

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO



INSTITUTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

PROJETO DE INSTRUMENTAÇÃO PARA O ENSINO DE FÍSICA

FORMAÇÃO DE IMAGENS COM LENTE DELGADAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE ÓPTICA

Daniele Freitas Barbosa

Orientador: Prof. Vitorvani Soares

2007/2

29/2007



Ficha catalográfica

Freitas Barbosa, Daniele

Formação de imagens com lentes delgadas: Uma proposta para o ensino de Óptica, Daniele Freitas Barbosa — Rio de Janeiro: Projeto de Instrumentação para o ensino de Física — Instituto de Física/UFRJ, 2007.

1. Óptica geométrica. 2. Ciência — Ensino Médio. 3. Física clássica.

I. Título.

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus por me conceder a oportunidade de lecionar e ajudar na formação de crianças e jovens. Dedico a toda minha família pelo apoio e compreensão nas melhores e piores situações e por nunca terem me abandonado nos momentos mais difíceis da vida.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que acreditaram e se empenharam para a realização do trabalho, em especial ao meu orientador Vitorvani Soares pela paciência e dedicação. Ao meu marido Hiran, que me apoiou e incentivou a ir até o fim. Aos meus amigos da UFRJ pela motivação dada ao trabalho, em especial as professoras Maria Antonieta T. de Almeida e Susana de Souza Barros por terem me ajudado e apoiado ao longo do curso. Ao meu grande amigo Valdeci Telmo pela parceria neste trabalho e pelo apoio nas horas difíceis. Finalmente, gostaria de estender aos professores que participaram da banca os meus agradecimentos.

ÍNDICE

RESUMO	6
1. INTRODUÇÃO	7
1.1 MOTIVAÇÃO TRABALHO	7
1.2 PROPOSTAS DOS PCN'S E CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O ENSINO DE FÍSICA.....	8
1.3 HABILIDADES E COMPETÊNCIAS A SEREM DESENVOLVIDAS	9
2. BREVE HISTÓRICO DA ÓPTICA GEOMÉTRICA.	10
2.1 OS ANTIGOS GREGOS	10
2.2 A ÓPTICA A PARTIR DO SÉCULO X.	11
3. O EXPERIMENTO	19
3.1 INTRODUÇÃO.....	19
3.2 ETAPAS DO TRABALHO	20
4. DETERMINAÇÃO DOS PONTOS CONJUGADOS.	22
4.1 MATERIAL UTILIZADO	22
4.2 MÉTODO EXPERIMENTAL PARA O SISTEMA COM UM LENTE.	22
4.3 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA O SISTEMA OBJETO - UMALENTE—PLANO IMAGEM.	23
4.4 A LEI DE GAUSS	26
4.5 O MÉTODO DE BESSEL.....	28
4.6 O MÉTODO DE ABBE	29
4.2 MÉTODO EXPERIMENTAL PARA O SISTEMA COM DUAS LENTES ACOPLADAS.	33
4.7 ANÁLISE DOS RESULTADOS PARA O SISTEMA OBJETO - DUAS LENTES—PLANO IMAGEM.	34
5. CONCLUSÕES	37
APÊNDICE	38
REFERÊNCIAS.....	43

Resumo

Em geral, nos cursos de Óptica, os conceitos da lei de Gauss e os métodos de Bessel e Abbe para a formação de imagens nítidas em um arranjo óptico são apresentados aos alunos *a priori*, sem nenhuma justificativa [1,2,3,4,5]. Ao aluno só resta “verificar” as fórmulas apresentadas. A proposta deste trabalho é ensinar estes conceitos físicos da óptica geométrica partindo-se da observação e análise da formação de imagens com lentes delgadas e obtermos, deste modo, as equações da óptica apresentadas habitualmente nos livros didáticos.

A lei de Gauss, também conhecida como equação dos pontos conjugados, estabelece uma relação entre as distâncias do plano imagem à lente (I) e o plano objeto à lente (O) e a distância focal da lente utilizada.

O método de Bessel é, em geral, empregado na determinação da distância focal f de um sistema de lentes. Ele é executado variando-se a posição da lente em relação ao plano imagem, mantendo-se fixa a distância entre o objeto e o anteparo. Verifica-se então que existem duas posições distintas para formação de imagens nítidas.

O método de Abbe é uma variante do método de Bessel e também é recomendado para a determinação da focal f de um sistema de lentes. Ele consiste em, uma vez formada a imagem do objeto no plano focal com o auxílio das lentes, as mantemos fixas em relação ao plano focal e movemos o objeto para uma nova posição. O plano imagem é então deslocado até obtermos a formação de uma nova imagem nítida.

Mostramos neste trabalho que partir da observação da formação de imagens de diferentes tamanhos — segundo o arranjo óptico feito com o objeto, as lentes e o plano imagem —, podemos construir com os alunos o modelo matemático para formação de imagens em um plano focal. Desta forma, sem antecipar nenhum dos métodos aos alunos, os conceitos da Lei de Gauss e os métodos de Bessel e Abbe para a formação de imagens nítidas em um arranjo óptico se constroem durante o processo de aquisição e análise dos dados experimentais assim como as suas representações algébricas.

I. Introdução

1.1 Motivação trabalho.

Este trabalho apresenta uma proposta alternativa ao tradicional ensino de física. Como todos sabemos, o quadro atual do ensino brasileiro tem sido bastante discutido em âmbito Nacional [6] e o Ministério da Educação e Cultura já divulgava, em 1999, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) para o Ensino Médio, com o objetivo de orientar uma reforma do Ensino.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais [7] [(pág. 48), assim descrevem o quadro atual da física no Ensino Médio:

“O ensino de Física tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na Solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas. Apresenta o conhecimento como um produto acabado, fruto da genialidade de mentes como a de Galileu, Newton ou Einstein, contribuindo para que os alunos concluam que não resta mais nenhum problema significativo a resolver. Além disso, envolve uma lista de conteúdos demasiadamente extensa, que impede o aprofundamento necessário e a instauração de um diálogo construtivo.”

Percebe-se que os PCN's destacam bem os problemas atuais da Física. No ensino tradicional os alunos, em geral, não tem oportunidade de trabalhar com os fenômenos experimentalmente. No caso das escolas de Ensino Médio uma das razões para que isso ocorra é que a maioria das escolas não têm laboratórios. Já nas aulas de laboratório das Universidades, na maioria das vezes os alunos recebem um modelo teórico *a priori*. Assim, a partir dos dados obtidos com a realização dos experimentos, os alunos simplesmente “comprovam” se este ou aquele modelo está correto.

Este procedimento torna o ensino de ciências enfadonho e desinteressante, afastando os alunos da disciplina pois “não haveria mais nada a descobrir”. Não é demais lembrar os pronunciamentos feitos por dois ícones da física, Sir William Thomson, o Lorde Kelvin, e Albert Abraham Michelson, no apagar das luzes do século XIX. Kelvin enunciava que na Física de então não restaria mais nada a descobrir a não ser explicar a radiação do corpo negro e a desconcertante invariância da velocidade da luz. Já Michelson, parafraseando Kelvin, observou que “... tudo o que restava à física [a partir de então] era preencher as casas decimais das

constantes universais” [8]. Não é preciso reafirmar que a busca na compreensão desses dois fenômenos desencadeou a revolução na física contemporânea. Será que tal revolução teria se desencadeado se os jovens da época como Max Planck e Albert Einstein tivessem se desencorajado em estudar física, diante de tais pronunciamentos?

A Lei de Diretrizes e Bases [LDB/96] em seu artigo 35 ainda nos lembra sobre as finalidades da educação no Ensino Médio: [9]

“O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.”

Torna-se necessária então uma reformulação no ensino de Física, com a inserção de novos temas e abordagens que pareçam mais atraentes para os alunos. Nossa proposta de trabalho é apresentar aulas combinadas com experimentos ao longo da disciplina, permitindo aos alunos tomar contato com os fenômenos físicos e simultaneamente construir modelos matemáticos dos fenômenos observados a partir das observações experimentais.

1.2 Propostas dos PCN's e contextualização para o ensino de Física

Ainda segundo os PCN's, os conhecimentos em Física devem ser contextualizados, sendo portanto, tarefa do professor inserir novos conteúdos que estejam relacionados com o cotidiano do aluno. Os alunos devem ser capazes de questionar processos naturais e tecnológicos, identificando regularidades, apresentando interpretações e prevendo evoluções:

“..., é imprescindível considerar o mundo vivencial dos alunos, sua realidade próxima ou distante, os objetos e fenômenos com que efetivamente lidam, ou os problemas e indagações que movem a curiosidade. Esse deve ser o ponto de partida e, de certa forma, também o ponto de chegada. Ou seja, feitas as investigações, abstrações e generalizações potencializadas pelo saber da Física, em sua dimensão conceitual, o conhecimento volta-se novamente para os fenômenos significativos ou objetos tecnológicos de interesse, agora com um novo olhar, como o exercício de utilização do novo saber adquirido, em sua dimensão aplicada ou tecnológica. O saber assim adquirido reveste-se de uma universalidade maior que o âmbito dos problemas tratados, de tal forma que passa a ser instrumento para outras e diferentes investigações.”[7]

Dentre as funções do ensino de Física se inclui portanto capacitar os alunos a desenvolver habilidades de forma a explorar os conhecimentos adquiridos em sala de aula com a realidade a sua volta. Desta forma, espera-se que o aluno se torne apto a compreender o mundo em que vive. Espera-se também que o professor seja capaz de contextualizar os conhecimentos desenvolvidos em cada tópico da Física.

A nossa proposta é com um experimento simples mostrar relações importantes na física óptica. A óptica pode ser abordada diretamente em sala de aula, através de tópicos de física como a formação de imagens, [10] assim como em atividades complementares contendo aspectos históricos do seu desenvolvimento como a câmara escura, por exemplo. [11] Podemos ainda acrescentar os fenômenos relacionados com o cotidiano — a formação e a transmissão de imagens pela teledifusão — e as diversas aplicações e desenvolvimentos tecnológicos que envolvem esses processos. [12]

O presente trabalho pode ser estendido para atividades interdisciplinares. Isto pode ser realizado com o auxílio de outras disciplinas como, por exemplo: a história (evolução da humanidade e as novas descobertas que levam a mudanças de paradigmas), a matemática (ferramenta de trabalho indispensável na física) e a geografia (relação social-política entre os países desenvolvidos tecnologicamente e os que não são).

1.3 Habilidades e competências a serem desenvolvidas.

Com a apresentação de um experimento, os alunos tomarão conhecimento do sistema experimental e de que forma manuseá-lo. A experiência desenvolve nos alunos o sentido prático de um problema de física. Isso ajuda a desenvolver neles o raciocínio lógico fundamental, que é analisar as grandezas envolvidas em um fenômeno e como elas se relacionam.

Neste processo, os alunos aprendem a dominar instrumentos de trabalho do físico tais como a construção e análise de gráficos, uso de equações e utilização da matemática como ferramenta de auxílio na construção do modelo do fenômeno observado. Desta forma, certamente o aluno desenvolverá também a sua capacidade intelectual tanto para serviços que podem envolver raciocínio lógico quanto para outros que necessitem de habilidade no manuseio de equipamentos e análise de dados.

