

Introdução à Turbulência

Atila Pantaleão Silva Freire

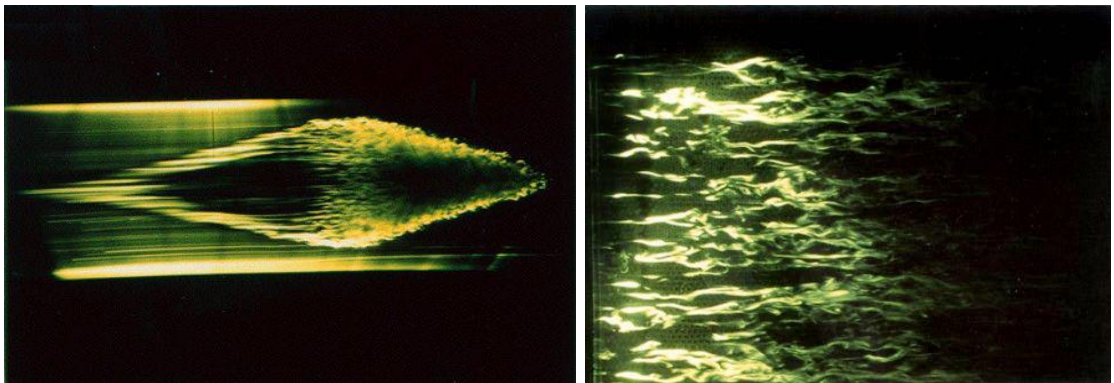
Programa de Engenharia Mecânica
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Esse texto introdutório à turbulência em fluidos foi escrito como elemento de apoio a um curso de 3 meses, ministrado regularmente na COPPE/UFRJ. Quando redigido, em 1993, não existia qualquer material especificamente direcionado ao estudo da Turbulência escrito na língua portuguesa. Essa lacuna foi evidentemente preenchida nos anos seguintes pelo vasto material gerado pelas “Escolas de Primavera em Transição e Turbulência”, organizadas a cada dois anos pela ABCM (Associação Brasileira de Ciências Mecânicas). De conteúdo sucinto, o texto não possui uma preocupação exacerbada com o rigor matemático ou, mesmo, com a citação de suas referências originais. Por isso, ele deve ser lido com cautela, e acompanhado por material complementar.

APSF



Turbulência na natureza



*Formação de um bolsão de turbulência e
turbulência de parede*



“Finally we should not altogether neglect the possibility that there is no such thing as ‘turbulence’. That is to say, it is not meaningful to talk of the properties of a turbulent flow independently of the physical situation in which it arises. In searching for a theory of turbulence, perhaps we are looking for a chimera ...

Perhaps there is no ‘real turbulence problem’, but a large number of turbulent flows and our problem is the self-imposed and possibly impossible task of fitting many phenomena into the Procrustean bed of universal turbulence theory. Individual flows should then be treated on their merits and it should not necessarily be assumed that ideas valid for one flow situation will transfer to others. The turbulence problem may then be no more than one of cataloguing. The evidence is against such an extreme point of view as many universal features seem to exist, but nevertheless cataloguing and classifying may be a more useful approach than we care to admit”.

P.G. Saffman (1978)

Conteúdo

1	Introdução à Turbulência em Sistemas Fluidos	1
1.1	Métodos Determinísticos e Estatísticos	2
1.2	Turbulência Isotrópica	3
1.3	Modelagem Pontual	3
1.4	Bibliografia	3
2	O Espaço de Fourier e a Turbulência Homogênea	5
2.1	A Representação no Espaço de Fourier de um Escoamento	5
2.2	As Equações de Navier-Stokes no Espaço de Fourier	7
2.3	A Utilização de Funções Aleatórias para a Descrição da Turbulência	8
2.4	Esquemas de Modelagem para as Teorias Espectrais	15
3	A Estrutura da Turbulência em Escoamentos Cisalhantes	22
3.1	Introdução	22
3.2	A Estrutura Dominante em Escoamentos Cisalhantes Bidimensionais	23
3.3	A Camada Crítica	24
4	A Modelagem Matemática da Turbulência	33
4.1	Introdução	33
4.2	Modelos de Zero-Equação	36
4.3	Modelos de Uma Equação	37
4.4	Modelos de Duas Equações	41
4.5	Modelos para Baixos Números de Reynolds	44
4.5.1	O modelo de Jones e Launder	44
4.5.2	O modelo de Launder e Sharma	45
4.5.3	O modelo de Lam e Bremhorst	45
4.5.4	O modelo de Chien	45
4.5.5	O modelo de Yang e Shih	46
4.6	O modelo de Fan et al.	46
5	Fechamento dos Momentos de 2ª Ordem	47
5.1	A Equação do Transporte para as Tensões Turbulentas, $\overline{u_i u_j}$	47
5.2	A Modelagem de ϵ_{ij}	49
5.3	A Modelagem dos Termos que Envolvem Flutuações de Pressão	50

Capítulo 1

Introdução à Turbulência em Sistemas Fluidos

A turbulência em sistemas fluidos faz parte de nossas experiências cotidianas. Por serem o ar e a água elementos que tendem a escoar neste regime, a turbulência se faz presente na camada limite atmosférica, no escoamento ao redor de corpos que se locomovem, em tubulações, no mar, nos vasos sanguíneos e nos pulmões, e numa outra infinidade de fenômenos que nos dizem respeito.

Normalmente, o leigo associa a turbulência a escoamentos que apresentem “desordem” ou “caos” no espaço ou no tempo. De fato, como veremos adiante, alguns escoamentos chamados de “turbulentos” possuem algumas vezes estruturas bem organizadas que podem ser tri-dimensionais ou mesmo quase bi-dimensionais. Torna-se então necessário obter uma definição precisa do que seja turbulência. Infelizmente esta definição é difícil, levando a maioria dos autores a conceituações pouco rigorosas sobre a turbulência. Para empreender alguma analiticidade ao nosso estudo é interessante introduzir a seguinte tentativa de definição para a turbulência:

- primeiro, o escoamento turbulento deve ser imprevisível, no sentido de que uma pequena incerteza nas suas condições iniciais se amplificará de modo a tornar impossível uma predição determinística precisa de sua evolução.
- segundo, o escoamento turbulento deve ser capaz de misturar suas quantidades “transportáveis” muito mais rapidamente do que se apenas processos de difusão molecular estivessem envolvidos no fenômeno.
- terceiro, o escoamento turbulento deve envolver um grande número de escalas características.

A definição acima é bastante geral, não nos oferecendo uma clara distinção entre “turbulência” e “caos”. Os desenvolvimentos recentes na teoria do caos resolveram um grave problema filosófico com os quais os fluidodinamicistas precisavam conviver. Eles demonstraram que existem sistemas dinâmicos simples cujas soluções devido a sensível dependência nas condições iniciais exibem aparente aleatoricidade. A questão de se estabelecer uma relação mais quantitativa entre o caos e a turbulência requer muito mais

elaboração, permanecendo aberta até hoje. Os processos de evolução do escoamento que levam a transição na camada limite, por exemplo, apresentam o aparecimento abrupto de oscilações de alta frequência numa situação que parece nada ter em comum com o caos observado em sistemas dinâmicos de baixa ordem. Em escoamentos abertos, o número de Reynolds crítico não é único mas parece crescer indefinidamente à medida que as perturbações externas diminuem. Em sistemas dinâmicos, o caos, uma vez que tenha aparecido, persistirá para qualquer número de Reynolds superior ao valor crítico. No entanto, alguns trabalhos mais recentes que emulam algumas características de escoamentos abertos, sugerem que o caos pode explicar turbulência. Embora sugestivos, estes estudos ainda precisam percorrer um longo caminho para se tornarem métodos preditivos.

1.1 Métodos Determinísticos e Estatísticos

Sabemos que os dois fluidos de maior importância em engenharia, o ar e a água, obedecem às equações de Navier-Stokes. Existe ampla evidência na literatura de que estas equações descrevem bem os escoamentos turbulentos, mesmo para escoamentos hipersônicos, desde que o número de Mach seja inferior a 15. As menores escalas macroscópicas são menores que a escala de dissipação de Kolmogorov e muito maiores que o caminho livre médio das moléculas que compõe o fluido. Na realidade, as equações de Navier-Stokes relacionam quantidades que representam médias espaciais em volumes de controle com arestas do tamanho das menores escalas macroscópicas.

Mostra-se que em duas dimensões as soluções das equações de N-S possuem existência e unicidade. Para escoamentos em três dimensões estes resultados só existem para tempos finitos.

O dito acima nos faz acreditar que a turbulência seja um fenômeno determinístico que evolui de modo extremamente complexo devido a interações não lineares. A princípio nos pareceria impossível tratar teoricamente para instantes de tempo arbitrários a evolução determinística de um dado escoamento turbulento. Na realidade, esta possibilidade vem se tornando cada vez mais atrativa devido ao tremendo avanço obtido no desenvolvimento de poderosos computadores. A solução numérica direta das equações de Navier-Stokes já pode ser obtida para alguns escoamentos turbulentos que ocorrem a baixos números de Reynolds. Para altos números de Reynolds entretanto, as simulações normalmente tratam apenas das maiores escalas de escoamento, apresentando erros devido a imprecisão dos vários esquemas numéricos e a nossa presente ignorância dos processos físicos que ocorrem nas menores escalas. Estes erros são amplificados pelas não linearidades das equações, e após um curto período de tempo o escoamento predito diferirá significativamente do campo de velocidades atual. Segue-se que, mesmo para um sistema determinístico, imprevisibilidade da solução ocorrerá. Uma simulação determinística das maiores escalas é, de qualquer forma, bastante útil por fornecer ao engenheiro informações estatísticas que podem ser obtidas com apenas uma realização do escoamento.

Ferramentas oriundas de métodos estatísticos são também de grande utilidade. Para um estado turbulento completamente desenvolvido, as funções que envolvem as várias flutuações do campo serão assumidas serem estatisticamente invariantes quando sujeitas a translações e rotações. Neste curso estudaremos a dinâmica da turbulência homogênea

isotrópica, em particular, a transferência de energia entre as várias escalas do movimento.

1.2 Turbulência Isotrópica

Nenhum escoamento turbulento que ocorra na realidade será homogêneo nas maiores escalas. Homogeneidade e isotropia podem mesmo ser questionáveis nas menores escalas. Por que então estudar escoamentos isotrópicos? A resposta repousa na facilidade encontrada para estabelecer teorias estatísticas analíticas quando estas duas características, homogeneidade e isotropia, são impostas aos escoamentos. Estas teorias descrevem satisfatoriamente a dinâmica das escalas menores tri-dimensionais de um escoamento e permitem a modelagem de suas ações sobre as grandes escalas anisotrópicas. Logo, o maior problema da modelagem turbulenta é representar bem a ação das pequenas escalas sobre as maiores escalas.

1.3 Modelagem Pontual

Este tipo de modelagem, desenvolvido para a previsão de escoamentos não homogêneos, principia pela dedução das equações médias de Reynolds, onde as flutuações turbulentas são introduzidas através de seus momentos de segunda ordem definidos em um mesmo ponto do espaço. Estes precisam ser modelados em termos do escoamento médio, e a maneira mais simples de fazer isto é se especificar alguma relação algébrica simples. A formulação mais simples e portanto a mais popular, utiliza a hipótese de viscosidade turbulenta juntamente com o conceito de comprimento de mistura. Com isto as características de escoamentos cisalhantes simples podem ser facilmente calculados. Exemplo: jatos, camadas limites, esteiras, camadas de mistura, etc. Técnicas mais refinadas de modelagem envolvem equações de transporte adicionais. Exemplos clássicos são os métodos de uma equação de Bradshaw, e o método de duas equações de Launder-Spalding. Embora extremamente eficientes para a resolução de um bom número de problemas de engenharia, estas técnicas não oferecem um entendimento dos processos físicos ocorrendo nos escoamentos. É claro que o desenvolvimento de simulações numéricas diretas e de simulações das maiores escalas propiciarão uma grande melhora das modelagens clássicas pontuais. Além disto, novos conceitos deduzidos de métodos de fechamento envolvendo dois pontos, chamados modelagem de dois pontos, também podem contribuir para a melhora dos métodos de fechamento de um ponto.

1.4 Bibliografia

- G. K. Batchelor, *The Theory of Homogeneous Turbulence*, CUP, 1953.
- J. O. Hinze, *Turbulence*, McGraw-Hill, 1975.
- M. T. Landahl e E. Mollo-Christensen, *Turbulence and Random Processes in Fluid Mechanics*, CUP, 1986.

- B. E. Launder, Second-Moment Closure: Methodology and Practice, Editions Eyrolles, 1984.
- M. Lesieur, Turbulence in Fluids, Kluwer, 1990.
- W. D. McComb, The Physics of Fluid Turbulence, Clarendon Press, 1990.
- A. A. Townsend, The Structure of Turbulent Shear Flow, CUP, 1976.
- K. R. Sreenivasan, A Unified View of the Origin and Morphology of the Turbulent Boundary Layer Structure.

Capítulo 2

O Espaço de Fourier e a Turbulência Homogênea

2.1 A Representação no Espaço de Fourier de um Escoamento

Considere que o escoamento sob interesse esteja confinado a uma caixa com dimensões L , escolhida de tal modo que ela contenha todas as características espaciais do escoamento que desejamos estudar. Consideremos também que todas as condições de contorno na caixa sejam cíclicas. Desde que isto aconteça, poderemos então construir o escoamento em todo o resto do espaço repetindo o número de vezes que seja necessário, o escoamento no interior de nossa caixa. Seja $\vec{u}(\vec{x}, t)$ a velocidade do escoamento. Podemos representar esta velocidade através da série infinita

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}_n=-\infty}^{\infty} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \hat{u}_F(\vec{k}_n, t) \quad (2.1)$$

onde

$$\vec{k}_n = \left(\frac{2\pi}{L}n_1, \frac{2\pi}{L}n_2, \frac{2\pi}{L}n_3\right), \quad (2.2)$$

\hat{u}_F é a transformada de Fourier da velocidade \vec{u} . Esta transformação pode também ser vista no caso limite em que $h = \pi/L$ define o intervalo de uma partição de um domínio de interação. Fazendo $h \rightarrow 0$ ou equivalentemente $L \rightarrow \infty$, a série (1.1) assume o aspecto formal de uma soma de Riemann para a integral $\hat{u}(\vec{k}, t)[\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})]$. Logo, obtemos formalmente

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \int \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}) \hat{u}(\vec{k}, t) d\vec{k} \quad (2.3)$$

onde

$$d\vec{k} = dk_1 dk_2 dk_3. \quad (2.4)$$

Usando a propriedade de ortogonalidade da função $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})$ obtemos a seguinte relação para a transformada de Fourier

$$\hat{u}(\vec{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \vec{u}(\vec{x}, t) d\vec{x}. \quad (2.5)$$

Logo, o escoamento de um fluido pode ser representado por duas transformadas de Fourier, uma discreta e outra integral. Para estabelecer uma relação entre as duas, façamos o seguinte:

$$\hat{u}(\vec{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}_n} \exp(i\vec{k}_n \cdot \vec{x}) \vec{u}_F(\vec{k}_n, t) d\vec{x} \quad (2.6)$$

Definindo então a função de Dirac, δ , como

$$\delta(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{x} \quad (2.7)$$

e observando que, ao contrário de \vec{k} , \vec{k}_n é composto por um espectro discreto de frequências, múltiplas de $2\pi/l$, obtemos

$$\hat{u}(\vec{k}, t) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{k}_n) \hat{u}_F(\vec{k}_n, t), \quad (2.8)$$

onde $\hat{u}(\vec{k}, t)$ é um núcleo de Dirac tri-dimensional

$$\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \hat{u}_F(\vec{k}_n, t). \quad (2.9)$$

Tomemos agora, no espaço de Fourier, uma média de $\hat{u}(\vec{k}, t)$ sobre uma caixa com centro em \vec{k}_i e de lados $2\pi/L$:

$$\bar{\hat{u}}(k_i) = \frac{1}{Vol V_i} \int_{V_i} \hat{u}(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (2.10)$$

Segue-se que

$$\bar{\hat{u}}(k_i) = \frac{1}{Vol V_i} \int_{V_i} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \sum_{\vec{k}_n} \delta(\vec{k} - \vec{k}_n) \hat{u}_F(\vec{k}_n) d\vec{k} \quad (2.11)$$

onde $Vol V_i = (2\pi/L)^3$. Na expressão acima \vec{k}_i deve pertencer à caixa, do contrário $\delta(\vec{k} - \vec{k}_n)$ será sempre zero. Logo, usando-se a identidade

$$\int \delta(\vec{k} - \vec{k}_i) d\vec{k} = 1 \quad (2.12)$$

obtemos finalmente

$$\bar{\hat{u}}(\vec{k}_i, t) = \hat{u}_F(\vec{k}_i, t). \quad (2.13)$$

A identidade (1.8) mostra que a transformada discreta de Fourier transforma o escoamento no interior da caixa na média sobre o volume V_i da transformada integral de Fourier.

