

**Auto - ajuste de controladores PID usando o método  
da linearização harmônica**

**Carlos Augusto de Sousa Coelho**

---

**Jomar Gozzi, M.sc.  
(Orientador)**

---

**Oswaldo Pereira Filho, M.sc.**

---

**Roosevelt José Dias, D.sc.**

**Rio de Janeiro, RJ – Brasil  
Janeiro de 2004**

## Agradecimentos

Agradeço aos meus pais por tudo que fizeram e têm feito para que eu e meus irmãos possamos ter um futuro próspero. Agradeço-os pela constante presença, motivação e incentivo para que o término deste curso fosse de facto uma realidade.

Agradeço a minha filha Caliana Coelho pela companhia e por todos momentos alegres que tem me proporcionado.

Agradeço ao meu Tio Cristiano, aos meus irmãos e ao meu primo Mário André pelo apoio e incentivo sempre mostrado de forma realista.

Um agradecimento especial vai para **Dona Salete Barros** por ter acreditado nas minhas intenções e ter feito de mim um verdadeiro filho. Estou certo que esteja onde estiver estará satisfeita com este momento.

Agradeço ao meu estimado orientador Professor Jomar Gozzi pela paciência, sabedoria, espírito de camaradagem e por ser digno no que faz. Sem ele esta obra não teria terminado.

Agradeço também aos Professores Osvaldo, Ricardo Rhomberg, Baruqui e Casé por terem sido atenciosos e sempre dispostos ajudar a superar algumas dificuldades que tive durante o curso.

Não poderia deixar de agradecer ao meu estimado colega e amigo Chen. Obrigado pela enorme colaboração sempre presente em todos trabalhos que juntos realizamos.

## **Resumo**

Neste trabalho é feita uma avaliação da técnica de auto – ajuste de controladores PID com base no conceito de função descritiva. Após análise dos resultados obtidos com uso do relé ideal como elemento não – linear na fase de estimação de parâmetros, desenvolveu-se um algoritmo para o caso de sua substituição por um relé com histerese.

## **Palavras chaves**

- Controle PID
- Controle a relé
- Margem de ganho
- Margem de fase
- Método de Ziegler-Nichols
- Função descritiva

# Sumário

<b>Agradecimento</b> .....	i
<b>Resumo</b> .....	ii
<b>Palavras chave</b> .....	iii
<b>Capítulo 1 - Introdução</b> .....	1
<b>Capítulo 2 - Revisão Bibliográfica</b> .....	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Controladores PID.....	3
2.3 Método de Ziegler- Nichols e suas regras para sintonia de controladores PID.....	5
2.4 Margem de ganho, Margem de fase e sua relação com a estabilidade dos sistemas realimentados.....	6
2.4.1 Margem de fase.....	7
2.4.2 Margem de ganho.....	7
2.5 Função descritiva.....	9
2.6 Astrom e o auto- ajuste de controle PID.....	10
<b>Capítulo 3 - Controle a Relé: Algoritmos para auto – ajuste do PID</b> .....	12
3.1 Introdução.....	12
3.2 Controle PID auto- Ajustável: Algoritmos.....	12
3.2.1 Uso do Relé ideal.....	13
3.2.2 Relé com histerese.....	15
<b>Capítulo 4 - Relé e o processo de estimação de parâmetros</b> .....	29
4.1 Introdução.....	29
4.2 Análise do número de ciclos escolhidos e da amplitude do Relé no processo de estimação de ganho crítico e do período de oscilação .....	30
4.3 Análise da exatidão da estimação de parâmetros pelo Relé ideal. Desempenho do controlador PID determinado pelo auto – ajuste via Relé.....	33
<b>Capítulo 5 - Relé com histerese. Desempenho do sistema</b> .....	38
5.1 Introdução.....	38
5.2 Análise da exatidão da estimativa de parâmetros pelo Relé com histerese.....	38
5.3 Avaliação da técnica usando Relé com histerese quanto ao desempenho do sistema em malha fechada.....	40
<b>Capítulo 6 - Avaliação do desempenho em comparação com Ziegler-Nichols</b> .....	47
6.1 Introdução.....	47
6.2 Análise dos parâmetros de ajuste em relação aos propostos por Ziegler- Nichols.....	48
<b>Capítulo 7 - Influência da perturbação</b> .....	59
7.1 Introdução.....	59
7.2 Análise do ajuste na presença de perturbação .....	59
7.3 Outras considerações .....	69
<b>Capítulo – 8 conclusões.</b> .....	73

## Capítulo 1 – Introdução

Controladores PID (proporcional, integral, derivativo) são os controladores lineares mais utilizados na prática. O ajuste de seus parâmetros é um dos problemas de controle mais considerados.

Para o caso de plantas de modelo desconhecido, Astrom apresentou um método de auto - ajuste de parâmetros de PID utilizando um elemento não linear. Tendo dado ênfase ao uso do relé ideal, Astrom sugeriu como extensão à possibilidade do uso do relé com histerese com o objetivo de melhorar a relação sinal - ruído, embora não tenha apresentado um algoritmo de auto – ajuste correspondente.

Deste modo, o trabalho ora apresentado tem os seguintes objetivos:

- Avaliar a técnica de auto – ajuste usando relé ideal como proposto por Astrom.
- Estender o procedimento de auto – ajuste ao caso do uso do relé com histerese, elaborando um algoritmo para o auto – ajuste e avaliar sua aplicabilidade.

Assim a apresentação deste trabalho está estruturada da seguinte maneira:

No capítulo 2 falaremos sobre alguns aspectos ligados a controladores PID, conceito de margem de ganho e de fase, método da sensibilidade limite de Ziegler-Nichols e suas regras para sintonia de controladores PID, função descritiva, Astrom e o auto - ajuste do PID.

No capítulo 3 serão apresentados fundamentos matemáticos necessários para o desenvolvimento do ajuste. Serão também apresentados algoritmos, estimativa de parâmetros e a sintonia do controlador.

No capítulo 4 serão avaliados os procedimentos do auto – ajuste quanto à sua exatidão na obtenção de parâmetros.

No capítulo 5 serão avaliados os desempenhos dos sistemas em malha fechada cujo auto – ajuste foi visto anteriormente.

No capítulo 6 são apresentadas comparações entre o ajuste usando relé com histerese e o ajuste proposto por Ziegler-Nichols, método da sensibilidade limite.

No capítulo 7, será feita uma análise em torno do comportamento do sistema na presença da perturbação. Questões como influência da perturbação no processo de estimação de parâmetros serão também vistas.

O capítulo 8 é dedicado a conclusões sobre o trabalho feito.

## Capítulo 2 – Revisão Bibliográfica

### 2.1 Introdução

Visando melhor entendimento dos assuntos abordados neste trabalho, pensou-se necessário que neste capítulo fosse discutido alguns aspectos ligados a controladores PID, margem de fase e de ganho, função descritiva, ajuste utilizando a sintonia de Ziegler-Nichols e o auto-ajuste de controladores PID segundo Astrom.

Este capítulo está apresentado da seguinte maneira:

Na secção 2.2 são mostrados alguns conceitos que envolvem características principais das acções proporcional, integral e derivativa. Na secção 2.3 é apresentado o método de ajuste dos parâmetros de controladores PID de Ziegler-Nichols baseado na sensibilidade limite. Na secção 2.4 são abordados os conceitos de margem de ganho e margem de fase e sua relação com a estabilidade dos sistemas lineares realimentados. Na secção 2.5 são discutidos aspectos ligados ao método da linearização harmônica e ao conceito da função descritiva para sistemas não lineares. Por fim na secção 2.6 são vistos aspectos ligados ao auto-ajuste de controladores PID proposto por Astrom.

### 2.2 Controladores PID

Nesta secção, faremos uma breve revisão sobre controladores PID visando tornar mais claros alguns conceitos necessários para a compreensão deste trabalho, tendo sido baseado em Astrom e Hagglund [1].

Seja o esquema básico:

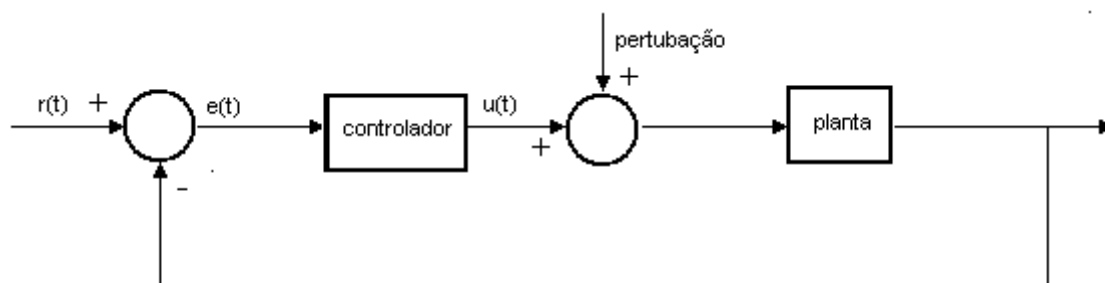


Figura 2.1: Esquema básico de um sistema com controlador PID.



Para o que segue, consideramos  $r(t)$  uma referência degrau e a perturbação (aditiva ao controle) também do tipo degrau. A planta é suposta linear e estável.

Considerando que o controlador é do tipo PID temos:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\lambda) d\lambda + T_d \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (2.1)$$

$u(t)$  é o sinal de controle e  $e(t)$  o sinal de erro definido como sendo a diferença entre o valor de referência e o valor da saída do sistema.  $K_p$  representa o ganho proporcional,  $T_i$  a constante de tempo de integração e  $T_d$  a constante de tempo derivativa.

A atribuição dos valores de  $T_i$  e  $T_d$  define a importância relativa das parcelas integrativa e derivativa face a parcela proporcional.

O problema de sintonia do controlador PID é ajustar estes parâmetros,  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  de modo a obter uma boa resposta no tempo.

Sabe-se que a acção integrativa é responsável pela anulação do erro em regime permanente para referências e perturbação do tipo degrau, porém pode provocar oscilações de baixa frequência se tiver peso excessivo.

A acção derivativa é usada para evitar a presença de oscilações e conduzir o sistema realimentado mais rapidamente à estabilidade, porém deixa o sistema sensível à presença de ruído.

## 2.3 Método de Ziegler-Nichols e suas regras para sintonia de controladores PID

A atribuição de valores para os parâmetros do controlador PID pode ser feita utilizando-se o modelo matemático da planta, com métodos analíticos de projeto de controladores. Porém há casos em que o modelo matemático se torna inviável. Neste contexto Ziegler e Nichols [2] propuseram um método de ajuste experimental chamado método da sensibilidade limite aplicável a plantas de modelo desconhecido, estáveis e de resposta monotônica a degrau, o método consiste em:

- 1) Sob controle puramente proporcional, o ganho deve ser aumentado até o sistema apresentar oscilações sem amortecimento.
- 2) Anotam-se os valores do ganho crítico  $K_{cr}$  e do período da oscilação  $P_{cr}$
- 3) Ajusta-se o controlador segundo a tabela abaixo.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$0.83P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Tabela 2.1 Regras de ajustes estabelecidas por Ziegler-Nichols.

## 2.4 Margem de ganho e Margem de fase sua relação com a estabilidade dos sistemas realimentados.

A estabilidade dos sistemas lineares realimentados pode ser analisada sob vários enfoques. Nyquist [2] abordou este assunto determinando graficamente a estabilidade do sistema em malha fechada a partir da resposta em frequência da malha aberta.

Considere o esquema abaixo:

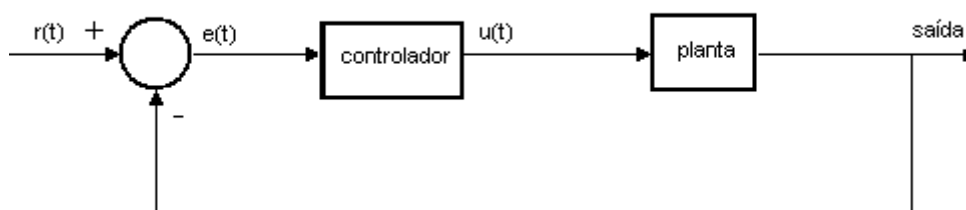


Figura 2.2: Sistema em malha fechada.

Nas expressões usadas abaixo  $G(s)$  é a função de transferência da planta e  $C(s)$  a função de transferência do controlador.

A função de transferência da malha aberta vale  $C(s)G(s)$  e a função de transferência da malha fechada vale  $\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$ .

Se  $C(s)G(s)$  não possui pólos no semiplano lateral direito então o sistema em malha fechada será estável se o diagrama polar da resposta em frequência da malha aberta não envolver o ponto  $-1$  do plano complexo.

Para o que segue, define-se frequência de cruzamento de ganho ou frequência de margem de fase, a frequência na qual a resposta em frequência da malha aberta tem módulo unitário [3].

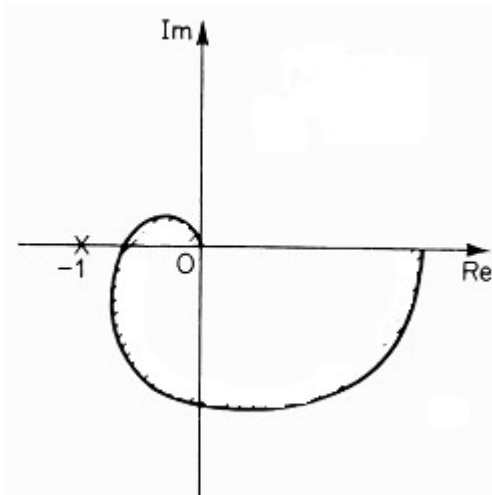


Figura2.3: sistema estável

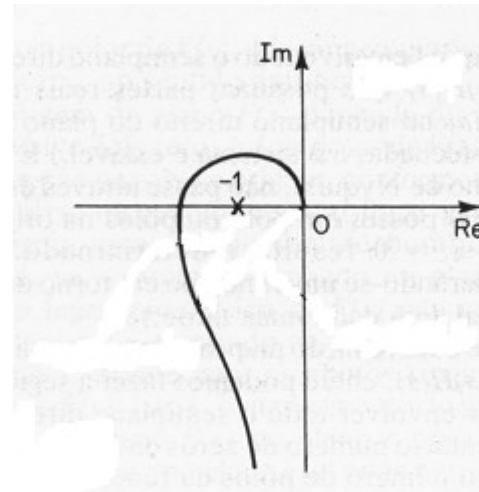


Figura2.4: Sistema instável

### 2.4.1 Margem de fase

A margem de fase é a quantidade adicional de defasagem que, acrescida à fase da malha aberta na frequência de cruzamento do ganho leva o sistema em malha fechada ao limiar de instabilidade. Em sistemas estáveis a margem de fase é positiva. Isto significa que a fase correspondente à frequência de cruzamento é maior do que  $-180^\circ$ . A frequência de margem de fase fornece uma indicação qualitativa sobre a velocidade de resposta do sistema. Resultados mostram que valores de margem de fase entre  $30^\circ$  e  $60^\circ$  normalmente apresentam respostas satisfatórias [4].

### 2.4.2 Margem de ganho

Para um sistema estável em malha fechada, a margem de ganho indica a razão entre o ganho crítico  $K_{cr}$  e o ganho proporcional  $K_p$  em uso.

Resultados mostram que valores de margem de ganho próximos de 2 normalmente apresentam respostas satisfatórias [4].

Se a resposta em frequência em malha aberta não intercepta o eixo real negativo então a margem de ganho é infinita.

Na figura 2.4, os diagramas de Bode mostram as margens de ganho e de fase de um sistema arbitrário.

### Bode Diagrams

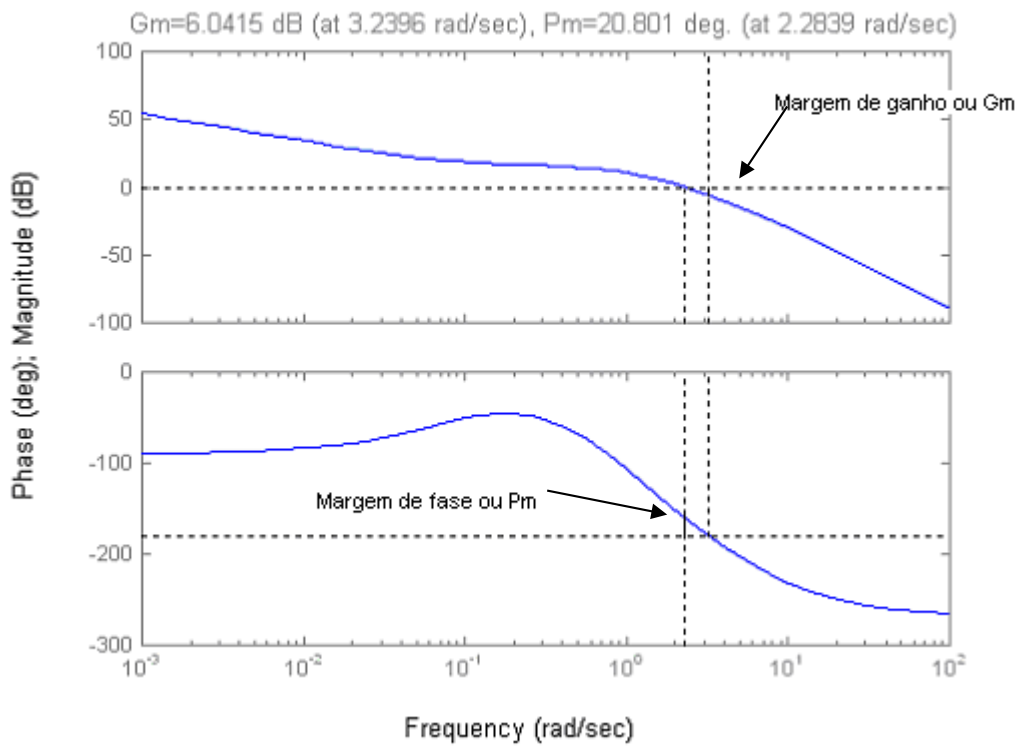


Figura 2.4: Diagrama de Bode, margem de ganho e margem de fase.

## 2.5 Função descritiva

Por razões inerentes ao melhoramento do desempenho de um sistema de controle ou mesmo para simplificar a construção deste, alguns elementos não lineares são intencionalmente introduzidos em alguns sistemas [5].

Considere o esquema abaixo:

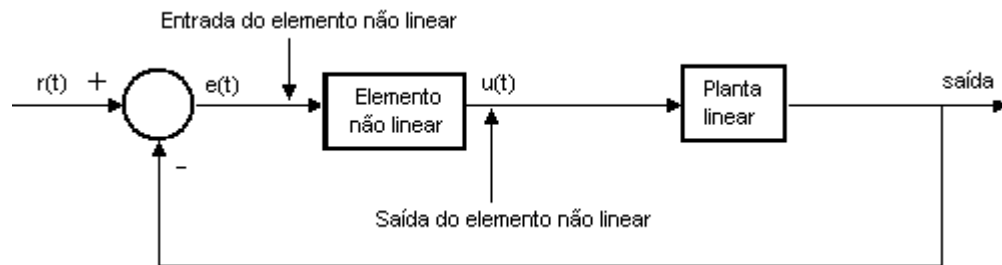


Figura 2.5: Diagrama de blocos de um processo usando elemento não linear.

O método da função descritiva é usado para identificar a presença de oscilação na saída do esquema da figura 2.5. Para determinar a condição de oscilação, o elemento não linear é descrito por um ganho complexo chamado de função descritiva.

Suponhamos que o sistema está em oscilação. Então a saída do elemento não linear é uma função periódica. A expansão em série de Fourier de um sinal periódico mostra que a amplitude dos harmônios decresce com a ordem. Supondo planta passa baixa, desprezamos os harmônios de ordem superior, tem-se aproximadamente uma senóide circulando pela malha. Isto sugere o tratamento do sistema não linear por métodos lineares. Um passo neste sentido é substituir o elemento não linear por um ganho complexo.

No caso do elemento não linear ser um relé ideal, sua função descritiva é:

$$N(A) = \frac{4.M}{\pi.A} \quad (2.2)$$

No caso do elemento não linear ser um relé com histerese, sua função descritiva é:

$$N(A) = \frac{4.M}{\pi.A} \exp(-j.\arcsen \frac{h}{A}) \quad (2.3)$$

onde  $M$ ,  $A$  e  $h$  são respectivamente a amplitude do relé, amplitude do sinal na entrada do elemento não linear e a histerese do relé.