Com todos esses tópicos desenvolvidos, acreditamos que o aluno estará adquirindo diversas das habilidades descritas nos PCNs e fundamentais para a formação do estudante. Não podemos deixar de acrescentar, ainda, o caráter lúdico envolvido no processo. É tarefa do professor tornar o processo ensino-aprendizado algo agradável para todos. A oportunidade de “brincar” e ao mesmo tempo aprender é uma experiência única e prezerosa, como ressaltou Huizinga, em seu livro clássico *Homo ludens*. [13] A este respeito, não poderíamos deixar de citar o próprio Gauss [14]:

“Não é o conhecimento mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de ali chegar, que me dá o maior prazer. Quando acabo por clarificar e explorar completamente um assunto, então afasto-me dele para entrar na escuridão outra vez.”

2. Breve histórico da óptica geométrica.

2.1 Os antigos gregos.

Sem a pretensão de refazer a história, apresentaremos uma breve descrição sobre a evolução dos conceitos da Óptica geométrica e seus personagens. [15] Para isso, precisamos retornar até por volta de 500 a.C., onde antigos gregos como Aristóteles¹ (384-322 a.C.), Euclides² (c. 300 a.C.) e Ptolomeu³ (c. d.C. 125-150), estabeleceram as primeiras descrições registradas sobre como funcionaria o processo da visão.

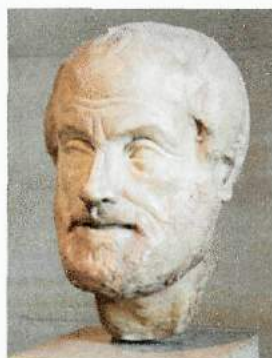


Figura 1. Aristóteles (384-322 a.C.), Euclides (c. 300 a.C.) e Ptolomeu (c. 125-150 d.C.), os principais filósofos que propuseram uma das primeiras teorias para a formação de imagens. [16]

Aristóteles e seus seguidores estavam convencidos que a visão ocorria por meio da teoria da “intromissão”: a transmissão da luz do objeto iluminado para o olho do observador. Segundo Aristóteles, o meio entre o objeto e o observador seria o responsável pela “transmissão” da imagem do objeto para o olho do observador, produzindo a sensação visual.

Euclides, por sua vez, voltou sua atenção para a geometria da visão, defendendo a formação da imagem de um objeto por meio de raios luminosos. O resultado do seu estudo foi o desenvolvimento da perspectiva geométrica baseada seguinte teoria: a sensação visual seria dada por um cone de luz que emana do olho do observador na direção dos objetos. Os objetos que interceptassem estes raios seriam então percebidos e a sua aparente localização seria determinada pela posição dos raios interceptados dentro do cone. [17,18]

Euclides também analisou imagens especulares, estabeleceu a lei dos ângulos iguais para a incidência e reflexão do raio luminoso além de definir as regras geométricas ainda usadas em

¹ Aristóteles (384 — 322 a.C.): filósofo grego, aluno de Platão, preceptor de Alexandre O Grande, fundou a escola do Liceu, realizou obras sobre lógica e raciocínio.

² Euclides (Mégera ou Gela, Sicília, c. 300 a.C.): filósofo e matemático grego, discípulo de Sócrates, fundador da Escola de Alexandria, onde ensinou matemática. Definiu um postulado de lógica geométrica que recebeu seu nome, entre outros feitos.

³ Cláudio Ptolomeu (? , cerca de 83 – Alexandria, c. 125-150 d.C.), de origem grega ou egípcia, foi matemático, geógrafo, astrônomo e astrólogo do Egito romano.

nostros dias para a localização da imagem de um objeto vista por reflexão. A lei da refração vai ser incluída na Óptica somente no século II, a partir dos estudos quantitativos do astrônomo Cláudio Ptolomeu. [19]

2.2 A óptica a partir do século X.

Entre os séculos II e X a Óptica não viveu nenhum desenvolvimento significativo. Entretanto, no início do século X a literatura grega sobre Óptica está traduzida para o árabe e se apresenta disponível ao mundo islâmico. Um estudioso árabe chamado Alhazen⁴ questionou as teorias de Euclides. Ele entendia que objetos vistos pelo homem podiam aparecer até mesmo em outras superfícies, como uma imagem óptica, utilizando somente um buraco pequeno e uma tela. Para corrigir a teoria de Euclides acredita-se que o jesuíta alemão Christopher Scheiner⁵, em 1625, demonstrou que a luz entra no olho com a imagem do objeto para que o homem possa vê-lo, fazendo a simples experiência de retirar a túnica do fundo do olho de um animal abatido. Ao examiná-la pela parte de trás da retina, parede transparente do olho, ele distinguiu reproduções diminutas das imagens que estavam a frente do animal no instante de sua morte. A Figura 2 apresenta Alhazen e Scheiner.

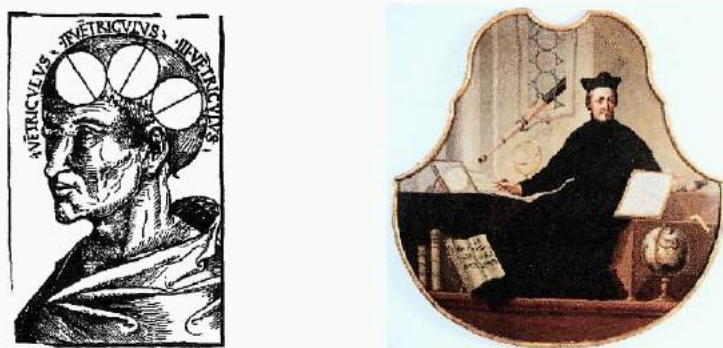


Figura 2. Abu Ali Alhazen (965-1038) e Christoph Scheiner (1575-1650), segundo a concepção artística dos seus contemporâneos.

Atualmente é natural que todos aceitem o olho como aparelho receptor de imagens, e seu processo é semelhante a uma câmara fotográfica. De fato, é este mesmo princípio que vai permitir ao fotógrafo, a partir do final do século XVIII e início do século XIX, observar a cena

⁴ Abu Ali Hasan Ibn Alhazen (Irã, 965 – Egito, 1040): estudioso árabe, teve 200 trabalhos traduzidos com muita importância na Europa, nos quais estavam incluídos trabalhos sobre sistemas ópticos, reflexões, espelhos esféricos e parabólicos, refração, teoria da visão, aumento do Sol e da lua perto do horizonte.

⁵ Christopher Scheiner (Wald, Mindelheim, Swabia, 1575 – Niesse, Silesia, 1650): astrônomo alemão, estudou matemática em Ingolstadt, tornou-se professor na filial em Dillingen e depois retornou a Ingolstadt, criou o pantógrafo ou instrumento de cópia, construiu um telescópio para observar o Sol.

a ser fotografada no visor de vidro despolido da câmara fotográfica antes de realizar a fotografia.

Foi Alhazen quem criou, no século X, a primeira câmara escura, precursora da câmara fotográfica atual. Tal instrumento foi, mais tarde, aprimorado por Giambattista della Porta⁶, e descrito em sua obra *Mágica Natural*, de 1558. Ele colocou lentes no pequeno orifício para poder focar a imagem em uma superfície de modo a ver com nitidez as formas e as cores dos objetos observados. Della Porta observou, então, que a câmara escura trabalhava semelhante ao olho: A imagem entra pela pupila, como pela abertura de uma janela, é focalizada pela córnea e pelo cristalino, onde é refratada, e por volta do centro do olho ela é invertida, aparecendo de cabeça para baixo na retina, conforme acontece na câmara escura.



Figura 3. Giambattista della Porta (1535 – 1615) e Daniele Barbaro (1513 – 1570), dois renascentistas que aperfeiçoaram a câmara escura.

A eficácia da câmara escura, que revela a óptica do olho, está bem descrita por Daniele Bárbaro⁷ em *La pratica della prospettiva* (1568): Em um cômodo totalmente fechado, onde só entra luz na câmara escura pelo orifício com lentes, a luz chega ao outro lado da câmara onde está fixada uma folha de papel que você pode mover para frente e para trás de modo que a imagem apareça melhor, e você verá no papel a imagem com suas formas reais e nítidas, com

⁶ Giambattista della Porta (Nápoles, 1535 – 1615) foi educado em casa, onde ocorriam freqüentes discussões sobre tópicos científicos. Ele nasceu e morreu em Nápoles. Viajou por toda a Itália, França e Espanha, sempre retornando à casa, pois ele não precisava trabalhar para ganhar a vida. Sua família era abastada o suficiente para lhe permitir se dedicar integralmente aos seus estudos e pesquisas. Entre seus interesses destacam-se os estudos sobre a refração, apresentados na obra *De refractione optices* (1593). Ele reivindicou ser o inventor do telescópio, muito embora ele não pareça tê-lo construído antes de Galileu

⁷ Daniele Matteo Alvise Barbaro (Itália, 1513 – 1570) descreveu a câmara escura em seu livro, fazendo a mesma observação que Leonardo da Vinci: “Feche todas as aberturas de uma câmara de tal maneira a permitir que a luz penetre em seu interior somente através da lente na abertura principal. [...] Você verá então, sobre uma folha de papel, toda a paisagem [que circunda a câmara], tal qual ela existe na realidade, com seus horizontes, suas cores, e até mesmo sua mobilidade através das nuvens e dos reflexos na água”.

suas distâncias, suas cores e sombras, além do movimento do que estiver sendo observado, porém invertidos. Mas, utilizando-se um espelho no lugar do papel, que reflete a imagem para cima, e colocando-se um vidro por cima como uma mesa, você pode colocar o papel sobre o vidro e admirar a imagem formada com perfeição, podendo até mesmo desenhar sem dificuldades. [20] Della Porta e Barbaro estão representados na Figura 3.

O astrônomo Johannes Kepler⁸ e o filósofo-matemático René Descartes⁹ apreciaram que o mundo é visto pelo cérebro em imagens como uma câmara escura do olho, obedecendo as leis da óptica. Na Figura 4 estão os retratos de Descartes, Kepler e Galileu Galilei¹⁰. Kepler e Galileu construíram, independentemente, um telescópio. Ajudados por seus estudantes começaram a observar o Sol e, para isso, recorreram ao processo da câmara escura para que não ferissem seus olhos ao olhar para ele.



Figura 4. O astrônomo Johannes Kepler (1571-1630), o filósofo-matemático René Descartes (1596-1650) e o astrônomo e físico Galileu Galilei (1564 – 1642).

A câmara escura, no decorrer do tempo, serviu como instrumento de observação e de estudos dos fenômenos ópticos que nela estão envolvidos e, hoje em dia, na maioria das salas de aula do Ensino Médio, ela é associada com os princípios da máquina fotográfica atual.

Ao longo do tempo, muitos artificios foram usados para se chegar numa qualidade de imagem satisfatória e a câmara escura foi ganhando acessórios para se transformar nas máquinas fotográficas que conhecemos hoje. Por exemplo, na tentativa de melhorar a

⁸ Johannes Kepler (Weil, Württemberg 1571 – Regensburg, 1630): astrônomo alemão, um dos criadores da astronomia moderna, sofreu perseguição religiosa

⁹ René Descartes (La Haye, Touraine, 1596 – Estocolmo 1650): filósofo e matemático francês, formulou a lei da reflexão e da refração em óptica, que levou o seu nome

¹⁰ Galileu Galilei (Pisa, 1564 – Arcetri, 1642): astrônomo, físico e escritor italiano, descobriu as leis do pêndulo, das quedas dos corpos, construiu um telescópio por ouvir falar e fez grandes descobertas astronômicas.

qualidade da imagem projetada, diminuía o tamanho do orifício, mas a imagem escurecia proporcionalmente, tornando-se quase impossível identificar o objeto a sua frente.

