UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

PROJETO DE INSTRUMENTAÇÃO PARA O ENSINO DE FÍSICA

UMA AULA SOBRE A CORDA VIBRANTE PARA O ENSINO MÉDIO

Aluno: Marcelo Rodrigues Fernandes

Orientador: Prof. Vitorvani Soares

2007/2

Ficha catalográfica

Fernandes, Marcelo Rodrigues.

Uma Aula sobre a Corda Vibrante para o Ensino Médio, Marcelo Rodrigues Fernandes — Rio de Janeiro: Projeto de Instrumentação para o Ensino de Física — Instituto de Física / UFRJ, 2007

1. Corda Vibrante. 2. Ciência – Ensino Médio. 3. Ondas.

I. Título

Dedicatória

Dedico esse trabalho a minha querida Mãe que sempre sonhou ter um filho formado e que, infelizmente, não pôde ter seu desejo realizado a tempo. A meu pai que sempre me apoiou nos momentos mais cruciais da minha vida e que espero um dia poder retribuí-lo de algum modo.

"Não podes ensinar nada a um homem; podes apenas ajudá-lo a encontrar a resposta dentro dele mesmo". (Galileu Galilei).

Agradecimentos

Ao Professor Vitorvani Soares, que tornou esse trabalho possível. Aos Professores, Regina Célia Arcuri, Alexandre Carlos Tort e Filadelfo Cardoso Santos, com suas criticas e sugestões ajudaram a elevar o nível deste trabalho. Aos amigos - dentre os quais gostaria de destacar Marcos Cabanas Esteves e Michelli Silva de Oliveira – que assim como eu escolheram essa profissão tão importante para o desenvolvimento da sociedade, no entanto tão desvalorizada. Aos Funcionários do Instituto de Física.

ÍNDICE

Resumo

Neste trabalho, preparamos uma aula para o ensino médio sobre ondas estacionárias em uma corda vibrante, a partir da observação direta do fenômeno. O procedimento proposto envolve duas etapas: (i) realização de um experimento em sala de aula, no qual é possível fazer medidas diretas das características de uma corda vibrando de forma harmônica; e (ii) a construção, a partir das observações, de um modelo matemático para descrever o fenômeno observado.

O objetivo deste trabalho é preencher uma das muitas lacunas existentes no ensino de física nas escolas brasileiras, fornecendo uma forma alternativa para a apresentação dos conceitos físicos envolvidos. Através deste trabalho pretendemos mostrar a possibilidade de ensinar um dos conteúdos regulares do ensino médio – no caso, a mecânica ondulatória – utilizando uma experiência feita com os alunos, em sala de aula, envolvendo a formação de ondas estacionárias em uma corda vibrante.

Os livros didáticos de física para o ensino médio, em geral, apresentam os fundamentos teóricos sem desenvolver uma discussão sobre o método científico inerente à construção das teorias na ciência. A experiência realizada é relativamente simples e barata e o procedimento proposto de análise dos dados põe em evidência a força deste método. Partindo da criação de um experimento relativamente simples — e que pode ser realizado em classe —, apresentamos uma forma alternativa de aula em que podemos construir, junto com o aluno, um modelo através do qual é possível determinar a lei de dispersão para um sólido, $\lambda f = v_c = \sqrt{T_0/\rho_L}$.[em que T_0 é a tensão na corda de densidade linear ρ_L e v_c é a velocidade de propagação da onda na corda]

Este procedimento segue as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), pois os alunos têm a oportunidade de observar um fenômeno físico, analisar-lo em sala de aula, sintetizar o seu comportamento através de uma expressão algébrica e, ao mesmo tempo, prover seu significado físico. A discussão da origem experimental das equações é fundamental, já que permite aos alunos compreender o verdadeiro funcionamento da ciência, tornando as equações menos mágicas e enigmáticas.

1. Introdução

A construção da teoria ondulatória é de grande importância para a compreensão dos diferentes fenômenos que nos rodeiam como, por exemplo, a propagação do som e a natureza da luz.

Apesar de origem e natureza diversas (a luz um fenômeno eletromagnético; e o som um fenômeno mecânico), essas manifestações da natureza possuem algo em comum: podem ser descritas por meio de perturbações que se propagam em um meio. A essas perturbações dá-se o nome genérico de ondas.

O estudo da mecânica ondulatória é importante não somente para a compreensão de fenômenos como o arco-íris ou o som de um piano, mas também para o aprimoramento de diversas tecnologias tais como os aparelhos utilizados nos meios modernos de comunicação (o aparelho de radio, a televisão, o telefone, etc), e o uso de radiações ionizantes no diagnóstico e tratamento de fraturas ou doenças (raios-X), possibilitando o surgimento da área da Física Aplicada à Medicina.

Portanto, os conceitos relativos à mecânica ondulatória são muito importantes para a compreensão do mundo a nossa volta. Mais ainda, nos revela que o valor da ciência não se limita em nos fazer compreender a estrutura complexa do mundo que nos rodeia, mas em fornecer os meios que nos permitam aperfeiçoar a produção e melhorar as condições de trabalho e de vida da sociedade.

