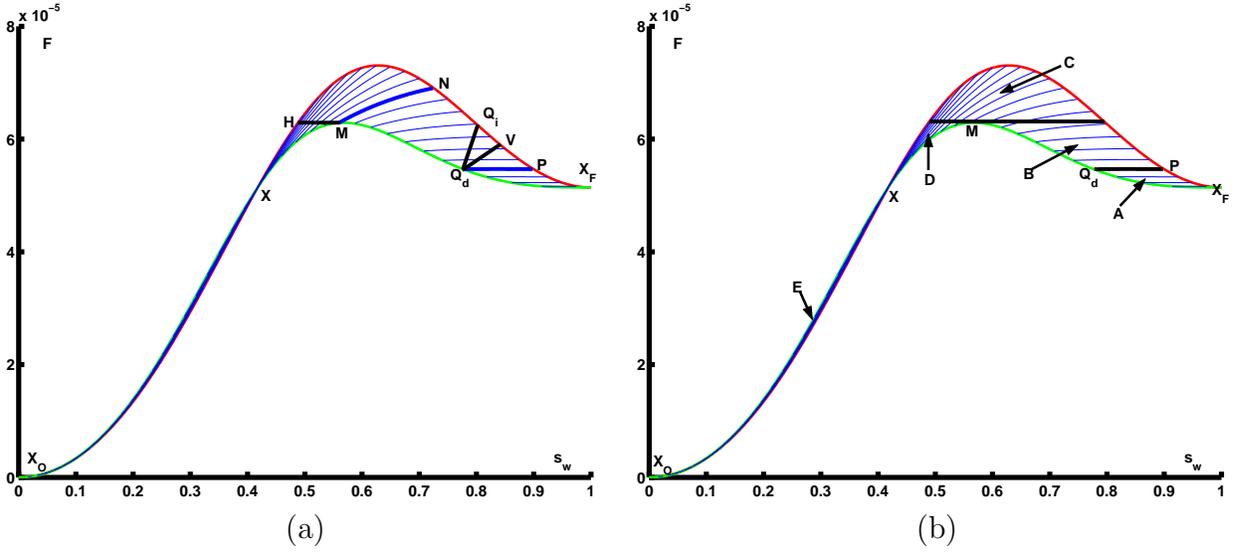


Figura 3.1: (a) Pontos e curvas importantes (b)  $\Omega$  sub-regiões de  $L$

## 3.2 Problema de Riemann

O problema de Riemann é um problema de valor inicial, onde temos os estados  $L = (s_L, F_L)$  e  $R = (s_R, F_R)$  como valores iniciais. Antes de apresentar a solução do problema de Riemann associado às equações (3.1)-(3.4), definimos alguns pontos e curvas importantes que estão ilustrados na figura 3.1(a). A curva  $Q_dQ_i$  é dada por:

$$Q_dQ_i := \{Q = (s, F(s, \pi)) \in \Omega_g \mid \partial_s F(s, \pi) = 0, \forall \pi\}. \quad (3.8)$$

Essa curva representa a reta que passa pelos pontos de máximo das curvas de *scanning*. Traçando a curva de *scanning* que passa pelo ponto  $Q_i$  achamos na drenagem o ponto  $J = (s_J, F^d(s_J))$  associado à saturação  $s_J := s^d(\pi(s_{Q_i}))$ . O ponto  $P = (s_P, F_P)$  é o ponto na curva de embebição que tem o mesmo valor de  $\pi$  que o ponto  $Q_d$ . A curva  $Q_dV$  é definida por:  $\{Q_dV := \{W \in \Omega_g \mid W = (s_I + 2(s_Q - s_I), F_I) \mid Q \in Q_dQ_i \text{ e } F(s_Q) = F(s_I), \forall I \in dr\}$ . O ponto  $M = (s_M, F_M)$  é dado pelo ponto onde a curva de dreno é máxima, ou seja:  $\partial_{s_w} F^d(s_M) = 0$ ,  $0 < s_M < 1$  e  $F_M = F^d(s_M)$ . Já o ponto  $N = (s_N, F_N)$  é dado pela interseção da curva de *scanning* que passa pelo ponto  $M$  com a curva de embebição. O ponto

$H = (s_H, F_H)$  é formado pela interseção de uma horizontal que passa pelo ponto  $M$  com a curva de embebição quando  $s_H < s_M$ , ou seja, em  $H$  têm se  $F_H = F^i(s_H) = F^d(s_M)$ . O valor de  $\pi$  do ponto  $Y = (s_Y, F^d(s_Y))$  é o mesmo que a saturação do ponto  $X$ ,  $s_Y := s^d(\pi(s_X))$ . A curva de *scanning*  $U_d U_i$  tem o ponto  $U_i = (s_{U_i}, F^i(s_{U_i}))$  determinada pela solução de

$$\partial_{s_w s_w} F^i(s_{U_i}) = 0, \text{ onde } s_{U_i} < s_X. \quad (3.9)$$

Definimos alguns pontos relativos ao ponto  $L = (s_L, F_L)$ . Os pontos  $E = (s_E, F_E)$  e  $K = (s_K, F_K)$  têm o mesmo valor de fluxo do ponto  $L$  ( $F_E := F_K := F_L$ ) e estão ou na curva de embebição ou na de drenagem, quando necessário as figuras de cada caso ilustram a posição de cada um desses pontos ( $E_i, E_d, K_i$  e  $K_d$ ). Os pontos  $C$  e  $S$  estão na drenagem e na mesma curva de *scanning* de  $E_i$  e  $K_i$ , ou seja,  $\pi_C := \pi_{E_i}$  e  $\pi_S := \pi_{K_i}$ . Já o ponto  $D$  está na embebição e na curva de *scanning* do ponto  $K_d$  ( $\pi_D := \pi_{K_d}$ ).

Para representar o segmento de reta e as curvas de *scanning*, drenagem e embebição que passam por dois pontos, p.ex.  $A$  e  $B$ , utilizamos a notação  $\overline{AB}$ ,  $(AB)^{sc}$ ,  $(AB)^{dr}$  e  $(AB)^{im}$ , respectivamente.

A solução do problema de Riemann para o caso em que a gravidade é desprezada (figura 2.3(a)) já foi apresentado por [8] e o caso em que a velocidade é desprezada (figura 2.3(b)) foi apresentado por [9]. A solução para o caso que considera a velocidade e gravidade (figuras 2.3(c) e (d)) é abordada neste trabalho.

Para isso, dividimos a região  $\Omega$  em cinco sub-regiões de  $L$  (figura 3.1(b)) definidas como:

$$A := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid s_{Qd} \leq s \leq 1 \text{ e } F \leq F(s, \pi_{Qd})\}$$

$$B := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid s_M \leq s \leq s_P \text{ e } F(s, \pi_{Qd}) \leq F \leq F^d(s_M)\}$$

$$C := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid 0 \leq s \leq 1 \text{ e } F^d(s_M) \leq F\}$$

$$D := \{(s_w, F) \in \Omega_g \mid s_X \leq s \leq s_M \text{ e } F^d(s_X) \leq F \leq F^d(s_M)\}$$

$$E := \Omega_v$$

A solução para o problema de Riemann consiste em uma seqüência de ondas de choque,

rarefação e descontinuidade (choque com velocidade nula), como já foi apresentado em [9]. Neste trabalho, usamos  $sh$ ,  $ra$  e  $st$ , para representar, respectivamente, essas ondas; ainda, acompanhando  $sh$  e  $ra$  tem um sinal (+) ou (-) indicando se é um choque, ou rarefação, positivo(a) ou negativo(a). Nos gráficos  $F \times s_w$ , as ondas de choque são representadas por linhas tracejadas e as de rarefação por linhas sólidas.

Apresentamos em detalhe as soluções para todos os casos, A, B, C, D e E.