2.2 As Equações de Navier-Stokes no Espaço de Fourier

A transformada de Fourier possui a propriedade de “destruir” derivadas. Ela transforma equações diferenciais no universo- x em equações algébricas no universo- k . A transformada de Fourier de $\partial f/\partial x_i$ é $ik_i \hat{f}(k_1, k_2, k_3, t)$. Chamando-se de T.F. o operador transformador de Fourier, segue-se que

$$\begin{array}{lll}
 f(\vec{x}, t) & \text{T.F.} & \hat{f}(\vec{k}, t) \\
 \frac{\partial f}{\partial x_i} & \text{T.F.} & ik_i \hat{f}(\vec{k}, t) \\
 \nabla f & \text{T.F.} & i\vec{k} \hat{f}(\vec{k}, t) \\
 \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} & \text{T.F.} & -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \hat{f} = -k^2 \hat{f} \\
 \nabla \cdot f & \text{T.F.} & i\vec{k} \cdot \hat{f}(\vec{k}, t) \\
 \nabla \times \vec{f} & \text{T.F.} & i\vec{k} \times \hat{f}(\vec{k}, t) \\
 f(\vec{x}, t)g(\vec{x}, t) & \text{T.F.} & \hat{f} * \hat{g}(\vec{k}, t)
 \end{array} \tag{2.14}$$

onde $*$ denota o produto de convolução $\int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{f}(\vec{p}, t)g(\vec{q}, t)d\vec{p}$.

A condição de incompressibilidade de um escoamento de acordo com a condição $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, fica então

$$\vec{k} \cdot \hat{u} = 0, \tag{2.15}$$

e o vetor velocidade se encontra em um plano Π perpendicular a \vec{k} .

Deduzamos agora as equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier. Como \hat{u} se encontra no plano perpendicular a \vec{k} , $\partial \hat{u}/\partial t$ e $\nu k^2 \hat{u}$ também pertencem àquele plano. O gradiente de pressão $i\hat{p}\vec{k}$ ao contrário é paralelo a \vec{k} . O resultado é que a transformada de Fourier de

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p, \tag{2.16}$$

é a projeção sobre Π da transformada de $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}$.

Consideremos agora o tensor

$$P_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \tag{2.17}$$

o qual permite um vetor \vec{a} ser projetado em um plano perpendicular a \vec{k} : $a_j P_{ij} =$ componente na direção i da projeção de \vec{a} sobre Π .

Resulta que, devido à incompressibilidade,

$$T.F. [\partial(u_j u_i) / \partial x_j] = ik_j \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_i(\vec{p}, t) \hat{u}_j(\vec{q}, t) d\vec{p}, \quad (2.18)$$

e o i -ésimo componente de $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p$ no espaço de Fourier é

$$ik_m P_{ij}(\vec{k}) \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_j(\vec{p}, t) \hat{u}_m(\vec{q}, t) d\vec{p}. \quad (2.19)$$

Por fim, as equações de N-S no espaço de Fourier tornam-se

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) \hat{u}_i(\vec{k}, t) = -ik_m P_{ij}(\vec{k}) \int_{\vec{p}+\vec{q}=\vec{k}} \hat{u}_j(\vec{p}, t) \hat{u}_m(\vec{q}, t) d\vec{p}. \quad (2.20)$$

Observe que o termo de pressão foi eliminado na equação acima.

2.3 A Utilização de Funções Aleatórias para a Descrição da Turbulência

Imaginemos agora que o campo de velocidade de um escoamento turbulento seja uma função aleatória definida em um certo espaço amostral.

Na descrição estatística do escoamento, consideraremos uma média amostral tomada sobre um número infinito e independente de realizações. Esta média será denotada por $\langle \rangle$. Por exemplo, seja $u(\vec{x}, t)$ um componente da velocidade média em uma posição \vec{x} em um instante de tempo t durante a realização do experimento “ i ”. A média do produto de n componentes nas posições $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ em t_1, t_2, \dots, t_n será dada por

$$\langle u(\vec{x}_1, t_1) u(\vec{x}_2, t_2) \dots u(\vec{x}_n, t_n) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_{(i)}(\vec{x}_1, t_1) u_{(i)}(\vec{x}_2, t_2) \dots u_{(i)}(\vec{x}_n, t_n). \quad (2.21)$$

Definição: O momento de ordem n do campo de velocidade é a média de qualquer produto tensorial de n componentes do campo de velocidade.

$\langle \vec{u}(\vec{x}, t) \rangle$ é a velocidade média num instante de tempo t . $\langle u_i(\vec{x}_1, t_1) u_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle$ é o tensor de correlação de velocidades nos pontos x_1 e x_2 nos tempos t_1 e t_2 .

Homogeneidade. A turbulência é dita homogênea se todas as quantidades médias obtidas com um conjunto de n pontos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ (nos tempos t_1, t_2, \dots, t_n), são invariantes sob qualquer translação do conjunto $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$.

Por exemplo, para o momento de 2ª ordem

$$\langle u_i(\vec{x}_1, t_1) u_j(\vec{x}_2, t_2) \rangle = \langle u_i(\vec{x}_1 + \vec{y}, t_1) u_j(\vec{x}_2 + \vec{y}, t_2) \rangle \quad (2.22)$$

Os momentos de 2ª ordem são então fornecidos por

$$R_{u_i u_j}(\vec{r}, t_1, t_2) = \langle u_i(\vec{x}_1, t_1) \vec{u}_j(\vec{x}_1 + \vec{r}, t_2) \rangle \quad (2.23)$$

Para a turbulência homogênea, o campo de velocidade médio $\langle \vec{u}(\vec{x}, t) \rangle$ é independente de \vec{x} . Em um sistema de referência que se move com a velocidade média do escoamento, $\langle \vec{u} \rangle = 0$.

Uma hipótese de ergodicidade aplicada à turbulência homogênea permite o cálculo da média espacial:

$$R_{u_i u_j}(\vec{r}, t_1, t_2) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int u_j(\vec{x}, t_1) u_i(\vec{x}_1 + \vec{r}, t_2) d\vec{x}. \quad (2.24)$$

Não se conhece qualquer prova do teorema ergótico para as equações de N-S. Existe entretanto evidências que ele seja válido para as equações de Euler truncadas em 2 e em 3 dimensões.

Estacionariedade. A turbulência é dita estacionária se todas as quantidades envolvendo n instantes de tempo t_1, t_2, \dots, t_n , são invariantes sob qualquer translação de (t_1, t_2, \dots, t_n) . Em particular

$$\langle u(\vec{x}_1, t_1) \dots u(\vec{x}_n, t_n) \rangle = \langle u(\vec{x}_1, t_1 + \tau) \dots u(\vec{x}_n, t_n + \tau) \rangle \quad (2.25)$$

Assumindo-se que a velocidade média do escoamento seja zero, $(1/2)R_{u_i u_i}(\vec{0}, t, t)$ é a energia cinética média por unidade de massa. Logo, em um escoamento estacionário esta quantidade será independente do tempo. Isto implica que a turbulência estacionária precisa ser sustentada por um campo de forças externas ou de outro modo ela decairá com o tempo devido à ação da viscosidade. A hipótese de estacionariedade requer então o uso de forças externas para sustentar a turbulência, o que normalmente se faz através de truques matemáticos, os quais alteram fortemente a estrutura original do escoamento, em especial nas escalas em que a energia é injetada.

Isotropia. Uma turbulência homogênea será dita isotrópica quando todos os momentos envolvendo um conjunto de n pontos forem invariantes sob : i) qualquer rotação arbitrária do conjunto de n pontos e do eixo de coordenadas, ii) qualquer reflexão do vetor de configuração.

A primeira consequência da definição acima é

$$\langle u(\vec{x}, t) \rangle = 0 \quad (2.26)$$

Do mesmo modo, para qualquer escalar $\Theta(\vec{x}, t)$ teremos

$$\langle \Theta(\vec{x}, t) \vec{u}(\vec{x}, t) \rangle = 0 \quad (2.27)$$

Note que uma turbulência isotrópica deve ser homogênea desde que uma translação pode ser decomposta como o produto de duas rotações.

Correlações de velocidade. Sejam \vec{x} e \vec{y} dois pontos separados por \vec{r} , $u(\vec{x}, t)$ a projeção da velocidade \vec{u} sobre \vec{r} , $v(\vec{x}, t)$ a projeção de \vec{u} sobre um eixo normal a \vec{r} e $w(\vec{x}, t)$ a

projeção de \vec{u} sobre um eixo normal ao plano definido por \vec{r} e pelo eixo normal anterior. Define-se então

1. Correlação (momento) longitudinal de velocidade como:

$$R_{uu}(r, t, t') = \langle u(\vec{x}, t)u(\vec{x} + \vec{r}, t') \rangle \quad (2.28)$$

2. Correlação (momento) transversal de velocidade:

$$R_{vv}(r, t, t') = \langle v(\vec{x}, t)v(\vec{x} + \vec{r}, t') \rangle \quad (2.29)$$

Devido à isotropia, as relações acima são independentes da direção de \vec{r} . Note que correlações do tipo abaixo são sempre nulas. Isto é,

$$\langle u(\vec{x}, t)v(\vec{x} + \vec{r}, t') \rangle = 0. \quad (2.30)$$

Consideremos agora o momento pressão-velocidade R_{pu_i} . Suponha apenas para fixar idéia que estes dois pontos estejam localizados no eixo dos x . Logo, por uma reflexão sobre o plano $x - z$, obtemos

$$R_{pv}(r_1) = -R_{pv}(r_1), \quad (2.31)$$

relação a qual, devido à sua isotropia, pode apenas ser verdadeira se $R_{pv} = 0$.

Do mesmo modo, trocando-se v por w , obtém-se

$$R_{pw} = 0. \quad (2.32)$$

O único componente diferente de zero do momento é $R_{pu} = \langle pu' \rangle$, $u' = u(x + r)$. Mas R_{pu} deve ser um vetor direcionado ao longo de \vec{r} , ou seja, mais genericamente

$$R_{pu_i} = \vec{r}_i R, \quad (2.33)$$

onde R é uma função da distância $r^2 = r_i r_i$ entre os dois pontos. A derivada parcial de R_{pu_i} nos fornece

$$\frac{\partial R_{pu_i}}{\partial r_i} = \frac{\partial}{\partial r_i} \langle pu'_i \rangle = \left\langle p \frac{\partial u'_i}{\partial r_i} \right\rangle = \left\langle p \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} \right\rangle = 0, \quad (2.34)$$

desde que apenas u'_i depende de r_i e a continuidade deve ser satisfeita.

Substituindo $R_{pu_i} = \vec{r}_i R$ na equação acima obtemos

$$\vec{r} \cdot \nabla R + 3R = 0, \quad (2.35)$$

ou seja, $R \sim r^{-3}$, o que significa que $R = 0$ pois ele não pode ser infinito em $r = 0$.

Conclusão: todos os momentos pressão-velocidade são zeros em turbulência isotrópica em um fluido incompressível.

Consideremos agora os momentos que envolvam correlações de velocidade. Suponhamos de novo que os pontos estejam localizados sobre o eixo dos x . Uma reflexão sobre o plano x, z , nos fornece

$$R_{uv} = -R_{uv}, \quad (2.36)$$

ou seja,

$$R_{uv} = 0. \quad (2.37)$$

De modo equivalente, encontramos que R_{uw} e R_{vw} são também identicamente nulos. Os únicos momentos diferente de zero são o momento longitudinal

$$R_{uu} = \langle uu' \rangle = u_0^2 f(r_1) \quad (2.38)$$

onde u_0 é o valor quadrático médio de u (o qual devido à isotropia é o mesmo para v e para w), e os momentos transversais

$$R_{vv} = R_{ww} = u_0^2 g(r_1) \quad (2.39)$$

Mostraremos a seguir que a partir das duas expressões acima, todos os componentes do tensor $R_{u_i u_j}$ poderão ser construídos quando uma separação arbitrária, \vec{r} , dos pontos \vec{x}_1 e \vec{x}_2 for dada.

Introduzamos um novo sistema de coordenadas x_i^* , rodado de tal modo que x_i^* passe através do ponto r_k . Para expressarmos a componente de velocidade u_i em termos das componentes do novo sistema de coordenadas, fazemos

$$u_i = \epsilon_{ik} u_k^* \quad (2.40)$$

onde ϵ_{ik} é o coseno direcional entre os eixos x_i e x_k^* .

A expressão do momento assume então a forma

$$R_{u_i u_j} = \epsilon_{il} \epsilon_{jk} \langle u_k^* u_l^* \rangle = \epsilon_{il} \epsilon_{jk} R_{u_k^* u_l^*}. \quad (2.41)$$

Mas para $R_{u_k^* u_l^*}$, temos

$$R_{uu}^* = u_0^2 f(r), \quad r^2 = r_k r_k, \quad (2.42)$$

$$R_{vv}^* = R_{ww}^* = u_0^2 g(r). \quad (2.43)$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} R_{u_i u_j} &= \epsilon_{il} \epsilon_{jk} u_0^2 g(r) \delta_{kl} + u_0^2 [f(r) - g(r)] \epsilon_{i1} \epsilon_{j1} \\ &= u_0^2 g(r) \delta_{ij} + u_0^2 [f(r) - g(r)] \epsilon_{i1} \epsilon_{j1}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

(Nota: observe que $\epsilon_{il} \epsilon_{jk} = \delta_{ij}$).

Mas

$$\epsilon_{i1} = \frac{r_i}{r}, \quad \epsilon_{j1} = \frac{r_j}{r}. \quad (2.45)$$

Logo

$$R_{u_i u_j} = u_0^2 \left\{ \frac{[f(r) - g(r)] r_i r_j}{r^2} + g(r) \delta_{ij} \right\}. \quad (2.46)$$

Analogamente, mostra-se que os momentos de terceira ordem

$$T_{ijk} = u_i(x_l) u_j(x_l) u_k(x_l + r_l) \quad (2.47)$$

possuem, num campo homogêneo e isotrópico, apenas três componentes independentes, o que resulta em

$$T_{ikj} = u_0^3 \left\{ \frac{[k(r) - h(r) - 2g(r)] r_i r_j r_k}{r^3} + \frac{h(r) r_k \delta_{ij}}{r} + \frac{q(r) r_j \delta_{ik}}{r} + g(r) r_i \delta_{jk} \right\}. \quad (2.48)$$

Um resultado que envolve a derivada dos momentos pode ser obtido pela equação da continuidade

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.49)$$

a qual implica que

$$\frac{\partial R_{u_i u_j}}{\partial x'_j} = \langle u_i(\vec{x}) \frac{\partial u_j(\vec{x}')}{\partial x'_j} \rangle = 0. \quad (2.50)$$

Este resultado aplicado à expressão (3.21) nos fornece

$$g(r) = \frac{r}{2} f'(r) + f(r). \quad (2.51)$$

Esta relação conhecida como a relação de Karman-Howarth pode ser utilizada para uma conferência dos dados experimentais.

Do mesmo modo,

$$q(r) = -\frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} (hr^2), \quad (2.52)$$

$$k(r) = -2h(r). \quad (2.53)$$

Como dissemos anteriormente, a turbulência isotrópica não pode ser estacionária. De fato, consideremos a equação da energia para este caso. Como todas as derivadas espaciais das grandezas médias devem ser zero, na ausência de forças de empuxo, obtemos

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\epsilon = \frac{-\nu}{2} \langle (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) \rangle. \quad (2.54)$$

Logo, a energia cinética deve sempre decrescer com o tempo, o que implica haver uma tendência à isotropia nas menores escalas.

