

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Física



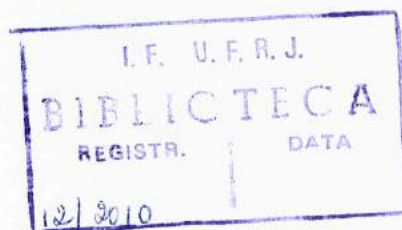
UFRJ

Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Uma Mecânica Discreta no Ensino Médio

Rio de Janeiro
2010

12/2010



Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Uma Mecânica Discreta no Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação
para obtenção do título de Licenciado em Física
pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Professor Orientador: Filadelfo Cardoso Santos

Rio de Janeiro
2010

Servio Tulio Lunguinho de Sousa

Uma Mecânica Discreta no Ensino Médio

Monografia apresentada como pré-requisito para obtenção do título de Licenciado em Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, submetida à aprovação da banca examinadora composta pelos seguintes membros:

Professor Orientador: Filadelfo Cardoso Santos

Professor: Vitorvani Soares

Professor: Marcos Binderly Gaspar

Professor: Alexandre Carlos Tort

Rio de Janeiro, 29 de setembro de 2010.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa Marcia Joaquim da Silva de Sousa, à minha filha Ana Luiza da Silva de Sousa e ao meu filho Isaac Tulio da Silva de Sousa pela paciência e compreensão quando estive ausente por estar dedicando tempo na elaboração deste trabalho. Agradeço ao meu orientador professor Filadelfo Cardoso Santos pela ajuda e dedicação. Agradeço aos meus amigos que sempre acreditaram em mim.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1 – O ENSINO MÉDIO	
1.1- Introdução.....	2
1.2- Um Breve Resumo Histórico.....	3
1.3- A Física no Ensino Médio	3
1.4- A Mecânica no Ensino Médio.....	5
CAPÍTULO 2 – O MÉTODO DA DISCRETIZAÇÃO	
2.1- Introdução.....	30
2.2- A Velocidade e a Aceleração como Grandezas Físicas Discretas	33
CAPÍTULO 3 – APLICAÇÕES DO MÉTODO DA DISCRETIZAÇÃO	
3.1- Movimento Uniforme.....	38
3.2- Movimento sob a ação de uma força constante	40
3.3- Quedas com Atrito.....	48
3.4- Oscilador Harmônico.....	58
CAPÍTULO 4 – MAIS APLICAÇÕES DA FÍSICA DISCRETA	
4.1- Queda com Atrito	70
4.2- Movimento de Projéteis.....	72
4.3- Oscilador Harmônico: em uma e duas dimensões.....	78
APÊNDICE A: Programação para Cálculo.....	92
APÊNDICE B: Números Complexos.....	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	97

RESUMO

Na Mecânica estudada no Ensino Médio, frequentemente os alunos estudam uma série de problemas de movimentos sem resolvê-los. Decoram funções matemáticas que correspondem às soluções destes problemas e aprendem a identificar suas representações gráficas. Não é comum aos alunos a tarefa de aplicar a segunda lei de Newton em problemas de movimento para, assim, obter a solução do problema. Isso se deve ao fato de a segunda lei de Newton ser um tipo especial de equação, cuja solução depende de uma série de regras de cálculo que não está presente nos conteúdos estudados no Ensino Médio. Entretanto, quando se trata de um problema de movimento no qual a aceleração da massa em movimento é constante ou nula, é possível o estudo deste movimento a partir da segunda lei de Newton. Nosso trabalho propõe regras de cálculo que permitem a obtenção de soluções para problemas de movimento a partir da aplicação da segunda lei de Newton. Estas regras são acessíveis aos alunos do Ensino Médio e permitem solucionar problemas nos quais a aceleração não é constante, nos aproximando, portanto, de movimentos reais que fazem parte do nosso cotidiano. Apresentaremos as soluções dos problemas que permitiram a construção de gráficos pelos próprios alunos. Estes poderão usar calculadoras ou computadores. No final deste trabalho oferecemos uma programação para computadores que tenham o programa Maple 12 [1] ou outro programa equivalente instalado. Acreditamos que o processo de solução de problemas de movimento e a participação direta dos alunos na construção de gráficos estimulam a independência do aluno e constituem um processo de aprendizagem mais eficiente.

Introdução

A Física discreta pode ser formulada de duas formas: a primeira admite que a própria natureza do espaço e do tempo é discreta e a segunda surge do resultado de um processo de discretização de relações contínuas. Em nosso trabalho consideraremos apenas a segunda formulação. A experiência nos mostra que é possível estudar uma grande variedade de problemas físicos recorrendo a Física discreta, sem que haja grandes divergências nos resultados quando comparados com métodos tradicionais. A vantagem é que na Física discreta a álgebra envolvida é muito mais simples e permite que analisemos um número maior de problemas no Ensino Médio.

Concentraremos nossa atenção na área da Física que estuda os movimentos dos corpos: a Mecânica. Como recorreremos a Física discreta para o estudo de movimentos, nos sentimos a vontade ao considerar uma Mecânica discreta. Assim, estudaremos problemas de movimento com equações discretizadas, tais como a expressão matemática da segunda lei de Newton e as equações que definem a aceleração e a velocidade como grandezas discretas.

No decorrer deste trabalho resolveremos problemas de movimento que são estudados no Ensino Médio e outros que não são estudados. Alguns problemas são estudados no Ensino Médio mesmo sem a obtenção de uma solução para o problema. Muitas vezes a solução do problema e sua representação gráfica são dadas aos alunos. Os alunos, então, têm como tarefa decorar as soluções (funções) e seus aspectos gráficos, com o objetivo de resolver questões encontradas em livros texto de Física utilizados nas aulas. No nosso trabalho resolveremos estes problemas aplicando a segunda lei de Newton discretizada. Portanto, nosso objetivo neste trabalho é propor e aplicar um conjunto de regras de cálculo que nos permita resolver problemas de movimento no contexto do Ensino Médio. Desejamos nos aproximar das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), que enfatiza a necessidade de uma contextualização dos conteúdos estudados nas aulas de Física e da interdisciplinaridade entre a Física e outras áreas do conhecimento.

CAPÍTULO 1 - O ENSINO MÉDIO

1.1 - Introdução

São comuns à maioria das pessoas situações nas quais crianças relatam que profissões querem ter quando crescerem. Algumas revelam que querem ser médico, advogado, policial e outras querem ser professor. Nestas situações, podemos inferir que essas crianças têm algum adulto como referência. A prática de buscarmos referências para, a partir daí, delinear nossas atitudes é comum e, me parece, intrínseca ao ser humano. Quando expressamos nossas opiniões ou construímos nossos pensamentos e argumentações, normalmente os fazemos pautados por uma informação ou um conjunto delas. Para se construir um “novo” conhecimento é necessário que já exista o “velho”.

Neste momento de minha formação, no qual não disponho de uma quantidade razoável de conhecimento derivado da prática docente, considero importante ter como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM). Estes Parâmetros cumprem o duplo papel de difundir os princípios de uma reforma curricular e orientar o professor, na busca de novas abordagens e metodologias.

Partindo de princípios definidos pelas Leis de Diretrizes e Bases (LDB), o currículo do Ensino Médio assume um novo perfil, apoiado em competências básicas para a inserção de nossos jovens na vida adulta. Tínhamos um ensino descontextualizado, compartimentalizado e baseado no acúmulo de informações. Ao contrário disso, a proposta atual é buscar dar significado ao conhecimento escolar, mediante a contextualização; evitar a compartimentalização, mediante a interdisciplinaridade; e incentivar o raciocínio e a capacidade de aprender.

1.2 - Um Breve Resumo Histórico

Ao fazermos uma retrospectiva sobre o Ensino Médio no Brasil, nos últimos quarenta anos, percebemos que dois fatores de natureza muito diversa passam a determinar a urgência em se repensar as diretrizes gerais e os parâmetros curriculares que orientam esse nível de ensino.

Nas décadas de 60 e 70, considerando o nível de desenvolvimento da industrialização na América Latina, a política educacional vigente no Brasil priorizou como finalidade para o Ensino Médio a formação de especialistas capazes de dominar a utilização de maquinarias ou de dirigir processos de produção. Esta tendência levou o Brasil, na década de 70, a propor a profissionalização compulsória.

Na década de 90, enfrentamos um desafio de outra ordem. O volume de informações, produzido em decorrência das novas tecnologias, é constantemente superado, colocando novos parâmetros para a formação dos cidadãos. Não se trata de acumular conhecimentos.

Hoje, a formação do aluno deve ter como alvo principal a aquisição de conhecimentos básicos, a preparação científica e a capacidade de utilizar as diferentes tecnologias relativas às áreas de atuação. Propõe-se no nível do Ensino Médio, a formação geral, em oposição à formação específica; o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização.

1.3 - A Física no Ensino Médio

A presença do conhecimento de Física na escola média ganhou um novo sentido a partir das diretrizes apresentadas nos PCNEM. Nesta etapa da formação dos estudantes, a Física deve apresentar-se como um conjunto de competências específicas que

permitam perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos, presentes tanto no cotidiano mais imediato quanto na compreensão do universo distante, a partir de princípios, leis e modelos por ela construídos. Isso implica, também, a introdução à linguagem própria da Física, que faz uso de conceitos e terminologia bem definidos, além de suas formas de expressão que envolvem, muitas vezes, tabelas, gráficos ou relações matemáticas.

No entanto, as competências para lidar com o mundo físico não têm qualquer significado quando trabalhadas de forma isolada. Competências em Física para a vida se constroem em um presente contextualizado, em articulação com competências de outras áreas, impregnadas de outros conhecimentos. Elas passam a ganhar sentido somente quando colocadas lado a lado, e de forma integrada, com as demais competências desejadas para a realidade dos alunos.

O vasto conhecimento de Física não pode estar todo presente no Ensino Médio. Será sempre necessário fazer escolhas em relação ao que é mais importante ou fundamental para se atingir os objetivos desejados em uma estratégia pedagógica.

Tradicionalmente, a seleção dos temas a serem abordados no ensino de Física tem sido feita em termos de conceitos considerados centrais em áreas de fenômenos de natureza física diferentes, delimitando os conteúdos de Mecânica, Termologia, Ótica e Eletromagnetismo. Nesta proposta, os critérios de seleção para definir os conteúdos a serem trabalhados restringem-se ao conhecimento e à estrutura da Física, sem levar em consideração o sentido mais amplo da formação desejada.

Esse sentido emerge na medida em que o conhecimento de Física deixa de constituir um objetivo em si mesmo, mas passa a ser compreendido como um instrumento para a compreensão do mundo. Nessa perspectiva, o conhecimento de Física passa a ser, para os estudantes, uma ferramenta a mais em suas formas de agir e pensar.

Os critérios que orientam a ação pedagógica deixam, portanto, de tomar como referência primeira “o que ensinar de Física”, passando a centrar-se em “para que ensinar Física”, explicitando a preocupação em atribuir ao conhecimento um significado no momento mesmo de seu aprendizado.

Esse objetivo mais amplo requer, sobretudo, que os jovens adquiram competências para lidar com as situações que vivenciam ou que venham vivenciar no futuro. Nada mais natural, portanto, que substituir a preocupação central com os conteúdos por uma identificação das competências que, se imagina, eles terão necessidade de adquirir em seu processo de escolaridade Média.

Mas como identificar as competências desejadas? A resposta para esta pergunta passa a ser o problema central quando se pensa na formulação dos conteúdos. Caberá sempre ao professor, dentro das condições específicas nas quais desenvolve seu trabalho, em função do perfil de sua escola e do projeto pedagógico em andamento, selecionar, priorizar, redefinir e organizar os objetivos em torno dos quais faz mais sentido trabalhar.

1.4 - A Mecânica no Ensino Médio

A Física, no início de seu desenvolvimento, era considerada a ciência que se dedicava a estudar todos os fenômenos que ocorrem na natureza. A palavra Física provém da palavra grega *φύσις*, que significa *natureza*. Daí ter sido esta ciência, durante muitos anos, denominada “Filosofia Natural”. Entretanto, a partir do século XIX, a Física restringiu seu campo, limitando-se a estudar profundamente um menor número de fenômenos, denominados “fenômenos físicos” (fenômenos mecânicos, térmicos, elétrico e luminosos) , e os fenômenos que dela se destacaram deram origem a outras ciências naturais.

No início do desenvolvimento das ciências, os nossos sentidos eram as fontes de informação utilizadas na observação dos fenômenos que ocorrem na natureza. Por isso mesmo o estudo da Física foi se desenvolvendo, subdividindo-se em diversos ramos, cada um deles agrupando fenômenos relacionados com o sentido pelo qual eles eram percebidos. Então surgiram: A Mecânica, o Calor, os Movimentos Ondulatórios, a Ótica, a Eletricidade, o Magnetismo e a Física Moderna.

A Mecânica, que é o que de fato nos interessa neste trabalho, é o ramo da Física

que estuda os fenômenos relacionados com o movimento dos corpos. Assim, estamos tratando com fenômenos mecânicos quando estudamos o movimento de queda de um corpo, o movimento dos planetas, a colisão de dois automóveis, etc.

No Ensino Médio, o estudo da Mecânica é dividido em duas etapas: o estudo da Cinemática e o estudo da Dinâmica. Ao estudar Cinemática, o objetivo é descrever os movimentos dos corpos, sem a preocupação de entender suas causas. Assim, tornam-se essenciais as definições de grandezas físicas como velocidade e aceleração. Já no estudo da Dinâmica, o objetivo pretendido é estudar as causas dos movimentos dos corpos. Para isso, são estudadas as “Leis do Movimento” e suas aplicações.

Os primeiros movimentos estudados na Cinemática são os movimentos retilíneos uniforme e uniformemente variado, ambos em uma dimensão. Como já foi mencionado, nesta etapa é necessária a introdução dos conceitos de velocidade e aceleração. Os livros de texto frequentemente adotados nos cursos de Física no Ensino Médio geralmente valem-se de exemplos, presentes no cotidiano dos alunos, para introduzir o conceito de velocidade. Por exemplo, considerando que um carro que se desloca em linha reta em uma estrada percorre um espaço s durante um intervalo de tempo t , a velocidade média do carro é definida por meio de

$$v_{méd} = \frac{s}{t}. \quad (1)$$

Esta definição de velocidade, que é muito utilizada na resolução de problemas de movimento no Ensino Médio, limita o estudo de diferentes tipos movimentos. Se sabemos que a velocidade média de um corpo é de 80 km/h, não sabemos a direção e o sentido do seu movimento e mesmo supondo que seu movimento seja retilíneo não poderíamos determinar sua posição final. Os exemplos abaixo ilustram essas falhas.

Exemplo 1: Uma partícula percorre 20,0 m em 2,0 s para leste e uma segunda partícula percorre 20,0 m em 2,0 s para o norte. Os movimentos ocorrem em direções distintas mas nos dois casos as velocidades definidas por (1) são iguais a

$$v_{méd} = \frac{20,0 m}{2,0 s} = 10 m/s.$$

A figura 1.1 ilustra este exemplo.

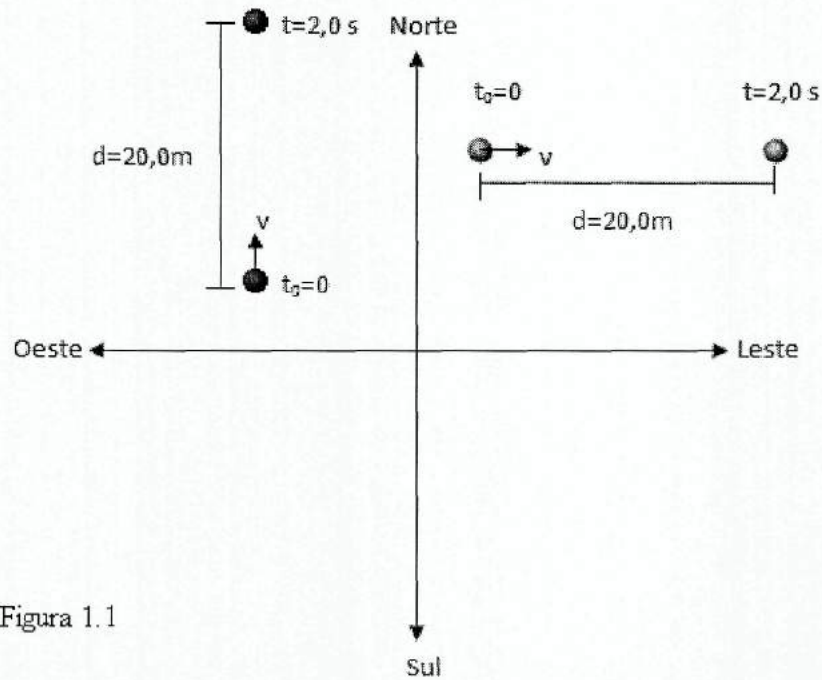


Figura 1.1

Exemplo 2: Neste exemplo vamos considerar uma partícula que cai verticalmente de uma altura h e outra que é lançada verticalmente para cima e alcança a mesma altura h . Se as duas partículas percorrem o mesmo espaço $s = h$ no mesmo intervalo de tempo, então as duas partículas têm a mesma velocidade média, a despeito de os movimentos das duas partículas serem diferentes. A figura 1.2 representa esta situação.

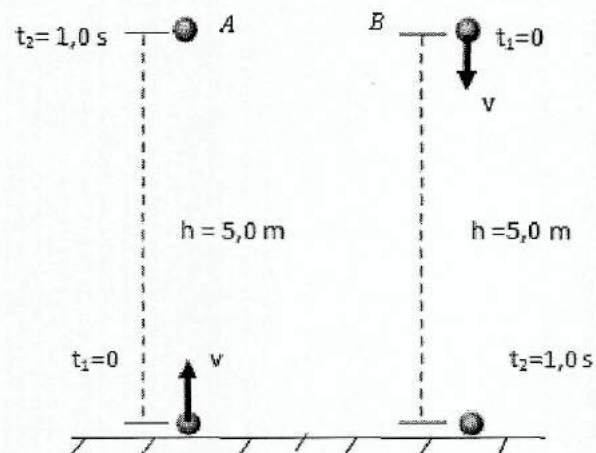


Figura 1.2

A velocidade média da partícula A ($v_{(A)méd}$) vale

$$v_{(A)méd} = \frac{h}{t} = \frac{5,0 \text{ m}}{1,0 \text{ s}} = 5,0 \text{ m/s},$$

e a velocidade média da partícula B ($v_{(B)méd}$) vale

$$v_{(B)méd} = \frac{h}{t} = \frac{5,0 \text{ m}}{1,0 \text{ s}} = 5,0 \text{ m/s}.$$

Exemplo 3: Neste exemplo, considere a situação mostrada na figura 1.3.

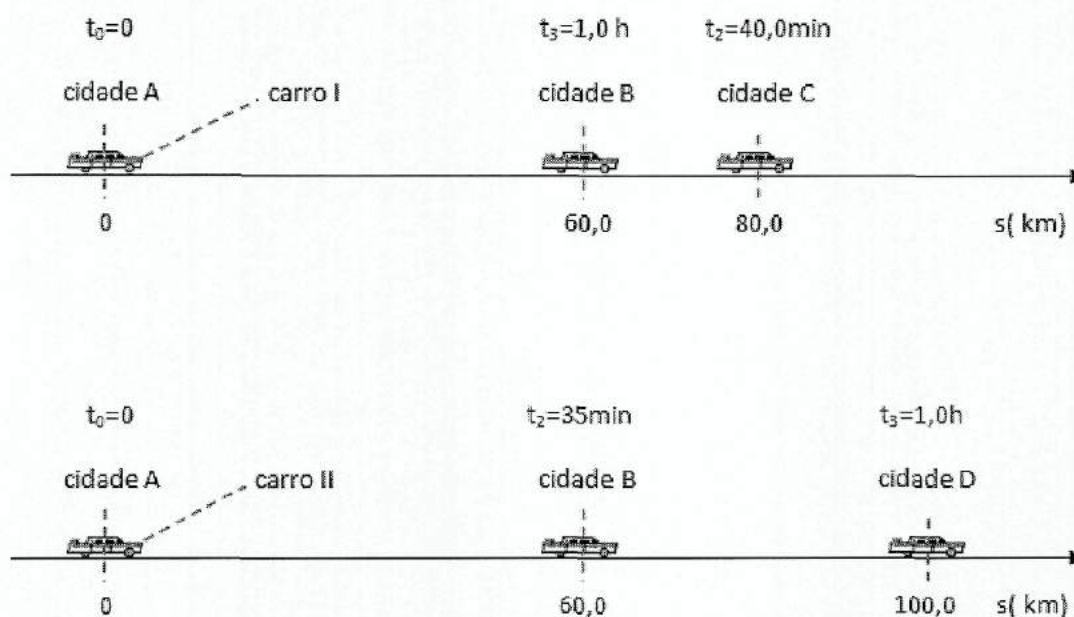


Figura 1.3

Chamemos de carro I, um carro que parte da cidade A e segue em linha reta até chegar em uma cidade C, percorrendo $80,0\text{ km}$ em $40,0\text{ min}$. Em seguida o carro I parte da cidade C e vai até a cidade B, percorrendo $20,0\text{ km}$ em $20,0\text{ min}$. Então, de acordo com a equação (1), a velocidade média do carro I na viagem vale

$$v_{I(\text{méd})} = \frac{80,0\text{ km} + 20,0\text{ km}}{40,0\text{ min} + 20,0\text{ min}} = 1,0 \times 10^2\text{ km/h.}$$

Agora consideremos um outro carro, chamemos de carro II, que parte da cidade A no mesmo instante que o carro I. O carro II, seguindo sempre em linha reta, vai até uma cidade D, percorrendo $100,0\text{ km}$ em uma hora. Portanto, a velocidade média do carro II vale

$$v_{II(\text{méd})} = \frac{100,0\text{ km}}{1,0\text{ h}} = 1,0 \times 10^2\text{ km/h.}$$

Então, podemos perceber que as velocidades média dos dois carros são iguais, apesar de os dois carros se movimentarem de formas diferentes. Novamente, conhecer o valor das velocidades médias dos carros I e II não nos permite diferenciar suas trajetórias.

O objetivo desta discussão não é simplesmente apontar imperfeições conceituais

na definição de velocidade média encontrado em livros de Física destinados ao Ensino Médio. O objetivo é chamar a atenção para as limitações que esta definição nos impõe e simultaneamente apresentar definições que incorporem as noções de direção e sentido à velocidade.

Permita-nos escrever a partir de agora a velocidade média de uma partícula em termos de coordenadas cartesianas. Para descrever um movimento, precisamos em primeiro lugar de um referencial, que, no caso unidimensional, é simplesmente uma reta orientada, em que se escolhe a origem 0. A posição de uma partícula em movimento no instante t é descrita pela abscissa correspondente $x(t)$. Consideremos uma partícula que se desloca em linha reta e que no instante t_1 situa-se na posição $x(t_1) = x_1$ e no instante t_2 ocupa a posição $x(t_2) = x_2$, como representado na figura 1.4.

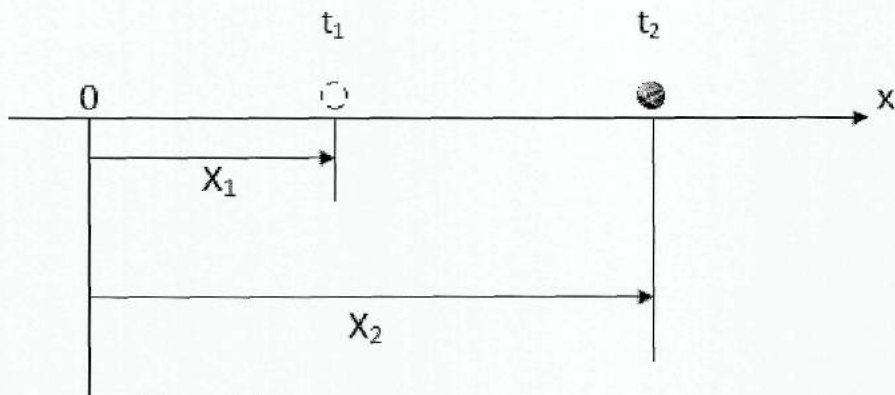


Figura 1.4

Então, podemos definir a velocidade escalar média da partícula como:

$$v_{méd} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2)$$

Comparando essa definição de velocidade com aquela dada pela equação (1), vemos que a principal diferença está no fato de considerarmos o deslocamento Δx e não o espaço percorrido pela partícula. Desse modo, a velocidade dada pela equação (2) pode ser positiva (quando x_2 for maior que x_1) ou negativa (quando x_2 for menor que x_1), o que

não ocorre com a definição dada pela equação (1), que torna a velocidade uma grandeza não algébrica, ou seja, sempre positiva.

Se construirmos um gráfico $x(t)$ vs. t , a velocidade escalar média será a inclinação da reta que une os pontos (x_1, t_1) e (x_2, t_2) . Observe a figura 1.5.

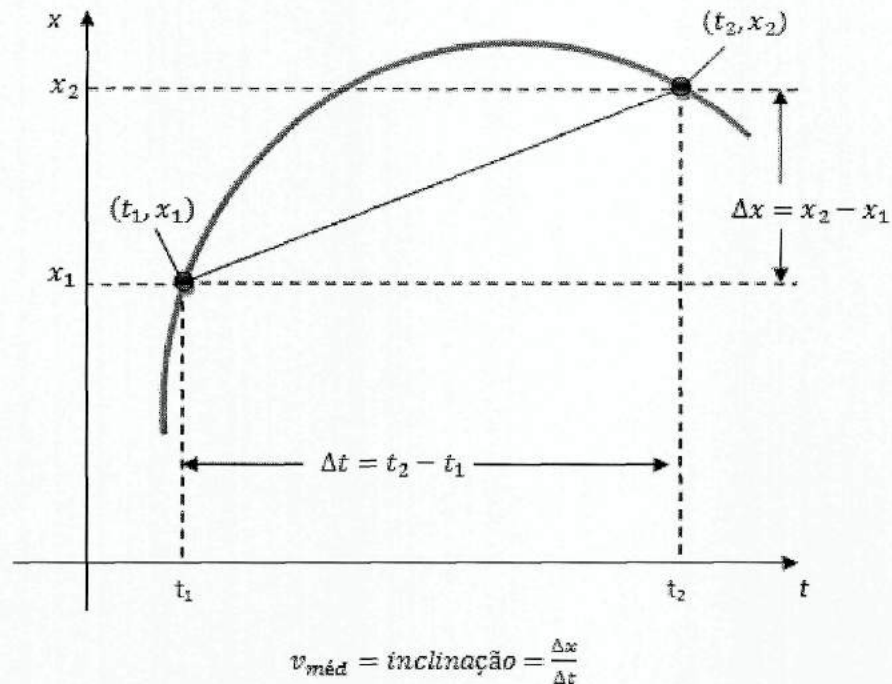


Figura 1.5 - Representação gráfica da velocidade média no intervalo de tempo Δt

Mas qual a velocidade em t_1 ? Ou seja, qual é a velocidade instantânea no instante $t = t_1$. Observando a figura 1.6, que é o gráfico $x(t)$ vs. t do movimento de uma partícula, podemos constatar que quanto consideramos intervalos de tempo sucessivamente menores, começando em t_1 , a velocidade média para o intervalo se aproxima da inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (t_1, x_1) .