**Caso A:** Dividimos  $\Omega$  em 7 sub-regiões de  $R$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in A$ :

$$R_A^I := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d V}, (V X_F)^{im}\}$$

$$R_A^{II} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d B)^{dr}, (BG)^{sc}, (GV)^{im}, \overline{V Q_d}\}$$

$$R_A^{III} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (BM)^{dr}, (MN)^{sc}, (NG)^{im}, (GB)^{sc}\}$$

$$R_A^{IV} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{MH}, (HN)^{im}, (NM)^{sc}\}$$

$$R_A^V := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (XH)^{im}, \overline{HM}, (MX)^{dr} \text{ e por } (YX)^{dr}, (XY)^{sc}\}$$

$$R_A^{VI} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (YX)^{sc}, (XU_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

$$R_A^{VII} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (XO U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i XO)^{im}\}$$

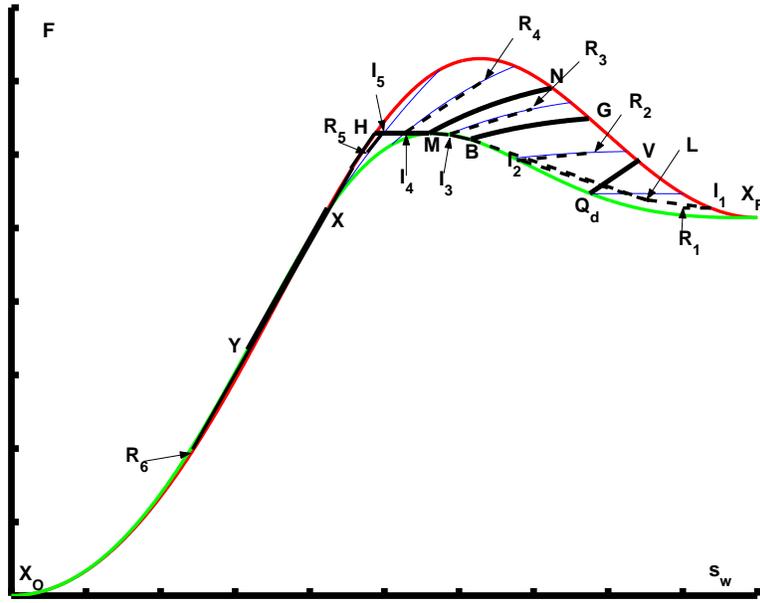
Aqui, o estado  $B = (s_B, F_B)$  é o ponto de tangência da curva de drenagem com a reta que passa por  $L$  e tangencia a curva de drenagem em  $\Omega_g$ :

$$\partial_{s_w} F^d(s_B) = \frac{(F^d(s_B) - F_L)}{(s_B - s_L)} \quad (3.10)$$

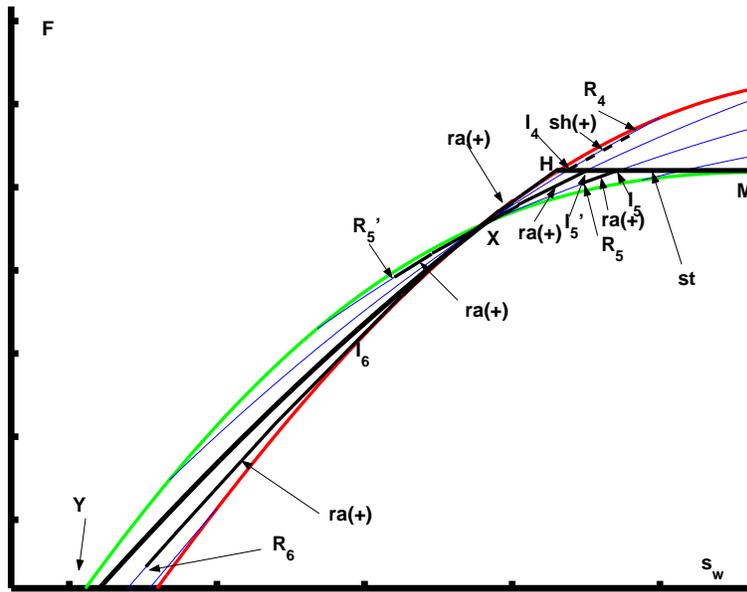
O ponto  $G = (s_G, F_G)$  é dado por

$$s_G = s_w^i(\pi^d(s_B)) \text{ e } F_G = F^i(s_G). \quad (3.11)$$

Assim, os estados  $B$  e  $G$  possuem o mesmo valor de  $\pi$ . A solução de Riemann está descrita na tabela 3.1 e ilustrada nas figuras 3.2 e 3.3(a).

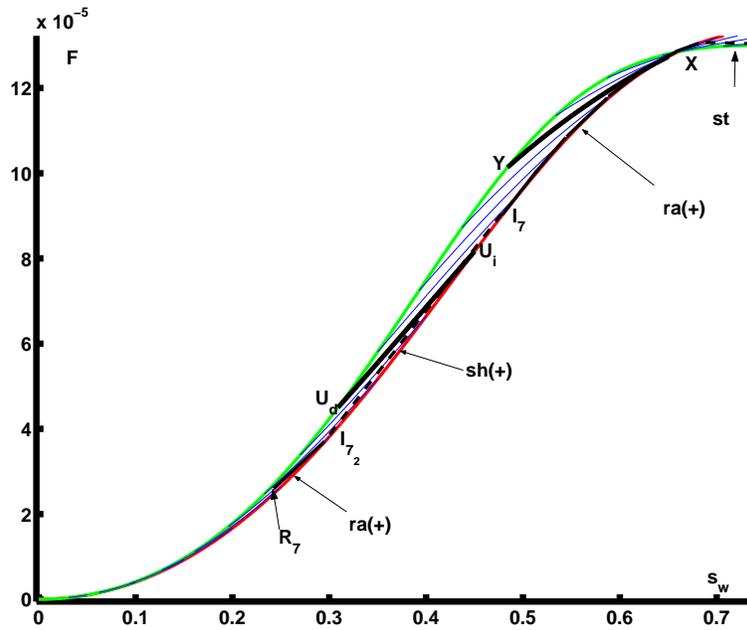


(a)

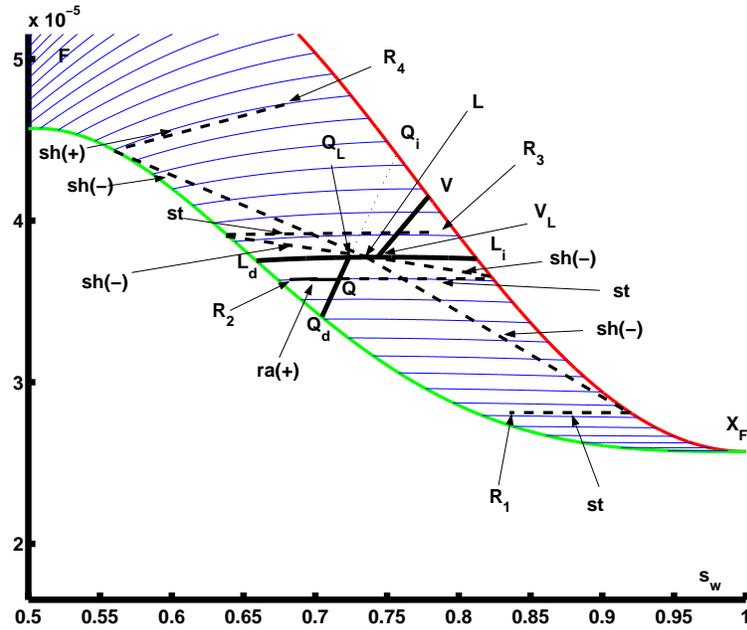


(b)

Figura 3.2: Solução de Riemann para  $L \in A$  (a) figura completa, (b) trecho ampliado.



(a)



(b)

Figura 3.3: Solução de Riemann para (a)  $L \in A$  e  $R_7 \in R_A^{VII}$ , (b)  $L \in B$

Tabela 3.1: Solução de Riemann para  $L \in A$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_A^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_A^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{sh(+)} R_2$	$F^d(s^d(\pi_R))$
3.	$R_3 \in R_A^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} I_3 \xrightarrow{sh(+)} R_3$	$F^d(s^d(\pi_R))$
4.	$R_4 \in R_A^{IV}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(s_M, \pi_M)$
5.	$R_5 \in R_A^V$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(s_M, \pi_M)$
6.	$R_6 \in R_A^{VI}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(s_M, \pi_M)$
7.	$R_7 \in R_A^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{sh(+)} I_{7_2} \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_M, \pi_M)$

**Caso B:** As sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in B$  são:

$$R_B^I := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_L}, (Q_L K)^{sc}, (K X_F)^{im}\}$$

$$R_B^{II} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d L_d)^{dr}, (L_d Q_L)^{sc}, \overline{Q_L Q_d}\}$$

$$R_B^{III} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (L_i V_L)^{sc}, \overline{V_L V}, (V L_i)^{im}\}$$

$$R_B^{IV} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (V_L L_d)^{sc}, (L_d B)^{dr}, (B G)^{sc}, (G V)^{im}, \overline{V V_L}\}$$

$$R_B^V := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (B M)^{dr}, (M N)^{sc}, (N G)^{im}, (G B)^{sc}\}$$

$$R_B^{VI} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{M H}, (H N)^{im}, (N M)^{sc}\}$$

$$R_B^{VII} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X H)^{im}, \overline{H M}, (M X)^{dr} \text{ e por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\}$$

$$R_B^{VIII} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\}$$

$$R_B^{IX} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X O)^{im}\}$$

Aqui  $L_d = (s_{L_d}, F_{L_d})$  é dado por  $s_{L_d} = s^d(\pi_L)$  e  $F_{L_d} = F^d(s_{L_d})$ , e o estado  $L_i = (s_{L_i}, F_{L_i})$  por  $s_{L_i} = s^i(\pi_L)$  e  $F_{L_i} = F^i(s_{L_i})$ . Os pontos  $Q_L$  e  $V_L$  são dados pela interseção das curvas  $\overline{Q_d Q_i}$  e  $\overline{Q_d V}$  com a curva  $(L_d L_i)^{sc}$ , respectivamente.