## 2.6 Astrom e o auto-ajuste de controle PID

Considere o esquema abaixo:

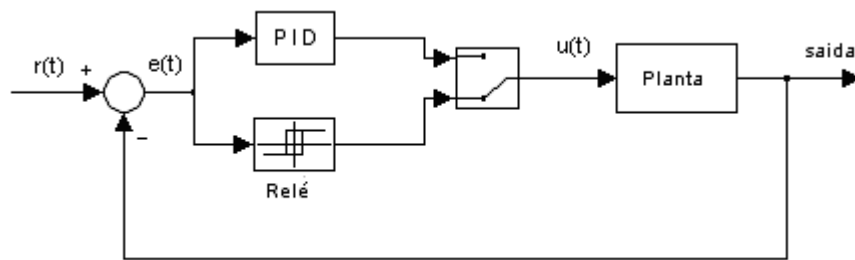


Figura 2.6: Sistema controlado inicialmente a Relé e depois chaveado para o PID.

Astrom propôs em [6] um sistema de sintonia automática de controle PID. Este método utiliza o método da linearização harmônica com base no conceito da função descritiva para estimar parâmetros do sistema.

O esquema de Astrom consiste no seguinte:

- 1) Sob controle a relé, espera-se o sistema realimentado entrar em oscilação.
- 2) Utilizando a expressão da função descritiva do relé, estima-se o ganho crítico e o período da oscilação que o sistema teria sob controle proporcional. Astrom considerou, que nestas condições, o ganho  $N(A)$  do relé representa um valor bem aproximado do ganho crítico  $K_{cr}$ . Por este motivo  $K_{cr}$  é feito igual a  $N(A)$ .
- 3) Encontrada a sintonia através da tabela 2.1 o sistema passa a controle PID.

Como ilustração apresentamos em seguida uma simulação mostrando gráficos das variáveis tanto na fase de estimação de parâmetros como depois com o controle a PID auto-ajustado.

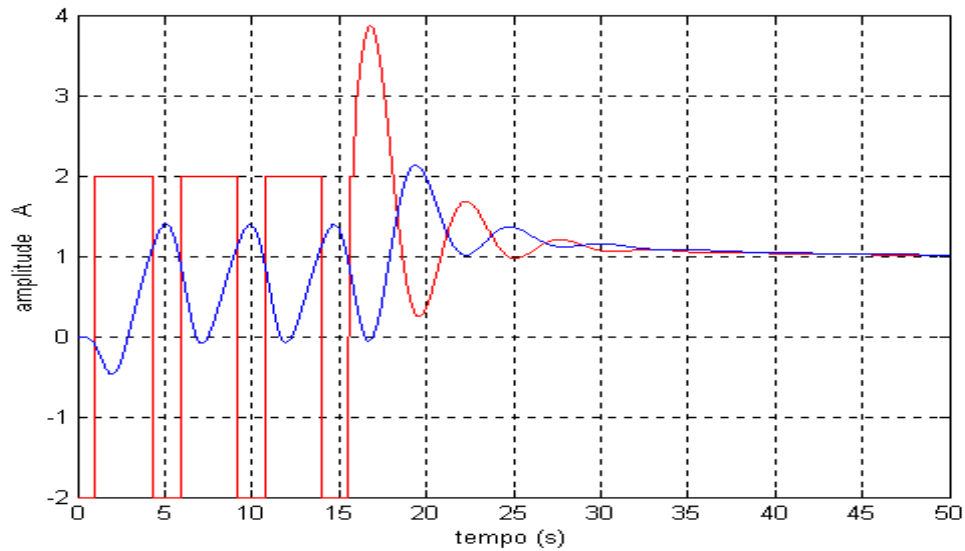


Figura 2.7: Saída do sistema, linha azul. Sinal de controle, linha vermelha.

Os conhecimentos aqui revisados servirão de base para o entendimento dos assuntos a serem discutidos nos capítulos que se seguem.



## Capítulo 3 – Controle a Relé: Algoritmos para auto – ajuste do PID.

### 3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os fundamentos matemáticos aplicados no desenvolvimento do método de ajuste automático dos controladores PI e PID. O capítulo contém a secção 3.2 onde é apresentado um problema de controle cuja solução é sugerida nas secções 3.2.1 e 3.2.2. Aspectos ligados à estimativa da amplitude, da frequência de oscilação e do ganho crítico são também vistos. Para melhor compreensão do método, é apresentado um algoritmo com os passos a serem seguidos.

### 3.2 Controle PID auto - ajustável: Algoritmos

Seja o esquema abaixo:

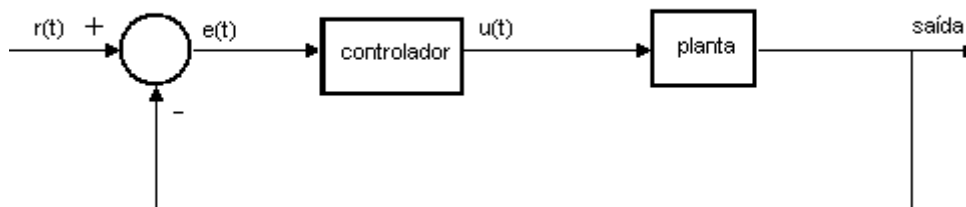


Figura 3.1: Sistema controlado por PID.

Considera-se o controle de uma planta desconhecida linear e estável de resposta monotônica a degrau.

Pretende-se que o sistema em malha fechada obviamente seja estável, com bom desempenho na resposta transitória e que não apresente erro em regime permanente. Para que tais objetivos sejam alcançados são usados controladores PID.

O problema passa a ser encontrar os valores adequados para os parâmetros do controlador de modo a satisfazer as condições acima. Para isso existem vários métodos. Um dos métodos que pode ser aplicado para atribuição de valores aos parâmetros é o método da sensibilidade limite estabelecido por Ziegler-Nichols. O

método é adequado para casos como este em que a planta é desconhecida. Os passos para sua implementação estão descritos na secção 2.3. Porém, neste trabalho consideraremos o procedimento proposto por Astrom para o ajuste automático do controlador.

Como vimos na secção 2.6, em primeira fase é usado controle intencionalmente não linear para estimar o ganho crítico, o período e a frequência da oscilação. Em posse desses valores, é proposta uma solução com base na tabela 2.1 encontrada por Ziegler-Nichols. No caso do elemento de controle conter a não linearidade do tipo histerese a tabela 2.1 não será usada. Em vez disso usaremos outra abordagem através dos conceitos de margens de ganho e margem de fase.

Para o que se segue, considere o seguinte esquema:

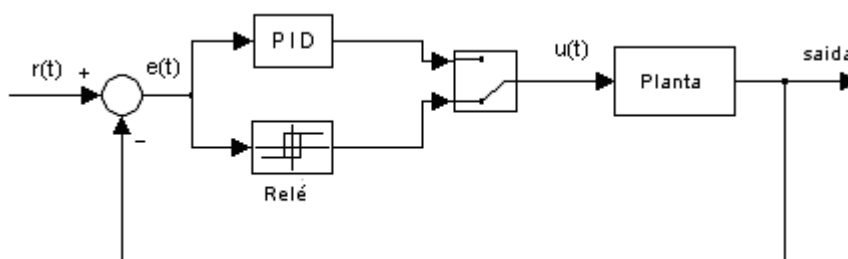


Figura 3.2 : Sistema controlado inicialmente a Relé e depois chaveado para o PID.

### 3.2.1 Uso do relé ideal

O controle PID auto – ajustável usando relé é mostrado no esquema acima. A planta desconhecida é controlada pelo relé apenas na fase inicial de estimação de parâmetros. Feita a estimação o controle passa a ser realizado pelo PID cujos parâmetros devem ser ajustados.

A seguir é apresentado o procedimento prático que permite estimar e ajustar os parâmetros.

## • Estimação de parâmetros

Para estimar os parâmetros, inicialmente o controle da planta é feito pelo relé. Isso fará que o sistema oscile em determinada frequência. Durante algum tempo é observado o sinal na saída para em seguida serem calculadas a amplitude e frequência da seguinte forma:

1) A amplitude  $A$  é determinada sendo feito a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da saída em regime permanente.

2) O período da oscilação  $T$ , é obtido pela detecção de três passagens do sinal de saída pelo valor de referencia. Em seguida a frequência de oscilação  $\omega$ , é determinada por  $\frac{2.\pi}{T}$ .

## • Ajuste dos parâmetros

a) O elemento não linear representado pelo relé ideal é substituído pela função descritiva do relé:

$$N(A) = \frac{4.M}{\pi .A} \quad (3.1)$$

b) Astrom em sua experiência achou bastante razoável afirmar que na condição de oscilação, o ganho  $N(A)$  do relé representa um valor bem aproximado do ganho crítico  $K_{cr}$  por isso fez:

$$K_{cr} = N(A) \quad (3.2)$$

c) O período de oscilação encontrado é feito igual a:

$$P_{cr} = T \quad (3.3)$$

d) Dispondo-se dos valores de  $K_{cr}$  e  $T$  os parâmetros do PID são calculados de acordo com a tabela 2.1.

- **Algoritmo**

Para melhor compreensão do método é apresentado abaixo o algoritmo com os passos a serem seguidos.

1) Com a planta sob controle a relé, aplica-se um degrau ao sistema representado na fig 3.2.

2) Assim espere-se que o sistema entra em oscilação identificam-se a amplitude, a frequência de oscilação e o ganho crítico.

3) Encontrados os parâmetros de sintonia através da tabela 2.1, faz-se o chaveamento para PI ou PID.

### **3.2.2 Relé com histerese**

Na prática a utilização de relé para implementação de auto - ajuste pode apresentar alguns problemas. Por exemplo, na presença de perturbação podem ocorrer erros na detecção dos picos da amplitude e na detecção do cruzamento do sinal de saída pela referencia. Nossa motivação para a realização deste trabalho está assente no facto de que Astrom sugeriu a utilização do relé com histerese como meio de tornar o sistema menos sensível à presença da perturbação, embora não tivesse detalhado a metodologia a utilizar .

Neste trabalho visamos o desenvolvimento de um algoritmo que utiliza o relé com histerese para estimar os parâmetros da planta e atribuição de valores dos parâmetros de um controlador PID.

- **Estimação de parâmetros**

De igual modo que no caso do relé ideal, no caso do relé com histerese espera-se um certo número de ciclos da oscilação para obtêm-se os valores dos parâmetros da seguinte maneira:

1) A amplitude  $A$  é determinada sendo feito à metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da saída em regime permanente.

2) O período da oscilação,  $T$ , é obtido pela detecção de três passagens do sinal de saída pelo valor de referência. Em seguida a frequência de oscilação,  $\omega$ , é determinada por  $\frac{2.\pi}{T}$ .

• **Ajuste dos parâmetros**

a) O elemento não linear representado pelo relé com histerese é substituído pela função descritiva do relé:

$$N(A) = \frac{4.M}{\pi.A} \exp(-j.\text{arc} \quad \text{sen} \frac{h}{A} ) \tag{3.4}$$

Onde  $M$  é a amplitude do relé,  $h$  a histerese e  $A$  amplitude da oscilação obtida.

b) Seja o sistema o sistema abaixo:

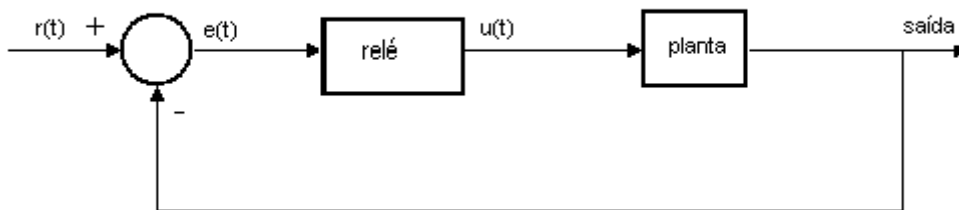


Figura 3.3: Relé no processo de estimação

Seja  $G(s)$  a função de transferência da planta desconhecida (linear, estável, com resposta monotônica ao degrau). Seja  $G(j\omega)$  a sua resposta em frequência, de acordo com o método da linearização harmônica na condição para oscilação do sistema é válida a equação

$$N(A).G(j\omega) = -1,$$

onde  $\omega = \omega^*$  é a frequência de oscilação do sistema.

Da equação acima resulta que:

$$G(j\omega^*) = - \frac{1}{N(A)} = - \frac{\pi . A^*}{4.M} \exp(j.\text{arc} \quad \text{sen} \frac{h}{A^*} ) \tag{3.5}$$

Podemos então afirmar que na condição de oscilação o valor aproximado do ângulo da planta desconhecida na frequência de oscilação  $\omega^*$  será:

$$\angle G(j\omega^*) = -\pi + \arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.6)$$

e o módulo

$$|G(j\omega^*)| = \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} \quad (3.7)$$

c) Seja  $C(s)$  a função de transferência do controlador (PI ou PID) cujos parâmetros pretende-se ajustar, sua resposta em frequência vale  $C(j\omega)$ . Como o  $C(s)$  substituirá em regime permanente, o relé com histerese, é feita a fase do controlador igual à fase do relé ou seja:

$$\angle C(j\omega^*) = -\arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.8)$$

## • Procedimentos de ajuste visando margem de ganho ou margem de fase.

O conhecimento da resposta em frequência da malha aberta pode ser usado de forma a garantir a estabilidade do sistema em malha fechada. No nosso trabalho não é possível o conhecimento de toda resposta em frequência da malha aberta. Em vez disso conhecemos apenas um ponto. De posse do conhecimento desse ponto único da resposta em frequência, visamos ajustar o controlador PID de forma a garantir uma determinada margem de ganho ou margem de fase.

O conhecimento da planta está reduzido a um ponto de sua resposta em frequência isto é  $G(j\omega^*)$ . Uma metodologia de síntese de controle que se mostra adequada para este caso é a síntese visando margem de ganho ou margem de fase.

A seguir são propostos procedimentos para atribuição de valores dos parâmetros do controlador PI e PID visando margem de ganho, aqui designado por MG ou margem de fase designada por MF.

**a) Ajuste visando margem de ganho – PI**

Consideremos um controlador PI com função de transferência:

$$C(s) = K_p \frac{(s + \frac{1}{T_i})}{s} \quad (3.9)$$

Onde  $K_p$  é o ganho proporcional e  $T_i$  a constante de integração  
 A resposta em frequência do PI vale:

$$C(j\omega) = K_p \frac{(\frac{1}{T_i} + j\omega)}{j\omega} \quad (3.10)$$

e o módulo é

$$|C(j\omega)| = K_p \frac{\sqrt{(\frac{1}{T_i})^2 + \omega^2}}{\omega} \quad (3.11)$$

a fase

$$\angle C(j\omega) = \text{arc tg} (\omega \cdot T_i) - \frac{\pi}{2} \quad (3.12)$$

a equação (3.12) nos fornece

$$T_i = \frac{\text{tg} (\angle C(j\omega) + \frac{\pi}{2})}{\omega} \quad (3.13)$$

Se desejarmos impor uma determinada margem de ganho, primeiramente deve-se impor que o ângulo da malha aberta seja igual a  $-\pi$  radianos na frequência de margem de ganho. Como só dispomos da frequência  $\omega^*$ , frequência de oscilação, vamos impor que esta seja a frequência de margem de ganho. Sabemos que

$$\angle G(j\omega^*) = -\pi + \arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.14)$$

então, para que o ângulo da malha aberta seja igual a  $-\pi$  devemos fazer

$$\angle C(j\omega^*) = -\arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.15)$$

Substituindo a equação acima na equação 3.13 fica determinado o valor de  $T_i$ , isto é:

$$T_i = \frac{1}{\omega^*} \operatorname{tg} \left( -\arcsin \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3.16)$$

Como o C(s) substituirá em regime permanente o relé com histerese, na condição de oscilação temos que o produto dos módulos de  $C(j\omega^*)$  e de  $G(j\omega^*)$  deve ser igual a 1, ou seja:

$$|C(j\omega^*)| \cdot |G(j\omega^*)| = 1 \quad (3.17)$$

tem-se que

$$K_{Pcr} \frac{\sqrt{(\omega^*)^2 + \left(\frac{1}{T_i}\right)^2}}{\omega^*} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} = 1 \quad (3.18)$$

e portanto

$$K_{Pc} = \frac{1}{\frac{\sqrt{(\omega^*)^2 + \left(\frac{1}{T_i}\right)^2}}{\omega^*} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M}} \quad (3.19)$$

onde  $K_{Pcr}$  é ganho crítico do controlador



Deseja-se uma determinada  $MG$ , então  $K_p$  deve ser escolhido  $MG$  vezes menor que  $K_{per}$ , isto é:

$$K_p = \frac{K_{per}}{MG}$$

(3.20)

**b) Ajuste visando margem de fase –PI**

Seja MF a margem de fase desejada. A margem de fase é determinada na frequência em que o módulo da malha aberta é unitário. A única frequência disponível é a frequência  $\omega^*$  de oscilação do sistema, obtida usando relé com histerese. Fazemos então frequência de margem de fase.

Sendo assim:

$$MF = \angle C(j\omega^*) + \angle G(j\omega^*) + \pi \quad (3.21)$$

e portanto

$$\angle C(j\omega^*) = -\pi + MF - \angle G(j\omega^*) \quad (3.22)$$

como foi visto no caso anterior, só dispomos de informação sobre a planta na frequência  $\omega^*$  de oscilação, isto é

$$\angle G(j\omega^*) = -\pi + \arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.23)$$

A resposta em frequência do PI é dada por:

$$C(j\omega) = K_p \frac{(j\omega + \frac{1}{T_i})}{j\omega} \quad (3.24)$$

cujo módulo é

$$|C(j\omega)| = K_p \frac{\sqrt{\omega^2 + (\frac{1}{T_i})^2}}{\omega} \quad (3.25)$$

e a fase

$$\angle C(j\omega) = \arctg \left( \omega T_i \right) - \frac{\pi}{2} \quad (3.26)$$

A substituição das equações (3.23) em (3.22) resulta em:

$$\angle C(j\omega^*) = MF - \arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.27)$$

a substituição de (3.27) em (3.26) nos fornece o valor de  $T_i$

$$T_i = \frac{\text{tg} [\text{MF} - \text{arc sen}(\frac{h}{A^*}) + \frac{\pi}{2}]}{\omega^*}$$

(3.28)

Como o controlador  $C(s)$  substituirá em regime permanente o relé com histerese, na condição de oscilação temos que o produto dos módulos de  $C(j\omega^*)$  e de  $G(j\omega^*)$  deve ser igual a 1, ou seja:

$$|C(j\omega^*)| \cdot |G(j\omega^*)| = 1 \quad (3.29)$$

tem se que

$$K_p \frac{\sqrt{(\omega^*)^2 + (\frac{1}{T_i})^2}}{\omega^*} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} = 1$$

(3.30)

e portanto

$$K_p = \frac{1}{\frac{\sqrt{(\omega^*)^2 + (\frac{1}{T_i})^2}}{\omega^*} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M}}$$

(3.31)

### c) Ajuste visando margem de ganho – PID

Consideremos um controlador PID com função de transferência:

$$C(s) = K_p \frac{(s + \frac{1}{T_i} + T_d s^2)}{s} = K_p (1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s)$$

(3.32)

onde  $K_p$  é o ganho proporcional,  $T_i$  é a constante de tempo de integração e  $T_d$  é a constante de tempo de derivação.