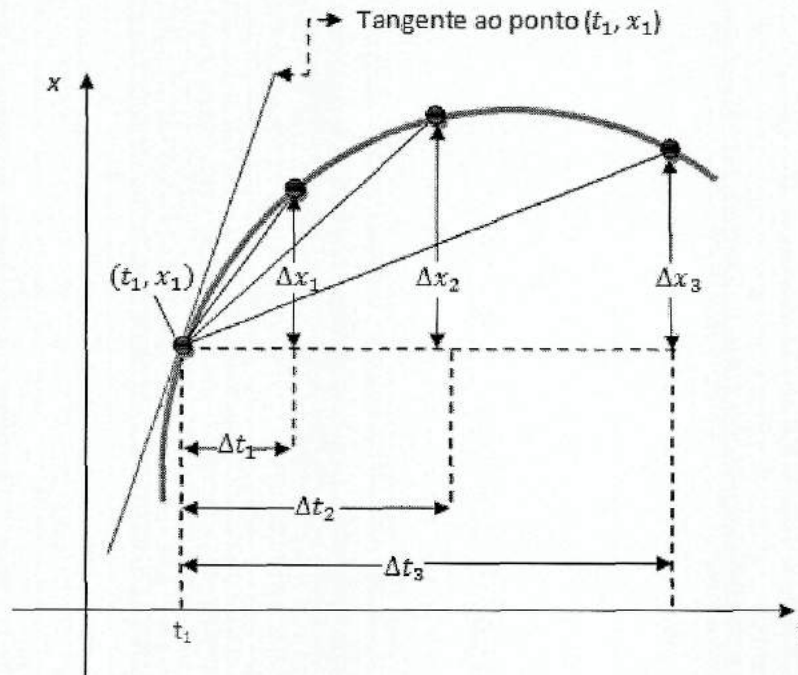


Figura 1.6 - Representação gráfica da velocidade instantânea em um instante.

Portanto, a velocidade instantânea em t_1 é definida como a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (t_1, x_1) . Em outras palavras, a velocidade instantânea é um caso limite da velocidade média, que surge quando consideramos intervalos de tempo muito pequenos. Além da discussão acerca da representação gráfica da velocidade instantânea, podemos ir além na abordagem deste conceito usando um exemplo comum no Ensino Médio. Consideremos o problema de movimento de um corpo que cai em queda livre. A equação horária do movimento da partícula que parte do repouso é dada por

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 = -5t^2, \quad (3)$$

onde consideramos $g = 10 \text{ m/s}^2$. Se usarmos a expressão (3) para calcularmos as posições e em seguida usarmos os resultados, poderemos obter a velocidade escalar média entre os instantes considerados. Vamos considerar a notação $v_{\text{méd}} = \bar{v}$. Vamos ao trabalho:

$$\bar{v}_{1,0 \rightarrow 1,1} = \frac{x(1,1) + x(1,0)}{\Delta t} = \frac{-5(1,1)^2 + 5(1,0)^2}{1,1 - 1,0} = -10,5 \text{ m/s},$$

onde usamos $\Delta t = 0,1$ s. Agora vamos fazer o mesmo procedimento para intervalos de tempo ainda menores:

$$\bar{v}_{1,00 \rightarrow 1,01} = \frac{-x(1,01) + x(1,00)}{1,01 - 1,00} = -10,05 \text{ m/s},$$

$$\bar{v}_{1,000 \rightarrow 1,001} = \frac{-x(1,001) + x(1,000)}{1,001 - 1,000} = -10,005 \text{ m/s}.$$

Continuando para um intervalo de tempo arbitrário Δt , temos

$$\begin{aligned} \bar{v}_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{-5(t+\Delta t)^2 + 5t^2}{\Delta t}, \\ \bar{v}_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{-5(t^2 + \Delta t^2 + 2t\Delta t) + 5t^2}{\Delta t}, \\ \bar{v}_{t \rightarrow t+\Delta t} &= \frac{-5t^2 - 5\Delta t^2 - 10t\Delta t + 5t^2}{\Delta t} = -5\Delta t - 10t. \end{aligned} \quad (4)$$

Se considerarmos intervalos de tempo cada vez menores de modo que possamos considerar $\Delta t \approx 0$, podemos escrever a relação (4) da seguinte forma

$$v(t) = -10t \Rightarrow v(1,0) = -10 \text{ m/s}, \quad (5)$$

que é a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 1,0$ s.

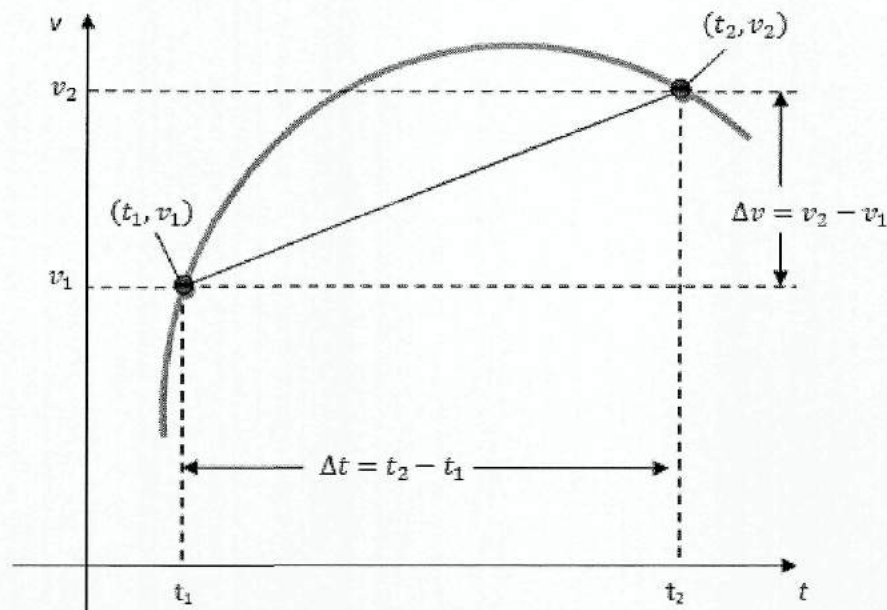
O conceito de velocidade instantânea é de fundamental importância no estudo da Mecânica. Entretanto, podemos observar que este conceito é tratado forçosamente de maneira muito superficial no Ensino Médio. Esta superficialidade se deve a dificuldades como, por exemplo, a ausência de noção sobre limite por parte dos estudantes deste nível de ensino.

A aceleração escalar média é definida como a variação da velocidade de um corpo em um determinado intervalo de tempo. Assim, se um corpo tem velocidade $v(t_1) = v_1$ em um instante t_1 e velocidade $v(t_2) = v_2$ em um instante t_2 , a expressão matemática

para a aceleração do corpo no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Leftrightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (6)$$

Se construirmos um gráfico $v(t)$ vs. t , a aceleração escalar média será a inclinação da reta que une os pontos (v_1, t_1) e (v_2, t_2) . Observe a figura 1.7.



$$a_{méd} = \text{inclinação} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Figura 1.7 - Representação gráfica da aceleração média em um intervalo Δt .

Devemos notar que os valores das velocidades na expressão (6) são os valores das velocidades instantâneas do corpo nos instantes mencionados. Neste momento, já podemos perceber a importância do conceito de velocidade instantânea. O conceito de aceleração é fundamental para a definição de força, conceito fundamental que está presente na segunda lei de Newton.

Em uma dimensão, a forma matemática da segunda lei de Newton é dada por

$$F = ma,$$

onde F é a resultante da soma algébrica de todas as forças, cuja direção é a mesma do

movimento, que age sobre um corpo que adquire uma aceleração instantânea a . O conceito de aceleração instantânea raramente é tratado nos livros de Física do Ensino Médio. Por isso a maior parte dos problemas de Mecânica estudados são aqueles que envolvem aceleração nula ou constante, para os quais a aceleração escalar média é igual a aceleração instantânea em qualquer instante. A representação gráfica do conceito de aceleração instantânea é semelhante a da velocidade instantânea. A figura 1.8 é a representação gráfica das velocidades de uma partícula em função do tempo.

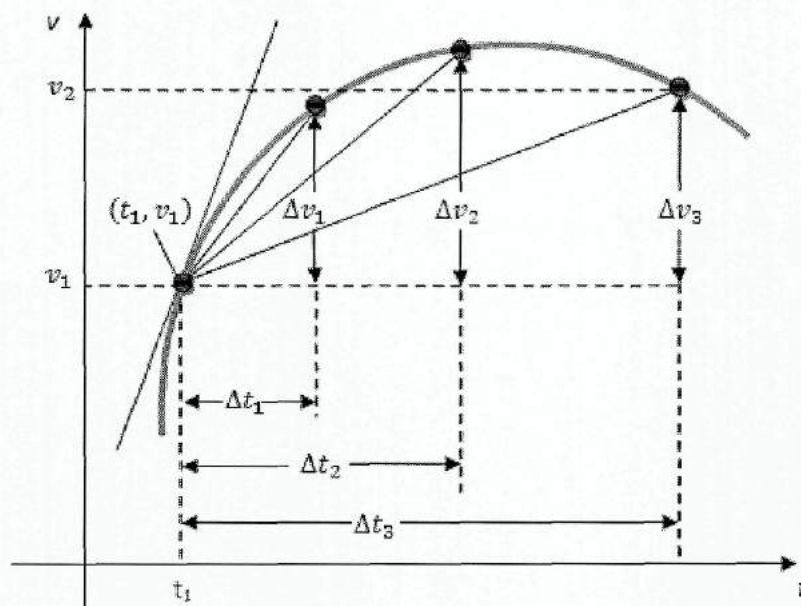


Figura 1.8 - Representação gráfica da aceleração instantânea em um instante.

A medida que consideramos intervalos de tempo sucessivamente menores, a partir de t_1 , a inclinação da reta correspondente ao intervalo se aproxima da inclinação da reta tangente a curva no ponto (t_1, v_1) . Portanto, a aceleração instantânea em t_1 é definida como a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (t_1, v_1) . Em outras palavras, a aceleração instantânea é um caso limite da aceleração média, que surge quando consideramos intervalos de tempo muito pequenos. A semelhança nas definições de velocidade e aceleração instantâneas se deve ao fato de ambas serem taxas de variação temporal. Ou seja, a velocidade instantânea é uma taxa de variação da posição em

relação ao tempo e a aceleração instantânea é uma taxa de variação da velocidade em relação ao tempo.

Se uma partícula se desloca em linha reta a partir de uma posição $x(t_0) = x_0$ com velocidade constante, podemos calcular sua posição em qualquer instante aplicando a expressão (2):

$$v_{méd} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} \Leftrightarrow x(t) = x_0 + v(t - t_0), \quad (7)$$

onde a velocidade tem o mesmo valor em todos os instantes. A equação (7) é uma equação linear e sua representação gráfica no plano $x(t)$ vs. t é uma reta, cuja inclinação é igual ao valor da velocidade. Observa a figura 1.9.

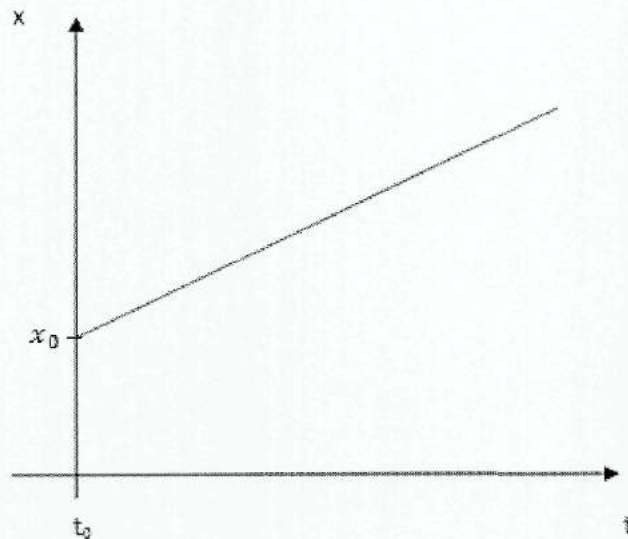


Figura 1.9

A representação gráfica da velocidade em função do tempo está representada na figura 1.10.

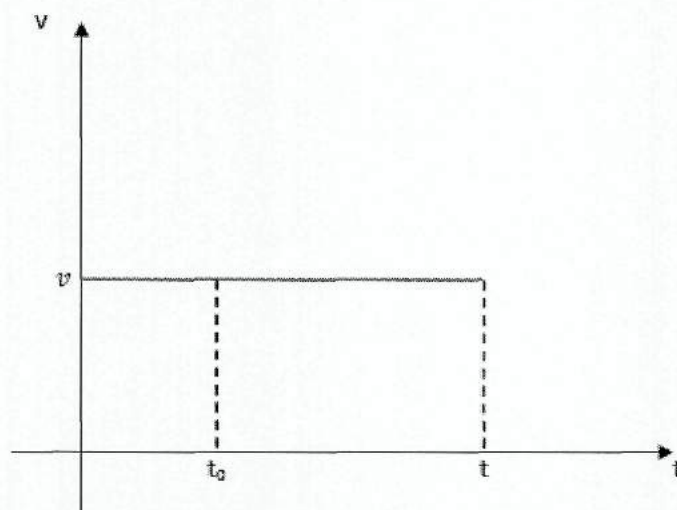


Figura 1.10

Neste momento consideramos oportuno chamar a atenção dos alunos para um aspecto interessante: o deslocamento da partícula é numericamente igual à área sob o gráfico da velocidade no intervalo de tempo considerado. De acordo com a equação (2), o deslocamento total é dado por

$$\Delta x = v_{méd}(t - t_0) \Leftrightarrow \Delta x = v(t - t_0),$$

que é equivalente a calcular a área do retângulo de lados $t - t_0$ e v . Podemos generalizar essa idéia considerando o gráfico das velocidades de uma partícula cujo movimento não seja uniforme. Observe a figura 1.11.

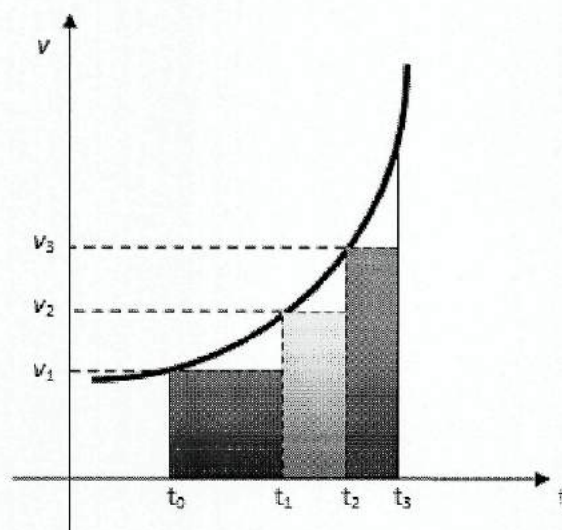


Figura 1.11

Na figura 1.11, a área sob o gráfico da velocidade em função do tempo, limitada pelo intervalo de tempo $\Delta t = t_3 - t_0$, está dividida em três retângulos coloridos, cujas áreas correspondem a maior parte da área sob o gráfico, e em uma área não preenchida, que corresponde a menor parte da área sob o gráfico. A área de cada retângulo é numericamente igual ao produto entre a velocidade e o intervalo de tempo correspondente ao retângulo. Ou seja, a área de cada retângulo equivale ao deslocamento no intervalo de tempo correspondente. Ao somarmos as áreas dos retângulos estaremos calculando o deslocamento aproximado no intervalo de tempo que limita a área total sob a curva. Assim, se somarmos as áreas vermelha, amarela e verde da figura 1.11, estaremos calculando o deslocamento aproximado no intervalo de tempo $\Delta t = t_3 - t_0$. Esta aproximação tende para um valor exato a medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores. Se observarmos a figura 1.12, podemos concluir que a medida que consideramos intervalos de tempo cada vez menores, a área sob o gráfico da velocidade em função do tempo vai sendo preenchida por retângulos cujas áreas equivalem ao deslocamento no intervalo de tempo considerado.

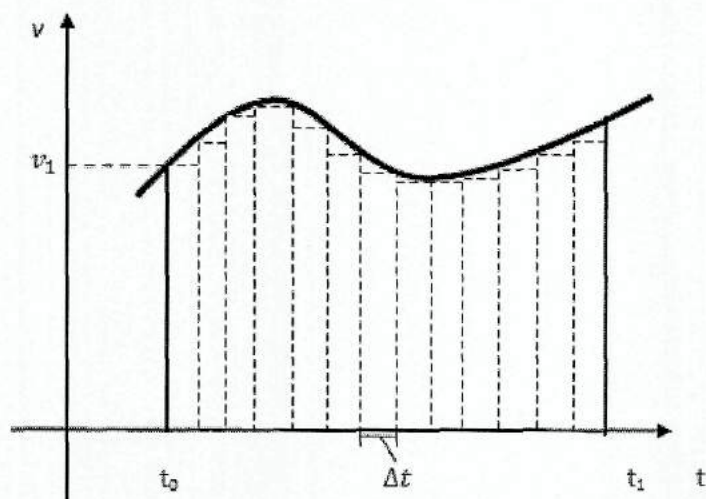


Figura 1.12

Considere agora uma partícula que se encontra em movimento retilíneo uniformemente variado com aceleração a . No instante t_0 , a partícula tem velocidade v_0 e no instante t_f tem velocidade v_f . O gráfico da velocidade em função do tempo será

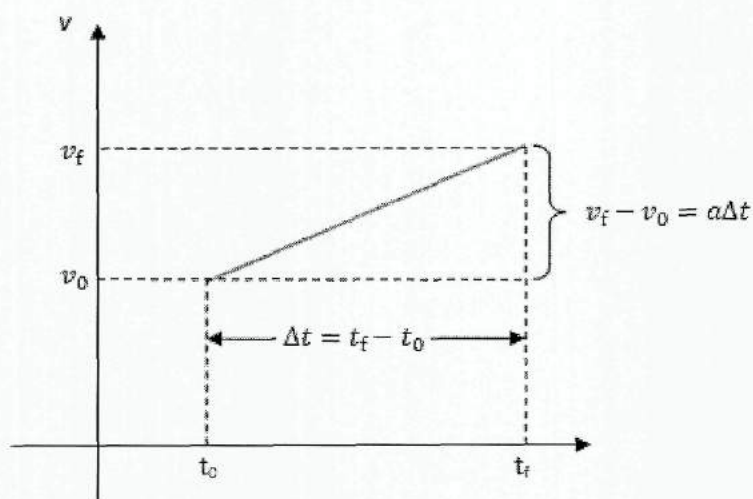


Figura 1.13 - Gráfico das velocidades de um corpo em movimento uniformemente variado.

A área sob o gráfico é igual a área de um trapézio, cuja a base maior é igual a $(v_0 + a\Delta t)$, a base menor é igual a v_0 e a altura é igual $a\Delta t$.

$$\text{Área do trapézio} = \frac{(v_0 + v_f)\Delta t}{2}.$$

Como a área sob o gráfico é igual ao deslocamento da partícula no intervalo Δt , podemos escrever, de acordo com a equação (2),

$$v_{méd} = \frac{(v_0 + v_f)\Delta t}{2\Delta t} \Leftrightarrow v_{méd} = \frac{v_0 + v_f}{2}. \quad (8)$$

A equação (8) é válida apenas para movimentos uniformemente variados. Podemos ainda estabelecer as relações que nos permitem calcular as velocidades e as posições da partícula para qualquer instante. De acordo com a equação (6), temos

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} \Leftrightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0). \quad (9)$$

Olhando para o gráfico representado na figura 1.13 e aplicando as equações (2) e (8), temos

$$v_{méd} = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = \frac{v_0 + v_0 + a(t - t_0)}{2}$$

e

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2, \quad (10)$$

onde x_0 e v_0 são, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula no instante t_0 .

Até o presente momento de nossa abordagem tratamos apenas de movimentos unidimensionais. Para o estudo de movimentos em mais de uma dimensão necessitamos introduzir o conceito de vetor, pois os deslocamentos espaciais são vetoriais e, portanto, a velocidade e a aceleração também são grandezas físicas vetoriais. Vamos nos restringir ao estudo de movimentos em duas dimensões.

Quando uma partícula se movimenta, seu deslocamento tem não apenas uma direção no espaço, mas também uma magnitude. A grandeza que fornece a distância em linha reta entre dois pontos do espaço, bem como sua orientação, é um segmento de reta chamado vetor deslocamento. Ele é representado graficamente por uma seta cuja orientação é a mesma do vetor deslocamento e cujo comprimento é proporcional à magnitude desse vetor.

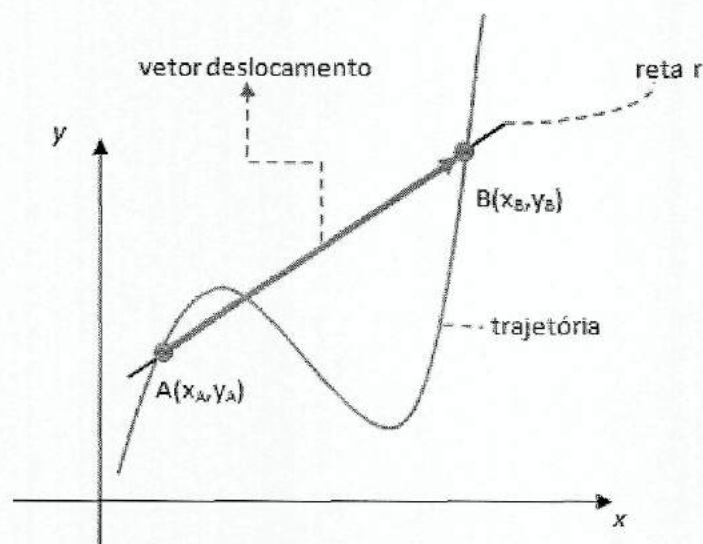


Figura 1.14 - Representação gráfica do vetor deslocamento

Na figura 1.14, uma partícula descreve a trajetória representada. Em um instante qualquer ela se encontra no ponto A e em outro instante se encontra no ponto B. O vetor deslocamento da partícula é representado graficamente pela seta que tem a mesma direção da reta r , que une os pontos A e B, e que tem magnitude (ou módulo) igual ao comprimento da seta. Além da direção e do módulo, o vetor deslocamento sempre indica um sentido para o movimento que, no caso da figura 1.14, é o sentido que vai de A para B.

O vetor posição de uma partícula é um vetor desenhado da origem de um sistema de coordenadas até a posição da partícula. Para uma partícula no ponto (x, y) , o vetor posição \vec{r} é

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j},$$

onde \vec{i} e \vec{j} são vetores unitários, cujos módulos são iguais a um. A direção e o sentido do vetor unitário \vec{i} são a direção e o sentido positivo da reta dos x , respectivamente. A direção e o sentido do vetor unitário \vec{j} são a direção e o sentido positivo da reta dos y , respectivamente. A figura 1.15 mostra a trajetória de uma partícula. No instante t_1 a partícula está em P_1 , com vetor posição \vec{r}_1 ; em t_2 , a partícula move-se para P_2 , com vetor posição \vec{r}_2 . A variação na posição da partícula é o vetor deslocamento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

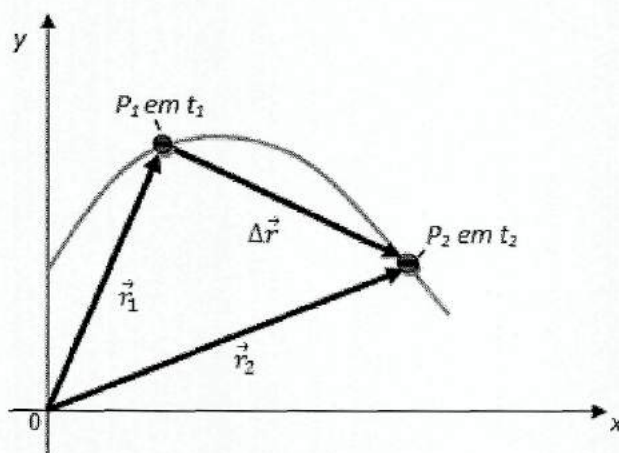


Figura 1.15

A razão entre o vetor deslocamento e o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é o vetor velocidade média:

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (11)$$

Esse vetor possui a mesma orientação do vetor deslocamento. Observe que o módulo do vetor deslocamento é menor do que a distância percorrida ao longo da curva, a menos que a partícula esteja se movendo em linha reta. Entretanto, ao se considerar intervalos de tempo cada vez menores, o módulo do deslocamento tende a ser igual à distância percorrida ao longo da curva, e sua direção tende a ficar tangente a curva no início do intervalo. Observe a figura 1.16.