As soluções de Riemann para  $R$  nas regiões  $R_B^{IV}$ ,  $R_B^V$ ,  $R_B^{VI}$ ,  $R_B^{VII}$ ,  $R_B^{VIII}$  e  $R_B^{IX}$  e  $L \in B$  são análogas as soluções para  $R$  nas regiões  $R_A^{II}$ ,  $R_A^{III}$ ,  $R_A^{IV}$ ,  $R_A^V$ ,  $R_A^{VI}$  e  $R_A^{VII}$  e  $L \in A$ . Todas as soluções estão na tabela 3.2, entretanto na figura 3.3(b) estão apenas as soluções para  $R$  nas regiões  $R_B^I$ ,  $R_B^{II}$ ,  $R_B^{III}$  e  $R_B^{IV}$ .

Tabela 3.2: Solução de Riemann para  $L \in B$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_B^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_B^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_B^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{st} R_3$	$F(s_R, \pi_R)$
4.	$R_4 \in R_B^{IV}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F^d(s^d(\pi_R))$
5.	$R_5 \in R_B^V$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} I_5 \xrightarrow{sh(+)} R_5$	$F^d(s^d(\pi_R))$
6.	$R_6 \in R_B^{VI}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_6 \xrightarrow{sh(+)} R_6$	$F(s_M, \pi_M)$
7.	$R_7 \in R_B^{VII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_M, \pi_M)$
8.	$R_8 \in R_B^{VIII}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_M, \pi_M)$
9.	$R_9 \in R_B^{IX}$	$L \xrightarrow{sh(-)} B \xrightarrow{ra(-)} M \xrightarrow{st} H \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{sh(+)} I_{9_2} \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_M, \pi_M)$

**Caso C:** As sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in C$  são:

$$\begin{aligned}
 R_C^I &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_i}, (Q_i X_F)^{im}\} \\
 R_C^{II} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d J)^{dr}, (J Q_i)^{sc}, \overline{Q_i Q_d}\} \\
 R_C^{III} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (J S)^{dr}, (S K)^{sc}, (K Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\} \\
 R_C^{IV} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{K E}, (E K)^{im}\} \\
 R_C^V &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (C E)^{sc}, \overline{E K}, (K S)^{sc}, (S C)^{dr}\} \\
 R_C^{VI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E)^{im}, (E C)^{sc}, (C X)^{dr}\} \\
 R_C^{VII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\} \\
 R_C^{VIII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\} \\
 R_C^{IX} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_O)^{im}\}
 \end{aligned}$$

A solução para este caso está na tabela 3.3 e na figura 3.4.

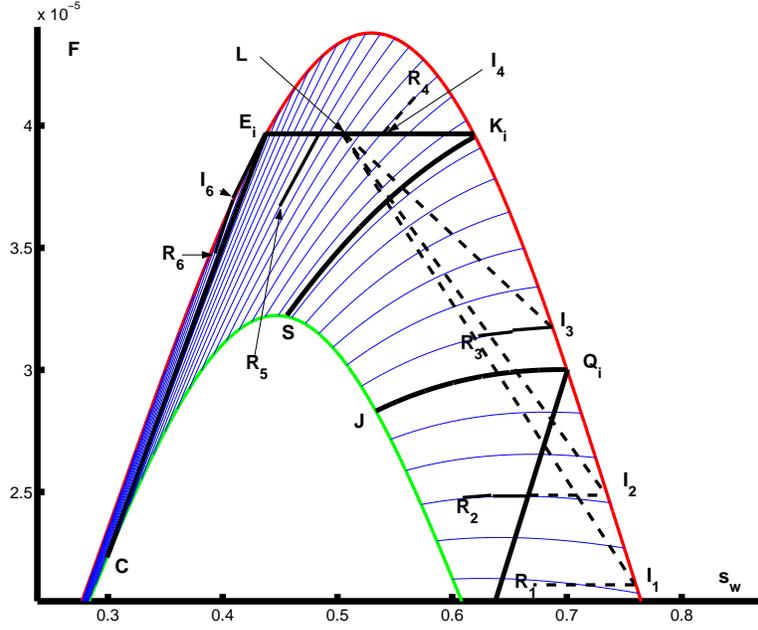


Figura 3.4: Solução de Riemann para  $L \in C$ .

Caso D: As sub-regiões R de  $\Omega$  para  $L1 = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in D$  são:

$$\begin{aligned}
R_{D1}^I &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d T_Q}, \overline{T_Q K_i}, (K_i X_F)^{im}\} \\
R_{D1}^{II} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d E_d)^{dr}, \overline{E_d T_Q}, \overline{T_Q Q_d}\} \\
R_{D1}^{III} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (E_d T_d)^{dr}, (T_d T_Q)^{tan}, \overline{T_Q E_d}\} \\
R_{D1}^{IV} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (T_d T_Q)^{tan}, (T_d K_d)^{dr}, (K_d D)^{sc}, (DK_i)^{im}, \overline{K_i T_Q}\} \\
R_{D1}^V &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{K_d E_i}, (E_i D)^{im}, (DK_d)^{sc}\} \\
R_{D1}^{VI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{sc}, \overline{E_i K_d}, (K_d X)^{dr}\} \\
R_{D1}^{VII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{dr}, (E_i X)^{sc}\} \\
R_{D1}^{VIII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\} \\
R_{D1}^{IX} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\} \\
R_{D1}^X &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X_O)^{im}\}
\end{aligned}$$

A curva  $T_d T_i$  é formada pelos pontos  $(s_T, F_T)$  onde as curvas de *scanning* são tangentes ao ponto  $K_d$ . A solução encontra-se na tabela 3.4. As soluções que não são análogas às soluções de outros casos estão na figura 3.5 (a). O caso D diferentemente dos casos apresentados anteriormente, possui uma ligeira diferença na solução quando há mudanças na função de fluxo. Isso acontece porque a curva dos pontos tangentes e a curva  $Q_d Q_i$  variam conforme a

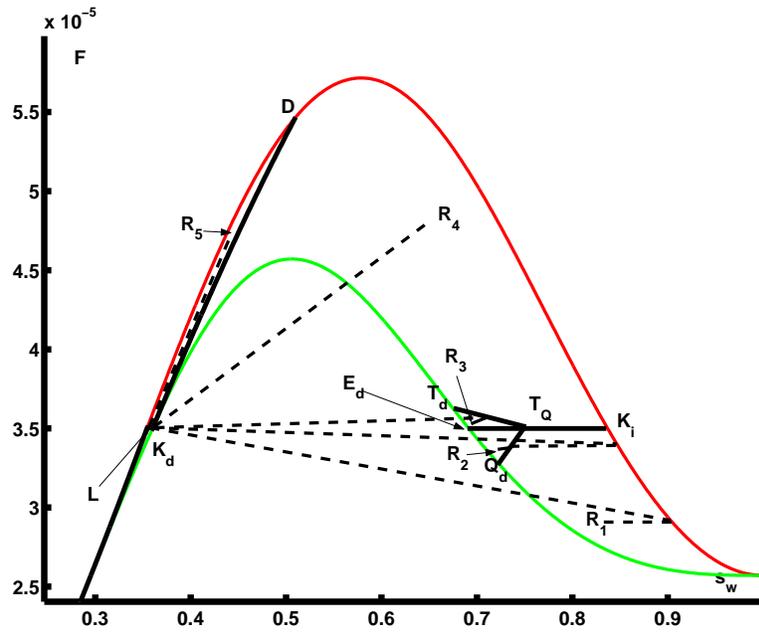
Tabela 3.3: Solução de Riemann para  $L \in C$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_C^I$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_C^{II}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_C^{III}$	$L \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F^i(s^i(\pi_R))$
4.	$R_4 \in R_C^{IV}$	$L \xrightarrow{st} I_4 \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$
5.	$R_5 \in R_C^V$	$L \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(s_L, \pi_L)$
6.	$R_6 \in R_C^{VI}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(s_L, \pi_L)$
7.	$R_7 \in R_C^{VII}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_L, \pi_L)$
8.	$R_8 \in R_C^{VIII}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_L, \pi_L)$
9.	$R_9 \in R_C^{IX}$	$L \xrightarrow{st} E \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{sh(+)} I_{9_2} \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_L, \pi_L)$