A resposta em frequência do PID é dada por:

$$C(j\omega) = K_p \frac{(j\omega + \frac{1}{T_i} - T_d \cdot \omega^2)}{j\omega}$$

(3.33)

e o módulo é

$$|C(j\omega)| = k_p \sqrt{\frac{(\frac{1}{T_i} - T_d \cdot \omega^2)^2 + \omega^2}{\omega}}$$

(3.34)

a sua fase é

$$\angle C(j\omega) = \text{arc tg} \left( \frac{\omega \cdot T_i}{1 - T_d \cdot T_i \cdot \omega^2} \right) - \frac{\pi}{2}$$

(3.35)

Como no caso do PI, se desejarmos impor uma determinada margem de ganho, primeiramente deve-se impor que o ângulo da malha aberta seja igual a  $-\pi$  radianos na frequência de margem de ganho. Como só dispomos da frequência  $\omega^*$ , frequência de oscilação, vamos impor que esta seja a frequência de margem de ganho. Sabemos que a fase controlador é

$$\angle C(j\omega^*) = \arctan \left( \frac{\omega^* \cdot T_i}{1 - T_d \cdot T_i \cdot (\omega^*)^2} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (3.36)$$

Por se tratar de uma equação com duas incógnitas houve necessidade de mais uma equação. O problema tem solução desde que estabelecida uma razão fixa entre  $T_d$  e  $T_i$ . Da observação feita ao trabalho da sensibilidade limite desenvolvido por Ziegler-

Nichols verificamos haver uma razão de  $T_d = \frac{T_i}{4}$ .

o desenvolvimento da equação (3.36) nos leva a seguinte expressão:

$$\frac{T_i^2}{4} \cdot (\omega^*)^2 \cdot \tan \left[ \angle C(j\omega^*) + \frac{\pi}{2} \right] + \omega^* \cdot T_i \cdot \tan \left[ \angle C(j\omega^*) + \frac{\pi}{2} \right] = 0 \quad (3.37)$$

a substituição de

$$\angle C(j\omega^*) = -\arcsin \frac{h}{A^*} \quad (3.38)$$

em (3.37) nos permite determinar o valor  $T_i$

$$T_i = 2 \cdot \left[ \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \left( -\arcsin \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right)}}{\omega^* \tan \left( -\arcsin \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right)} \right] \quad (3.39)$$

Atingido o regime permanente a ação do chaveamento fará com que o relé com histerese seja substituído pelo controlador  $C(s)$ . Na condição de oscilação temos que o produto dos módulos de  $C(j\omega^*)$  e de  $G(j\omega^*)$  deve ser igual a 1, ou seja:

$$|C(j\omega^*)| \cdot |G(j\omega^*)| = 1 \quad (3.40)$$

tem se que

$$\frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} \cdot K_{Pcr} \cdot \frac{\sqrt{\left[ \frac{1}{T_i} - T_d \cdot (\omega^*)^2 \right]^2 + (\omega^*)^2}}{\omega^*} = 1 \quad (3.41)$$

e portanto

$$K_{Pcr} = \frac{1}{\omega^* \sqrt{\left[\frac{1}{T_i} - T_d \cdot (\omega^*)^2\right]^2 + (\omega^*)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4M} \quad (3.42)$$

onde  $K_{Pcr}$  é ganho crítico do controlador.

Deseja-se uma determinada MG, então  $K_p$  deve ser escolhido MG vezes menor que  $K_{Pcr}$ , isto é:

$$K_p = \frac{K_{Pcr}}{MG} \quad (3.43)$$

#### d) Ajuste visando margem de fase – PID

Seja MF a margem de fase desejada. A margem de fase é determinada na frequência em que o módulo da malha aberta é unitário. A única frequência disponível é a frequência  $\omega^*$  de oscilação do sistema usando relé com histerese. Fazemo-la então frequência de margem de fase.

Sendo assim:

$$MF = \angle C(j\omega^*) + \angle G(j\omega^*) + \pi \quad (3.44)$$

e portanto

$$\angle C(j\omega^*) = -\pi + MF - \angle G(j\omega^*) \quad (3.45)$$

como foi visto caso anterior, só dispomos de informação sobre a planta na frequência  $\omega^*$  de oscilação, isto é

$$\angle G(j\omega^*) = -\pi + \arcsin \frac{h}{A^*}$$

(3.46)

A substituição da equação (3.46) na equação (3.45) resulta em:

$$\angle C(j\omega^*) = MF - \arcsin \frac{h}{A^*}$$

(3.47)

A resposta em frequência do PID é dada por:

$$C(j\omega) = K_p \frac{(j\omega + \frac{1}{T_i} - T_d \cdot \omega^2)}{j\omega}$$

(3.48)

cujo módulo é

$$|C(j\omega)| = K_p \frac{\sqrt{(\frac{1}{T_i} - T_d \cdot \omega^2)^2 + \omega^2}}{\omega}$$

(3.49)

e a fase

$$\angle C(j\omega) = \arctan \left( \frac{\omega \cdot T_i}{1 - T_d \cdot T_i \cdot \omega^2} \right) - \frac{\pi}{2}$$

(3.50)

A equação (3.50) possui duas incógnitas. Por isso houve necessidade de mais uma equação. O problema tem solução desde que estabelecida uma razão fixa entre  $T_d$  e  $T_i$ . Da observação feita ao trabalho da sensibilidade limite desenvolvido por Ziegler-

Nichols verificamos haver uma razão de  $T_d = \frac{T_i}{4}$ .

O desenvolvimento da equação (3.50) nos leva a seguinte expressão:

$$\frac{T_i^2}{4} \cdot (\omega^*)^2 \cdot \text{tg} \left[ \angle C(j\omega^*) + \frac{\pi}{2} \right] + \omega^* \cdot T_i - \text{tg} \left[ \angle C(j\omega^*) + \frac{\pi}{2} \right] = 0$$

(3.51)

A substituição de

$$\angle C(j\omega^*) = MF - \text{arc sen} \frac{h}{A^*}$$

(3.52)

em (3.51) nos permite determinar o valor  $T_i$

$$T_i = 2^* \left( \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{tg}^2 \left( MF - \text{arc sen} \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right)}}{\omega^* \cdot \text{tg} \left( MF - \text{arc sen} \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right)} \right) \quad (3.53)$$

Como o C(s) substituirá em regime permanente o relé com histerese, na condição de oscilação temos que o produto dos módulos de C(j $\omega^*$ ) e de G(j $\omega^*$ ) deve ser igual a 1, ou seja:

$$|C(j\omega^*)| \cdot |G(j\omega^*)| = 1$$

(3.54)

daí

$$K_P \frac{\sqrt{\left[ \frac{1}{T_i} - T_d \cdot (\omega^*)^2 \right]^2 + (\omega^*)^2}}{\omega^*} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} = 1 \quad (3.55)$$

e conseqüentemente

$$K_P = \frac{1}{\sqrt{\left[ \frac{1}{T_i} - T_d \cdot (\omega^*)^2 \right]^2 + (\omega^*)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} \quad (3.56)$$



## • Algoritmo

Para melhor compreensão do método é apresentado abaixo o algoritmo com os passos a serem seguidos.

1) Com a planta sob controle a relé, aplica-se um degrau ao sistema representado na fig 3.2.

2) Após a entrada do sistema em oscilação identificam-se a amplitude e a frequência de oscilação.

3) O módulo e a fase da planta são determinados de acordo com o método da linearização harmônica. Na condição de oscilação é válida a equação  $N(A).G(j\omega) = -1$  e portanto

$$G(j\omega^*) = -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M} \exp(j \cdot \arcsin \frac{h}{A^*})$$

resultando deste modo

$$\angle G(j\omega^*) = -\pi + \arcsin \frac{h}{A^*}$$

e

$$|G(j\omega^*)| = \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M}$$

4) Em regime permanente o controle passa de relé para PI ou PID, então a fase do controlador é feita igual a fase do relé.

$$\angle C(j\omega^*) = -\arcsin \frac{h}{A^*}$$

5) O algoritmo prossegue segundo as 4 possibilidades abaixo tendo o usuário previamente escolhido uma delas.

a) Ajuste por margem de ganho PI

Determina-se o tempo de integração pela expressão  $T_i = \frac{\text{tg}(\angle C(j\omega) + \frac{\pi}{2})}{\omega}$

Determina-se o ganho crítico pela expressão  $K_{Pcr} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^*)^2 + (\frac{1}{T_i})^2}} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M}$

Calcula-se o ganho proporcional a partir da expressão  $K_p = \frac{K_{Pcr}}{MG}$

b) Ajuste por margem de fase PI.

Determina-se o tempo de integração pela expressão  $T_i = \frac{\text{tg}[MF - \text{arc sen}(\frac{h}{A^*}) + \frac{\pi}{2}]}{\omega^*}$

Determina-se o ganho proporcional pela expressão  $K_p = \frac{1}{\sqrt{(\omega^*)^2 + (\frac{1}{T_i})^2}} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4 \cdot M}$

c) Ajuste visando margem de ganho PID.

Calcula-se o tempo de integração na expressão  $T_i = 2 * [$

$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \text{tg}^2(-\text{arc sen} \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2})}}{\omega^* \text{tg}(-\text{arc sen} \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2})}]$  e tempo de derivação por  $T_d = \frac{T_i}{4}$ .

Determina-se o ganho crítico na expressão  $K_{pcr} =$

$$\frac{1}{\omega^* \sqrt{\left[\frac{1}{T_i} - T_d \cdot (\omega^*)^2\right]^2 + (\omega^*)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4M}$$

O ganho proporcional deve ser calculado na expressão  $K_p = \frac{k_{pcr}}{MG}$

d) Ajuste visando margem de fase PID

Calcula-se o tempo de integração na expressão  $T_i = 2 \cdot$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \left( MF - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right)}}{\omega^* \cdot \operatorname{tg} \left( MF - \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{h}{A^*} + \frac{\pi}{2} \right)}$$

O tempo de derivação é dado por  $T_d = \frac{T_i}{4}$ .

O ganho proporcional é determinado da expressão  $K_p =$

$$\frac{1}{\omega^* \sqrt{\left[\frac{1}{T_i} - T_d \cdot (\omega^*)^2\right]^2 + (\omega^*)^2}} \cdot \frac{\pi \cdot A^*}{4M}$$

6) Faz-se o chaveamento para PI ou PID como escolhido anteriormente.

No capítulo seguinte avaliaremos a qualidade dos algoritmos aqui apresentados.

## Capítulo 4 – Relé e o processo de estimação de parâmetros.

### 4.1 Introdução

O capítulo é subdividido em duas seções, a saber:

Na seção 4.2 será avaliada a influência da amplitude e do número de ciclos considerados durante o processo para estimar o ganho crítico e a frequência de oscilação. Na seção 4.3 são avaliados os algoritmos quanto à exatidão na estimativa de parâmetros, assim como será avaliado o desempenho do sistema em malha fechada.

A título didático foram considerados os modelos de planta abaixo nas simulações feitas. Estas plantas são lineares e estáveis e apresentam resposta monotônica à entrada degrau.

$$\text{Modelo 1} \longrightarrow G(s) = \frac{5}{(s+1)^2(s+5)}$$

Modelo 2  $\longrightarrow$   $G(s) = \frac{5^4}{(s+1)^2(s+5)^4}$

## 4.2 Análise do número de ciclos escolhido e da amplitude do Relé no processo de estimação do ganho crítico e do período de oscilação.

Com a finalidade de verificar a influencia do número de ciclos a partir do qual a amplitude e a frequência poderiam ser determinadas, foram feitas simulações tendo sido escolhido inicialmente um grande de ciclos. A influencia do nível do relé no ganho  $N(A)$ , na amplitude  $A$  e na frequência  $\omega$  da oscilação foi também simulada.

Para isso foi considerado o esquema abaixo:

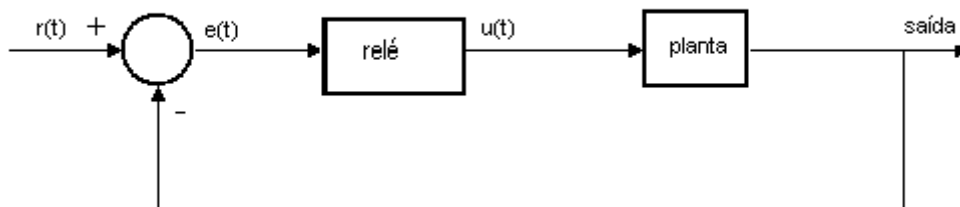


Figura 4.1: O esquema mostra o sistema utilizado na análise da influencia da amplitude e do periodo de oscilacao.

- **Relé ideal**

## 4.2.1 Exemplo

### 1) Considerações quanto à estimação de parâmetros.

- **Influencia do número de ciclos considerados**

Os resultados obtidos mostraram que, sem perturbação, do quarto ciclo em diante a oscilação obtida permanece inalterada, ou seja, sua frequência e amplitude são constantes.

Nas tabelas 4.1 e 4.2 a primeira coluna mostra os valores de ciclos considerados e as restantes colunas o ganho  $N(A)$ , a amplitude  $A$  e a frequência  $\omega$  da oscilação obtida em função do número de ciclos escolhido. Assim, verificamos que na primeira linha usando  $M=1$  a oscilação obtida na saída do sistema representado pela figura 4.1 tem amplitude

$A=0.094$ , frequência de oscilação  $\omega=3.2057$  e o ganho da função descritiva nesta frequência vale  $N(A)=13.5363$

Número de ciclos	A	$\omega$	$N(A)$
15	0.0940	3.2057	13.5363
8	0.0940	3.2057	13.5363
4	0.0940	3.2057	13.5363

Tabela 4.1: Influencia do número de ciclos para o cálculo da oscilação e da amplitude. Planta - Modelo 1.

Número de ciclos	A	$\omega$	$N(A)$
15	0.6723	1.4960	3.7877
8	0.6723	1.4960	3.7877
4	0.6723	1.4960	3.7877

Tabela 4.2: Influencia do número de ciclos para o cálculo da oscilação e da amplitude. Planta - Modelo 2.

- **Influencia da amplitude do Relé.**

Nota-se que para o relé ideal a variação da amplitude  $M$  não influencia na frequência  $w$  de oscilação nem no ganho  $N(A)$ . Contudo o aumento da amplitude  $M$  aumenta a amplitude  $A$  da oscilação na saída.

Nas tabelas 4.3 e 4.4 a primeira coluna mostra os valores de amplitude  $M$  utilizados no relé. Assim, vemos que na primeira linha usando  $M=1$  a oscilação obtida na saída do sistema representado pela figura 4.1 tem amplitude  $A=0.094$ , frequência de oscilação  $\omega=3.2057$  e o ganho da função descritiva nesta frequência vale  $N(A)=13.5363$

M	A	$\omega$	N (A)
1	0.0940	3.2057	13.5363
2	0.1881	3.2057	13.5363
4	0.3762	3.2057	13.5363

Tabela 4.3: Influencia da amplitude do relé.Planta - Modelo 1.

M	A	$\omega$	N (A)
1	0.3361	1.4960	3.7877
2	0.6723	1.4960	3.7877
4	1.3446	1.4960	3.7877

Tabela 4.4: Influencia da amplitude do relé.Planta - Modelo 2.

- **Relé com histerese**

#### 4.2.2 Exemplo

##### 1) Considerações quanto à estimação de parâmetros.

- **Influencia do número de ciclos considerados**

Os resultados obtidos mostraram que, sem perturbação, do quarto ciclo em diante a oscilação obtida permanece inalterada, ou seja, sua frequência e amplitude são constantes. Nas simulações feitas foi utilizado um relé com histerese  $H = 0.01$  e amplitude  $M=2$ .

Número de ciclos	N(A)	$\omega$	A
15	12.1735	3.0501	0.2092
8	12.1735	3.0501	0.2092

4	12.1793	3.0650	0.2091
---	---------	--------	--------

Tabela 4.5: Influencia do número de ciclos para o cálculo da oscilação e da amplitude. Planta - Modelo 1.

Número de ciclos	N(A)	$\omega$	A
15	3.7247	1.4819	0.6837
8	3.7247	1.4819	0.6837
4	3.7247	1.4819	0.6837

Tabela 4.6: Influencia do número de ciclos para o cálculo da oscilação e da amplitude. Planta - Modelo 2.

- **Influencia da amplitude do Relé.**

Os resultados mostram que altos níveis da amplitude do relé aumentam a frequência de oscilação  $\omega$  e aumentam também o ganho N(A). Os resultados abaixo foram conseguidos usando um relé com histerese  $H=0.01$ .

M	N(A)	$\omega$	A
1	11.2366	2.9361	0.1133
2	12.1735	3.0501	0.2092
4	12.9632	3.1416	0.3929

Tabela 4.7: Influencia da amplitude do relé – Planta Modelo 1.

M	N(A)	$\omega$	A
1	3.6940	1.4749	0.3447
2	3.7247	1.4819	0.6837
4	3.7559	1.4889	1.3560

Tabela 4.8: Influencia da amplitude do relé – Planta Modelo 2.

Os resultados mostram que com poucos ciclos já se reconhece a oscilação. Não devemos esquecer que o sistema não sofreu perturbação durante a fase de estimação de parâmetros. No capítulo 7 será visto a influencia da perturbação durante a fase de estimação de parâmetros.

### 4.3 Análise da exatidão da estimação de parâmetros pelo Relé ideal.



## Desempenho do controlador PID determinado pelo auto – ajuste via relé ideal.

Deseja-se estimar o ganho crítico e o período de oscilação do sistema abaixo:

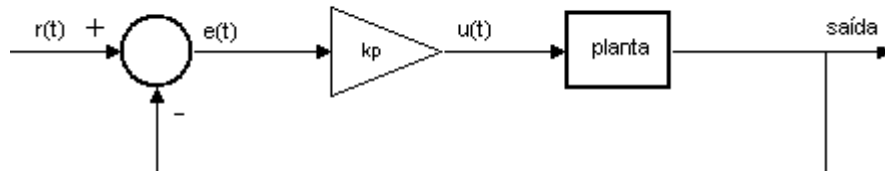


Figura 4.2: O esquema cujo ganho  $k_p$  deverá ser estimado.

Para isso é montado o esquema abaixo onde o ganho proporcional  $k_p$  é substituído pelo ganho  $N(A)$  da função descritiva do relé.

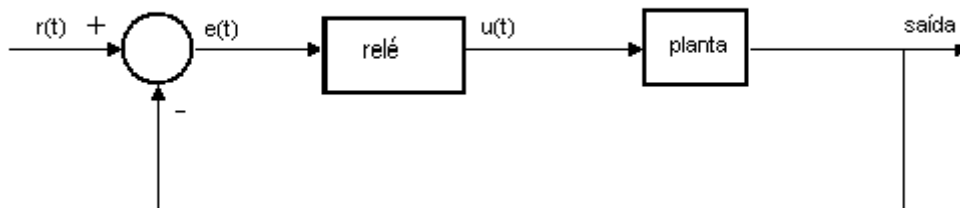


Figura 4.3: O ganho  $K_p$  é substituído pelo ganho  $N(A)$  da função descritiva do relé.

Nesta secção, compararemos o ganho  $N(A)$  da função descritiva do relé com o ganho crítico  $K_{per}$  encontrado pelo método da sensibilidade limite. Sabe-se que na condição de oscilação, o ganho  $N(A)$  é aproximadamente igual ao ganho  $K_{per}$ .

Método	Ganho	Frequência de oscilação
Sensibilidade limite	$K_{per} = 14.4$	$\omega = 3.3069$
Relé ideal	$N(A) = 13.5363$	$\omega = 3.2057$

Tabela 4.9: Valores comparativos entre os dois métodos tendo sido usada a planta - Modelo 1.

Método	Ganho	Frequência de oscilação
Sensibilidade limite	$K_{per} = 3.8950$	$\omega = 1.5068$
Relé ideal	$N(A) = 3.7877$	$\omega = 1.4960$

Tabela 4.10: Valores comparativos entre os dois métodos tendo sido usada a planta - Modelo 2.

Substituiremos o valor de  $N(A)$  e  $K_{pcr}$  com os respectivos períodos de oscilação na tabela de Ziegler-Nichols. A análise desta aproximação é aqui considerada tendo em conta o desempenho do sistema em função dos parâmetros do PID encontrados. Os dados encontrados nas tabelas 4.9 e 4.10 serviram de base para o cálculo dos parâmetros de ajuste do controlador de acordo com a tabela de Ziegler-Nichols.

Assim para a planta representada pelo modelo 1, foram encontrados os seguintes parâmetros para PID:

Método	$K_p$	$T_i$	$T_d$
Sensibilidade limite	8.64	0.95	0.2375
Relé ideal	8.1218	0.98	0.2450

Tabela 4.11: Parâmetros do PID encontrados tendo sido considerado relé ideal e método da sensibilidade limite. Planta – Modelo1.

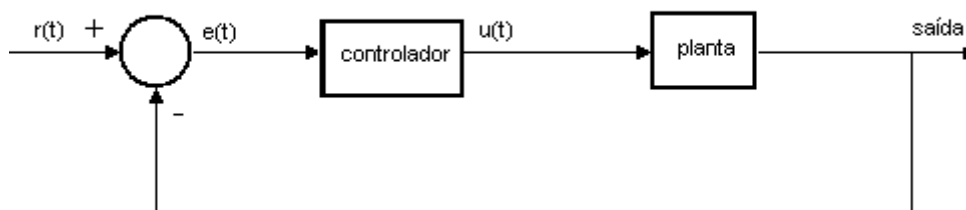


Figura 4.4: Sistema com o PID cujos parâmetros foram determinados nas tabelas 4.11 e 4.12.