Este problema foi resolvido em 1550 pelo físico milanês Girolamo Cardano¹¹, que sugeriu o uso de uma lente biconvexa junto ao orifício, permitindo desse modo aumentá-lo, para se obter uma imagem clara sem perder a nitidez. Isto foi possível graças à capacidade de refração do vidro, que tornava convergentes os raios luminosos refletidos pelo objeto. Assim, a lente fazia com que a cada ponto luminoso do objeto correspondesse à um pequeno ponto de imagem, formando-se assim, ponto por ponto da luz refletida pelo objeto, uma imagem puntiforme.



Figura 5. Zacharias Jansen e o microscópio que, acredita-se, tenha sido fabricado por ele. O modelo foi encontrado na Holanda, no século XVII.

No século XIV, já se aconselhava o uso da câmara escura como auxílio ao desenho e à pintura. Leonardo da Vinci¹² fez uma descrição da câmara escura em seu livro de notas, mas este caderno só foi publicado em 1797. Desse modo, o uso da câmara escura se difundiu entre os artistas e intelectuais da época, que logo perceberam a impossibilidade de se obter nitidamente a imagem, quando os objetos captados pelo visor estivessem a diferentes distâncias da lente. Ou se focalizava o objeto mais próximo, variando a distância da lente ao visor (foco), deixando todo o mais distante fora de foco, ou vice-versa.

Danielo Barbaro, em 1568, no seu livro *La pratica della prospettiva* já mencionava que variando o diâmetro do orifício, era possível melhorar a nitidez da imagem. Assim, outro aprimoramento na câmara escura apareceu: foi instalado um sistema, junto com a lente, que permitia aumentar e diminuir o orifício. Este foi o primeiro "diafragma". Quanto mais fechado o orifício, maior era a possibilidade de focalizar dois objetos a distâncias diferentes da lente.

¹¹ Girolamo Cardano (Pávia, 1501 - Roma, 1576), matemático, médico e filósofo italiano, inventor do modo de transmissão que leva o seu nome e da resolução da equação de terceiro grau.

¹² Leonardo da Vinci (Vinci, 1452 - Lyon, 1519) Pintor, escultor, arquiteto e engenheiro italiano, cujo gênio representa o humanismo do período Renascentista. As suas pinturas *A última Ceia* (1495-97) e *Mona Lisa* (1503-06) estão entre as

Nesta altura, já tínhamos condições de formar uma imagem satisfatoriamente controlável na câmara escura, mas gravar essa imagem diretamente sobre o papel sem intermédio do artista era a nova meta, só alcançada mais tarde com o desenvolvimento da química. Os homens "descobriram" a possibilidade química da fotografia, ou seja, da gravação pela luz em certas substâncias sensíveis a ela.

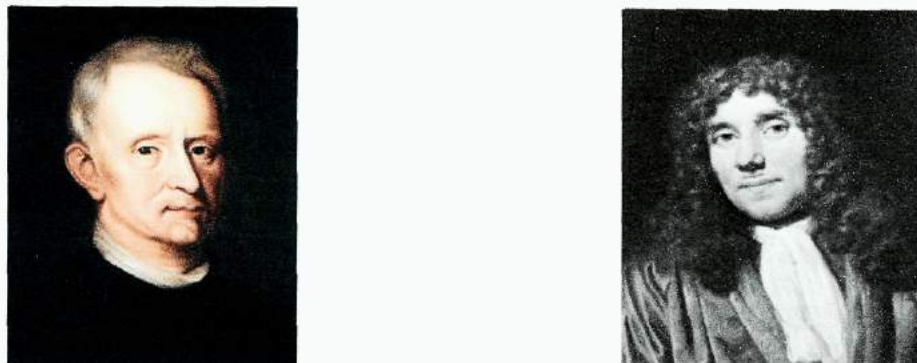


Figura 6. Suposto retrato do cientista inglês Robert Hooke (1635-1703) e Antonie van Leeuwenhoek (1632-1723) que contribuíram para o desenvolvimento do microscópio.

Outro instrumento de grande valia nos avanços Óptica foi o microscópio. A invenção do microscópio é atribuída aos holandeses Hans Janssen¹³ e Zacharias Janssen¹⁴, fabricantes de óculos que viveram no final do século XVI. Seus experimentos mostraram que duas lentes montadas apropriadamente em um tubo, tinham capacidade de ampliar as imagens, permitindo a observação de corpos minúsculos, invisíveis a olho nu. Mas não há registro de que os Janssen tenham utilizado este aparelho com finalidades científicas.

Tempos depois, Galileu construiu o primeiro aparelho razoavelmente prático para a ampliação de imagens, batizando-o de telescópio. Aperfeiçoou o modelo dos holandeses, dispondo as lentes de maneira parecida à adotada em sua luneta astronômica. [21] Em 1665, o cientista inglês Robert Hooke¹⁵ (1635-1703) passou a moldar vidro líquido e com os glóbulos de vidro moldados obteve lentes muito melhores do que as produzidas com vidros de aumento. Essa inovação permitiu-lhe montar um microscópio bastante eficiente e realizar importantes descobertas, uma das quais foi observar — pela primeira vez na história — as células de uma lâmina de cortiça.

pinturas mais influentes deste período. Seus cadernos revelam o seu espírito científico e sua inventividade sem igual, muitos anos em avanço em relação aos seus contemporâneos.

¹³ Hans Janssen (1590 -?) pai de Zacharias Hanssen. Ajudou o filho na construção de um microscópio. Esta invenção evoluiu em uma ferramenta crucial em pesquisa científica, e proveu inspiração pelo telescópio, monóculo e o prisma.

¹⁴ Zacharias Janssen (c.1588-c.1631) era holandês de Middelburg, filho de Hans Janssen. Ele recebeu o crédito por inventar o primeiro microscópio, provavelmente com ajuda do pai dele no ano 1595.

¹⁵ Robert Hooke, (Freshwater, 1635 - 1703) era um matemático inglês que fez um papel importante na revolução científica, por trabalho experimental e teórico.

O primeiro pesquisador a registrar e sistematizar suas observações científicas foi o holandês Antonie van Leeuwenhoek¹⁶. Usando microscópios de sua própria construção, com lente única (microscópio simples), observou e relatou as formas e o comportamento dos microorganismos, sendo por isso considerado o pai da microbiologia. São de sua autoria as primeiras descrições de protozoários, bactérias, e de espermatozóides. Hoje, os microscópios eletrônicos produzem um feixe de elétrons capaz de melhorar a nitidez da imagem formada, chegando a dimensões tão pequenas quanto o raio de um átomo. Este avanço tecnológico permite consertar estruturas eletrônicas tão minúsculas quanto o chip de computador. As dimensões do microscópio eletrônico são da ordem de 1 nanômetro — ou metro dividido por 1 bilhão.



Figura 7. Microscópio feito por Robert Hooke. Ao lado, página do livro de Hooke, *Micrographia : or, Some physiological descriptions of minute bodies made by magnifying glasses. With observations and inquiries thereupon.* de 1667.

Além da invenção de equipamentos como a câmara escura, o telescópio e o microscópio, a utilização de lentes teve enorme importância no estudo das deficiências na visão humana. Um grande cientista que estudou a respeito das lentes foi Carl Friedrich Gauss¹⁷, o príncipe da Matemática. Ele estabeleceu, em 1840, a sua teoria das lentes, apresentando o conceito de distância focal e desenvolvendo as fórmulas que permitem determinar as posições e os tamanhos das imagens formadas por meio de lentes.

¹⁶ Anton de Anton Leeuwenhoek (Amsterdã 1632 - 1723): era negociante holandês e cientista de Delft, Países Baixos. Ele é comumente conhecido como "o Pai de Microbiologia". Filho de um fabricante de cestas. Ele é conhecido pelo seu trabalho na melhoria do microscópio e pelas contribuições para o estabelecimento de microbiologia.

¹⁷ Johann Carl Friedrich Gauss (ou Gauß) (Braunschweig, 30 de Abril de 1777 — Göttingen, 23 de Fevereiro de 1855) foi um famoso matemático, astrônomo e físico alemão. Era conhecido como o príncipe dos matemáticos. Muitos consideram Gauss o maior gênio da história da Matemática.

Outro grande cientista que auxiliou o estudo de lentes foi Friedrich Wilhelm Bessel¹⁸. Ele fez importantes contribuições como a construção de aparelhos muito precisos para o estudo do posicionamento das estrelas e dos planetas. No estudo das lentes o seu método, o chamado método de Bessel é, em geral, empregado na determinação da distância focal f de um sistema de lentes.



Figura 8. Carl Friedrich Gauss (1777-1855): Matemático, astrônomo e físico alemão. Foi professor e diretor do Observatório da Universidade de Göttingen. Lá envolveu-se em detalhe na construção de novos equipamentos. A seu lado, o matemático e astrônomo Wilhelm Bessel (1784-1846).

Outro grande cientista que auxiliou o estudo de lentes foi Ernst Karl Abbe¹⁹. Ele é mais conhecido por seu trabalho em óptica incluindo a construção do primeiro refratômetro. Durante sua associação no trabalho do microscópio de Carl Zeiss, em Jena, ele introduziu as oito horas de trabalho por dia, em memória às quatorze horas de trabalho diária de seu próprio pai. As oito horas de trabalho diária não seria estimulada pelos empresários nos Estados Unidos da América até ser usada pela Ford Motor Company, em 1914, um século depois, mesmo sendo proclamada naquele país desde 1884.

Ernst Karl Abbe nasceu em 23 de janeiro de 1840, em Eisenach, Ducado Principal de Saxe-Weimar-Eisenach. Abbe recebeu uma bolsa de estudos e se graduou na Universidade de Göttingen aos 21 anos. Em 1863, ele se juntou à Universidade de Jena, onde se tornou professor de física e matemática em 1870. Ele se tornou diretor de observatórios astronômicos e meteorológicos em 1878. Abbe uniu-se em um trabalho com Carl Zeiss, em 1866, assumindo o papel de diretor de pesquisa com o propósito de produzir produtos ópticos. Finalmente, em 1872, depois de seis anos de trabalho sobre tipos novos de vidros ópticos, o trabalho deles

¹⁸ Friedrich Wilhelm Bessel (July 22, 1784 – March 17, 1846) era um matemático e astrônomo alemão. Ele sistematizou as funções de Bessel (que, apesar do nome, foram descobertas por Daniel Bernoulli). Ele nasceu em Minden, Westphalia e morreu de câncer in Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia). Bessel foi um contemporâneo de Carl Gauss.

¹⁹ Ernst Karl Abbe (Eisenach, 1840 – Jena, 1905), era um físico alemão. Ele era um professor na Universidade de Jena.

produziu um microscópio de combinação de qualidade inigualável. Este instrumento é o precursor dos modernos microscópios à combinação em uso hoje em dia.