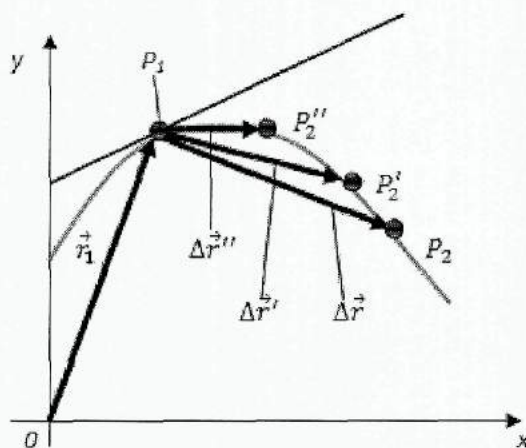


Figura 1.16

A direção da reta tangente à curva em P_1 coincide, por definição, com a direção do vetor velocidade instantânea. O vetor aceleração média é definida como a razão entre a variação do vetor velocidade instantânea $\Delta\vec{v}$ e o intervalo de tempo correspondente a esta variação:

$$\vec{a}_{méd} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (12)$$

Da mesma forma que o vetor velocidade instantânea é um limite para o vetor velocidade média, o vetor aceleração instantânea é o limite do vetor aceleração média, que surge a medida que tomamos intervalos de tempo sucessivamente menores.

O estudo da Dinâmica, no Ensino Médio, tem como assunto central o estudo e as aplicações das “Leis do Movimento”, como são chamadas as três leis básicas da Mecânica, formuladas pelo famoso físico e matemático Isaac Newton em sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687.

Ao estudar os princípios da Mecânica, Newton se baseou em estudos de grandes físicos que o precederam, entre eles Galileu. A *primeira lei de Newton* nada mais é do que uma síntese das idéias de Galileu relativas à inércia e, por isso, também é denominada *lei da inércia de Galileu*.

Primeira lei de Newton (Lei da inércia de Galileu):

Existe um sistema de referência, denominado referencial inercial, em relação ao qual todos os corpos livres estão em repouso ou movem-se em linha reta com velocidade constante.

A segunda lei de Newton é uma das leis básicas da Mecânica, sendo utilizada na análise dos movimentos que observamos próximos à superfície da Terra e no estudo dos movimentos dos corpos celestes. O próprio Newton a aplicou ao desenvolver seus estudos dos movimentos dos planetas, e o grande sucesso alcançado constituiu uma das primeiras confirmações desta lei.

Segunda lei de Newton:

Em relação a um referencial inercial, a aceleração que um corpo adquire é diretamente proporcional à resultante das forças que atuam sobre ele e tem a mesma direção e o mesmo sentido desta resultante. A constante de proporcionalidade é denominada de massa inercial do corpo ou, simplesmente, massa.

A forma matemática da segunda lei de Newton é

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad (13)$$

onde \vec{F} é o vetor força, que resulta da soma vetorial de todas as forças que agem no corpo de massa m e \vec{a} é o vetor aceleração instantânea que o corpo adquire. O conceito de aceleração instantânea raramente é mencionado nos livros de Física destinados ao Ensino Médio. Por isso os problemas de movimento resolvidos aplicando-se a segunda lei de Newton são muito simples e idealizados. Como já foi mencionado, estes problemas restringem-se a acelerações nulas ou constantes. Acreditamos que esse tratamento dado à Mecânica cria dificuldades conceituais e lógicas e impossibilita a resolução de vários problemas da Mecânica que têm ampla visibilidade na experiência diária dos alunos.

Em seus estudos de Mecânica, Newton percebeu que as forças sempre aparecem como resultado da interação de dois corpos. Além disso, Newton constatou que, na interação de dois corpos, as forças sempre aparecem aos pares: para cada ação de um corpo sobre o outro, existirá sempre uma reação igual e contrária deste outro corpo sobre o primeiro.

Terceira lei de Newton:

Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B, o corpo B reage sobre A com uma força de mesmo módulo, mesma direção e de sentido contrário.

Nesta seção nosso objetivo é mostrar, de forma resumida, como está estruturada a

Mecânica no Ensino Médio. Entretanto, gostaríamos de nos restringir daqui para frente ao que de fato nos interessa para este trabalho. O que almejamos é propor o método da discretização de funções como ferramenta para solucionar problemas de movimento que não são estudados na Mecânica no Ensino Médio, devido às complicações conceituais e matemáticas oferecidas por estes problemas. Diante desta configuração, consideramos importante comentar sobre problemas de movimento que são resolvidos e os que não são resolvidos no contexto do Ensino Médio atual.

Quando um corpo cai livremente sob a ação de seu próprio peso, dizemos que este corpo está em queda livre e seu movimento é retilíneo e uniformemente variado, com $a = -g$, onde g é a letra usada para representar a aceleração da gravidade. Portanto, o problema de movimento de qualquer corpo em queda livre estará resolvido se forem dadas as condições iniciais do problema, $y(t_0) = y_0$ e $v(t_0) = v_0$. A solução será dada pela relação (10), com $y(t)$ representando a posição do corpo no instante t , $a = -g$ e $t_0 = 0$. Portanto, temos:

$$y(t) = y_0 + v_0t - \frac{gt^2}{2}. \quad (14)$$

A velocidade e a aceleração são grandezas vetoriais. Entretanto, na análise de movimentos retilíneos a notação vetorial muitas das vezes é omitida. Já nas análises de movimentos não retilíneos é necessário que os alunos estejam familiarizados tanto com a notação quanto com as operações vetoriais. É o que ocorre com a análise de movimentos oblíquos, nos quais é conveniente substituir o vetor posição do corpo lançado pelas suas componentes cartesianas. Observe a figura 1.17, na qual estão representados os parâmetros relevantes para o estudo deste tipo de movimento pelos estudantes do Ensino Médio.

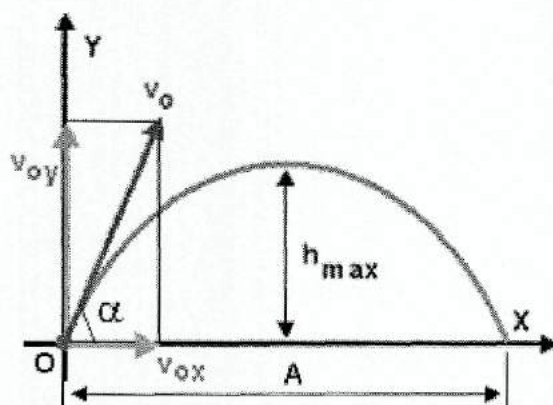


Figura 1.17 - Trajetória de um projétil. O alcance está representado por A e o ponto mais alto da trajetória tem ordenada $y = h$.

Em qualquer ponto da trajetória parabólica o corpo sofre a ação da força peso, exercida pela Terra sobre o corpo. Portanto, o corpo tem uma aceleração de módulo igual a g , na direção vertical e cujo sentido é o sentido negativo do eixo dos y . Logo, no espaço conclui-se que a componente x da posição varia uniformemente no tempo e que a componente y varia parabolicamente. Vamos escrever matematicamente estes conceitos aplicando as equações (7) e (10):

$$x(t) = x_0 + v_{0x}(t - t_0), \quad (15)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2}. \quad (16)$$

Se considerarmos $x_0 = y_0 = t_0 = 0$ e substituirmos o vetor velocidade inicial do corpo por suas componentes cartesianas, teremos

$$x(t) = (v_0 \cos \alpha) t \quad (17)$$

e

$$y(t) = (v_0 \sin \alpha) t - \frac{gt^2}{2}. \quad (18)$$

Com as equações (17) e (18), que substituem satisfatoriamente a álgebra vetorial em função do tempo, o problema de movimento do corpo lançado de forma oblíqua está

resolvido. Entretanto, gostaria de chamar a atenção neste momento com uma pergunta: Podemos, ao mesmo tempo, contextualizar problemas deste tipo e resolvê-los com estas equações?

É óbvio que se observarmos a trajetória real de uma bola de futebol, após um chute de um jogador, e conhecermos o módulo do vetor velocidade inicial e a inclinação que ele faz com o plano do campo, o alcance A da bola não será dado por

$$A = (v_0 \cos \alpha) t_A, \quad (19)$$

onde t_A é o tempo que a bola leva para atingir o campo novamente. Isto ocorre porque não se considera a ação do ar sobre a bola durante sua trajetória. Da mesma forma, os movimentos dos planetas não são estudados de forma consistente no nível médio, ou seja, a partir das leis de Newton. As trajetórias dos planetas são sempre definidas de acordo com as leis de Kepler, mas quando abordados matematicamente são tratadas não como trajetórias elípticas e sim como trajetórias circulares. Nesta etapa, em geral, são apresentadas sem justificativas relações matemáticas que muitas vezes são encaradas de forma desesperadora pelos alunos. Nestas relações estão envolvidas grandezas como período, velocidade angular e raios de órbitas.

No estudo do movimento harmônico simples, o único movimento harmônico estudado no Ensino Médio, novamente não se resolve o problema de movimento. As expressões envolvendo o período, a velocidade, a frequência e a frequência angular são apresentadas aos alunos e cobra-se que sejam decoradas.

Outros temas fundamentais na mecânica do Ensino Médio são o conceito de quantidade de movimento (ou momento linear) e o de energia. A quantidade de movimento ou momento linear de uma partícula de massa m é dado pelo produto entre a massa e o vetor velocidade instantânea \vec{v} da partícula, $\vec{p} = m\vec{v}$. Para um sistema formado por n partículas, o momento linear do sistema é dado pela soma vetorial dos momentos lineares de cada partícula que constitui o sistema. A expressão matemática para esta definição é:

$$\left(\vec{P}\right)_{sis} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n. \quad (20)$$

Um dos princípios mais importantes da Física, que já é estudado no nível médio, é o da conservação da quantidade de movimento.

Conservação da quantidade de movimento:

Se a força externa resultante atuando sobre um sistema permanece nula, a quantidade de movimento total do sistema relativamente a um sistema inercial permanece constante.

Este princípio de conservação é muito trabalhado no Ensino Médio, sendo aplicado para a resolução de muitos problemas de movimento. As colisões entre corpos estudadas neste nível de ensino são um exemplo da aplicação deste conceito. Além destes, podemos encontrar aplicações em problemas de movimento de sistemas de corpos como dois patinadores que se deslocam sobre uma pista de gelo e em um dado momento de suas trajetórias se tocam ou, ainda, como uma pessoa se deslocando na superfície de um barco que se encontra inicialmente em repouso sobre a superfície de um lago ou encostado livremente em um ancoradouro.

O outro conceito importantíssimo estudado é o de energia. São vários os tipos de energia mecânica estudadas no nível médio, como, por exemplo, a energia de movimento (ou energia cinética), a energia potencial gravitacional e a energia potencial elástica. O princípio de conservação de energia mais estudado no Ensino Médio é o de conservação da energia mecânica.

Conservação da energia mecânica:

Se um corpo encontra-se em movimento, em relação a um referencial inercial, sob ação apenas de forças conservativas sua energia mecânica se conserva em relação a este referencial.

Um conjunto de problemas de movimento são resolvidos com a aplicação deste princípio de conservação. Problemas como o de um corpo em queda livre ou lançado verticalmente, ou o de um corpo que se desloca em superfícies como um plano inclinado ou que contém curvas.

No decorrer deste trabalho tentaremos propor um método para não só ampliar os problemas estudados na Mecânica do nível médio mais também oferecer aos alunos

uma ferramenta para melhorar o entendimento dos conteúdos estudados. Poderemos estudar fenômenos complexos usando uma álgebra simples, sempre interessados na contextualização e na análise de aspectos que demonstrem as características físicas de cada situação. Por exemplo, ao estudarmos o movimento harmônico amortecido, estaremos interessados em mostrar a natureza periódica do problema e o comportamento gráfico do problema.

CAPÍTULO 2 - O Método da Discretização

2.1 - Introdução

Na mecânica a equação que descreve o movimento dos corpos é a segunda lei de Newton, cuja forma matemática é

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}, \quad (21)$$

onde $\sum \vec{F}$ é a soma vetorial de todas as forças que agem sobre o corpo de massa m , que adquire o vetor aceleração instantânea \vec{a} devido a ação desses forças. Esta soma é comumente chamada de resultante das forças que agem sobre o corpo. Esta forma matemática da segunda lei de Newton limita o número de problemas que podemos estudar no Ensino Médio. A principal dificuldade está no fato de a equação (21) ser, em geral, uma equação cuja solução dependerá da aplicação de um conjunto de regras de cálculo que não faz parte dos conteúdos estudados no Ensino Médio.

A equação (21) só é resolvida satisfatoriamente no Ensino Médio quando a força é constante, o que acarreta uma aceleração também constante. Quando estudamos problemas de movimento de corpos que se encontram sob a ação de forças variáveis, como o problema de um oscilador harmônico ou de um corpo em queda que sofre a ação de forças resistivas dependentes da velocidade, percebemos as dificuldades matemáticas ao tentarmos encontrar uma função que permita calcular as velocidades e as posições do corpo em movimento. Vamos tentar ilustrar essa idéia.

Tratemos os problemas citados como problemas unidimensionais, nos quais a posição é representada pela letra x . Portanto, aplicando a segunda lei de Newton, podemos escrever para o oscilador harmônico simples

$$ma = -kx \Leftrightarrow a + \frac{k}{m}x = 0, \quad (22)$$

onde k é uma constante positiva. Para a queda de um corpo na qual se considera a ação do ar, podemos escrever

$$ma = -mg - bv \Leftrightarrow a + \frac{b}{m}v = g. \quad (23)$$

Podemos, também, reescrever a equação (23) considerando que a força resistiva exercida pelo ar sobre o corpo em queda seja proporcional ao quadrado do valor da sua velocidade em cada instante:

$$ma = -mg - bv^2 \Leftrightarrow a + \frac{b}{m}v^2 + \dot{g} = 0. \quad (24)$$

A solução de um problema de movimento consiste em encontrar equações que relacionem as posições e as velocidades do corpo em movimento com o tempo. Se observarmos a equação (22) podemos notar que quando um oscilador harmônico simples muda de posição, o que caracteriza seu movimento, sua aceleração se altera. Neste caso, é evidente que a velocidade do oscilador também estará variando e esta variação caracteriza uma variação na posição do oscilador. Portanto, podemos concluir que na equação (22) cada parcela da soma é caracterizada por uma variação na posição do oscilador.

Para ilustrar este conceito, consideremos um corpo de massa m preso a extremidade de uma mola de constante elástica k . Ao ser distendida a mola exerce sobre o corpo uma força elástica $F_{elástica} = -kx$, onde x é o valor da posição do corpo em um instante. Aplicando a segunda lei de Newton ao problema obtemos a equação (22), que é a equação de movimento de um oscilador harmônico simples. A figura 2.1 tenta ilustrar o comportamento do sistema em alguns instantes do movimento.

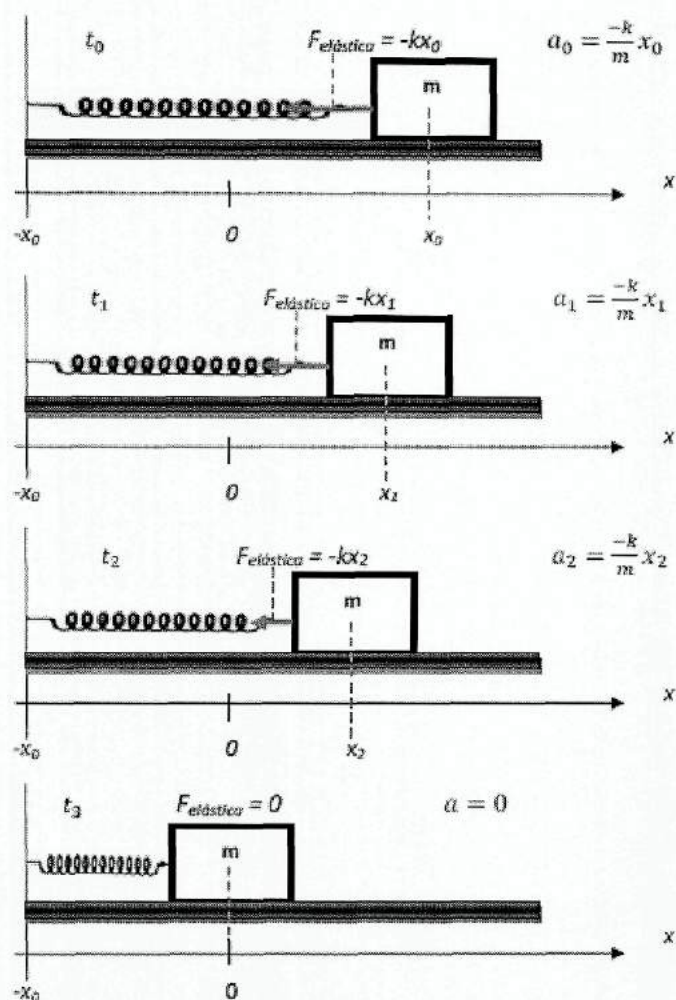


Figura 2.1 - Oscilador Harmônico.

A solução do problema consiste em encontrar uma equação que possibilite calcular as posições e as velocidades da massa em movimento em qualquer instante. Como já foi mencionado, os procedimentos que permitem encontrar uma solução para estes problemas não são simples e não fazem parte do conteúdo estudado no Ensino Médio. As mesmas idéias podem ser aplicadas às equações (23) e (24).

2.2 - A velocidade e a Aceleração como Grandezas Físicas Discretas

Neste momento, nosso desafio consiste em considerar e aplicar um conjunto de regras de cálculo, que ao mesmo tempo sejam acessíveis aos alunos do Ensino Médio e permitam uma descrição de movimentos de corpos nos quais a aceleração seja ou não constante.

Podemos estudar qualquer problema de movimento aplicando as leis da Física e considerando a grandeza escalar tempo como uma grandeza discreta. Isto é feito dividindo um intervalo de tempo qualquer, no qual é observado o movimento de uma partícula, em um número natural N de intervalos menores. Em nossa abordagem, esses intervalos menores serão considerados iguais e chamados de passo. Vamos representar o passo com a letra grega τ . De acordo com estas convenções podemos escrever uma equação para o tempo da seguinte forma:

$$t_{n+1} - t_n = \tau \Leftrightarrow t_{n+1} = t_n + \tau, \quad (25)$$

onde $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$. Em palavras, o passo τ é um intervalo de tempo entre dois valores discretos do tempo. Podemos ainda explorar essa representação e obtermos uma notação mais simples:

$$n = 0 \Rightarrow t_1 = t_0 + \tau,$$

$$n = 1 \Rightarrow t_2 = t_1 + \tau,$$

$$n = 2 \Rightarrow t_3 = t_2 + \tau,$$

$$\vdots$$

$$n = n - 1 \Rightarrow t_n = t_{n-1} + \tau.$$

Somando as relações acima, temos

$$t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} + t_n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{n-1} + n\tau,$$

$$\Downarrow$$

$$t_n = t_0 + n\tau. \quad (26)$$

Podemos notar que quanto menor for o valor de τ menor será a diferença entre t_{n+1} e t_n , e, conseqüentemente, estaremos aproximando os instantes t_n e t_{n+1} .

Vamos considerar o movimento retilíneo de um corpo e adotar como sistema de referência uma reta orientada, como foi feito no Capítulo 1. Observe a figura 2.2.

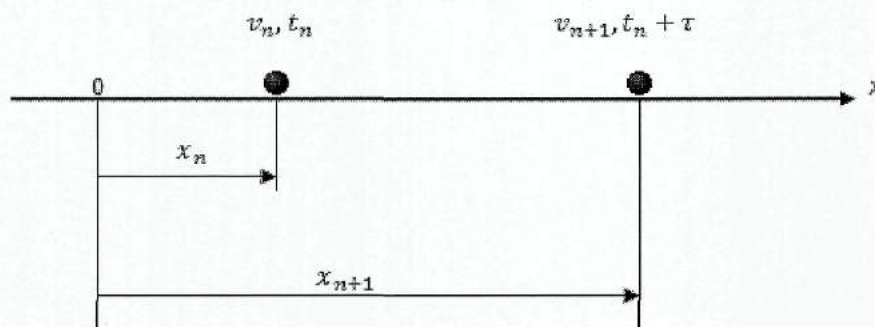


Figura 2.2 - Grandezas discretas: posição, velocidade e o tempo.

A partícula representada na figura 2.2 encontra-se na posição x_n no instante t_n e possui velocidade v_n . Após um intervalo de tempo τ ela encontra-se na posição x_{n+1} no instante $t_{n+1} = t_n + \tau$ e possui velocidade v_{n+1} . Para problemas de movimento como o representado na figura, ou seja, problemas unidimensionais, permita-nos definir a velocidade da seguinte forma:

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (27)$$

Como já mencionamos, em um problema de movimento a solução do problema consiste em equações que relacionam as posições e as velocidades da partícula em movimento com o tempo. Quando consideramos o tempo como uma grandeza discreta, a

solução permitirá que calculemos valores discretos das posições e, conseqüentemente, das velocidades.

Vamos analisar a figura 2.3, que ilustra a definição representada pela equação (27). A figura é o gráfico $x(t)$ vs. t do movimento de uma partícula que no instante t_0 se encontra na posição x_0 .

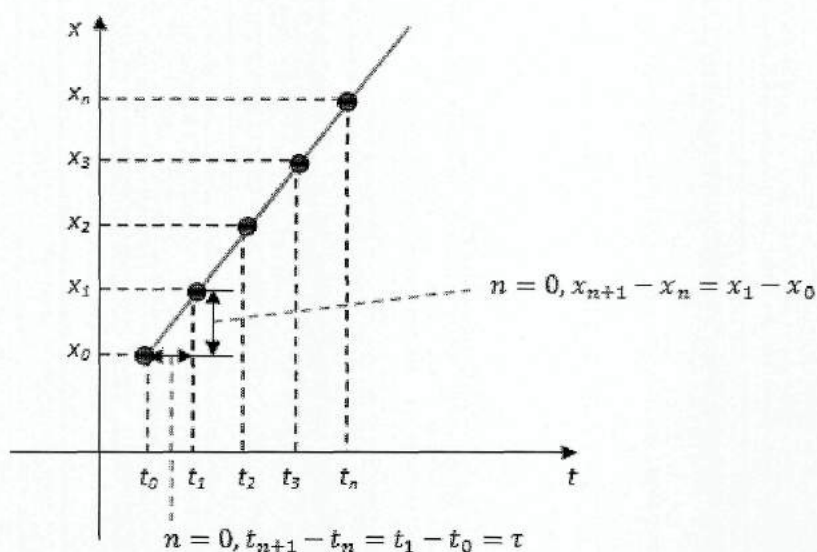


Figura 2.3 - Os valores discretos das posições e dos instantes de tempo são representados por pontos no plano $x(t)$ versus t .

Na figura, os valores das posições $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ são valores discretos nos instantes considerados $(t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n)$, que também são discretos. Assim, quando consideramos $n = 0, 1, 2, \dots, N$ temos, de acordo com a equação (27), os seguintes resultados para as velocidades:

$$v_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, v_3 = \frac{x_3 - x_2}{t_3 - t_2}, \dots, v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}.$$

Para aplicarmos a segunda lei de Newton é necessário definirmos, assim como foi feito para a velocidade, a aceleração, considerando que tanto a grandeza tempo quanto a grandeza velocidade são grandezas discretas. Portanto, permita-nos definir a aceleração da seguinte forma:

$$a_n = \frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (28)$$

Uma representação gráfica desta definição está na figura 2.4.

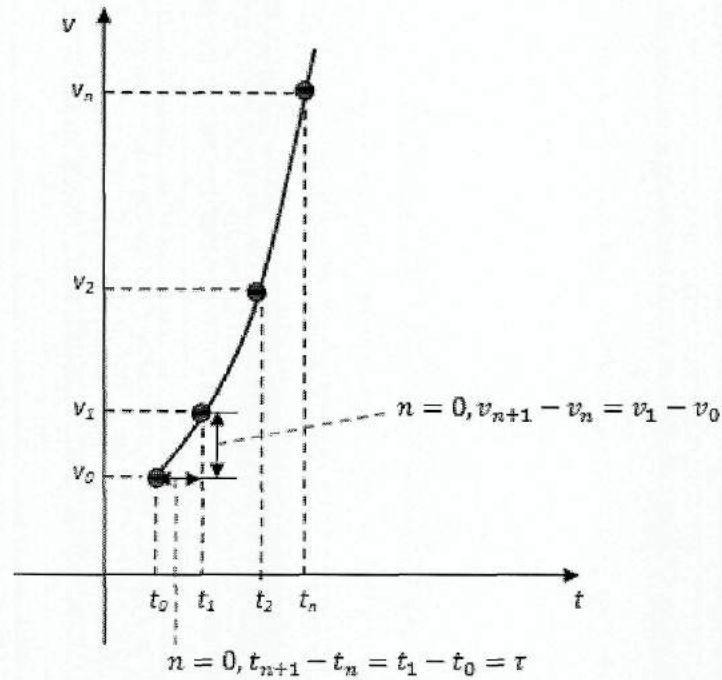


Figura 2.4

Ao considerarmos as definições (27) e (28), a forma matemática da segunda lei de Newton passa a ter a forma

$$\sum F_n = ma_n. \quad (29)$$

Portanto, podemos generalizar: quando estudamos um problema de movimento e consideramos a discretização do tempo, obteremos uma solução discreta para o problema aplicando a equação (29), que nos permitirá calcular os valores discretos das posições e, conseqüentemente, das velocidades do corpo em movimento. Desta forma, não estaremos preocupados em determinar valores intermediários entre duas posições discretas consecutivas ou duas velocidades discretas consecutivas.

Gostaríamos de chamar a atenção que a definição da velocidade (27) não é única. Podemos também defini-la como

$$v_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (30)$$

A definição (27) nos afirma que a posição ocupada pelo corpo em movimento após um intervalo de tempo τ é igual a soma da posição anterior mais o resultado da multiplicação entre a velocidade que o corpo tem nessa posição e o intervalo τ : $x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau$. A definição (30) nos afirma que a posição ocupada pelo corpo em movimento após um intervalo de tempo τ é igual a soma da posição anterior mais o resultado da multiplicação entre a velocidade que o corpo tinha na posição anterior e o intervalo τ : $x_{n+1} = x_n + v_n\tau$. O mesmo raciocínio se aplica a definição (28). Apesar de parecer contraditório, as definições (27) e (30) são equivalentes. Essa equivalência se deve ao fato de v_{n+1} e v_n terem valores muito próximos, pois o intervalo de tempo τ pode ser tão pequenos quanto quisermos. A mesma idéia vale para as posições, que estarão tão próximas quanto quisermos. Portanto, não importará se calculamos as posições considerando as definições (27) ou (30), ou ainda, a média aritmética entre v_{n+1} e v_n .