O uso de experimentos em sala de aula não é algo novo, porém a questão relevante é a maneira como utilizá-los. Segundo Marie-Geneviève Séré (Doutora em Didática da Física, Coordenadora do Grupo de Pesquisa em Didática das Ciências Físicas da Universidade de Paris Sud -XI de Orsay) [1]:

> *"[...] A maneira clássica de utilizar o experimento é aquela em que o aluno não tem que discutir; ele aprende como se servir de um material, de um método; a manipular uma lei fazendo variar os parâmetros e a observar um fenômeno."*

Neste tipo de abordagem a lei natural não é questionada. Ela é conhecida *a priori* e utilizada para calcular um parâmetro, analogamente ao que é feito em um laboratório de metrologia ou de testes. No ensino podem ser mencionados alguns exemplos, como comparar métodos experimentais ou determinar a velocidade do som no ar, empregando-se determinada lei.

Neste trabalho, propomos um procedimento alternativo, desenvolvendo o método da observação e análise dos dados obtidos. Com isto, esperamos valorizar o trabalho do aluno, mostrando que ele ou qualquer outra pessoa será capaz de obter, nas devidas proporções, os mesmos resultados que os cientistas profissionais.

Para a compreensão e descrição do procedimento proposto, dividimos o texto em diferentes capítulos. Neste, procuramos abordar de forma geral as motivações e os caminhos sugeridos para preparar uma aula diferente da tradicional, utilizando os conceitos envolvidos no problema da corda vibrante para uma turma de ensino médio.

Visto que a diferença reside essencialmente na realização do experimento, esperamos que sejam despertadas a capacidade e a curiosidade crítica nos alunos quanto aos conceitos envolvidos na experiência. Faremos, inicialmente, uma descrição das nossas motivações e, em seguida, uma descrição sobre como o trabalho em aula está organizado.

Escolha do tema

O que nos guiou na escolha do tema, foi perceber que "ondas" é um assunto que chama a atenção dos alunos. Como as ondas do mar se propagam, como acontece a transmissão e recepção das ondas de rádio e televisão, como as telecomunicações se realizam, são perguntas que sempre aparecem no nosso cotidiano. Víamos esse tema como elemento motivador e buscamos respostas para essas perguntas. No colégio, as respostas dadas pelos professores sempre implicam em um conhecimento pronto, que acaba por ser reduzido à aplicação de uma equação.

Agora, enfrentando o problema enquanto professores. Há a necessidade de inovar a aula sobre ondas, tornando-a mais didática e compreensível para os alunos. Para alcançar este objetivo, decidimos iniciar a aula a partir da observação de um experimento, analisando-o em sala de aula e, finalmente, sintetizando-o em uma lei física. Acreditamos que, assim, podemos motivar o aluno a compreender melhor o assunto e desenvolver algumas habilidades durante o seu processo de aprendizagem.

Segundo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio [2]

> *"Espera-se que o ensino de Física, na escola média, contribua para a formação de uma cultura científica efetiva, que permita ao indivíduo a interpretação dos fatos, fenômenos e processos naturais, situando e dimensionando a interação do ser humano com a natureza como parte da própria natureza em transformação. Para tanto, é essencial que o conhecimento físico seja explicitado como um processo histórico, objeto de contínua transformação e associado às outras formas de expressão e produção humanas. É necessário também que essa cultura em Física inclua a compreensão do conjunto de equipamentos e procedimentos, técnicos ou tecnológicos, dos cotidianos doméstico, social e profissional".*

Seguimos essas orientações ao propormos neste trabalho a criação de um experimento no qual seja possível observar a formação de ondas estacionárias em uma corda vibrante e, a partir das medidas realizadas pelo próprio aluno e sob orientação do professor, dar a ele uma visão maior do processo de determinação da lei de dispersão, $\lambda f = v_c$, como é usualmente conhecida nos livros de Ensino Médio.

Esses dados são usados para resolução dos problemas em sala de aula, mas, muitas vezes, o aluno nem imagina de onde esses valores foram extraídos, limitando o seu conhecimento e tornando o ensino de Física uma mera repetição de exercícios.

Valendo-se da metodologia proposta esperamos que o professor possa construir o conhecimento junto com os alunos e não simplesmente apresentá-lo como objeto acabado e concluído. Poderá ainda, descrevendo o processo histórico, mostrar que o conhecimento físico é construído ao longo de vários séculos e por vários pesquisadores que contribuíram muito para o avanço da tecnologia por meio do conhecimento que adquiriram e que, mesmo possuindo grande importância nas descobertas, muitas vezes não aparecem em destaque nos livros didáticos.

Contribuição de outros autores para o tema.

O assunto Ondas tem sido bastante explorado na literatura e existem muitas propostas para a produção e análise de ondas estacionárias em uma corda vibrante.

