

André Gustavo de Oliveira Gonçalves

*O movimento parabólico de projéteis:
alcance e parábola de segurança*

Orientador:

Prof. Alexandre Carlos Tort

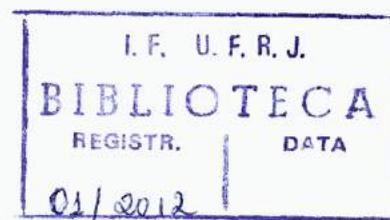
Co-orientador:

Prof. Vitorvani Soares

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro - RJ

Janeiro / 2012



M732b Gonçalves, André Gustavo de Oliveira

O movimento parabólico de projéteis: Alcance e parábola de segurança / André Gustavo de Oliveira Gonçalves — Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2012.

vii. 54 f.; il.; 30 cm.

Orientador: Alexandre Carlos Tort.

Co-orientador: Vitorvani Soares.

Monografia de final de curso. Universidade Federal do Rio de Janeiro / Instituto de Física / 2011.

Referências bibliográficas: f. 49-52.

1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Movimento parabólico.

I. Tort, Alexandre. II. Soares, Vitorvani. III. Universidade Federal do Rio de Janeiro / Instituto de Física.

IV. Experimentos em cinemática. Ensino de Física

À Cristina, à Juliana e à Luíza

Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pelo dom da vida e por me mostrar que a Física é a mais bela das ciências. Muitas pessoas me ajudaram direta ou indiretamente durante todo o curso e em especial nos momentos de dificuldades que tanto me perseguiram durante estes anos. Como não posso citar todas vou me obsequiar a elencar aquelas que por um motivo ou outro estiveram mais próximas e assim fizeram acontecer este curso junto comigo.

Agradeço à minha mãe por tudo que ela representa pra mim e que eu sei sofreu, chorou e torceu muito pelo meu sucesso. A ela que amo sem precedentes, dedico esta monografia de forma muito especial e preciosa; é meu presente para aquela que soube como ninguém formar um homem de bem. Também minha avó Stella por me ceder sua casa quando precisei e por acompanhar meu curso com suas orações que tanto me ajudaram e me deram força para continuar.

À minha tia Telma que também teve papel muito importante na minha caminhada e que eu sei torceu muito pelo meu sucesso e realização profissional meus sinceros agradecimentos. A Ana Tércia meu muito obrigado por tudo. Aos meus irmãos Augusto Cesar e Ana Carolina que sei torceram muito pelo meu sucesso, em especial a meu querido irmão Emílio (*in memoriam*). Aos meus sogros por me ajudarem com minhas filhas em tudo e por terem confiado que eu venceria.

Também de modo especial a meu orientador acadêmico e amigo Prof. Alexandre C. Tort por tudo que fez por meu curso e também por ter sido um braço direito quando mais precisei. Obrigado amigo. Ao Prof. Vitorvani Soares, outro amigo, pelas maravilhosas aulas na lousa que existe em seu gabinete na qual muito eu aprendi e me ensinou que devemos pensar fisicamente e da maneira mais simples.

Resumo

Apresentamos neste trabalho um material pedagógico para uma introdução ao movimento parabólico de uma partícula. O movimento parabólico é um dos problemas mais populares em livros-texto de mecânica clássica e, em geral, está associado ao problema da determinação do movimento de uma partícula sujeita a uma força constante. As condições desse problema são aproximadamente satisfeitas no caso de um projétil movendo-se próximo à superfície terrestre e a uma velocidade não muito elevada, de modo que podemos ignorar a resistência do ar, a variação da força gravitacional ao longo a trajetória e outros efeitos complicadores.

Discutimos e representamos o movimento parabólico por meio do desenvolvimento em paralelo de competências e habilidades relacionadas às representações algébricas e à construção e à análise de gráficos. Esperamos com esta metodologia que o aluno compreenda o processo científico moderno de descrição da natureza e possa aplicar as habilidades adquiridas em outros domínios do conhecimento. Seguimos em parte a descrição do movimento feita por Galileu, e descrevemos a trajetória parabólica de um projétil como consequência do movimento simultâneo e independente de dois movimentos de referência da mecânica galileana: um deles correspondendo ao retilíneo uniforme na direção horizontal, em relação a uma Terra plana, e o outro, correspondendo ao movimento retilíneo de aceleração constante na direção vertical, associado à queda livre.

Sumário

1	Introdução	p. 7
2	Um pouco de história	p. 9
3	O movimento parabólico	p. 14
3.1	O movimento retilíneo uniforme	p. 14
3.2	O movimento retilíneo uniformemente variado	p. 19
3.3	O movimento parabólico	p. 25
3.3.1	A trajetória da partícula	p. 29
3.3.2	O máximo alcance da partícula	p. 32
3.3.3	A altura máxima da partícula	p. 34
3.3.4	Uma elipse inesperada	p. 36
3.3.5	A curva de segurança	p. 37
	Considerações finais	p. 41
	Referências	p. 42

1 *Introdução*

Apresentamos nesta monografia um material pedagógico para uma introdução à descrição do movimento parabólico realizado por uma partícula de massa constante. O movimento parabólico é um dos problemas mais populares em livros texto de mecânica clássica e, em geral, está associado ao problema da determinação do movimento de uma partícula sujeita a uma força constante. As condições desse problema são aproximadamente satisfeitas no caso de um projétil movendo-se próximo à superfície terrestre e a uma velocidade não muito elevada, de modo que podemos ignorar a resistência do ar, a variação da força gravitacional ao longo a trajetória e outros efeitos complicadores.

Procuramos também atender às orientações das Leis de Diretrizes e Bases da educação (LDB) (BRASIL, 1996) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1998, 2000, 2002a, 2006). Para o ensino de física destacamos o seguinte trecho:

O ensino de Física tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas. (BRASIL, 2002b)

Destacamos também com especial atenção à seguinte orientação complementar:

A física deve apresentar-se como um conjunto de competências que permitem perceber e lidar com os fenômenos naturais e tecnológicos presentes tanto no cotidiano imediato, quanto na compreensão do universo distante. A física deve vir a ser reconhecida como um processo cuja construção ocorreu ao longo da história da humanidade, impregnada de contribuições culturais, econômicas e sociais, que vem resultando no desenvolvimento de diferentes tecnologias e sendo por elas impulsionado. (BRASIL, 2002b)

Também procuramos nos adequar a novas metodologias de ensino, uma vez que os conteúdos aumentam devido ao avanço da tecnologia enquanto o tempo em sala de aula continua o mesmo. Com este propósito, propomos neste trabalho uma forma de apresentação e discussão da dinâmica do movimento parabólico que organizamos da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos um pouco da história do movimento de projéteis e, no Capítulo 3, discutimos o movimento parabólico seguindo, em parte, a descrição feita por Galileu deste movimento como resultado da composição de um movimento retilíneo e uniforme na direção horizontal e, simultaneamente, de um movimento retilíneo uniformemente acelerado na direção vertical. No último capítulo apresentamos as nossas considerações finais.

2 *Um pouco de história*

Descrever toda a história do movimento parabólico exigiria um trabalho de grandes proporções, fora do escopo da presente monografia. Escolhemos, deste modo, lembrar somente alguns episódios não muito conhecidos ao longo desta longa cadeia de eventos associados à descrição do movimento de projéteis, em geral, e ao movimento parabólico, em particular.

Na nossa história, o século 15 é marcado como a passagem da Idade Média para a Idade Moderna. Em 1453, Constantinopla cai em poder dos turcos otomanos e obriga os europeus a procurar novas rotas comerciais para o Leste e este processo vai transformar o território europeu em cenário de lutas sangrentas. O grande emprego de canhões nestas batalhas européias durante os séculos 15 e 16 vai promover um amplo desenvolvimento da arte da balística com propósitos militares. A necessidade de prever acuradamente o alcance dos projéteis exige uma compreensão quantitativa da natureza da trajetória dos corpos em movimento e, como bem descreveu Russel McCormach em seu romance *Night thoughts of a classical physicist*, “Cannon ... have advanced the course of science more than the course of nations” (MCCORMMACH, 1991, p. 69).

Nesta época, a descrição da natureza ainda é realizada empregando-se a antiga física de Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.), que classifica o movimento em naturais ou violentos. A explicação aristotélica do movimento em um meio resistivo é baseada em duas hipóteses:

- (i) Todo corpo em movimento exige uma causa (mesmo para manter uma velocidade constante); e
- (ii) Os corpos têm movimentos naturais determinados por sua composição e posição no Universo em relação à esfera dos elementos predominantes em sua composição.

Deste modo, sobre a superfície terrestre, uma pedra, composta predominantemente pelo elemento Terra, tem o movimento natural em direção ao centro da Terra.