Ainda vale ressaltar que o que queremos é aplicar a segunda lei de Newton na forma da equação (29) e resolvermos os problemas de movimento considerando as definições de velocidade e aceleração discretas.

Neste momento estamos interessados em dois objetivos: (1) defender o uso da Física discreta no Ensino Médio como ferramenta que permite o estudo de problemas de movimento de corpos submetidos à ação de forças variáveis, (2) mostrar que a escolha adequada do valor do passo, ou seja, do valor de τ , é muito importante para que os cálculos com a solução obtida produzam valores que permitam a análise das características de cada movimento.

Capítulo 3 - Aplicações do Método da Discretização

3.1 - Movimento Uniforme

Nesta parte de nosso trabalho tentaremos ilustrar a aplicação do método de discretização. O movimento mais simples estudado no Ensino Médio é o movimento retilíneo uniforme. Uma partícula estará em movimento uniforme, em relação a um sistema de referência, quando sua velocidade for constante em relação a um observador em repouso neste sistema de referência. Consideremos o sistema de referência adotado na seção (2.2). Como a velocidade da partícula é constante, a equação (27) nos permite escrever

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + v(t_{n+1} - t_n).$$

Esta equação nos permite calcular valores sucessivos da posição da partícula quando o valor de n aumenta. Assim, temos

$$n = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 + v\tau,$$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + v\tau,$$

$$n = 2 \Rightarrow x_3 = x_2 + v\tau,$$

$$\vdots$$

$$n = n - 1 \Rightarrow x_n = x_{n-1} + v\tau.$$

Ao somarmos as expressões acima, teremos como resultado uma expressão que permite calcular o valor da posição da partícula para qualquer valor de n .

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_{n-1} + vn\tau,$$

$$\Leftrightarrow x_n = x_0 + vt_n. \quad (31)$$

A equação (31) nos permite calcular as abscissas da partícula para qualquer valor de n . Observe que para cada valor de n teremos uma abscissa correspondente. Portanto, a equação (31) é uma função $x_n = f(n)$, cujo domínio são os valores de n (o conjunto dos números naturais) e o contra-domínio (ou imagem da função) são os valores de x_n , obtidos variando os valores de n na função. Na linguagem da matemática a equação (31) é chamada de sequência. Esta equação é uma solução que chamaremos de solução discreta exata para o problema de movimento de uma partícula que se desloca com velocidade constante v , pois podemos escolher o valor de τ e, conseqüentemente, de acordo com a relação (26), estaremos tão próximos de um instante t_n quanto desejarmos. Os gráficos $v_n(t_n)$ vs. t_n e $x_n(t_n)$ vs. t_n para um movimento como este serão:

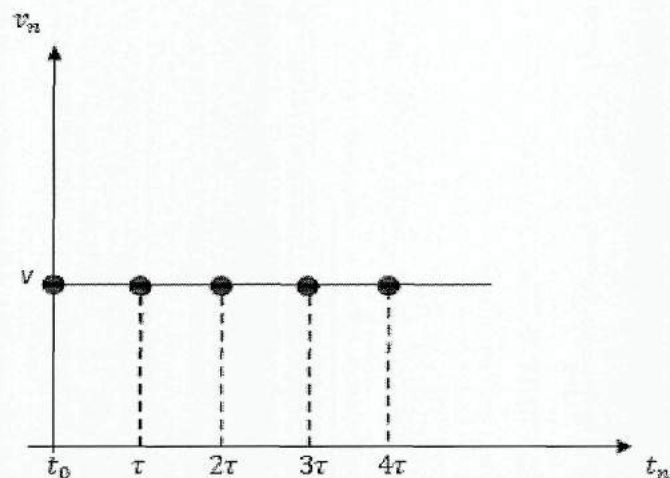


Figura 3.1 - Velocidade discreta de um corpo em movimento uniforme.

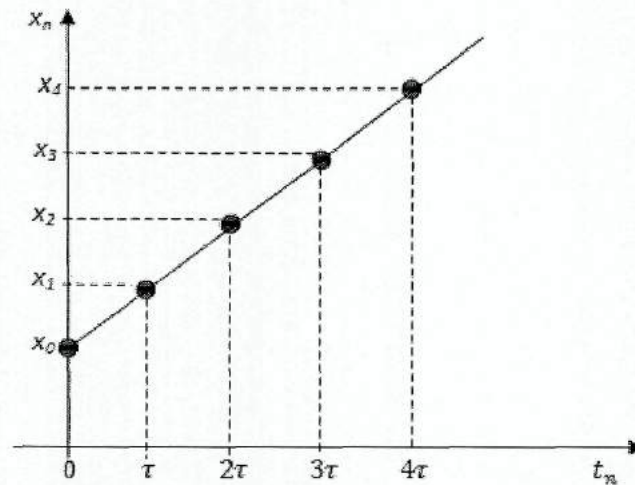


Figura 3.2 - Solução discreta do problema de movimento que se desloca com velocidade constante.

3.2 - Movimento sob a ação de uma força constante

Um problema importante no Ensino Médio é o movimento unidimensional sob a ação de uma força constante. Na Mecânica discreta uma força é constante se

$$F_{n+1} = F_n \quad \text{ou} \quad F_n = F.$$

Aplicando a segunda lei de Newton (29), obtemos

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{ou} \quad a_n = a.$$

Esse movimento é, portanto, uniformemente acelerado. Aplicando a segunda lei de Newton e considerando a equação (28), podemos escrever

$$\sum F_n = ma \Leftrightarrow m \left(\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = ma \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n + a\tau.$$

Seguindo os mesmos passos da seção anterior, podemos calcular valores sucessivos da velocidade da partícula:

$$n = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 + a\tau,$$

$$n = 1 \Rightarrow v_2 = v_1 + a\tau,$$

$$n = 2 \Rightarrow v_3 = v_2 + a\tau,$$

$$\vdots$$

$$n = n - 1 \Rightarrow v_n = v_{n-1} + a\tau.$$

Somando as expressões acima, obteremos uma expressão parecida com a (31):

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1} + v_n = v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + v_{n-1} + an\tau,$$

$$\Leftrightarrow v_n = v_0 + an\tau \Leftrightarrow v_n = v_0 + at_n. \quad (32)$$

A equação (32) nos permite calcular os valores da velocidade em diferentes instantes de tempo.

Para o cálculo das posições, de acordo com a equação (27), temos

$$v_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau.$$

Na equação (32), se fizermos $n = n + 1$, obtemos como resultado $v_{n+1} = v_0 + (n + 1)a\tau$.

Substituindo v_{n+1} na expressão acima por $v_0 + (n + 1)a\tau$, temos

$$x_{n+1} = x_n + (v_0 + (n + 1)a\tau)\tau \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + v_0\tau + (n + 1)a\tau^2,$$

$$\Downarrow$$

$$n = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 + v_0\tau + a\tau^2,$$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + v_0\tau + 2a\tau^2,$$

$$n = 2 \Rightarrow x_3 = x_2 + v_0\tau + 3a\tau^2,$$

$$n = 3 \Rightarrow x_4 = x_3 + v_0\tau + 4a\tau^2,$$

$$\vdots$$

$$n = n - 1 \Rightarrow x_n = x_{n-1} + v_0\tau + na\tau^2.$$

Somando as relações acima, exatamente como fizemos para a velocidade, obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n)a\tau^2. \quad (33)$$

As parcelas entre parênteses constituem a soma de uma sequência de números naturais chamada de progressão aritmética (PA), que é conhecida pelos alunos do Ensino Médio. Em uma progressão aritmética cada termo da sequência é obtido somando-se um valor constante r , chamado de razão da PA, ao termo anterior. A expressão matemática que permite calcular a soma S_n de n termos de uma PA é

$$S_n = \frac{(A_1 + A_n)n}{2},$$

onde A_1 é chamado de primeiro termo da PA. Assim, podemos escrever

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{(1 + n)n}{2}$$

e substituir este resultado na equação (33):

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \left(\frac{(1 + n)n}{2}\right)a\tau^2. \quad (34)$$

Que é a solução discreta exata do problema de movimento de uma partícula que se desloca em uma dimensão com aceleração constante.

O exemplo mais familiar de movimento retilíneo uniformemente acelerado é a queda livre de um corpo solto a partir de repouso. Este foi um dos problemas analisados por Galileu em seus trabalhos, que deram origem à era moderna da Física.

Um corpo em queda livre encontra-se submetido a ação de apenas uma força, oriunda da interação entre o corpo e a Terra, chamada de força peso ($P = mg$). Aplicando a expressão (29) ao movimento de um corpo em queda livre, temos

$$\sum F_n = ma_n = -mg$$

$$\Rightarrow a_n = -g.$$

Substituindo este resultado nas equações (32) e (34), obtemos

$$v_n = v_0 - gt_n \quad (35)$$

e

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \left(\frac{(1+n)n}{2}\right)g\tau^2. \quad (36)$$

A solução completa do problema de um corpo em queda livre depende dos valores x_0 e v_0 , chamados de valores iniciais. Os problemas de valores iniciais são aqueles em que é necessário conhecer valores iniciais de grandezas como velocidade e posição, para se obter os valores das posições e velocidades com a evolução temporal. Se considerarmos os valores iniciais $x_0 = 50\text{ m}$, $v_0 = 0$ e $g = 9,8\text{ m/s}^2$, estaremos tratando do movimento unidimensional de queda livre de um corpo que parte do repouso e que no instante $t_0 = 0$ encontra-se à 50 m de distância da origem do sistema de referência. Isto é análogo a soltarmos uma esfera maciça de bilhar, de pequenas dimensões, do topo de um edifício de 50 m de altura. Os gráficos $v_n(t_n)$ vs. t_n e $x_n(t_n)$ vs. t_n deste movimento serão:

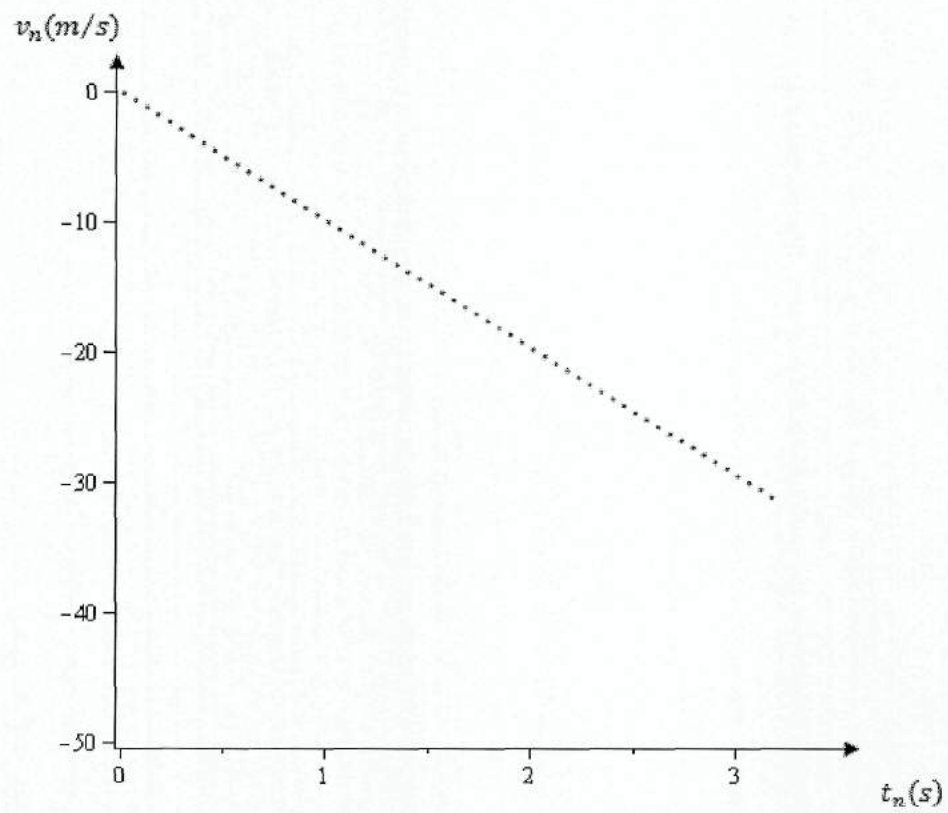


Figura 3.3 - Velocidades discretas de um corpo em queda livre a partir do repouso.

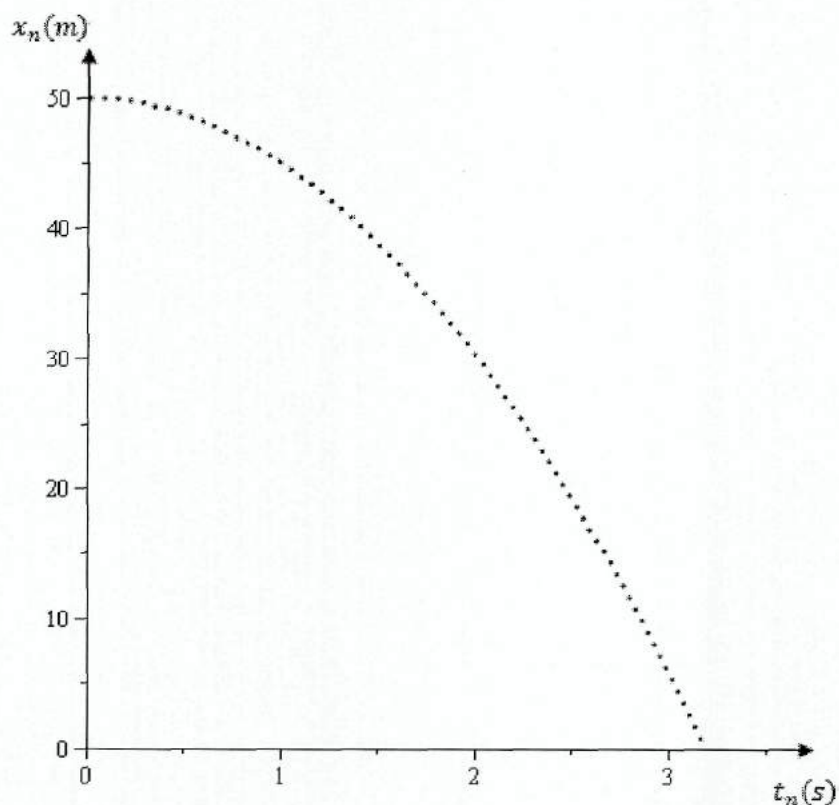


Figura 3.4 - Solução discreta do problema de movimento de um corpo em queda livre.

Se reescrevermos a equação (36) retirando os parênteses, obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{1}{2}gn^2\tau^2 - \frac{1}{2}gn\tau^2$$

que, de acordo com a (25), pode ser reescrita na forma

$$x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{1}{2}gt_n^2 - \left(\frac{1}{2}gt_n\right)\tau. \quad (37)$$

Observe que se $\tau = 0$, a equação (37) assume uma forma parecida com a (14). A cada instante t_n , um corpo em queda livre terá uma velocidade v_n e estará na posição x_n . A equação (37) não é a única solução discreta possível para o problema da queda livre. Outras soluções discretas podem ser obtidas. Estas soluções dependem de como é realizada a discretização da velocidade e da aceleração. Observe que se isolarmos t_n

na equação (32), com $a = -g$, e substituímos na (37), obtemos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + v_0 \left(\frac{v_0 - v_n}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 - v_n}{g} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 - v_n}{g} \right) \right) \tau, \\ \Leftrightarrow x_n &= x_0 + \frac{v_0^2 - v_0 v_n}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 - 2v_0 v_n + v_n^2}{g} - \left(\frac{1}{2} (v_0 - v_n) \right) \tau, \\ \Leftrightarrow x_n &= x_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_n^2}{g} - \left(\frac{1}{2} (v_0 - v_n) \right) \tau. \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados por mg , temos

$$\begin{aligned} mgx_n &= mgx_0 + \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} mv_n^2 - \left(\frac{1}{2} mg (v_0 - v_n) \right) \tau, \\ \Leftrightarrow mgx_n + \frac{1}{2} mv_n^2 &= mgx_0 + \frac{1}{2} mv_0^2 - \left(\frac{1}{2} mg (v_0 - v_n) \right) \tau. \end{aligned} \quad (38)$$

A equação (38) mostra que a energia mecânica de um corpo em queda livre não é conservada a cada passo. Entretanto, se $\tau \rightarrow 0$, a equação (38) torna-se a expressão matemática da conservação da energia mecânica, muito conhecida e aplicada em problemas de movimento pelos alunos do Ensino Médio.

Agora permita-nos resolver o mesmo problema com outra discretização. Vamos escrever a velocidade discretizada da forma

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (39)$$

Para o cálculo das velocidades o resultado é o mesmo: equação (32). Para o cálculo das posições, agora considerando a (39), temos

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} &\Leftrightarrow \frac{v_0 - (n+1)g\tau + v_0 - ng\tau}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau}, \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= x_n + v_0\tau + - \left(\frac{2n+1}{2} \right) g\tau^2, \end{aligned}$$

↓

$$n = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 + v_0\tau - \frac{1}{2}g\tau^2,$$

$$n = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 + v_0\tau - \frac{3}{2}g\tau^2,$$

$$n = 2 \Rightarrow x_3 = x_2 + v_0\tau - \frac{5}{2}g\tau^2,$$

$$n = 3 \Rightarrow x_4 = x_0 + v_0\tau - \frac{7}{2}g\tau^2,$$

⋮

$$n = n - 1 \Rightarrow x_n = x_{n-1} + v_0\tau - \left(n - \frac{1}{2}\right)g\tau^2.$$

Somando as expressões acima, obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \dots + n - \frac{1}{2}\right)g\tau^2.$$

A soma entre parenteses é a soma de uma PA, cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 1:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} + \dots + n - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}\right)\frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}.$$

Portanto, podemos escrever

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \left(\frac{n^2}{2}\right)g\tau^2 \Leftrightarrow x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{1}{2}gt_n^2. \quad (40)$$

Observe que a mudança na discretização da velocidade permitiu uma nova solução discreta. Combinando as equações (32) e (40), obtemos

$$x_n = x_0 + v_0 \left(\frac{v_0 - v_n}{g}\right) - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 - v_n}{g}\right)^2,$$

$$\Leftrightarrow x_n = x_0 + \frac{v_0^2 - v_0v_n}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 - 2v_0v_n + v_n^2}{g},$$

$$\Leftrightarrow x_n = x_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_n^2}{g},$$

$$\Leftrightarrow mgx_n = mgx_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_n^2,$$

$$\Leftrightarrow mgx_n + \frac{1}{2}mv_n^2 = mgx_0 + \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (41)$$

que é o resultado que queríamos obter. A energia mecânica é conservada a cada passo!

3.3 - Queda com Atrito

Em nosso cotidiano não é comum observarmos corpos que se movimentam livremente, ou seja, corpos que se movimentam no vácuo. Portanto, consideramos importante estudar movimentos de corpos em meios resistivos, como o ar. Um exemplo deste tipo de movimento, que consideramos possível ser estudado no Ensino Médio, é a queda de uma corpo que sofre a ação de forças resistivas proporcionais a velocidade (ou ao quadrado da velocidade) do corpo. Estas forças são exercidas pelo meio sobre o corpo que está em movimento. Consideremos o movimento de queda de um corpo de massa m em relação ao ar em repouso. Aplicando a segunda lei de Newton na forma da equação (29), temos

$$\begin{aligned} \sum F_n = ma_n &\Leftrightarrow m \left(\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -mg - bv_n, \\ \Leftrightarrow v_{n+1} &= \left(1 - \frac{b}{m} \tau \right) v_n - g\tau, \end{aligned} \quad (42)$$

onde b é uma constante positiva e seu produto com a velocidade do corpo é a força resistiva que o meio exerce sobre o corpo. Para simplificar os cálculos consideremos $\alpha = \frac{b}{m}$. Substituindo n por $n+1$ na equação (42) obtemos

$$v_n = (1 - \alpha\tau)v_{n-1} - g\tau. \quad (43)$$

Subtraindo a equação (43) da equação (42), temos

$$v_{n+1} - v_n = (v_n - v_{n-1})(1 - \alpha\tau).$$

Calculando as diferenças entre as velocidades consecutivas para valores diferentes de n , obtemos

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow v_2 - v_1 = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau), \\ n = 2 &\Rightarrow v_3 - v_2 = (v_2 - v_1)(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^2, \\ n = 3 &\Rightarrow v_4 - v_3 = (v_3 - v_2)(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^3, \\ &\vdots \\ n = n - 1 &\Rightarrow v_n - v_{n-1} = (v_{n-1} - v_{n-2})(1 - \alpha\tau) = (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^n \\ &\Leftrightarrow v_n = v_{n-1} + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^{n-1}. \end{aligned}$$

Usando o resultado acima podemos calcular os valores das velocidades para valores diferentes de n :

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow v_1 = v_0 + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^0, \\ n = 2 &\Rightarrow v_2 = v_1 + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^1, \\ n = 3 &\Rightarrow v_3 = v_2 + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^2, \\ &\vdots \\ n = n - 1 &\Rightarrow v_n = v_{n-1} + (v_1 - v_0)(1 - \alpha\tau)^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando as expressões acima obtemos a equação que nos permite calcular a velocidade para qualquer valor de n :

$$v_n = v_0 + (v_1 - v_0) [1 + (1 - \alpha\tau) + (1 - \alpha\tau)^2 + (1 - \alpha\tau)^3 + \dots + (1 - \alpha\tau)^{n-1}]. \quad (44)$$

A soma entre colchetes é a soma dos termos de uma progressão geométrica (PG), cujo primeiro termo é 1 e a razão é $q = (1 - \alpha\tau)$. A equação que permite calcular a soma dos n termos de uma progressão geométrica é

$$S_n = \frac{A_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad (45)$$

onde A_1 é o primeiro termo da PG e q é a razão entre os termos A_n e A_{n-1} , ou seja, $q = \frac{A_n}{A_{n-1}}$. Esses conceitos fazem parte do conteúdo de matemática ensinado no nível médio. Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 1 + (1 - \alpha\tau) + (1 - \alpha\tau)^2 + (1 - \alpha\tau)^3 + \dots + (1 - \alpha\tau)^{n-1} &= \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{1 - \alpha\tau - 1} \right), \\
 \Rightarrow v_n = v_0 + (v_1 - v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{1 - \alpha\tau - 1} \right), \\
 \Leftrightarrow v_n = v_0 - (v_1 - v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right). &\quad (46)
 \end{aligned}$$

De acordo com a equação 43, o termo $v_1 - v_0$ vale

$$v_1 - v_0 = -g\tau - \alpha\tau v_0.$$

Substituindo este resultado na equação (46), temos

$$v_n = v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right). \quad (47)$$

A equação (47) nos permite construir os gráficos das velocidades de uma partícula considerando valores diferentes para α .

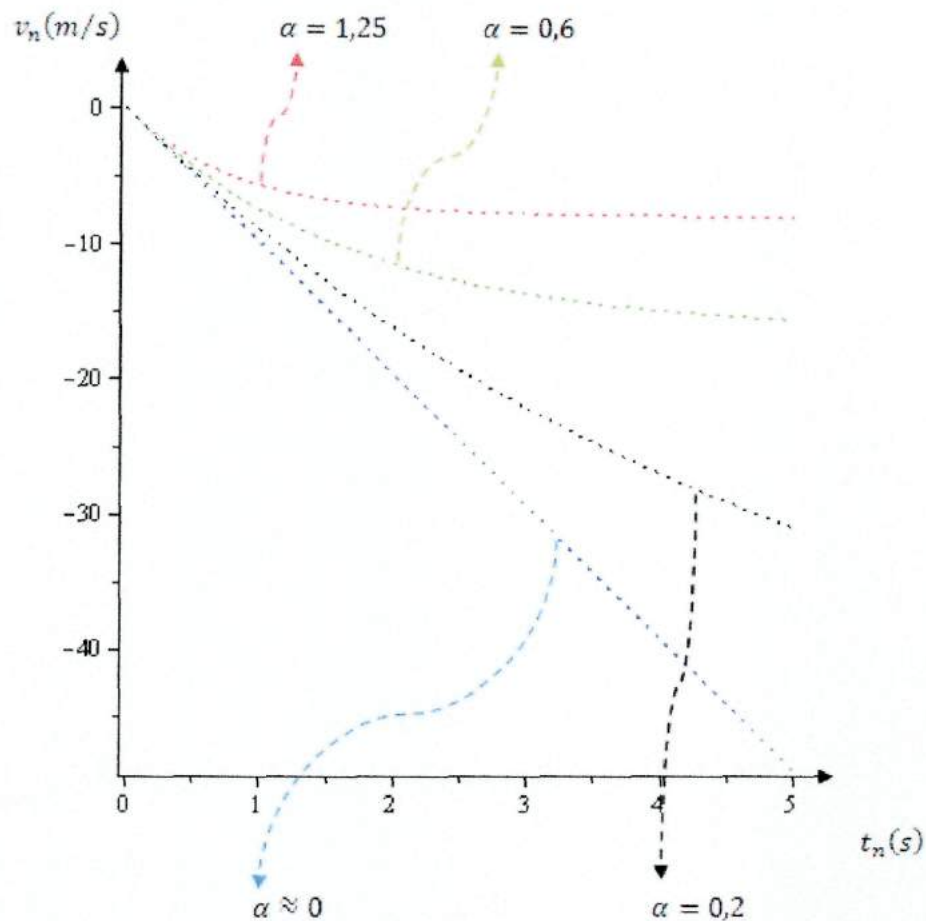


Figura 3.5 - Velocidades discretas de corpos em queda. Observe que é possível perceber e estimar os valores das velocidades terminais em cada situação.

Observe que quando consideramos a ação do ar, a velocidade da partícula em queda tende para um valor constante. Isto pode ser notado na figura 3.5. Esta velocidade é chamada de velocidade terminal. A velocidade terminal depende da forma da partícula e de sua velocidade inicial.