Em uma aula no curso de Física, deparamo-nos com o artigo de Blair [3] no qual o autor, através da modificação do experimento de Franz Melde (1832-1901), tenta determinar a lei de dispersão, $\lambda f = v_c = \sqrt{T_0/\rho_L}$, em que T_0 é a tensão na corda de densidade linear ρ_L e v_c é a velocidade de propagação da onda na corda.

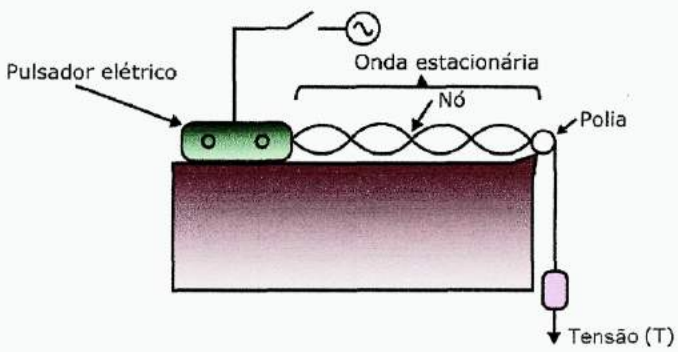


Figura 1. Experimento de Franz Melde(1832-1901)[18]

No experimento de Melde original, as vibrações são produzidas em um fio metálico na horizontal, no qual em um dos seus extremos temos o oscilador eletromagnético - que transmite a potência vibratória para o fio - e, no outro extremo, temos o fio apoiado em uma roldana e mantido sob tensão por uma massa suspensa.

No trabalho de Blair, observamos a produção de ondas estacionárias em um fio metálico na vertical, eliminando os efeitos devido à curvatura do fio sobre a roldana. Entretanto, a abordagem ainda é tradicional: é mostrado ao aluno qual lei deve ser observada *antes* da realização do experimento. Como alternativa apresentamos, nas páginas seguintes, um novo experimento - mais adequado aos objetivos propostos.

O que é novo em nosso trabalho.

Montamos um experimento similar ao de Melde, com algumas modificações em relação ao experimento original: mantivemos o oscilador eletromagnético para produzir as vibrações mecânicas em uma corda mas, em lugar de um fio metálico, empregamos fios de linha ordinários e estabelecemos a lei física a partir das observações das vibrações produzidas.

Partindo da criação de um experimento relativamente simples — e que pode ser realizado em classe —, apresentamos uma forma alternativa de aula em que podemos construir, junto com o aluno, um modelo através do qual é possível determinar a lei de dispersão para um sólido, $\lambda f = v_c^2 = T_0 / \rho_L$ (neste caso, o sólido é representado por um fio ordinário).

Dessa forma, um processo experimental para a sala de aula tornar-se-á possível e aplicável, devido à simplicidade da montagem e da aquisição dos componentes utilizados, dentro da realidade em que se encontram as escolas brasileiras que, em geral, não possuem um "laboratório" de ciências.

A aula seria toda voltada para a realização, análise e síntese do experimento, permitindo ao aluno construir — através dos dados obtidos — a equação geral da lei de dispersão em sólidos e, em particular, determinar o valor da velocidade do som em um fio de linha ordinário. Esta aula permite ainda mostrar que conceitos, como teoria e experimento - que parecem tão separados no ensino médio – são, na verdade, interdependentes.

A visão de ciência que o aluno possui do método científico também é discutida ao se mostrar que o processo experimental não está distante de sua realidade e que é possível compreender e realizá-lo sob a supervisão do professor.

Acreditamos ainda que um experimento seja sempre uma ferramenta que auxilia na aprendizagem e que desperta em todos os alunos uma motivação maior. Essa prática também proporciona um grande prazer e estímulo ao professor, já que poderá observar o entusiasmo e o ganho na aprendizagem de seus alunos.

Como o trabalho está organizado

No Capítulo II, apresentamos uma breve descrição da evolução dos conceitos ondulatórios até a descoberta da lei de dispersão, ilustrando as principais descobertas dos cientistas que se dedicaram ao estudo do fenômeno das vibrações harmônicas.

A abordagem histórica faz-se importante para chamar a atenção dos alunos para o aspecto interdisciplinar no estudo da ciência e também mostra o processo contínuo e integrado pelo qual se desenvolveram os conceitos, envolvendo a participação de vários cientistas ao longo da história.

Muitos autores de livros didáticos, entretanto, menosprezam a abordagem histórica e o desenvolvimento experimental dos tópicos de Física. Por exemplo, um dos livros mais utilizados para o ensino de Física na escola brasileira, intitulado "Os Fundamentos da Física" [4], foca o processo de ensino-aprendizagem através do treinamento dos alunos utilizando uma série de exercícios; recursos didáticos auxiliares como a contextualização histórica dos conceitos apresentados ou a proposição de experimentos que são inadequadamente empregados ou inexistentes. Este livro sequer cita como o aluno poderia desenvolver experimentos relacionados aos tópicos estudados.