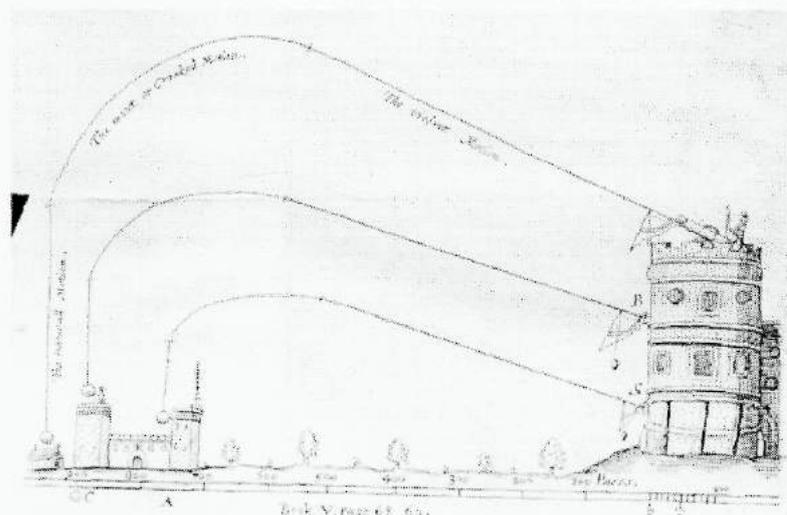


Figura 1: Representação típica do século 16 da trajetória através do ar de um projétil lançado por um canhão. (STEWART, 2012).

Entretanto, a primeira hipótese de Aristóteles é difícil de ser aceita ao tentarmos explicar o movimento de projéteis: O que manteria o projétil em movimento a partir do momento em que ele perde o contato com o canhão? Teremos que esperar até o século 14 para que o conceito de *ímpeto* – conceito de certa forma análogo ao conceito newtoniano de quantidade de movimento –, seja dotado como a causa do movimento. Segundo este ponto de vista, a bala de canhão, ao ser lançada, primeiramente descreveria um movimento retilíneo enquanto durasse o seu ímpeto para, em seguida, cair em direção ao centro da Terra, como representado na Figura 1 (CROMBIE, 1953; ROCCA; RIGGI, 2009).

Vale lembrar que o trabalho de Aristóteles foi formulado no quarto século anterior a nossa era e as suas observações foram um grande avanço em relação aos seus predecessores. Recordamos também que, durante o primeiro milênio da nossa era, não havia recursos aprimorados para analisar o movimento dos corpos com o alto grau de abstração empregados nos dias de hoje. Os instrumentos de medida eram na maioria das vezes apenas os olhos do observador e a sua “percepção” estava naturalmente conectada à sua expectativa. Esta, por sua vez, era fortemente influenciada pela já então conhecida descrição aristotélica do movimento, o que formava, então, um círculo vicioso. Este cenário vai ser modificado a partir do primeiro terço do século 16, com o início do estudo moderno da balística iniciado pelo matemático italiano Nicolò Fontana (1499–1557), também conhecido como “Tartaglia”, o “Gago”.



Figura 2: Imagem de Niccolò Fontana (1499–1557), conhecido como Tartaglia (autor desconhecido) (O’CONNOR; ROBERTSON, 2011).

Tartaglia se estabelece em Veneza, em 1534, como professor de matemática e o seu tratado sobre armamentos de 1537, intitulado *Nova Scientia*, “A Nova Ciência”, é um esforço pioneiro no estabelecimento da lei da queda dos corpos (NICCOLÒ..., 2011). Tartaglia, após alguma hesitação, abandona a teoria aristotélica, conclui que a trajetória do “projétil” é encurvada ao longo do caminho percorrido mas não consegue determinar a forma geométrica precisa desta curva. Entretanto, ele indica que o máximo alcance realizado pelo projétil é aquele obtido a partir de um ângulo de elevação de 45° (6 “punti”, na sua notação) e que haveria ainda dois ângulos de elevação para um mesmo alcance, quando este fosse inferior ao seu valor máximo (DRAKE; DRABKIN, 1969). Vale ressaltar que, segundo (GLIOZZI, 1970, p. 66), Girolamo Cardano (1501–1576) já sugere que a curva em questão “imita a forma de uma parábola”, antecipando Galileu em quase um século.

Ainda segundo Aristóteles, a velocidade de um corpo em queda depende do seu peso e Giambattista Benedetti (1530–1590), um discípulo de Tartaglia, se dedica a resolver este problema. Benedetti, em seus trabalhos *Resolutio omnium Euclidis problematum*, de 1553, e *Demonstratio proportionum motuum localium*, de 1554, conjectura que somente os corpos “de mesma natureza” caem com a mesma velocidade e esta velocidade é independente de seus respectivos pesos. Como sabemos, a resposta correta terá que esperar o surgimento de Galileu Galilei (1564–1642), discípulo de Benedetti (COYNE; HELLER, 2008).

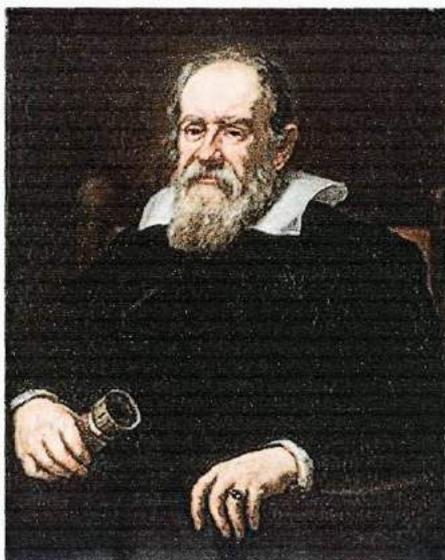


Figura 3: Pintura de Galileu Galilei (1564–1642) realizada por Giusto Sustermans em 1636 (SUSTERMANS, 2011).

Galileu estuda o movimento de esferas rolando sobre planos inclinados e observa que ao rolarem plano abaixo e, em seguida, plano acima, elas alcançam a mesma altura, independentemente da inclinação dos planos. Ele então compreende que se o segundo plano não está inclinado, a esfera continuará em seu movimento horizontal eternamente e, assim, os corpos não precisariam de uma causa para manter o seu estado de movimento circular e uniforme. O corpo só alteraria o seu estado de movimento se uma causa interferisse neste processo. Apesar de nunca ter empregado a expressão “princípio de inércia”, o fato de tê-lo aplicado à teoria do movimento uniforme fez dele, Galileu, o seu descobridor. A teoria de Galileu da queda livre também é de grande importância por fornecer, nas palavras de Coyne, “um ‘caso clínico’ para a descrição do movimento retilíneo uniformemente acelerado que pode ser ‘isolado do resto do universo’ e estudado independentemente”.

Quanto ao movimento dos projéteis, Tartaglia mostra que estes seguiam trajetórias curvas e Cardano sugere que estas curvas se assemelham à parábolas. Entretanto, cabe à Galileu a demonstração. Galileu, no seu livro “Duas Novas Ciências”, de 1638, descreve o movimento de um projétil como consequência do movimento simultâneo e independente de um movimento retilíneo uniforme na direção horizontal, em relação a uma Terra plana, e de um movimento retilíneo de aceleração constante na direção vertical (MECHANICS..., 2011) e estes dois movimentos tornaram-se marcos da mecânica galileana.

Tendo estabelecido anteriormente que a distância percorrida pelo corpo em movimento retilíneo uniformemente variado é proporcional ao quadrado da duração do movimento, Galileu deduz então, por meios puramente geométricos, que a trajetória do projétil em um meio não resistivo deve corresponder ao arco de uma parábola, realizando uma das mais belas aplicações da geometria na descrição do movimento dos corpos.

Galileu também apresenta, como um dos seus resultados, que o alcance máximo ocorre para um ângulo de elevação de ... 6 “punti”, ou seja, à 45° , sem dar o devido crédito à Tartaglia. Galileu também apresenta a solução do problema inverso: Para um alcance menor que o alcance máximo existem dois ângulos de elevação correspondentes, mais uma vez sem o devido crédito ao matemático de Brescia (GALILEI, 1954).

É importante ainda assinalar que, de fato, a trajetória real de um projétil através do ar é muito mais semelhante àquela apresentada por Tartaglia do que à parábola proposta por Galileu. Entretanto, para podermos descrever este movimento real, do ponto de vista físico-matemático moderno, foi necessário mudar a estratégia do matemático de Brescia. Em lugar de considerar o movimento com todas as suas complicações devido a resistência do ar, como fez Tartaglia, o método de Galileu de simplificar o problema vai se mostrar muito mais frutífero, permitindo à ciência compreender os princípios físicos que compõem as leis da dinâmica do movimento e permitir a Newton construir a Mecânica.

3 *O movimento parabólico*

O movimento parabólico é um dos problemas mais populares em livros-texto de mecânica clássica e, em geral, está associado ao problema da determinação do movimento de uma partícula sujeita a uma força constante. As condições desse problema são aproximadamente satisfeitas no caso de um projétil movendo-se próximo a superfície terrestre e a uma velocidade não muito elevada, de modo que podemos ignorar a resistência do ar, a variação da força gravitacional ao longo a trajetória e outros efeitos complicadores. Apresentamos nesta seção uma descrição do movimento parabólico representado pelo movimento simultâneo de suas coordenadas cartesianas x e y , na direção horizontal e vertical, respectivamente. Neste caso, a partícula descreve uma trajetória parabólica cujo eixo é paralelo as linhas de força do campo gravitacional.

3.1 O movimento retilíneo uniforme

Iniciamos nossa descrição do movimento de uma partícula de massa m e velocidade v considerando seu movimento mais simples, o movimento retilíneo e uniforme, a partir da análise de gráficos representando os parâmetros físicos envolvidos no movimento.