Um ano depois de começar a fabricação do microscópio com Zeiss, em 1873, "Herr" Abbe escreveu um artigo científico em que descreve matematicamente em mínimos detalhes diferentes propriedades ópticas desta invenção maravilhosa. É neste artigo que alguns conceitos físicos como aberração, difração e coma foram entendidos e usados pela primeira vez na concepção e construção de um instrumento óptico. Abbe descreveu tão bem o processo óptico neste artigo, que este trabalho se tornou a base na qual muito da nossa compreensão de ciência óptica se apóia hoje. Em 1876, os negócios da empresa de Zeiss cresciam rapidamente e, como reconhecimento pelos esforços de Abbe, Carl Zeiss fez dele seu sócio.

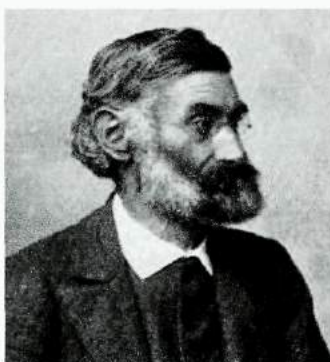


Figura 9. O matemático e físico Karl Abbe (1840-1905).

Abbe também possuía um procedimento para a determinação da focal f de um sistema de lentes, conhecido como método de Abbe. Uma imagem do objeto é formada no plano focal com o auxílio das lentes. Mantendo a lente fixa, move-se o objeto para uma nova posição. O plano imagem é então deslocado até obter-se a formação de uma nova imagem nítida. Se as duas posições são X_{O1} e X_{O2} e os aumentos lineares transversais das imagens são A_1 e A_2 , respectivamente, Abbe mostrou que a focal do sistema de lentes que gera a imagem nítida é dada pela expressão:

$$f = \frac{X_{O2} - X_{O1}}{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}} \quad (1)$$

onde $A = T_I/T_O$, e T_I e T_O são os tamanhos da imagem e do objeto, respectivamente.

3. O experimento

3.1 Introdução

Um experimento de laboratório muito usado no Ensino Médio é o estudo da formação de imagens reais empregando lentes delgadas. Uma figura simples, em um suporte transparente colocado em frente a uma fonte luminosa, é freqüentemente usada como objeto, e o sistema de lentes acopladas (conjunto de lentes fixadas juntas a um suporte de madeira) focaliza a imagem deste objeto em um anteparo. A posição do anteparo é ajustada até que uma imagem nítida se forme sobre ele.

Os estudantes medem a distância do objeto O e a distância da imagem I , correspondendo a posição relativa do objeto e da imagem às lentes. A partir dessas medidas, a equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{O} + \frac{1}{I} \quad (2)$$

pode ser empregada para determinar a distância focal f da lente. Uma prática bem utilizada nas aulas é permitir que os estudantes façam um grande número de medidas da distância da imagem. Para cada um desses pares de medida objeto-imagem, a distância focal é determinada usando-se a Eq. (2). As distâncias focais para cada uma das combinações de O e I devem ser as mesmas. Comparando-se os valores calculados de f , os estudantes testam a validade da Eq. (2).

Muito embora esse método seja um exercício útil, a origem da equação dos pontos conjugados fica indeterminada, não permitindo aos alunos apreciar o valor do método experimental e a capacidade deste método em estabelecer a equação a partir da análise de gráficos. Nesse contexto é que esse trabalho se apóia: possibilitar o desenvolvimento de conhecimentos, competências e habilidades do estudante por meio de instrumentos reais de percepção, satisfação, interpretação, julgamento, atuação, desenvolvimento pessoal e de aprendizado permanente.

Realizamos um procedimento experimental-teórico que permite ao aluno inicialmente observar a formação de imagens de diferentes tamanhos, em função da posição relativa ao objeto e do anteparo ao sistema de lentes. Uma posterior análise funcional desta relação permite a determinação da equação dos pontos conjugados e o seu limite de validade.

Em trabalho anterior mostramos como determinar a equação dos pontos conjugados (equação de Gauss) a partir de uma experiência em óptica [10]. Nesse trabalho, generalizamos o método apresentado anteriormente para o problema de formação de imagens empregando-se mais de uma lente.

Para alcançar esse objetivo, observamos a formação de imagens utilizando lentes de diferentes distâncias focais combinadas e estabelecemos relações entre o tamanho das imagens produzidas, quando as lentes estão associadas, e a distância do plano imagem à lente. A equação de Gauss (lei dos pontos conjugados) estabelece que para um dado um objeto — localizado a uma distância O de um instrumento óptico, e cuja imagem é formada a uma

distância I desse mesmo instrumento —, podemos determinar uma única distância focal f característica da lente.

A equação de Bessel também envolve estas três principais grandezas da óptica geométrica em apenas uma única relação. Entretanto, diferentemente da equação de Gauss, a equação de Bessel prevê a existência de duas posições (O, I) e (O', I') diferentes para a focalização do objeto, quando a distância D entre objeto e imagem é fixa. Segundo Bessel, podemos determinar a distância focal f da lente por meio da relação:

$$f = \frac{(D-L)(D+L)}{4D}, \quad (3)$$

onde $D = O + I = O' + I'$ e $L = O - O' = I - I'$.

Um outro procedimento para a determinação da distância focal f de um sistema de lentes é utilizado, conhecido como método de Abbe. Neste procedimento, uma imagem do objeto é formada no plano focal com o auxílio das lentes. Mantendo a lente fixa, move-se o objeto para uma nova posição. O plano imagem é então deslocado até obter-se a formação de uma nova imagem nítida. Se as duas posições são X_{O1} e X_{O2} e os aumentos lineares transversais das imagens são A_1 e A_2 , respectivamente, Abbe mostrou que a distância focal do sistema de lentes que gera a imagem nítida é dada pela expressão:

$$f = \frac{X_{O2} - X_{O1}}{\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}}, \quad (4)$$

onde $A = T_I/T_O$, e T_I e T_O são os tamanhos da imagem e do objeto, respectivamente.

Em geral, essas equações são apresentadas aos estudantes previamente à realização da experiência e os alunos devem, através do manuseio do experimento, encontrar as posições (O, I) e (O', I') que satisfazem as relações dadas. Mostramos, nesse trabalho, que podemos determinar tanto a equação dos pontos conjugados quanto a equação de Bessel a partir da experiência, sem nenhum conhecimento prévio dessas equações.

A equação dos pontos conjugados (Lei de Gauss) envolve três grandezas fundamentais da óptica geométrica em apenas uma única relação, sendo fundamental para a descrição de diversos instrumentos ópticos. Para o caso mais simples em que este instrumento é composto apenas por uma lente delgada, localiza-se um objeto a uma distância O da lente e forma-se uma imagem a uma distância I desta mesma lente.

O procedimento tradicional nas aulas é apresentar as Eqs. (2), (3) e (4) aos estudantes, previamente à realização da experiência, e aos alunos cabe apenas encontrar as posições O e I que satisfazem a relação acima.

3.2 Etapas do trabalho

Apresentaremos, neste trabalho, uma abordagem alternativa para a sala de aula, que está subdividida em cinco etapas:

- (i) Observar com os alunos a formação de imagens nítidas de diferentes tamanhos, segundo a posição do objeto em relação à lente e da imagem do objeto em relação a lente;
- (ii) Descobrir, junto com os alunos, à partir de um gráfico, a relação funcional entre o tamanho da imagem, T_i , e a posição X_i em relação à lente desta mesma imagem;
- (iii) Determinar a equação dos pontos conjugados a partir dessa relação funcional;
- (iv) Prever a partir do gráfico a existência de uma segunda distância na qual também há formação de imagem nítida;
- (v) Utilizar a combinação de duas lentes acopladas com mesma distância focal. Construir o mesmo tipo de gráficos do item (ii), compará-los aos gráficos realizados com uma lente e verificar os resultados.

Na segunda parte do trabalho apresentaremos a experiência da equação dos pontos conjugados para um sistema de lentes acopladas. Mostraremos que nesta mesma linha de raciocínio, poderemos estabelecer então, através deste método, a construção efetiva dos conceitos de Óptica Geométrica para os sistemas de uma lente e um sistema de lentes acopladas.

4. Determinação dos pontos conjugados.

4.1 Material utilizado

- Três pares de lentes (primeiro sistema: 2 lentes de $f = 50 \text{ mm}$; segundo sistema: 2 lentes de $f = 100 \text{ mm}$; terceiro sistema: 2 lentes de $f = 200 \text{ mm}$)
- Uma régua de aço milimetrada;
- Uma fonte de luz;
- Suporte de lentes;
- Objeto (figura impressa em papel transparente com tamanho de $1,0 \text{ cm}$)
- Anteparo.

4.2 Método experimental para o sistema com um lente.

Vamos inicialmente empregar somente uma lente, como descrito na Figura 10. [10]

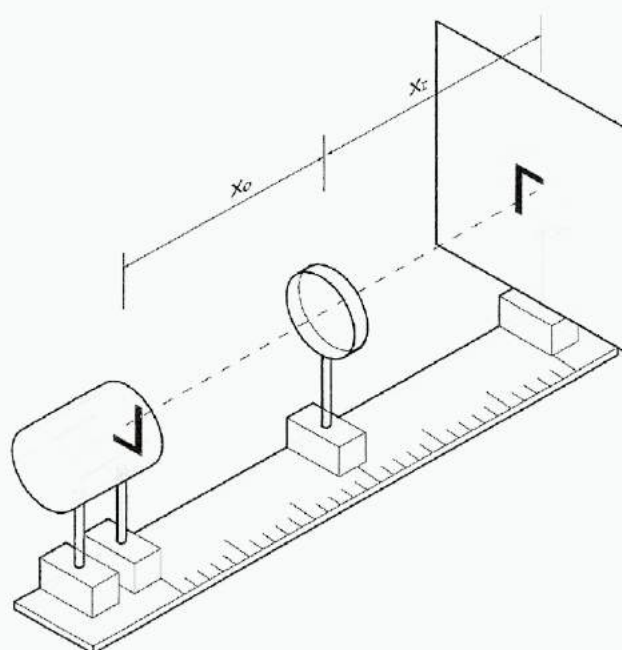


Figura 10. Esquema experimental para o sistema objeto — uma lente
— plano imagem: fonte, lente delgada, anteparo

Com o auxílio da régua medimos as posições X_I e X_O para as quais obtemos uma imagem nítida do objeto no plano imagem. Observe que a imagem do objeto (na ilustração o objeto é a letra “L”) aparece invertida no anteparo.

O sistema experimental (Figura 10) consiste de uma lente de distância focal f , que é deslocada até se obter uma imagem nítida do objeto. Fazemos três experiências utilizando em cada uma, uma lente com distância focal diferente ($f_1 = 50 \text{ mm}$, $f_2 = 100 \text{ mm}$, $f_3 = 200 \text{ mm}$); isso nos

permite construir três gráficos e compará-los. Conforme a posição do plano imagem onde a imagem é formada, a posição da lente é modificada até a obtenção de uma nova imagem. O objeto está fixo na fonte. Através desse procedimento obtemos os dados experimentais para a construção de gráficos relacionando o tamanho da imagem com a posição do plano imagem. A relação funcional obtida, entre os tamanhos da imagem e as distâncias da imagem à lente, é linear. A partir da análise dos coeficientes angular e linear dos gráficos estabelecemos a equação dos pontos conjugados sem nenhum conhecimento prévio da equação de Gauss.