A construção deste trabalho foi direcionada através de pesquisa desenvolvida junto aos alunos no espaço que, gentilmente, a escola Instituto São João Baptista – no ano de 2006 – nos cedeu.

No Capítulo III, detalhamos o processo ocorrido em uma primeira experiência em sala de aula. A partir dos resultados obtidos nesta primeira experiência, indicamos, no Capítulo IV, o processo de construção de um novo experimento, pelo o qual seria possível extrair dados para se chegar à equação da lei de dispersão em sólidos, em uma sala de aula.

2. Aspectos didáticos

Quadro atual do ensino de Física

O quadro atual da Física no ensino médio foi assim retratado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [PCNEM] (pág. 48), [2]:

> *"O ensino de Física tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo. Insiste na solução de exercícios repetitivos, pretendendo que o aprendizado ocorra pela automatização ou memorização e não pela construção do conhecimento através das competências adquiridas. Apresenta o conhecimento como um produto acabado, fruto da genialidade de mentes como a de Galileu, Newton ou Einstein, contribuindo para que os alunos concluam que não resta mais nenhum problema significativo a resolver. Além disso, envolve uma lista de conteúdos demasiadamente extensa, que impede aprofundamento necessário e a instauração de um diálogo construtivo".*

Percebemos que os PCNEM destacam bem os problemas atuais da Física, que somados a toda problemática da educação, tendem a piorar ainda mais a situação do ensino de uma forma geral. Isto é conseqüência de um sistema educacional enciclopédico, que enfatiza muitas vezes a educação básica como um "trampolim" para a formação superior, sem a preocupação de um futuro promissor para esses alunos.

O ensino em física precisa priorizar uma formação conceitual e contextualizada, de forma que forneça ao estudante habilidades e competências para que este resolva, de forma autônoma, os diversos problemas que terá pela frente.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases [LDB/96] — artigo 35 — as finalidades da educação no ensino médio são:

> *"O aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do*

pensamento crítico; a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina". [5]

Tanto os PCNEM como o trecho reproduzido acima da LDB, apontam direções onde os conteúdos de Física no ensino médio devem ser apresentados de forma diferenciada do que vêm sendo desenvolvido atualmente.

Acreditamos que a utilização da experimentação de forma integrada com os conteúdos pode ser uma boa metodologia para atender a essas demandas sendo, este trabalho, uma proposta que pode tornar-se um passo na construção de um novo ensino na escola.

Habilidades e competências a serem desenvolvidas com o experimento

A física ondulatória é um dos tópicos mais tradicionais do ensino médio, porém, como foi descrito anteriormente, o tema é tão versátil que é possível apresentá-lo dentro de um caráter interdisciplinar, sem a menor dificuldade.

A intenção inicial é desenvolver, primeiramente, as noções qualitativas e conceituais, dando ênfase à compreensão de cada grandeza física existente na teoria e de como elas se relacionam. Como sugestão para isto, podemos apresentar várias analogias para os alunos, com temas de seu cotidiano, para contextualizar o conteúdo que vai ser ensinado. Assim o aluno estaria motivado e encontraria alguma relação entre os conteúdos desenvolvidos na aula de Física e o seu dia-a-dia.

As habilidades desenvolvidas pelos alunos nesta parte inicial são muitas, e entre elas destacamos uma facilidade maior de compreensão dos conceitos físicos, como também uma melhor capacitação na resolução de alguns problemas teóricos ou práticos.

Desta forma, certamente o aluno aprimorará a sua capacidade intelectual tanto para serviços que possam envolver raciocínio lógico, quanto para outros que necessitem de habilidade no manuseio de equipamentos ou análise de dados.

Ainda na parte prática, uma atividade é proposta ao aluno de maneira a não apenas simplesmente fixar os conceitos fundamentais da teoria ondulatória, mas também para que ele exercite as técnicas de análise de dados obtidos experimentalmente.

Esperamos que este procedimento permita ao aluno desenvolver as suas competências na interpretação dos resultados deste experimento e, sobretudo, desenvolver habilidades para a formação de um raciocínio lógico fundamental para resolução de qualquer problema.

A coleta de dados seguida da análise dos resultados obtidos é de suma importância para a compreensão quantitativa dos conceitos físicos. Nesta etapa, devem ser usados recursos auxiliares como, por exemplo, a construção de gráficos e o uso de equações.

Com todos esses tópicos desenvolvidos, acreditamos que o aluno estará adquirindo diversas das habilidades descritas durante todo este trabalho e que são fundamentais para a formação do estudante.

Desse modo, o ensino da Física contribuirá para uma melhor compreensão do mundo e para o desenvolvimento de habilidades importantes para o ingresso no nível superior ou para a inserção no mercado de trabalho.

3. Evolução da ciência e a corda vibrante

A vibração da corda ~~vibrar~~ é um fenômeno físico cuja compreensão possibilitou a construção de diversas das mais recentes aplicações tecnológicas, como as telecomunicações.