A segunda lei de Newton impõe que a taxa de variação do momento linear da partícula $p = mv$ deve corresponder a ação da resultante de todas as forças que atuam sobre a partícula considerada. Na ausência de força resultante, portanto, podemos escrever que

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0, \quad (3.1)$$

onde o símbolo Δ representa a diferença entre os valores dos parâmetros físicos considerados (no caso, p e v) entre dois instante sucessivos de tempo: t e $t + \Delta t$:

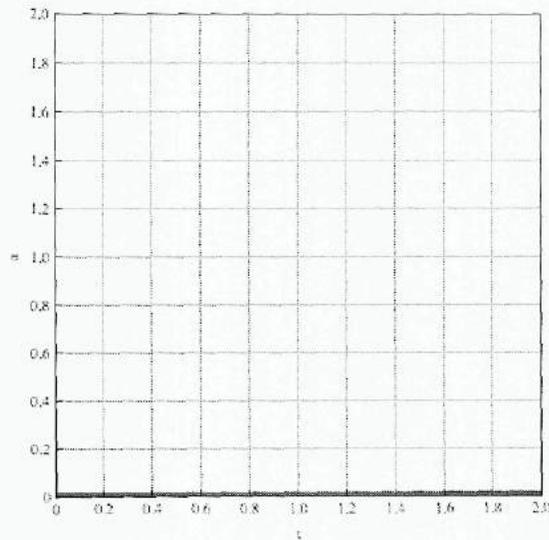


Figura 4: Aceleração da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é nula.

$$\begin{aligned}\Delta p &= p(t + \Delta t) - p(t), \\ \Delta v &= v(t + \Delta t) - v(t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

A aceleração média a_m que a partícula adquire ao longo do seu movimento é dada por

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}\tag{3.3}$$

e, deste modo, podemos afirmar que, no movimento descrito por (3.1), a aceleração é nula em qualquer intervalo Δt e, portanto, para qualquer instante de tempo considerado durante o movimento. A Figura 4 representa o comportamento da aceleração da partícula em função do tempo.

Observamos do gráfico da Figura 4 que a variação da velocidade Δv dada por (3.3) corresponde à área sob a reta representando a aceleração e, portanto, a variação da velocidade da partícula não sofre nenhuma alteração durante o movimento:

$$v(t) - v_0 = 0,\tag{3.4}$$

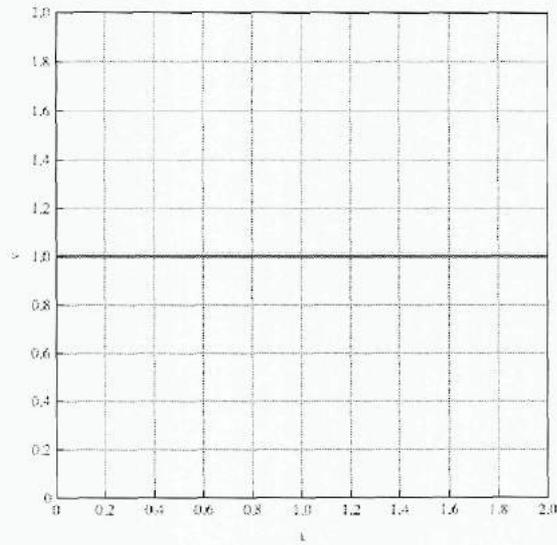


Figura 5: Velocidade da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é nula.

Podemos concluir então que a velocidade da partícula em função do tempo é dada por

$$v(t) = v_0 \quad (3.5)$$

onde v_0 é uma constante do movimento. A Figura 5 representa o comportamento da velocidade da partícula em função do tempo.

Se dividirmos em N partes iguais Δt a duração t do movimento, temos

$$t = \sum_{n=1}^N \Delta t. \quad (3.6)$$

A velocidade média da partícula ao longo do movimento é dada por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (3.7)$$

onde Δx representa o correspondente deslocamento ao longo da reta sobre a qual a partícula se move, em relação à origem de referência. Observamos do gráfico da Figura 6 que o deslocamento Δx corresponde à área sob a reta representando a velocidade, como representado na Figura 6.

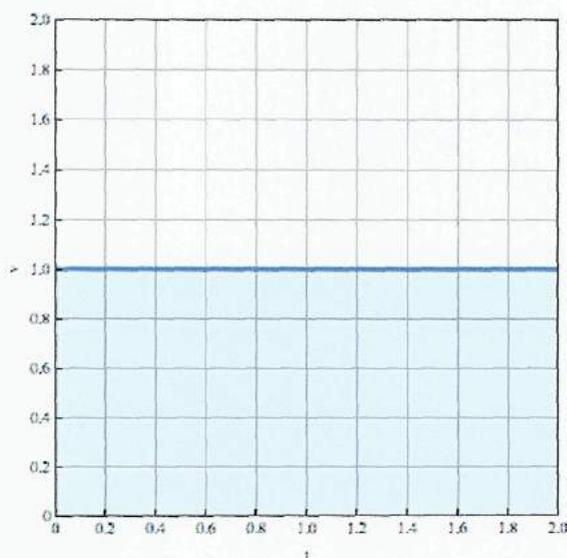


Figura 6: Velocidade da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é nula. A área sob a curva corresponde ao deslocamento da partícula no intervalo de tempo considerado.

Da figura, temos que a velocidade média é dada por $v_m = v_0$ e, deste modo, o deslocamento realizado pela partícula no intervalo de tempo Δt considerado é dado por

$$\Delta x = v_0 \Delta t. \quad (3.8)$$

Somando todos os N deslocamentos sucessivos realizados durante o movimento da partícula, obtemos

$$\sum_{n=1}^N \Delta x = \sum_{n=1}^N (v_0 \Delta t) = v_0 \sum_{n=1}^N \Delta t. \quad (3.9)$$

O membro esquerdo de (3.9) corresponde ao deslocamento total realizado pela partícula entre o início do movimento até o instante de tempo t :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \Delta x &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots \\ &\quad + (x_{N-1} - x_{N-2}) + (x - x_{N-1}) = x - x_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

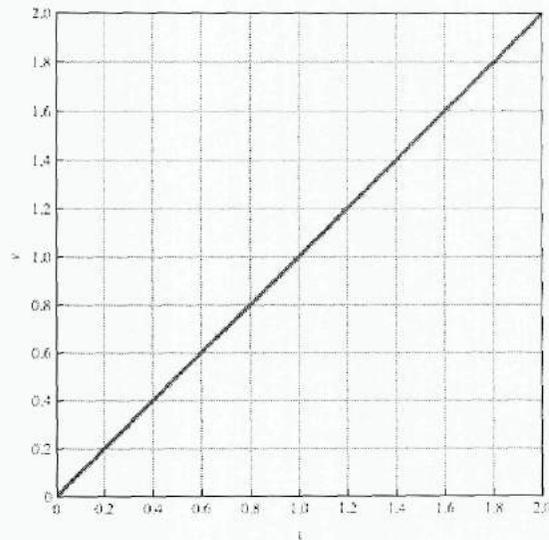


Figura 7: Posição da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é nula.

A somatória na última equação do membro direito desta mesma expressão corresponde à duração do movimento.

$$\sum_{n=1}^N \Delta t = (t_1 - 0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_{N-1} - t_{N-2}) + (t - t_{N-1}) = t. \quad (3.11)$$

Podemos, então, concluir que o deslocamento realizado pela partícula corresponde ao produto da velocidade pela duração do movimento:

$$x - x_0 = v_0 t. \quad (3.12)$$

Consideraremos neste trabalho a posição inicial da partícula na origem de coordenadas e, neste caso, $x_0 = 0$. Portanto, a posição da partícula é descrita em função do tempo pela expressão:

$$x(t) = v_0 t, \quad (3.13)$$

e, finalmente, a Figura 7 representa o comportamento da posição da partícula em função do tempo.

Deste modo, podemos resumir o comportamento newtoniano da aceleração, da velocidade e da posição de uma partícula de massa m quando a força resultante que atua sobre ela é nula. A sua aceleração é nula, a velocidade não varia ao longo do movimento e a posição varia linearmente com o tempo transcorrido. Dizemos então que a partícula realiza um movimento retilíneo e uniforme (MRU).

3.2 O movimento retilíneo uniformemente variado

Nesta seção também descrevemos o movimento retilíneo uniformemente variado a partir da análise de gráficos representando os parâmetros físicos envolvidos no movimento.

Vamos considerar inicialmente que o corpo de massa m e de pequenas dimensões seja lançado a partir da origem de coordenadas com uma velocidade v_0 durante o movimento, a partícula sofre somente a ação da força $F = \text{constante}$, paralela à sua velocidade inicial v_0 .

A segunda lei de Newton impõe que a taxa de variação do momento linear da partícula $p = mv$ deve corresponder a ação da resultante de todas as forças que atuam sobre a partícula considerada. Podemos então escrever que

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F. \quad (3.14)$$

Quando F é constante, podemos concluir que

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{F}{m} = \text{constante}. \quad (3.15)$$

Portanto, a partícula realiza um movimento retilíneo, caracterizado por uma aceleração a constante em módulo e direção.