Para calcular as posições de uma partícula em queda que sofre a resistência do ar, podemos escrever a equação (27) substituindo n por $n - 1$. Desta forma obtemos

$$v_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}. \quad (48)$$

Usando as equações (47) e (48), obtemos

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_{n-1} + \left(v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1-\alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right) \right) \tau, \\
 \Leftrightarrow x_n &= x_{n-1} + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1-\alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right) \tau, \\
 &\quad \Downarrow \\
 n=1 &\Rightarrow x_1 = x_0 + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1-\alpha\tau)^1 - 1}{\alpha\tau} \right) \tau, \\
 n=2 &\Rightarrow x_2 = x_1 + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1-\alpha\tau)^2 - 1}{\alpha\tau} \right) \tau, \\
 n=3 &\Rightarrow x_3 = x_2 + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1-\alpha\tau)^3 - 1}{\alpha\tau} \right) \tau, \\
 &\quad \vdots \\
 x_n &= x_{n-1} + v_0\tau + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1-\alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right) \tau.
 \end{aligned}$$

Somando os resultados acima, temos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[[(1-\alpha\tau)^1 + (1-\alpha\tau)^2 + \dots + (1-\alpha\tau)^n] - n \right].$$

A soma entre colchetes

$$(1-\alpha\tau)^1 + (1-\alpha\tau)^2 + \dots + (1-\alpha\tau)^n$$

é a soma de uma PG cujo primeiro termo e a razão são iguais a $(1-\alpha\tau)$. Portanto, de acordo com a equação (45), podemos escrever

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_0 + nv_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[\left[\left(\frac{(1-\alpha\tau)^n - 1}{(1-\alpha\tau) - 1} \right) \right] - n \right], \\
 \Leftrightarrow x_n &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left[\left[(1-\alpha\tau) \left[\frac{(1-\alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right] \right] + n \right], \\
 \Leftrightarrow x_n &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left[[(1-\alpha\tau)((1-\alpha\tau)^n - 1)] + n\alpha\tau \right], \quad (49)
 \end{aligned}$$

que é a solução discreta exata do problema de queda de um corpo que sofre a ação resistiva do ar. O termo $(1 - \alpha\tau)^n$ é um binômio de Newton da forma $(c + h)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c^{n-k} h^k$, onde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é chamado de coeficiente binominal. Portanto, podemos escrever

$$(1 - \alpha\tau)^n = 1 - n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\alpha^3\tau^3 + \dots + 1^0(-\alpha\tau)^n, \quad (50)$$

que é uma aplicação da expansão binominal em um problema de Mecânica. Para simplificar não escreveremos as parcelas da soma acima entre $\frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2$ e $(-\alpha\tau)^n$. Então, podemos reescrever a equação (49) e obtermos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left[\left[(1 - \alpha\tau) \left(1 - n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2}(-\alpha\tau)^2 + \dots + (-\alpha\tau)^n - 1 \right) \right] + n\alpha\tau \right] \\ &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left[\frac{n(n-1)}{2}(-\alpha\tau)^2 + \dots + (-\alpha\tau)^n + n\alpha^2\tau^2 - \frac{n(n-1)}{2}(\alpha\tau)^3 + (-\alpha\tau)^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando todas as parcelas entre colchetes na expressão acima por α^{-2} , obtemos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - (g + \alpha v_0) \left[\frac{n(n-1)}{2}\tau^2 + n\tau^2 \right],$$

onde os termos entre colchetes que foram omitidos estão multiplicados por alguma potência de α . Se $\alpha = 0$, ou seja, se desprezamos a resistência do ar, podemos reescrever o resultado acima e obtermos

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nv_0\tau - g \left[\frac{n(n-1)}{2}\tau^2 + n\tau^2 \right], \\ \Leftrightarrow x_n &= x_0 + nv_0\tau - g \left[\frac{n(n+1)}{2}\tau^2 \right], \\ \Leftrightarrow x_n &= x_0 + nv_0\tau - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) g\tau^2. \end{aligned}$$

Assim podemos perceber que a equação (36) é um caso particular da equação (49) quando a resistência do ar é desprezada, ou seja, quando $\alpha = 0$. Usando a equação (49) e considerando valores diferentes para α , podemos construir os gráficos da figura 3.6.

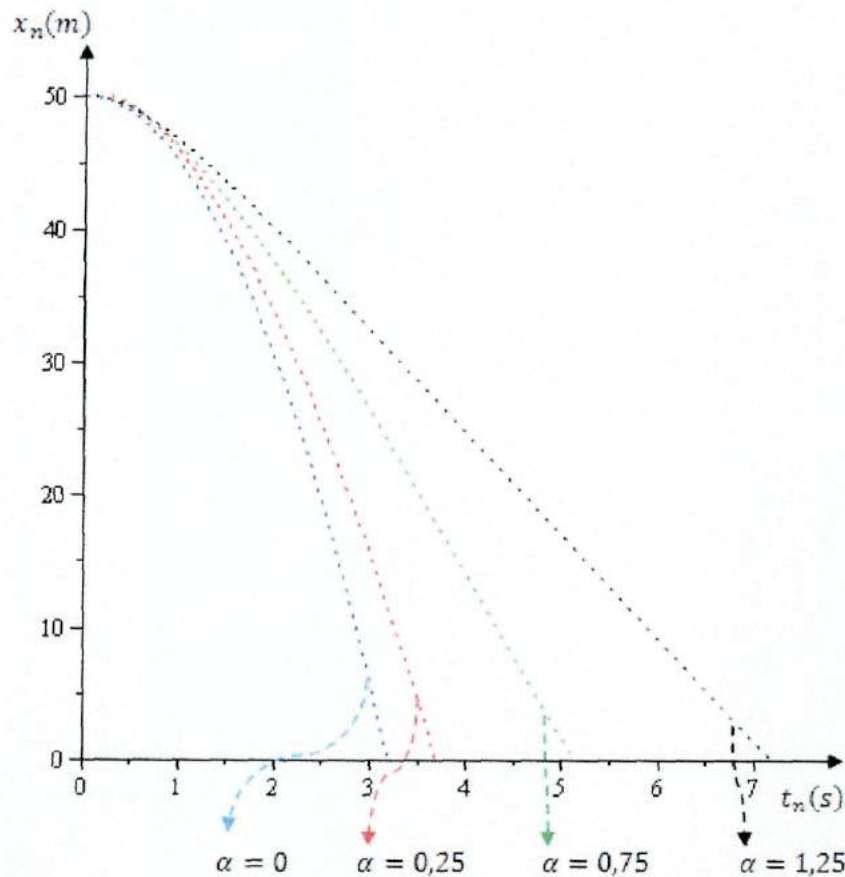


Figura 3.6 - Solução dos problemas de movimento de um corpo em queda.

Na figura 3.6 estão representados os gráficos $x(t_n)$ vs. t_n de corpos que caem a partir de uma mesma altura ($x = 50\text{ m}$) e chegam ao solo ($x = 0$) em instantes diferentes. Observe que os corpos cujos gráficos estão representados nas cores preta e verde atingem a velocidade terminal antes de chegar ao solo.

Como na seção anterior, podemos encontrar outra solução para o problema de queda de um corpo que sofre a ação do ar. Consideremos as equações (39) e (47). De acordo com estas, podemos escrever

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} + v_n &= 2 \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \right) \\
 &= v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^{n+1} - 1}{\alpha\tau} \right) + v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right), \\
 2 \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} \right) &= 2v_0 + (g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^{n+1} - 1}{\alpha\tau} + \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - x_n &= v_0\tau + \frac{1}{2}\tau(g\tau + \alpha\tau v_0) \left(\frac{(1 - \alpha\tau)^{n+1} - 1}{\alpha\tau} + \frac{(1 - \alpha\tau)^n - 1}{\alpha\tau} \right), \\
x_{n+1} &= x_n + v_0\tau + \frac{1}{2} \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} ((1 - \alpha\tau)^{n+1} + (1 - \alpha\tau)^n - 2), \\
x_{n+1} &= x_n + v_0\tau + \frac{1}{2} \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} ((1 - \alpha\tau)^n(1 - \alpha\tau) + (1 - \alpha\tau)^n - 2), \\
x_{n+1} &= x_n + v_0\tau + \frac{1}{2} \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (2(1 - \alpha\tau)^n - \alpha\tau(1 - \alpha\tau)^n - 2) \\
&\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} \left((1 - \alpha\tau)^n \left(1 - \frac{\alpha\tau}{2} \right) - 1 \right).
\end{aligned}$$

Permita-nos representar $\beta = \left(1 - \frac{\alpha\tau}{2}\right)$. Então, temos

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (\beta(1 - \alpha\tau)^n - 1), \\
&\Downarrow \\
n = 0 &\Rightarrow x_1 = x_0 + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (\beta(1 - \alpha\tau)^0 - 1), \\
n = 1 &\Rightarrow x_2 = x_1 + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (\beta(1 - \alpha\tau)^1 - 1), \\
n = 2 &\Rightarrow x_3 = x_2 + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (\beta(1 - \alpha\tau)^2 - 1), \\
&\vdots \\
n = n - 1 &\Rightarrow x_n = x_{n-1} + v_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (\beta(1 - \alpha\tau)^{n-1} - 1).
\end{aligned}$$

Somando todas as n expressões, temos

$$\begin{aligned}
x_n &= x_0 + nv_0\tau + \frac{(g\tau + \alpha\tau v_0)}{\alpha} (\beta [1 + (1 - \alpha\tau)^1 + \dots + (1 - \alpha\tau)^{n-1}] - n), \\
&\Leftrightarrow x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} (\beta [(1 - \alpha\tau)^n - 1] + n\alpha\tau). \quad (51)
\end{aligned}$$

Usando a equação (51) podemos construir os gráficos dos movimentos considerando valores diferentes de α , assim como foi feito anteriormente.

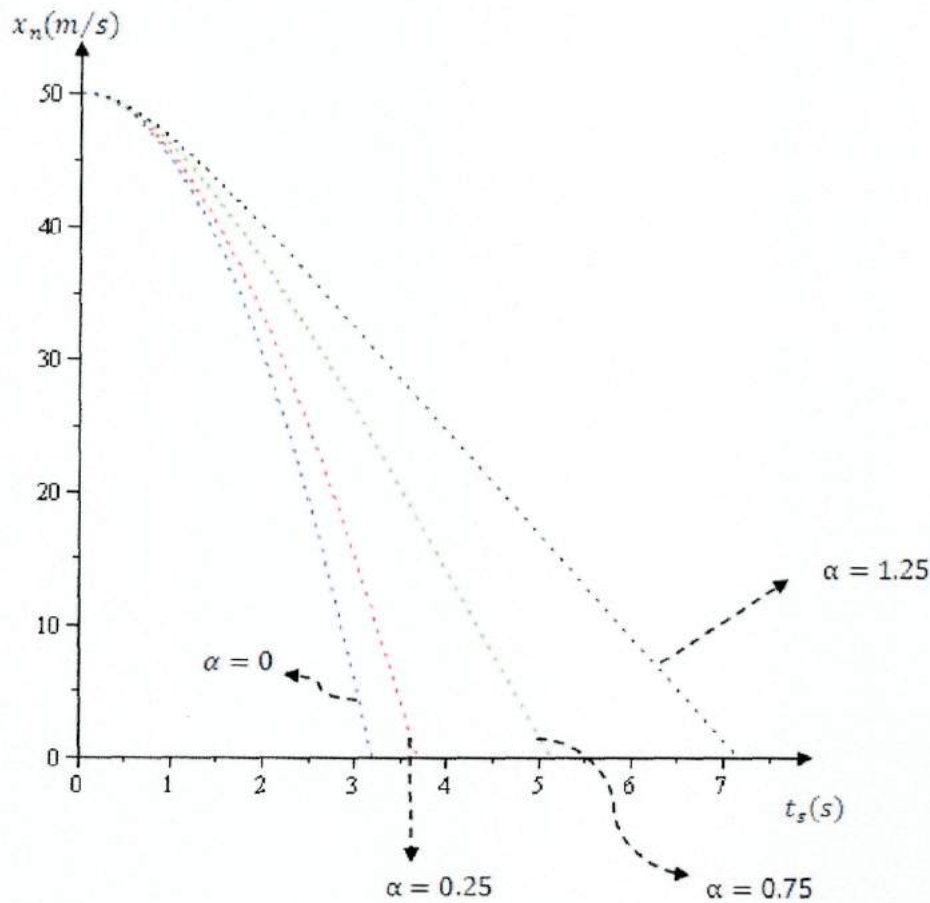


Figura 3.7 - Solução discreta dos problemas de movimento de um corpo em queda considerando as equações (39) e (47).

Observe que as duas últimas figuras são praticamente idênticas. Isto se deve ao fato de termos considerado um passo pequeno: $\tau = 0,01 \text{ s}$. Nesta situação, considerando um passo pequeno, a diferença nos valores obtidos com as equações (49) e (51) são muito pequenas.

A expansão do binômio de Newton $(1 - \alpha\tau)^n$ nos permite escrever

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left(\beta \left[-n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 + \dots + 1^0(-\alpha\tau)^n \right] + n\alpha\tau \right) \\
 &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left(\left(1 - \frac{\alpha\tau}{2}\right) \left[-n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 + \dots + 1^0(-\alpha\tau)^n \right] + n\alpha\tau \right).
 \end{aligned}$$

Omitindo os termos com $\alpha^n (n \geq 3)$, temos

$$x_n = x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left(\left[-n\alpha\tau + \frac{n(n-1)}{2!}(-\alpha\tau)^2 + \frac{n\alpha^2\tau^2}{2} \right] + n\alpha\tau \right),$$

$$\begin{aligned}
 x_n &= x_0 + nv_0\tau - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left(\frac{n\alpha^2\tau^2}{2} + \frac{n^2\alpha^2\tau^2}{2} - \frac{n\alpha^2\tau^2}{2} \right), \\
 x_n &= x_0 + nv_0\tau - (g + \alpha v_0) \left(\frac{n^2\tau^2}{2} \right) \\
 \Leftrightarrow x_n &= x_0 + v_0t_n - \frac{1}{2}gt_n^2 + \frac{1}{2}\alpha v_0t_n^2.
 \end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, temos

$$x_n = x_0 + v_0t_n - \frac{1}{2}gt_n^2.$$

Que é a equação (40). Nosso objetivo com essa discussão é mostrar que é possível encontrar mais de uma solução discreta exata para o mesmo problema de movimento. Neste momento, estamos interessados em soluções discretas que nos permitam escrever uma equação que represente adequadamente o balanço de energia a cada passo. Observe que se considerarmos as equações (42) e (48), temos

$$\begin{aligned}
 \frac{x_n - x_{n-1}}{v_n} &= \frac{v_{n+1} - v_n}{-g - \alpha v_n}, \\
 -gx_n + gx_{n-1} - \alpha v_n x_n + \alpha v_n x_{n-1} &= v_n v_{n+1} - v_n^2.
 \end{aligned}$$

Multiplicando a expressão acima por m , temos

$$mgx_{n-1} + mv_n^2 - bv_n x_n + bv_n x_{n-1} = mv_n v_{n+1} + mgx_n + bv_n(x_n - x_{n-1}).$$

A expressão acima não nos dá informações sobre o balanço de energia. Entretanto, se considerarmos as equações (42) e (39), temos

$$2 \frac{x_{n+1} - x_n}{v_{n+1} + v_n} = \frac{v_{n+1} - v_n}{-g - \alpha v_n}.$$

Arrumando os termos e multiplicando o resultado por $\frac{1}{2}m$, temos

$$-mgx_{n+1} + mgx_n - bv_n x_{n+1} + bv_n x_n = \frac{1}{2}m(v_{n+1} + v_n)(v_{n+1} - v_n),$$

$$\frac{1}{2}mv_n^2 + mgx_n = \frac{1}{2}mv_{n+1}^2 + mgx_{n+1} - bv_n(x_{n+1} - x_n). \quad (52)$$

A expressão (52) nos informa que a energia mecânica não se conserva a cada passo. O termo $-bv_n(x_{n+1} - x_n)$ representa a quantidade de energia dissipada a cada passo, ou seja, o trabalho realizado pela força $-bv_n$ durante o deslocamento $x_{n+1} - x_n$. A equação (52) nos dá o balanço de energia a cada passo.

Consideramos importante a discussão acerca do movimento de queda considerando-se a resistência do ar porque esta situação está presente no cotidiano dos alunos.

3.4 - Oscilador Harmônico

Nesta seção aplicaremos as equações da mecânica discreta ao sistema massa-mola. Observe a figura 3.8 abaixo.

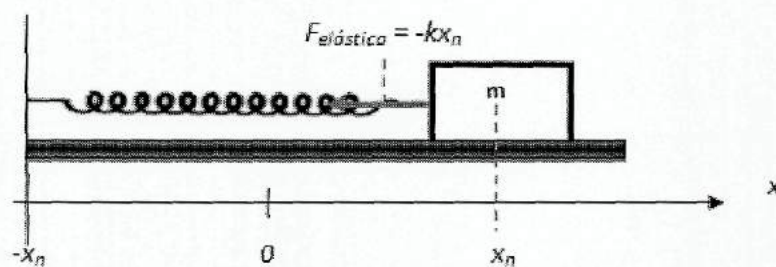


Figura 3.8

A força da mola sobre a massa é

$$F_n = -kx_n, \quad (53)$$

onde k é a constante da mola. Considerando que a força da mola (53) seja a única força aplicada na massa e usando a segunda lei de Newton, obtemos

$$a_n = -\frac{k}{m}x_n, \quad (54)$$

onde m é a massa do corpo. Definindo a constante

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (55)$$

podemos escrever as equações discretizadas do movimento, de acordo com as equações (30) e (28):

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau \quad (56)$$

e

$$v_{n+1} = v_n - \omega^2 x_n \tau. \quad (57)$$

Multiplicando a equação (56) por $i\omega$, obtemos

$$i\omega x_{n+1} = i\omega x_n + i\omega v_n \tau. \quad (58)$$

É acessível aos alunos do Ensino Médio, por fazer parte do conteúdo ensinado, as notações e operações envolvendo números complexos. A relação $i^2 = -1$ nos permite escrever $-\omega^2 = (-1)\omega^2 = i^2\omega \cdot \omega$. Somando e subtraindo as equações (57) e 58 obtemos

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = i\omega x_n + i\omega v_n \tau + v_n + i^2\omega \cdot \omega x_n \tau,$$

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = v_n + i\omega x_n + i\omega \tau (v_n + i\omega x_n), \quad (59)$$

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = v_n + i^2\omega \cdot \omega x_n \tau - i\omega x_n - i\omega v_n \tau,$$

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = v_n - i\omega x_n - i\omega \tau (v_n - i\omega x_n). \quad (60)$$

Fatorando as equações (59) e (60), vem

$$v_{n+1} + i\omega x_{n+1} = (1 + i\omega \tau)(v_n + i\omega x_n), \quad (61)$$

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = (1 - i\omega \tau)(v_n - i\omega x_n). \quad (62)$$

Fazendo $n = 1, 2, 3, \dots, n-1$, temos

$$n = 0 \Rightarrow v_1 + i\omega x_1 = (1 + i\omega\tau)(v_0 + i\omega x_0),$$

$$n = 1 \Rightarrow v_2 + i\omega x_2 = (1 + i\omega\tau)(v_1 + i\omega x_1) = (1 + i\omega\tau)^2(v_0 + i\omega x_0),$$

$$n = 2 \Rightarrow v_3 + i\omega x_3 = (1 + i\omega\tau)(v_2 + i\omega x_2) = (1 + i\omega\tau)^3(v_0 + i\omega x_0),$$

$$\vdots$$

$$v_n + i\omega x_n = (1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0). \quad (63)$$

Com o mesmo procedimento acima aplicado a equação (62), obtemos

$$v_n - i\omega x_n = (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0). \quad (64)$$

Das equações (63) e (64), obtemos

$$v_n = \frac{(1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0) + (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0)}{2} \quad (65)$$

e

$$x_n = \frac{(1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0) - (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0)}{i2\omega}, \quad (66)$$

que constituem a solução discreta exata do problema de movimento do sistema massa-mola. Se trabalharmos nas equações (65) e (66) aplicando algumas propriedades dos números complexos, que são estudadas no Ensino Médio, obteremos equações apenas com termos reais.

Um número complexo pode ser escrito como

$$z = u + iw, \quad (67)$$

onde u e w são números reais e $i = \sqrt{-1}$. O número complexo z pode ser representado em um plano conforme mostrado na figura 3.9.

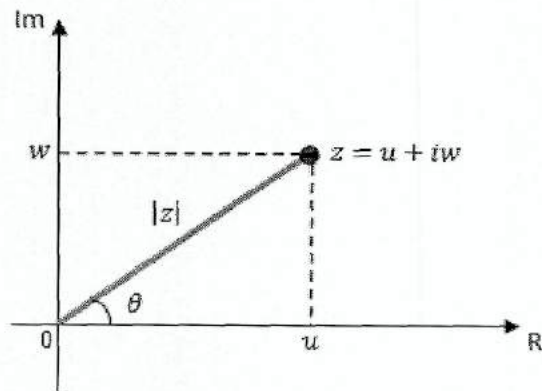


Figura 3.9- Representação gráfica de um número complexo.

Da figura 3.9, podemos perceber que o módulo de z é

$$|z| = \sqrt{u^2 + w^2} \quad (68)$$

e que o ângulo θ é dado por

$$\theta = \arctan\left(\frac{w}{u}\right). \quad (69)$$

Podemos também representar um número complexo em coordenadas polares. Desta forma, obtemos:

$$z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)). \quad (70)$$

De acordo com a equação (70), é possível demonstrar que

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)) \quad (71)$$

e

$$\bar{z}^n = |z|^n (\cos(n\theta) - i \operatorname{sen}(n\theta)), \quad (72)$$

onde \bar{z} é o complexo conjugado de z . As equações (70), (71) e (72) estão demonstradas no apêndice B deste trabalho. Assim, reescrevendo as equações (65) e (66) e aplicando

as equações (71) e (72) aos números complexos $(1 + i\omega\tau)^n$ e seu conjugado $(1 - i\omega\tau)^n$ obtemos:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{(1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0) + (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0)}{2} \\ &= \frac{v_0}{2} ((1 + i\omega\tau)^n + (1 - i\omega\tau)^n) + i\omega \frac{x_0}{2} ((1 + i\omega\tau)^n - (1 - i\omega\tau)^n), \\ v_n &= \left(\left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \cos(n\theta) \right) v_0 - \left(\left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \operatorname{sen}(n\theta) \right) \omega x_0, \\ v_n &= \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n (v_0 \cos(n\theta) - \omega x_0 \operatorname{sen}(n\theta)), \end{aligned} \quad (73)$$

e

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{(1 + i\omega\tau)^n(v_0 + i\omega x_0) - (1 - i\omega\tau)^n(v_0 - i\omega x_0)}{i2\omega} \\ &= \frac{v_0}{i2\omega} ((1 + i\omega\tau)^n - (1 - i\omega\tau)^n) + \frac{x_0}{2} ((1 + i\omega\tau)^n + (1 - i\omega\tau)^n), \\ x_n &= \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \left(\frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen}(n\theta) + x_0 \cos(n\theta) \right). \end{aligned} \quad (74)$$

Os argumentos das funções seno e cosseno das equações (73) e (74) podem ser reescritos considerando a relação $\theta_n = n\theta$, onde θ é um ângulo inicial cujo valor é determinado pela escolha do passo τ , ou seja, seu valor pode ser tão pequeno quanto quisermos. Assim como τ corresponde a uma variação de tempo entre t_{n+1} e t_n , o ângulo θ corresponde a uma variação angular entre θ_{n+1} e θ_n . Então, vamos definir a função frequência angular discreta como a razão entre uma variação angular discreta $\theta = \theta_{n+1} - \theta_n$, que representaremos por θ_d , e um intervalo de tempo τ . Assim temos:

$$\omega_d = \frac{\theta_d}{\tau}. \quad (75)$$

Vamos nos limitar aos problemas em que ω_d tem valor constante. Assim podemos escrever

$$n\theta_d = \omega_d n\tau,$$

$$n\theta_d = \omega_d t_n.$$

Então, considerando a definição (75), podemos reescrever as equações (73) e (74):

$$v_n = \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n (v_0 \cos(\omega_d t_n) - \omega x_0 \sin(\omega_d t_n)) \quad (76)$$

e

$$x_n = \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right)^n \left(\frac{v_0}{\omega} \sin(\omega_d t_n) + x_0 \cos(\omega_d t_n) \right). \quad (77)$$

Observe que $\omega \neq \omega_d$. Aplicando a equação (69) ao complexo $(1 + i\omega\tau)^n$, temos

$$\tan(\theta_d) = \tan(\omega_d \tau) \Rightarrow \omega_d = \frac{1}{\tau} \arctan(\omega\tau). \quad (78)$$

Gostaríamos de chamar a atenção para o fato de ser possível fazer uma argumentação lógica a respeito das relações (78): quando o argumento de uma função seno ou tangente é pequeno, podemos considerar a aproximação de pequenos ângulos $\sin(\theta) \cong \text{tg}(\theta) \cong \theta$. Desta forma, podemos escrever

$$\tan(\omega_d \tau) = \frac{\omega\tau}{1} \Rightarrow \omega_d = \omega \quad (\tau \rightarrow 0), \quad (79)$$

que nos permite concluir que a função frequência angular discreta tende para ω quando consideramos passos cada vez menores. Note que estamos propondo uma argumentação que possa ser feita em uma turma de Ensino Médio. Entretanto, demonstraremos rigorosamente a relação (78) e o caso limite (79). Com as equações (76) e (77), podemos construir os gráficos do movimento. Se considerarmos passos diferentes, ou seja, valores diferentes para τ , na equação (77), podemos observar variações nas amplitudes e, portanto, concluir que a energia mecânica do sistema, que depende da amplitude do movimento, não está sendo conservada. Entretanto, à medida que diminuirmos o valor do passo, o gráfico do movimento nos mostra que a amplitude não varia a cada ciclo e, portanto, podemos concluir que para valores de τ muito pequenos a energia é conservada, quando estudamos o problema com a equação (77). Consideramos para a obtenção dos gráficos abaixo: $\omega = 4,0 \text{ s}^{-1}$, $v_0 = 0$ e $x_0 = 0,1 \text{ m}$.