Apesar desses equipamentos serem considerados, muitas vezes, de última geração, a corda vibrante é conhecida pelos cientistas há vários séculos.

Para que se possa entender melhor como se descobriu este fenômeno físico é preciso voltar no tempo para saber como era a ciência naquela época, já que os primeiros estudos sobre o assunto tiveram início com Pitágoras, ao tentar determinar a harmonia das vibrações numa corda. [6]

Para Pitágoras a natureza teria uma ordem numérica. Cada número, como composição de uma unidade, parte em relação ao todo, traduzia uma harmonia, isto é, uma proporção na composição de alguma coisa feita por elementos diferentes e até mesmo opostos. Uma das primeiras descobertas foi a relação entre intervalos musicais e proporções numéricas simples que segundo Guido d'Arezzo (992 -1050), no seu livro *Micrologus de Disciplina Artis Musicae* (1025 ou 1026), primeiro tratado de prática musical, no qual explica sua técnica de ensino, que conhecemos hoje por notas musicais, nos informa que [7]:

> *[...] "Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso."*

Figura 2. Concepção artística de Pitágoras feita por Raffaello Sanzio (1509), como ilustrado no pormenor de *A escola de Atenas*. [8]

Para comprovar sua descoberta, Pitágoras inventou o monocórdio, um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha.

Tal instrumento também possuía um cavalete móvel colocado sob a corda, dividindo-a em duas secções.

Figura 3. Pitágoras e o monocórdio [9]

Pitágoras afirmava que a "ciência das harmonias" podia ser entendida como um problema de matemática [9]. Trata-se de identificar, de acordo com certas regras, a média B entre dois números dados A e Z.

A média aritmética é dada por:

$$A - B = B - Z\,; \tag{1}$$

a média geométrica é dada por:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{Z}\,; \tag{2}$$

e a média harmônica é definida pela expressão:

$$\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{1}{B} - \frac{1}{Z}\,. \tag{3}$$

As diferentes proporções são "ouvidas" com o auxílio do monocórdio. Ao se dedilhar as duas partes da corda, podemos controlar se a relação entre os dois comprimentos produz ou não uma sensação agradável.

As proporções matemáticas obtidas (as "harmonias") correspondem às combinações de sons que produzem um efeito musical agradável (a "harmonia") ao ouvido.

Pitágoras considerava o intervalo entre um som a uma dada freqüência f_C e o seu dobro $f_A = 2f_C$ como "separados por uma oitava". Ele procurava, então, as freqüências intermediárias f_B, correspondentes às diferentes médias matemáticas.

Deste modo, a freqüência harmônica f_B é a média harmônica das freqüências f_C e f_A se ela, f_B, obedece à equação

$$\frac{1}{f_A} - \frac{1}{f_B} = \frac{1}{f_B} - \frac{1}{f_C}\,, \tag{4}$$

considerando que $f_A = 2f_C$. Portanto, a razão entre a freqüência intermediária f_B e a freqüência f_C é igual a

$$\frac{f_B}{f_C} = \frac{4}{3} \tag{5}$$

ou, ainda, que

$$\frac{f_B}{f_A} = \frac{2}{3}\,. \tag{6}$$

Dedilhando segmentos de corda no monocórdio, definimos os intervalos denominados "quarta", "quinta justa" e "oitava". De fato, quando se desloca o cavalete no monocórdio de modo a estabelecer estas relações, devemos posicionar o cavalete de forma que o fio de comprimento L_2 fique dividido em duas partes L_1 e L:

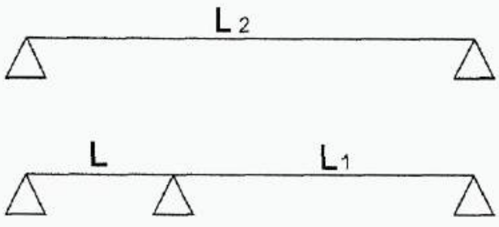


Figura 4. Esquema mostrando a posição do cavalete e a separação do comprimento da corda.

(i) Para obtermos a relação harmônica $\frac{f_B}{f_C} = \frac{4}{3}$, temos que fazer $\frac{L_2}{L_1} = \frac{4}{3}$; (7)

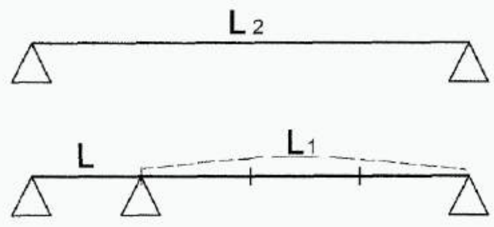


Figura 5. Esquema com a posição do cavalete formando a relação harmônica chamada de quarta. Onde: $\frac{f_B}{f_C} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{4}{3}$

(ii) Para obtermos a relação harmônica $\frac{f_A}{f_B} = \frac{3}{2}$, temos que fazer $\frac{L_2}{L_1} = \frac{3}{2}$; (8)