Por definição, a aceleração média a_m do movimento de um corpo é dada por

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (3.16)$$

Mas, para um movimento onde a aceleração é constante, a aceleração média a_m que a partícula adquire ao longo do seu movimento também é igual a

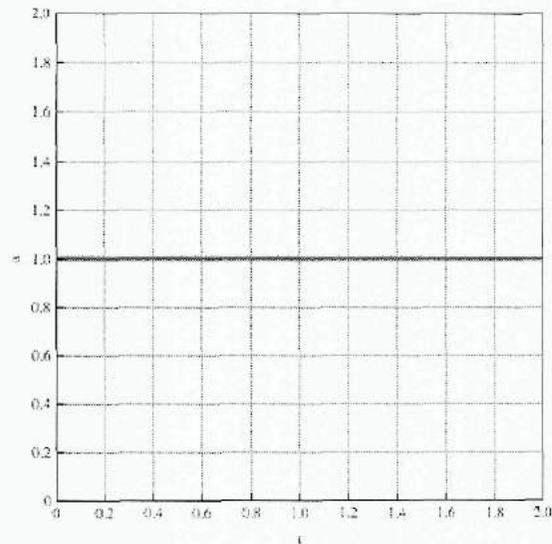


Figura 8: Aceleração da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é constante.

$$a_m = \frac{a + a_0}{2} = a. \quad (3.17)$$

uma vez que $a_0 = a$. A Figura 8 representa o comportamento da aceleração da partícula em função do tempo.

A partir de (3.15) e (3.17) podemos afirmar que neste movimento a taxa de variação da velocidade também é constante:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a. \quad (3.18)$$

e, deste modo, a variação da velocidade da partícula no intervalo de tempo Δt considerado é dada por

$$\Delta v = a\Delta t. \quad (3.19)$$

Observamos do gráfico da Figura 9 que a variação da velocidade Δv corresponde à área sob a reta representando a aceleração a , portanto, podemos afirmar que a velocidade da partícula varia durante o movimento.

Somando todas as variações de velocidade Δv correspondentes a cada um dos N

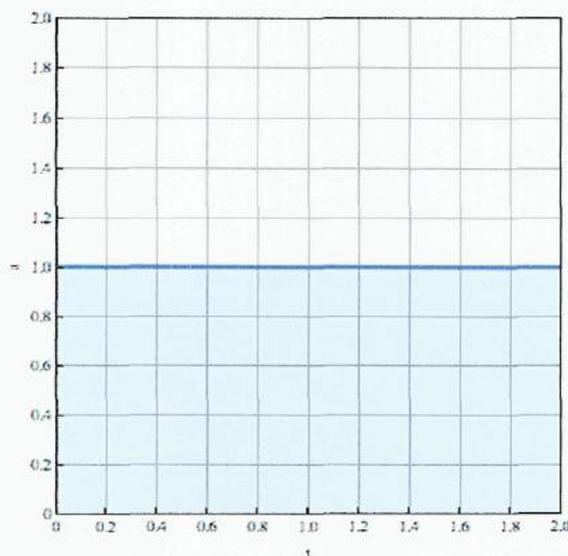


Figura 9: Aceleração da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é constante. A área sob a curva determina a variação de velocidade da partícula.

intervalos de tempo considerados durante o movimento da partícula, obtemos

$$\sum_{n=1}^N \Delta v = \sum_{n=1}^N (a\Delta t) = a \sum_{n=1}^N \Delta t. \quad (3.20)$$

O lado esquerdo de (3.20) corresponde a variação total da velocidade da partícula entre o início do movimento até o instante de tempo t .

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \Delta v &= (v - v_0) + (v_2 - v_1) + \dots \\ &\quad + (v_{N-1} - v_{N-2}) + (v - v_{N-1}) = v - v_0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A somatória na última equação do lado direito de (3.20) corresponde a duração do movimento.

$$\sum_{n=1}^N \Delta t = t. \quad (3.22)$$

Podemos, então, concluir que a variação da velocidade da partícula corresponde ao produto

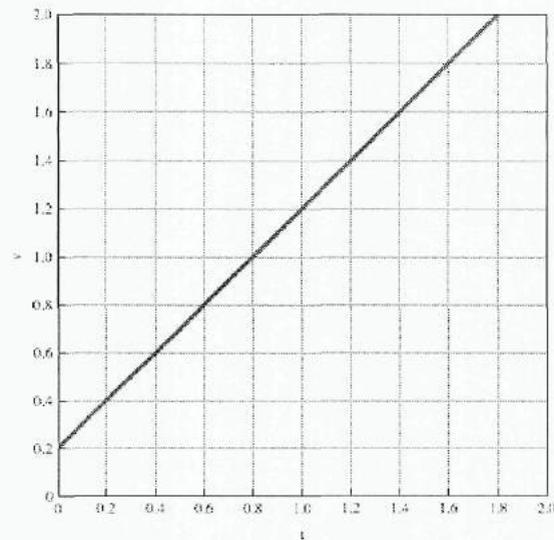


Figura 10: Velocidade da partícula em função do tempo, quando a força resultante que atua sobre ela é constante.

da aceleração pela duração do movimento:

$$v - v_0 = at, \quad (3.23)$$

ou, ainda, que a velocidade é dada por

$$v(t) = v_0 + at, \quad (3.24)$$

onde v_0 é velocidade inicial do movimento. A Figura 10 representa o comportamento da velocidade da partícula em função do tempo.

O deslocamento realizado pela partícula em um intervalo de tempo Δt está relacionado com a velocidade média da partícula pela expressão

$$\Delta x = v_m \Delta t, \quad (3.25)$$

onde x representa a reta sobre a qual a partícula se move. Observamos do gráfico da Figura 11, que o deslocamento total realizado pela partícula entre o início do movimento até o instante de tempo t , é dado por

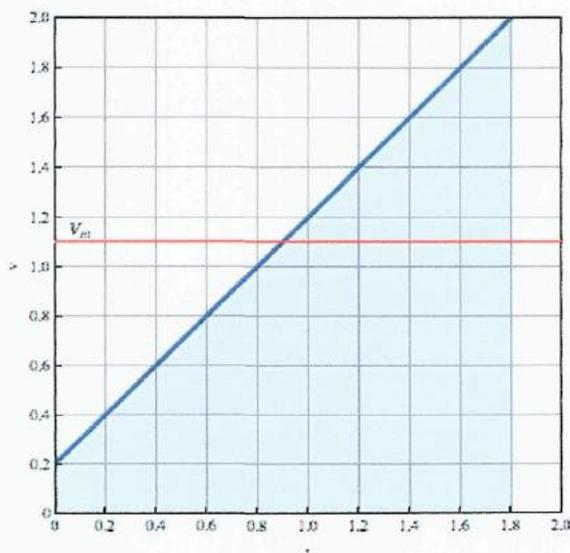


Figura 11: Velocidade da partícula quando a força resultante que atua sobre ela é constante. A área sob a curva determina o deslocamento realizado pela partícula.

$$x - x_0 = \sum_{n=1}^N \Delta x \quad (3.26)$$

e corresponde à área sob a curva da velocidade. Portanto, somando todos os N deslocamentos realizados durante o movimento da partícula, obtemos

$$\sum_{n=1}^N \Delta x = \sum_{n=1}^N (v_m \Delta t) = v_m \sum_{n=1}^N \Delta t. \quad (3.27)$$

Substituindo no lado esquerdo de (3.27) o correspondente deslocamento total, obtemos

$$\sum_{n=1}^N \Delta x = x - x_0. \quad (3.28)$$

A somatória na última parcela do lado direito desta mesma expressão corresponde à duração do movimento:

$$\sum_{n=1}^N \Delta t = t. \quad (3.29)$$

Deste modo, podemos concluir que o deslocamento realizado pela partícula é igual a

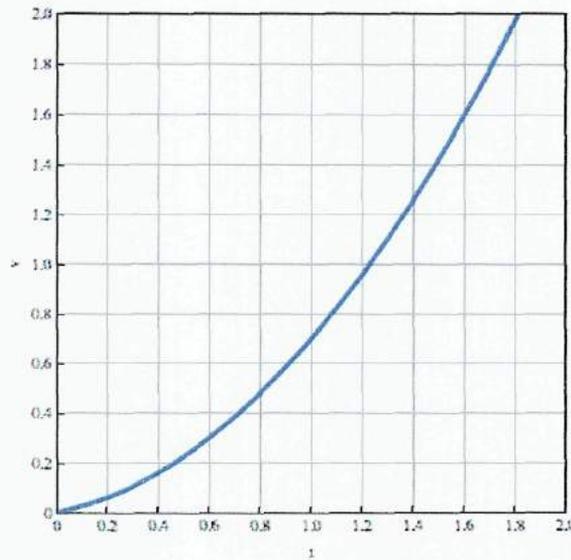


Figura 12: Gráfico da posição da partícula quando a força resultante que atua sobre ela é constante.

$$x - x_0 = v_m t. \quad (3.30)$$

Da Figura 11 e de (3.24), temos que a velocidade média é dada por

$$v_m = \frac{v + v_0}{2} = v_0 + \frac{a}{2}t. \quad (3.31)$$

Após a substituição deste resultado em (3.30), determinamos o deslocamento total realizado pela partícula no intervalo de tempo considerado:

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{a}{2}t^2. \quad (3.32)$$

Consideraremos neste trabalho a posição inicial da partícula na origem de coordenadas e, neste caso, $x_0 = 0$, Portanto, a posição da partícula é descrita em função do tempo pela expressão:

$$x(t) = v_0 t + \frac{a}{2}t^2 \quad (3.33)$$

e, finalmente, a Figura 12 representa o comportamento da posição da partícula em função

do tempo.