4.3 Análise dos resultados para o sistema objeto - uma lente—plano imagem.

A análise dos gráficos mostra que as três experiências, embora tenham sido feitas utilizando-se lentes de distâncias focais diferentes, apresentam alguns pontos em comum:

- (i) Quando o tamanho da imagem T_i é igual a zero, a reta intercepta o eixo dos x em um ponto particular. Esta é, de fato, a definição do ponto focal f : aquela posição para a qual o tamanho da imagem será zero;
- (ii) Os gráficos das três lentes apresentam o mesmo coeficiente linear. Neste caso, extrapolando as retas, o gráfico sugere que, quando o plano imagem estiver sobre a lente, haverá formação de imagem e que ela é não invertida e igual ao tamanho do objeto.

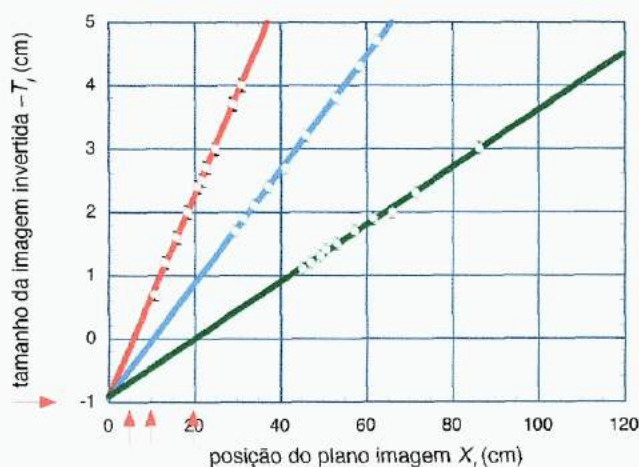


Figura 11. Gráfico: tamanho da imagem invertida $-T_i$ (cm) vs. posição do plano imagem X_i (cm). As cores correspondem as distâncias focais 50 mm (vermelho), 100 mm (azul) e 200 mm (verde).

Observa-se, nesta figura, que a relação entre o tamanho da imagem invertida do objeto ($-T_i$) depende linearmente da distância X_i entre a lente e o plano imagem. A seta horizontal em vermelho indica que o coeficiente linear corresponde ao tamanho original (T_o) do objeto. As

setas verticais em vermelho indicam as distâncias $X_I = f$, onde o tamanho da imagem (T_I) é zero.

Do exposto acima, concluímos que a medida do coeficiente linear das três retas é exatamente o tamanho do objeto, que é o parâmetro comum a todas as experiências. Usando a análise funcional obtemos:

$$-T_i = -T_o + \left(\frac{T_o}{f}\right)I, \quad (5)$$

Definindo o aumento linear A da imagem como

$$A = \frac{-T_i}{T_o}, \quad (6)$$

obtemos a dependência entre o aumento linear da imagem e a distância lente-plano imagem:

$$A = 1 + \frac{X_I}{f}. \quad (7)$$

Podemos ainda observar das medidas que a distância do objeto à lente X_O também depende da distância lente-plano imagem X_I . Este comportamento está ilustrado na Figura 12.

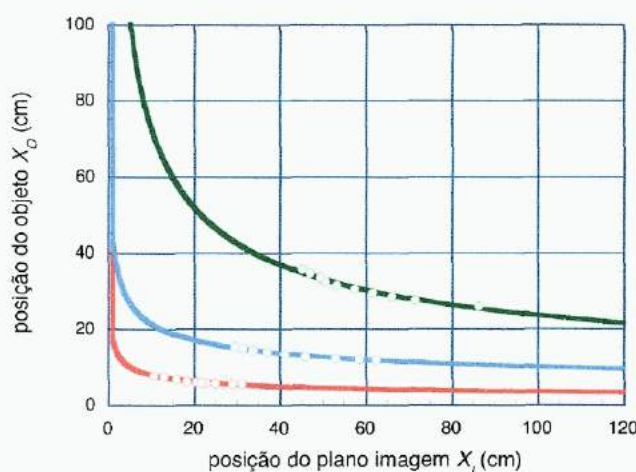


Figura 12. Gráfico: posição do objeto $-X_o$ (cm) versus posição do plano imagem X_I (cm). As cores correspondem as distâncias focais 50 mm (vermelho), 100 mm (azul) e 200 mm (verde).

Observa-se, nesta figura, que a posição do objeto X_O não depende linearmente da distância X_I correspondente entre a lente e o plano imagem. As linhas são guias para mostrar que quanto mais o plano imagem se aproxima da lente (X_I diminui), mais temos que afastar o

objeto da lente para produzir uma imagem nítida (X_O aumenta). O sinal menos corresponde ao fato de medirmos posição do objeto em relação à lente.

As linhas contínuas na figura representam somente um guia visual, sugerindo que para formar-se a imagem em $X_I = 0$ teríamos o objeto no infinito. Observamos ainda que mais o plano imagem se aproxima da lente (X_I diminui), mais temos que afastar o objeto da lente para produzir uma imagem nítida (X_O aumenta). Este comportamento tipo hiperbólico observado na figura nos sugere construir um gráfico do produto $-X_I X_O$ ou da razão $-X_I/X_O$ em função de X_I para tentarmos estabelecer uma expressão matemática entre as grandezas X_O e X_I .

A relação entre o produto $-X_I X_O$ e a posição lente-plano imagem X_I está representada na Figura 13. As linhas são novamente somente guias para os olhos. Podemos observar que para lentes de distância focal pequena a relação é essencialmente linear mas para lentes de distância focal maiores a relação entre $-X_I X_O$ e X_I deve se afastar da linearidade por razões físicas: Para $X_I = 0$, o plano imagem está sobre a lente e devemos ter o produto $-X_I X_O = 0$.

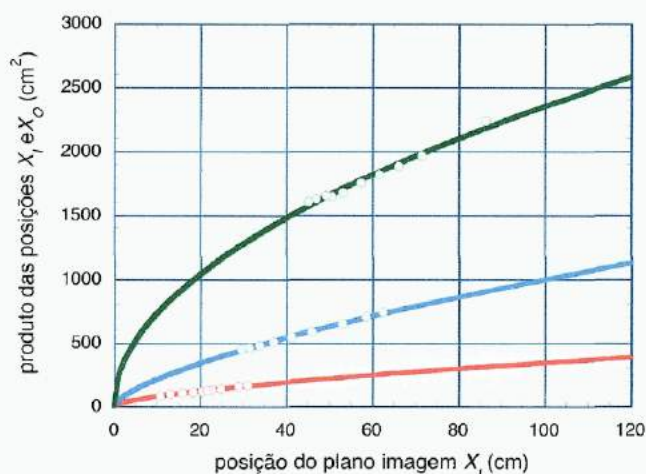


Figura 13. Gráfico do produto da posição da imagem $-X_I$ pela posição do objeto X_O (cm) vs. posição do plano imagem X_I (cm). As cores correspondem as lentes de distâncias focais 50 mm (vermelho), 100 mm (azul) e 200 mm (verde).

A relação entre a razão $-X_I/X_O$ e a posição lente-plano imagem X_I está representada na Figura 14. As linhas são novamente somente guias visuais. Podemos observar que a relação é essencialmente linear para todas as lentes empregadas no experimento. Mais ainda, para $X_I = f$, o plano imagem está sobre a focal da lente e obtemos a razão $-X_I/X_O = 0$.

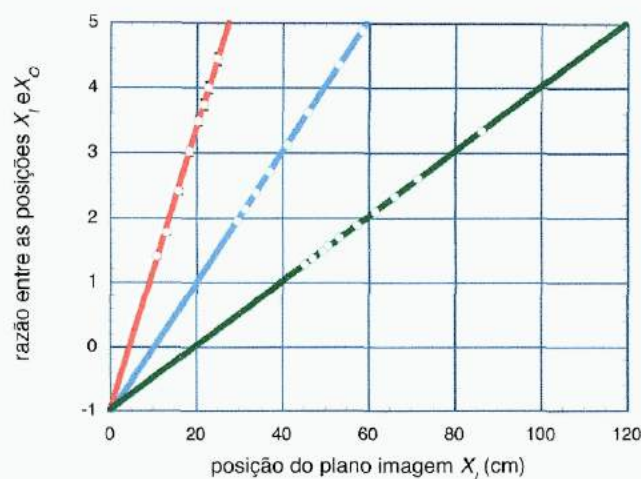


Figura 14. a figura representa a relação entre a razão X_I/X_O e a posição lente- plano imagem X_I .

A comparação da Figura 11 com a Figura 14 é inevitável.

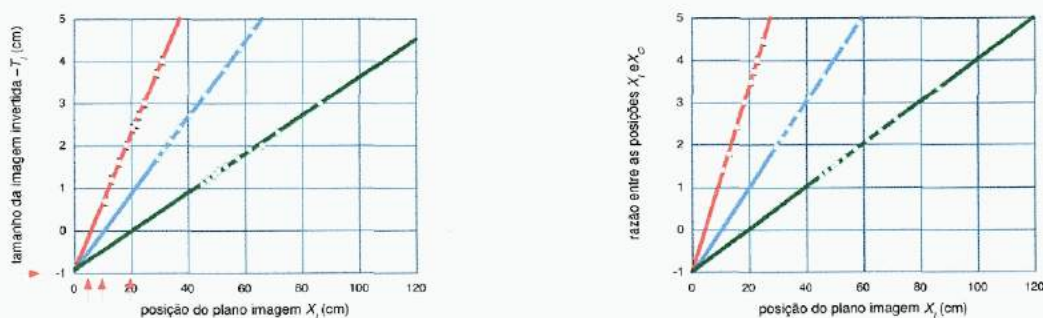


Figura 15. Nesta figura observa-se as similaridades entre o gráfico do tamanho da imagem invertida $-T_I$ vs. posição do plano imagem X_I . E o gráfico da relação entre a razão X_I/X_O e a posição lente- plano imagem X_I .

4.4 A lei de Gauss

Podemos observar da Figura 15 que a relação entre X_I/X_O e X_I é linear para todas lentes empregadas no experimento. Observamos também que em $X_I = f$, o plano imagem está sobre a focal da lente e obtemos a razão $-X_I/X_O = 0$, comportamento similar ao do aumento linear

da imagem. Curiosamente, quando o plano imagem está sobre a lente ($X_i = 0$), a razão X_i/X_o não é nula. Do gráfico, observamos ainda que a dependência funcional é similar ao do aumento linear da imagem com a distância lente plano imagem.

$$-\frac{X_i}{X_o} \approx 1 + \frac{X_i}{f}. \quad (8)$$

Esta equação pode ser reescrita na forma

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{X_i} - \frac{1}{X_o}. \quad (9)$$

Fazendo-se $X_i = I$ e $X_o = -O$, obtemos a equação dos pontos conjugados, Eq. (2), na sua forma tradicional:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{I} + \frac{1}{O}. \quad (10)$$

As vantagens da Eq. (9) sobre a Eq. (10) são evidentes. Da Eq. (9) fica bastante clara a convenção de sinais definindo a posição do plano imagem e do objeto em relação à lente e onde se encontra a posição da focal da lente f . Este problema, que não é tão relevante no caso de um sistema de uma só lente, vai ser muito mais importante quando considerarmos sistemas formados por mais de uma lente.