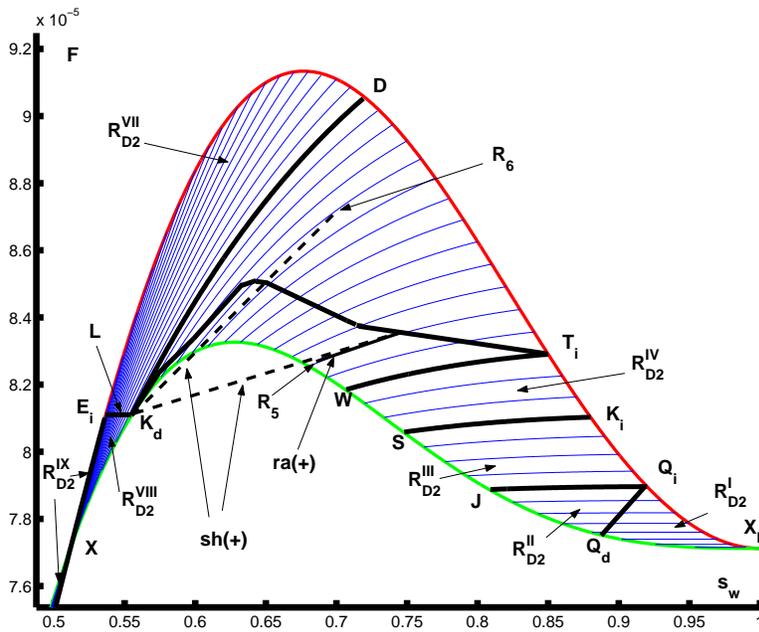
	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_{D1}^I$	$L_1 \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_{D1}^{II}$	$L_1 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_{D1}^{III}$	$L_1 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(s_L, \pi_L)$
4.	$R_4 \in R_{D1}^{IV}$	$L_1 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$
5.	$R_5 \in R_{D1}^V$	$L_1 \xrightarrow{st} I_5 \xrightarrow{sh(+)} R_5$	$F(s_L, \pi_L)$
6.	$R_6 \in R_{D1}^{VI}$	$L_1 \xrightarrow{st} I_6 \xrightarrow{ra(+)} R_6$	$F(s_L, \pi_L)$
7.	$R_7 \in R_{D1}^{VII}$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_7 \xrightarrow{ra(+)} R_7$	$F(s_L, \pi_L)$
8.	$R_8 \in R_{D1}^{VIII}$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_L, \pi_L)$
9.	$R_9 \in R_{D1}^{IX}$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_L, \pi_L)$
10.	$R_{10} \in R_{D1}^X$	$L_1 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{10} \xrightarrow{sh(+)} I_{10_2} \xrightarrow{ra(+)} R_{10}$	$F(s_L, \pi_L)$

Tabela 3.4: Solução de Riemann para  $L_1 \in D$

velocidade varia, fazendo com que o ponto  $T_Q$  fique fora da região de *scanning*. Então, torna-se necessário descrever as novas regiões para  $L_2 \in D$ :



(a)



(b)

Figura 3.5: Solução de Riemann para (a)  $L_1 \in D$  (b)  $L_2 \in D$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_{D2}^I$	$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_1 \xrightarrow{st} R_1$	$F(s_R, \pi_R)$
2.	$R_2 \in R_{D2}^{II}$	$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_2 \xrightarrow{st} Q \xrightarrow{ra(+)} R_2$	$F(s_Q, \pi_Q)$
3.	$R_3 \in R_{D2}^{III}$	$L_2 \xrightarrow{sh(-)} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(s_L, \pi_L)$
4.	$R_4 \in R_{D2}^{IV}$	$L_2 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} I_4 \xrightarrow{ra(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$
5.	$R_5 \in R_{D2}^V$	$L_2 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} T \xrightarrow{ra(+)} R_5$	$F(s_L, \pi_L)$
6.	$R_6 \in R_{D2}^{VI}$	$L_2 \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{sh(+)} R_6$	$F(s_L, \pi_L)$
7.	$R_7 \in R_{D2}^{VII}$	$L_2 \xrightarrow{st} I_7 \xrightarrow{sh(+)} R_7$	$F(s_L, \pi_L)$
8.	$R_8 \in R_{D2}^{VIII}$	$L_2 \xrightarrow{st} I_8 \xrightarrow{ra(+)} R_8$	$F(s_L, \pi_L)$
9.	$R_9 \in R_{D2}^{IX}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_9 \xrightarrow{ra(+)} R_9$	$F(s_L, \pi_L)$
10.	$R_{10} \in R_{D2}^X$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{10} \xrightarrow{ra(+)} R_{10}$	$F(s_L, \pi_L)$
11.	$R_{11} \in R_{D2}^{XI}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{11} \xrightarrow{ra(+)} R_{11}$	$F(s_L, \pi_L)$
12.	$R_{12} \in R_{D2}^{XII}$	$L_2 \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_{12} \xrightarrow{sh(+)} I_{12_2} \xrightarrow{ra(+)} R_{12}$	$F(s_L, \pi_L)$

Tabela 3.5: Solução de Riemann para  $L_2 \in D$

$$\begin{aligned}
R_{D2}^I &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_F Q_d)^{dr}, \overline{Q_d Q_i}, (Q_i X_F)^{im}\} \\
R_{D2}^{II} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Q_d J)^{dr}, (J Q_i)^{sc}, \overline{Q_i Q_d}\} \\
R_{D2}^{III} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (J S)^{dr}, (S K_i)^{sc}, (K_i Q_i)^{im}, (Q_i J)^{sc}\} \\
R_{D2}^{IV} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (S W)^{dr}, (W T_i)^{sc}, (T_i K_i)^{im}, (K_i S)^{sc}\} \\
R_{D2}^V &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (W K_d)^{dr}, (K_d T_i)^{tan}, (T_i W)^{sc}\} \\
R_{D2}^{VI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (K_d D)^{sc}, (D T_i)^{im}, (T_i K_d)^{tan}\} \\
R_{D2}^{VII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } \overline{K_d E_i}, (E_i D)^{im}, (D K_d)^{sc}\} \\
R_{D2}^{VIII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{sc}, \overline{E_i K_d}, (K_d X)^{dr}\} \\
R_{D2}^{IX} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X E_i)^{im}, (E_i X)^{sc}\} \\
R_{D2}^X &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (Y X)^{dr}, (X Y)^{sc}\} \\
R_{D2}^{XI} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (U_d Y)^{dr}, (Y X)^{sc}, (X U_i)^{im}, (U_i U_d)^{sc}\} \\
R_{D2}^{XII} &:= \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X O U_d)^{dr}, (U_d U_i)^{sc}, (U_i X O)^{im}\}
\end{aligned}$$

As soluções para esse caso estão descritas na tabela 3.5 e desenhadas na figura 3.5 (b).

Caso E: Para determinar as sub-regiões  $R$  para  $L = (s_L, F(s_L, \pi_L)) \in E$  vamos definir a reta  $A$ :

$$A := \{(s_A, F_A), F_L \leq F_A\} \quad (3.12)$$

	$R$	solução	fluxo
1.	$R_1 \in R_E^I$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{sh(+)} R_1$	$F(s_L, \pi_L)$
2.	$R_2 \in R_E^{II}$	$L \xrightarrow{st} E_i \xrightarrow{ra(+)} I_2 \xrightarrow{sh(+)} R_2$	$F(s_{I_2}, \pi_{I_2})$
3.	$R_3 \in R_E^{III}$	$L \xrightarrow{st} I_3 \xrightarrow{ra(+)} R_3$	$F(s_L, \pi_L)$
4.	$R_4 \in R_D^{IV}$	$L \xrightarrow{st} K_d \xrightarrow{ra(+)} I_4 \xrightarrow{ra(+)} R_4$	$F(s_L, \pi_L)$

Tabela 3.6: Solução de Riemann para  $L \in E$

onde:

$$s_A(F_A) := \frac{F_A - F^i(s_{E_i})}{\partial_{s_w} F^i(s_{E_i})} \quad (3.13)$$

Definimos, então, as seguintes sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L \in E$  (figura 3.6):

$$R_E^I := \{(s_w, F) \in \Omega \mid F \geq F_L, s_w \geq s_A(F)\}$$

$$R_E^{II} := \{(s_w, F) \in \Omega \mid F \geq F_L, s_w \leq s_A(F)\}$$

$$R_E^{III} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (SE_d)^{im}, \overline{E_d K_i}, (K_i S)^{sc}\}$$

$$R_E^{IV} := \{(s_w, F) \text{ na região envolvida por } (X_O S)^{im}, (SK_i)^{sc}, (K_i X_O)^{dr}\}$$

A solução se encontra na tabela 3.6.