Os resultados decorrentes do uso do relé ideal são aqui comparados com os obtidos, por Ziegler-Nichols, no método da sensibilidade limite. Após obtermos os dados das tabelas 4.9 e 4.10, são em seguida determinados os parâmetros do PID de acordo com a tabela de Ziegler-Nichols. As figuras 4.5 à 4.8 mostram a saída do sistema representado na figura 4.4 tendo sido usado o método da sensibilidade limite e o método do relé ideal. A análise das figuras nos leva a concluir que o uso do relé ideal fornece uma boa estimativa em relação à determinação dos valores de ganho crítico e de período de oscilação.

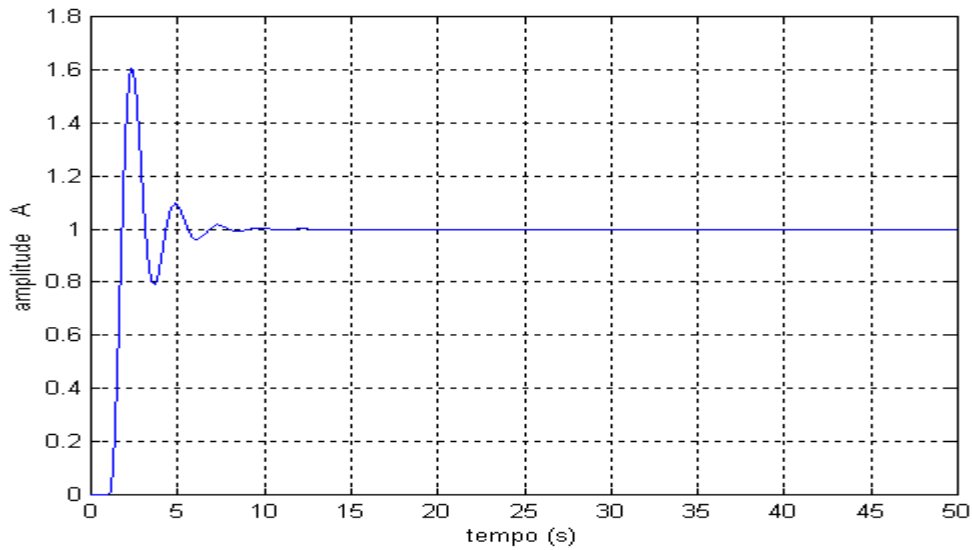


Figura 4.5: Saída do sistema representado na fig. 4.4. Os parâmetros do PID foram estimados pelo método da sensibilidade limite. Planta Modelo 1.

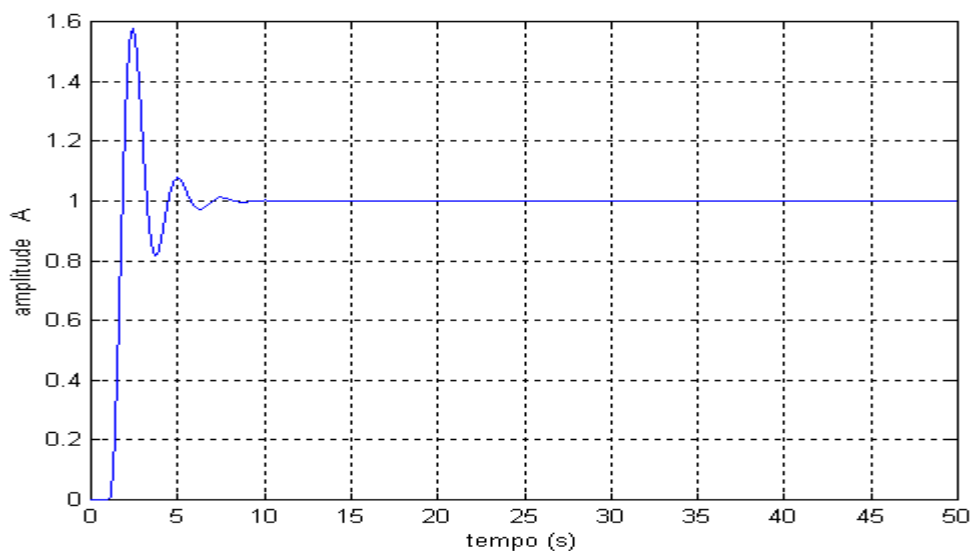


Figura 4.6: Saída do sistema representado na fig. 4.4. Os parâmetros do PID foram estimados pelo método do relé ideal. Planta Modelo 1.

Para a planta representada pelo modelo 2 foram encontrados os seguintes parâmetros para PID:

Método	$K_p$	$T_i$	$T_d$
Sensibilidade limite	2.3370	2.0849	0.5212
Relé ideal	2.2726	2.0999	0.5249

Tabela 4.12: Parâmetros do PID encontrados tendo sido considerado relé ideal e método da sensibilidade limite. Planta – Modelo 2.

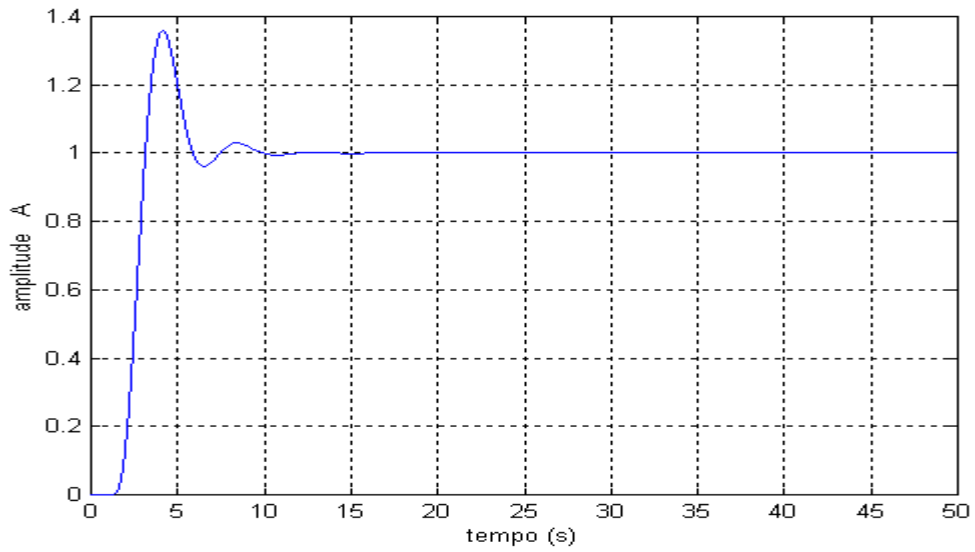


Figura 4.7: Saída do sistema representado na fig. 4.4. Os parâmetros do PID foram estimados pelo método da sensibilidade limite. Planta Modelo 2

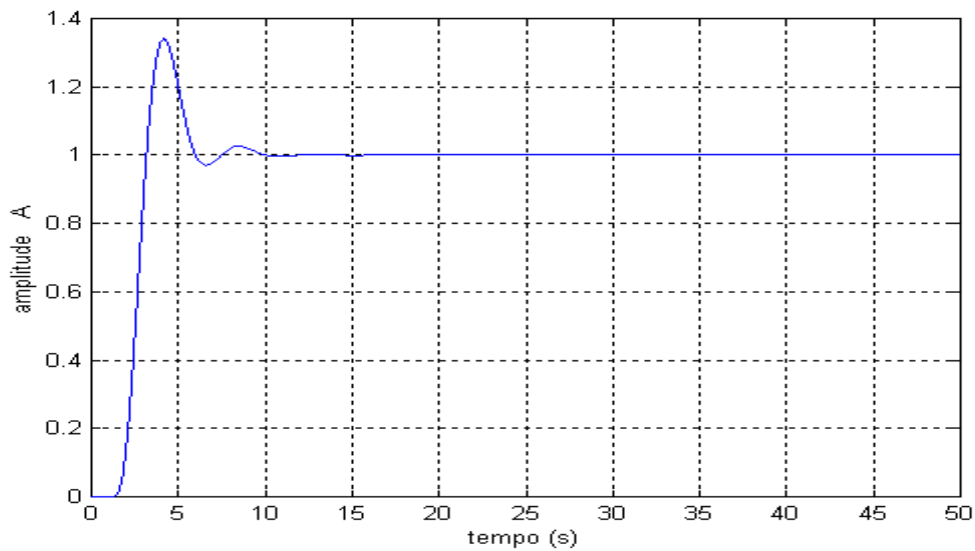


Figura 4.8: Saída do sistema representado na fig. 4.4. Os parâmetros do PID foram estimados pelo método do relé ideal. Planta Modelo 2.

## Capítulo 5 – Relé com histerese. Desempenho do sistema.

### 5.1 introdução

Este capítulo está assim apresentado:

Na secção 5.2 é discutida a exatidão dos resultados estimados pelo relé e na secção 5.3 é avaliada a técnica usando Relé com histerese quanto ao desempenho do sistema em malha fechada.

### 5.2 Análise da exatidão da estimação de parâmetros pelo Relé com histerese.

O esquema abaixo representa um sistema em malha fechada composto por um relé com histerese e uma planta linear, estável com resposta monotónica ao degrau.

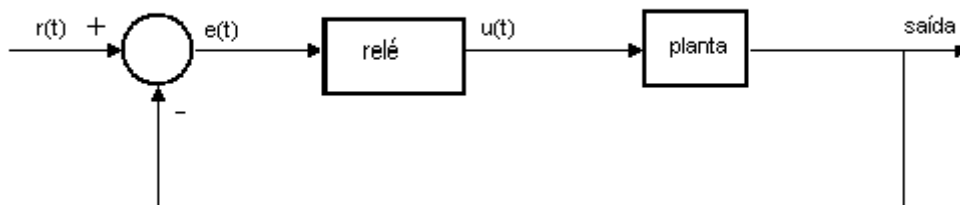


Figura 5.1:

O conhecimento do valor da frequência de oscilação  $\omega$ , da amplitude  $A$  e do ganho  $N(A)$  na saída do sistema usando relé com histerese é fundamental para o que se propõe a seguir.

Em seguida propomos a substituição do relé com histerese por sua função descritiva, caracterizada por um ganho complexo, isto é:

$$N(A) = \frac{4 \cdot M}{\pi \cdot A} \exp(-j \cdot \arcsin \frac{h}{A})$$

ou seja a idéia é que na condição de oscilação o sistema possa ser visto como o sistema linear abaixo.

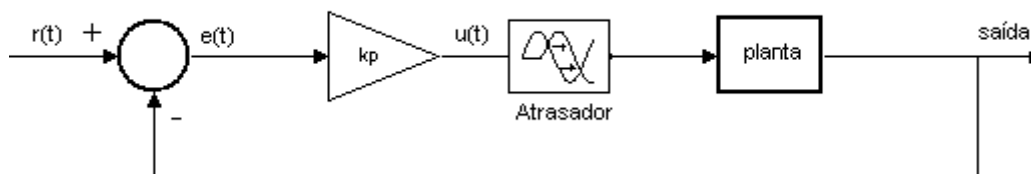


Figura 5.2: A função descritiva do relé é substituída por ganho e um atrasador.

Na topologia acima, a planta é linear, estável com resposta monotônica ao degrau, o ganho  $K_p$  é representado por  $\frac{4 \cdot M}{\pi \cdot A}$  e o atrasador por  $\theta =$

$$\frac{\arcsin \frac{h}{A} \text{ (rads)}}{\omega \text{ (rads / segs)}}$$

As simulações feitas tiveram como objetivo verificar o valor do ganho crítico  $K_{pcr}$  para um determinado atraso de tempo  $\theta$ . Assim, inicialmente foi atribuído a  $K_p$  o valor  $\frac{4 \cdot M}{\pi \cdot A}$ . Constatamos que nestas condições o sistema não oscila, tende a um valor constante. Então, mantendo constante o atraso, foi aumentado o ganho  $K_p$  até oscilações serem observadas na saída. O valor do ganho correspondente a esta situação é chamado de  $K_{pcr}$ . As tabelas 5.1 e 5.2 mostram nas quatro primeiras colunas dados do relé e do sinal obtido da sua utilização na figura 5.1. O relé é substituído no esquema da figura 5.2 pelo ganho  $K_p$  e pelo atrasador de valor  $\theta$ . Considerando a

figura 5.1, a primeira linha mostra que um relé de histerese  $H = 0.005$  gera um sinal com amplitude  $A = 0.1964$  e frequência

$\omega = 3.1416$  rads/s. Em seguida calculamos o atraso correspondente e encontramos

$\theta = 0.0081$ s. Substituindo  $K_p = N(A)$  e  $\theta = 0.0081$ s no sistema da figura 5.2, verificamos que o sistema oscila quando  $K_p = K_{per}$ .

H	N(A)	A	$\omega$	$\theta$ (s)	$K_{per}$
0.005	12.9632	0.1964	3.1416	0.0081	13.6328
0.01	12.1735	0.2092	3.0501	0.0157	12.9923
0.1	7.5733	0.3362	2.4166	0.1250	7.9417

Tabela 5.1: Valores de  $\theta$  e  $K_{per}$  obtidos do sistema representado pela figura 5.2. Planta - Modelo 1.

H	N(A)	A	$\omega$	$\theta$ (s)	$K_{per}$
0.005	3.7559	0.6780	1.4889	0.0050	3.8703
0.01	3.7247	0.6837	1.4819	0.0099	3.8464
0.1	3.3619	0.7574	1.3963	0.0948	3.4841

Tabela 5.2: Valores de  $\theta$  e  $K_{per}$  obtidos do sistema representado pela figura 5.2. Planta - Modelo 2.

### 5.3 Avaliação da técnica usando Relé com histerese quanto ao desempenho do sistema em malha fechada.

A avaliação do ajuste considerando o uso de histerese, prevê não só a verificação de maneira prática dos efeitos da histerese na estimação dos parâmetros como também observa a frequência de cruzamento [secção 2.4], a frequência de margem de ganho e possíveis diferenças na margem de ganho e de fase encontradas depois do chaveamento para PID. Os exemplos abaixo foram feitos visando a obtenção de dados capazes de nos levar a concluir sobre a eficácia e exatidão da técnica utilizada. Lembramos que daqui para adiante todos resultados serão obtidos usando relé com  $M=2$ .

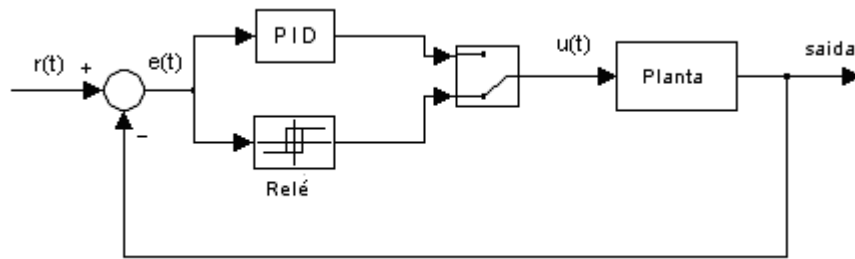


Figura 5.3: Na fase inicial controle a relé e posteriormente controle PID.

### 5.3.1 Exemplo

#### 1) Considerações quanto à estimação de parâmetros:

- Interpretação da tabela 5.3 e 5.4

Nesta tabela encontram-se os resultados obtidos da simulação do esquema mostrado na figura 5.3. Com base nesses resultados foi possível a verificação da influencia da histerese no sistema.

A tabela apresenta na primeira coluna diferentes valores de histerese. A segunda linha da tabela pode ser entendida como sendo o resultado da simulação usando um relé com  $H=0.005$  tendo produzido uma oscilação de frequência  $\omega=3.1416$  rads/s e amplitude  $A=0.1964$ . O ganho da função descritiva do relé vale 12.9632.

H	N(A)	$\omega$	A
0.005	12.9632	3.1416	0.1964
0.01	12.1735	3.0501	0.2092
0.1	7.5733	2.4166	0.3362
0.8	2.5939	1.2823	0.9817



Tabela 5.3: Resultados obtidos na fase de estimação de parâmetros. Esquema da figura 5.3.Planta-Modelo 1.

H	N(A)	$\omega$	A
0.005	3.7559	1.4889	0.6780
0.01	3.7247	1.4819	0.6837
0.1	3.3619	1.3963	0.7574
0.8	2.0661	0.9910	1.2325

Tabela 5.4: Resultados obtidos na fase de estimação de parâmetros. Esquema da figura 5.3.Planta-Modelo 2.

- **Influencia da histerese.**

O uso da histerese foi sugerido por Astrom como meio de diminuir os efeitos causados pela perturbação na detecção da passagem do sinal de saída pela referencia. Contudo sua influencia no desempenho do sistema não havia sido ainda analisada. As simulações feitas revelaram que o aumento da histerese ocasiona a diminuição do ganho  $N(A)$ , da frequência de oscilação  $\omega$  e a amplitude  $A$  da oscilação.

## 1. Análise dos resultados usando margem de ganho para PI.

- **Interpretação da tabela 5.5 e 5.6**

Analogamente, os dados desta tabela são decorrentes da simulação do esquema da figura 5.3. Chamaremos de  $MG$  a margem de ganho desejada e  $MG1$  a margem de ganho encontrada no sistema após o chaveamento para PI. Do mesmo modo  $w$  é a frequência de margem de ganho associada a  $MG1$ . Para todos os casos foram considerados  $MG = 2$ .

A tabela 5.5 mostra que na segunda linha, para margem de ganho  $MG = 2$  imposta ao sistema inicialmente a relé de  $H = 0.005$ , resulta na saída um sinal com

freqüência de oscilação  $\omega = 3.2370$  rads / s. A margem de ganho encontrada após o chaveamento para PI foi  $MG1=2.1097$

H	MG1	$\omega$
0.005	2.1097	3.2370
0.1	2.1729	2.5151
0.3	2.3688	2.0011
0.8	2.9525	1.5164

Tabela 5.5: Analogia entre os valores de margem de ganho desejadas e as encontradas após chaveamento Planta - Modelo 1.

H	MG1	$\omega$
0.005	2.0611	1.5021
0.01	2.0658	1.4968
0.1	2.0777	1.4124
0.3	2.1311	1.2763
0.8	2.3168	1.0628

Tabela 5.6: Analogia entre os valores margem de ganho desejadas e as encontradas após chaveamento Planta - Modelo 2

Observamos que o aumento da histerese origina uma diminuição da freqüência  $\omega$ . Isto ocorre porque na freqüência em questão a fase da planta se torna menos negativa.

## 2. Análise dos resultados usando margem de fase para PI.

- **Interpretação das tabelas 5.7 e 5.8**

Chamaremos de MF a margem de fase desejada e MF1 a margem de fase encontrada no sistema após o chaveamento para PI. Do mesmo modo  $w$  é a freqüência de margem de fase associada a MF1. Para todos os casos foram considerados  $MF=45^\circ$

A tabela 5.7 mostra na segunda linha que margem de fase  $MF = 45^\circ$  imposta a um sistema onde o relé tem histerese  $H = 0.005$ , resulta na saída um sinal cuja margem de fase desejada não pode ser alcançada e neste caso é representada pelas linhas tracejadas.

H	MF1(graus)	$\omega$
0.005	-----	

0.01	-----	
0.1	-----	
0.5	-----	
0.8	54.26 °	1.2334

Tabela 5.7: Analogia entre os valores margem de fase desejadas e encontradas após chaveamento. Planta - Modelo 1

H	MF1(graus)	$\omega$
0.005	-----	
0.01	-----	
0.1	-----	
0.5	-----	
0.8	-----	

Tabela 5.8: Analogia entre os valores margem de fase desejadas e encontradas após chaveamento. Planta - Modelo 2

O PI atrasa a fase do sistema em malha aberta motivo pelo qual em certos casos não é possível uma sintonia para PI usando margem de fase. Em sistemas estáveis, a margem de fase é positiva, isto significa que a fase do sistema correspondente ao ponto onde o módulo da resposta em frequência é unitário,  $|C(j\omega).G(j\omega)|=1$ , deve ser maior do que  $-180^\circ$ . Se ao contrário, a fase for menor do que  $-180^\circ$  não será possível a sintonia. Contudo, nos casos em que a amplitude M é mantida pequena, o aumento da histerese torna a fase da planta menos negativa, sendo assim possível a sintonia para PI. O aumento da histerese apesar de, em alguns casos, tornar possível a realização do PI, causa algumas desvantagens como, por exemplo, aumenta a imprecisão no cálculo do valor da frequência.