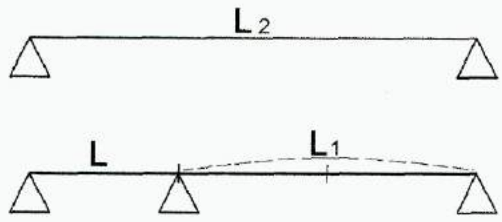


Figura 6. Esquema com a posição do cavalete formando a relação harmônica chamada de quinta justa. Onde: $\frac{f_A}{f_B} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2}$

(iii) Para obtermos a relação harmônica $\frac{f_C}{f_A} = \frac{1}{2}$, temos que fazer $\frac{L_2}{L_1} = 2$. (9)

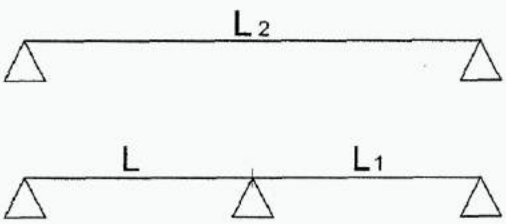


Figura 7. Esquema com a posição do cavalete formando a relação harmônica chamada de oitava. Onde: $\frac{f_A}{f_C} \Leftrightarrow \frac{f_1}{f_2} = 2$

A definição desses nomes vem da teoria musical onde podemos citar alguns exemplos:

- Quinta justa:

As notas *Dó₁*, com freqüência f_2, e *Sol*, com freqüência f_1, nos dá $f_1 = \frac{3}{2} f_2$. De *Dó₁* a *Sol*, temos as notas *dó₁, ré, mi, fá, sol*, ou seja, cinco notas, daí o nome "quinta".

- Quarta:

As notas *Sol*, com freqüência f_2, e *Dó₂*, com freqüência f_1, nos dá $f_1 = \frac{4}{3} f_2$. De *Sol* a *Dó₂*, temos as notas *sol, lá, si, dó₂*, ou seja, quatro notas, daí o nome "quarta".

Podemos levar o mesmo raciocínio para a oitava, ao verificarmos a existência de oito notas no intervalo de *dó₁* a *dó₂*. [10]

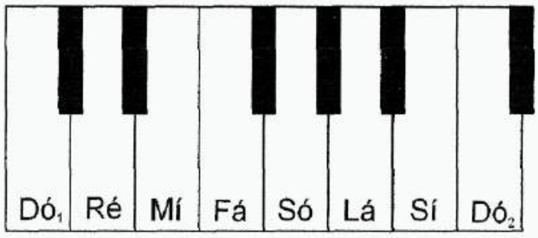


Figura 8. Esquema com a posição das notas musicais em um intervalo no teclado de um piano.

Voltando a análise da relação entre as freqüências, de modo semelhante, podemos determinar a freqüência aritmética média f_B. Ela deve obedecer à equação

$$f_A - f_B = f_B - f_C, \tag{10}$$

de onde se deduz que

$$\frac{f_B}{f_C} = \frac{4}{3} \text{ e } \frac{f_A}{f_B} = \frac{3}{2}. \tag{11}$$

Essas médias são idênticas às médias harmônicas e, para Pitágoras, estas proporções matemáticas particulares justificavam plenamente o efeito agradável delas aos nossos ouvidos.

Os pitagóricos elaboraram, então, com base nessas proporções, uma escala musical que foi empregada durante muitos séculos e, deste modo, a teoria musical tornou-se o lugar de encontro entre o mundo abstrato dos números e a realidade física. [11]

A singular interação entre a música e as ciências exatas foi de tal modo frutífera que estimulou, já nos séculos XVI e XVII, o aparecimento de instituições que reuniam especialistas em música, nos seus efeitos e nos fenômenos a ela associados, com o objetivo puro e simples de fazer música e discutir problemas ligados ao domínio musical, empregando "métodos científicos".

Centros de estudo musical, como as experiências florentinas da *Camerata Bardi*, ou o grupo parisiense da *Academie de Baïf* ou os londrinos do *Gresham College* serão os embriões das primeiras comunidades científicas, tais como a *Academia del Cimento*, a *Academie dês Sciences* e da *Royal Society Academy*, respectivamente [12].

Não é de surpreender, portanto, que Galileu Galilei (1564-1642) também faça contribuições ao estudo da acústica: ele elevou o estudo de vibrações e a correlação entre altura e freqüência da fonte sonora para padrões científicos.