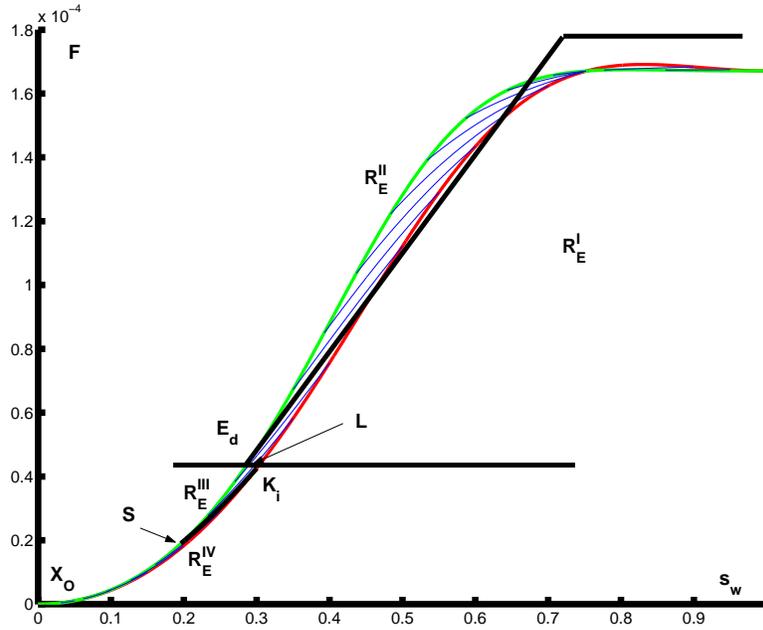


Figura 3.6: Sub-regiões  $R$  de  $\Omega$  para  $L \in E$



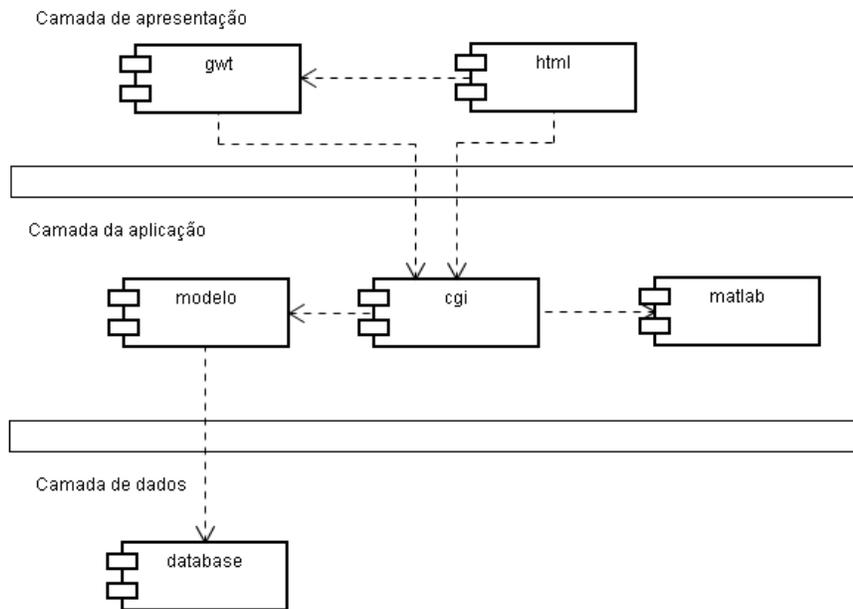


Figura 4.2: Três camadas

A camada de apresentação é web, utilizando HTML, CSS e AJAX. Para produzir o código AJAX, nesse projeto, é utilizado o Google Web Toolkit (gwt) [18].

A camada de negócios desenvolvida em C++ é dividida em três componentes principais: modelo, matlab e cgi, ilustrados na Figura 4.2. No componente modelo estão as classes relacionadas à modelagem do problema. Esse componente também é responsável por acessar o banco de dados; para isso é utilizada a biblioteca Database Template Library (DTL) [15]. O componente matlab utiliza a Application Programming Interface (API) do Matlab para gerar os gráficos da aplicação, tanto os de entrada como os de saída. O componente cgi recebe as requisições da camada de apresentação. Esse componente utiliza a tecnologia Common Gateway Interface (CGI) [16] através da biblioteca VBMCgi [17].

A camada de dados é formada por um banco de dados MySQL que armazena os dados da simulação (entrada e saída) e mantém um cadastro de meios porosos e de fluidos.

## 4.1 Camada de apresentação

O software é composto pelas telas

- Página inicial

- Simulação nova
- Simulação anterior
- Resultado da simulação

A seguir é feita uma descrição detalhada de cada tela da aplicação.

#### 4.1.1 Página inicial

A página inicial deve ter uma breve descrição da aplicação. Além disso, deve conter links que permitam o acesso à interface de definição de nova simulação e visualizar simulações antigas.

#### 4.1.2 Simulação nova

A tela que gera uma simulação nova deve receber todos os parâmetros necessários para realizar uma simulação.

The screenshot shows a web interface titled "Nova simulação" with a light yellow background. It is divided into three main sections: "Reservatório", "Fluido", and "Parâmetros físicos".

- Reservatório:** Includes a dropdown for "Meio poroso" (set to "Areia"), a text input for "Profundidade" (with "m" as a unit), and a "Novo" button.
- Fluido:** Includes radio buttons for "Molhante" and "Não-Molhante". Under "Molhante", there is a dropdown for "Água" and a "Novo" button. Under "Não-Molhante", there is a dropdown for "Petróleo" and a "Novo" button.
- Parâmetros físicos:** Includes a text input for "Gravidade" (with "9,80665" and "m/s" as values/units) and a text input for "Velocidade" (with "m/s" as a unit).

A dialog box titled "Novo Meio Poroso" is overlaid on the right side, containing:
 

- A text input for "Nome:"
- A text input for "Permeabilidade:" followed by "mD".
- A text input for "Porosidade:" followed by "%".
- Two buttons at the bottom: "Salvar" and "Fechar".

Figura 4.3: Simulação nova: reservatório, fluidos e parâmetros físicos.

Os parâmetros são divididos em categorias, a saber, reservatório, fluido, parâmetros físicos, estado inicial, fronteiras e tempo, como podem ser observadas nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5.

#### Reservatório

Para determinar as características do reservatório aquífero é necessário fornecer a sua profundidade e qual é o meio poroso. A seguir é detalhado cada um desses campos Meio poroso:

O campo é uma combo box onde o usuário escolhe algum meio previamente cadastrado. Na seleção aparece o nome do meio. Ao selecionar este campo, aparecem ao lado os valores da porosidade e da permeabilidade. O usuário também pode cadastrar um novo meio poroso. O cadastro é feito através de um botão ao lado da combo box. Ao clicar no botão é aberta uma janela que possui três campos. O primeiro campo é o nome do meio poroso cujo objetivo é facilitar a sua identificação para o usuário no momento em que ele estiver escolhendo um meio poroso ou vendo as características de uma simulação. Os outros campos são a porosidade do meio em porcentagem e a permeabilidade em miliDarcy (mD). A tela de cadastro do meio poroso é aberta na mesma página da nova simulação utilizando AJAX. Os demais campos da página devem ficar desativados para edição enquanto a tela de cadastro do meio estiver aberta. Ao fazer o cadastro o meio poroso é salvo na base e fica disponível para futuras seleções, além de, ficar selecionado para a simulação atual, permitindo, de qualquer forma, que possa ser selecionado outro meio.

O nome do meio, assim como os demais campos apresentados a seguir, deve aceitar caracteres alfanuméricos. Os campos numéricos aceitam números, ponto como sinal decimal e sinais de mais (+) e menos (-). Se não fizer sentido um valor negativo, como no caso da permeabilidade e porosidade, deve aparecer para o usuário uma mensagem de crítica. Profundidade: Campo de texto que só aceita valores numéricos. A profundidade do reservatório é dada em metros.

## **Fluido**

Dentro do reservatório é considerada a presença de dois fluidos chamados de molhante e não-molhante. Para o modelo adotado a diferença entre os dois consiste no fato que é considerada a histerese apenas da fase não-molhante, conforme apresentado na seção 2.2. Molhante: Como no meio poroso o campo contendo a informação sobre o fluido molhante também é uma combo box. A tela de cadastro de um novo fluido possui os campos nome, viscosidade em cP (centipoise) e densidade em  $g/cm^3$ .

Não-molhante: O campo não-molhante é análogo ao fluido molhante exceto que o cadastro não é o mesmo, ou seja, um fluido molhante cadastrado não pode ser usado como não molhante e vice-versa.

## Parâmetros físicos

Os parâmetros físicos são os agentes que provocam o deslocamento dos fluidos no reservatório. No caso a gravidade e a velocidade. Gravidade: O campo da gravidade é um campo de texto que aceita valor numérico. A gravidade é dada em  $m/s^2$ . Esse campo recebe um valor padrão de  $9.80665m/s^2$  que é exibido quando a página é carregada.

Velocidade: O campo da velocidade é um campo de texto que aceita valor numérico. Podendo ele ser positivo - indicando que o fluido está se movendo para baixo - ou negativo - fluido com velocidade para cima. A velocidade é dada em  $m/s$ .

The image shows a user interface for setting simulation parameters. It is organized into four sections, each with a title on the left and input fields on the right. The sections are: 'Estado inicial L', 'Estado inicial R', 'Fronteira L', and 'Fronteira R'. Each section contains two input fields: 'Saturação' (Saturation) and ' $\pi$ '. To the right of these fields is a button labeled ' $s \times F$ '. The entire interface is set against a light yellow background.

Figura 4.4: Simulação nova: estado inicial e fronteiras.