### 3 Análise dos resultados usando margem de ganho para PID.

- **Interpretação da tabela 5.9 e 5.10**

Analogamente, os dados desta tabela são decorrentes da simulação do esquema da figura 5.3. Chamaremos de MG a margem de ganho desejada e MG1 a margem de ganho encontrada no sistema após o chaveamento para PI. Do mesmo modo  $w$  é a frequência de margem de ganho associada a MG1. Para todas as simulações foi considerado  $MG = 2$ .

A tabela 5.9 mostra na segunda linha que a margem de ganho  $MG = 2$  imposta ao sistema resulta em MG1 infinita. Isto ocorre porque de acordo com a localização

dos zeros e pólos do PID a resposta em frequência da malha aberta pode não interceptar o eixo real.

H	MG1	$\omega$
0.005	Inf	
0.01	Inf	
0.1	Inf	
0.3	Inf	
0.8	Inf	

Tabela 5.9: Analogia entre os valores de margem de ganho desejadas e as encontradas após chaveamento Planta - Modelo 1.

H	MG1	$\omega$
0.005	2.3978	2.5705
0.01	2.4155	2.5693
0.1	2.6591	2.5440
0.3	3.3147	2.4958
0.8	5.1511	2.4769

Tabela 5.10: Analogia entre os valores de margem de ganho desejadas e as encontradas após chaveamento Planta - Modelo 2.

#### 4 Análise dos resultados usando margem de fase para PID.

- **Interpretação da tabela 5.11 e 5.12**

Analogamente ao item 2 chamaremos de MF a margem de fase desejada e MF1 a margem de fase encontrada no sistema após o chaveamento para PI. Do mesmo modo  $\omega$  é a frequência de margem de fase associada a MF1. Para todas as simulações feitas foram considerados  $MF = 45^\circ$  e  $M = 2$ .

A tabela 5.11 mostra na segunda linha que a margem de fase  $MF = 45^\circ$  imposta ao sistema com relé de  $H = 0.005$ , resulta na saída um sinal cuja margem de fase encontrada é  $MF1 = 62.75^\circ$ .

H	MF1(graos)	$\omega$
0.005	$62.75^\circ$	4.1701
0.01	$63.24^\circ$	4.1319
0.1	$65.03^\circ$	4.0124
0.5	$77.92^\circ$	2.8229
0.8	$89.61^\circ$	2.0539

Tabela 5.11: Analogia entre os valores margem de fase desejadas e encontradas após chaveamento. Planta - Modelo 1.

H	MF1(graos)	$\omega$
0.005	41.21 °	1.6297
0.01	41.34 °	1.6297
0.1	42.20 °	1.6517
0.5	52.52 °	1.5123
0.8	64.26 °	1.3072

Tabela 5.12: Analogia entre os valores margem de fase desejadas e encontradas após chaveamento. Planta - Modelo 2

## 5.4 Conclusão:

Concluimos que, a frequência de oscilação estimada durante a operação com relé é diferente da verificada no sistema depois do chaveamento e que em todos casos, a margem de ganho encontrada no sistema é maior do que a desejada. A margem de fase encontrada, na maior parte dos casos é maior do que a desejada. Isto mostra que a presença da histerese impõe uma certa margem de fase ao sistema, claramente percebido pela diminuição da frequência  $\omega$ , que é tanto maior quanto maior for a histerese.

Do ponto de vista de estabilidade, o uso do relé com histerese sugere maior afastamento da instabilidade do que se fosse usado um ganho associado a um atrasador. Como vimos o ganho  $N(A)$  é sempre menor do que  $K_{Per}$ .

## Capítulo 6 – Avaliação do desempenho em comparação com Ziegler-Nichols

### 6.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentadas comparações entre o ajuste usando relé com histerese e o ajuste proposto por Ziegler-Nichols. Espera-se que o ajuste proposto por Ziegler-Nichols apresente melhores resultados visto que a histerese introduz alterações significativas na frequência de oscilações e no ganho proporcional.

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5 K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45 K_{cr}$	$0.83P_{cr}$	0
PID	$0.6 K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Tabela 6.1 Regras de ajustes estabelecidas por Ziegler-Nichols

Para que o assunto fosse discutido propusemos que o capítulo fosse assim apresentado:

Na secção 6.2 faremos a análise comparativa dos resultados apenas para simples ilustração.

Para melhor apreciação dos resultados é estabelecido a mesma condição inicial para ambos os métodos.

## 6.2 Análise dos parâmetros de ajuste em relação aos propostos por Ziegler-Nichols.

O esquema abaixo representa um sistema composto por uma planta linear desconhecida que será controlada por um PI ou PID ajustados com base nos parâmetros estimados na operação com relé com histerese (ver figura 3.2).

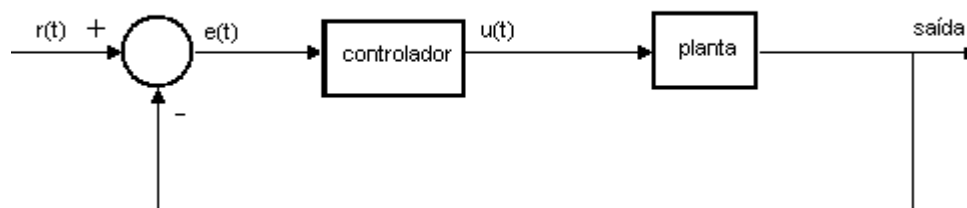


Figura 6.1: Planta desconhecida sobre controle a PI ou PID.

Nas figuras abaixo a saída mostrada a azul corresponde ao ajuste utilizando relé com histerese e saída a vermelho ao ajuste a partir da tabela de 6.1. Recordamos que para o ajuste de Ziegler-Nichols os valores de ganho crítico e de período de oscilação

foram estimados da utilização do relé ideal. Os parâmetros de ajuste foram então calculados depois que os valores estimados foram aplicadas à tabela 6.1.

A comparação entre os dois ajustes é feita tendo sido mantido  $M=2$  para todos os casos. Mostramos também, as margens de ganho (MG) ou de fase (MF) desejadas e as margens de ganho (MG1) e de fase (MF1) encontradas no sistema após o chaveamento. A intenção é comparar um determinado ajuste de Ziegler-Nichols com o ajuste utilizando diferentes valores de histerese.

### **1. Análise dos resultados usando PI – Margem de ganho.**

Para todos os casos apresentados abaixo foi introduzida em  $t = 25$  s uma perturbação do tipo degrau. Estaremos comparando a saída azul, relé com histerese, com a saída a vermelho método da sensibilidade limite de Ziegler-Nichols, cujos parâmetros do controlador obtidos usando a planta Modelo 1 são  $K_p = 6.0913$ ,  $T_i = 1.6333$ .



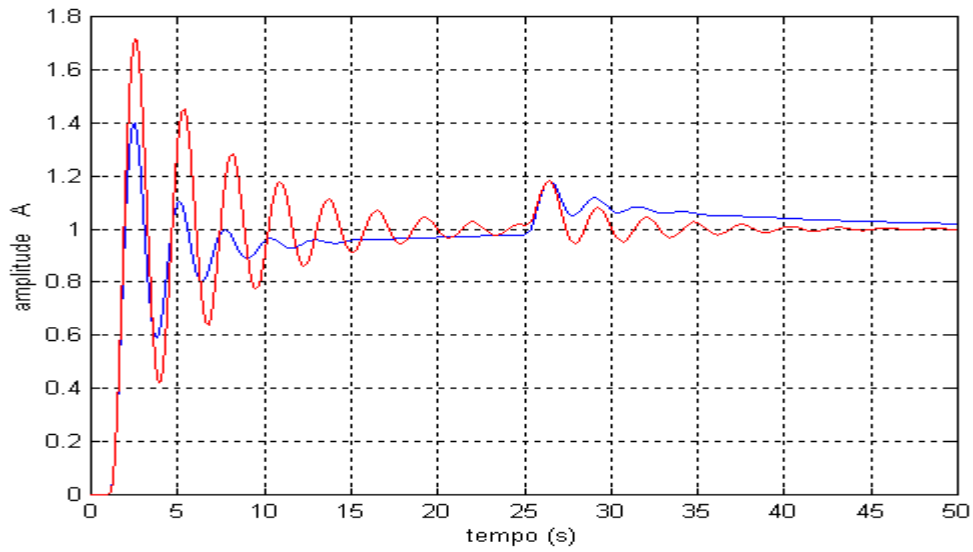


Figura 6.2: Saída azul, relé com histerese  $H=0.005$ ,  $MG=2$ .  $MG1=2.1097$ ,  $K_p=6.4795$ ,  $T_i=12.5017$ .  
Planta - Modelo 1.

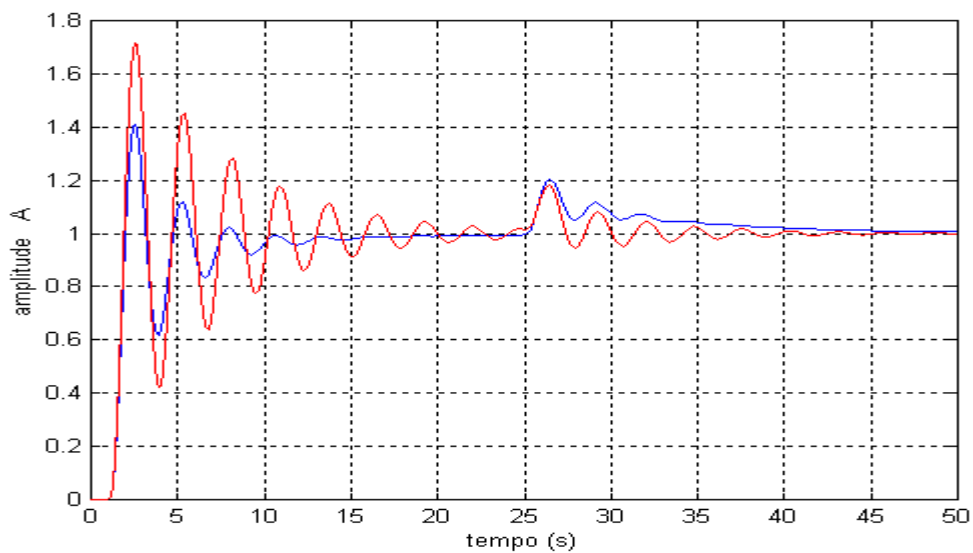


Figura 6.3: Saída azul, relé com histerese  $H=0.01$ ,  $MG=2$ .  $MG1=2.1499$ ,  $K_p=6.0798$ ,  $T_i=6.8504$ .  
Planta - Modelo 1.

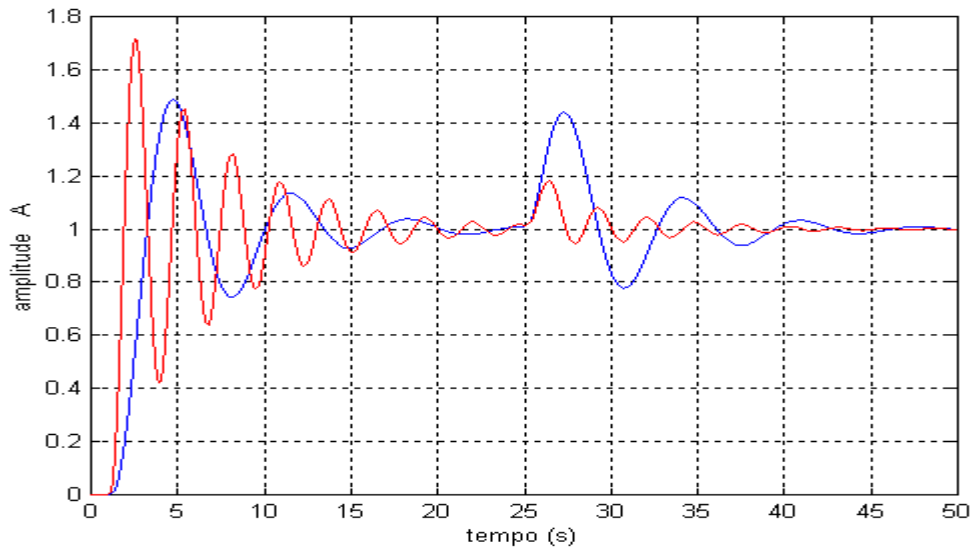


Figura 6.4: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MG=2$ .  $MG1=2.9525$ ,  $K_p=0.7517$ ,  $T_i=0.5547$ .  
Planta - Modelo 1.

De igual modo usaremos a planta Modelo 2. A tabela de Ziegler-Nichols nos forneceu os seguintes parâmetros do controlador:  $K_p = 1.7045$ ,  $T_i = 3.4999$ .

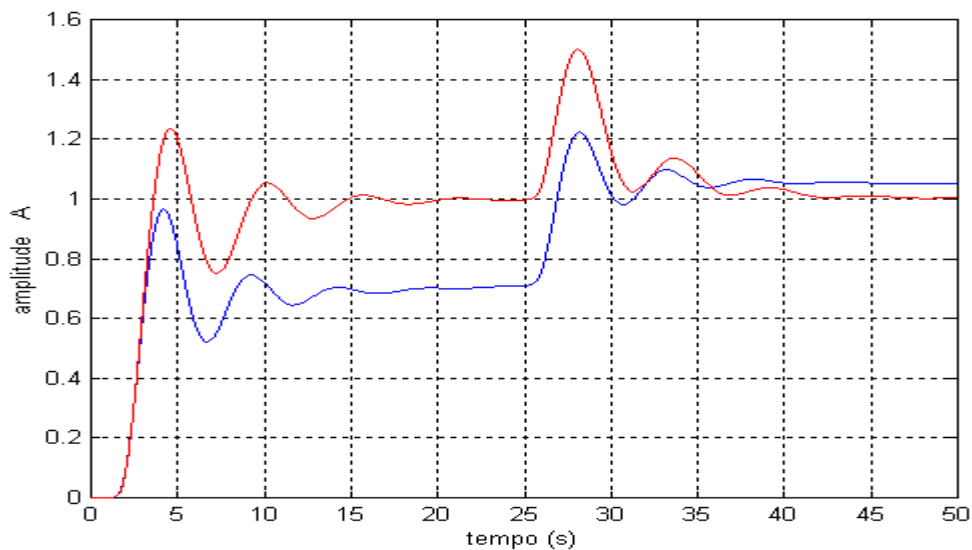


Figura 6.5: Saída azul, relé com histerese  $H=0.005$ ,  $MG=2$ .  $MG1=2.0611$ ,  $K_p=1.8779$ ,  $T_i=91.0697$ .  
Planta - Modelo 2.

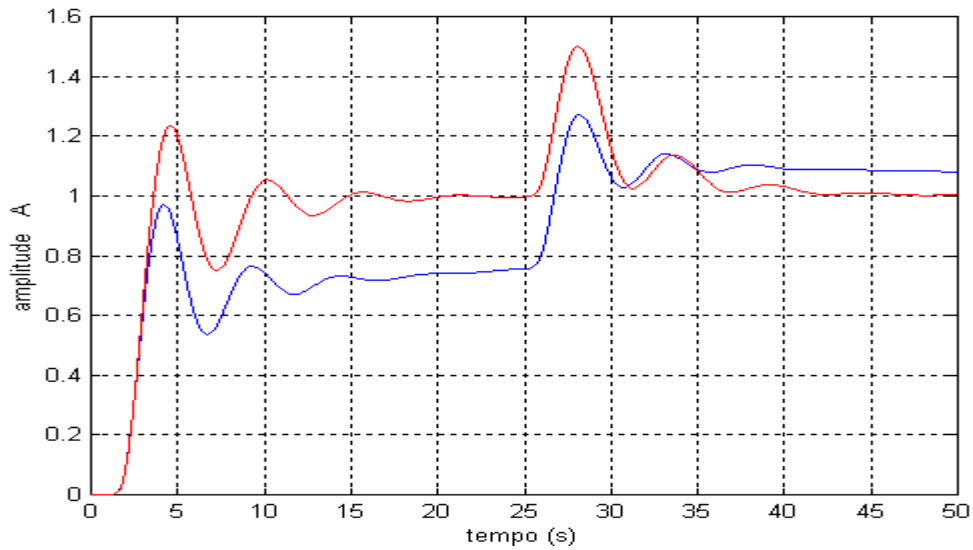


Figura 6.6: Saída azul, relé com histerese  $H=0.01$ ,  $MG=2$ .  $MG1=2.0658$ ,  $K_p=1.8622$ ,  $T_i=46.1305$   
 Planta - Modelo 2.

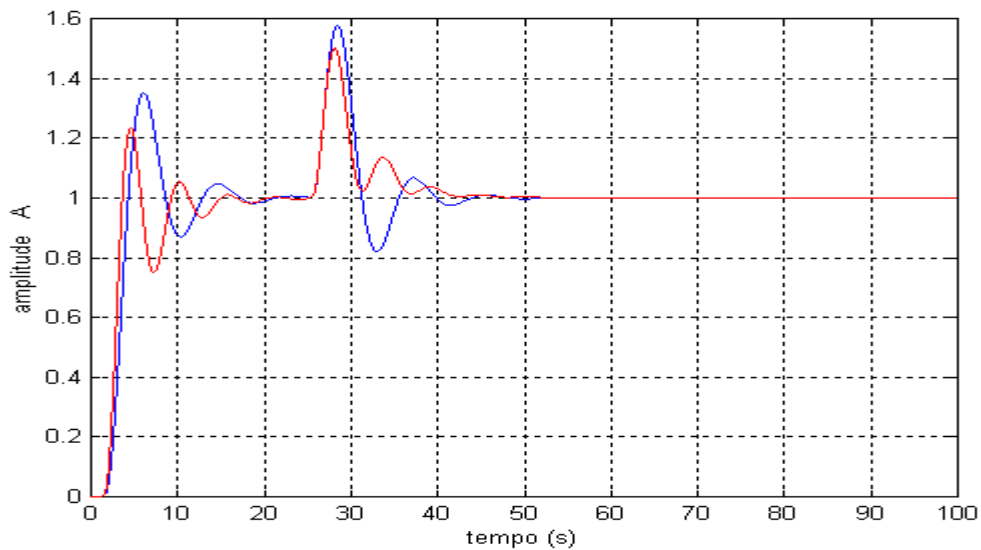


Figura 6.7: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MG=2$ .  $MG1=2.3168$ ,  $K_p=0.7859$ ,  $T_i=1.1826$   
 Planta - Modelo 2.

## 2. Análise dos resultados usando PI – Margem de Fase.

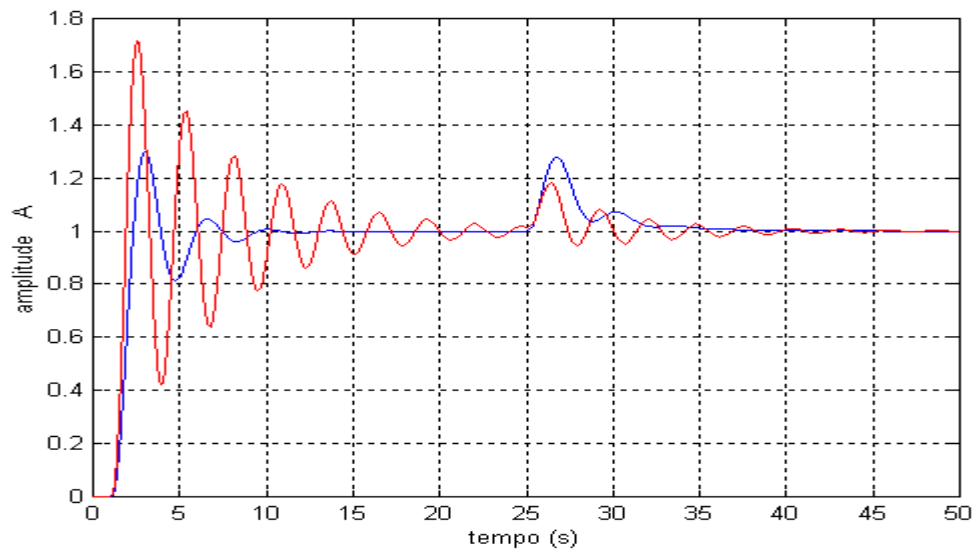


Figura 6.8: Saída azul, relé com histerese  $H=0.5$ ,  $MF=30^\circ$ ,  $MF1=35.348^\circ$ ,  $K_p=3.4076$ ,  $T_i=2.6572$   
Planta - Modelo 1.