Portanto, podemos resumir o comportamento newtoniano da aceleração, da velocidade e da posição de uma partícula de massa m quando a força resultante que atua sobre ela é constante. A sua aceleração é constante, a velocidade varia linearmente ao longo do movimento e a posição varia quadraticamente com o tempo transcorrido. Dizemos, então, que a partícula realiza um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

3.3 O movimento parabólico

Consideremos ainda que o corpo de massa m e de pequenas dimensões seja lançado a partir da origem de coordenadas com uma velocidade $v_0 = v_0(v_{0x}, v_{0y})$, orientada segundo um certo ângulo de elevação θ em relação ao eixo horizontal e, durante o movimento, a partícula sofre somente a ação da força gravitacional $P = mg$. Neste caso, o movimento que a partícula realiza pode ser representado em um plano- xy , onde a direção x é a direção horizontal e a direção y é a direção vertical.

A segunda lei de Newton impõe que a taxa de variação do momento linear da partícula $p = p(mv_x, mv_y)$ deve corresponder à ação da resultante de todas as forças que atuam sobre a partícula considerada. Podemos, então, escrever

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = F_x \quad (3.34)$$

e

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = F_y. \quad (3.35)$$

Quando a velocidade inicial v_0 da partícula está orientada segundo um certo ângulo de elevação θ temos

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}. \quad (3.36)$$

Se a força F que atua sobre ela é dada por $F = F(0, -mg)$, podemos concluir que

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 0 \quad (3.37)$$

e

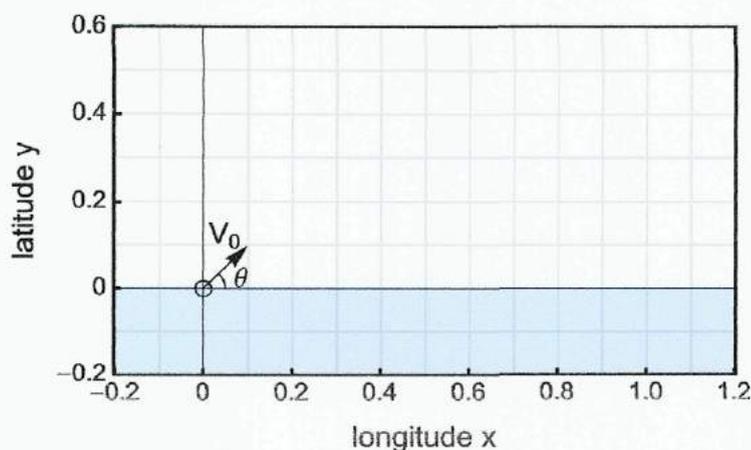


Figura 13: Configuração dos eixos para a representação do movimento da partícula, escolhendo como ponto de partida a posição $P_0 = P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ com velocidade de módulo $v_0 = \sqrt{g}$ e ângulo de elevação $\theta = \pi/4$.

$$\frac{\Delta p_y}{\Delta t} = m \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -mg. \quad (3.38)$$

A Figura 13 representa a partícula na posição inicial $P_0 = P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$, com velocidade de módulo $v_0 = \sqrt{g}$ e ângulo de elevação $\theta = \pi/4$.

O movimento que a partícula de massa m e velocidade v realiza no plano é caracterizado então pela combinação de dois movimentos: um movimento retilíneo e uniforme na direção x e um movimento retilíneo uniformemente variado na direção y . Portanto, a aceleração a tem componentes $a_x = 0$ e $a_y = -g$.

A partir do que foi discutido na seção anterior, as componentes horizontal (v_x) e vertical (v_y) da velocidade da partícula são dadas por

$$v_x = v_{0x} \quad (3.39)$$

e

$$v_y = v_{0y} - gt. \quad (3.40)$$

A componente horizontal da velocidade permanece constante durante o movimento enquanto que a componente vertical vai diminuindo de valor. Esta componente da velocidade

torna-se nula após o transcurso de um intervalo de tempo particular $t = t_v$, dado por:

$$t_v = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}. \quad (3.41)$$

Após este intervalo de tempo, a componente vertical da velocidade torna-se negativa. O módulo da velocidade é dado por $v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$ e, em particular, no instante inicial, $v = v_0 = (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)^{1/2}$. Junto com (3.36) podemos escrever

$$\cos \theta = \frac{v_{0x}}{v_0} \quad (3.42)$$

e

$$\sin \theta = \frac{v_{0y}}{v_0}. \quad (3.43)$$

Destes resultados, podemos escrever imediatamente que as coordenadas da posição da partícula — a longitude x e a latitude y — são dadas em função do tempo pelas seguintes expressões:

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (3.44)$$

e

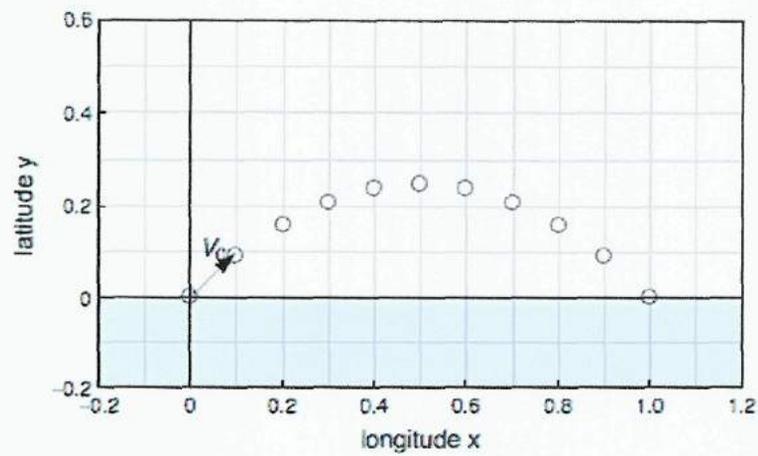
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2. \quad (3.45)$$

O movimento da partícula ao longo da trajetória é, deste modo, composto pelo movimento retilíneo e uniforme na direção horizontal e um movimento retilíneo uniformemente variado na direção vertical, como representado na Figura 14.

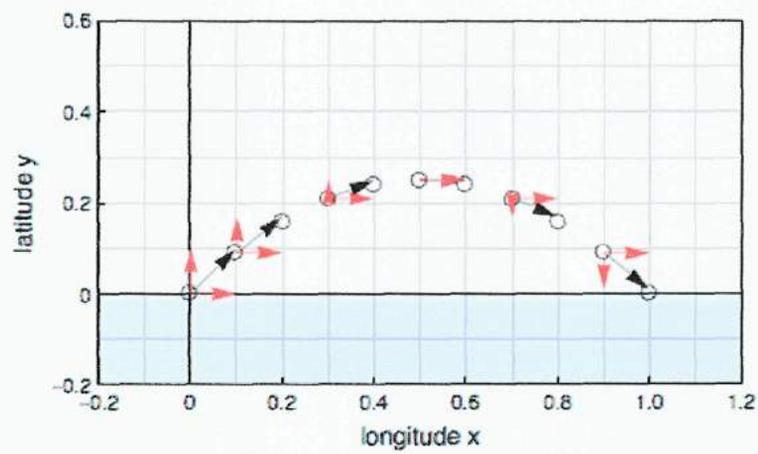
A Figura 14-(a) representa a posição da partícula no plano para alguns instantes, escolhendo como ponto de partida a posição $P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ e velocidade $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$.

O módulo da velocidade é dado por:

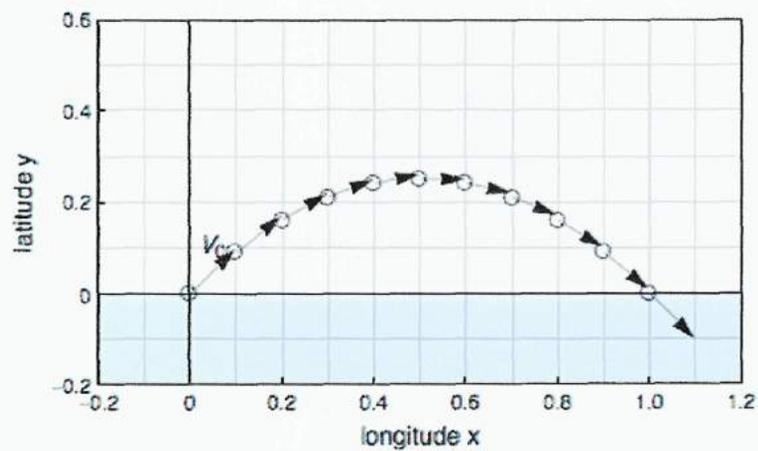
$$v(t) = [v_{0x}^2 + (v_{0y}^2 - gt)^2]^{1/2} \quad (3.46)$$



(a)



(b)



(c)

Figura 14: Posição da partícula no plano para alguns instantes e a sua respectiva velocidade, escolhendo como ponto de partida a posição $P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ e velocidade $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$.

e a Figura 14-(b) representa as respectivas componentes da velocidade da partícula, escolhendo no ponto de partida a a velocidade $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$. A Figura 14-(c) representa a posição da partícula no plano para alguns instantes e os seus respectivos vetores velocidade. Conforme o tempo evolui, a orientação do vetor velocidade varia e o módulo da velocidade diminui até alcançar o seu menor valor $v(t_v) = v_{0x}$. Neste mesmo instante a partícula alcança a sua maior altura. Em seguida, o módulo da velocidade volta a aumentar mas a latitude y da partícula começa a diminuir até que a partícula alcança o solo em uma nova longitude x .