## Estado inicial e fronteiras

Ao ser carregada a página de nova simulação os campos relativos ao estado inicial e condições de fronteiras devem estar desabilitados. Fornecidos os parâmetros descritos anteriormente (reservatório, fluidos e parâmetros físicos) os campos do estado inicial e das fronteiras são habilitados para edição. Tanto o estado inicial quanto as fronteiras podem ser inseridos de duas formas. A primeira é inserindo os valores de saturação e  $p$  manualmente. A outra forma é clicando em um botão que dá acesso ao gráfico  $s \times F$  em uma janela, onde devem ser marcados os pontos, de estado inicial ou fronteira, usando o mouse. Os campos correspondentes são preenchidos de acordo com a marcação no gráfico. Se os pontos forem inválidos, o usuário recebe uma mensagem de alerta. Como são necessários os parâmetros para calcular o gráfico  $s \times F$  eles precisam ser preenchidos, por isso ficam desabilitados inicialmente.

**Malha**

Nx

Nt

---

**Tempo**

t  s

Figura 4.5: Simulação nova: malha e tempo.

## Malha

Para simular é necessário informar em quantos pontos será dividido o reservatório. Como esse simulador contempla apenas uma dimensão tem-se apenas o  $N_x$ , cujo campo só aceita números inteiros positivos. O tempo também é dividido em intervalos, o número de intervalos é dado por  $N_t$ . Deve ser verificado se a condição de CFL (colocar referência) está sendo cumprida. Caso contrário, um alerta é exibido na tela.

Por último, a tela de simulação nova tem um botão para gerar a simulação. Ao clicar nesse botão a aplicação deve verificar todos os dados de entrada, - criticando se for o caso - salvar a simulação se os dados forem válidos e abrir a tela de resultado da simulação.

### 4.1.3 Resultado da simulação

Enquanto a simulação está sendo calculada a tela deve mostrar que o servidor está processando retirando todos os campos e botões da tela. Quando o processamento estiver completo a tela deve exibir o ID da simulação, um painel com o nome dos gráficos disponíveis e a seguir na tela os gráficos. O painel possui duas colunas. A da esquerda tem a relação dos gráficos para algum instante de tempo. A da direita tem os gráficos onde o tempo é um das coordenadas ou é um gráfico animado, onde cada quadro da animação corresponde a um gráfico em um determinado tempo. Ao lado do nome de cada gráfico há uma check-box que determina quais gráficos serão exibidos. Na coluna da esquerda há ainda o campo onde deve ser inserido o instante de tempo a ser exibido. O tempo, nesse caso, é o número do intervalo. O tempo, em segundos, deve ser mostrado ao lado após a seleção de tempo. Um link para incluir novos instantes de tempo é localizado abaixo do último campo de tempo. Junto ao painel há um botão para aplicar os gráficos selecionados, ao ser apertado a página exibe abaixo do painel os gráficos requisitados,

agrupados por tempo horizontalmente e por tipo verticalmente. Os gráficos descritos na coluna direita do painel vêm por último.

#### **4.1.4 Simulações antigas**

A tela de simulações antigas exibe filtros para buscar as simulações antigas. As simulações são listadas abaixo dos filtros. Ao ser clicada uma simulação da listagem, leva para a tela de resultado da simulação. Os filtros são os mesmo valores colocados na tela de nova simulação, sendo que os valores numéricos podem ser filtrados por intervalos. Os dados cadastrados (meio poroso e fluidos) podem ser filtrados tanto pelo nome deles como pelos os valores de seus parâmetros. Os dados apresentados na lista de simulações buscadas são, também, os mesmos dados da tela de nova simulação, nesse caso os dados cadastrados mostram apenas o nome e ao clicar em cima deles é aberta uma janela na própria tela mostrando os valores dos parâmetros.

## **4.2 Camada de negócios**

### **4.2.1 CGI**

Para atender à camada de apresentação, o software é composto de 5 serviços web. A página acessa os serviços dessa aplicação através de uma requisição http utilizando o método GET (rfc2626). A seguir está descrito cada um dos serviços.

#### **Resultado da simulação**

O serviço resultado da simulação deve ser utilizado para buscar os gráficos resultados da simulação. A requisição é feita para resultado\_simulacao.cgi passando os parâmetros da tabela 4.1. Caso o gráfico desejado não precise do tempo, o parâmetro de tempo não deve ser usado.

O serviço busca na base o resultado da simulação, gera o gráfico e retorna o caminho do gráfico.

#### **Nova simulação**

O serviço nova simulação deve ser utilizado para realizar uma nova simulação. A requisição é feita para nova\_simulacao.cgi passando os parâmetros da tabela 4.2.

Tabela 4.1: Parâmetros resultado\_simulacao.cgi

Parâmetro	Descrição	Caracteres
simulacao	ID da simulação	0-9
grafico	Tipo do gráfico	0-9 .
tempo	Tempo do gráfico	0-9

Tabela 4.2: Parâmetros nova\_simulacao.cgi

Parâmetro	Descrição	Caracteres
meio	ID do meio	0-9
prof	Profundidade em metros	0-9 .
fluidoM	ID do fluido molhante	0-9
fluidoNM	ID do fluido não-molhante	0-9
grav	Gravidade em $m/s^2$	0-9 .
velo	Velocidade em m/s	0-9 - + .
satL	Saturação Left. Número de 0 a 1.	0-9 .
piL	Valor de p Left. Número de 0 a 1.	0-9 .
satR	Saturação Right. Número de 0 a 1.	0-9 .
piR	Valor de p Right. Número de 0 a 1.	0-9 .
fSatL	Saturação na fronteira Left. Número de 0 a 1.	0-9 .
fPiL	Valor de p na fronteira Left. Número de 0 a 1.	0-9 .
fSatR	Saturação na fronteira Right. Número de 0 a 1.	0-9 .
fPiR	Valor de p na fronteira Right. Número de 0 a 1.	0-9 .
nx	Quantidade de células da malha	0-9
nt	Quantidade de intervalos de tempo	0-9
T	Tempo a ser simulado em segundos	0-9

Tabela 4.3: Erros nova\_simulacao.cgi

Código	Descrição
-1	Caracteres inválidos no parâmetro meio
-2	Caracteres inválidos no parâmetro prof
-3	Caracteres inválidos no parâmetro fluidoM
-4	Caracteres inválidos no parâmetro fluidoNM
-5	Caracteres inválidos no parâmetro grav
-6	Caracteres inválidos no parâmetro velo
-7	Caracteres inválidos no parâmetro satL
-8	Caracteres inválidos no parâmetro piL
-9	Caracteres inválidos no parâmetro satR
-10	Caracteres inválidos no parâmetro piR
-11	Caracteres inválidos no parâmetro fSatL
-12	Caracteres inválidos no parâmetro fPiL
-13	Caracteres inválidos no parâmetro fSatR
-14	Caracteres inválidos no parâmetro fPiR
-15	Caracteres inválidos no parâmetro nx
-16	Caracteres inválidos no parâmetro nt
-17	Caracteres inválidos no parâmetro t
-18	Parâmetro satL fora do intervalo
-19	Parâmetro piL fora do intervalo
-20	Parâmetro satR fora do intervalo
-21	Parâmetro piR fora do intervalo
-22	Parâmetro fSatL fora do intervalo
-23	Parâmetro fPiL fora do intervalo
-24	Parâmetro fSatR fora do intervalo
-25	Parâmetro fPiR fora do intervalo
-26	Condição de CFL não atendida
-27	Erro interno

O serviço realiza todos os cálculos necessários e salva o resultado no banco de dados. Ao final desse processo, o serviço retorna o ID da simulação ou, se tiver ocorrido algum erro, algum dos códigos relacionados na tabela 4.3.

### Novo meio poroso

O serviço novo meio poroso deve ser utilizado para cadastro de um meio poroso no banco de dados. A requisição é feita para novo\_meio.cgi passando os parâmetros da tabela 4.4.

Ex: novo\_meio.cgi?nome=Areia&perm=3.7&poro=0.75

Tabela 4.4: Parâmetros novo\_meio.cgi

Parâmetro	Descrição	Caracteres
nome	Nome do meio poroso	a-z A-Z 0-9
perm	Permeabilidade do meio em miliDarcy	0-9 .
poro	Porosidade do meio. Número de 0 a 1.	0-9 .

Tabela 4.5: Erros novo\_meio.cgi

Código	Descrição
-1	Caracteres inválidos no parâmetro nome
-2	Caracterec inválidos no parâmetro perm
-3	Caracteres inválidos no parâmetro poro
-4	Parâmetro poro fora do intervalo
-5	Erro interno

Tabela 4.6: Parâmetros novo\_fluido.cgi

Parâmetro	Descrição	Caracteres
nome	Nome do fluido	a-z A-Z 0-9
visc	Viscosidade do fluido em centiPoise	0-9 .
dens	Densidade do fluido em $g/cm^3$	0-9 .
tipo	0 para molhante, 1 para não-molhante	0 1

Após a requisição, o serviço deve salvar na base de dados o novo meio poroso, caso os parâmetros sejam válidos, e retornar o ID. Se os parâmetros forem inválidos ou ocorrer algum erro no servidor, o serviço retornará um dos códigos de erro relacionados na tabela 4.5.

### Novo fluido

O serviço novo fluido deve ser utilizado para cadastro de um fluido, tanto molhante quanto não-molhante, no banco de dados. A requisição é feita para novo\_fluido.cgi passando os parâmetros da tabela 4.6.