Para discutir o comportamento estatístico das menores escalas, é conveniente aplicar a transformada de Fourier aos momentos obtendo-se:

$$\Phi_{ij} = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} R_{u_i u_j}(\vec{r}, t, 0) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{x}. \quad (2.55)$$

A distribuição espectral da energia cinética é obtida do traço do tensor acima, isto é,

$$\Phi_{ii} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} R_{u_i u_i}(\vec{r}, t, 0) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d\vec{x}. \quad (2.56)$$

Como a turbulência não é estacionária, a origem do tempo, t , foi incluída acima. Voltando à expressão (3.21), temos

$$R_{u_i u_i} = R_{uu} + R_{vv} + R_{ww} = u_0^2 [f(r) + 2g(r)] = u_0^2 R(r). \quad (2.57)$$

Isto mostra que $R_{u_i u_i}$ depende dos r_i através de $r^2 = r_i r_i$, e nos intui a achar que Φ_{ii} deveria depender do número de onda na mesma forma; isto é, através de $k^2 = k_i k_i$. Isto realmente se verifica, como pode ser facilmente demonstrado, de modo que definimos o espectro do número de onda tridimensional como

$$E(k, t) = 2\pi k^2 \Phi_{ii}(\vec{k}, t). \quad (2.58)$$

Esta função mede a quantidade de energia cinética armazenada entre os números de onda \vec{k} e $\vec{k} + d\vec{k}$.

O espectro de \vec{k} , E , tem sido objeto de vários estudos teóricos e experimentais. Uma experiência que aproxima razoavelmente bem o fenômeno de turbulência isotrópica, é a de um escoamento que se desenvolve na esteira de duas telas colocadas transversalmente à direção principal da velocidade em um tunel de vento. Após uma certa distância das telas quando o escoamento tiver decaído para um estado aproximadamente isotrópico, teremos

$$\frac{\partial}{\partial t} = \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.59)$$

para um sistema de coordenadas que se move com a velocidade média \bar{U} .

A relação acima permite calcular momentos “espaciais” a partir de momentos “temporais” através da hipótese de que as estruturas turbulentas passam pelo ponto onde as medidas estão sendo tomadas tão rapidamente que suas características básicas não se alteram.

Alguns resultados experimentais são mostrados a seguir. Observa-se que todos os dados apresentam um comportamento universal, exceto quando $\tilde{k} = k/k_K$ for pequeno. $k_K = (\epsilon/\nu)^{1/2}$, é a frequência característica de Kolmogorov. $\nu_K = (\nu\epsilon)^{1/4}$.

A grandeza

$$2\nu k^2 E(k) \quad (2.60)$$

mede a dissipação de energia pela ação da viscosidade para os valores de número de onda entre k e $k + dk$.

Seja $T(k)$ a energia transferida entre os números de onda k e $k + dk$ devido aos efeitos não lineares, então

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E \quad (2.61)$$

Através das figuras, observamos que para valores de k/k_K maiores que 0.3, $\partial E/\partial t$ torna-se praticamente igual a zero, de modo que um estado de equilíbrio é atingido para os números de onda maiores. A partir disto, Kolmogorov fez as seguintes hipóteses:

- Para números de Reynolds suficientemente altos existe uma região de altos números de onda na qual a turbulência se encontra em equilíbrio estatístico e é unicamente determinada pelos parâmetros ϵ e ν . Esta região é universal.
- Se o número de Reynolds é infinito, existe um domínio, $k_e \ll k \ll k_K$, no qual E é independente de ν . Aqui k_e = número de onda para as estruturas turbulentas que possuem mais energia.

Uma análise dimensional aplicada à primeira hipótese nos fornece

$$E = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} E(\tilde{k}) \quad (2.62)$$

onde α é uma constante universal e $\tilde{k} = k/k_K$.

A segunda hipótese implica que

$$E = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.63)$$

Esta é a famosa lei do $k^{-5/3}$ de Kolmogorov. Ela se comporta muito bem para espectros de turbulência medidos a altos números de Reynolds.

O comportamento qualitativo do espectro de energia é mostrado na figura a seguir.

Uma questão relevante em turbulência é: Como podemos definir um número de Reynolds de caráter universal para um escoamento turbulento, isto é, que independe do equipamento que criou o escoamento. Isto pode ser feito se partirmos das correlações longitudinal, $f(r)$, e transversal, $g(r)$. Seguindo Taylor, usaremos aqui g .

Uma escala integral, Λ , pode ser definida como

$$\Lambda = \int_0^\infty g(r) dr. \quad (2.64)$$

O que nos fornece

$$R_\Lambda = \frac{u_0 \Lambda}{\nu} \quad (2.65)$$

Λ é uma escala apropriada para as estruturas turbulentas grandes. Para obtermos uma medida das menores escalas, façamos

$$g(r) = 1 + r \left(\frac{\partial g}{\partial r} \right)_0 + \frac{r^2}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \right)_0 + \dots \quad (2.66)$$

Como g é uma função par, $(\partial g/\partial r)_0 = 0$. Logo, podemos fazer

$$g(r) = 1 - \frac{r^2}{\lambda_g^2}, \quad (2.67)$$

onde $\lambda_g = -2(\partial^2 g/\partial r^2)_0$ é a chamada microescala de Taylor. A partir dela, obtemos

$$R = \frac{u_0 \lambda_g}{\nu}. \quad (2.68)$$

2.4 Esquemas de Modelagem para as Teorias Espectrais

A maior preocupação dos métodos que pretendem lidar com a turbulência, mesmo os métodos espectrais, sempre é o “fechamento” das equações médias de Reynolds. Estas equações constituem um conjunto incompleto; as equações para os momentos de segunda ordem envolvem momentos de terceira ordem, as equações para os momentos de terceira ordem envolvem momentos de quarta ordem e assim por diante. Infelizmente, as dificuldades conceituais para o tratamento de tipos de turbulência bastante simples, como por exemplo a turbulência isotrópica, são enormes. Isto leva a métodos intrincados e complexos para a resolução dos problemas mais triviais. Entretanto, se apenas uma aproximação para a solução do problema é desejada, alguns esquemas simples, podem ser tentados os quais utilizam um mínimo de hipóteses.

O espectro tri-dimensional de energia $E(k, t)$ obedece a seguinte relação:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = T - 2\nu k^2 E, \quad (2.69)$$

onde T é o termo de transferência não-linear, advindo dos momentos de ordem três. Este termo descreve processos conservativos, quais sejam, os processos de transferência de energia cinética de um número de onda para seu vizinho. Logo

$$\int_0^\infty T(k) dk = 0. \quad (2.70)$$

Um dos principais modelos propostos que relaciona T com E foi proposto por Heisenberg(1948). Ele considerou que a transferência de energia para os números de onda maiores do que um certo valor k poderiam ser descritos por uma viscosidade turbulenta, ν_t , atuando sobre as maiores estruturas turbulentas. Ele considerou que

$$\int_0^k T dk = -2\nu_t(k, t) \int_0^k k^2 E(k, t) dk. \quad (2.71)$$

Fazendo ainda

$$\nu_t = \int_k^\infty f(k, E(k, T)) dk \quad (2.72)$$

ele obteve através de argumentos dimensionais que

$$f = \alpha \sqrt{\frac{E}{k^3}}, \quad (2.73)$$

onde α é uma constante e portanto

$$\nu_t = \alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{E}{k^3}} dk. \quad (2.74)$$

Isto nos fornece

$$\int_0^k T dk = -2\alpha \int_k^\infty \sqrt{\frac{E}{k^3}} dk \int_0^k k^2 E dk. \quad (2.75)$$

Substituindo (4.6) em (4.1) obtemos uma equação integro-diferencial para E . Sua solução mostra que, para altos k 's, E decai como k^{-7} . Pode-se entretanto demonstrar que E deve decair mais rápido que qualquer potência negativa de k , à medida que $k \rightarrow \infty$. Isto implica que a hipótese de Heisenberg possui um sério defeito.

Para resolver isto, Kovasznay(1948) propôs que, para escoamentos próximos ao equilíbrio, isto é, para escoamentos onde $|\partial E/\partial t| \ll |T|$, devemos ter

$$T = -\frac{\partial G}{\partial k} = -2\nu k^2 E(k). \quad (2.76)$$

Devido à expressão (4.2), temos

$$G = \int_0^k T dk = -\int_k^0 T dk \simeq \epsilon, \quad (2.77)$$

ϵ = taxa de dissipação para pequenos k 's abaixo de k_e .

Considerando que G seja função apenas de E e de k , obtemos através de uma análise dimensional

$$G = \alpha E^{3/2} k^{5/2}. \quad (2.78)$$

Substituindo (4.9) em (4.7), resulta em

$$E = \alpha^{-2/3} \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \left(1 - \frac{\alpha \nu k^{4/3}}{2\epsilon^{1/3}}\right)^2, \quad (2.79)$$

para $k_e < k < k_1$, onde

$$k_1 = \left(\frac{2\epsilon^{1/3}}{\alpha \nu}\right)^{3/4}, \quad (2.80)$$

e $E = 0$ para $k > k_1$.

Uma outra hipótese também aplicável para altos k 's foi apresentada por Pao(1965) que considerou

$$G = E f(\epsilon, k). \quad (2.81)$$

Argumentos dimensionais, nos fornecem

$$\frac{G}{E} = \alpha^{-1} \epsilon^{1/3} k^{5/3}. \quad (2.82)$$

Substituindo (4.11) em (4.7), resulta

$$\frac{\partial G}{\partial k} = -2\alpha \nu \epsilon^{-1/3} k^{1/3} G, \quad (2.83)$$

a qual nos fornece

$$E = \alpha \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \exp\left[\frac{-3\alpha(k/k_K)^{4/3}}{2}\right], \quad (2.84)$$

onde k_K é o número de onda de Kolmogorov, ($k_K = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$).

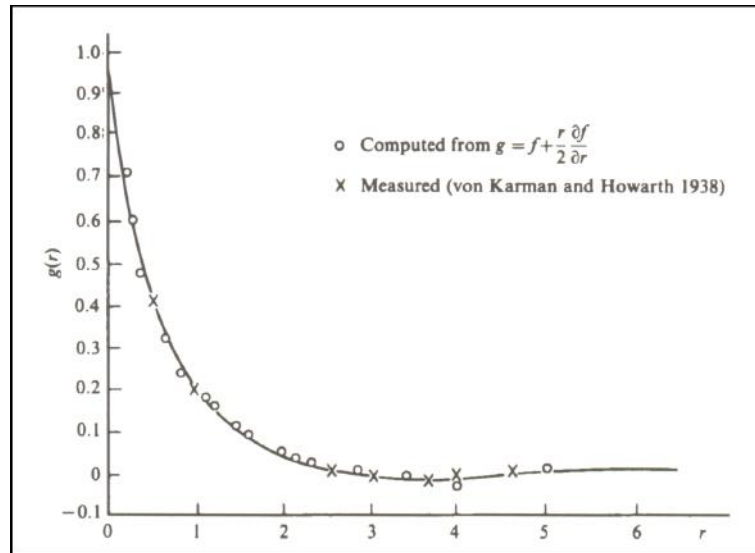


Figura 2.1: Covariância transversal, de acordo com Karman e Howarth 1938.

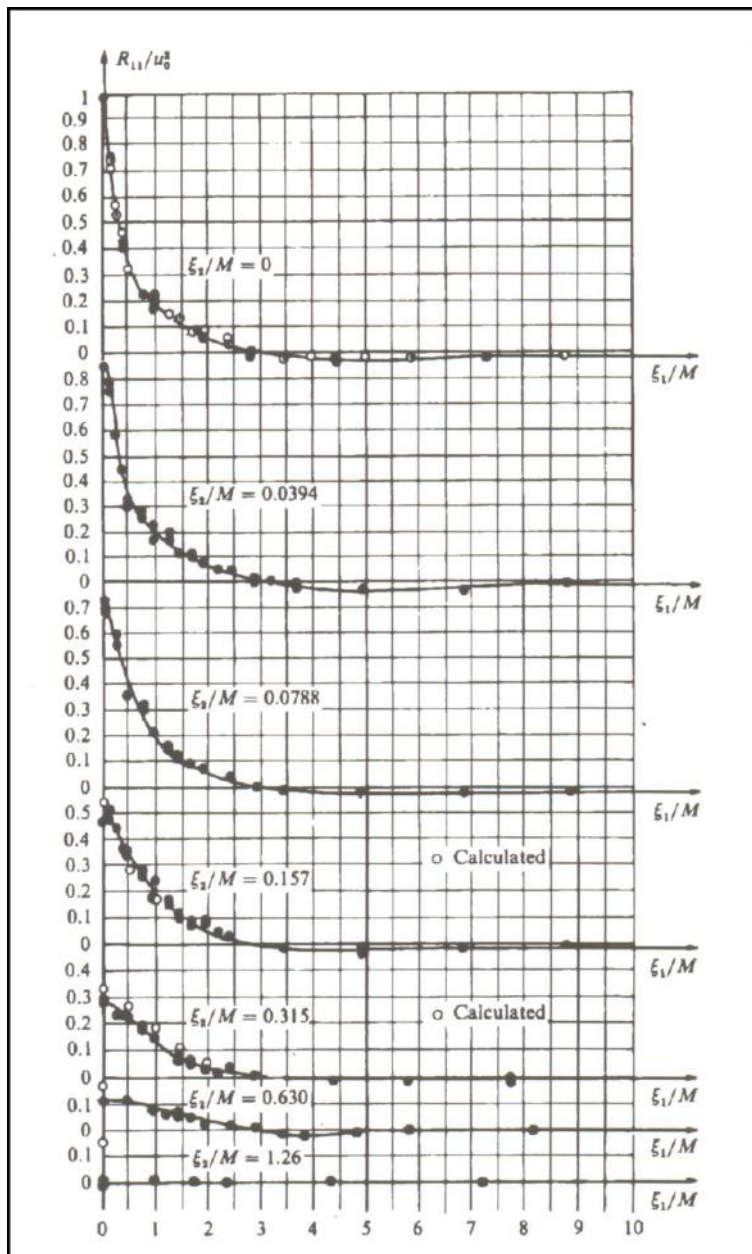


Figura 2.2: Coeficiente de correlação espacial, R_{11} .

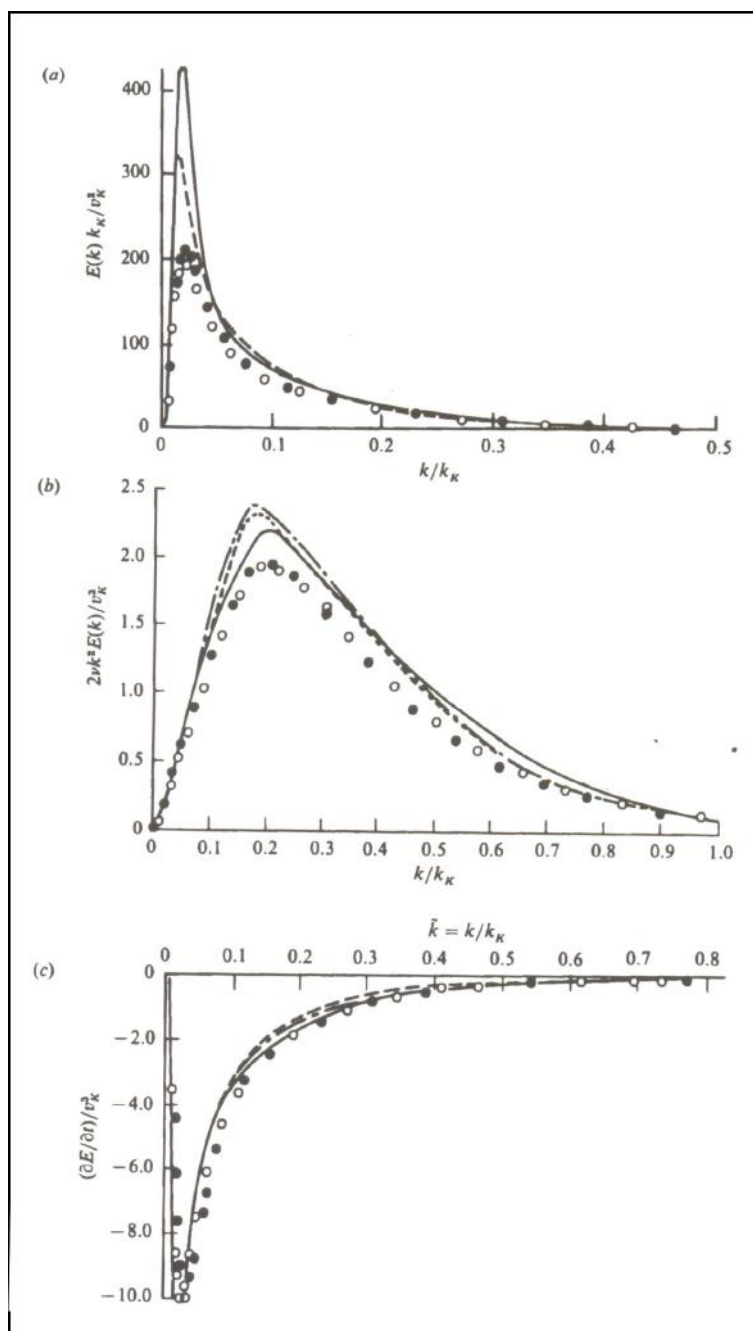


Figura 2.3: Distribuição espectral para turbulência homogênea.