3.3.1 A trajetória da partícula

As equações $x(t)$ e $y(t)$ são, respectivamente, as coordenadas paramétricas da longitude e da latitude da partícula. A equação da trajetória da partícula é obtida eliminando-se o tempo t nestas equações:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} (\tan^2\theta + 1) x^2 + (\tan\theta) x. \quad (3.47)$$

Esta curva está ilustrada na Figura 15. O movimento da partícula começa em $x = 0$ e vai evoluindo conforme a coordenada x vai aumentando. A partícula passa pelo ponto de maior altura e finalmente retorna ao solo após um certo intervalo de tempo.

Podemos estudar o incremento sobre a latitude y , que denominaremos de Δy , em função de pequenos incrementos na longitude x , que denominaremos de Δx . Neste caso, podemos escrever algebricamente que

$$y + \Delta y = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2\theta) (x + \Delta x)^2 + (\tan\theta) (x + \Delta x). \quad (3.48)$$

Podemos empregar a expansão binomial

$$(x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2 \quad (3.49)$$

e, se considerarmos o deslocamento $\Delta x \ll 1$, temos

$$(x + \Delta x)^2 \approx x^2 + 2x(\Delta x) \quad (3.50)$$

Deste modo,

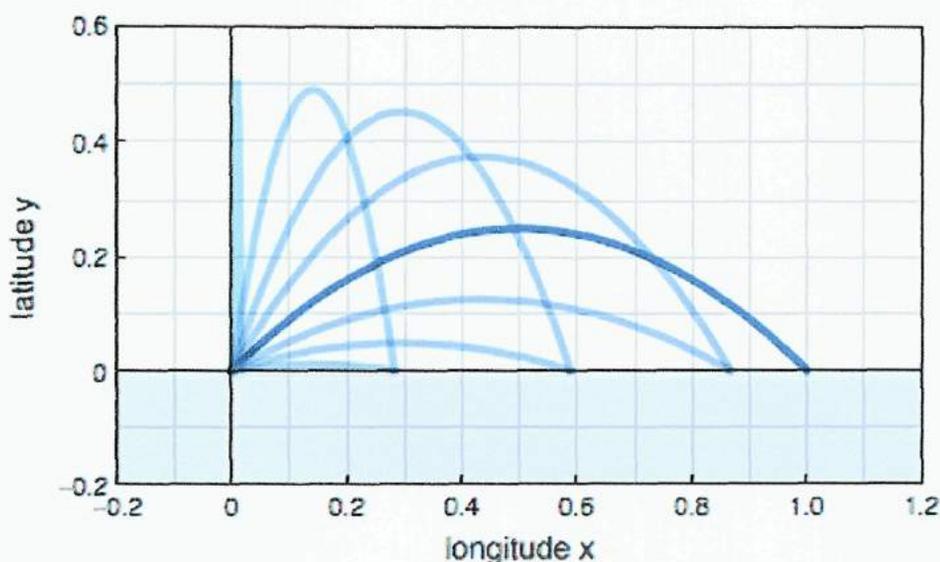


Figura 15: Possíveis trajetórias da partícula no plano para ângulos de elevação $\theta = \pi/2, 10\pi/22, 2\pi/5, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/10, e2\pi/44$, escolhendo como ponto de partida a posição $P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ e velocidade $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$.

$$\begin{aligned}
 y + \Delta y &\approx -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2\theta) [x^2 + 2x(\Delta x)] + (\tan\theta)(x + \Delta x) \\
 &\approx \left\{ -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2\theta) x^2 + (\tan\theta)x \right\} \\
 &\quad + \left\{ -\frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2\theta) x(\Delta x) + (\tan\theta)(\Delta x) \right\}. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

A primeira parcela do lado esquerdo de (3.51) corresponde à latitude original e, assim, o incremento Δy corresponde a

$$\Delta y \approx -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2\theta) x(\Delta x) + (\tan\theta)(\Delta x) \quad (3.52)$$

e as duas correções se relacionam pela razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx -\frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2\theta) x + (\tan\theta) \quad (3.53)$$

Observemos ainda que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{v_y}{v_x}. \quad (3.54)$$

Portanto, a reta tangente a um dado ponto da trajetória de coordenadas (x, y) é dada por (3.53) e a orientação da reta tangente é definida pelas componentes da velocidade da partícula ao longo da trajetória. Ao partir da origem, temos, então,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \tan \theta > 0 \quad (3.55)$$

mas, ao longo da trajetória, esta razão vai diminuindo de valor até se anular em algum ponto do percurso para, em seguida, com a evolução do movimento, assumir valores negativos. Observemos também que, para $(\Delta y / \Delta x) = 0$, devemos ter $v_y = 0$. A partícula tem então, neste instante, uma longitude

$$x_v = \frac{v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \quad (3.56)$$

e máxima latitude dada por

$$y_v = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta. \quad (3.57)$$

Observemos, ainda, que se considerarmos duas coordenadas quaisquer x_1 e x_2 , separadas por uma distância d , temos que

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_1} \approx -\frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) x_1 + (\tan \theta) \quad (3.58)$$

e

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_2} \approx -\frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) x_2 + (\tan \theta) \quad (3.59)$$

e, neste caso,

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_1} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_2} \right\} \approx \frac{g}{v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) + (\tan \theta). \quad (3.60)$$

O lado esquerdo de (3.60) corresponde à razão $\Delta y / \Delta x$ calculada no ponto médio das coordenadas x_1 e x_2 .

$$\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_1} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=x_2} \right\} \approx \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=(x_1+x_2)/2}. \quad (3.61)$$

Trajelórias que obedecem a esta propriedade quando a igualdade é satisfeita são denominadas parábolas.

3.3.2 O máximo alcance da partícula

O alcance A realizado pela partícula é definido pelo ponto da trajetória onde $x = A$ e $y = 0$. Da equação (3.47) podemos escrever que a latitude será nula quando

$$0 = x \left[-\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta) x + \tan \theta \right] \quad (3.62)$$

e, portanto, o alcance é

$$A = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \theta \cos \theta = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\theta). \quad (3.63)$$

O alcance que a partícula realiza corresponde portanto ao dobro da coordenada x_v , a coordenada onde $(\Delta y/\Delta x) = 0$. Como o $\operatorname{sen}(2\theta)$ varia entre 0 e 1, temos o alcance máximo realizado quando $\operatorname{sen}(2\theta_M) = 1$. Portanto,

$$\theta_M = \frac{\pi}{4}. \quad (3.64)$$

Observamos ainda que uma pequena variação do ângulo de elevação de $\Delta\theta$ altera o valor do alcance de

$$A + \Delta A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}[2(\theta + \Delta\theta)]. \quad (3.65)$$

Podemos substituir a função seno por

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \quad (3.66)$$

e escrever

$$A + \Delta A = \frac{v_0^2}{g} \{ \operatorname{sen}(2\theta) \cos(2\Delta\theta) + \cos(2\theta) \operatorname{sen}(2\Delta\theta) \}. \quad (3.67)$$

Consideremos bem pequena a variação angular $\Delta\theta$ e, assim, podemos fazer

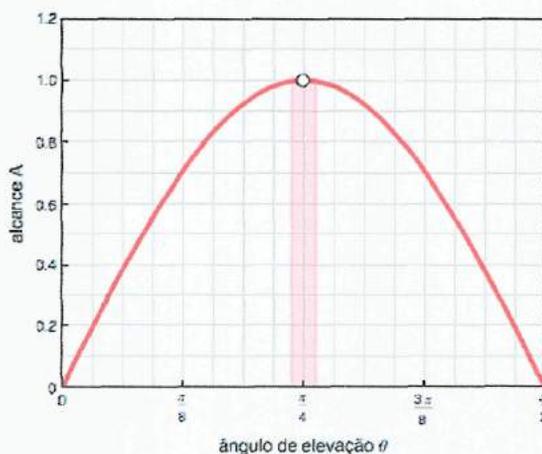


Figura 16: Alcance da partícula em função do ângulo de elevação. Observamos que, no valor máximo temos a razão $\Delta h/\Delta\theta = 0$.

$$\cos(2\Delta\theta) \approx 1 \quad (3.68)$$

e

$$\text{sen}(2\Delta\theta) \approx 2\Delta\theta. \quad (3.69)$$

Desse modo, o alcance é

$$A + \Delta A \approx \frac{v_0^2}{g} [\text{sen}(2\theta) + (2\Delta\theta) \cos(2\theta)]. \quad (3.70)$$

A primeira parcela do lado direito da igualdade em (3.70) corresponde ao alcance original e a segunda parcela corresponde a correção necessária devida a variação do ângulo de elevação. Portanto, as duas correções estão relacionadas pela razão

$$\frac{\Delta A}{\Delta\theta} \approx 2 \frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta). \quad (3.71)$$

Deste modo, para o ângulo de alcance máximo $\theta = \theta_M$, esta razão é nula. De fato, da Figura 16 observamos que para o valor máximo do alcance, $\Delta A_M = 0$. Podemos concluir então que nas situações em que a razão (3.71) é nula, temos uma mudança na orientação na tangente a curva da função considerada.