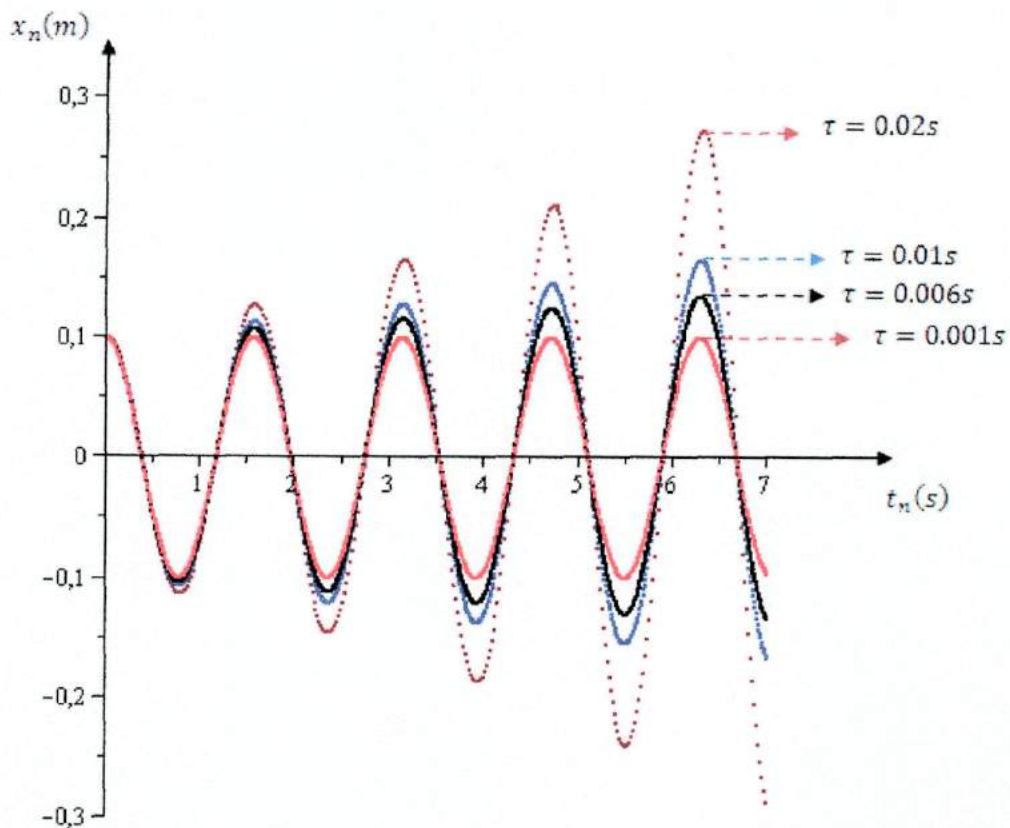


Figura 3.10 - Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico. Observe, através dos gráficos, que a energia não é conservada.

Assim como fizemos nas seções anteriores, se multiplicarmos as equações (56) e (57) concluiremos que o resultado não nos dará informações sobre a energia mecânica do sistema. Entretanto, se considerarmos outra discretização para a velocidade e para a aceleração obteremos uma equação que representará adequadamente o que de fato acontece, ou seja, a equação da conservação da energia mecânica. Permita-nos escrever as equações discretas para o sistema massa-mola:

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + \left(\frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right) \tau \quad (80)$$

e

$$\frac{a_{n+1} + a_n}{2} = \frac{v_{n+1} - v_n}{\tau} \Leftrightarrow v_{n+1} = v_n - \omega^2 \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) \tau. \quad (81)$$

Combinando as equações (80) e (81), temos

$$\frac{2(x_{n+1} - x_n)}{v_{n+1} + v_n} = \frac{2(v_{n+1} - v_n)}{-\omega^2(x_{n+1} + x_n)},$$

$$-\omega^2(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) = (v_{n+1} - v_n)(v_{n+1} + v_n),$$

$$\omega^2 x_n^2 - \omega^2 x_{n+1}^2 = v_{n+1}^2 - v_n^2.$$

Multiplicando os dois lados da expressão acima por $\frac{1}{2}m$ e considerando a equação (55), temos

$$\frac{1}{2}kx_n^2 + \frac{1}{2}mv_n^2 = \frac{1}{2}kx_{n+1}^2 + \frac{1}{2}mv_{n+1}^2. \quad (82)$$

As equações (80) e (81) correspondem a outra solução discreta para este problema.

Multiplicando a equação (80) por $i\omega$, temos

$$i\omega x_{n+1} = i\omega x_n + i\omega\tau \left(\frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right). \quad (83)$$

Reescrevendo a equação (81), obtemos

$$v_{n+1} = v_n + i\omega i\omega\tau \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right).$$

Subtraindo e somando as equações (81) e (83), obtemos

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = v_n + i\omega i\omega\tau \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) - i\omega x_n - i\omega\tau \left(\frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right),$$

$$\left(1 + \frac{i\omega\tau}{2} \right) (v_{n+1} - i\omega x_{n+1}) = \left(1 - \frac{i\omega\tau}{2} \right) (v_n - i\omega x_n),$$

$$v_{n+1} - i\omega x_{n+1} = \left(\frac{1 - \frac{i\omega\tau}{2}}{1 + \frac{i\omega\tau}{2}} \right) (v_n - i\omega x_n). \quad (84)$$

Permita-nos escrever

$$\lambda = \left(\frac{1 - \frac{i\omega\tau}{2}}{1 + \frac{i\omega\tau}{2}} \right). \quad (85)$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
 n = 0 &\Rightarrow v_1 - i\omega x_1 = \lambda (v_0 - i\omega x_0), \\
 n = 1 &\Rightarrow v_2 - i\omega x_2 = \lambda (v_1 - i\omega x_1) = \lambda^2 (v_0 - i\omega x_0), \\
 n = 2 &\Rightarrow v_3 - i\omega x_3 = \lambda (v_2 - i\omega x_2) = \lambda^3 (v_0 - i\omega x_0), \\
 &\vdots \\
 n = n - 1 &\Rightarrow v_n - i\omega x_n = \lambda (v_{n-1} - i\omega x_{n-1}) = \lambda^n (v_0 - i\omega x_0), \\
 v_n - i\omega x_n &= \lambda^n (v_0 - i\omega x_0); \tag{86}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} + i\omega x_{n+1} &= v_n + i\omega i\omega\tau \left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2} \right) + i\omega x_n + i\omega\tau \left(\frac{v_{n+1} + v_n}{2} \right) \\
 \left(1 - \frac{i\omega\tau}{2} \right) (v_{n+1} + i\omega x_{n+1}) &= \left(1 + \frac{i\omega\tau}{2} \right) (v_n + i\omega x_n), \\
 v_{n+1} + i\omega x_{n+1} &= \left(\frac{1 + \frac{i\omega\tau}{2}}{1 - \frac{i\omega\tau}{2}} \right) (v_n + i\omega x_n). \tag{87}
 \end{aligned}$$

Na equação (88), temos

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{1 + \frac{i\omega\tau}{2}}{1 - \frac{i\omega\tau}{2}} \right).$$

Para valores de n , obtemos

$$v_n + i\omega x_n = \lambda^{-n} (v_0 + i\omega x_0)$$

e

$$v_n + i\omega x_n = \frac{1}{\lambda^n} (v_0 + i\omega x_0). \tag{88}$$

Somando e subtraindo as equações (86) e (88), temos

$$v_n = \frac{\lambda^n}{2} (v_0 - i\omega x_0) + \frac{1}{2\lambda^n} (v_0 + i\omega x_0) \tag{89}$$

e

$$x_n = \frac{1}{i2\omega\lambda^n} (v_0 + i\omega x_0) - \frac{\lambda^n}{i2\omega} (v_0 - i\omega x_0). \quad (90)$$

Analogamente ao que foi feito com as equações (65) e (66), podemos reescrever as equações (89) e (90). Considerando a equação (71), é fácil verificar que

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n} (\cos(n\theta) - i\text{sen}(n\theta)).$$

Além disso, observe que $|\lambda| = 1$ e que a parte complexa de λ é negativa. Então, temos

$$\lambda^n = \cos(n\theta) - i\text{sen}(n\theta) \Rightarrow \frac{1}{\lambda^n} = \cos(n\theta) + i\text{sen}(n\theta). \quad (91)$$

Usando as relações (91), podemos reescrever as equações (89) e (90):

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{v_0}{2} \left(\lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} \right) + \frac{i\omega x_0}{2} \left(\frac{1}{\lambda^n} - \lambda^n \right) \\ &\Rightarrow v_n = v_0 \cos(\omega_d t_n) - \omega x_0 \text{sen}(\omega_d t_n), \end{aligned} \quad (92)$$

e

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{v_0}{i2\omega} \left(\frac{1}{\lambda^n} - \lambda^n \right) + \frac{x_0}{2} \left(\frac{1}{\lambda^n} + \lambda^n \right) \\ &\Rightarrow x_n = x_0 \cos(\omega_d t_n) + \frac{v_0}{\omega} \text{sen}(\omega_d t_n). \end{aligned} \quad (93)$$

Neste caso, para estabelecer a relação entre ω_d e ω , temos

$$\lambda = \left(\frac{1 - \frac{i\omega\tau}{2}}{1 + \frac{i\omega\tau}{2}} \right) = \left(\frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2} \right) - i \left(\frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2} \right),$$

$$\tan(\theta_d) = \tan(\omega_d \tau) = \frac{\frac{4\omega\tau}{4 + \omega^2\tau^2}}{\frac{4 - \omega^2\tau^2}{4 + \omega^2\tau^2}} \Rightarrow \omega_d = \frac{1}{\tau} \arctan \left(\frac{\omega\tau}{1 - \frac{\omega^2\tau^2}{4}} \right).$$

As equações (92) e (93) constituem outra solução do mesmo problema desta seção. Estas diferem das equações (76) e (77) devido a discretização adotada. As equações (92) e (93) nos interessa pelo fato de corresponderem a equação (82). Os gráficos das posições e velocidades em função do tempo considerando $\omega = 4,0 \text{ s}^{-1}$, $v_0 = 0$ e $x =$

0,10 m, serão:

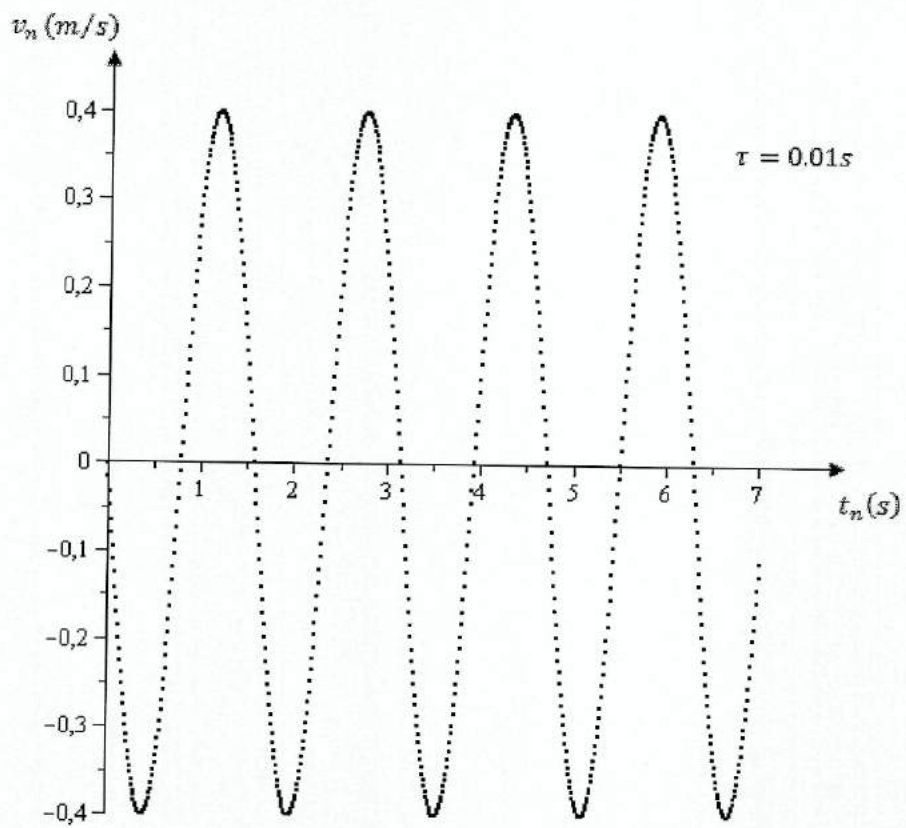


Figura 3.11- Velocidades discretas de um oscilador harmônico.

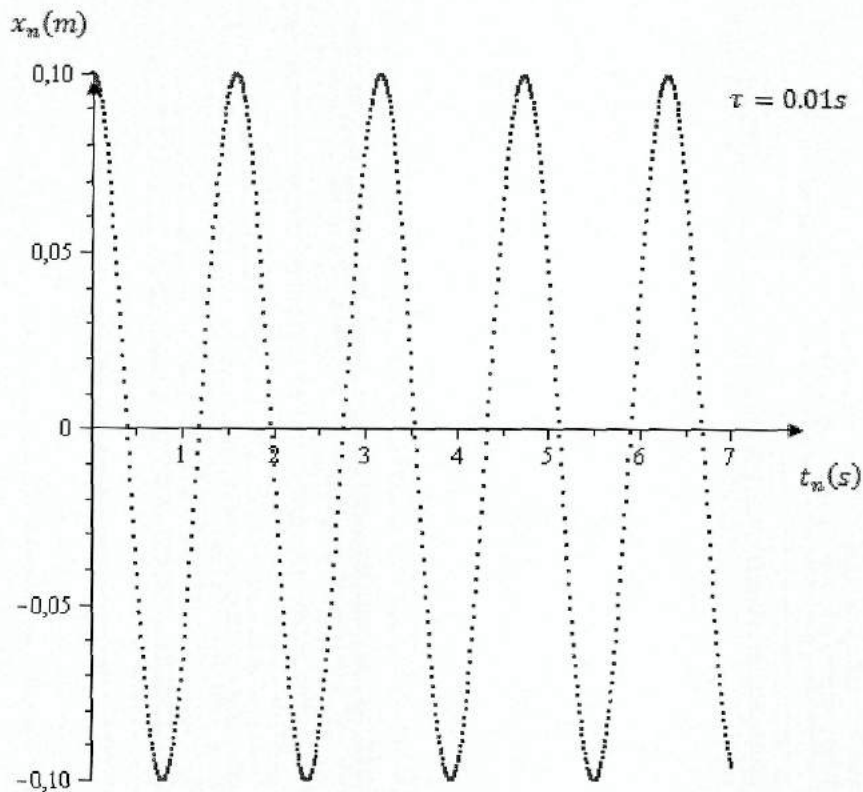


Figura 3.12 - Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico. Observe que neste caso a energia é conservada

Note que com a equação (93) não necessitamos considerar passos muito pequenos para que a amplitude não mude de valor a cada ciclo. Aliás, para qualquer valor de τ a amplitude será a mesma. Note também que as equações (76) e (92), para as velocidades, e as equações (77) e (93), para as posições, diferem entre si apenas pelo termo $\left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right)^n$. Esta diferença tende a desaparecer à medida que consideramos passos cada vez menores. Discutiremos este aspecto no apêndice B deste trabalho.

CAPÍTULO 4 - Mais Aplicações da Física Discreta

Nesta seção resolveremos outros problemas cujas soluções discretas exatas são difíceis de encontrar. Para isso, escreveremos relações de recorrência com álgebra simples, acessível aos alunos do Ensino Médio, e efetuaremos os cálculos com o uso de um programa de computador. O programa usado neste trabalho é o Maple 12 [1] e a programação está disponível no Apêndice A. Vale ressaltar que o uso da calculadora também é possível, apesar de demandar mais trabalho.

4.1- Queda com Atrito

Nesta parte do trabalho, consideraremos uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade

$$\vec{F}_{a(n)} = -bv_n^2\hat{\varepsilon}, \quad (94)$$

onde $\hat{\varepsilon}$ é um vetor unitário que sempre tem a mesma direção e o mesmo sentido do vetor velocidade do corpo em movimento que sofre a ação da força de arrasto. Assim como fizemos nas seções anteriores, omitiremos a notação vetorial, pois estaremos tratando de um problema unidimensional. Assim, aplicando a segunda lei de Newton (29), temos

$$\begin{aligned} \sum F_n = ma_n &\Leftrightarrow m \left(\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -mg - bv_n^2, \\ v_{n+1} &= v_n - \frac{b}{m}v_n^2\tau - g\tau, \\ v_{n+1} &= v_n - \alpha v_n^2\tau - g\tau. \end{aligned} \quad (95)$$

Para as posições, temos

$$x_{n+1} = x_n + v_{n+1}\tau,$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n \tau - \alpha v_n^2 \tau^2 - g \tau^2. \quad (96)$$

Usando as equações (95) e (70) ou a programação disponível no apêndice A podemos construir os gráficos $v_n(t_n)$ vs. t_n e $x(t_n)$ vs. t_n considerando valores diferentes de α .

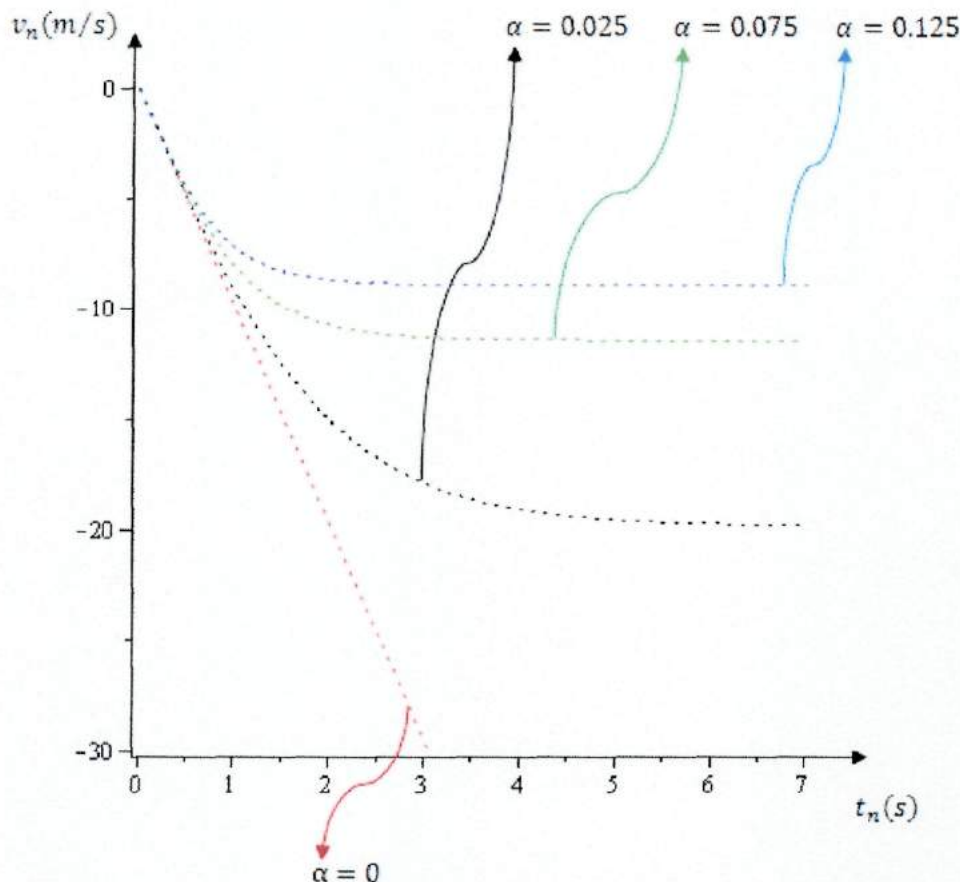


Figura 4.1 - Velocidades discretas de um corpo em queda submetido a uma força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade.

Consideramos que com a aplicação da Física discreta em problemas como este discussões acerca de aspectos do movimento como, por exemplo, a existência de uma velocidade terminal para coeficientes de atrito (b presente na (95)) diferentes, são mais ilustrativas e oferecem aos alunos mais ferramentas para um bom entendimento do conteúdo estudado. Além disso, a queda de corpos que observamos em nosso cotidiano ocorre com a presença da ação do ar. Portanto, se desejamos contextualizar os problemas estudados na Mecânica do Ensino Médio, precisamos mudar nossas abordagens e aqui está uma alternativa para que isso aconteça. Com a equação (96), podemos construir os gráficos representados na figura 4.2.

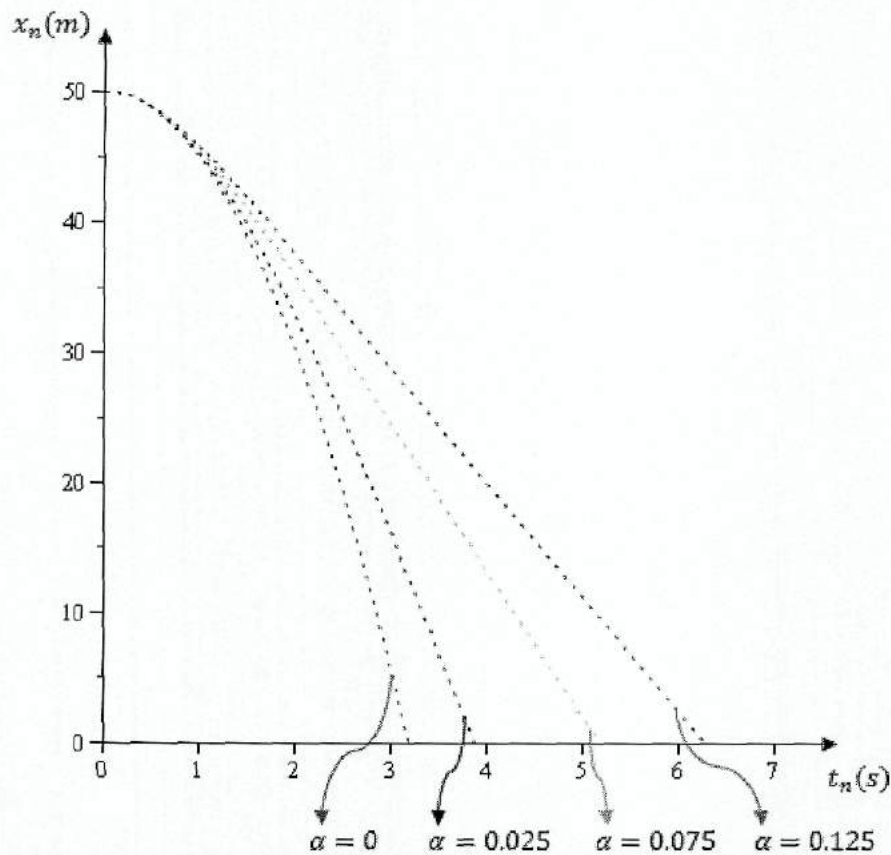


Figura 4.2 - Soluções de problemas de movimento de corpos em queda submetidos a força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade.

4.2- Movimento de Projéteis

Na ausência de gravidade, você poderia atirar uma pedra para o céu com um certo ângulo e ela seguiria uma trajetória retilínea. Por causa da gravidade, entretanto, a trajetória se curva. Uma pedra arremessada, uma bala de canhão disparada, uma bola de futebol chutada ou qualquer objeto lançado por algum meio e que segue em movimento por sua própria inércia é chamado de projétil. Aparentemente, a trajetória de um projétil é muito complicada. Entretanto, essa trajetória é surpreendentemente simples quando observamos separadamente as componentes horizontal e vertical da velocidade. Na ausência de resistência aerodinâmica, a trajetória curvilínea de um projétil é uma com-

binção de um movimento horizontal, com velocidade constante, com um movimento vertical uniformemente acelerado (retardado). Os movimentos verticais, neste caso, são idênticos aos movimentos de subida e de queda livres do corpo.

Consideremos o movimento de um projétil. Se considerarmos desprezível a ação do ar, a única força que age no projétil é a força peso $\vec{P} = m\vec{g}$. A força peso tem módulo mg , direção do eixo y e sentido igual ao sentido negativo do eixo y . Portanto, ao aplicando a segunda lei de Newton (29) no problema, obtemos:

$$\sum F_{x(n)} = ma_{x(n)} = m \left(\frac{v_{x(n+1)} - v_{x(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right) = 0,$$

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} = v_x = \text{constante},$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n + v_x \tau. \quad (97)$$

A equação (97) nos permite calcular os valores das abcissas do projétil. Para o cálculo dos valores das ordenadas, temos

$$\sum F_{y(n)} = -mg = m \left(\frac{v_{y(n+1)} - v_{y(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right),$$

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} - g(t_{n+1} - t_n),$$

$$\Rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} = v_{y(n)} - g(t_{n+1} - t_n),$$

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n)} \tau - g \tau^2. \quad (98)$$

As equações (97) e (98) nos permitem calcular os valores numéricos dos pares ordenados que, quando escritos no plano x vs. y nos fornece a trajetória do projétil. Observe a figura 4.3.

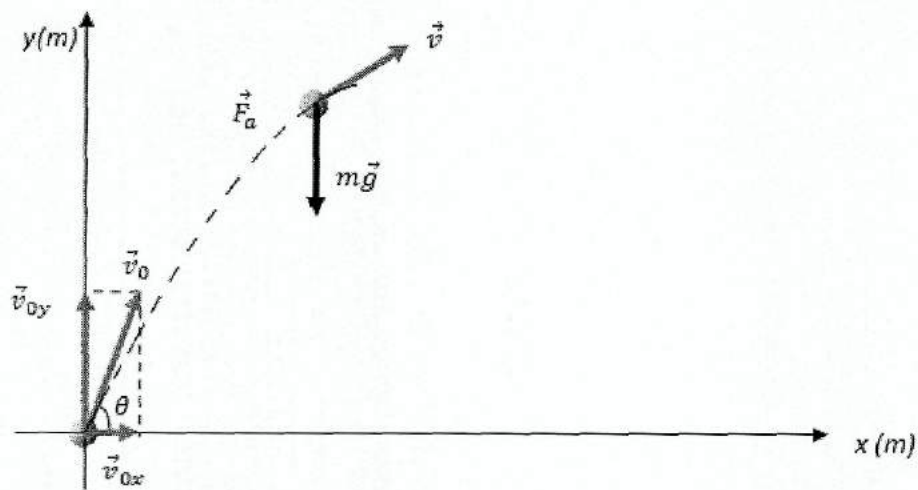


Figura 4.3

Consideremos o vetor velocidade inicial $\vec{v}_0 = (25,0\text{ m/s})\hat{x} + (20,0\text{ m/s})\hat{y}$. Seu módulo é $|\vec{v}_0| = 32,0\text{ m/s}$ e sua direção forma um ângulo $\theta = 38,66^\circ$ com a reta das abscissas. A partir desses valores e considerando um passo de $0,01\text{ s}$, podemos construir a trajetória representada na figura 4.3.