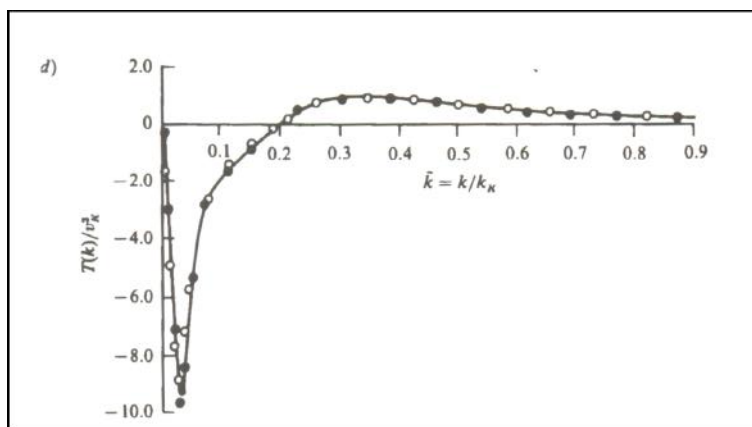


Figura 2.4: Distribuição espectral tridimensional para turbulência homogênea.

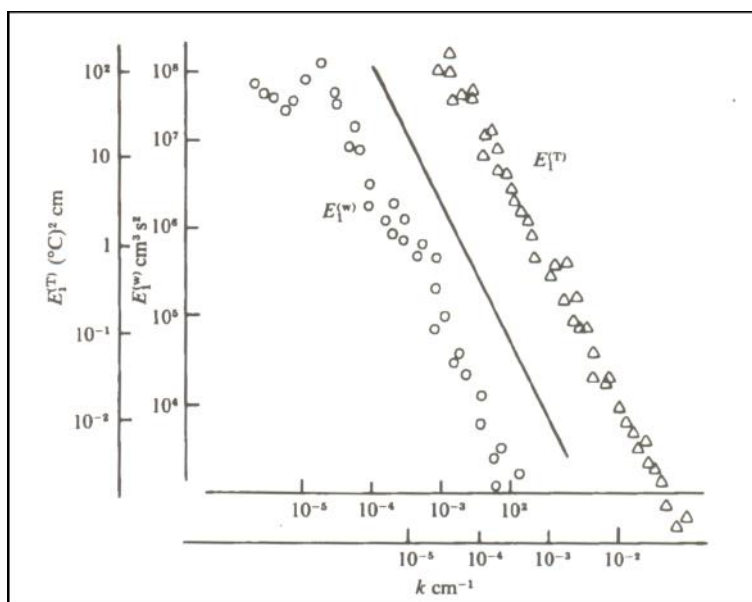


Figura 2.5: Distribuição espectral para a temperatura e para a velocidade vertical.

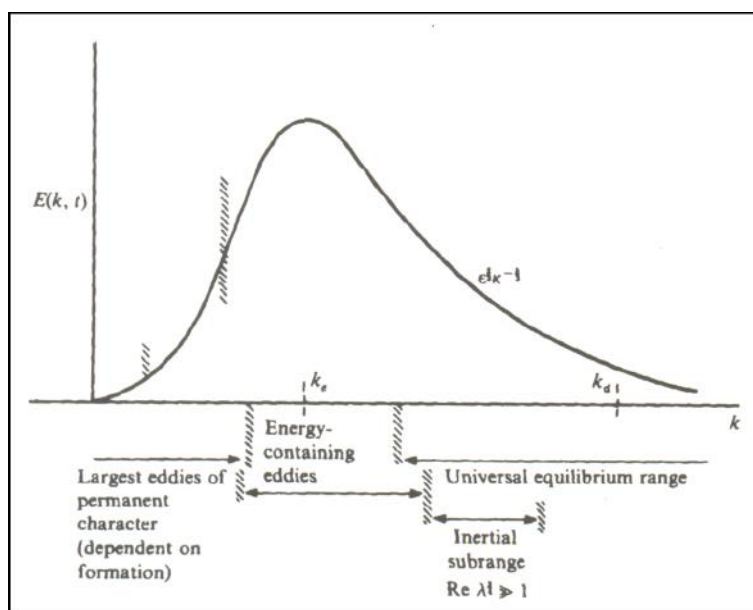


Figura 2.6: Comportamento do espectro tri-dimensional.

Capítulo 3

A Estrutura da Turbulência em Escoamentos Cisalhantes

3.1 Introdução

A estrutura de escoamentos cisalhantes tem sido o objeto de intensa investigação nos últimos 20 anos. A descoberta da existência de estruturas organizadas em camadas cisalhantes livres oferecem à comunidade uma visão completamente diferente do processo de produção de turbulência. Aqui, realizaremos uma rápida exposição dos avanços mais recentes a respeito da estrutura de camadas cisalhantes livres e de camadas limite.

Dos dois tipos de escoamentos citados, a camada limite é certamente a menos entendida em termos de sua estrutura. Uma das dificuldades básicas é que existem duas escalas distintas no fenômeno, as quais são de ordem de grandeza diferente para escoamentos a altos números de Reynolds, e cuja interação entre os processos dominados por elas é mal entendido. Uma importante descoberta, é que os processos dinâmicos mais ativos acontecem em uma região próxima à parede, $5 < y^+ < 70$, a qual não ocupa mais do que 1% da espessura da camada limite. Observou-se a presença de traços de turbulência com baixas velocidades e espaçamento regular. Estes “traços” começam a oscilar e “quebram” em movimentos bastante violentos, dando origem a o que é normalmente chamado uma “explosão”. Kline (1984) propôs um modelo para o processo de explosão. Neste modelo, os mecanismos físicos fundamentais de produção da turbulência são o levantamento da parede dos traços de baixa velocidade e o “esticamento” dos tubos de corrente provocando o aparecimento de uma camada delgada que é altamente instável. A “quebra” desta camada delgada, provocada por instabilidades de Kelvin-Helmholtz, constitui portanto a maior fonte de turbulência no escoamento.

Medições mostram que cerca de 70% da produção de turbulência resulta do processo de “explosão”. Os estudos mostram que existem dois tipos de movimento que produzem a turbulência: i) ejeções em alta velocidade de fluido a baixa velocidade que se encontra próximo à parede, ii) entrada na camada limite de fluido a alta velocidade que se encontra no escoamento externo e vai se alojar junto à parede. O resultado da interação entre estes dois processos é que fornece uma contribuição negativa para o tensor tensão. As ejeções podem algumas vezes envolver estruturas extremamente pequenas, da ordem de $20\nu/u_\tau$. Os movimentos que produzem tensão são altamente intermitentes ocorrendo talvez apenas

25% do tempo total.

É evidente da explanação acima que a idéia da existência de grandes estruturas, de tamanho comparável à espessura da camada limite, que dominem todas as propriedades do escoamento, pode ser seriamente desafiada. Estas estruturas poderiam na realidade ser apenas o movimento de “enrolamento” de um conjunto de estruturas menores inclinadas de 45° com relação ao plano da parede. Todo o processo de entendimento de como os fenômenos de diferentes escalas se originam e interagem, é portanto bastante complexo. Fossem as maiores escalas os mecanismos dominantes, e seria muito difícil acreditar que a transição laminar-turbulenta, ou o processo de “explosão” fossem capazes de alimentar o escoamento, devido à enorme diferença de dimensão entre as maiores e as menores escalas a altos números de Reynolds. Alternativamente, considerar que as menores escalas fossem dominantes, traria o desconforto de aceitar que todo o movimento fosse conservado, ou dirigido, por uma região que não ocupa mais do que uma diminuta fração ($\simeq 0.1\%$) da camada limite. Uma completa descrição da camada limite envolve então necessariamente o completo conhecimento da natureza da interação escalas internas/escalas externas no escoamento.

3.2 A Estrutura Dominante em Escoamentos Cisa-lhantes Bidimensionais

Para o caso de uma camada de mistura, parece que a estrutura do escoamento já se encontra razoavelmente elucidada. Se o escoamento é laminar, a evolução de pequenas perturbações bidimensionais resultará em um estado correspondendo a estruturas vorticiais como aquelas mostradas a seguir. É fato que estas estruturas normalmente sobrevivem por longos períodos de tempo, sendo portanto estáveis à perturbações tri-dimensionais.

A questão agora é se este quadro também se mantém para escoamentos turbulentos. Neste caso a camada de mistura também pode ser vista do mesmo modo como no caso laminar, exceto que mais espessa. Infelizmente, o número de experimentos disponíveis para o caso turbulento é escasso, o que torna difícil a determinação dos parâmetros de interesse. De qualquer modo, a idéia de que instabilidades a perturbação bi- e tri-dimensionais irá determinar a origem e o sustento das maiores estruturas do escoamento é aplicativa e será investigada aqui. A busca de um modelo não viscoso para a camada limite deve entretanto ser cercada de cuidado. Ao contrário de escoamentos livres onde a viscosidade possui pouca influência sobre o processo físico, na camada limite a estrutura está constantemente sendo alimentada pelo processo de “explosão”, o qual possui descrição bastante complexa. A própria localização da posição na camada limite onde a “folha de vorticidade” deve ser colocada é de difícil determinação. Desde que as maiores estruturas possuem tamanho compatível com a espessura da camada limite, talvez fosse de se esperar que a folha de vorticidade estivesse numa posição $y/\delta =$ uma fração da unidade. Isto entretanto faz pouco sentido, pois sabemos estar a maior parte da vorticidade concentrada muito próxima à parede. Colocar a folha de vorticidade a uma distância da ordem de yu_τ/ν da parede também não faz sentido por fazer o próprio conceito de uma folha de vorticidade bem definida inválido. A premissa no que se segue será que existe uma

camada crítica na camada limite, local onde deverá estar localizada a folha de vorticidade.

3.3 A Camada Crítica

Em uma camada limite transicional o ponto máximo no perfil de tensão de Reynolds coincide com a camada crítica. Traçando uma analogia, para caso turbulento simplificamos grandemente nossa análise, ao considerar que a localização do ponto de máximo corresponde à localização da camada crítica.

Uma análise dos dados experimentais revela que a posição do ponto de tensão turbulenta máxima pode ser bem correlacionada pela expressão

$$y_p^+ = \frac{y_p u_\tau}{\nu} = 2 \left(\frac{\delta u_\tau}{\nu} \right)^{1/2} = 2R^{1/2}. \quad (3.1)$$

A velocidade na camada crítica é aproximadamente constante e igual a $0.65 U_\infty$.

Tendo determinado a posição da folha de vorticidade, resta-nos agora obter o comprimento de onda na direção do escoamento das estruturas verticais. Aqui utilizaremos alguns argumentos heurísticos para prever o comprimento de onda de Tollmien-Schlichting, mostrando a seguir como ele se encontra de acordo com as observações experimentais. O comprimento de onda para o caso turbulento será então obtido do mesmo modo.

Na camada limite transicional podemos imaginar uma perturbação na folha de vorticidade na camada crítica. Uma perturbação correspondente na parede irá se difundir na direção do escoamento externo e se convectar corrente abaixo. Se a chegada da perturbação refletida na parede na camada crítica ocorre de tal modo que a perturbação lá gerada é reforçada, o cenário posto é favorável à amplificação. Se por outro lado a perturbação da parede chega fora de fase na camada crítica, as perturbações decairão e nenhum mecanismo de sustento das perturbações será possível. Se λ_{T-S} é o comprimento de onda do modo mais instável de Tollmien-Schlichting que se amplifica, e U_c é a velocidade de fase na camada crítica localizada a uma distância δ_c da parede, as perturbações amplificarão-se

$$t_d = 2 \frac{\delta_c^2}{\nu} \quad (3.2)$$

e

$$t_c = \frac{\lambda}{U_c} \quad (3.3)$$

forem iguais, isto é,

$$\delta_c = \sqrt{\frac{\nu \lambda_{T-S}}{20 U_c}}. \quad (3.4)$$

Observando que $\delta_c = 0.19\delta$ e $U_c = 0.35U_\infty$, podemos reescrever a relação acima como

$$\frac{\lambda_{T-S}}{\delta} = \frac{R_\delta}{40} \quad (3.5)$$

Para R_δ típico no domínio de instabilidade, temos

$$\frac{\lambda_{T-S}}{\delta} = 0(10), \quad (3.6)$$

um resultado bastante próximo àqueles obtidos em experimentos controlados.

Para entender estes resultados para escoamentos turbulentos, consideramos que a maior parte do processo de difusão ocorre por mecanismos turbulentos. Denotando por ν_t a viscosidade cinemática turbulenta, resulta que

$$t_d = 2 \frac{\delta_t^2}{\nu_t}. \quad (3.7)$$

Mas, da expressão (3.1), obtemos

$$\delta_c^2 = \frac{4\nu_e \delta}{u_\tau}. \quad (3.8)$$

O que implica

$$t_d = \delta \frac{\nu_e}{\nu_t} \frac{\delta}{u_\tau}. \quad (3.9)$$

Como o tempo de convecção das perturbações é dado por

$$t_c = \frac{\lambda_x}{0.65U_\infty}, \quad (3.10)$$

vem

$$\frac{\lambda_x}{\delta} = 5.2 \frac{\nu_e U_\infty}{\nu_t u_\tau}. \quad (3.11)$$

A esta altura, já obtivemos a distância que a folha de vorticidade mantém da parede e estimamos o comprimento de ordem das estruturas vorticiais.

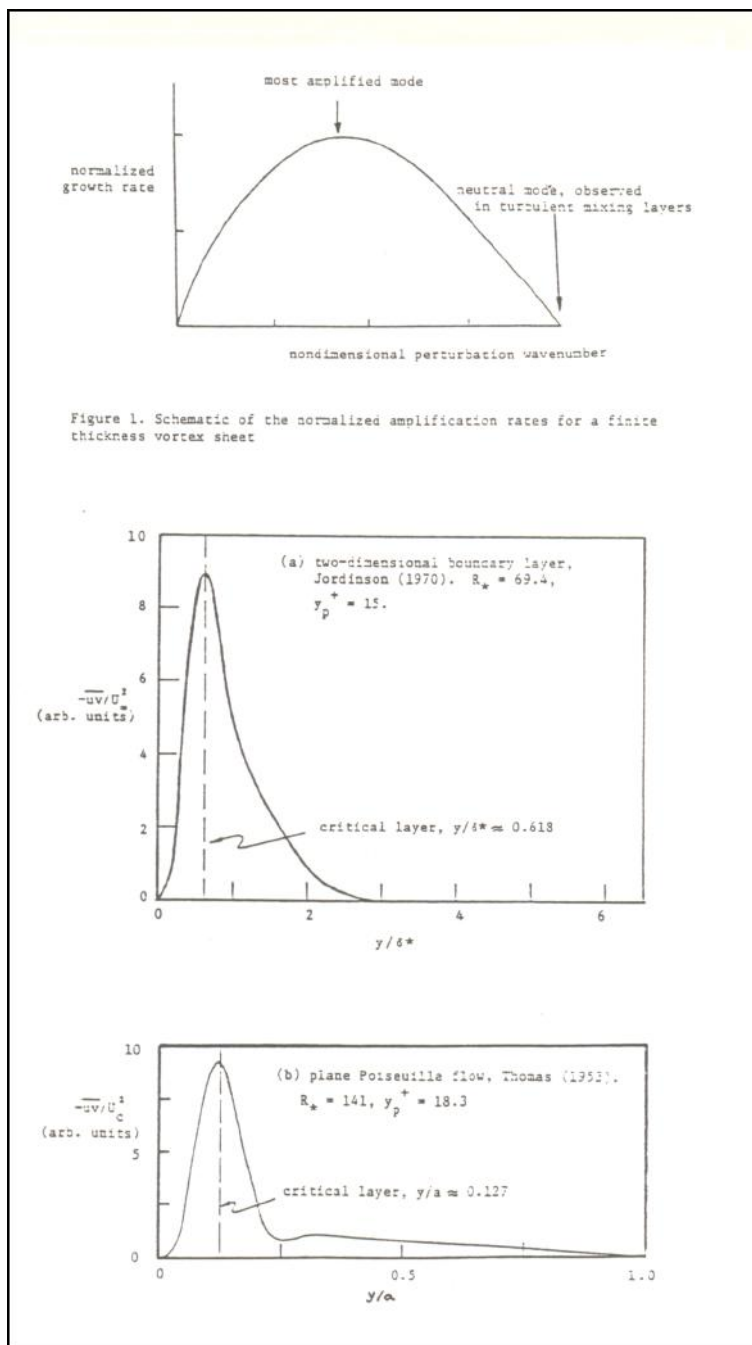


Figura 3.1: Distribuição das tensões de Reynolds.