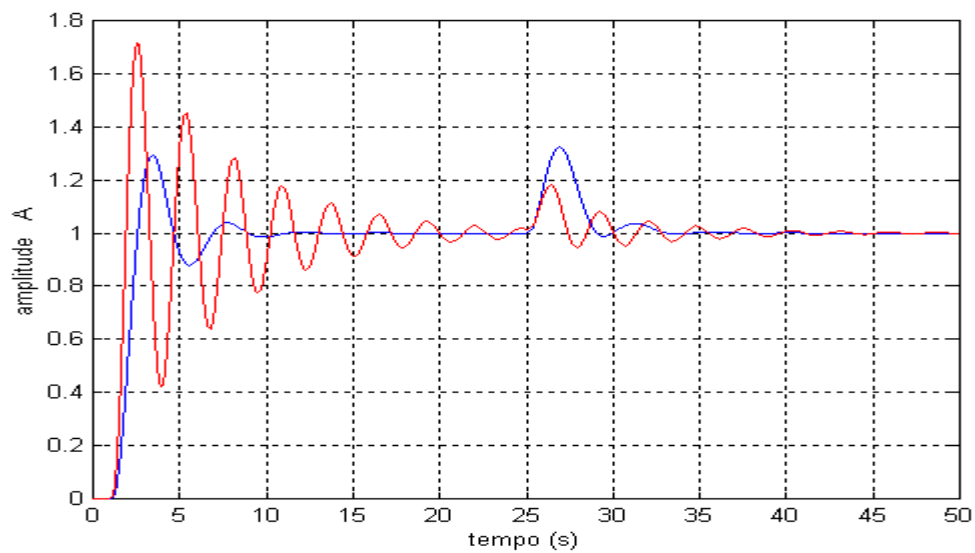


Figura 6.9: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MF=30^\circ$ ,  $MF1=38.590^\circ$ ,  $K_p=2.3589$ ,  $T_i=1.7050$   
Planta - Modelo 1.

De igual modo usaremos a planta Modelo 2. A tabela de Ziegler-Nichols nos forneceu os seguintes parâmetros do controlador:  $K_p = 1.7045$ ,  $T_i = 3.4999$ .

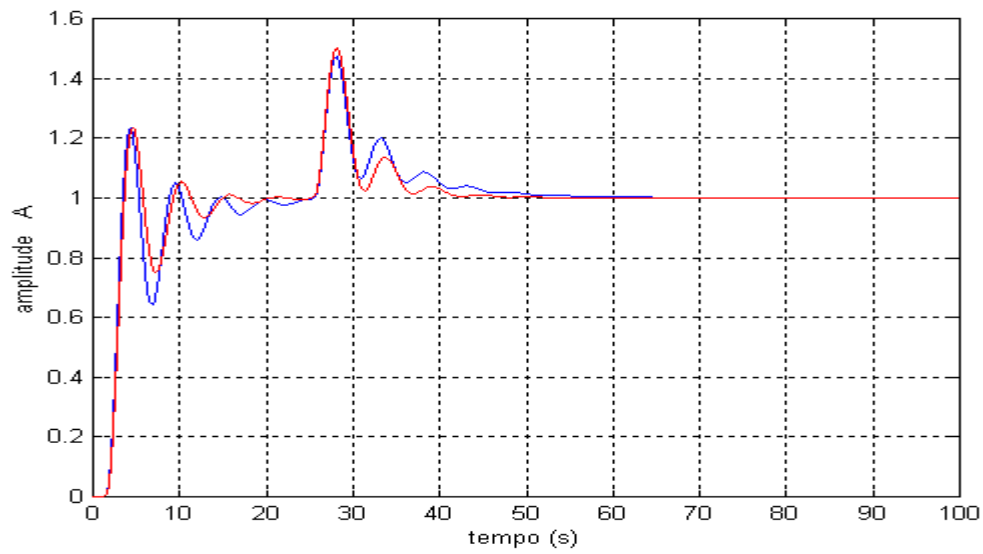


Figura 6.9: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MF=30^\circ$ ,  $MF1=37.97^\circ$ ,  $K_p=2.0317$ ,  $T_i=5.4593$   
Planta - Modelo 2.

### 3. Análise dos resultados usando PID – Margem de ganho.

Analogamente ao PI, em todos os casos apresentados abaixo foi introduzida em  $t = 25$  s uma perturbação do tipo degrau. Estaremos comparando a saída azul, relé com histerese, com a saída a vermelho método da sensibilidade limite de Ziegler-Nichols cujos parâmetros do controlador obtidos usando a planta Modelo 1 são  $K_p=8.1218$ ,  $T_i= 0.98$  e  $T_d = 0.2450$ .

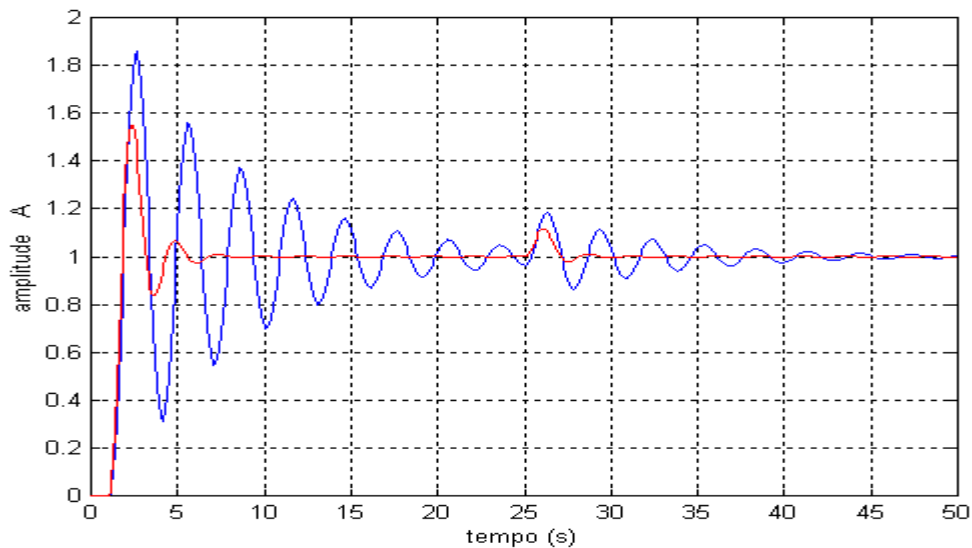


Figura 6.10: Saída azul, relé com histerese  $H=0.005$ ,  $MG=2$ ,  $MG1=INF$ ,  $K_p=5.3066$ ,  $T_i=0.6587$  e  $T_d=0.1647$   
Planta - Modelo 1.

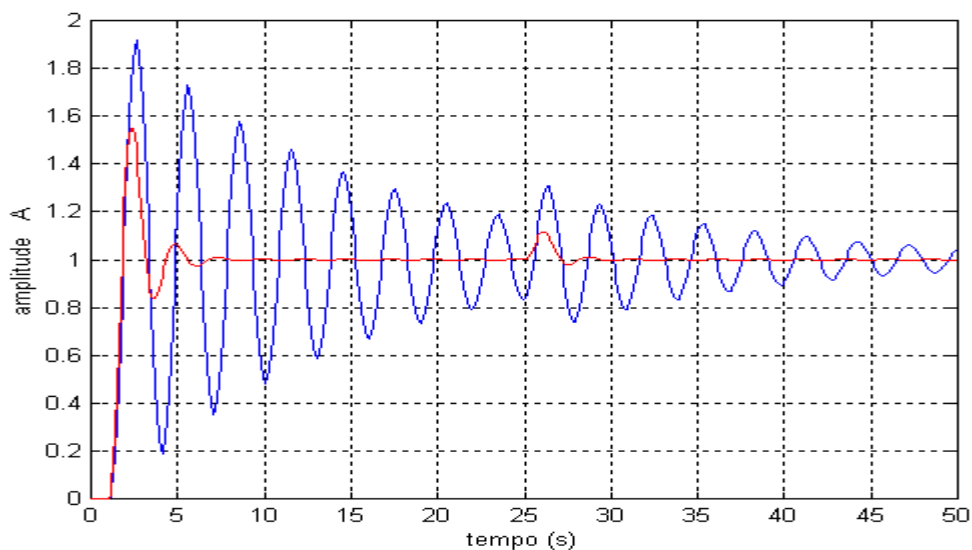


Figura 6.11: Saída azul, relé com histerese  $H=0.01$ ,  $MG=2$ ,  $MG1=INF$ ,  $K_p=5.2745$ ,  $T_i=0.6173$  e  $T_d=0.1543$

Planta - Modelo 1.

De igual modo usaremos a planta Modelo 2. A tabela de Ziegler-Nichols nos forneceu os seguintes parâmetros do controlador:  $K_p = 2.2726$ ,  $T_i = 2.100$  e  $T_d=0.5250$ .

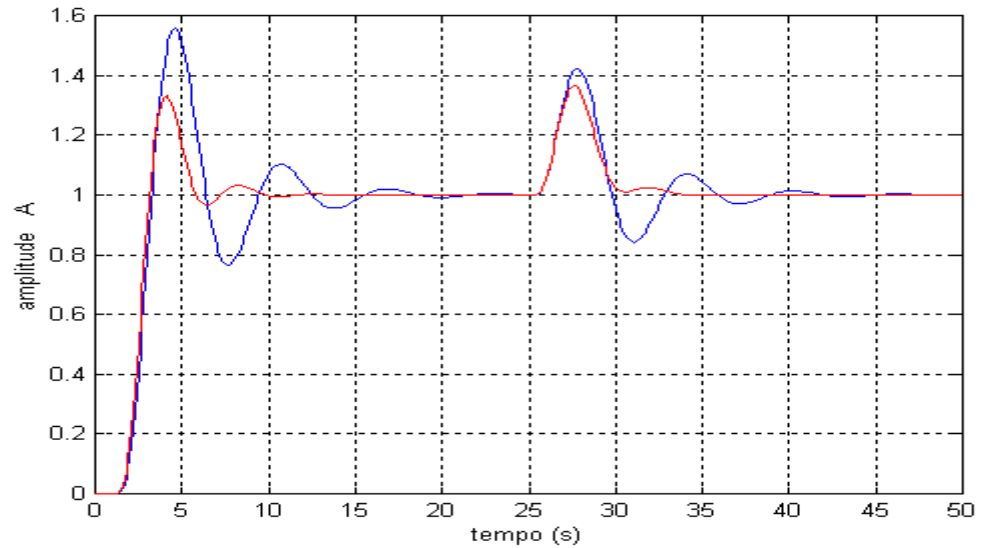


Figura 6.12: Saída azul, relé com histerese  $H=0.005$ ,  $MG=2$ ,  $MG1=2.4155$ ,  $K_p=1.7461$ ,  $T_i=1.3869$  e  $T_d=0.3467$ . Planta - Modelo 2.

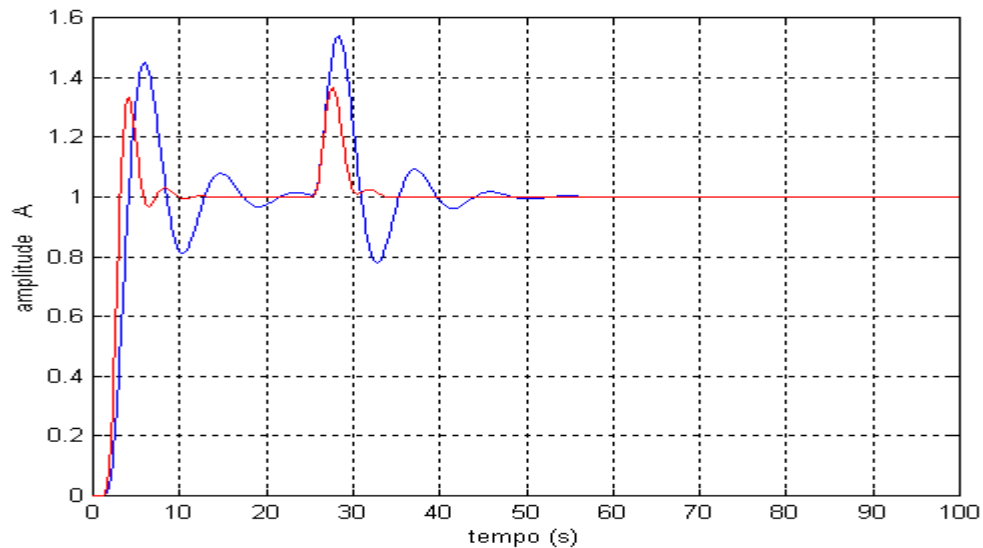


Figura 6.13: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MG=2$ ,  $MG1=5.1511$ ,  $K_p=0.7998$ ,  $T_i=0.9813$  e  $T_d=0.2453$ . Planta - Modelo 2.

#### 4. Análise dos resultados usando PID – Margem de fase.

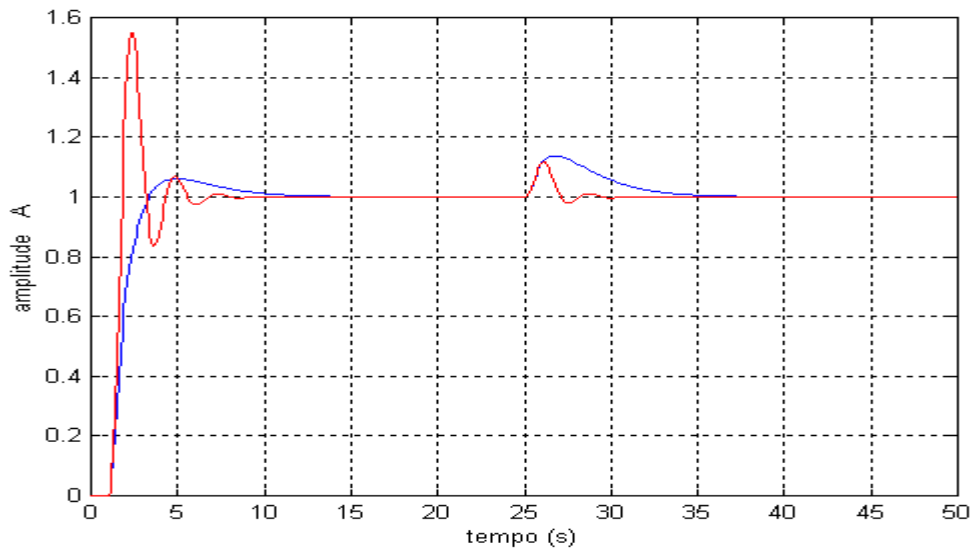


Figura 6.14: Saída azul, relé com histerese  $H=0.005$ ,  $MF=45^\circ$ ,  $MF1=62.75^\circ$ ,  $K_p=4.8695$ ,  $T_i=2.8885$  e  $T_d=0.7221$ . Planta - Modelo 1.

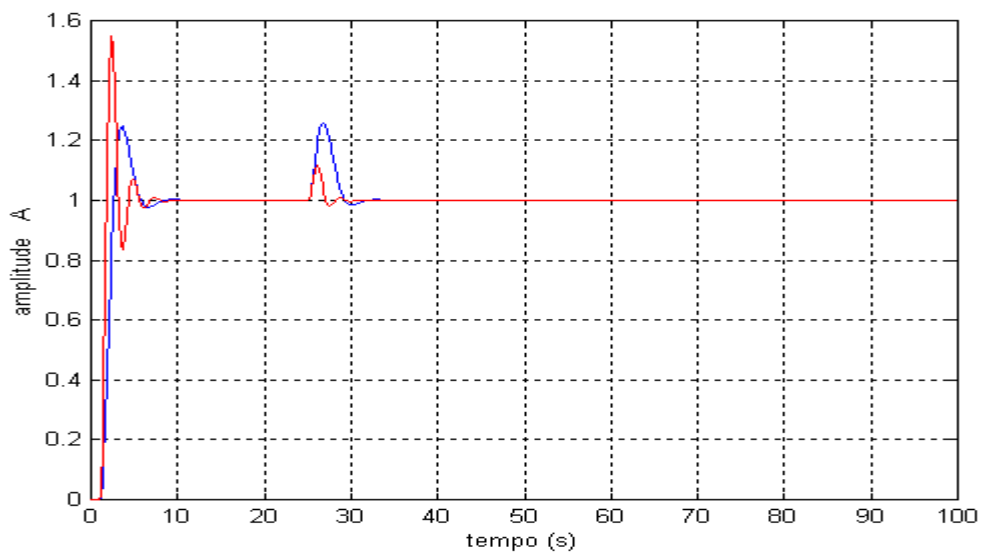


Figura 6.15: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MF=45^\circ$ ,  $MF1=89.61^\circ$ ,  $K_p=2.4890$ ,  $T_i=1.3420$  e  $T_d=0.3355$ . Planta - Modelo 1.



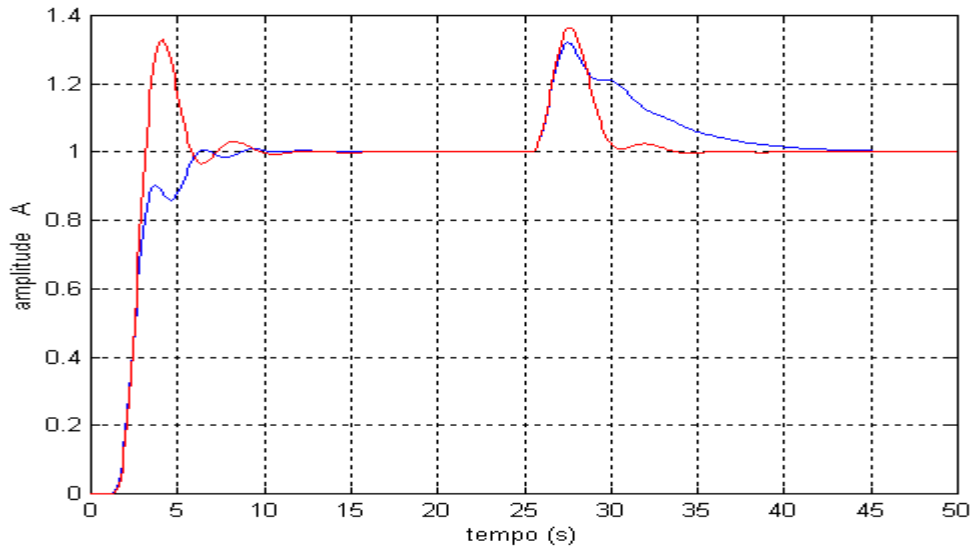


Figura 6.16: Saída azul, relé com histerese  $H=0.005$ ,  $MF=45^\circ$ ,  $MF1=29.97^\circ$ ,  $K_p=2.2044$ ,  $T_i=3.94$  e  $T_d=0.9850$ . Planta - Modelo 2.

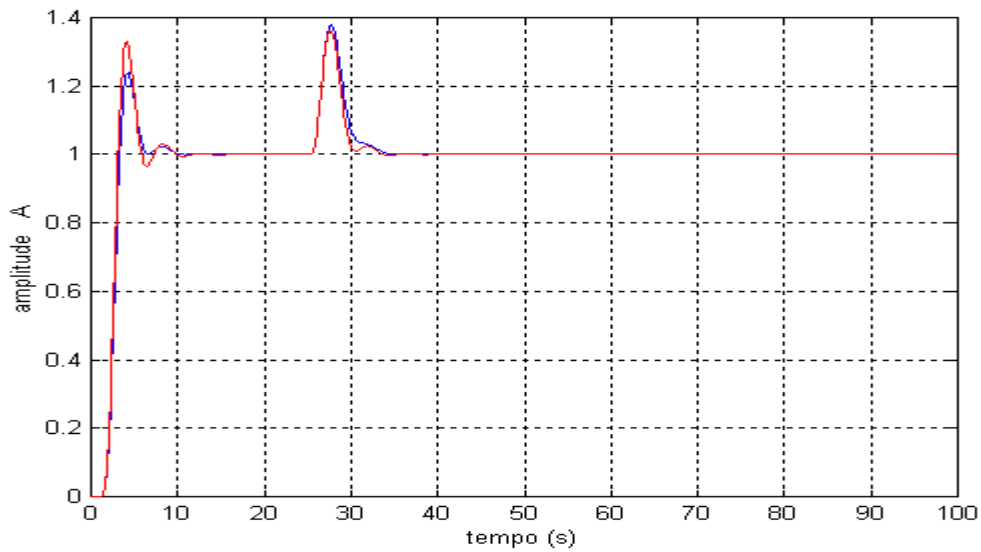


Figura 6.17: Saída azul, relé com histerese  $H=0.8$ ,  $MF=45^\circ$ ,  $MF1=64.26^\circ$ ,  $K_p=2.0382$ ,  $T_i=2.2202$  e  $T_d=0.5551$ . Planta - Modelo 2.