Um exercício interessante é reescrever a Eq. (9) na forma

$$V = x + y, \quad (11)$$

onde fizemos

$$V = \frac{1}{f}; \quad x = \frac{1}{X_i}; \quad y = \frac{1}{X_o}, \quad (12)$$

obtemos a equação de uma reta $y = V - x$, de coeficiente linear V e coeficiente angular negativo de módulo igual a unidade, que está representada no gráfico da Figura 16.

Desta forma, a lei de Gauss é obtida sem necessidade de nenhum conhecimento prévio das leis da reflexão e refração. Essa expressão $V = 1/f$ é apresentada na literatura como vergência (unidade: Dioptria, m^{-1}). Se $V < 0$, a lente é divergente; se $V > 0$, a lente é convergente.

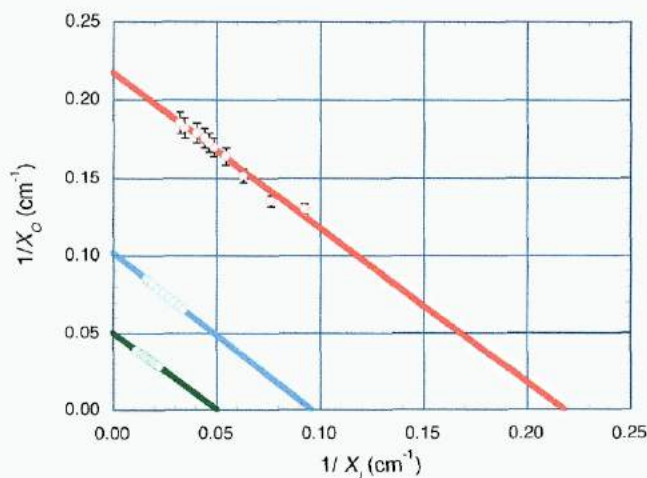


Figura 16. Esta figura representa a relação entre $1/X_0$ e $1/X_i$. Podemos observar que a relação é linear para todas lentes empregadas no experimento, satisfazendo a Lei de Gauss.

4.5 O método de Bessel

Vimos da Figura 11, que a reta prevê novas posições do plano imagem onde a imagem será nítida, e que a Eq. (9) fica invariante se trocarmos as posições do objeto e do plano imagem. A única consequência é a alteração do aumento linear do tamanho da imagem do objeto. Portanto, a Eq. (9) sugere que, para uma distância fixa D entre o objeto e o plano imagem $D = X_i - X_o$, e para uma dada lente de distância focal f , devem existir duas posições do plano imagem $X_i = I$ e $-X_o = O$ para as quais teremos uma imagem nítida. De fato, podemos então reescrever a Eq. (9) na forma:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{I} + \frac{1}{O} = \frac{1}{X_i} + \frac{1}{D - X_i}. \quad (13)$$

Resolvendo a equação acima para X_i , obtemos:

$$X_i^+ = \frac{D}{2} \left[1 + \left(1 - \frac{4f}{D} \right)^{1/2} \right], \quad (14)$$

e

$$X_i^- = \frac{D}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{4f}{D} \right)^{1/2} \right]. \quad (15)$$

Ou seja, a partir da posição média entre objeto e imagem, $D/2$, existem duas posições, uma mais próxima ao objeto, X_i^+ , e outra mais próxima ao plano imagem, X_i^- , para as quais a imagem será nítida sobre o plano imagem.

Deste modo, podemos definir a distância característica $L = X_i^+ - X_i^- = O - I$ e, combinando-se as Eqs. (14) e (15) obtemos

$$D - L = 2I = D \left[1 - \left(1 - \frac{4f}{D} \right)^{1/2} \right] \quad (16)$$

e

$$D + L = 2O = D \left[1 + \left(1 - \frac{4f}{D} \right)^{1/2} \right]. \quad (17)$$

Multiplicando-se as Eqs. (19) e (20), obtemos

$$\frac{(D-L)(D+L)}{D^2} = \frac{4f}{D}. \quad (18)$$

Reescrevendo a Eq. (18) para determinar a focal da lente f , obtemos

$$f = \frac{(D-L)(D+L)}{4D} = \frac{D^2 - L^2}{4D}, \quad (19)$$

que é a expressão de Bessel para a determinação da distância focal f de um sistema de lentes.

4.6 O método de Abbe

Comparando-se a Eq. (8) com a Eq. (7) podemos concluir que o módulo do aumento linear A da imagem do objeto pode ser dado por:

$$|A| = \frac{T_i}{T_o} = \frac{X_i}{X_o} = \frac{I}{O}, \quad (20)$$

Podemos, ainda, verificar este resultado a partir do gráfico da Figura 17. Estão presentes no gráfico os dados obtidos para as três lentes empregadas.

Percebe-se claramente na Figura 17 que, para o banco óptico empregado, a relação definida pela Eq. (20) não é plenamente satisfeita pois a relação entre estas grandezas é linear mas o coeficiente angular é ligeiramente maior do que a unidade. Isto se deve a diferentes fatores experimentais, como a qualidade do banco óptico, por exemplo, ou quando a lente deixa de ser considerada delgada (sua espessura é comparável as medidas de O ou I). Entretanto podemos de fato, escrever que em uma margem de erro da ordem de 10%, temos que

$$|A| = \frac{T_i}{T_o} \approx \frac{X_I}{X_O}. \quad (21)$$

Evidentemente, fica a cargo do professor decidir o quão detalhado deve ser o trabalho com seus alunos. Em nossa opinião, para turmas de Ensino Médio uma abordagem semi-quantitativa estabelecendo a linearidade é o bastante pois neste primeiro contato dos alunos estamos mais interessados nas relações entre os parâmetros e não na realização de medidas de acurácia elevada.

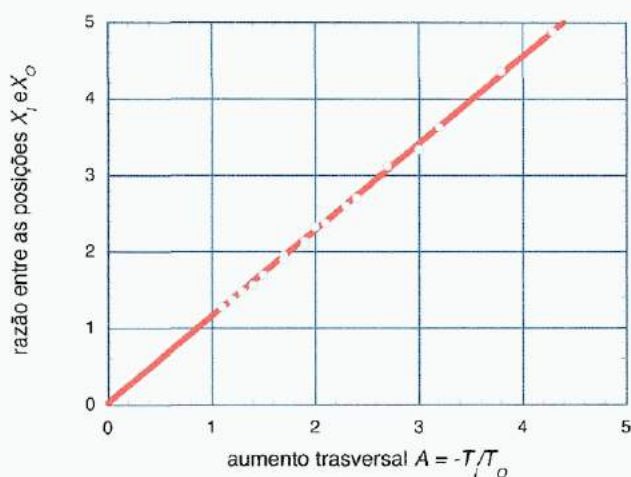


Figura 17. Gráfico representando a razão entre as posições X_I e X_O para as quais obtemos uma imagem nítida do objeto no plano imagem e o aumento linear obtido deste mesmo objeto neste mesmo plano. Observe que o coeficiente angular é ligeiramente maior que a unidade.

Da relação (21) temos então que

$$\frac{T_I}{T_O} \approx \frac{X_I}{X_O}, \quad (22)$$

ou, ainda,

$$\frac{T_I}{T_O} \frac{X_O}{X_I} \approx 1, \quad (23)$$

A relação acima pode ser reescrita na forma

$$\frac{T_I/X_I}{T_O/X_O} \approx 1. \quad (24)$$

Observemos que o numerador e o denominador da razão do lado esquerdo da Eq. (24) tem os seguintes significados geométricos:

$$\frac{T_I}{X_I} = \operatorname{tg}\theta_I, \quad (25)$$

e

$$\frac{T_O}{X_O} = \operatorname{tg}\theta_O, \quad (26)$$

onde θ_I é o ângulo definido pelo triângulo retângulo construído a partir do tamanho da imagem e a posição do plano imagem e θ_O é o ângulo definido pelo triângulo retângulo construído a partir do tamanho do objeto e a posição do plano objeto. Podemos então definir

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg}\theta_I}{\operatorname{tg}\theta_O} \approx \frac{T_I/X_I}{T_O/X_O}, \quad (27)$$

como razão de convergência do sistema óptico. Para ângulos pequenos,

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg}\theta_I}{\operatorname{tg}\theta_O} \approx \frac{\theta_I}{\theta_O}, \quad (28)$$

razão de convergência do sistema óptico descreve o aumento angular na formação da imagem.

Observemos mais uma vez que em nenhum momento empregamos a propagação retilínea da luz na construção dos gráficos. Esta conclusão aparece naturalmente quando representamos geometricamente as informações obtidas a partir das diferentes figuras.

A Figura 17 ilustra esta representação geométrica, a partir das informações do gráfico da Figura 16. Quando aproximamos o plano imagem da lente, devemos afastar dela o objeto para continuarmos a observar uma imagem nítida no plano imagem. Quando $X_I = f$, então temos $T_I = 0$. Quando $X_I = -X_O$, então temos o plano imagem a uma distância da lente igual a $D/2$ e um aumento linear da imagem igual a unidade: $T_I = -T_O$. Portanto, isto ocorrerá para uma distância D entre objeto e imagem igual a $4f$:

$$-\frac{X_I}{X_O} = 1, \quad (29)$$

e

$$-\frac{X_I}{X_O} = 1 + \frac{X_I}{f}. \quad (30)$$

Substituindo-se a Eq. (29) na Eq. (30) obtemos $X_I = 2f$ e, por conseqüência,

$$D = X_I - X_O = 2X_I = 4f. \quad (31)$$

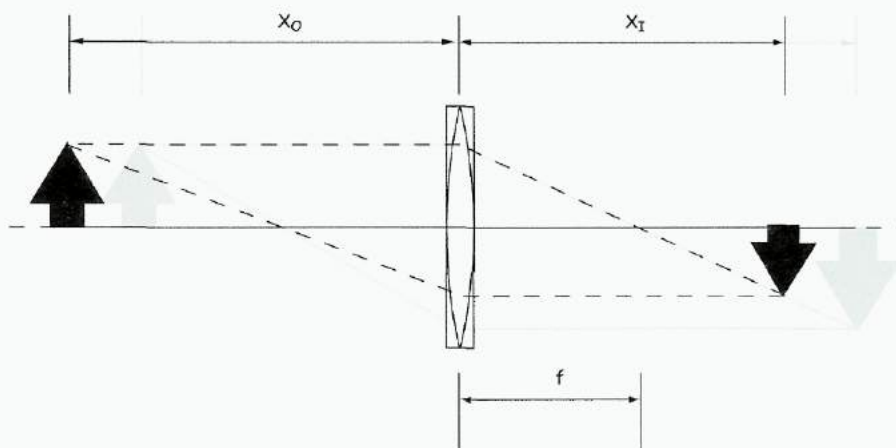
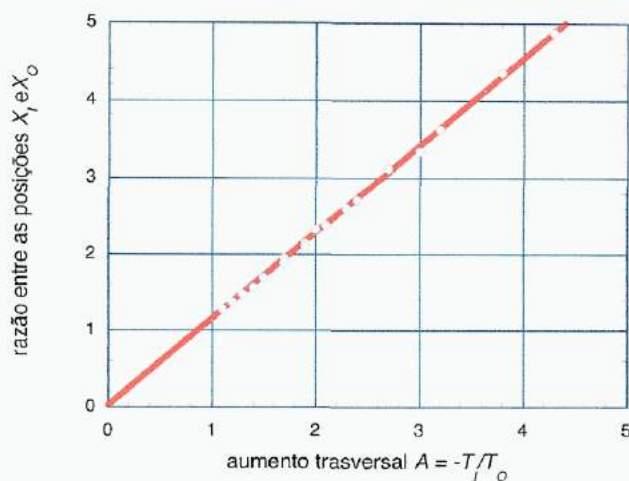


Figura 18. As informações do gráfico reunidas na Figura 17 podem ser representadas geometricamente, como indicado na figura acima. As posições mais claras correspondem à imagem maior. Quanto mais aproximamos o plano imagem da lente, mais devemos afastar dela o objeto para obter-se uma imagem nítida. Quando $X_I = f$, então temos $T_I = 0$.