Seu interesse no som foi inspirado, em parte, por seu pai, que era um matemático, músico, compositor e membro da mesma *Camerata Bardi* que, mais tarde, daria origem à *Academia del Cimento*. [12]

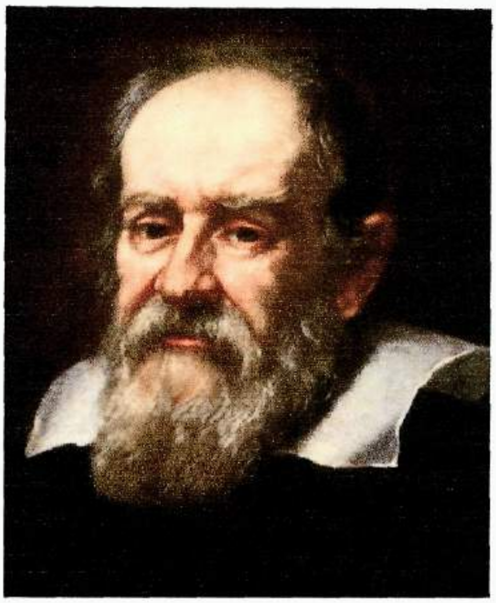


Figura 9. Galileu Galilei (1564-1642) representado aqui em uma pintura original feita por Justus Sustermans, em 1636.

Outros contemporâneos de Galileu também promoveram o progresso da acústica e os resultados surgiram relativamente de forma rápida.

O matemático francês Marin Mersenne (1588-1648) estudou a vibração de cordas tensas e os resultados destes estudos foram compilados seu livro *L'Harmonia Universelle*, de 1636. Este livro é a base para a acústica musical moderna.

Mersenne foi um importante elo de ligação na comunicação entre filósofos e cientistas por toda a Europa já que na época não existia nenhum jornal científico, o que dificultava quem trabalhasse uma vida inteira ignorando a existência das descobertas já feitas.

Mersenne encontrou-se e correspondeu-se com figuras importantes como Descartes, Girard Desargues, Pierre Fermat, Blaise Pascal e Galileu.[13]

Essa foi uma de muitas contribuições de Mersenne para a cultura européia na sua visão do desenvolvimento de uma comunidade científica. Em seu livro, *Les Préludes de L'Harmonia Universelle* (Paris, 1634), ele critica a falta de comunicação existente na época:

"Os cientistas juraram entre eles mesmos uma sociedade inviolável; é quase impossível separá-los, para eles é preferível sofrer que compartilhar; E se alguém persistir em fazer isso, consegue para seu trabalho somente fragmentos defeituosos e confusos. Ainda que os cientistas não cheguem todos juntos, mas se abraçam e pela mão eles seguem uns aos outros em uma ordem natural que é perigosa para mudar, porque eles se recusam a entrar em qualquer outro caminho quando são chamados[...]"

Figura 10. Marin Mersenne (1588-1648) – Autor de "Harmonie Universelle" e amigo de Descartes.

Após sua visita a Beeckman, Descartes e J. B. Van Helmont, nos Países Baixos (Holanda), Mersenne se interessou pela propagação do som.

Sua primeira contribuição original na acústica (cordas vibrantes) apareceu no livro *Quaestiones in Genesim* (1623), como também a análise das teorias antigas e modernas da música e óptica.

Sua análise cientifica acerca do som e seus efeitos no ouvido começaram com a demonstração fundamental de que a intensidade é proporcional à freqüência e, conseqüentemente, que os intervalos musicais (oitava, quinta, quarta e assim por diante) são razões das freqüências de vibração que qualquer instrumento produz.

Mersenne deu uma prova experimental contando as vibrações lentas de cordas muito longas contra o tempo medido de pulsos rítmicos, por segundo, num pêndulo. Então usou as leis que ele completou (que, agora, portam o seu nome), relacionando a freqüência com o comprimento, tensão e especificamente densidade das cordas, para calcular as freqüências mais rapidamente. Relações semelhantes eram estabelecidas para vento e instrumentos de percussão.

A demonstração dessas proposições tornou possível oferecer explicações físicas quantitativas de consonância, dissonância, e ressonância. [14]

Uma excelente descoberta associada aparentemente à Mersenne era a lei em que a freqüência de um pêndulo é inversamente proporcional à raiz quadrada do comprimento.

Sua primeira declaração dessa lei foi impressa em 30 de junho de 1634, - *Le Méchanique de Galilée* - que era uma versão de aulas de Galileu sobre mecânica - um ano antes de Galileu a ter publicado. Explorando mais as quantidades acústicas, Mersenne, foi um pioneiro no estudo científico dos limites de altas e baixas freqüências audíveis, da harmonia e da medida da velocidade de som, que mostrou ser independente do volume e da sonoridade (efeito sonoro harmonioso). Ele também estabeleceu que a intensidade do som, assim como a intensidade da luz, é inversamente proporcional ao quadrado da distância de sua fonte.

Após a visita de Mersenne à Itália em 1644, as suas discussões das experiências italianas e francesas, com o vácuo de Torricelli, ajudaram a fazer uma introdução viva deste assunto e de seu significado no verdadeiro ambiente sonoro e na existência da pressão atmosférica.

Além dessas contribuições à ciência, a sua colaboração com Doni em um plano ambicioso para um trabalho histórico detalhado sobre a teoria e a prática da música antiga e moderna renderam uma rica coleção das descrições e das ilustrações dos instrumentos, fazendo o *L'Harmonie Universelle* e suas contrapartes em latim, as fontes essenciais dos musicólogos.