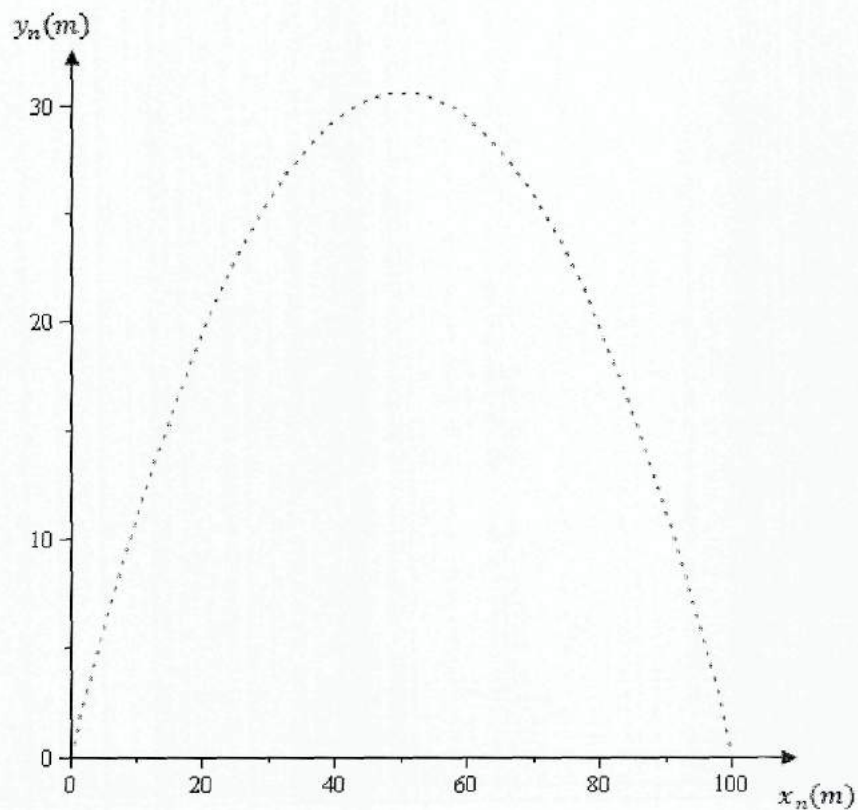


Figura 4.4 - Trajetória discreta de um projétil.

Se traçarmos uma parábola e compararmos com a curva tracejada observaríamos uma discrepância entre uma e outra. Isto se deve à escolha da discretização (28).

Agora, para o mesmo movimento, vamos considerar a ação do ar. A força de arrasto (94) tem a mesma direção e sentido contrário do vetor velocidade do projétil. Decompondo o vetor força de arrasto em componentes ortogonais, podemos escrever

$$\vec{F}_{a(n)} = \vec{F}_{ax(n)} + \vec{F}_{ay(n)}.$$

Observe a figura 4.5.

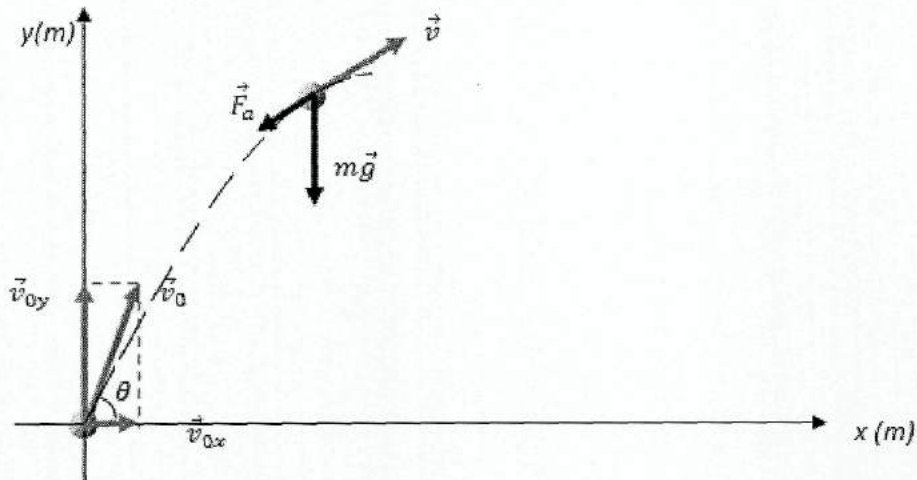


Figura 4.5

Observe que $v_n^2 = v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2$. As componentes do vetor força de arrasto são

$$F_{ax(n)} = F_{a(n)} \cos \theta = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2) \cos \theta \quad e \quad F_{ay(n)} = F_{a(n)} \sin \theta = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2) \sin \theta.$$

Além das relações acima, podemos escrever

$$\cos \theta = \frac{v_{x(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}} \quad e \quad \sin \theta = \frac{v_{y(n)}}{\sqrt{v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2}},$$

e, portanto, obtemos

$$F_{ax(n)} = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \quad e \quad F_{ay(n)} = b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{y(n)}.$$

Aplicando a segunda lei de Newton no problema, obtemos

$$\begin{aligned}\sum F_{x(n)} &= ma_{x(n)} = m \left(\frac{v_{x(n+1)} - v_{x(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right) = -b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)}, \\ v_{x(n+1)} &= v_{x(n)} - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \tau, \\ \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} &= v_{x(n)} - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \tau, \\ x_{n+1} &= x_n + v_{x(n)} \tau - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{x(n)} \tau^2.\end{aligned}\tag{99}$$

Para o cálculo das abscissas e ordenadas, temos

$$\begin{aligned}\sum F_{y(n)} &= -mg - b(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{y(n)} = m \left(\frac{v_{y(n+1)} - v_{y(n)}}{t_{n+1} - t_n} \right), \\ v_{y(n+1)} &= v_{y(n)} - g\tau - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{y(n)} \tau, \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n} &= v_{y(n)} - g\tau - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{y(n)} \tau, \\ y_{n+1} &= y_n + v_{y(n)} \tau - g\tau^2 - \alpha(v_{x(n)}^2 + v_{y(n)}^2)^{\frac{1}{2}} v_{y(n)} \tau^2.\end{aligned}\tag{100}$$

Observe que as equações (97) e (98) são casos particulares das equações (99) e (100), respectivamente, e surgem quando desprezamos os efeitos resistivos causados pelo meio onde ocorre o movimento, ou seja, quando $b \cong 0$. Além disso, no caso de considerarmos a resistência do ar, os valores das abscissas e ordenadas dependem da massa do projétil.

Considerando o mesmo passo, a mesma velocidade inicial e o mesmo ângulo da situação anterior, podemos calcular as abscissas e ordenadas das trajetórias de um projétil de massa $m = 450$ g, considerando valores de α diferentes. Observe a figura 4.6.

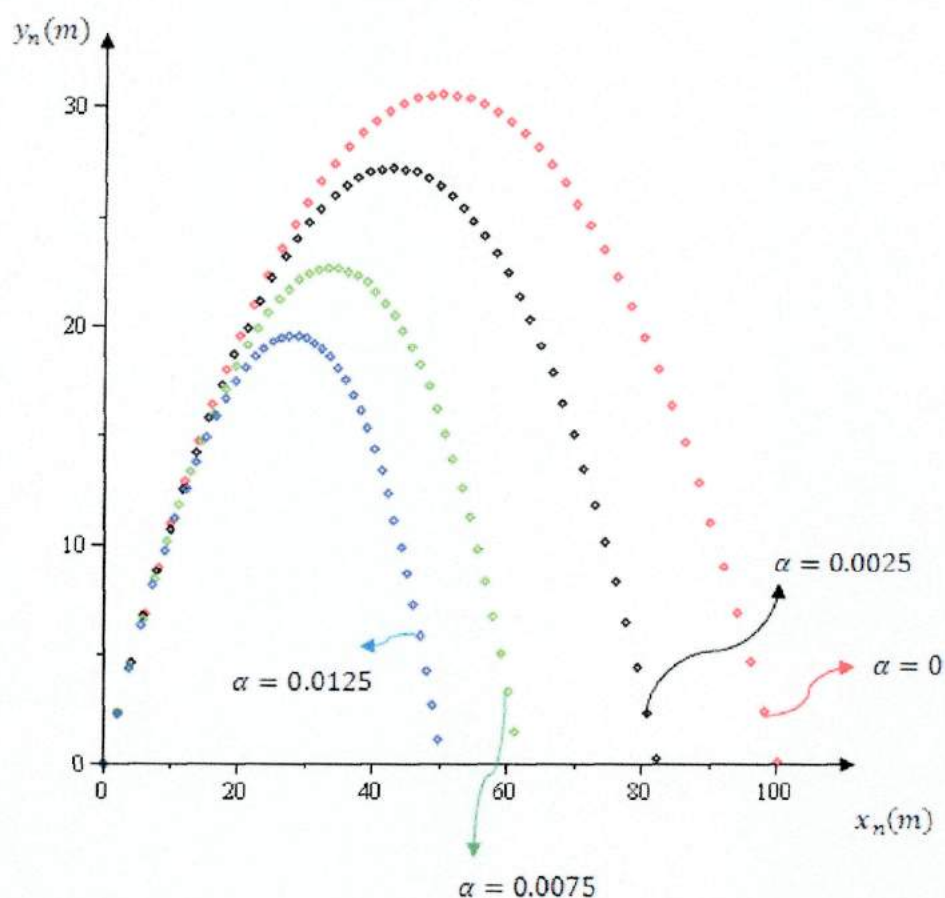


Figura 4.6 - Trajetórias de um projétil considerando-se a ação do ar com intensidades diferentes.

Note que com um procedimento analítico relativamente simples podemos discutir com os alunos no Ensino Médio os efeitos causados pela ação do ar. Os valores utilizados para a elaboração das trajetórias representadas na figura 4.6 são valores típicos de uma situação real: uma bola (projétil) de futebol lançada por um chute (considerando que a bola não tem movimento de rotação). Uma bola de futebol oficial tem massa aproximada de 450 g e um chute típico de uma partida de futebol costuma lançar a bola com velocidade inicial de 32,0 m/s. Os valores do coeficiente de resistividade e do ângulo também são boas aproximações de uma situação real.

Observando as trajetórias nos dois gráficos é fácil ver a diferença entre os alcances e as alturas que são atingidos pelo projétil. Os estudantes poderão comparar os valores das abscissas e ordenadas construindo tabelas com os resultados numéricos obtidos a partir da aplicação das equações (97), (98), (99) e (100). Com a programação do Maple 12

[1] disponível no Apêndice A os valores do coeficiente de resistividade do ar pode ser alterado e novos gráficos e tabelas podem ser construídos, aumentando o conjunto de dados que devem ser comparados. Com isso, o professor e os alunos poderão discutir a dinâmica do movimento dos projéteis. Acreditamos que este processo constitui um estudo de Mecânica que vai além da simples memorização de fórmulas.

4.3 - Oscilador Harmônico

Nesta seção, permita-nos desenvolver a solução de problemas de movimento de osciladores harmônicos abordando problemas trabalhados no Ensino Médio. Consideremos um corpo preso a extremidade de uma mola e que é deslocado da sua posição de equilíbrio $x = 0$, conforme figura 4.7:

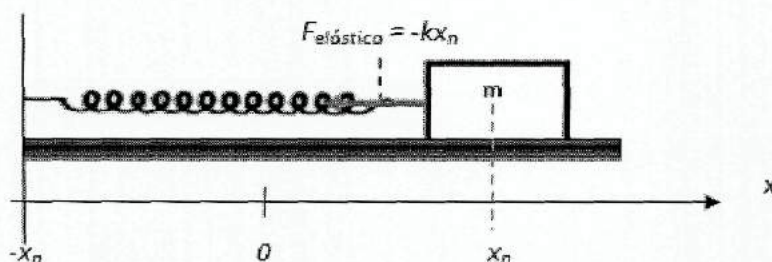


Figura 4.7

Desprezemos inicialmente todas as forças de atrito e a massa da mola. Aplicando a segunda lei de Newton (29), temos:

$$ma_n = -kx_n,$$

$$\Leftrightarrow m \left(\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) = -kx_n,$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = -\frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n),$$

$$\Leftrightarrow v_{n+1} = v_n - \frac{k}{m}x_n\tau, \quad (101)$$

que nos permite calcular as velocidades do corpo em diferentes momentos de sua trajetória. Para obtermos uma expressão que nos permita calcular as posições do corpo em diferentes instantes de tempo, devemos aplicar a equação (27). Então, temos

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} = v_n - \frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n),$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - x_n = -\frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n)^2 + v_n(t_{n+1} - t_n),$$

$$x_{n+1} = x_n + v_n\tau - \frac{k}{m}x_n\tau^2. \quad (102)$$

Deve ser observado que este processo de solução de problemas de movimento é exatamente o oposto da forma como os osciladores harmônicos são estudados no Ensino Médio. Muitos livros trazem para os alunos exercícios nos quais os gráficos estão prontos e deles os alunos têm que tirar informações para solucionar os exercícios. Nossa proposta é que o aluno resolva o problema, aplicando a segunda lei de Newton, e construa a solução gráfica do problema. A Física Discreta permite que isso seja um processo possível.

Durante pesquisas em livros de diferentes autores, deparei-me com um exercício que gostaria de trabalhar nesta seção. O enunciado do exercício é: “A figura deste problema mostra o gráfico $X(t) \times t$ para um corpo em MHS. Escreva (com valores numéricos) a equação que fornece a posição em função do tempo para este movimento”.

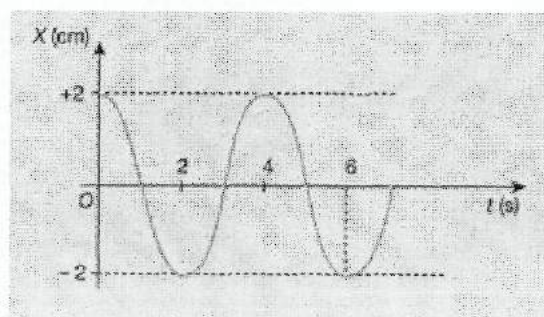


Figura 4.8 - Figura retirada do livro

Observe que a solução do problema de movimento já é dada ao aluno. Nos estudos deste tipo de movimento é informado ao aluno que a solução deste tipo de problema é da forma

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad (103)$$

onde A e ω são, respectivamente, a amplitude e a frequência angular do movimento do corpo. A amplitude corresponde ao valor máximo da posição, na qual a velocidade é igual a zero. E a frequência angular é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (104)$$

onde T é o período do movimento, que corresponde ao tempo que o corpo gasta para dar uma oscilação completa. Portanto, o aluno resolve o exercício tirando do gráfico do movimento os valores da amplitude e do período e usando as expressões (103) e (104):

$$x(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{4}t\right) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right). \quad (105)$$

Gostaríamos de fazer uma pergunta: o que o aluno aprende com a solução de um exercício como este?

Agora, permita-nos abordar o mesmo problema aplicando a Física Discreta. O sistema massa-mola da figura no início da seção reproduz um problema análogo, considerando $x_0 = 2 \text{ cm}$. A massa está submetida a uma força elástica exercida pela mola de constante elástica $k = 9,86 \text{ N/m}$ e executa um movimento harmônico simples de

amplitude $A = 2\text{ cm}$ e período

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\frac{\sqrt{4,0\text{ kg}}}{\sqrt{9,86\text{ kg/s}^2}} = 4,0\text{ s}. \quad (106)$$

A aplicação da segunda lei de Newton no problema resultou na expressão (102), que nos permite construir o gráfico da posição em função do tempo do movimento do corpo.

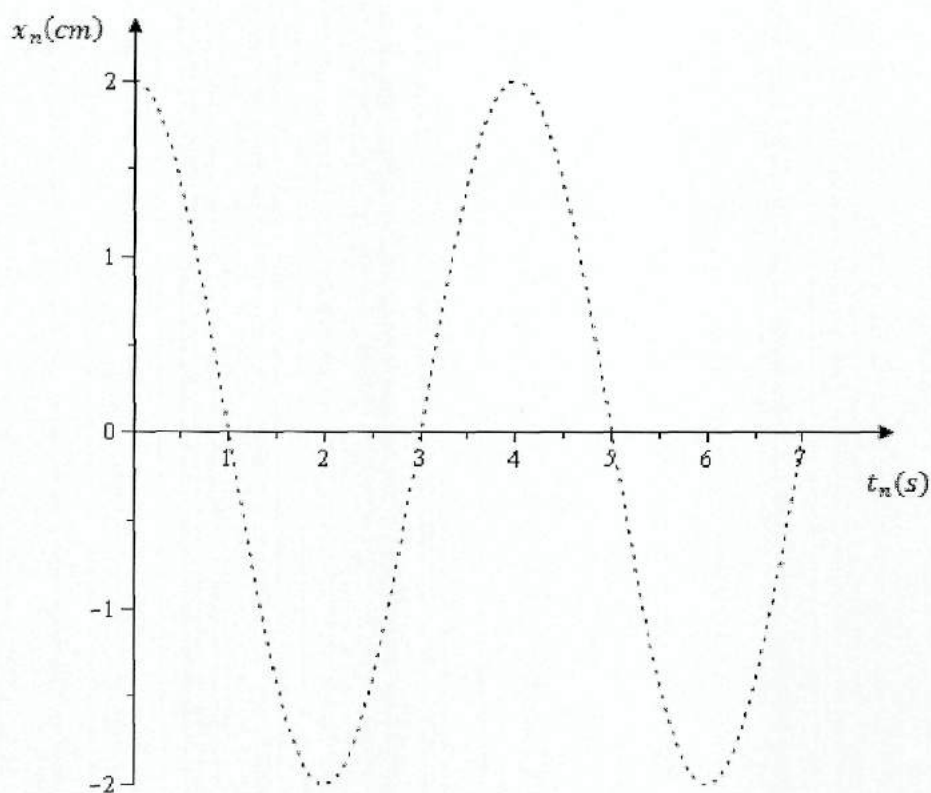


Figura 4.9 - Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico com os mesmos parâmetros do exercício observado no livro.

Observe que obtivemos a mesma solução que está representada na figura (4.8) do exercício. Os alunos podem construir o gráfico acima, escolhendo um passo de $0,01\text{ s}$. Gostaríamos de lembrar novamente que todos estes procedimentos podem, também, ser realizados com calculadoras. Sabemos que estes cálculos são mais trabalhosos com o uso de calculadoras, mas podemos diminuir o número de pontos a serem marcados em um papel milimetrado e assim viabilizar os cálculos. Assim estaremos proporcionando ao aluno a oportunidade de desenvolver sua autonomia, o que nos aproxima dos

objetivos almejados pelas recomendações do PCNEM.

Agora, comparemos alguns valores numéricos obtidos com a aplicação das equações (103) e (102). Para isto, consideremos o valor do passo igual a 0,01 s. A tabela abaixo mostra os valores encontrados.

n	Tempo(s)	x_n (m)	x (m)
9	0,1	1,97294	1,97538
49	0,5	1,40364	1,41421
89	0,9	0,29869	0,31287
129	1,3	-0,92024	-0,90798
169	1,7	-1,78800	-1,78201
209	2,1	-1,97343	-1,97538
249	2,5	-1,40577	-1,41421
289	2,9	-0,30165	-0,31287
329	3,3	0,91758	0,90798
369	3,7	1,78666	1,78201
409	4,1	1,97392	1,97538
449	4,5	1,40790	1,41421
489	4,9	0,30461	0,31287
529	5,3	-0,91492	-0,90728
569	5,7	-1,78531	-1,78201
609	6,1	-1,97440	-1,97538
649	6,5	-1,41003	-1,41418
689	6,9	-0,30757	-0,31286

Tabela 1

Vamos considerar uma força de atrito sobre o sistema massa-mola, exercida pela superfície sobre o corpo. O módulo dessa força é o resultado do produto entre o módulo da força de reação normal $|\vec{N}| = mg$, exercida pela superfície sobre o corpo, e o coeficiente de atrito cinético μ_c . Aplicando a segunda lei de Newton no problema, obtemos

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) &= -kx_n - \mu_c N, \\
 \Leftrightarrow v_{n+1} &= v_n - \frac{k}{m} x_n \tau - \frac{\mu_c N}{m} \tau, \\
 \Leftrightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} &= v_n - \frac{k}{m} x_n \tau - \frac{\mu_c N}{m} \tau, \\
 \Leftrightarrow x_{n+1} &= x_n + v_n \tau - \frac{k}{m} x_n \tau^2 - \mu_c g \tau^2. \tag{107}
 \end{aligned}$$

Na equação (107), a parcela $\mu_c g \tau^2$ terá valor positivo quando o oscilador tiver ve-

locidade negativa; e valor negativo quando a velocidade for positiva. A figura 4.10 é o gráfico $x_n(t_n)$ vs. t_n do movimento do corpo preso a mola. Nesta situação consideramos que a mola tem constante elástica $k = 50\text{ N/m}$ e que o coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0,2$. Os valores iniciais das posição e velocidade são $x_0 = 1,0\text{ m}$ e $v_0 = 0$.

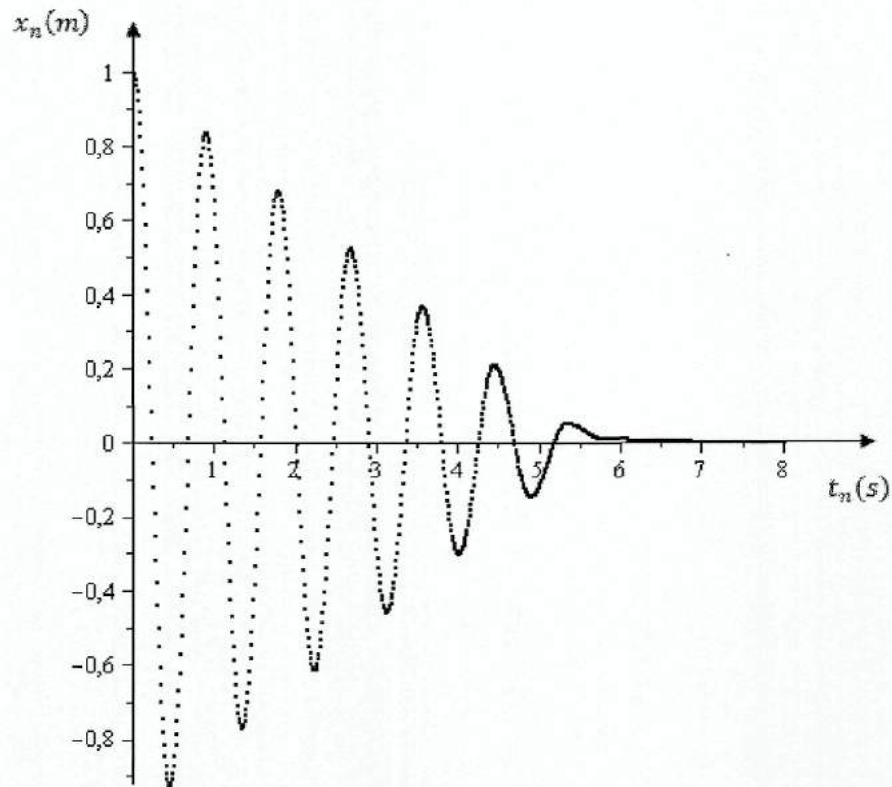


Figura 4.10 - Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico submetido ao atrito cinético.

Outro exemplo, no caso de um oscilador harmônico, é considerar a força de resistência que um líquido exerce sobre um corpo. Consideremos o sistema massa-mola da figura 4.11.