3.3.3 A altura máxima da partícula

Podemos realizar uma discussão similar em relação a altura máxima do projétil. O ponto mais alto de sua trajetória, que denominaremos h , ocorre após um intervalo de tempo particular $t = t_v$, ter transcorrido entre o lançamento do projétil e a componente vertical da velocidade se anular. Deste modo, quando isto ocorre,

$$t_v = \frac{v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \quad (3.72)$$

e, como $h = y_v = y(t_v)$, podemos concluir que ponto mais alto da trajetória é dado por

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (3.73)$$

A coordenada horizontal $x_v = x(t_v)$ da partícula, quando ela ocupa o ponto mais alto da sua trajetória, é dada, então, por

$$x_v = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}(2\theta) \quad (3.74)$$

o que corresponde à metade do alcance realizado. Concluimos, então, que o intervalo de tempo para percorrer a trajetória entre a posição inicial e o ponto mais alto da trajetória é igual ao intervalo de tempo para percorrer a trajetória entre o ponto mais elevado e a retomada do contato com a horizontal.

Como $\operatorname{sen}^2 \theta$ assume valores entre 0 e 1, o ponto mais alto da trajetória tem valor máximo h_m , dado por

$$h_m = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (3.75)$$

para um ângulo de elevação

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} \quad (3.76)$$

Observamos ainda que uma pequena variação do ângulo de elevação de $\Delta\theta$ altera o valor da altura h de

$$h + \Delta h = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen}^2(\theta + \Delta\theta). \quad (3.77)$$

Podemos substituir a função seno por

$$\text{sen}^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2a), \quad (3.78)$$

empregar a identidade trigonométrica

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \quad (3.79)$$

e escrever

$$\begin{aligned} h + \Delta h &= \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos[2(\theta + \Delta\theta)] \right\} \\ &= \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) \cos(2\Delta\theta) - \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) \text{sen}(2\Delta\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Consideremos mais uma vez bem pequena a variação angular e, assim, podemos fazer

$$\cos(2\Delta\theta) \approx 1 \quad (3.81)$$

e

$$\text{sen}(2\Delta\theta) \approx 2\Delta\theta. \quad (3.82)$$

Desse modo, a nova altura é dada por

$$\begin{aligned} h + \Delta h &\approx \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \Delta\theta \text{sen}(2\theta) \right\}. \\ &\approx \frac{v_0^2}{2g} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) - \Delta\theta \text{sen}(2\theta) \right\}. \\ h + \Delta h &\approx \frac{v_0^2}{2g} \{ \text{sen}^2\theta - \Delta\theta \text{sen}(2\theta) \}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

A primeira parcela do lado direito da igualdade corresponde a altura original e a segunda parcela corresponde à correção necessária devida a variação do ângulo de elevação.

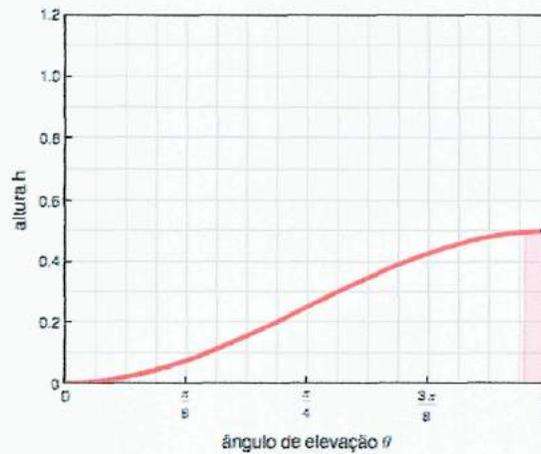


Figura 17: Altura máxima da partícula em função do ângulo de elevação. Observamos que, no valor máximo temos a razão $\Delta h/\Delta\theta = 0$.

Portanto, as duas correções estão relacionadas pela razão

$$\frac{\Delta h}{\Delta\theta} \approx \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}(2\theta). \quad (3.84)$$

Deste modo, para o ângulo de alcance máximo $\theta = \theta_m$, esta razão é nula. De fato, da Figura 17 observamos que para o valor máximo da altura, $\Delta h_m = 0$. Podemos concluir então que nas situações em que a razão (3.84) é nula, temos uma mudança na orientação na tangente a curva da função considerada.

3.3.4 Uma elipse inesperada

Vimos nas seções anteriores que, para um dado ângulo de elevação, o alcance é dado por

$$A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\theta). \quad (3.85)$$

e que o ponto mais alto da trajetória é dado por

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2\theta = \frac{v_0^2}{2g} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta) \right]. \quad (3.86)$$

Deste modo, podemos escrever que a metade do alcance realizado é

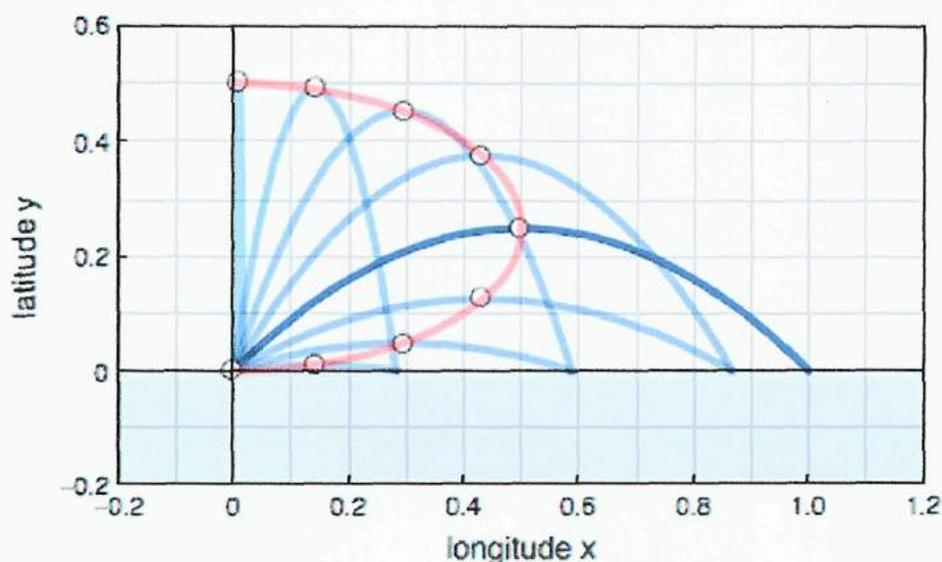


Figura 18: Representação das trajetórias da partícula no plano, escolhendo como ponto de partida a posição $P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ e velocidade $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$ e a posição das alturas máximas correspondentes. Observamos a construção de uma elipse a partir destes pontos.

$$\frac{A}{2} = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen}(2\theta) \quad (3.87)$$

e existe uma latitude $v_0^2/(4g)$ tal que a diferença entre esta latitude e h é

$$\frac{v_0^2}{2g} - 2h = \frac{v_0^2}{2g} \cos(2\theta). \quad (3.88)$$

Estas duas grandezas estão relacionadas pela expressão seguinte:

$$\left[\frac{v_0^2}{2g} - 2h \right]^2 + \left(\frac{A}{2} \right)^2 = \left(\frac{v_0^2}{2g} \right)^2 \quad (3.89)$$

A equação (3.89) é a equação de uma elipse cujo centro está no ponto $C(0, v_0^2/(4g))$; o eixo menor é paralelo à vertical e o eixo maior é paralelo à horizontal, como ilustrado na Figura 18.