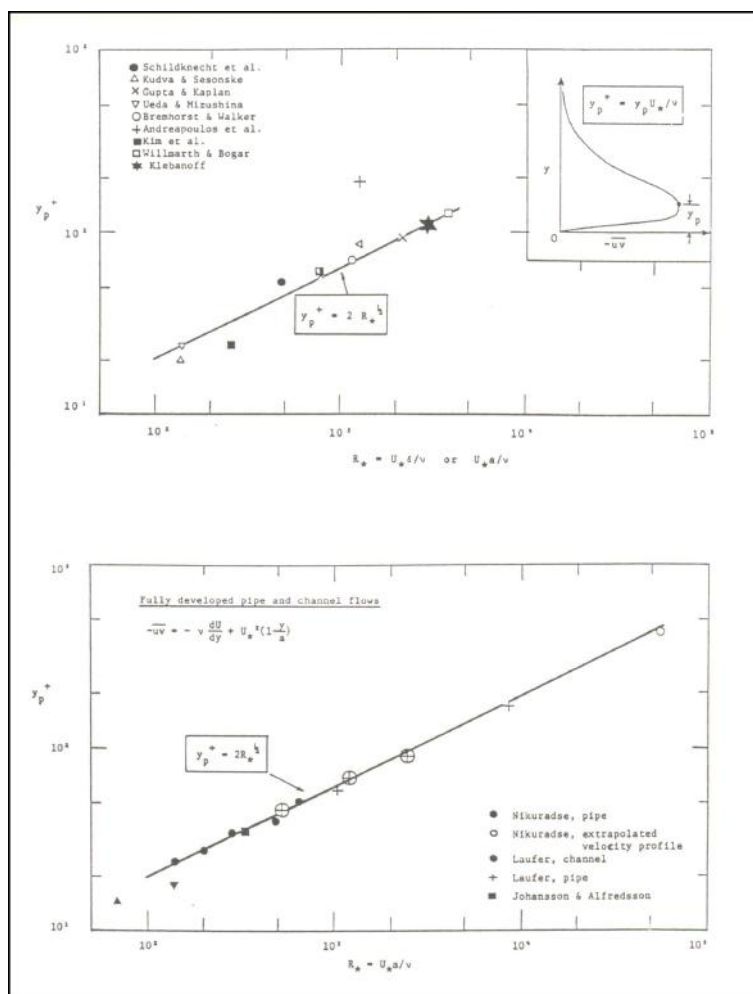


Figura 3.2: Localização dos picos nos perfis de tensão de Reynolds.

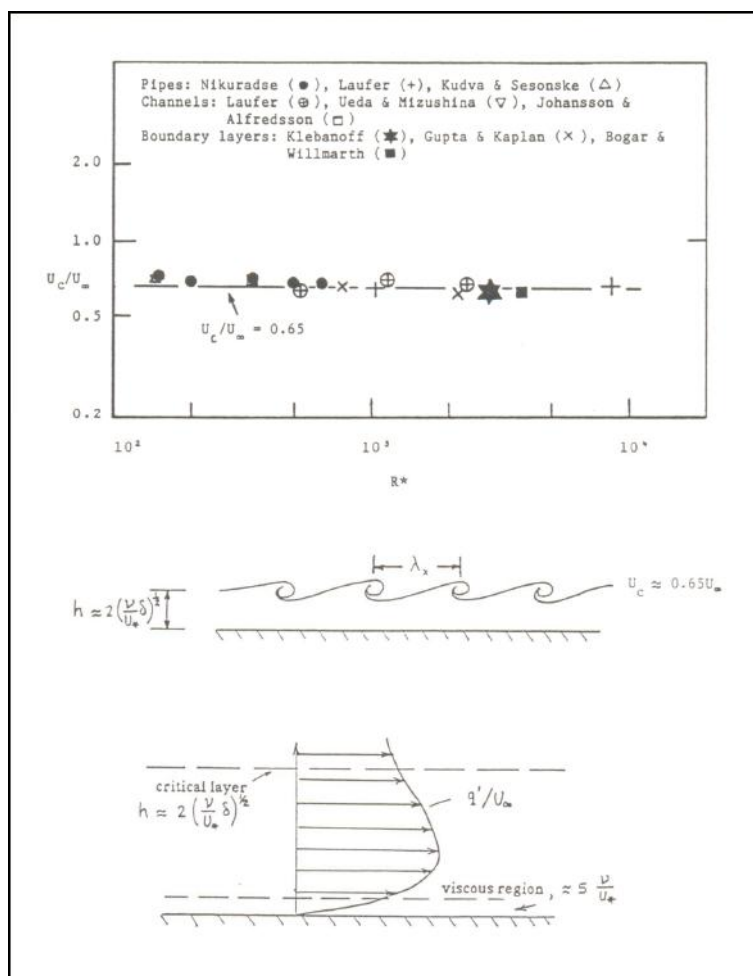


Figura 3.3: Velocidades médias nos picos, enrolamento das camadas cisalhantes e camada crítica.

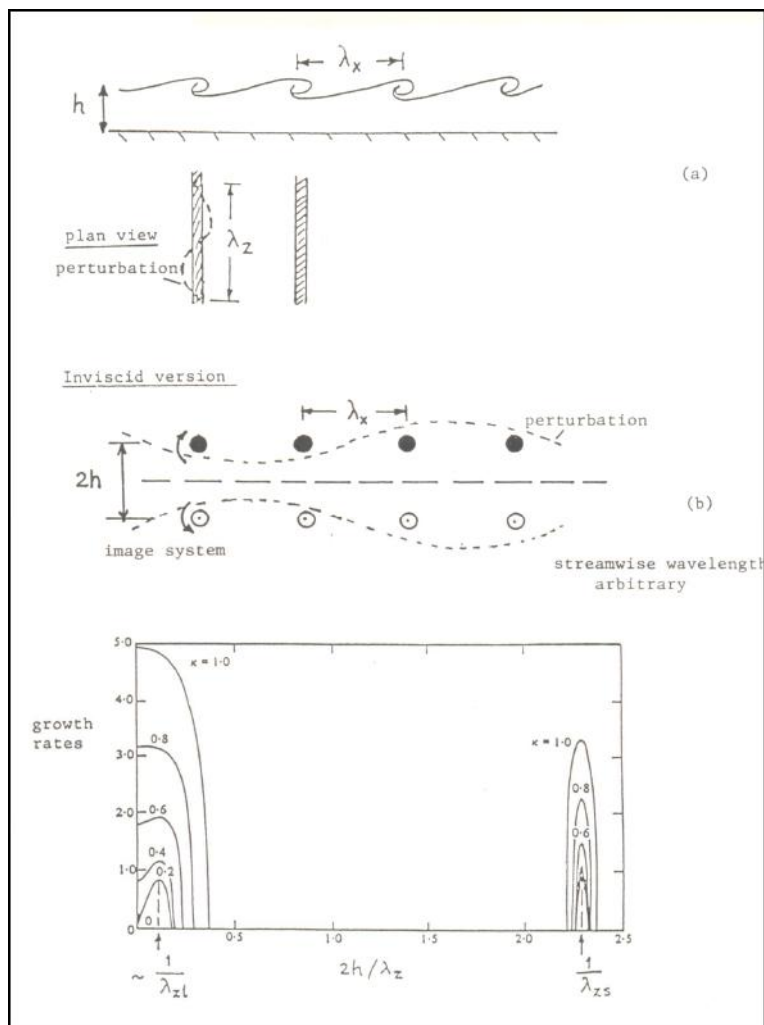


Figura 3.4: Camada de enrolamento e taxas de amplificação das perturbações.

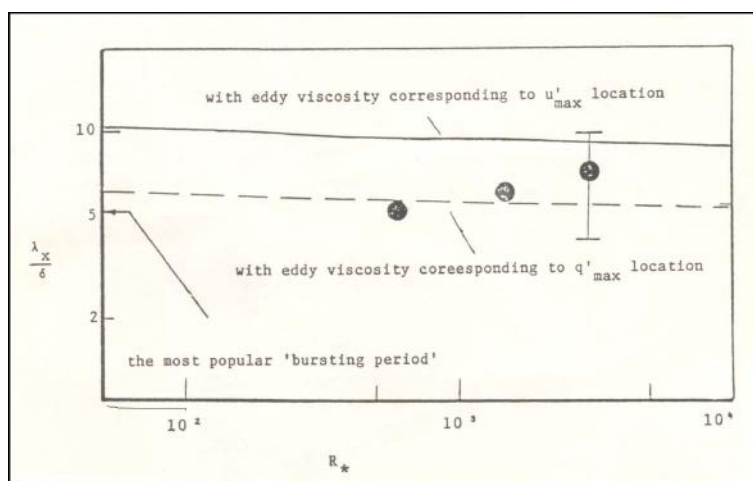


Figura 3.5: Espaçamento entre estruturas turbulentas.

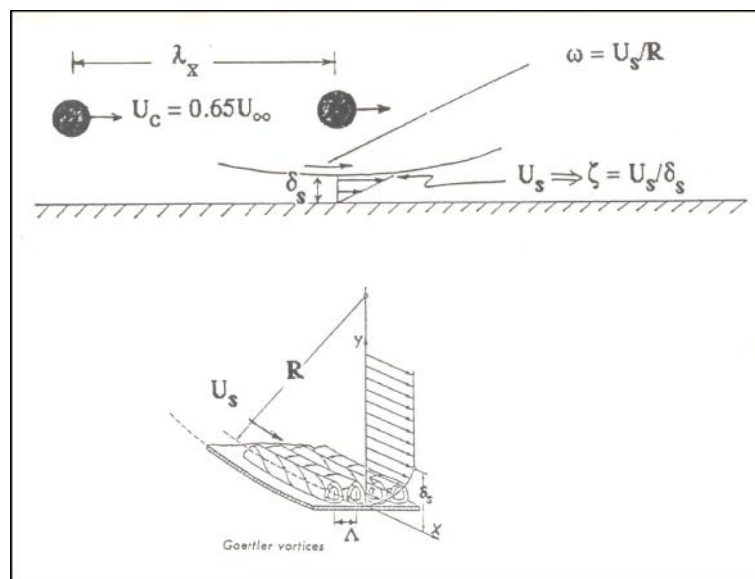


Figura 3.6: Estrutura proposta.

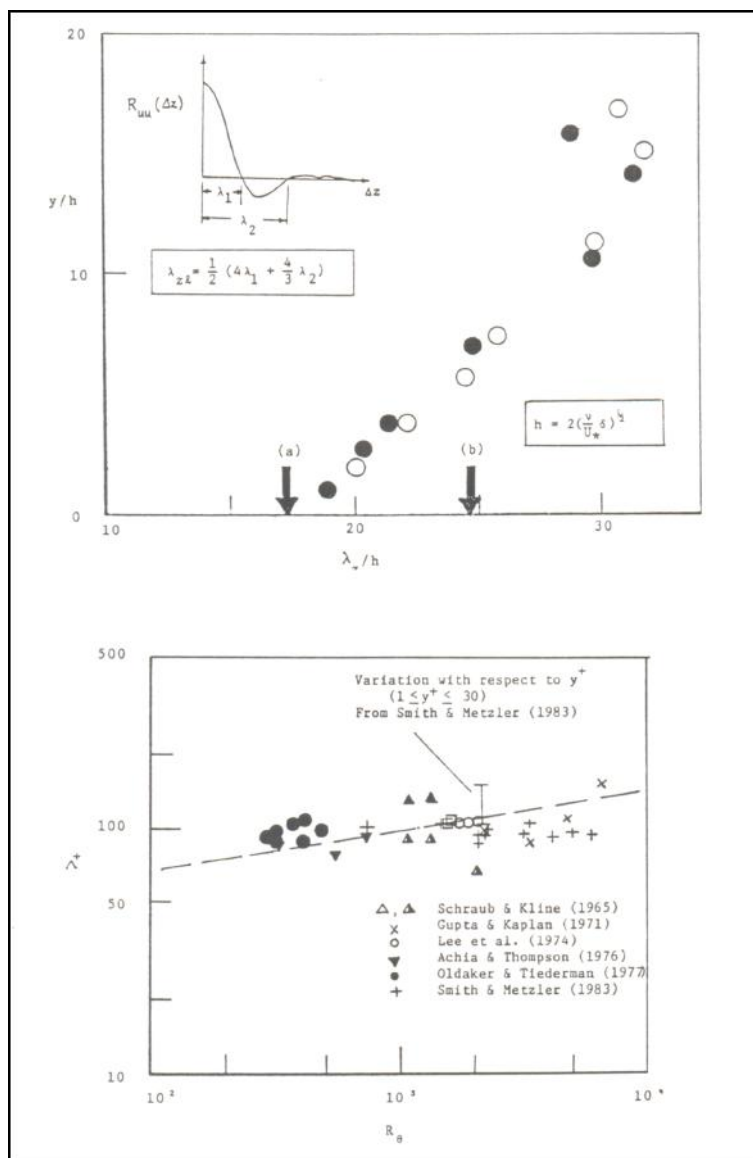


Figura 3.7: Caracterização do comprimento de onda.

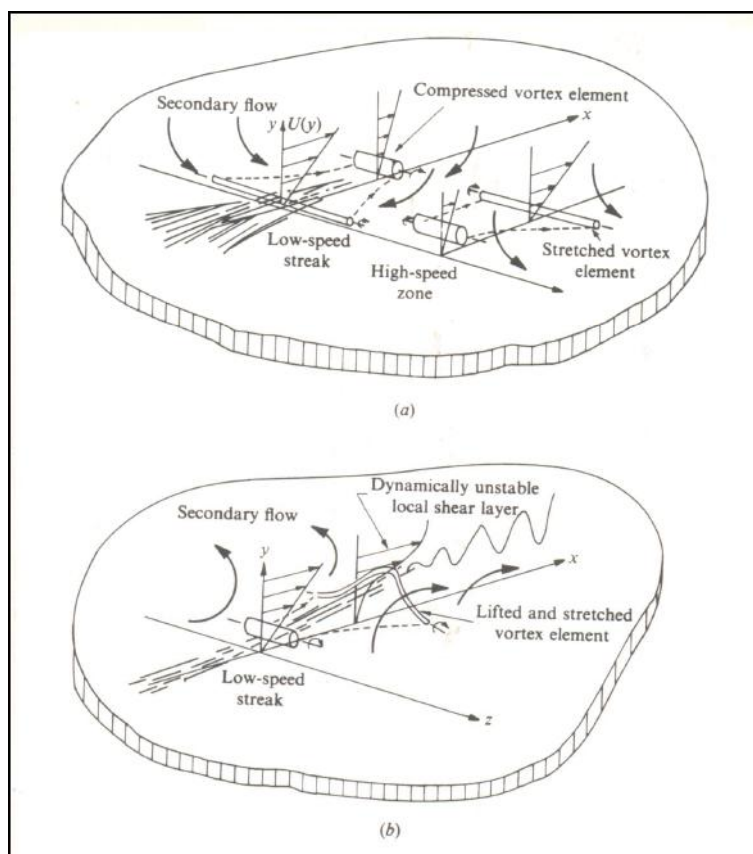


Figura 3.8: Modelo conceitual de Kline.

Capítulo 4

A Modelagem Matemática da Turbulência

4.1 Introdução

A descrição dos escoamentos turbulentos de um fluido newtoniano não deveria a princípio oferecer qualquer dificuldade desde que as equações de Navier-Stokes se aplicam igualmente aos escoamentos laminares e turbulentos. Infelizmente, sabemos que importantes detalhes da turbulência ocorrem em diminutas escalas, o que virtualmente impede qualquer tipo de discretização direta das equações de Navier-Stokes.