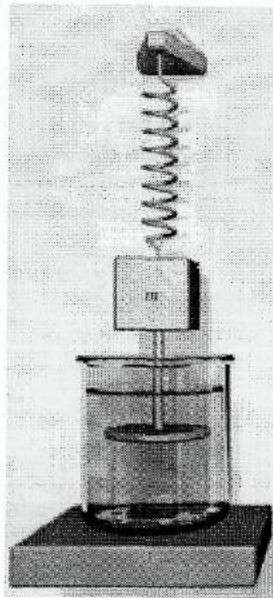


Figura 4.11

A força resistiva exercida pelo líquido sobre o corpo será proporcional a velocidade do corpo. Como se trata de um problema unidimensional, omitimos a notação vetorial. Portanto, podemos aplicar a segunda lei de Newton no problema e obtermos

$$\begin{aligned}
 m \left(\frac{v_{n+1} - v_n}{t_{n+1} - t_n} \right) &= -kx_n - bv_n, \\
 \Leftrightarrow v_{n+1} &= v_n - \frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n) - \frac{bv_n}{m}(t_{n+1} - t_n), \\
 \Rightarrow \frac{x_{n+1} - x_n}{t_{n+1} - t_n} &= v_n - \frac{k}{m}x_n(t_{n+1} - t_n) - \frac{bv_n}{m}(t_{n+1} - t_n), \\
 \Leftrightarrow x_{n+1} &= x_n + v_n\tau - \frac{k}{m}x_n\tau^2 - \frac{bv_n}{m}\tau^2. \tag{108}
 \end{aligned}$$

A equação (108) nos permite calcular a posição em função do tempo e construirmos o gráfico que representa a solução do problema. Consideremos que a mola que suspende o corpo, de massa $m = 2 \text{ kg}$, tem constante elástica $k = 100 \text{ N/m}$ e que o coeficiente de resistividade seja $b = 2 \text{ N.s/m}$. Então, os valores numéricos e a solução gráfica do problema serão:

n	t (s)	x (cm)	n	t (s)	x (cm)
9	0.1	5.22008	309	3.1	0.11806
19	0.2	7.54716	319	3.2	-1.01157
29	0.3	6.19068	329	3.3	-1.56930
39	0.4	2.12493	339	3.4	-1.35403
49	0.5	-2.52650	349	3.5	-0.53841
59	0.6	-5.57459	359	3.6	0.446137
69	0.7	-5.77476	369	3.7	1.13195
79	0.8	-3.30755	379	3.8	1.23309
89	0.9	0.44055	389	3.9	0.75907
99	1.0	3.62824	399	4.0	-0.01772
109	1.1	4.84726	409	4.1	-0.71211
119	1.2	3.72682	419	4.2	-1.0135
129	1.3	1.00444	429	4.3	-0.82135
139	1.4	-1.91826	439	4.4	-0.27087
149	1.5	-3.68180	449	4.5	0.35118
159	1.6	-3.58829	459	4.6	0.75271
169	1.7	-1.85816	469	4.7	0.77066
179	1.8	0.55866	479	4.8	0.43348
180	1.8	0.79165	489	4.9	-0.07025
189	1.9	2.48819	499	5.0	-0.49360
199	2.0	3.09218	509	5.1	-0.65011
209	2.1	2.22037	519	5.2	-0.49352
219	2.2	0.41368	528	5.2	-0.16677
229	2.3	-1.40996	529	5.3	-0.12558
239	2.4	-2.412638	539	5.4	0.26476
249	2.5	-2.21304	549	5.5	0.49637
259	2.6	-1.01765	559	5.6	0.47820
269	2.7	0.53012	569	5.7	0.24247
279	2.8	1.68679	579	5.8	-0.08191
289	2.9	1.95932	589	5.9	-0.33772
299	3.0	1.30726	599	6.0	-0.41419

Tabela 2

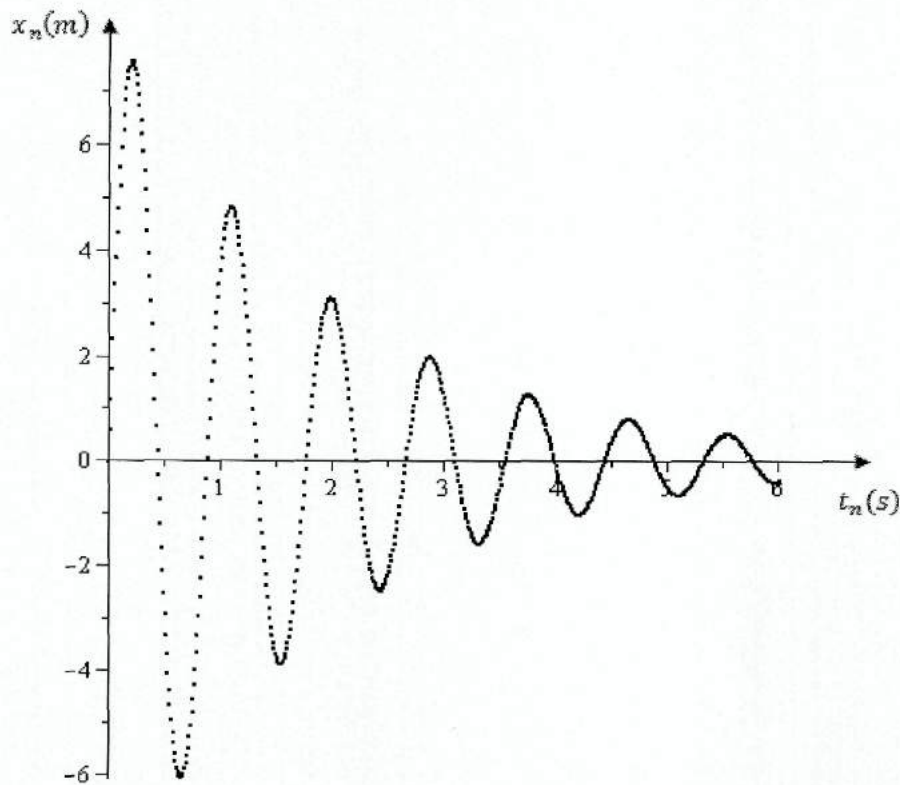


Figura 4.12 - Solução do problema de movimento de um oscilador harmônico amortecido.

Um oscilador harmônico pode executar um movimento bidimensional. Neste caso e em outros casos de movimentos bidimensionais, necessitamos de duas coordenadas para descrevermos o movimento. Além disso, no estudo de movimentos bidimensionais, as grandezas físicas devem ser tratadas em sua forma vetorial. Portanto, a equação (27) deve assumir a forma

$$\vec{v}_{n+1} = \frac{\vec{r}_{n+1} - \vec{r}_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (109)$$

Onde \vec{r} é o vetor posição da partícula. E a equação (28) assume a forma

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n}{t_{n+1} - t_n}. \quad (110)$$

Agora vamos estudar um movimento bidimensional especial. Consideremos o oscilador harmônico na figura 4.13.

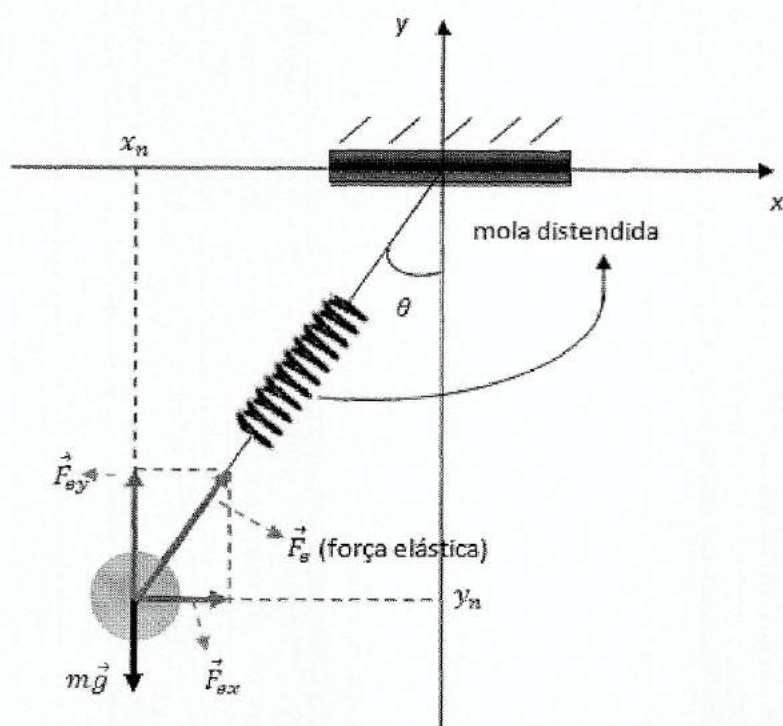


Figura 4.13 - Oscilador em duas dimensões.

O estado inicial do oscilador da figura 4.13 pode causar, num primeiro momento, a impressão de que é difícil descrever o movimento posterior do oscilador. De fato, a solução deste tipo de problema é difícil. Entretanto, vamos resolvê-lo e mostrar que com a Física discreta é possível o estudo deste tipo de problema no Ensino Médio e até mesmo no Ensino Superior. Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos

$$\sum \vec{F}_n = m\vec{a}_n,$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_n = \vec{F}_{e(n)} + \vec{P} = m\vec{a}_n,$$

onde $\vec{F}_{e(n)} = -k(l_n - l_0)\hat{l} = -k(\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0)\hat{l}$ é a força elástica exercida pela mola sobre o corpo de massa m . A força elástica é proporcional a distensão da mola. Os termos l_0 e \hat{l} representam o comprimento da mola relaxada e o vetor unitário na direção da distensão da mola, respectivamente. Quando a mola é distendida, seu comprimento é $l_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$. Decompondo a força elástica em componentes ortogonais, temos

$$F_{ex(n)} = F_{e(n)} \text{sen}(\theta) \quad e \quad F_{ey(n)} = F_{e(n)} \text{cos}(\theta). \quad (111)$$

Podemos observar na figura 4.13 que

$$\text{sen}(\theta) = \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \quad e \quad \text{cos}(\theta) = \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}.$$

Substituindo essas relações nas equações (111), obtemos

$$F_{ex(n)} = -k \left(\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0 \right) \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \quad e \quad F_{ey(n)} = -k \left(\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0 \right) \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}.$$

As componentes ortogonais da força peso do oscilador, desprezando a massa da mola, são

$$P_x = 0 \quad e \quad P_y = -mg.$$

Aplicando a segunda lei de Newton no problema, temos

$$\begin{aligned} \sum F_{x(n)} = ma_{x(n)} &= -k \left(x_n - l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} \right), \\ \Leftrightarrow a_{x(n)} &= \frac{k}{m} \left(l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - x_n \right) \end{aligned} \quad (112)$$

e

$$\begin{aligned} \sum F_{y(n)} = ma_{y(n)} &= -mg - k \left(\sqrt{x_n^2 + y_n^2} - l_0 \right) \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}}, \\ \Leftrightarrow a_{y(n)} &= \frac{k}{m} \left(l_0 \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - y_n \right) - g. \end{aligned} \quad (113)$$

Para as velocidades, temos

$$v_{x(n+1)} = v_{x(n)} + \frac{k}{m} \left(l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - x_n \right) \tau \quad (114)$$

e

$$v_{y(n+1)} = v_{y(n)} + \left(\frac{k}{m} \left(l_0 \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - y_n \right) - g \right) \tau \quad (115)$$

Para as abscissas, temos

$$x_{n+1} = x_n + v_{x(n+1)}\tau \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n + v_{x(n)}\tau + \frac{k}{m} \left(l_0 \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - x_n \right) \tau^2, \quad (116)$$

e para as ordenadas, temos

$$y_{n+1} = y_n + v_{y(n+1)}\tau \Leftrightarrow y_{n+1} = y_n + v_{y(n)}\tau + \left(\frac{k}{m} \left(l_0 \frac{y_n}{\sqrt{x_n^2 + y_n^2}} - y_n \right) - g \right) \tau^2. \quad (117)$$

As expressões (116) e (117) constituem a solução discreta do problema de movimento do oscilador em duas dimensões da figura 4.13. Podemos, a partir dessas equações, estudar a trajetória do oscilador.

Consideremos os seguintes valores numéricos: $k = 25,0 N/m$, $massa = 50,0 g$, $l_0 = 0,60 m$, $x_0 = 10,0 cm$, $y_0 = -0,70 cm$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$ e $\tau = 0.01 s$. Considerando esses valores e aplicando as equações (116) e (117) obtemos o gráfico do movimento representado na figura 4.14.

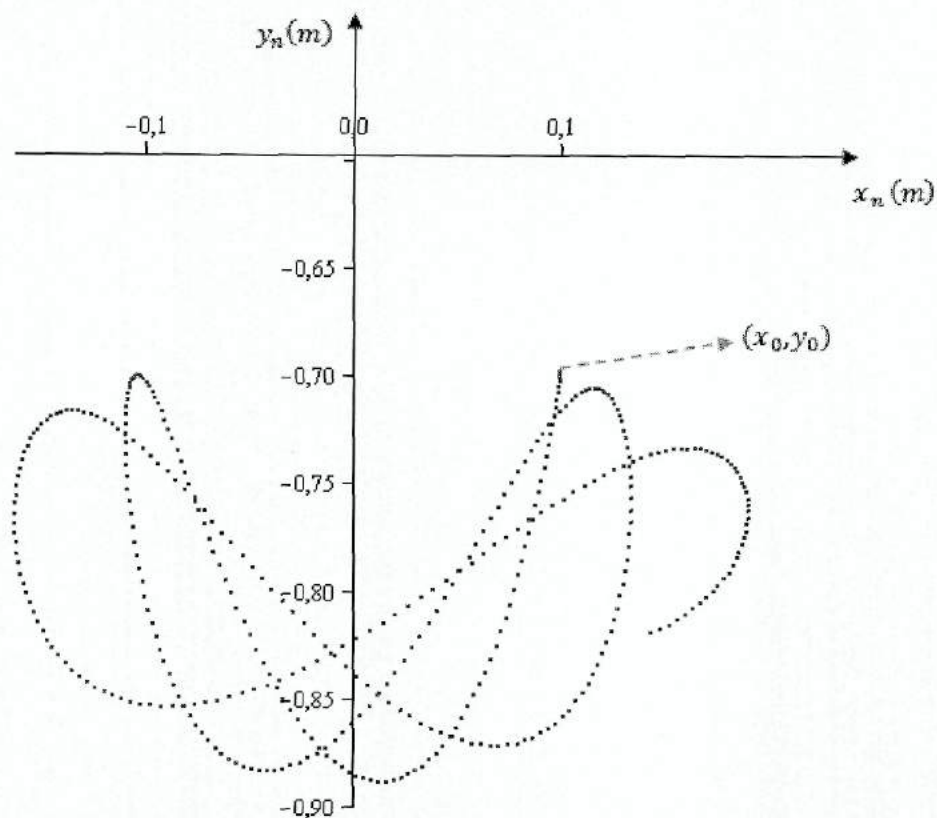


Figura 4.14 - Solução discreta do problema de movimento de um oscilador harmônico em duas dimensões.

Além de resolvermos problemas difíceis com aplicações de equações relativamente simples, podemos ainda estimular os alunos a analisarem relações matemáticas e preverem alguns resultados. Por exemplo, ao observar as equações (116) e (117) os alunos devem perceber que se $x_0 = 0$, $v_{x0} = 0$, $y_0 \neq \frac{mg - l_0}{k}$ o oscilador representado na figura 4.13 oscilará na direção vertical. Considerando os valores numérico $k = 25,0 N/m$, $massa = 50,0 g$, $l_0 = 0,60 m$, $x_0 = 0$, $y_0 = -1,0 cm$, $v_{x0} = v_{y0} = 0$ e $\tau = 0.01 s$, obtemos o gráfico da figura 4.15.

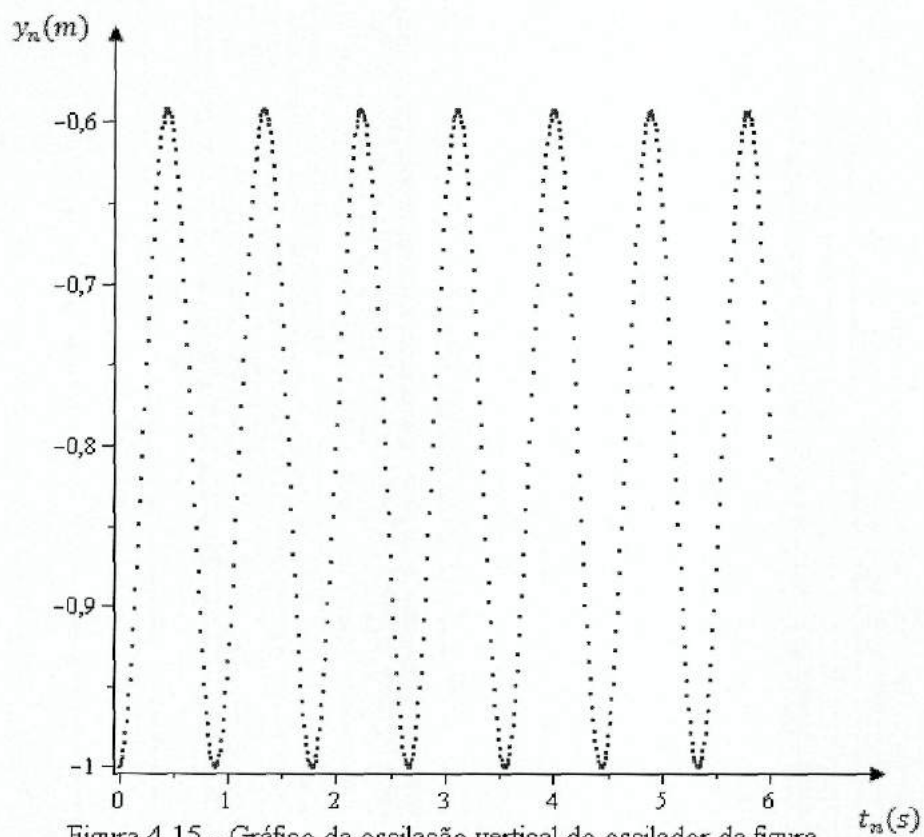


Figura 4.15 - Gráfico da oscilação vertical do oscilador da figura 4.13.

Nesta seção tentamos demonstrar que é possível abordarmos problemas de movimento, estudados no Ensino Médio, de maneira diferente, lançando mão da Física Discreta. Além disso, buscamos mostrar que a Física Discreta nos permite estudar problemas que não são discutidos nas salas de aula do Ensino Médio.

Apêndice A - Programação para Computadores

Nesta seção está disponível uma programação do Maple 12 [1] com a qual é possível realizar todos os cálculos que foram feitos neste trabalho. É importante notar que este procedimento pode ser realizado em escolas de nível médio, tanto em sala de aula como em laboratórios de informática. Dispondo de computadores com o programa Maple 12 [1] ou outros equivalentes instalados os alunos e o professor poderão escrever a seguinte programação:

```

mecdiscreta := proc( $\tau, T, \mu, a_x, a_y, x_0, y_0, v_{x0}, v_{y0}$ )local (fat, g, v_x, v_y, x, y, lis, N, n, t, f_x, f_y);
   $f_x := unapply(a_x, z_x, z_y, u_x, u_y)$ ;
   $f_y := unapply(a_y, z_x, z_y, u_x, u_y)$ ;
   $g := 9.8$ ;
   $x := x_0$ ;
   $y := y_0$ ;
   $t := 0$ ;
   $lis := [[x_0, y_0]]$ ;
   $N := floor\left(\frac{T}{\tau}\right)$ ;
   $v_x := v_{x0}$ ;
   $v_y := v_{y0}$ ;
   $fat := \mu \cdot g$ ;
  for  $n$  from 1 to  $N$  do
    if  $v_y > 0$  then  $fat := -\mu \cdot g$  end if;
    if  $v_y < 0$  then  $fat := \mu \cdot g$  end if;
     $t := t + \tau$ ;
     $v_x := v_x + f_x(x, y, v_x, v_y) \cdot \tau$ ;
     $v_y := v_y + f_y(x, y, v_x, v_y) \cdot \tau + fat \cdot \tau$ ;
     $x := x + v_x \cdot \tau$ ;
     $y := y + v_y \cdot \tau$ ;
     $lis := [op(lis), [x, y]]$ ;
  od;
end proc;

```

Na programação acima, a_x e a_y são as componentes ortogonais do vetor aceleração envolvida no movimento estudado, caso o movimento seja bidimensional. Se o movimento for unidimensional escolha o eixo dos x ou dos y para descrever o movimento e trabalhe com a aceleração correspondente. Por exemplo, para um oscilador oscilando na direção do eixo x , a aceleração será $a_x = -\frac{k}{m}x$. Se estiver oscilando na direção y a

aceleração será $a_y = -\frac{k}{m}y$. Os termos fat e μ são, respectivamente, a força de atrito entre uma superfície e a massa que se movimenta sobre ela, e o coeficiente de atrito cinético. O termo T é o tempo total no qual o movimento ocorre.

Antes de realizar os procedimentos abaixo para usar a programação, verifique que tipo de gráfico você deseja construir: $x(t)$ versus t , $y(t)$ versus t , $v_x(t)$ versus t , $v_y(t)$ versus t ou x versus y . Por exemplo, se você deseja estudar o movimento de queda livre de um corpo e, primeiramente, pretende construir um gráfico $v_y(t)$ versus t , escreva $lis := [[t, v_{y0}]]$ e $lis := [op(lis), [t, v_y]]$ nos lugares de $lis := [[x_0, y_0]]$ e $lis := [op(lis), [x, y]]$, respectivamente. Entretanto, se desejar construir um gráfico $y(t)$ versus t , escreva $lis := [[t, y_0]]$ e $lis := [op(lis), [t, y]]$ no lugar de $lis := [[x_0, y_0]]$ e $lis := [op(lis), [x, y]]$. Você pode escolher tanto a reta x quanto a reta y como referencial para a descrição de um movimento unidimensional.

Para realizar cálculos com a programação acima, deve-se seguir os seguintes passos:

1. Escolha um nome qualquer para o cálculo e insira a programação. Por exemplo : $quedalivre := mecdiscreta(0.01, 4, 0, 0, -9.8, 0, 50, 0, 0)$. Os valores que estão entre parênteses são os valores dos parâmetros que estão entre parênteses na programação. Assim, neste exemplo, temos uma queda livre com valores: $\tau = 0.01s, T = 4s, \mu = 0, a_x = 0, a_y = -9.8m/s^2, x_0 = 0, y_0 = 50m, v_{x0} = 0, v_{y0} = 0$.
2. Em seguida, escreva $plot(quedalivre)$;

Apêndice B - Números Complexos

Podemos representar o número complexo (67) em coordenadas polares e constatar que

$$u = |z| \cos \theta$$

e

$$w = |z| \operatorname{sen} \theta.$$

Então, substituindo os resultados acima na relação (67), temos

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \quad (118)$$

Da relação (118), podemos escrever

$$z^n = |z|^n (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n. \quad (119)$$

Calculando o termo $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n$, para $n = 1, 2, 3, \dots, n$, temos

$$n = 1 \Rightarrow (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

$$n = 2 \Rightarrow (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta + i 2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = \cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta,$$

$$n = 3 \Rightarrow (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^2 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta) (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$= \cos \theta \cos 2\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta + i (\cos 2\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} 2\theta) = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta,$$

$$n = 4 \Rightarrow (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = (\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

$$= \cos \theta \cos 3\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 3\theta + i (\cos 3\theta \operatorname{sen} \theta + \cos \theta \operatorname{sen} 3\theta) = \cos 4\theta + i \operatorname{sen} 4\theta,$$

⋮

$$n = n \Rightarrow (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = (\cos (n\theta) + i \operatorname{sen} (n\theta)).$$

Portanto, substituindo o resultado acima na expressão (119), temos

$$z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)). \quad (120)$$

Limites

Apesar de as regras de cálculo de limites de funções não serem estudadas no Ensino Médio, nesta seção abordaremos alguns resultados de limites de funções muito comuns em cálculo, especialmente quando se resolve problemas de movimento. As relações de limite abaixo não serão demonstradas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (121)$$

onde e é chamado de número de Euler. Na seção 3.3 (Queda com atrito), pode-se observar que nas soluções obtidas aparece o termo $(1 - \alpha\tau)^n$. Na seção foi aplicada a expansão binominal para analisar os resultados quando α é muito pequeno, em uma medida que o torna desprezível. Agora, vamos usar a relação de limite (121) para analisar o resultado quando τ tende para zero. O binômio $(1 - \alpha\tau)^n$ pode ser escrito de outra forma equivalente, considerando-se a equação (26): $(1 - \alpha\tau)^n = \left(1 - \alpha \frac{t_n}{n}\right)^n = \left(1 - (\alpha t_n) \left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Observe que para um instante t fixo, quando τ tende para zero n tende para ∞ . Assim, aplicando o limite (121), temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + (-\alpha t) \left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-\alpha t}.$$

Em palavras, quando τ tende para zero o binômio $(1 - \alpha\tau)^n$ tende para $e^{-\alpha t}$. Nesta situação, temos $t_{n+1} = t_n = t$. Observe ainda que quando τ tende para zero os termos $(1 - \alpha\tau)$, na (49), e $\beta = \left(1 - \frac{\alpha\tau}{2}\right)$, na (51), tendem para 1. Desta forma, pode-se

reescrever as equações (49) e(51)

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{(g + \alpha v_0)}{\alpha^2} \left([e^{-\alpha t} - 1] + \alpha t \right),$$

que corresponde a solução contínua do mesmo problema.

As equações (77) e (93) diferem pelo termo $\left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right)^n$. Quando τ tende para zero, temos

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}\right)^n &= (1 + (\omega\tau)^2)^{\frac{n}{2}}, \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (\omega\tau)^2)^{\frac{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 + (\omega\tau)^2)^n \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + (\omega\tau)^2)^n \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \omega^2 t^2 \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{2n}} = \left(e^{\omega^2 t^2} \right)^{\frac{1}{2n}} = 1, \end{aligned}$$

pois $n \rightarrow \infty$. Então, podemos concluir que tanto a equação (77) quanto a equação (93) tendem para a solução contínua do mesmo problema quando τ tende para zero, pois, quando τ tende para zero a frequência angular discreta ω_d que aparece nas equações tende para $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Aplicando as regras de cálculo de limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} c = c \quad (c = \text{constante})$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(cx)}{x} = c$$

podemos escrever

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_d = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \arctan(\omega\tau) \Leftrightarrow \omega_d = \omega$$

e

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \omega_d = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \arctan\left(\frac{4\omega\tau}{4 - \omega^2\tau^2}\right) \Leftrightarrow \omega_d = \omega.$$

Referências Bibliográficas

- [1] Maple is a registered trademark of Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc.; see <http://www.maplesoft.com>.
- [2] MEC. *Parâmetros Curriculares para o Ensino Médio, Física*. Ministério da Educação e Cultura. Brasil, 2000.
- [3] MEC. *PCN+ Ensino Médio - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais ; Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura, 2002.
- [4] A D'INNOCENZO *et al* . Some studies in discrete mechanics. *European Journal of Physics* 8 : (1987) 245-252. Disponível em: <http://iopscience.iop.org/0143-0807/8/4/003>.
- [5] NUSSENZVEIG, Herch Moysés. *Curso de Física Básica 1: Mecânica*. 4. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- [6] LUZ, Antônio Máximo Ribeiro da; ÁLVARES, Beatriz Alvarenga . *Curso de Física: Volume 1*. 6. ed. São Paulo: Scipione, 2005.
- [7] GASPAR, Alberto. *Física Série Brasil*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004.
- [8] CARRON, Wilson; GUIMARÃES, Osvaldo. *As Fases da Física: volume único*. 2.ed. São Paulo: Moderna, 2002.
- [9] HEWITT, Paul G., *Física Conceitual*. trad. Trieste Freire Ricci e Maria Helena Gravina. 9. ed. Porto Alegre: Bookman, 2002.

- [10] STEWART, James. *Cálculo: volume 2*. trad. Antonio Carlos Moreti e Antonio Carlos Gilli Martins. 5. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.
- [11] SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GREGO, Sérgio Emílio. *Matemática Série Novo Ensino Médio: volume único*. 7. ed. São Paulo: Ática, 2003.
- [12] TIPLER, Paul Allan. *Física para cientistas e engenheiros: volume 1: Mecânica, oscilações e ondas, Termodinâmica*. trad. Fernando Ribeiro da Silva e Gisele Maria Ribeiro Vieira. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.