3.3.5 A curva de segurança

Obtivemos na seção anterior que o alcance da partícula é dado por

$$A = \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen}(2\theta) \quad (3.90)$$

e que o alcance diminui para ângulos maiores ou menores que $\theta = \theta_M = \pi/4$. Consideremos agora todas as possíveis trajetórias que podem ser realizadas variando-se o ângulo de elevação e tentemos estabelecer qual a região do espaço em que todas as trajetórias estão contidas. A curva que limita esta região é denominada curva cupuliforme e deve tangenciar todas as trajetórias possíveis e conter necessariamente a altura máxima e o alcance máximo. Neste caso, toda a nossa discussão também é válida para lançamentos no sentido negativo da direção horizontal e na posição $H(x_H = 0, y_H = v_0^2/(2g))$ devemos ter $(\Delta y/\Delta x)_{x=H} = 0$ e para $(\Delta y/\Delta x) = 0$, velocidade $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=H} = 0, \quad (3.91)$$

e nas posições $D(x_D = A, y_D = 0)$ e $E(x_E = -A, y_E = 0)$

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=-A} = -\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=A}. \quad (3.92)$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=-A} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=A} \right] = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=H}, \quad (3.93)$$

e temos então que a curva que envolve todas as trajetórias deve ser uma parábola. De fato, se a equação das trajetórias da partícula é dada por

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2\theta) x^2 + (\tan\theta) x, \quad (3.94)$$

a trajetória desta família de curvas deve ser dada pela função envelope

$$f(x, y, u) = y + \frac{g}{2v_0^2} (1 + u^2) x^2 - ux = 0 \quad (3.95)$$

onde $u = \tan\theta$ é o parâmetro que caracteriza a trajetória particular a ser considerada. Além disso, ao variarmos o parâmetro u não devemos nos afastar da função que define a família de curvas envelope. Portanto, devemos acrescentar a condição

$$f(x, y, u) = f(x, y, u + \Delta u). \quad (3.96)$$

Deste modo,

$$f(x, y, u + \Delta u) = y + \frac{g}{2v_0^2} [1 + (u + \Delta u)^2] x^2 - (u + \Delta u)x \quad (3.97)$$

e, uma vez mais empregando a expansão binomial, obtemos

$$f(x, y, u + \Delta u) \approx y + \frac{g}{2v_0^2} [1 + u^2(1 + 2\frac{\Delta u}{u})] x^2 - u(1 + \frac{\Delta u}{u})x. \quad (3.98)$$

Subtraindo (3.98) de (3.97) obtemos

$$\Delta f = f(x, y, u + \Delta u) - f(x, y, u) \approx \left(\frac{g}{v_0^2} ux - 1 \right) x(\Delta u) = 0 \quad (3.99)$$

para qualquer variação arbitrária de (Δu) . Assim, para satisfazermos (3.99) devemos ter

$$u = \frac{v_0^2}{xg}. \quad (3.100)$$

Substituindo este resultado em (3.94), podemos determinar a função envelope:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \quad (3.101)$$

Observamos de (3.101) que a função envelope é uma parábola, como esperado:

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=H} = 0 \quad (3.102)$$

e a curva envelope corresponde ao movimento de uma partícula imaginária que parte da posição H com velocidade v_0 dirigida horizontalmente. A curva envelope descreve uma curva de segurança. Para uma dada velocidade inicial v_0 da partícula, não há nenhum ângulo de elevação que a levará a uma distância maior que a fronteira delimitada pela curva envolvente. Este comportamento está representado na Figura 19.

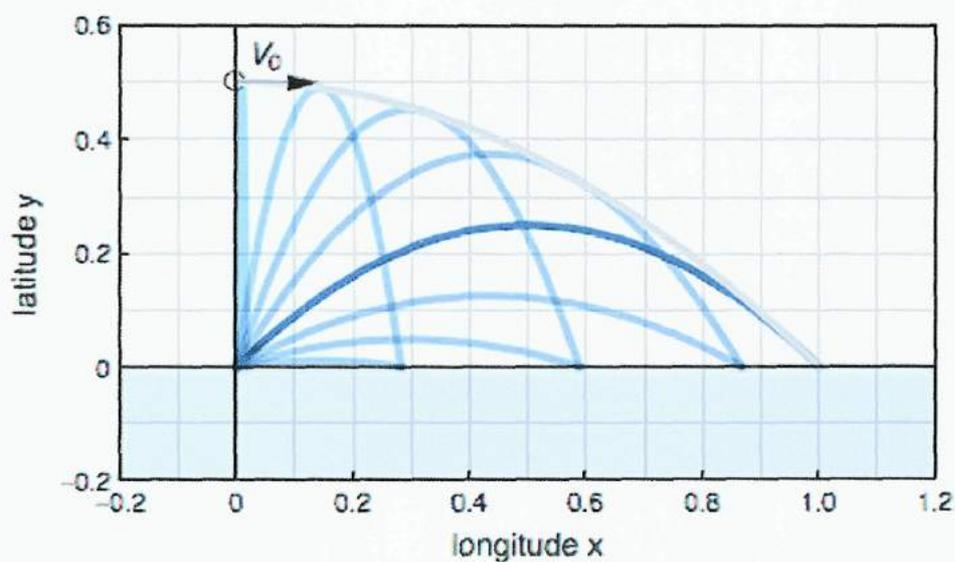


Figura 19: Representação das possíveis trajetórias da partícula com a posição $P_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ e velocidade inicial $v_0(v_{0x} = \sqrt{2}/2, v_{0y} = \sqrt{2}/2)$ e a curva de segurança correspondente.

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho um material pedagógico para uma aula sobre o movimento parabólico de uma partícula. Descrevemos o comportamento newtoniano da aceleração, da velocidade e da posição de uma partícula de massa m quando a força resultante que atua sobre ela é devido a força gravitacional, próxima a superfície terrestre, e a velocidade inicial é orientada segundo um ângulo agudo com a horizontal. A sua aceleração é constante e orientada verticalmente e a resultante trajetória da partícula é descrita por uma parábola.

Por um método relativamente simples, porém não dissociado do formalismo científico, apresentamos também o conteúdo da dinâmica do movimento parabólico de forma a abranger diversas áreas interdisciplinares para que o tema seja abordado de forma ampla. Procuramos empregar uma linguagem simples para que o aluno possa compreender conceitos e empregamos gradualmente o vocabulário e a linguagem corretos para o estudo da dinâmica do movimento parabólico como resultado da composição de um movimento retilíneo e uniforme em uma direção e um movimento retilíneo uniformemente variado na direção perpendicular à primeira.

Procuramos seguir as orientações dos Programas Curriculares Nacional Ensino Médio – PCNEM quanto a interdisciplinaridade, realçando os fatos históricos e explorando as propriedades geométricas do movimento. Desenvolvemos ainda, segundo as diretrizes dos PCNs, instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, permitindo que os alunos construam abstrações matemáticas não somente no desenvolvimento das leis do movimento parabólico, mas também desenvolvam habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico que possam ser estendidas para outras atividades na sua vida cotidiana.

Referências

- ARONS, A. B. *A Guide to introductory physics teaching*. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- BENJAMIN, C. (Ed.). *Dicionário de Biografias Científicas*. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.
- BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996. 1996.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília: SEMTEC/MEC, 2000.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2006.
- COYNE, G. V.; HELLER, M. Three generations: From Tartaglia to Galileo a comprehensible Universe. In: *A comprehensible Universe*. Berlin Heidelberg: Springer, 2008. p. 79–87.
- CROMBIE, A. C. A note on the descriptive conception of motion in the fourteenth century. *The British Journal for the Philosophy of Science*, v. 4, n. 13, p. 46–51, 1953.
- DRAKE, S.; DRABKIN, I. E. *Mechanics in Sixteenth-Century Italy: Selections from Tartaglia, Benedetti, Guido Ubaldo, & Galileo*. Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1969.
- ERLICHSON, H. How Galileo solved the problem of maximum projectile range without the calculus. *Eur. J. Phys.*, v. 19, p. 251–257, 1998.
- GALILEI, G. *Dialogues Concerning Two New Sciences*. New York: Dover Publications, 1954.

- GALILEI, G. *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano*. 3. ed. São Paulo: Editora 34 / Associação Filosófica Scientiæ Studia, 2011. (Coleção Estudos sobre a Ciência e a Tecnologia).
- GLIOZZI, M. "Cardano, Girolamo". In: GILLISPIE, C. C. (Ed.). *Dictionary of Scientific Biography*. New York: Charles Scribners & Sons, 1970. v. 3, p. 66.
- HANNAM, J. *God's Philosophers*. London: Icon Books, 2010.
- KOERTGE, N. (Ed.). *New Dictionary of Scientific Biography*. 1. ed. New York: Charles Scribners & Sons, 2007.
- MCCORMMACH, R. *Night thoughts of a classical physicist*. New York: Harvard University Press, 1991.
- MECHANICS. Encyclopædia Britannica. Encyclopædia Britannica Online. Encyclopædia Britannica Inc., 2011. Acesso em dezembro 2011. Disponível em: <<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/371907/mechanics>>.
- NICCOLÒ Fontana Tartaglia. Encyclopædia Britannica. Encyclopædia Britannica Online. Encyclopædia Britannica Inc., 2011. Dezembro 2011. Disponível em: <<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/583744/Niccolo-Fontana-Tartaglia>>.
- O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Suposta imagem de Niccolò Fontana (1499(50)–1557), conhecido como Tartaglia*. Acesso em dezembro 2011. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Tartaglia.html>>.
- ROCCA, P.; RIGGI, F. Projectile motion with a drag force: were the medievals right after all? *Phys. Edu.*, v. 44, p. 398–402, 2009.
- STEWART, S. M. On the trajectories of projectiles depicted in early ballistic woodcuts. *Eur. J. Phys.*, v. 33, n. 1, p. 149–166, 2012.
- SUSTERMANS, J. *Pintura de Galileu Galilei (1564–1642) realizada por Justus Sustermans, por volta de 1639*. Acesso em dezembro 2011. Disponível em: <<http://prints.rmg.co.uk/image/396874/justus-sustermans-galileo-galilei-1564-1642>>.