A solução de engenharia para esta dificuldade é não considerar os detalhes da turbulência; alternativamente, considera-se apenas propriedades tomadas sobre uma certa média. O escoamento turbulento é então dividido em duas partes, um escoamento médio caracterizado por \bar{U}_i e \bar{P} e uma parte turbulenta caracterizada por u_i e p , de modo que podemos escrever

$$u_i = \bar{U}_i + u_i, \quad (4.1)$$

$$P = \bar{P} + p. \quad (4.2)$$

A substituição das expressões acima na equação da continuidade nos fornece

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (4.3)$$

A passagem da média em (4.3) resulta em

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.4)$$

As equações de Navier-Stokes por outro lado, se reduzem a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_i + u_i) + (\bar{U}_j + u_j) \frac{\partial(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2(\bar{U}_i + u_i)}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (4.5)$$

a qual, após passagem da média, fica

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \overline{u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (4.6)$$

Esta equação pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\rho \overline{u_i u_j} - \bar{P} \delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right) \right). \quad (4.7)$$

O processo de tomada da média faz aparecer correlações envolvendo flutuações de velocidade na equação do movimento médio. Estes novos termos são interpretados como uma tensão adicional ao movimento, uma tensão turbulenta. De fato, a equação do movimento médio, (4.7), é idêntica à equação de Navier-Stokes exceto pela inclusão dos termos de tensão turbulentos. As variáveis independentes para o caso turbulento passam portanto a ser \bar{U}_i , \bar{P} e $\overline{u_i u_j}$. Isto faz com que nosso número de incógnitas seja superior ao número de equações disponíveis. Para resolver qualquer problema que envolva um escoamento turbulento é então necessário se providenciar um novo conjunto de equações que relacione as grandezas médias às grandezas instantâneas. Este problema de se obter novas equações é chamado em turbulência de o problema do fechamento.

O modo mais simples de se fechar o problema é considerar que os fenômenos de transferência de quantidade de movimento molecular e turbulento se processem de modo análogo. A implicação disto é que $\overline{u_i u_j}$ pode ser expresso em termos de uma taxa média de deformação e de um coeficiente efetivo de viscosidade, ou seja,

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.8)$$

A hipótese acima parece ser inconsistente pois para o caso bastante simples

$$i = j = 1 \quad , \quad -\overline{u_1^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{U}_1}{\partial x_1} \quad (4.9)$$

$$i = j = 2 \quad , \quad -\overline{u_2^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{U}_2}{\partial x_2} \quad (4.10)$$

$$i = j = 3 \quad , \quad -\overline{u_3^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{U}_3}{\partial x_3} \quad (4.11)$$

o que implica que $\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2} = 0$.

Um bom melhoramento pode ser obtido pela simples modificação

$$-\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} \kappa \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.12)$$

onde $\kappa = \frac{1}{2}(\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2})$.

Neste caso, o traço do tensor de Reynolds passa a ser

$$\sum_{i=j} \overline{u_i u_j} = 2\kappa. \quad (4.13)$$

O conceito de viscosidade turbulenta, ν_T , é fenomenológico, não possuindo qualquer base matemática. Enfatizando que a viscosidade molecular é uma propriedade do fluido e que a viscosidade turbulenta é uma propriedade do escoamento, lembramos que num escoamento tri-dimensional, ν_T pode ser uma quantidade vetorial.

Como os processos de transferência turbulentos não são locais e os eixos principais do tensor de Reynolds geralmente não coincidem com os eixos principais do tensor de deformação, os escoamentos turbulentos exibem normalmente um alto grau de anisotropia. A turbulência, portanto, deve desenvolver algum tipo de memória, ou seja, os termos $\overline{u_i u_j}$. Isto pode ser feito pela prescrição de ν_T em função de correlações algébricas a partir de parâmetros obtidos através de equações diferenciais parciais. Dependendo do número de equações utilizadas na descrição de ν_T classificamos os modelos como: algébricos, de uma, ou de duas equações. Especificamente, classificamos os modelos como:

1. Modelo algébrico ou de zero equações. Estes modelos empregam uma forma algébrica para ν_T .
2. Modelos de uma equação. Estes modelos utilizam uma equação diferencial parcial para a descrição da escala de velocidade ($\nu_T = u_c l_c$, onde u_c = velocidade característica e l_c = comprimento característico).
3. Modelos de duas equações. Duas equações diferenciais são utilizadas aqui, uma para $u_c = \sqrt{\kappa}$ e outra para $l_c = \kappa^{3/2} \epsilon_{-1}$.
4. Modelos algébricos para o tensor de Reynolds. Neste modelo equações algébricas são utilizadas para descrever os componentes do tensor de Reynolds. Estas equações são acopladas às equações diferenciais do modelo anterior.
5. Modelos para o tensor de Reynolds. Este modelo utiliza várias equações de transporte para descrever cada componente do tensor de $\overline{u_i u_j}$.

Os modelos algébricos são largamente utilizados em aplicações de engenharia que envolvam escoamentos cisalhantes simples. Os modelos de uma equação foram bastante utilizados nos estágios iniciais de desenvolvimento dos modelos turbulentos, sendo ainda hoje utilizados em algumas aplicações. Os modelos de duas equações são os modelos mais populares hoje em dia, sendo utilizados quando algum detalhe maior da turbulência é desejado. Modelos algébricos para o tensor de Reynolds tem sido largamente utilizados para o estudo de escoamentos que apresentem curvatura e rotação. Finalmente, os modelos para o tensor de Reynolds tem sido desenvolvidos para a utilização em escoamentos muito complexos que apresentem tri-dimensionalidade, curvatura, rotação e transpiração entre outros efeitos.

4.2 Modelos de Zero-Equação

A partir da idéia de que a lei da viscosidade de Newton se aplicava a escoamentos turbulentos (Eq. (4.12)) vários autores propuseram que ν_T pudesse ser definida a partir do produto de uma velocidade característica e de um comprimento característico. Neste caso

$$\nu_T = u_c l_c, \quad (4.14)$$

onde

$$u_c = 2l_c \sqrt{S_{ij} S_{ij}} \quad (4.15)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.16)$$

De fato, com o avanço das correlações algébricas (4.15) e (4.16), Prandtl reduziu o problema do fechamento à especificação apenas do comprimento característico, l_c . A idéia simples por trás de seus desenvolvimentos foi a de que a ordem de grandeza das flutuações da velocidade transversal seria a mesma das flutuações da velocidade longitudinal, e que estas seriam proporcionais à distância média percorrida por uma partícula de fluido vezes o gradiente de velocidade local.

A teoria traduzida pelas equações (4.15) e (4.16) é conhecida como a teoria do comprimento de mistura. A única questão ainda a ser resolvida é a especificação de l_c . Para escoamentos cisalhantes simples, equações simples para l_c podem ser propostas, as quais apresentam bons resultados. Para a camada limite, Prandtl sugeriu que l_c fosse proporcional à distância da parede, ou seja,

$$l_c = \kappa y, \quad (4.17)$$

onde $\kappa = 0.4 =$ constante de Von Karman.

Para o escoamento em jatos, normalmente toma-se

$$\frac{l_c}{\delta} = \text{cte.} \quad (4.18)$$

Para representar a região viscosa próxima à parede fazemos

$$l_c = \kappa y \left(1 - \exp\left(\frac{-yu_\tau}{A\nu}\right) \right), \quad (4.19)$$

com $A = 26$. A troca de (4.17) por (4.19) numa região próxima à parede foi proposta por Van Driest e objetiva por rapidamente suprimir a turbulência junto à parede recuperando um perfil de velocidade linear.

Como os modelos algébricos assumem isotropia do escoamento, eles são estritamente válidos para escoamentos bi-dimensionais simples. Eles não são apropriados para escoamentos com curvatura, rotação e separação e em situações onde os efeitos de transporte turbulento são importantes. A hipótese de isotropia também invalida os modelos algébricos para escoamentos secundários movidos por pressão ou turbulência ou quando mudanças abruptas ocorrem na taxa de cisalhamento ou de deformação. Estes modelos

são, portanto, aplicáveis a escoamentos bi-dimensionais sujeitos a fracos gradientes de pressão. Neste caso o perfil de velocidade é bem descrito, mas o perfil de tensões obtido é apenas qualitativo.

4.3 Modelos de Uma Equação

Nos modelos de uma equação, uma equação de transporte é utilizada para modelar a velocidade característica, u_c . Neste caso, a rota natural é se tomar $u_c = (\kappa)^{1/2}$. Deste modo, ao invés de se relacionar as flutuações ao gradiente local da velocidade, relaciona-se a uma propriedade turbulenta inerente ao escoamento, a energia cinética turbulenta.

A equação de transporte para κ pode ser deduzida diretamente das equações de Navier-Stokes. Subtraindo-se a equação (4.6) da equação (4.5), obtém-se

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_c}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_i u_k - \overline{u_i u_k} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (4.20)$$

Similarmente para u_j podemos escrever

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_j u_k - \overline{u_j u_k} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (4.21)$$

Multiplicando-se as duas últimas equações por u_j e u_i , respectivamente, somando-as e passando a média, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} &= - \left(\overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} + \overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j u_k} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_j \frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{u_i \frac{\partial p}{\partial x_j}} \right) + \nu \left(\overline{u_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}} + \overline{u_i \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k}} \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Fazendo-se $i = j$ na equação acima, obtemos finalmente

$$\frac{D\kappa}{Dt} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\kappa u_j} + \overline{p u_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x_j \partial x_j} - \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2}. \quad (4.23)$$

A equação acima nos fornece o modo como a taxa de variação da energia turbulenta ocorre com o tempo como função dos vários efeitos representados no lado direito. Observando que o segundo e o terceiro termo podem ser escritos como uma divergência, identificamos seus efeitos físicos como a difusão da energia turbulenta através do espaço por interações não-lineares e viscosas respectivamente. O quarto termo claramente representa a dissipação de energia cinética em calor. Finalmente, o termo restante, o primeiro termo, representa o fluxo de energia entre o campo de velocidade médio e o campo turbulento. Ele é, portanto, o termo de produção de energia turbulenta. Verificamos então que a produção de turbulência depende da existência de cisalhamento no escoamento. Por

exemplo, para o escoamento no interior de um duto, as derivadas com relação a t , x_1 e x_3 são nulas, de modo que o termo de produção se reduz a

$$T = -\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x_2}. \quad (4.24)$$

Da equação (4.22) verificamos então que:

- apenas $\overline{u_1^2}$ é produzido diretamente pela conversão de energia cinética do escoamento principal,
- $\overline{u_2^2}$ e $\overline{u_3^2}$ são gerados por transferência inercial de $\overline{u_1^2}$ através da correlação tripla e dos termos envolvendo flutuação de pressão.
- a taxa de geração de $\overline{u_1^2}$ deve apresentar um pico próximo à parede onde o gradiente de velocidade é alto.

A solução da equação (4.23) passa agora pelo problema do fechamento. Inicialmente, consideramos o processo de difusão turbulento similar ao processo de difusão molecular e escrevemos

$$\overline{\kappa u_j} + \overline{p u_j} = \text{constante} \times \kappa^{1/2} l_c \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} = \frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j}. \quad (4.25)$$

A constante σ_κ é chamada de a constante de difusão da energia turbulenta.

Como a dissipação acontece nas menores escalas, ela se processa num ambiente turbulento homogêneo isotrópico. Para altos números de Reynolds, estas escalas são muito menores que as maiores escalas que contém a maior parte da energia do movimento. A taxa de dissipação pode então ser pensada como sendo controlada pelos processos de transferência de energia das maiores para as menores escalas. Este processo de transferência de energia em cascata pode ser suposto depender apenas de κ e de l_c . Após argumentos dimensionais, obtém-se

$$-\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2} = C_D \frac{\kappa^{3/2}}{l_c}, \quad (4.26)$$

onde C_D é uma constante a ser determinada. Normalmente $C_D = 0,09$.

O termo de produção pode ser facilmente modelado pela re-introdução do conceito de viscosidade turbulenta, neste caso

$$-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \left((-2/3) \kappa \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}. \quad (4.27)$$

Para a camada limite bi-dimensional, a equação (4.23) se reduz a

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right) + \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_D \frac{\kappa^{3/2}}{l_c}, \quad (4.28)$$

onde a contribuição do termo de terceira ordem foi considerada de ordem superior.

Próximo à parede, numa região onde exista um equilíbrio entre a produção e a dissipação de energia cinética turbulenta, a equação acima se reduz a

$$\nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = C_D \frac{\kappa^{3/2}}{l_c}. \quad (4.29)$$

Multiplicando o lado esquerdo de (4.29) por ν_T e seu lado direito por $\kappa^{1/2} l_c$, obtemos

$$\nu_T^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = C_D \kappa^2 \quad (4.30)$$

ou seja,

$$\frac{\tau}{\rho \kappa} = C_D^{1/2}. \quad (4.31)$$

Isto mostra que a tensão cisalhante é proporcional à energia cinética turbulenta.

Fazendo $\kappa = l_c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$ acima, ficamos com

$$\tau = C_D^{1/2} \rho l_c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (4.32)$$

e a hipótese do comprimento de mistura é recuperada.

Os modelos de uma equação ainda possuem a séria deficiência de não oferecerem uma equação de transporte para l_c . Este deve ser determinado através de uma equação algébrica.

Reconhece-se hoje que a caracterização da turbulência por uma equação de transporte para u_c não é adequada. Estes modelos, entretanto, foram recentemente revitalizados por Johnson e King (1985), para a predição de escoamentos bi-dimensionais que apresentem separação. Estes autores objetivaram produzir um modelo que pudesse levar em conta os fortes efeitos de “história” característicos de camadas limites turbulentas sujeitas a rápidas mudanças de pressão na direção longitudinal. Uma equação diferencial ordinária deduzida a partir da equação (4.19) foi utilizada para descrever o desenvolvimento do ponto de máximo do perfil de tensões de Reynolds em conjunção com uma assumida distribuição da viscosidade turbulenta.

Considere a seguinte forma funcional para a viscosidade turbulenta:

$$\nu_T = \nu_{to} [1 - \exp(-\nu_{ti}/\nu_{to})], \quad (4.33)$$

onde ν_{ti} é a viscosidade interna fornecida por

$$\nu_{ti} = D^2 \chi y \left(-\overline{(u'v')_m} \right)^{1/2}, \quad (4.34)$$

e ν_{to} é a viscosidade externa fornecida por

$$\nu_{to} = \text{const. } \gamma. \quad (4.35)$$

Nas expressões acima D é uma função de amortecimento (a função de Van Driest) e γ é o fator de intermitência de Klebanoff,

$$\gamma = \left(1 + 5.5(y/\delta)^6\right)^{-1}. \quad (4.36)$$

O subscrito m em (4.34) indica o ponto em que a tensão turbulenta é máxima.

Observe que $\nu_T \sim \nu_{ti}$ quando $\nu_{ti} \ll \nu_{to}$ e que $\nu_t \sim \nu_{to}$ quando $\nu_{ti} \gg \nu_{to}$. Logo, a equação (4.33) permite uma passagem suave da região onde $\nu_T \sim \nu_{to}$. A constante na relação (4.35) é determinada pelo valor de $-\overline{(u'v')}_m$ a ser obtido através de uma equação diferencial ordinária ainda a ser prescrita; ela deve ser ajustada de modo que a seguinte relação seja satisfeita:

$$\nu_T|_m = \frac{-\overline{(u'v')}_m}{(\partial\bar{u}/\partial y)_m}, \quad (4.37)$$

onde ν_t é fornecido pela relação (4.33).

O ajuste de ν_{to} para satisfazer a equação diferencial para $-\overline{(u'v')}_m$ e o uso de $(-\overline{(u'v')}_m)^{1/2}$ como uma escala característica de velocidade para a viscosidade turbulenta, faz este modelo de fechamento fortemente dependente no desenvolvimento das tensões de Reynolds.

A equação para $-\overline{(u'v')}_m$ é desenvolvida a partir da equação (4.28) para a energia cinética turbulenta. Ao longo do caminho s de energia cinética máxima, κ_m , a equação (4.28) se reduz a

$$\bar{u}_m \frac{d\kappa_m}{dx} = -\overline{(u'v')}_m \left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} \right)_m - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{p'v'}}{\rho} + \overline{\kappa v'} \right)_m - \epsilon_m, \quad (4.38)$$

onde considera-se que x e s são aproximadamente coincidentes e y é normal a s .