Terminada esta série de simulações, podemos concluir que em certos casos em que a histerese é muito pequena ( $H = 0.005$ ) o ajuste encontrado usando o algoritmo aqui proposto não apresenta bons resultados. Essa constatação é bem maior para o caso da planta de maior ordem, modelo 2. Certamente com este valor de histerese, muito pequena, o sistema apresentaria melhor desempenho se ao invés de usarmos o conceito de margem de ganho ou de fase, tivéssemos usado a tabela de Ziegler-Nichols para o método da sensibilidade limite.

Nos casos em que foi possível um ajuste PI por Margem de Fase, o algoritmo proposto apresentou melhor desempenho na entrada ao degrau e não foi melhor do que o ajuste de Ziegler-Nichols no que diz respeito a rejeição a perturbação do tipo degrau.

Um comentário interessante é feito para os casos mostrados nas figuras 6.10 e 6.11. Esperava-se que a margem de ganho infinita não originasse oscilações amortecidas na saída. Porém vale lembrar que muito embora a margem de ganho possa ser muito grande, a margem de fase pode no entanto ser muito pequena e por isso serem observadas oscilações na saída.

Muito embora o algoritmo tenha apresentado bom desempenho nos caso do ajuste PID por margem de fase, observações feitas mostram que do ponto de vista de estabilidade é melhor o ajuste por margem de ganho do que por margem de fase. As margens de ganho encontradas após o chaveamento foram sempre maiores do que as esperadas.

Para valores grandes de histerese observamos melhor desempenho do sistema para quando é usado ajuste por margem de fase PI ou PID.

## Capítulo 7 – Influência da perturbação

### 7.1 Introdução

Como foi dito em [secção 3.2.2], o uso da histerese é sugerido para tornar o sistema menos sensível a presença de perturbação e conseqüentemente obtermos uma boa estimação da amplitude e freqüência de oscilação. Vimos também que os parâmetros estimados dependiam do grau de histerese usada razão pela qual eram bastante diferentes dos esperados.

### 7.2 Análise do ajuste na presença de Perturbação

Para posterior análise vamos adicionar uma perturbação filtrada antes por uma planta cuja transferência é  $P(s) = \frac{12}{(s + 3)(s + 4)}$ .

A perturbação será adicionada a variável de controle com o objetivo de compararmos parâmetros estimados durante a operação com relé com os mesmo parâmetros estimados anteriormente sem a presença da perturbação.

A escolha da planta  $P(s)$  se deve ao fato de termos observado em simulações anteriores que para as plantas propostas, a freqüência de oscilação estava em torno  $\omega=3$  e  $\omega = 4$  rads /s. A importância disso reside no fato de que freqüências próximas da freqüência de oscilação do sistema sem perturbação, aparecerão na saída e com isso provavelmente afectarão o processo de identificação da amplitude e da freqüência de oscilação natural do sistema. Ao acontecer isso, estaremos em condições de fazer uma avaliação mais crítica sobre a utilização do relé ideal ou do relé com histerese.

Para o que segue considere os esquemas abaixo:

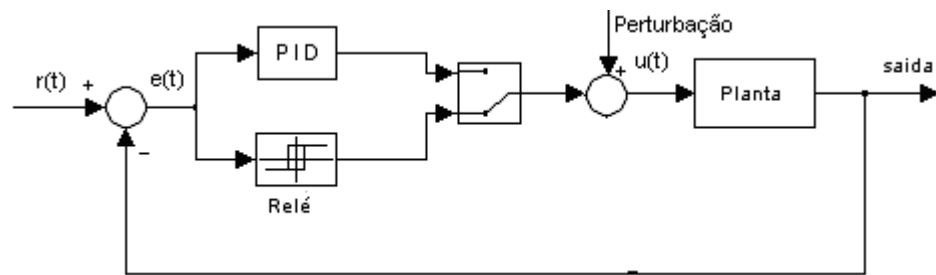


Figura 7.1: Perturbação adicionada ao sinal de controle.

- **Relé ideal**

Na prática a utilização do relé ideal para implementação de auto-ajuste pode apresentar alguns problemas. Por exemplo, na presença de perturbações podem ocorrer erros na detecção dos picos da amplitude e na detecção do cruzamento do sinal de saída pela referência. Para análise do que foi dito realizamos algumas simulações tendo sido utilizado o componente do MATLAB “Random Number” para simular uma fonte de perturbação cujas características são:

Variance = 250, mean = 0 e tempo de amostragem = 0.01.

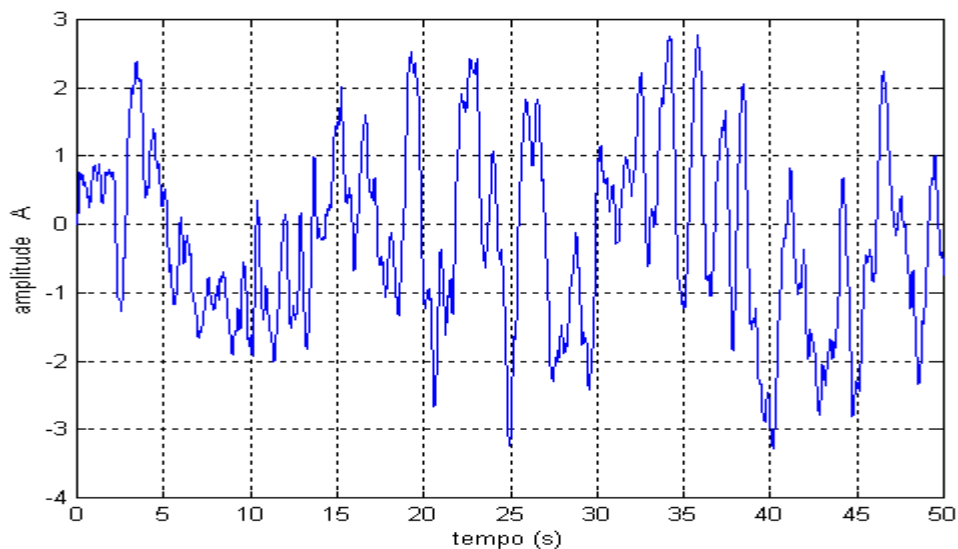


Figura 7.2: Perturbação adicionada ao sinal de controle tanto para a planta Modelo 1 como para a planta Modelo 2.

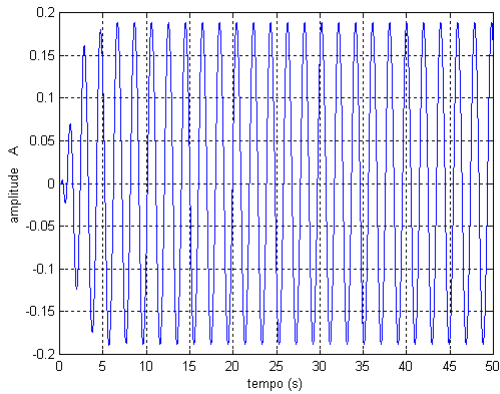


Figura 7.3: Relé ideal. Sem perturbação, saída do sistema. Planta - Modelo 1.

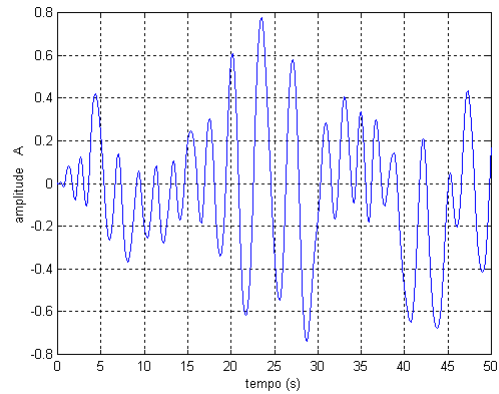


Figura 7.4: Relé ideal. Com perturbação, saída do sistema. Planta Modelo 1.

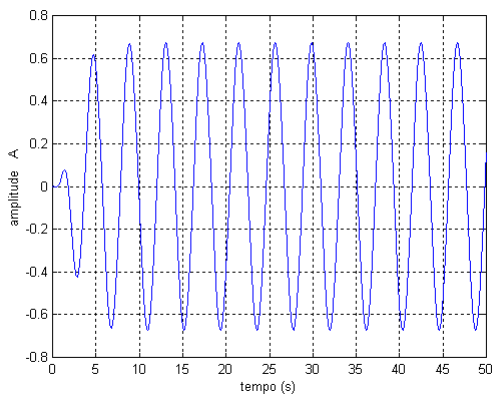


Figura 7.5: Relé ideal. Sem perturbação, saída do sistema. Planta - Modelo 2.

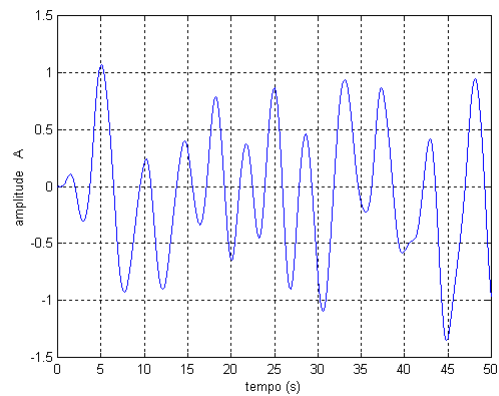


Figura 7.6: Relé ideal. Com perturbação, saída do sistema. Planta Modelo 2.

Os parâmetros das tabelas 7.1 e 7.2 foram estimados nas saídas mostradas nas figuras 7.3 à 7.6.

Parâmetros estimados	Sem perturbação	Com perturbação
N(A)	13.5359	18.5566
T*	1.9600	1.5700

Tabela 7.1: Valores estimados usando a planta Modelo 1

Parâmetros estimados	Sem perturbação	Com perturbação
----------------------	-----------------	-----------------

N(A)	3.7877	3.2764
T*	4.1999	3.9800

Tabela 7.2: Valores estimados usando a planta Modelo 2

Em seguida aplicamos a tabela de Ziegler-Nichols os valores estimados para a determinação dos parâmetros do PID. As simulações abaixo visam comparar o desempenho do sistema com perturbação ou sem ela.

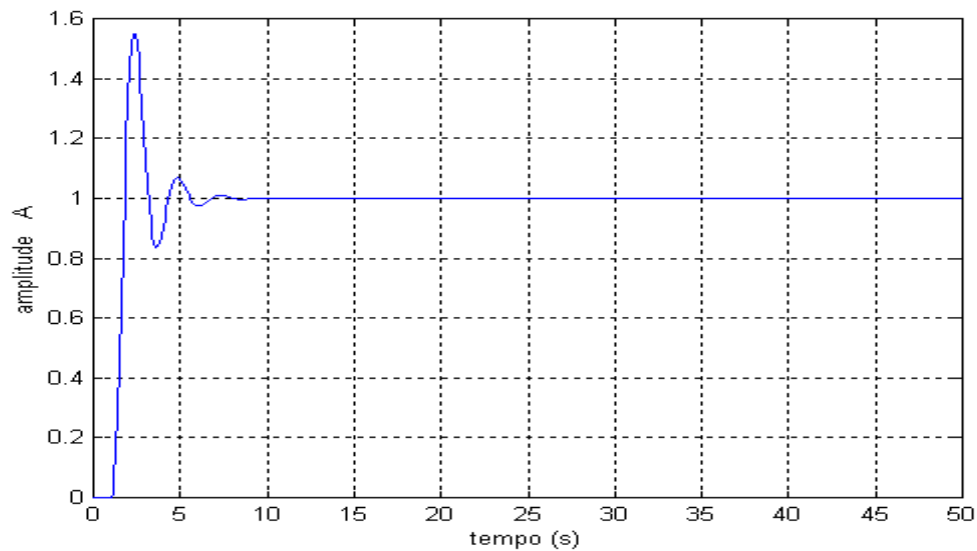


Figura 7.7: Desempenho do sistema sem perturbação.  $K_p=8.1215$ ,  $T_i=0.98$ ,  $T_d=0.2450$ . Planta – Modelo 1.

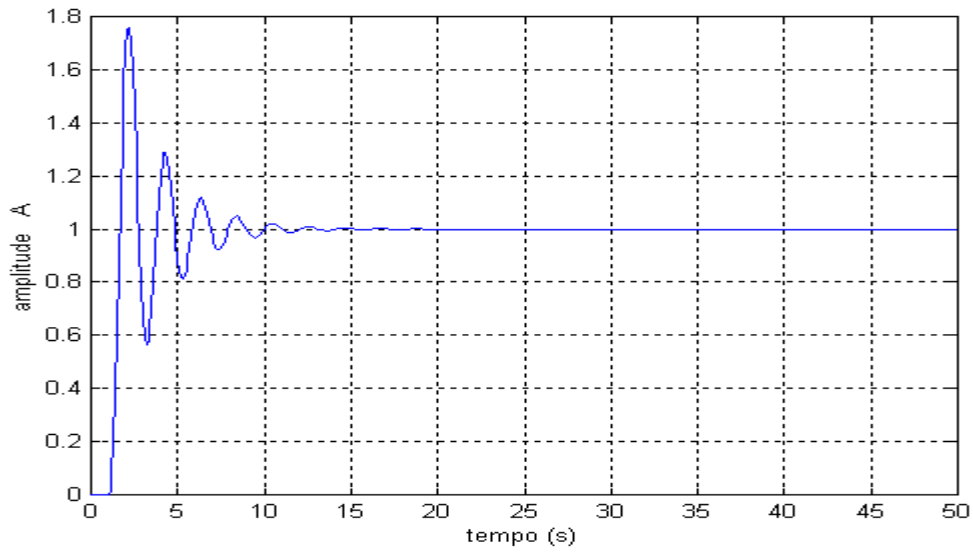


Figura 7.8: Desempenho do sistema com perturbação.  $K_p=11.1339$ ,  $T_i=0.7850$ ,  $T_d=0.1963$ .Planta Modelo 1.

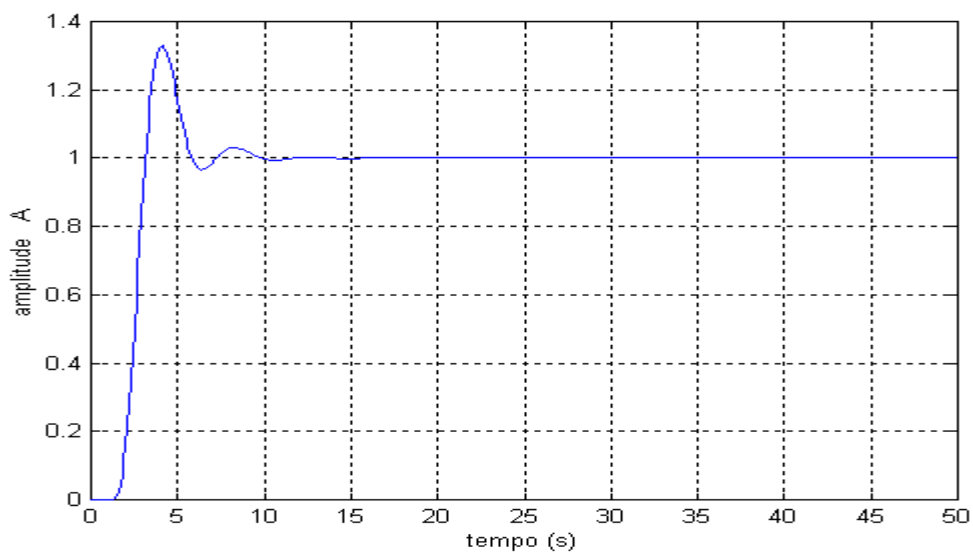


Figura 7.9: Desempenho do sistema sem perturbação.  $K_p=2.2726$ ,  $T_i=2.1$ ,  $T_d=0.5250$ .Planta Modelo 2.

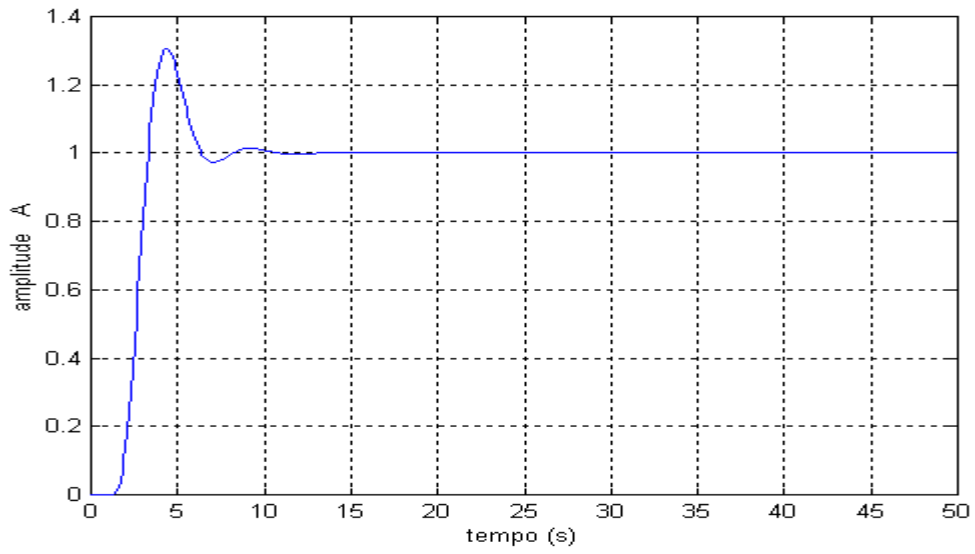


Figura 7.10: Desempenho do sistema com perturbação.  $K_p=1.9658$ ,  $T_i=1.99$ ,  $T_d=0.4975$ . Planta Modelo 2.



- **Relé com Histerese**

Vamos agora analisar a influência da histerese no processo de estimação sendo considerado a presença da perturbação.

Para análise do que foi dito realizamos algumas simulações tendo utilizado o componente do MATLAB “Random Number” com as seguintes características:

Variance = 250, mean = 0 e tempo de amostragem = 0.01.

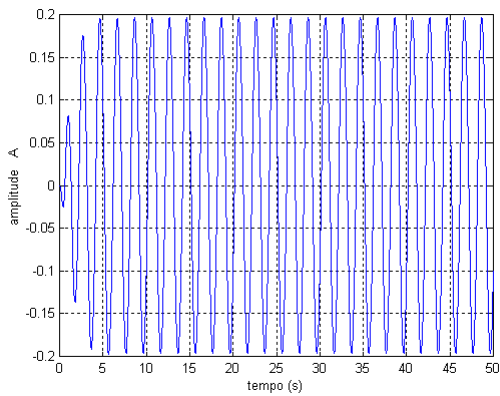


Figura 7.11: Relé com  $H=0.005$  . Sem perturbação, saída do sistema. Planta - Modelo 1.

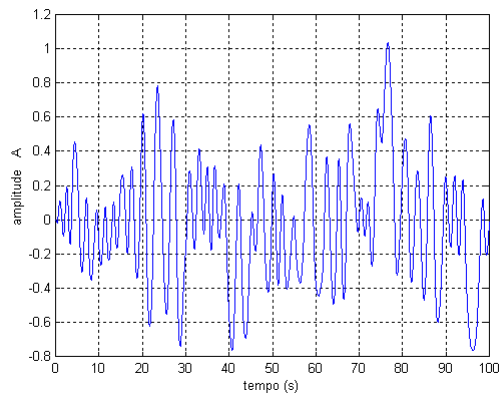


Figura 7.12: Relé com  $H=0.005$  . Com perturbação, saída do sistema. Planta - Modelo 1.

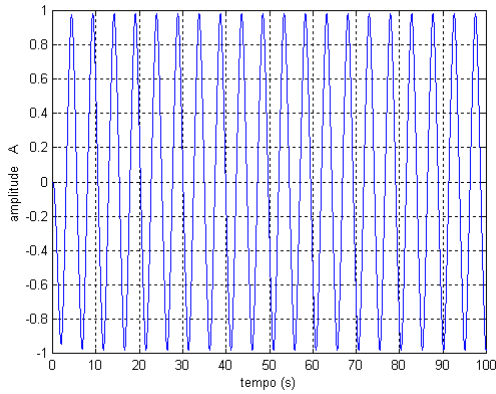


Figura 7.13: Relé com  $H=0.8$  . Sem perturbação, saída do sistema. Planta - Modelo 1.