Ex: novo\_fluido.cgi?nome=Agua&visc=1&dens=1&tipo=0

Após a requisição, o serviço deve salvar na base de dados o novo fluido, caso os parâmetros sejam válidos, e retornar o ID. Se os parâmetros forem inválidos ou ocorrer algum erro no servidor o serviço retornará um dos códigos de erro relacionado na tabela 4.7.

Tabela 4.7: Erros novo\_fluido.cgi

Código	Descrição
-1	Caracteres inválidos no parâmetro nome
-2	Caractepes inválidos no parâmetro visc
-3	CaractereS inválidos no parâmetro dens
-4	Valor de tipo inválido
-5	Erro interno

Tabela 4.8: Parâmetros grafico\_sF.cgi

Parâmetro	Descrição	Caracteres
meio	ID do meio	0-9
fluidoM	ID do fluido molhante	0-9
fluidoNM	ID do fluido não-molhante	0-9
grav	Gravidade em $m/s^2$	0-9 .

### Gráfico $s \times F$

O serviço gráfico  $s \times F$  deve ser utilizado para obter o gráfico  $s \times F$  para um determinado problema. A requisição é feita para grafico\_sF.cgi passando os parâmetros da tabela 4.8.

O serviço calcula os pontos da curva de drenagem e embebição, gera o gráfico com essas duas curvas e retorna o caminho do arquivo do gráfico gerado.

## 4.2.2 Modelo

Para fazer a modelagem orientada a objetos do problema foi projetado o diagrama de classes da Figura 4.6. O diagrama é composto pelas classes Fluido, FluidoMolhante, FluidoNaoMolhante, Simulacao, Malhas, Malha, Celula, Reservatorio e Meio. A classe Fluido possui os atributos viscosidade e densidade, que são as propriedades dos fluidos necessárias para resolver o problema proposto. Os fluidos podem ser ou molhante ou não molhante, a principal diferença é em qual dos fluidos é considerada a histerese. Para representar cada um desses dois tipos de fluido foram criadas as classes FluidoNaoMolhante e FluidoMolhante que são sub-classes da classe Fluido.

Para descrever as características do reservatório em que se deseja realizar a simulação foi criada a classe Reservatorio que tem os atributo profundidade e está relacionado à classe Meio, que tem as propriedades do meio poroso. A classe Meio possui os atributos permeabilidade e porosidade.

Para cada instante de tempo, cada ponto discretizado do reservatório possui um valor de saturação e de  $\pi$ . Cada ponto, ou célula, é representado pela classe Celula. O conjunto de células em um determinado instante de tempo é dado pela classe Malha, onde cada instância da classe Celula representa uma célula em determinada posição da malha. O conjunto das malhas em todos os instantes de tempo é dado pela classe Malhas.

A classe responsável por fazer a simulação, chamada de Simulacao, possui os atributos tempo, gravidade e velocidade e é relacionado às classes FluidoMolhante e FluidoNaoMolhante que possuem as características dos dois fluidos envolvidos na simulação. A classe Simulacao,

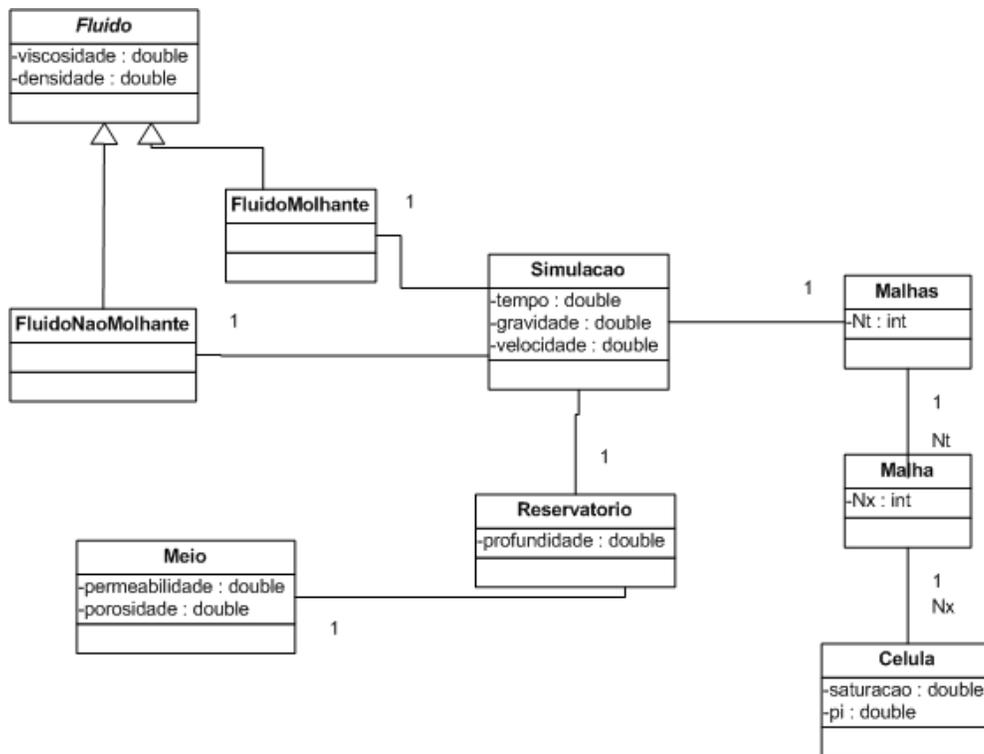


Figura 4.6: Diagrama de classes do modelo

para realizar a simulação, também está relacionada às classes Reservatorio e Malhas.

### 4.2.3 Matlab

Para gerar os gráficos de resultado e de entrada da aplicação é utilizada a API do Matlab. Os gráficos que o software precisa gerar são o gráfico  $s \times F$  de entrada e  $z \times s$  e  $z \times \pi$  de saída. Para isso tem-se o diagrama de classes para o componente matlab na Figura 4.7.

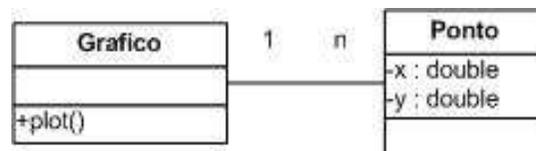


Figura 4.7: Diagrama de classes do componente matlab

A classe Grafico está associada à classe Ponto, em uma associação 1 para n. A classe Ponto possui os atributos  $x$  e  $y$  que correspondem às coordenadas do ponto. A classe Grafico possui

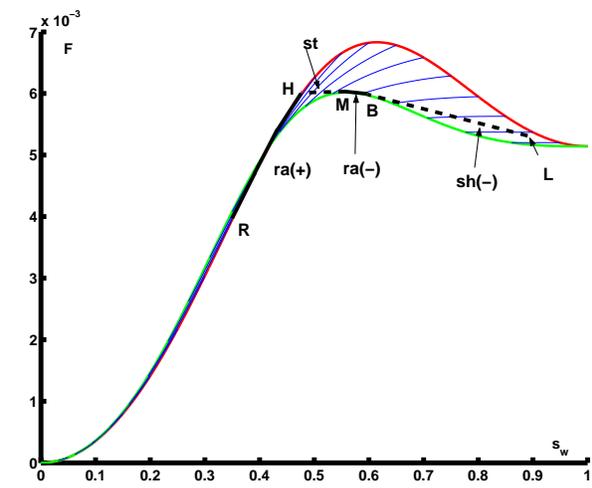
o método plot que acessa a API do Matlab e gera o gráfico de acordo com os pontos.