Para simplificar ainda mais a equação acima, fazemos $(-\overline{(u'v')}_m/\kappa_m) = a_1 =$ constante. Então fazendo $\epsilon_m = (-\overline{(u'v')}_m)^{3/2}/L_m$, obtemos

$$\bar{u}_m \frac{d\kappa_m}{dx} = a_1 \kappa_m \left(\frac{\partial\bar{U}}{\partial y} \right)_m - D_m - \frac{(a_1 \kappa_m)^{3/2}}{L_m}, \quad (4.39)$$

onde D_m representa o termo de difusão turbulento.

O comprimento característico L_m é dado por

$$L_m = 0.4y_m \quad , \quad y_m/\delta \leq 0.225 \quad (4.40)$$

$$L_m = 0.09\delta \quad , \quad y_m/\delta > 0.225 \quad (4.41)$$

O termo de difusão turbulento é aproximado por

$$D_m = \frac{C_{dif}(a_1 \kappa_m)^{3/2}}{a_1 \delta (0.7 - (y/8)_m)} \left(1 - \left(\frac{\nu_{to}}{\nu_{to,eq}} \right)^{1/2} \right), \quad (4.42)$$

onde C_{dif} é uma constante e ν_{to} é a viscosidade turbulenta em condições de equilíbrio. Nestas condições

$$C_{dif}\nu_{tv,eq}\left(1 - \exp\left(\nu_{ti,eq}/\nu_{to,eq}\right)\right), \quad (4.43)$$

$$\nu_{ti,eq} = D^2\kappa y\left(-\overline{u'v'}_{m,eq}\right)^{1/2}, \quad (4.44)$$

$$\nu_{tv,eq} = 0.0168u_c\delta_1\gamma. \quad (4.45)$$

As relações acima são utilizadas para o cálculo do perfil de velocidade e de $-\overline{(u'v')}_m$ para o início do procedimento de cálculo numérico.

A grandeza $-\overline{(u'v')}_{m,eq}$ pode ser inicialmente calculada a partir de

$$\left(-\overline{(u'v')}_{m,eq}\right)^{1/2} = L_m\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)_m. \quad (4.46)$$

O valor de D em (4.34) é normalmente calculado com um valor de 15 para A^+ no modelo de Van Driest. As constantes a_1 e C_{dif} são respectivamente 0.25 e 0.50.

4.4 Modelos de Duas Equações

Os modelos de duas equações empregam a princípio mais física que os modelos de zero e uma equação e portanto deveriam apresentar melhores resultados. Eles fornecem equação de transporte não apenas para a velocidade característica $\kappa^{1/2}$ mas também para o comprimento característico l_c . Vários modelos de duas equações se encontram disponíveis na literatura. Aqui trataremos dos dois mais populares, o modelo $\kappa - \epsilon$ de Jones e Launder(1972) e o modelo $\kappa - \omega$ de Wilcox e Rubesin(1980).

Nos modelos de duas equações, a velocidade característica sempre é tomada como sendo $\kappa^{1/2}$, a qual é calculada a partir da equação da energia cinética turbulenta. O comprimento característico, por outro lado, normalmente é calculado a partir de uma outra variável composta de um produto que envolva u_c e l_c . A equação do transporte para esta variável deve ser obtida exatamente como a equação para κ o foi, isto é, a partir de manipulações das equações de Navier-Stokes. Diferentes variáveis foram adotadas pelos diversos autores como a segunda variável do problema. Dentre eles destacamos $\epsilon = \kappa^{3/2}/l_c$ e $\omega = \kappa^{1/2}/l_c$. A taxa de dissipação da energia turbulenta, ϵ , foi preferida por muitos autores nos últimos anos. Isto deu-se parcialmente pela relativa facilidade com que a equação para ϵ pode ser deduzida além do fato dela aparecer explicitamente na equação para κ . A variável ω , historicamente a primeira a ser proposta como uma segunda variável por Kolmogorov(1942), é interpretada como a frequência média das escalas turbulentas que contém as maiores energias.

No modelo $\kappa - \epsilon$, a viscosidade turbulenta é representada por

$$\mu_t = c_\mu\rho\frac{\kappa^2}{\epsilon}, \quad (4.47)$$

onde, para escoamentos isotrópicos, c_μ é um escalar (= 0.09).

Para escoamentos não isotrópicos, por exemplo, escoamentos rotacionais tri-dimensionais, c_μ é uma grandeza vetorial.

A equação para ϵ proposta por Jones e Launder pode ser escrita como

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{\kappa} (-\overline{u_i u_j}) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{\kappa} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t / \sigma_\epsilon) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] \quad (4.48)$$

onde $c_{\epsilon 1} = 1.44$, $c_{\epsilon 2} = 1.92$, $\sigma_\epsilon = 0.23$.

O modelo $\kappa - \epsilon$ não se aplica a escoamentos onde o número de Reynolds local seja baixo. Por este motivo, ele não se aplica à região viscosa próxima à parede.

Esta região deve ser substituída por funções de parede, normalmente numa função logarítmica.

Tipicamente, para a velocidade fazemos

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{1}{\varkappa} \ln(E y_w^+), \quad (4.49)$$

onde $\varkappa = 0.4$, $E = 9$, $y^+ = y u_\tau / \nu$.

O valor de κ junto a parede é determinado através de um balanço do volume de controle adjacente à parede. Neste balanço, os termos difusivos e convectivos são considerados nulos. Então, com um balanço entre a produção e a dissipação de energia, obtemos

$$\kappa_w = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}}. \quad (4.50)$$

O valor de ϵ no primeiro ponto do grid é tomado como

$$\epsilon_1 = \frac{u_\tau^3}{\varkappa y_1}. \quad (4.51)$$

O uso de funções de parede para a especificação das condições de contorno torna os modelos $\kappa - \epsilon$ bastante robustos. Infelizmente, as soluções decorrentes se mostram muito sensíveis à escolha de y_1 . De qualquer modo, qualquer modelo deve ser capaz de reproduzir a constante $B = 5.0$ na lei da parede para escoamentos de camada limite sem gradiente de pressão. As formulações para $\kappa - \epsilon$ que não utilizem funções de parede devem portanto incorporar em seu bojo funções de amortecimento que garantam o valor correto de B .

Os modelos $\kappa - \epsilon$ tem sido largamente utilizados para a predição do escoamento em camadas limite, em jatos, em canais e em difusores onde rotação e separação não estejam presentes. Estes modelos são francamente inadequados para escoamentos separados, e que possuam mudanças abruptas na taxa de cisalhamento. As previsões para escoamentos tri-dimensionais também não são boas. Isto se deve à hipótese de isotropia e à formulação para baixos números de Reynolds junto à parede. O modelo também falha para escoamentos com curvatura. Nos casos em que o modelo apresenta bons resultados, seu sucesso restringe-se normalmente à previsão dos perfis médios. Os resultados para as propriedades turbulentas são apenas qualitativos. A razão para a falha de tais modelos é certamente o fato de que as “constantes” nestes modelos são determinadas por escoamentos simples *bi-dimensionais*, além da hipótese de isotropia e da presença apenas de difusão induzida por gradientes de velocidade.

No modelo $\kappa - \omega$, a viscosidade turbulenta é fornecida por

$$\mu_t = \frac{\kappa}{\omega}. \quad (4.52)$$

A equação de transporte para ω proposta por Wilcox pode ser escrita como

$$\frac{D\omega}{Dt} = \alpha \frac{\omega}{\kappa} (-\overline{u_i u_j}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right), \quad (4.53)$$

onde $\alpha = 5/9$, $\beta = 3/40$, $\sigma_\omega = 1/2$.

Nesta formulação $\epsilon = C_\mu \omega \kappa$.

De acordo com seus defensores, o modelo $\kappa - \omega$ é superior ao modelo $\kappa - \epsilon$ principalmente por remover os problemas que este possui com relação à sua integração até a parede e a previsão de escoamentos sujeitos a um gradiente de pressão adverso. Isto se deve à omissão do termo de difusão cruzado que aparece na equação para ϵ . De fato, se considerarmos $\epsilon = C_\mu \omega \kappa$, e substituirmos este valor na equação (4.43), obtemos

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \frac{\omega}{\kappa} (-\overline{u_i u_j}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + \frac{2(\nu + (\nu_t/\tau_K))}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}. \quad (4.54)$$

O último termo do lado direito na equação acima é o termo de difusão cruzada. Este termo provoca os seguintes efeitos: a) fornece excelentes previsões para o jato plano, b) prejudica a resposta da camada limite a gradientes de pressão, c) torna o modelo $\kappa - \epsilon$ de difícil mudança na subcamada viscosa, forçando a necessidade da introdução de funções de amortecimento.

As condições de contorno para o modelo $\kappa - \omega$ podem ser obtidas por um modo análogo àquele utilizado para o modelo $\kappa - \epsilon$. Na região onde os efeitos turbulentos são dominantes e portanto a lei da parede prevalece,

$$\kappa_\omega = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad , \quad \omega_\omega = \frac{u_\tau}{\sqrt{c_\mu} \kappa y_1}, \quad (4.55)$$

Entretanto, como dissemos que a grande vantagem do modelo $\kappa - \omega$ é sua capacidade de obter boas soluções válidas até a parede, gostaríamos de aplicar as condições de contorno no ponto zero. Neste caso, as condições de não deslizamento nos fornecem

$$u = \kappa = 0 \quad \text{em} \quad y = 0. \quad (4.56)$$

Considerando então que numa imediata vizinhança da parede os termos de difusão molecular e de dissipação dominem, a equação para ω se reduz a

$$-\beta \omega^2 + \nu \frac{d^2 \omega}{dy^2} = 0, \quad (4.57)$$

nos fornecendo:

$$\omega \longrightarrow \frac{6\nu}{\beta y^2} \quad \text{quando} \quad y^+ \longrightarrow 0. \quad (4.58)$$

Condições de contorno mais gerais para superfícies rugosas ou com injeção de massa são também facilmente obtidas.

4.5 Modelos para Baixos Números de Reynolds

Apesar de seus defeitos, o modelo $\kappa - \epsilon$ continua sendo o mais popular na literatura. Para remover um de seus mais sérios defeitos, seu comportamento próximo a uma parede, vários pesquisadores propuseram mudanças nas equações (4.42) e (4.43). Todas as modificações propostas consistem na inclusão de termos de amortecimento nos termos turbulentos em (4.42) e (4.43). Esta modificação visa garantir uma correta previsão do valor da constante B na lei da parede.

As equações de $\kappa - \epsilon$ modificadas são

$$\nu_T = c_\mu f_\mu \kappa^2 / \tilde{\epsilon} \quad (4.59)$$

onde

$$\frac{D\kappa}{Dt} = \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\kappa} \right) \frac{\partial \kappa}{\partial y} \right] \quad (4.60)$$

$$\frac{D\tilde{\epsilon}}{Dt} = f_1 c_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon}}{\kappa} \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - f_2 c_{\epsilon 2} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\kappa} + E + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \nu_T / \sigma_\epsilon \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial y} \right], \quad (4.61)$$

e a dissipação é definida por

$$\epsilon = \tilde{\epsilon} + \epsilon_0 \quad (4.62)$$

As várias versões de $\kappa - \epsilon$ listadas abaixo diferem sempre na forma das funções de amortecimento $f_\mu, f_1, f_2, \epsilon_0$ e E . Estas funções são dependentes nos seguintes parâmetros:

$$Re_T = \frac{\kappa^2}{\tilde{\epsilon} \nu}, \quad R_y = \frac{\kappa^{1/2} y}{\nu}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}. \quad (4.63)$$

4.5.1 O modelo de Jones e Launder

$$f_\mu = \exp[-2.5/(1 + Re_T/50)]$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1 - 0.3e^{-Re_T^2}$$

$$\epsilon_0 = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\kappa}}{\partial y} \right)^2$$

$$E = 2\nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.45, \quad C_{\epsilon 2} = 2.00, \quad dC_\mu = 0.09, \quad \sigma_\kappa = 1.0, \quad \sigma_\epsilon = 1.3, \quad \bar{\epsilon} = 0 \text{ e } y = 0.$$

4.5.2 O modelo de Launder e Sharma

$$f_\mu = \exp[-3.4/(1 + Re_T/50)^2]$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1 - 0.3e^{-Re_T^2}$$

$$\epsilon_0 = 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{\kappa}}{\partial y} \right)^2$$

$$E = 2\nu\nu_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, \bar{\epsilon} = 0, e y = 0.$$

4.5.3 O modelo de Lam e Bremhorst

$$f_\mu = \exp[1 - e^{-(0.0165R_y)}]^2 (1 + 20.5/Re_T)$$

$$f_1 = 1 + (0.05/f_\mu)^3$$

$$f_2 = 1 - e^{-Re_T^2}$$

$$\epsilon_0 = 0$$

$$E = 0$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, \tilde{\epsilon} = \nu \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2} e y = 0.$$

4.5.4 O modelo de Chien

$$f_\mu = 1 - e^{(0.0115R_y)^+}$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1 - 0.22e^{(-Re_T/6)^2}$$

$$\epsilon_0 = 2\nu \frac{\kappa}{y^2}$$

$$E = -2\nu \frac{\tilde{\epsilon}}{y^2} e^{-y^+/2}$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.35, C_{\epsilon 2} = 1.80, C_\mu = 0.09, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, \tilde{\epsilon} = 0 e y = 0.$$

4.5.5 O modelo de Yang e Shih

$$f_\mu = \frac{[1 - \exp(-1.5 \cdot 10^{-4} R_y - 5 \cdot 10^{-7} R_y^3 - 10^{-10} R_y^5)]^{1/2}}{(1 + 1/\sqrt{Re_T})}$$

$$f_1 = \sqrt{Re_T}/(1 + \sqrt{Re_T})$$

$$f_2 = \sqrt{Re_T}/(1 + \sqrt{Re_T})$$

$$\epsilon_0 = 0$$

$$E = \nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.44, C_{\epsilon 2} = 1.92, C_\mu = 0.09, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, \tilde{\epsilon} = 2\nu \frac{\partial \sqrt{\kappa}}{\partial y} \quad \text{e } y = 0.$$

4.6 O modelo de Fan et al.

$$f_\mu = 0.4 \frac{f_w}{\sqrt{Re_T}} + \left(1 - 0.4 \frac{f_w}{\sqrt{Re_T}} \right) (1 - e^{(-R_y/42.63)})^3$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = [1 - 0.22e^{-(Re_T/6)^2}] f_w^2$$

$$\epsilon_0 = 0$$

$$E = 0$$

$$f_w = 1 - \exp \left[-\frac{\sqrt{R_y}}{2.30} + \left(\frac{\sqrt{R_y}}{2.30} - \frac{R_y}{8.89} \right) (1 - e^{(-R_y/20)})^3 \right]$$

$$C_{\epsilon 1} = 1.39, C_{\epsilon 2} = 1.80, C_\mu = 0.09, \sigma_\kappa = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3, \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial y} = 0 \text{ e } y = 0.$$

Os modelos acima, devido a sua própria natureza, são incapazes de consertar qualquer tendência espúria da solução na seção externa da camada limite. O amortecimento dos termos turbulentos junto à parede possui sucesso em recuperar o valor de 5.0 para a constante B na lei da parede mas claramente falha, por exemplo, numa melhora das previsões nas regiões distantes da parede. Isto ainda torna os modelos $\kappa - \epsilon$ impróprios para o uso em escoamentos sujeitos a gradientes adversos de pressão externa, mesmo apesar das modificações introduzidas aqui.

Capítulo 5

Fechamento dos Momentos de 2ª Ordem

5.1 A Equação do Transporte para as Tensões Turbulentas, $\overline{u_i u_j}$.

As equações do movimento de um fluido newtoniano podem, como visto anteriormente, ser escritas do seguinte modo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho U_k U_i) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \right), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.2)$$

Todos os símbolos acima possuem seu significado clássico. Variações no escoamento por influência da gravidade são por ora desprezadas. Aqui, $U_i = \bar{U}_i + u_i$, onde \bar{U}_i denota o campo médio de velocidade e u_i suas flutuações.