Podemos também, usando a Eq. (7), obter a expressão de Abbe para a determinação da focal f de sistema de lentes. Da Eq. (7) podemos determinar duas posições do plano imagem para as quais teremos dois aumentos lineares diferentes:

$$A_1 = 1 + \frac{X_{I1}}{f}, \quad (32)$$

e

$$A_2 = 1 + \frac{X_{I2}}{f}, \quad (33)$$

Combinado-se as Eqs. (19) e (20), obtemos

$$f = \frac{X_{I2} - X_{I1}}{A_2 - A_1}. \quad (34)$$

A expressão acima difere da tradicional, dada pela Eq. (1), porque usamos as posições do plano imagem em lugar das posições do objeto.

Observamos que tanto a Eq. (20) quanto a Eq. (34) foram obtidas a partir da análise dos dados experimentais, sem conhecimento prévio das propriedades de reflexão e refração usualmente empregadas para a determinação teórica dos resultados de Gauss, Bessel e Abbe.

4.2 Método experimental para o sistema com duas lentes acopladas.

Vamos inicialmente empregar somente uma lente, como descrito na Figura 19.

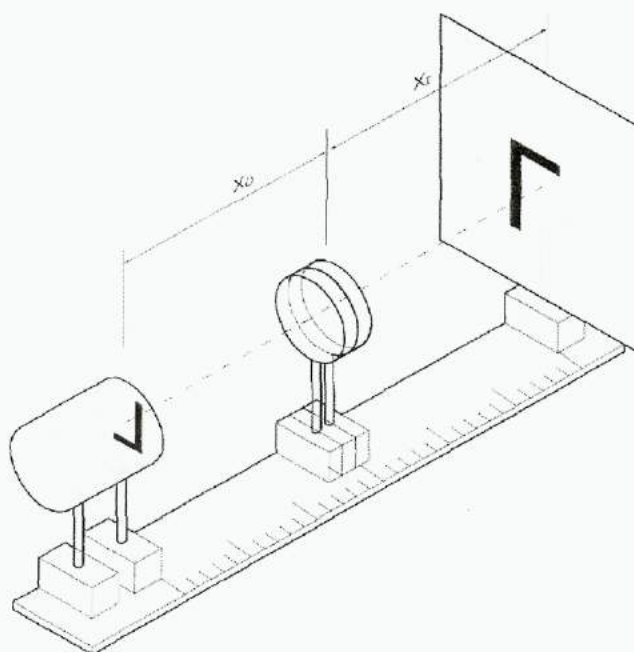


Figura 19. Esquema experimental para o sistema objeto — duas lentes acopladas — plano imagem.

Com o auxílio da régua medimos as posições X_I e X_O para as quais se obtém uma imagem nítida do objeto no plano imagem, estando as lentes acopladas. Para lentes convexas, a imagem do objeto (na ilustração o objeto é a letra "L") aparece invertida. No plano superior direito, temos o plano imagem e no canto inferior esquerdo temos uma fonte de luz iluminando o objeto.

O sistema experimental (Figura 19) consiste de duas lentes acopladas de distância focal f , de valor ignorado pelo aluno, que são deslocadas em conjunto até se obter uma imagem nítida do objeto. Fazemos três experiências utilizando em cada uma, duas lentes de mesma distância focal ($f_1 = 50 \text{ mm}$, $f_2 = 100 \text{ mm}$, $f_3 = 200 \text{ mm}$); isso nos permite construir três gráficos e compará-los. De forma equivalente ao procedimento na primeira parte do trabalho, fixamos a posição do objeto em relação à lente e, em seguida, procuramos a posição do plano imagem em relação à lente até a obtenção de uma imagem nítida. O objeto está fixo na fonte. Através desse procedimento obtemos os dados experimentais para a construção de gráficos relacionando o tamanho da imagem com a posição do plano imagem. A relação funcional obtida, entre os tamanhos da imagem e as distâncias da imagem à lente, é linear. A partir da análise dos coeficientes angular e linear dos gráficos estabelecemos a equação dos pontos conjugados sem nenhum conhecimento prévio da equação de Gauss.

4.7 Análise dos resultados para o sistema objeto - duas lentes—plano imagem.

Conforme a posição do plano imagem onde a imagem é formada, a posição da lente é modificada até a obtenção de uma nova imagem. Através desse procedimento obtemos os dados experimentais para a construção de gráficos relacionando o tamanho da imagem com a posição do plano imagem. Os gráficos mostram que a relação funcional obtida entre os tamanhos da imagem e as distâncias da imagem à lente é linear. A partir da análise dos coeficientes angular e linear dos gráficos foi deduzida a equação dos pontos conjugados sem conhecimento prévio da equação de Gauss.

A análise dos gráficos mostra que as três experiências com duas lentes acopladas de distâncias focais iguais (primeiro sistema: $f = 50 \text{ mm}$; segundo sistema: $f = 100 \text{ mm}$; terceiro sistema: $f = 200 \text{ mm}$), apresentam alguns pontos em comum, que podem ser observados diretamente na Figura 20.

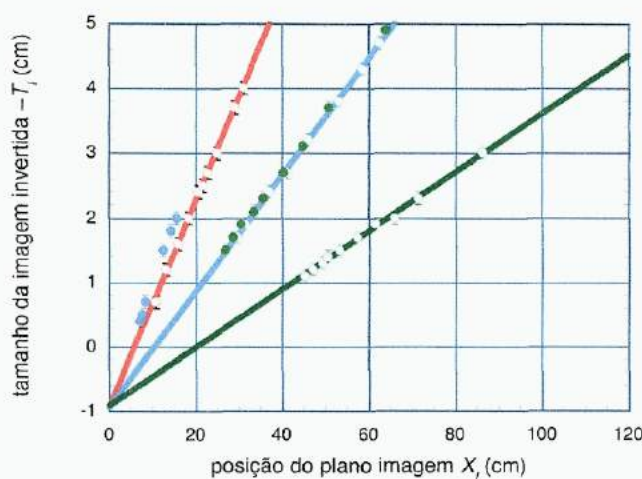


Figura 20. Gráfico com os resultados do experimento utilizando sistema de duas lentes acopladas de mesma distância focal (círculos cheios) sobrepostos aos resultados do experimento com a utilização de uma lente (círculos vazados), para lentes de distâncias focais diferentes. As cores correspondem as distâncias focais 50 mm (vermelho), 100 mm (azul) e 200 mm (verde).

Da Figura 20, observamos que, de forma similar ao experimento com uma lente, quando o tamanho da imagem T_I é igual a zero, a reta intercepta o eixo dos x em um ponto particular. Esta é, de acordo com a definição da equação dos pontos conjugados, a posição do ponto focal f : aquela posição para a qual o tamanho da imagem será nulo.

Os gráficos dos três conjuntos de lentes apresentam o mesmo coeficiente linear (-1). Neste caso, o gráfico sugere que, quando o plano imagem estiver sobre a lente, haverá formação de imagem e que ela é não invertida e igual ao tamanho do objeto. Portanto, podemos escrever que toda a análise anterior também pode ser aplicada para o sistema de duas lentes acopladas:

$$-T_i = -T_o + \left(\frac{T_o}{f_E}\right)I, \quad (35)$$

$$-\frac{X_I}{X_O} = 1 + \frac{X_I}{f_E}, \quad (36)$$

$$f_E = \frac{(D-L)(D+L)}{4D} = \frac{D^2 - L^2}{4D} \quad (37)$$

e

$$f_E = \frac{X_{I2} - X_{I1}}{A_2 - A_1}. \quad (38)$$

Analisando o gráfico da Figura 20 que sobrepõe os dados obtidos nas combinações de duas lentes de mesma distância focal (círculos cheios) e os dados obtidos com a utilização de uma lente (círculos vazados), verificamos que os pontos dos dados para o sistema de lentes acopladas coincidem com o gráfico obtido para uma lente, e que essa lente tinha a metade da distância focal da lente utilizada na combinação. Além disso, superpondo-se esses dois gráficos, os pontos obtidos pela combinação de duas lentes coincidem com a região do gráfico de uma lente, onde não se conseguia obter nenhuma leitura.

Podemos concluir ainda que considerando-se apenas as curvas produzidas no gráfico (Figura 20), não podemos dizer se o sistema de lentes considerado é composto por uma ou duas lentes acopladas. Isto significa que um sistema de uma lente equivalente ao sistema de duas lentes acopladas. Portanto, usando apenas os resultados obtidos, podemos dizer que a combinação de duas lentes acopladas e de mesma distância focal f é igual a uma única lente de focal equivalente f_E , igual a metade da distância focal das lentes utilizadas:

$$f_E = \frac{f}{2}. \quad (39)$$

Deste modo, a vergência V_{2L} do sistema de duas lentes é maior do que o sistema de uma lente:

$$V_{2L} = \frac{1}{f_E} = \frac{2}{f} = 2V. \quad (40)$$

Portanto, o aumento linear transversal A será maior para uma mesma distância X_I ao sistema de lentes.

Observe-se ainda que o método de Bessel ou de Abbe nos permite determinar a focal f de uma lente desconhecida a partir da determinação da focal equivalente f_E .

5. Conclusões

A combinação entre o trabalho experimental e teórico pode ser uma estratégia na tentativa de motivar os alunos, despertá-los para a ciência ao revelar, para eles, como ela é trabalhada. Tentamos através da óptica geométrica mostrar que o ensino de física pode ser conduzido de forma diferente. E mais, o trabalho experimental passa a compartilhar o papel principal com a aula expositiva no aprendizado.

Espera-se estimular os alunos com os experimentos, e, desta forma, permitir que eles vejam no processo de aprendizagem algo prazeroso, intrigante e desafiador. O experimento sugerido mostrou estar em acordo com as exigências de um laboratório didático devido a vários fatores. Entre eles temos:

- O baixo custo empregado para o desenvolvimento da experiência;
- O tempo gasto com a aquisição de dados pode ser reduzido. Após representar algumas medidas nos gráficos com os alunos o professor pode apresentar em seguida os mesmos gráficos com uma quantidade maior de dados;
- Que fenômenos podem ser descobertos pelos alunos, e não simplesmente apresentados para eles;
- Levar para a sala de aula a Física como uma ciência de caráter experimental;

Outro ponto de registro é a proposta de interdisciplinaridade entre professores de Física e de outras disciplinas, apontando alternativas para uma prática docente interligada e contextualizada. Neste trabalho o professor de Matemática, por exemplo, trabalharia os conceitos de função, construção e análise de gráficos. O professor de História, por sua vez, poderia discutir as implicações históricas envolvendo o fenômeno físico considerado.