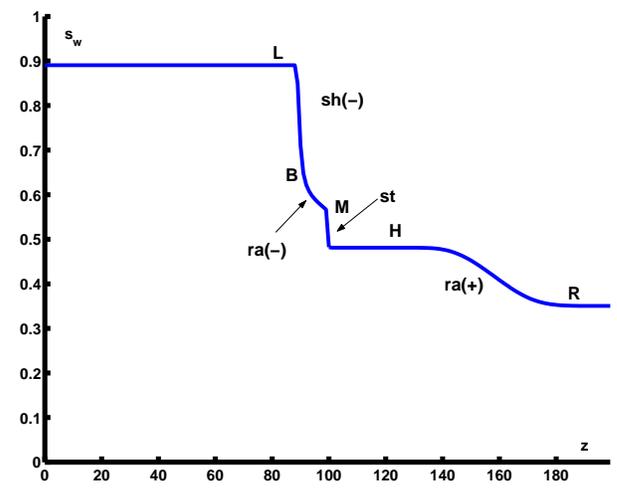
# Capítulo 5

## Resultados Obtidos

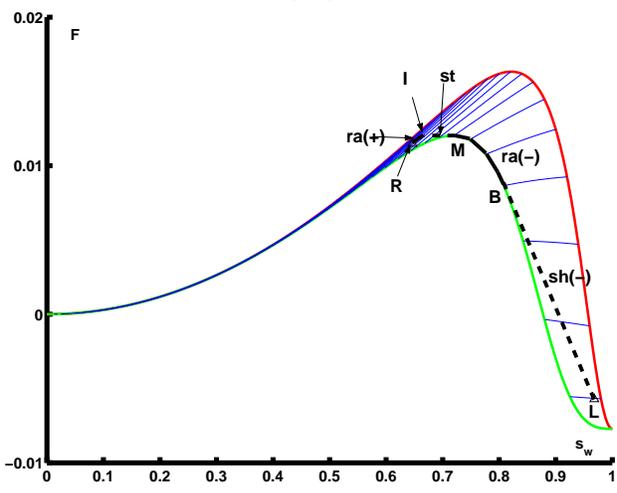
Nas figura 5.1 estão alguns exemplos (b) dos resultados da simulação obtidos com o *software* e (a) a solução do problema de Riemann, onde estão ilustrados os pontos principais e as ondas (choque, rarefação e descontinuidade). No exemplo da figura 5.1.1 a velocidade é positiva,  $L \in A$  e  $R \in R_A^V$ , a solução está na tabela 3.1. Já o exemplo da figura 5.1.2 ilustra o mesmo caso em que  $L \in A$  e  $R \in R_A^V$ , entretanto a velocidade é negativa. A velocidade positiva significa injeção de gás no aquífero, para armazená-lo; e, a velocidade negativa representa a situação em que se está retirando o gás do aquífero (produção). A figura 5.1.3 ilustra um caso em que a saturação aumenta além do estado inicial.



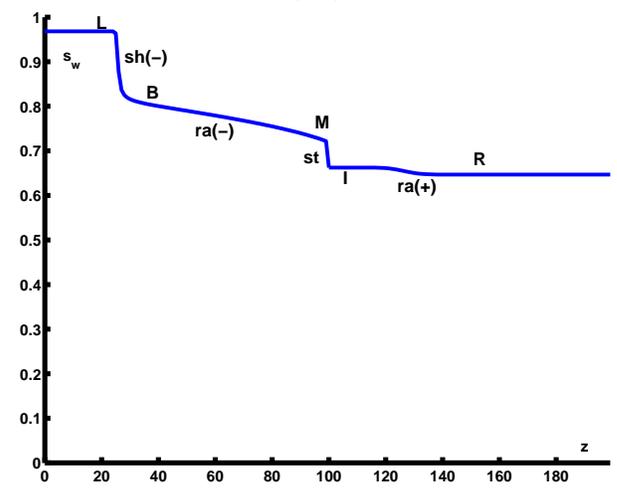
(1a)



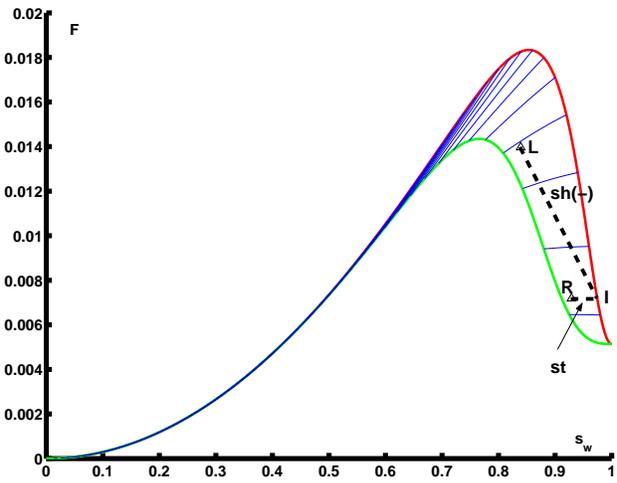
(1b)



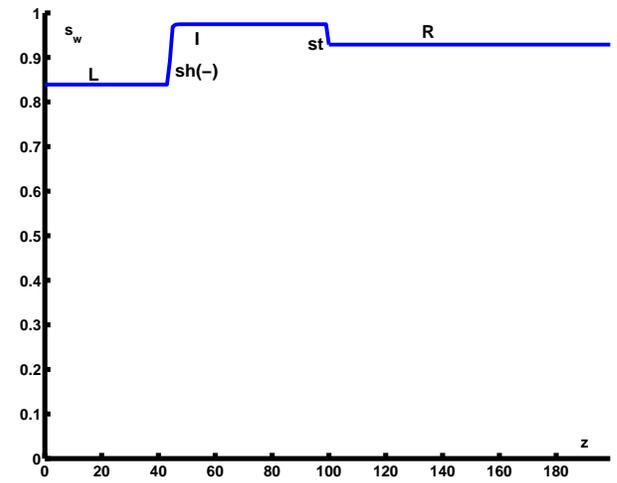
(2a)



(2b)



(3a)



(3b)

Figura 5.1: (a) Solução do problema de Riemann (b) Resultado da simulação

# Capítulo 6

## Conclusão

Neste trabalho foi considerada a histerese na permeabilidade relativa nos termos associados à velocidade e à gravidade simultaneamente. As soluções de Riemann encontradas para as equações que modelam o escoamento em um aquífero quando usado para armazenar gás, permite determinar diretamente o perfil da solução quando é dado o estado inicial.

Os resultados numéricos, obtidos com a implementação do método de Godunov Corrigido (seção 5), verificam as soluções de Riemann teóricas apresentadas na seção 3. O *software*, assim como os modelos e as técnicas desenvolvidos apresentam as vantagens de poder ser utilizados em outros contextos tais como na simulação do comportamento de óleos viscosos ou em WAG, o que permite aumentar o fator de recuperação de petróleo viscoso.

Finalmente, as técnicas desenvolvidas podem ser facilmente estendidas para futuros trabalhos como a inclusão de condições de fronteira cíclicas — caso da utilização contínua do aquífero para armazenamento e fornecimento de gás — bem como a implementação em duas ou três dimensões espaciais. Desta forma, os métodos e o *software* desenvolvidos podem se tornar ferramentas importantes na viabilização da técnica para armazenar gás no Brasil, ampliando a utilização de gás na matriz energética brasileira, o que é economicamente e ambientalmente positivo.



# Referências Bibliográficas

- [1] AZIZ K., SETTARI A., Petroleum Reservoir Simulation, Applied Science, London, 1979.
- [2] BEDRIKOVETSKY P., Mathematical Theory of Oil and Gas Recovery: With Application to ex-USSR oil and Gas Fields. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [3] BRAUN E.M., HOLLAND R.F., Relative permeability hysteresis: laboratory measurements and a conceptual model, *SPE Reservoir Engineering*, No 28615, pp 222–228, 1995.
- [4] BRIGGS J.E., KATZ D.L., Drainage of Water from Sand in Developing Aquifer Storage, *Society of Petroleum Engineers of AIME*, SPE 1501, 1966.
- [5] EWING R. E., The Mathematics of Reservoir Simulation, Frontiers In Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1983.
- [6] FURATI K.M., Effects of relative permeability history dependence on two-phase flow in porous media, *Transport in Porous Media*, Vol 28, pp. 181–203, 1997.
- [7] GODUNOV S.K., A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics, *Mat. Sb.*, Vol. 47, pp. 271–290, 1959.
- [8] FLORH B., MARCHESIN D., BEDRIKOVETSKY P., KRAUSE P., Modeling hysteresis in porous media flow via relaxation, *Computational Geosciences*, Vol. 5, no 3, pp 225–256, 2001.
- [9] SCHAEERER C.E., SARKIS M., MARCHESIN D., BEDRIKOVETSKY P., Counterflow segregation problem with hysteretic permeability, submetido ao *SIAM Applied Mathematics*.
- [10] SCHAEERER C.E., SARKIS M., MARCHESIN D., Numerical simulation of gravity counterflow segregation, *CILAMCE XXV, Iberian Latin American Congress on Computational Methods*, November 10–12, Recife, Pernambuco, Brasil.

- [11] Ambientebrasil - portal ambiental, <http://www.ambientebrasil.com.br>.
- [12] Gaspetro, <http://www.gaspetro.com.br>
- [13] Portal GásEnergia - A Energia do Gás Natural, <http://www.gasenergia.com.br>.
- [14] Underground Gas Storage: Technological Innovations for Increased Efficiency,  
[http://www.worldenergy.org/wec-geis/publications/default/tech\\_papers/17th\\_congress/2\\_2\\_09.asp](http://www.worldenergy.org/wec-geis/publications/default/tech_papers/17th_congress/2_2_09.asp)
- [15] Database Template Library, <http://dtemplatelib.sourceforge.net>
- [16] Common Gateway Interface, <http://www.w3.org/CGI>
- [17] VBMCgi, [http://www.sbv.com.br/cgi-bin/index\\_vbmcgi.cgi](http://www.sbv.com.br/cgi-bin/index_vbmcgi.cgi)
- [18] Google Web Toolkit, <http://code.google.com/webtoolkit>
- [19] Reservatórios de águas subterrâneas, <http://www.colegiosaofrancisco.com.br/alfa/poluicao-da-agua/reservatorios-de-agua-subterraneos.php>