Para obtermos uma equação para $\overline{u_i u_j}$, multiplicamos (5.1) por u_j e tiramos a média de cada termo da equação resultante. A seguir adicionamos a esta equação uma outra idêntica a ela própria, mas com todos os índices i e j trocados. Com o auxílio da continuidade, equação (5.2), chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_k} \right) + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\overline{p u_j}}{\rho} \delta_{ik} + \frac{\overline{p u_i}}{\rho} \delta_{jk} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i u_j} - \nu u_j \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} - \nu u_i \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \right) \\ & - \left(2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} - \nu \left(\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_j} \right) \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

a qual pode ser escrita de forma contracta como

$$\frac{D}{Dt} \overline{u_i u_j} = P_{ij} + \phi_{ij} + D_{ij} - \epsilon_{ij}. \quad (5.4)$$

O termo P_{ij} em (5.4) representa a taxa de criação de $\overline{u_i u_j}$ pela ação do escoamento médio sobre o campo turbulento. Apenas momentos de 2ª ordem e propriedades do escoamento médio aparecem neste termo de modo que no presente procedimento eles são tratados de modo exato. As correlações que envolvem flutuações de pressão e de velocidade, ϕ_{ij} , resultam de dois processos, como veremos adiante. Um processo puramente turbulento e outro dependente da taxa de deformação do campo médio de velocidade. Uma propriedade importante de ϕ_{ij} é que seu traço é zero, pois

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5.5)$$

O termo, portanto, não faz qualquer contribuição para o nível global da turbulência, servindo tão somente para redistribuir energia entre os componentes de tensão normal.

O termo D_{ij} é facilmente reconhecido como sendo difusivo. De fato, uma integração dele sobre o domínio mostra que nenhuma contribuição para o nível de turbulência é feita, mesmo sendo os valores locais de $\overline{u_i u_j}$ diferentes de zero. O efeito de D_{ij} é promover uma redistribuição espacial da tensão turbulenta. Os três últimos termos de D_{ij} descrevem o transporte difusivo devido à efeitos moleculares. Na maioria dos escoamentos eles são desprezíveis.

O termo ϵ_{ij} representa a taxa de destruição de $\overline{u_i u_j}$ pelos efeitos viscosos. Este termo garante que a energia continuamente retirada do escoamento médio pelo campo turbulento através do termo P_{ij} será destruída, evitando portanto, um crescimento ilimitado de $\overline{u_i u_j}$.

Qualquer tentativa de solução da equação (5.4) passa agora necessariamente pela modelagem dos termos ϕ_{ij} , D_{ij} e ϵ_{ij} . Idealmente, gostaríamos que esta modelagem fosse simples e universal. Infelizmente, isto não é possível. Alguns princípios, entretanto, deverão ser seguidos. Primeiramente, gostaríamos que o caráter matemático de modelo fosse fiel ao caráter matemático das equações que o originaram. Por exemplo, se o processo físico requerendo aproximação é representado por um tensor simétrico de traço zero, assim também deverá o ser o modelo. Este princípio sempre deve ser observado para a modelagem de momentos de 2ª ordem. Outro conceito fundamental é o princípio de influência recedente. Ele afirma que a influência sobre o escoamento dos momentos de ordem n sempre será menor que a influência dos momentos de ordem $n - 1$. Este princípio é frequentemente invocado para justamente violar o anterior, com vistas a obtenção de equações menos complexas que sejam numericamente mais facilmente implementáveis. Outro importante princípio é aquele que exige que as formas aproximadas exibam as mesmas respostas a translações e reflexões do sistema de coordenadas que o fenômeno real exibiria. Outra exigência normalmente aplicada é que o sistema de equações modeladas não gere valores “não físicos”, tais como, tensões normais negativas ou correlações com a forma $\overline{u_i u_j} / \sqrt{\overline{u_i^2} \overline{u_j^2}}$ maiores que 1.

Duas outras idéias importantes para simplificar o processo de modelagem de um escoamento são as chamadas “hipóteses de altos números de Reynolds”. Estas idéias são aplicadas extensivamente em escoamentos cisalhantes. Elas podem ser expressas como

1. as interações entre as maiores escalas, responsáveis predominantemente pelo transporte de quantidade de movimento e de grandezas escalares, são inafetadas pela viscosidade do fluido.

- os movimentos de menores escalas, responsáveis pela dissipação viscosa, não tomam conhecimento da natureza do escoamento médio e portanto das maiores escalas. Sua estrutura é semelhante àquela encontrada na turbulência isotrópica.

É evidente que o movimento nas menores escalas não é exatamente isotrópico. Entretanto, se as duas regras acima forem aplicadas com critério, uma série de simplificações úteis poderão ser obtidas durante o processo de modelagem turbulenta.

5.2 A Modelagem de ϵ_{ij}

ϵ_{ij} é um tensor de 4ª ordem. Desde que este tensor deve ser isotrópico, seus elementos podem ser representados como o produto da contração escalar $\nu(\overline{\partial u_i / \partial x_j})(\overline{\partial u_i / \partial x_j})$, definida aqui como ϵ , multiplicada pela combinação mais geral dos produtos do tensor de posto dois isotrópico, o delta de Kronecker,

$$\nu \frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial u_k}}{\partial x_l} = (\alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \delta_{ik} \delta_{jl} + \gamma \delta_{il} \delta_{jk}) \epsilon. \quad (5.6)$$

Os coeficientes α, β e γ são determinados a partir das seguintes condições:

- fazendo $i = k, j = l$, ambos os lados de (5.5) devem dar ϵ . Como $\delta_{lk} \delta_{lk} = 3$ e $\delta_{ll} \delta_{kk} = 9$,

$$3\alpha + 9\beta + 3\gamma = 1. \quad (5.7)$$

- se em (5.5), $i = j$, a correlação se torna zero de acordo com a equação da continuidade e portanto

$$3\alpha \delta_{kl} + \beta \delta_{kl} + \gamma \delta_{kl} = 0. \quad (5.8)$$

- finalmente, de acordo com a continuidade,

$$\nu \frac{\overline{\partial u_i}}{\partial x_j} \frac{\overline{\partial u_j}}{\partial x_i} = \nu \frac{\overline{\partial^2 u_i u_j}}{\partial x_j \partial x_i}. \quad (5.9)$$

Esta forma mostra claramente que ϵ_{ij} é interpretado como a difusão viscosa de $\overline{u_i u_j}$, a qual é formalmente zero em um campo de tensões homogêneo.

Fazendo $k = j$ e $l = i$, (5.5) se reduz a

$$3\alpha + 3\beta + 9\gamma = 0. \quad (5.10)$$

A solução do sistema de equações (5.6) – (5.9) nos fornece

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{30}, \quad \beta = \frac{2}{15} \quad (5.11)$$

Logo, para um escoamento isotrópico, nas menores escalas

$$\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}} = \frac{\epsilon}{30} \left(4\delta_{kl}\delta_{ij} - \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} \right). \quad (5.12)$$

Consequentemente, os seguintes resultados são obtidos

$$\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} = \frac{\epsilon}{30} \left(12\delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \right) = \frac{\epsilon}{3} \delta_{ij}, \quad (5.13)$$

$$\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}} = \frac{\epsilon}{30} \left(4\delta_{ij} - \delta_{ij} - 3\delta_{ij} \right) = 0, \quad (5.14)$$

logo,

$$\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon. \quad (5.15)$$

A grandeza ϵ permanece até agora desconhecida. Um importante resultado da análise acima, entretanto, é que reduzidos a modelagem do tensor ϵ_{ij} à modelagem do escalar ϵ .

5.3 A Modelagem dos Termos que Envolvem Flutuações de Pressão

Tomando a derivada da equação de N-S e subtraindo-se desta os termos médios, obtemos uma equação de Poisson para o campo de pressão instantâneo,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = - \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \left(u_l u_k - \overline{u_l u_k} \right) - 2 \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}. \quad (5.16)$$

Termos dependentes do tempo e da viscosidade não aparecem acima devido à equação da continuidade.

A solução de (5.15) é dada por

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_{Vol} \left[\frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_l} \left(u'_l u'_k - \overline{u'_l u'_k} \right) + 2 \frac{\partial U'_k}{\partial x'_l} \frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \right] \frac{dVol}{r}. \quad (5.17)$$

O superescrito é utilizado aqui para indicar que os termos na integral são avaliados a uma distância r do ponto onde p está sendo calculada.

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $\partial u_i / \partial x_j$ e depois tomando a média, obtemos

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{4\pi} \int_{Vol} \left[\overline{\frac{\partial^2 u'_l u'_k}{\partial x'_k \partial x'_l} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + 2 \frac{\partial U'_k}{\partial x'_l} \overline{\frac{\partial u'_l}{\partial x'_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \right] \frac{dVol}{r}. \quad (5.18)$$

Tendo em vista a independência das grandezas com e sem superscrito, podemos escrever

$$\overline{\frac{p}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{4\pi} \int_{Vol} \left[\frac{\partial^3 u'_k u'_l u'_i}{\partial x'_k \partial x'_l \partial x'_i} + 2 \frac{\partial U'_k}{\partial x'_l} \frac{\partial^2 u'_l \partial u_i}{\partial x'_k \partial x'_l} \right] \frac{dVol}{r}. \quad (5.19)$$

Fazendo $r = x' - x$, segue-se que

$$\frac{\partial}{\partial x'}|_x = \frac{\partial}{\partial r}|_x \quad (5.20)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}|_x = -\frac{\partial}{\partial r}|_x + \frac{\partial}{\partial x}|_r \quad (5.21)$$

Em um escoamento homogêneo, $\frac{\partial}{\partial x}|_r = 0$ e então (5.18) se reduz a

$$\frac{\overline{p \partial u_i}}{\rho \partial x_j} = -\frac{1}{4\pi} \int_{Vol} \left[\frac{\partial^3 u'_k u'_l u_i}{\partial r_k \partial r_l \partial r_j} + 2 \frac{\partial U'_k}{\partial x'_l} \frac{\partial^2 u'_l u_i}{\partial r_k \partial r_j} \right] \frac{dVol}{r}. \quad (5.22)$$

Vemos então que a correlação $\overline{p \partial u_i} / \partial x_j$ depende de 2 agentes, uma interação puramente turbulenta e outra dependente do campo médio de velocidades.

Para facilitar a análise de ϕ_{ij} , consideremos um escoamento homogêneo, onde não existe cisalhamento. Sem o termo de produção, a um escoamento turbulento homogêneo anisotrópico que tenha se estabelecido, só restará decair com o tempo. O componente turbulento de ϕ_{ij} determinará se a turbulência se tornará mais ou menos isotrópica à medida que as flutuações decaem. A equação que rege o processo pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u_i u_j} = \phi_{ijt} - \epsilon_{ij} \quad (5.23)$$

onde o subscrito t indica a componente turbulenta de ϕ_{ij} .

Definamos agora a anisotropia das tensões de Reynolds como

$$a_{ij} = (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ik} k) / k \quad (5.24)$$

onde $k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i}$. A equação de transporte para a_{ij} , obtida de (5.20), é

$$\frac{Da_{ij}}{DT} = \frac{1}{k} [(\phi_{ijt} + \epsilon a_{ij}) - (\epsilon_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon)]. \quad (5.25)$$

Logo, para altos números de Reynolds onde $\epsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \epsilon$,

$$k \frac{Da_{ij}}{Dt} = \phi_{ijt} + \epsilon a_{ij}. \quad (5.26)$$

Uma aproximação para ϕ_{ijt} , muito popular, dada por Rotta(1951) pode ser escrita como

$$\phi_{ijt} = -c_1 \epsilon a_{ij}. \quad (5.27)$$

Com esta forma, a anisotropia de $\overline{u_i u_j}$ aumentará ou diminuirá com o tempo de acordo com o valor de c_1 . Para valores de c_1 maiores do que 1, a anisotropia diminuirá com o tempo. Isto, de fato, é o observado para escoamentos a altos números de Reynolds. O valor mais comumente encontrado para c_1 é 1.8.

Observe que, como ϕ_{ij}, a_{ij} é um tensor simétrico de posto dois com traço zero. Também, ϕ_{ijt} se anula quando a_{ij} se anula. Isto é boa indicação de que (5.23) representa um bom modelo. Entretanto, sabemos que a tendência para a isotropia é um processo não-linear. Uma conclusão pode ser que (5.23) representa o primeiro termo de uma expansão em a_{ij} , sobre a qual termos não lineares devem ser adicionados. Uma possibilidade é

$$\phi_{ijt} = -c_1 \epsilon_{aij} + c'_1 \epsilon (a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} a_{mk} a_{km}). \quad (5.28)$$

Os coeficientes c_1 e c'_1 são supostos serem uma função do segundo e terceiro invariantes de a_{ij} , os quais podem ser escritos como

$$A = a_{ij} a_{ij} \quad , \quad B = a_{ij} a_{kj} a_{ki}. \quad (5.29)$$

Launder(1975) após a análise de vários experimentos propôs

$$c_1 = 1.2 + A \quad ; \quad c'_1 = -0.75. \quad (5.30)$$

Consideremos agora a contribuição do termo dependente na taxa de cisalhamento do escoamento no comportamento de ϕ_{ij} . Embora alguns autores desprezem completamente a existência destes termos, é consenso na comunidade que sua modelagem é de suma importância para uma correta descrição do fenômeno.

Na maioria das situações de interesse prático, e longe de paredes, $\partial U_k / \partial x_l$ pode ser tratado como sendo praticamente constante. Neste caso,

$$\phi_{iju} = \frac{p}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \int \left(\frac{\partial^2 \overline{u'_l u_i}}{\partial r_k \partial r_j} + \frac{\partial^2 \overline{u'_l u_j}}{\partial r_k \partial r_i} \right) \frac{dVol}{r}. \quad (5.31)$$

O erro ao se retirar $\partial U_k / \partial x_l$ da integração é proporcional a terceira derivada do campo de velocidade devido à hipótese de turbulência homogênea.

A aproximação mais comum para (5.21) postula que a integral pode ser escrita como uma soma linear dos elementos do tensor de Reynolds que possuam as mesmas propriedades de simetria da própria integral. Neste caso,

$$\phi_{iju} = \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \left(a_{lkij} + a_{lkji} \right), \quad (5.32)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{lkij} = & \alpha \overline{u_l u_i} \delta_{kj} + \beta (\overline{u_l u_k} \delta_{ij} + \overline{u_l u_j} \delta_{ik} + \overline{u_i u_j} \delta_{lk} + \overline{u_i u_k} \delta_{lj}) \\ & + c_2 \overline{u_k u_j} \delta_{il} + \left(c_3 \delta_{il} \delta_{kj} + c_4 (\delta_{lj} \delta_{ik} + \delta_{lk} \delta_{ij}) \right) k. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Para determinar os coeficientes acima, utilizamos o maior número possível de condições cinemáticas. Para a_{lkii} a integral é zero. Logo,

$$(\alpha + 5\beta + c_2) \overline{u_l u_k} + (2\beta + c_3 + 4c_4) \delta_{lk} k = 0. \quad (5.34)$$

Como a igualdade acima deve valer para todo l e k ,

$$\alpha + 5\beta + c_2 = 0,$$

$$2\beta + c_3 + 4c_4 = 0.$$

Fazendo $k = j$ em (5.21),

$$a_{lkik} = -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial^2 \overline{u_l' u_i}}{\partial r_k^2} \frac{dVol}{r}.$$

Notando que $\overline{u_l' u_i} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$, vem

$$a_{lkik} = 2\overline{u_i u_l}.$$

Para que (5.23) satisfaça este resultado,

$$(3\alpha + 4\beta)\overline{u_i u_l} + (2c_2 + 3c_3 + 2c_4)\delta_{il}k = 2\overline{u_i u_l}.$$

ou ainda,

$$3\alpha + 4\beta = 0,$$

$$2c_2 + 3c_3 + 2c_4 = 0.$$

Após expressar α , β , c_3 e c_4 em função de c_2 , resulta

$$\begin{aligned} \phi_{iju} = & -\frac{(c_2 + 8)}{11} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right) - \frac{(30c_2 - 2)}{55} k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \\ & - \frac{(8c_2 - 2)}{11} \left(D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} D_{kk} \right), \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde

$$D_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i}.$$

O valor mais comum de c_2 encontrado na literatura é 0.4.

Para a turbulência isotrópica, independentemente do valor de c_2 , obtemos

$$\phi_{iju} = 0.4k \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.36)$$

Um outro modelo, mais simples, para ϕ_{iju} foi proposto por Naot et al (1970). De acordo com ele

$$\phi_{iju} = -c'_2 \left(D_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} P_{kk} \right)$$

onde $c'_2 = 0.6$.