Por fim, o tema Óptica tem uma riqueza extraordinária de conteúdo e abordagens que por si só já desperta a curiosidade do aluno sobre os diversos fenômenos ópticos se adequarmos nosso planejamento de curso em uma visão mais integrada e contextualizada de Ensino.

Parte dos resultados desta monografia foram apresentados, em 2005, na XXVI e XXVII Jornada de Iniciação Científica (JIC) — Instituto de Física — UFRJ [22,23] e no XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física (SNEF) — Rio de Janeiro — CEFET [24].

Apêndice

Neste Apêndice apresentamos os dados obtidos por nós e empregados na a construção dos gráficos.

Tabela 1. Dados para uma lente de distância focal $f = 50$ mm.

T_1	X_0	X_1	$1/X_1$	$1/X_0$	$\delta(1/X_0)$	$\delta(1/X_1)$	$X_1 X_0$	X_1/X_0	$\delta(X_1 X_0)$	$\delta(X_1/X_0)$
(cm)	(cm)	(cm)	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^2)		(cm^2)	
2.0	6.1	18.4	0.0540	0.164	0.005	0.0005	112	3.016	2	0.06
1.6	6.6	15.9	0.0630	0.152	0.004	0.0007	104	2.40	2	0.05
1.2	7.4	13.1	0.0760	0.135	0.003	0.0011	96	1.77	2	0.04
0.7	7.7	10.8	0.0930	0.130	0.003	0.0017	83	1.40	2	0.03
2.4	5.9	20.6	0.0490	0.169	0.005	0.0004	121	3.49	3	0.08
2.7	5.7	22.8	0.0440	0.175	0.006	0.0003	129	4.00	3	0.09
2.5	5.8	21.7	0.0460	0.172	0.005	0.0004	125	3.74	3	0.08
3.0	5.6	24.9	0.0400	0.179	0.006	0.0003	139	4.44	3	0.1
3.7	5.5	29.0	0.0340	0.182	0.006	0.0002	159	5.27	3	0.1
4.0	5.4	31.1	0.0320	0.185	0.006	0.0002	167	5.75	4	0.1
2.0	6.1	18.4	0.0540	0.164	0.005	0.0005	112	3.01	2	0.06

Tabela 2. Dados para uma lente de distância focal $f = 100$ mm.

T_1	X_0	X_1	$1/X_1$	$1/X_0$	$\delta(1/X_0)$	$\delta(1/X_1)$	$X_1 X_0$	X_1/X_0	$\delta(X_1 X_0)$	$\delta(X_1/X_0)$
(cm)	(cm)	(cm)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ²)		(cm ²)	
4.7	11.8	62.5	0.0160	0.085	0.001	0.0005	737	5.29	7	0.05
4.3	12.0	58.5	0.0170	0.083	0.001	0.0005	702	4.87	7	0.04
3.8	12.2	53.1	0.0190	0.082	0.001	0.0005	647	4.35	6	0.04
3.2	12.7	46.0	0.0220	0.079	0.001	0.0005	584	3.62	5	0.03
2.7	13.2	41.2	0.0240	0.076	0.001	0.0005	543	3.12	5	0.03
2.4	13.7	37.1	0.0270	0.073	0.001	0.0005	508	2.70	5	0.02
2.1	14.2	33.8	0.0300	0.070	0.001	0.0005	479	2.38	4	0.02
1.9	14.7	31.4	0.0320	0.068	0.001	0.0005	461	2.13	4	0.02
1.7	15.2	29.6	0.0340	0.066	0.001	0.0005	449	1.94	4	0.01
4.7	11.8	62.5	0.0160	0.085	0.001	0.0005	737	5.29	7	0.05
4.3	12.0	58.5	0.0170	0.083	0.001	0.0005	702	4.87	7	0.05

Tabela 3. Dados para uma lente de distância focal $f = 200$ mm.

T_1	X_0	X_1	$1/X_1$	$1/X_0$	$\delta(1/X_0)$	$\delta(1/X_1)$	$X_1 X_0$	X_1/X_0	$\delta(X_1 X_0)$	$\delta(X_1/X_0)$
(cm)	(cm)	(cm)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ⁻¹)	(cm ²)		(cm ²)	
3.0	25.9	86.3	0.0116	0.0386	0.0003	0.0001	2235	3.33	11	0.01
2.3	27.5	71.5	0.0140	0.0364	0.0003	0.0001	1966	2.60	9	0.01
2.0	28.5	66.1	0.0151	0.0351	0.0002	0.0001	1883	2.31	9	0.01
1.9	29.5	61.6	0.0162	0.0339	0.0002	0.0001	1817	2.08	9	0.01
1.7	30.5	57.4	0.0174	0.0328	0.0002	0.0001	1750	1.88	8	0.009
1.5	31.5	53.2	0.0188	0.0317	0.0002	0.0001	1675	1.68	8	0.008
1.4	32.5	50.6	0.0198	0.0308	0.0002	0.0001	1644	1.55	8	0.007
1.3	33.5	49.3	0.0203	0.0299	0.0002	0.0001	1651	1.47	8	0.007
1.2	34.5	47.1	0.0212	0.0290	0.0002	0.0001	1624	1.36	8	0.007
1.1	35.5	45.2	0.0221	0.0282	0.0002	0.0001	1604	1.27	8	0.006

Tabela 4. Dados para duas lentes de distância focal $f = 100$ mm.

T_i	X_0	X_i	$1/X_i$	$1/X_0$	$\delta(1/X_0)$	$\delta(1/X_i)$
(cm)	(cm)	(cm)	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})
0.7	12.2	8.4	0.119	0.082	0.001	0.002
1.5	8.1	12.5	0.080	0.123	0.003	0.001
1.8	7.6	14.2	0.070	0.131	0.003	0.001
0.5	14.1	7.7	0.129	0.070	0.001	0.003
2.0	7.2	15.6	0.0641	0.138	0.003	0.0008
0.4	15.6	7.2	0.138	0.064	0.001	0.003
0.7	12.2	8.4	0.119	0.082	0.001	0.002
1.5	8.1	12.5	0.080	0.123	0.003	0.001
1.8	7.6	14.2	0.070	0.131	0.003	0.001
0.5	14.1	7.7	0.129	0.070	0.001	0.003
2.0	7.2	15.6	0.0641	0.138	0.003	0.0008

Tabela 5. Dados para duas lentes de distância focal $f = 200$ mm.

T_i	X_0	X_i	$1/X_i$	$1/X_0$	$\delta(1/X_0)$	$\delta(1/X_i)$
(cm)	(cm)	(cm)	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})	(cm^{-1})
6.2	11.2	78.6	0.0127	0.089	0.002	0.0001
3.7	12.0	50.7	0.0197	0.083	0.001	0.0001
4.9	11.5	64.0	0.0156	0.087	0.001	0.0001
3.1	12.5	44.7	0.0224	0.080	0.001	0.0001
2.7	13.0	40.3	0.0248	0.076	0.001	0.0001
2.3	13.5	35.7	0.0280	0.074	0.001	0.0002
2.1	14.0	33.5	0.0299	0.071	0.001	0.0002
1.9	14.5	30.5	0.0328	0.069	0.001	0.0002
1.7	15.0	28.6	0.0350	0.0667	0.0009	0.0002
1.5	15.5	26.8	0.0373	0.0645	0.0008	0.0003
6.2	11.2	78.6	0.0127	0.089	0.002	0.0001

Referências

- [1] Chakravarti, S. e Siegel, P. B., “Visualizing the thin-lens formula”, *The Physics Teacher*, 39, 9 (2001) 342-343.
- [2] Maheswaranathan, P., “Revisiting ‘Visualizing the thin-lens formula’”, *The Physics Teacher*, 39, 11 (2001) 452.
- [3] Gaspar, A., *Física 2*, Editora Ática, 2001.
- [4] Paraná, D., *Física para o Ensino Médio*, volume único, Editora Ática, 2005.
- [5] Ramalho, N. T., *Os Fundamentos da Física 2*, Editora Moderna, 2005.
- [6] Revista Época, outubro 2007.
- [7] Brasil 1999, Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM).
- [8] McEnvoy, J. P. e O. Zaratte, *Introducing quantum mechanics*, Icon Books, Londres, 1996, p. 7.
- [9] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – 9.394/96 (LDB).
- [10] Filho, M. M. E. S. e Soares, V., XXV Jornada de Iniciação Científica (JIC) — Instituto de Física — UFRJ, Outubro de 2003.
- [11] Santos, R. P., “A câmara escura no Ensino Médio: Uma proposta para ensinar óptica geométrica”, trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Física, IF-UFRJ, Dezembro de 2004.
- [12] da Costa, B. H. M., “Uma aula sobre o efeito fotoelétrico para o Ensino Médio”, trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Física, IF-UFRJ, Julho de 2005.
- [13] Huizinga, Johan, *Homo ludens: a study of the play element in culture*, Beacon Press, Londres, 1950.
- [14] Garbi, G. G., *A rainha das Ciências*, Editora Livraria da Física.
- [15] A biografia dos personagens da Óptica geométrica foi resumida a partir das informações em Gillispie, C. C., *Dictionary of Scientific Biographies*, Princeton University Press, 1981; do sítio eletrônico para a história da ciência da School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/>; e da enciclopédia Britannica Online: <http://www.britannica.com>.
- [16] As imagens dos personagens envolvidos na história Óptica geométrica foram obtidas nas enciclopédias eletrônicas Britannica Online: <http://www.britannica.com>; e Wikipedia: <http://en.wikipedia.org/wiki/>.
- [17] Lindberg, D. C., *Theories of Vision from at-Kindt to Kepler*, University of Chicago Press, Chicago, 1976, p. 1-17.
- [18] Lindberg, D. C., “Medieval islamic achievement in Optics”, *Optics & Photonics News*, 7 (2003) 30-35.
- [19] Wilk, Stephen R., “Claudius Ptolemy’s law of refraction”, *Optics & Photonics News*, 10 (2004) 14-17.

- [20] Hockney, D., *O conhecimento secreto: Redescobrimdo as técnicas perdidas dos grandes mestres*, Cosac&Naify, 2001.
- [21] Molesini, G., "The telescopes of seventeenth-century Italy", *Optics & Photonics News*, 6 (2003) 35-41.
- [22] Barbosa, D. F., Telmo, V. e Soares, V., XXVI Jornada de Iniciação Científica (JIC) — Instituto de Física — UFRJ, Outubro de 2004.
- [23] Barbosa, D. F., Telmo, V. e Soares, V., XXVII Jornada de Iniciação Científica (JIC) — Instituto de Física — UFRJ, Outubro de 2005.
- [24] Barbosa, D. F., Telmo, V. e Soares, V., XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física (SNEF) — Rio de Janeiro — CEFET, Janeiro de 2005.