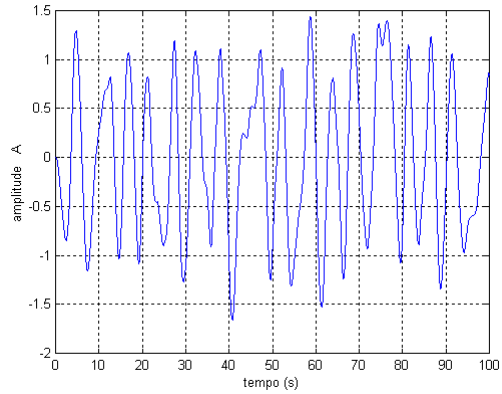


Figura 7.14: Relé com  $H=0.8$  . Com perturbação, saída do sistema. Planta - Modelo 1.

Parâmetros estimados com $H = 0.005$	Com perturbação	Sem perturbação
$ G(jw^*) $	0.0987	0.0771
$\angle G(jw^*)$	$-178.86^\circ$	$-178.54^\circ$

Tabela 7.3: Valores estimados usando a planta Modelo 1

Parâmetros estimados com $H = 0.8$	Com perturbação	Sem perturbação
$ G(jw^*) $	0.4253	0.3855
$\angle G(jw^*)$	$-132.38^\circ$	$-125.42^\circ$

Tabela 7.4: Valores estimados usando a planta Modelo 1

Dos valores estimados determinamos os parâmetros do PID cujos desempenhos são vistos abaixo.

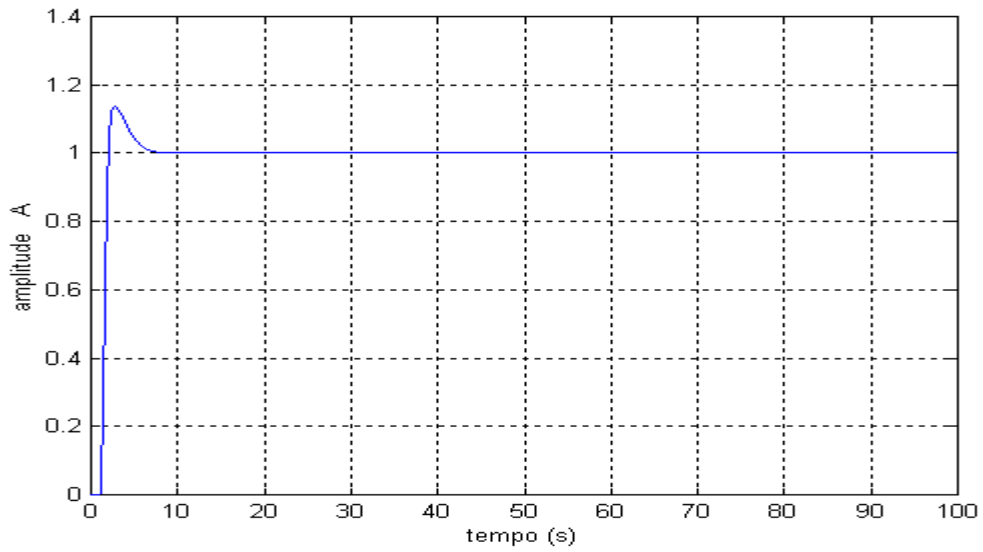


Figura 7.15: Desempenho do sistema sem perturbação.  $MF=30$ ,  $H=0.005$ -  $K_p=8.1064$ ,  $T_i=1.8125$ ,  $T_d=0.4531$ . Planta Modelo 1.

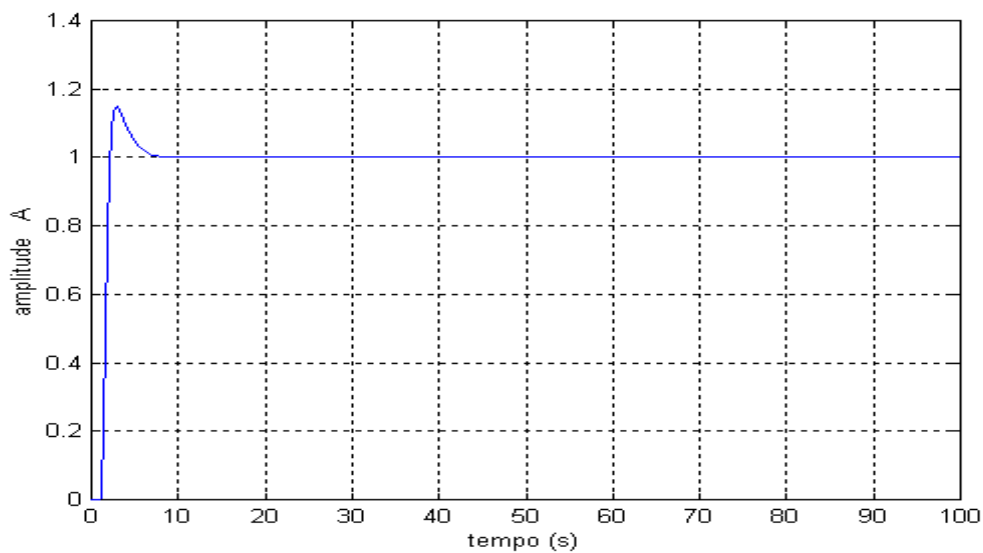


Figura 7.16: Desempenho do sistema com perturbação.  $MF=30$ ,  $H=0.005$ - $K_p=6.2595$ ,  $T_i=1.8219$ ,  $T_d=0.4555$ . Planta Modelo 1.

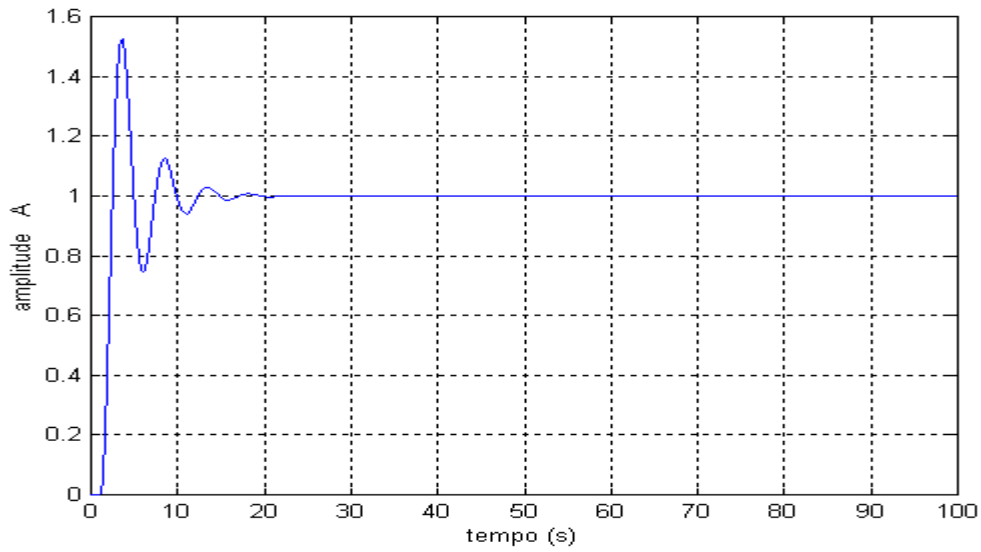


Figura 7.17: Desempenho do sistema com perturbação.  $MF=30$ ,  $H=0.8$ - $K_p=2.1072$ ,  $T_i=0.8004$ ,  $T_d=0.2001$ . Planta Modelo 1.

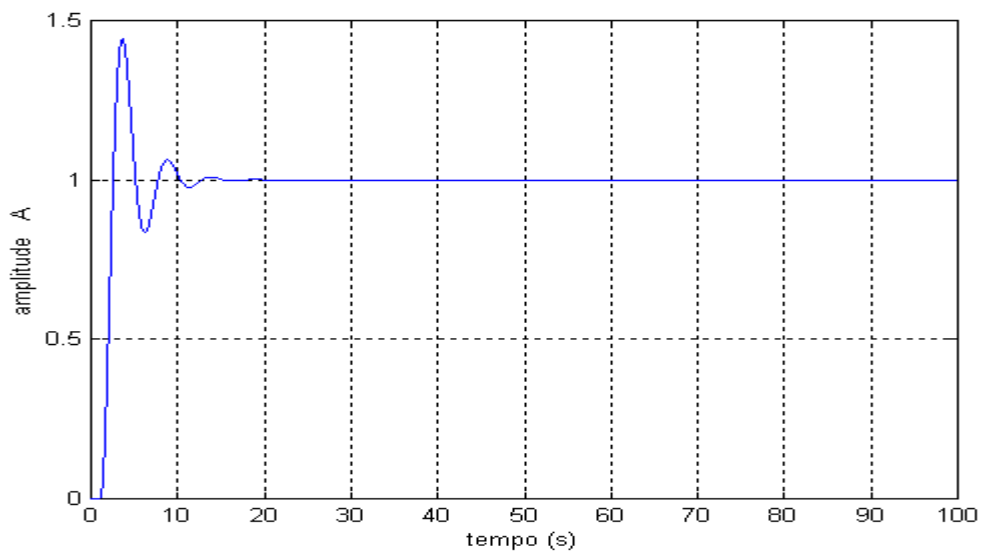


Figura 7.18: Desempenho do sistema com perturbação.  $MF=30$ ,  $H=0.8$ - $K_p=2.1034$ ,  $T_i=0.9110$ ,  $T_d=0.2277$ . Planta Modelo 1.

Analisando a saída do sistema na fase de estimação, verificamos que os valores estimados poderão ser diferentes dependendo do número de ciclos escolhidos. A forma do sinal não nos garante o mesmo valor de período de oscilação e de ganho crítico para diferentes valores de ciclos a considerar. Isto naturalmente ocorre nos casos em que a planta sofre uma perturbação na etapa de estimação de parâmetros. Astrom em [6] sugeriu o uso da histerese como forma de tornar o sistema menos sensível à perturbação. Com base nisso, foram feitas simulações com vista a avaliar os efeitos da histerese na saída do sistema durante a operação com relé. Constatamos que o problema é minimizado para grandes valores de histerese. Lembramos que essa análise depende do nível de perturbação sofrida. Para valores altos de  $H$  é possível termos uma saída parecida com uma senoide porém as discrepâncias entre os valores estimados nesta situação podem levar o sistema a uma funcionalidade diferente da esperada.

### **7.3 Outras considerações**

Com base em [6], havia a expectativa de que a histerese pudesse inibir os efeitos provocados pela perturbação e deste modo obtermos estimativas muito próximas das esperadas. Porém os resultados encontrados não são tão satisfatórios como esperado. As discrepâncias em relação aos valores esperados de frequência de oscilação, margem de ganho e margem de fase são outro problema derivado da utilização da histerese. Nesta altura, achamos pertinente concluir que a histerese pode não ser o meio mais adequado para inibir o sistema deste tipo de perturbação. Contudo, a discussão sobre o assunto nos leva de volta ao relé ideal no sentido de sua utilização fosse ainda a mais recomendada desde que houvesse uma forma de garantir uma boa estimativa de parâmetros mesmo sob forte perturbação.

O trabalho não contempla uma solução para o problema. Porém no caso em a perturbação aparece por alguns instantes no início do processo de estimação dos parâmetros seria razoável supor uma lógica inteligente capaz de a todo instante comparar o período anterior com o período presente e verificar durante algum tempo se o período da oscilação se mantivesse igual ou não. No caso afirmativo seria

razoável admitir que a perturbação teria cessado e aquele seria o período procurado. Este procedimento implica um atraso maior na passagem do controle a Relé para PID.

Considere uma perturbação com duração aleatória. O sistema ficará observando se a perturbação continua presente ou não, comparando o período de cada ciclo. Se durante algum tempo o período for igual, o sistema entenderá que a perturbação deixou de existir e portanto é momento para começar o processo de estimação de parâmetros.

### a) Relé ideal

Foi introduzida uma perturbação com duração de 9 segs. Se considerarmos que o período do sinal sem perturbação é 1.96 segs podemos afirmar que a perturbação esteve presente nos primeiros 5 ciclos. Veja como ficariam os valores obtidos considerando alguns ciclos de espera.

Ciclo a partir do qual são estimados os valores de $N(A)$ e $T$	Ganho $N(A)$	Período $T$ (segs)
4	12.5907	2.02
6	13.2393	1.98
7	13.2458	1.98
8	13.2452	1.98
9	13.2452	1.98
10	13.2452	1.98

Tabela 7.5: Valores de ganho e período obtidos de diferentes ciclos.

Os valores da tabela acima mostram que a lógica teria detectado que a partir do oitavo ciclo o período e o ganho  $N(A)$  se mantinha constante e concluiria que a perturbação desapareceu considerando portanto  $T = 1.98$  segs.

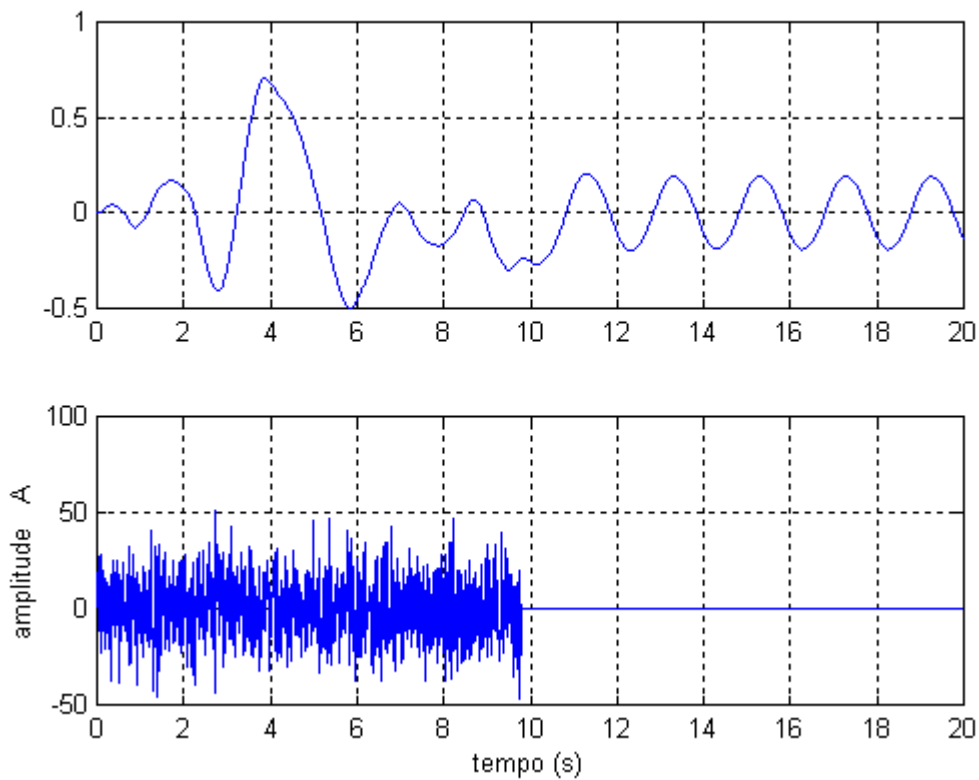


Figura 7.19: Perturbação com duração de 9.8 segs. Influencia no sinal de saída.

### b) Relé com histerese

Foi feita a mesma experiência porem desta feita usando rele com diferentes valores de histerese.

Ciclo a partir do qual são estimados os valores de $N(A)$ e $T$	$ G(jw^*) $	$\angle G(jw^*)$
4	0.0802	- 178.5960
6	0.0788	-178.5726
7	0.0788	-178.5726
8	0.0788	-178.5726

Tabela 7.6: Valores de módulo e fase obtidos de diferentes de ciclos e  $h = 0.005$

Ciclo a partir do qual são	$ G(jw^*) $	$\angle G(jw^*)$
----------------------------	-------------	------------------

estimados os valores de N(A) e T		
4	0.0810	-177.2208
6	0.0805	-177.2028
7	0.0805	-177.2028
8	0.0805	-177.2028

Tabela 7.7: Valores de módulo e fase obtidos de diferentes de ciclos e  $h = 0.01$

## 7.4 Conclusão

As alternativas apresentadas para solucionar os problemas derivados da perturbação não são objecto deste trabalho. Contudo coube a nós observar o comportamento do sistema na presença de perturbação e avaliar os resultados quando esta é aplicada de forma a interferir na estimativa feita durante o período de operação com relé.

Concluimos que esperar vários ciclos não resolve o problema, porém pode ser aplicada aos casos em que se sabe de antemão que a perturbação não permanecerá o tempo todo sobre o sistema.

Observamos também que a espera diminui quando é usado um relé com histerese. O tamanho da histerese não influencia no número de ciclos a esperar.

## Capítulo 8 – Conclusões



Neste trabalho foi desenvolvido um algoritmo de ajuste dos parâmetros de controladores PI e PID usando relé com histerese. Este algoritmo visa à imposição de uma certa margem de ganho ou margem de fase ao sistema. Porém diferentemente do caso clássico de projeto baseado em resposta em frequência, aqui só dispomos de um ponto da resposta em frequência da malha aberta (valor aproximado). Isto é uma limitação dessa abordagem. O único ponto disponível da resposta em frequência é dado pela frequência de oscilação encontrada na fase de estimação dos parâmetros. Paralelamente a esta situação, ocorrem casos em que não é possível a realização de um PI devido ao fato deste introduzir um atraso adicional a plantas que por natureza possuem fase muito próxima de  $-180$ . O problema é solucionado se ao invés de um PI usarmos um PID que por sua vez tende a deixar menos negativa a fase da resposta em malha aberta com a introdução de mais um zero.

Um outro aspecto que merece ser mencionado aqui é o fato de ter sido utilizado o cruzamento da saída pela referência para a detecção do período assim como o cálculo da amplitude foi determinado sendo feito igual a metade da diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da saída. Isto constitui um problema porque a estimativa da frequência e da amplitude podem ser afetadas no caso de haver na entrada do relé uma perturbação em alta frequência.

Verificamos também que apesar da histerese ter sido sugerida por Astrom, sua influência na presença de perturbação é sentida quando utilizada em grandes valores. Em consequência sua utilização causa discrepância nos valores de ajuste pondo em causa a qualidade do ajuste.

Os resultados das simulações feitas mostram que o relé com histerese poderia muito bem ser entendido como sendo a representação de um ganho proporcional associado a um desvio de fase. Isto foi fundamental para a elaboração da sintonia aqui apresentada. Do ponto de vista de estabilidade o uso do relé sugere maior afastamento da instabilidade do que se fosse usado um sistema com um ganho associado a um atrasador. Os ganhos  $N(A)$  são sempre menores do que os ganhos encontrados usando atrasador.

Muito embora o algoritmo tenha apresentado bom desempenho nos casos de ajuste por margem de fase, observações feitas mostram que do ponto de vista de estabilidade é melhor o ajuste por margem de ganho do que por margem de fase. As margens de ganho encontradas após o chaveamento foram sempre maiores do que as esperadas.

Acreditamos que o objectivo deste trabalho foi alcançado. Supusemos que por alguma razão, será preciso usar um relé com histerese. Verificamos que não poderíamos utilizar a tabela de Ziegler- Nichols uma vez que se tratava de um elemento não linear composto de um ganho e uma fase. Resolvemos então aplicar os conceitos de margem de ganho e de margem de fase. Desenvolvemos o algoritmo de ajuste e verificamos que para certos casos apresenta bons desempenhos. Para estudos futuros seria interessante implementar um mecanismo eficiente de detecção de perturbação e associa-lo ao uso do relé ideal. Como vimos o relé com histerese apresenta discrepâncias nos parâmetros estimados assim como nas margens de ganho e de fase desejadas.

Não se deve esquecer que o método de auto-ajuste do PID considerado aqui serve para um ajuste inicial dos parâmetros do PID. É natural a feitura do ajuste fino desses parâmetros ao longo do tempo conforme a necessidade.

## **Referências Bibliográficas**

1. Astrom, K. J and Hagglund, T - “Automatic Tuning of PID Controllers”, Instrument Society of America,1988.
2. Ogata, K - “Engenharia de Controle Moderno”, terceira edição, Prentice Hall Brasil, 1998
3. Ogata, K - “Engenharia de Controle Moderno”, Prentice Hall do Brasil, 1982
4. D’azzo, J. J e Houpis, C. H - “Análise e Projeto de Sistemas de Controle Lineares”, segunda edição, Mc Graw-Hill, 1978
5. Castrucci, P e Curti Rino - “Sistemas Não Lineares”, volume 2, Edgard Blucher Ltda,1981
6. Astrom, K. J and Hagglund, T. – “Automatic Tuning of Simple Regulators with Specifications on Phase and Amplitude Margins”, Automatica volume 20,1984