Mais tarde, no mesmo século de Mersenne, o físico inglês Robert Hooke será o primeiro a produzir uma onda de som de freqüência conhecida, usando uma roda dentada giratória como dispositivo de medição. [15]

A teoria matemática do som só viria a se desenvolver no século XVIII, na seqüência da evolução da dinâmica baseada no modelo da mecânica de Isaac Newton (1642-1727) estabelecido nos *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), tendo sido B. Taylor (1685-1731) o primeiro a calcular o período fundamental de uma corda vibrante, em 1713.

Teremos, entretanto, que esperar até 1727, quando Johann Bernoulli (1667-1748), - numa comunicação ao seu filho, Daniel - estabelecerá a primeira análise da configuração da pequena deformação da corda vibrante com peso. [16]

4. A corda vibrante

Montamos um experimento similar ao experimento de Melde[17], como ilustra a Figura 11.

Como podemos observar na figura, o presente aparato apresenta algumas modificações em relação ao de Melde: em lugar de um fio metálico, empregamos fios de linha de costura comum.

Dessa forma, tornamos ainda mais acessível o processo experimental para uma sala de aula de ensino médio, incluindo até mesmo aquelas salas dos colégios para os quais um "laboratório" está muito distante da realidade.

Figura 12. Oscilador em funcionamento. Podemos observar a simplicidade do experimento, onde temos: a roldana, normalmente utilizada em varais de secar roupa, adaptada à uma haste de sustentação de luminárias; a madeira de sustentação da roldana e da bomba de aquário (em azul, ao fundo); e um compensado lateral, todos os objetos adquiridos em qualquer serralheria ou comércio local.

Tendo em vista que um dos objetivos foi o desenvolvimento de um experimento com materiais de fácil aquisição, transporte e montagem, além de apresentar muito baixo custo, foi preciso encontrar no mercado algo que pudéssemos utilizar como um perturbador de um meio.

A solução surgiu ao observarmos o funcionamento de uma pequena bomba de aquário, um equipamento muito simples que se baseia na produção de um campo magnético variável produzido por uma bobina, que produz uma oscilação em uma haste metálica.

Esta haste possui um ímã permanente em sua extremidade que ora é repelido, ora é atraído pelo campo criado pela bobina.

Na extremidade dessa haste foi fixada uma ponta de caneta bem fina, de modo a fazer um fio ordinário oscilar.

A bomba de aquário foi fixada em um carrinho de madeira de forma a dar mais mobilidade ao experimento. Junto ao carrinho colocamos uma haste para fixação da corda, tirando toda a tensão da tampa de caneta, deixando como única função da tampa a transmissão da perturbação à corda.

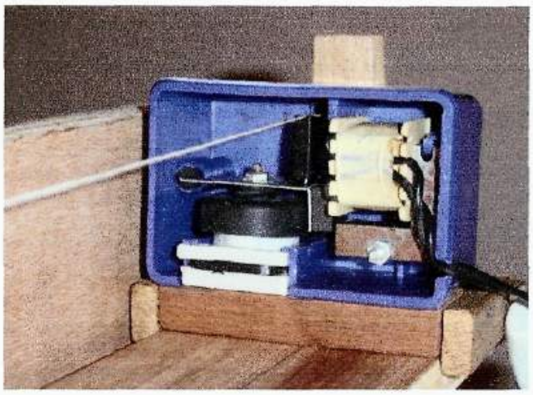


Figura 13. Bomba de aquário usada no experimento. Observamos as adaptações, como a tampa de caneta sobre a haste metálica e vibratória da bomba, e o carrinho de madeira sustentando a bomba.

??

Antes de iniciar o uso do experimento, para uma maior eficácia de nossa proposta, os alunos precisam de uma introdução mínima sobre ondas. Para tal, podemos utilizar o próprio experimento montado, porém mantendo-o inicialmente desligado, mostrando a propagação de um pulso através da perturbação da linha. Fazendo uma introdução a alguns temas essenciais, destacamos:

- Natureza das ondas
- Tipos e classificações
- Comprimento onda
- Propagação
- Velocidade
- Reflexão do pulso de onda
- Principio da superposição
- Relação entre o comprimento de onda e a distância entre os nós

Com isso esperamos fornecer as ferramentas necessárias para construção do conhecimento através da observação do fenômeno, iniciando o nosso experimento.

Medida dos nós da onda estacionária sobre a corda.

Introdução das características da oscilação que se estabelecem em uma corda fazendo com que o aluno perceba que a corda não oscilará, a menos que ela esteja sob tensão mecânica e seja excitada.

Uma vez que os estudantes se familiarizem com este comportamento da corda, estaremos aptos a avançar com o experimento.

?

Objetivos

Nesta experiência é possível explorar a formação de ondas estacionárias em uma corda vibrante, utilizando um método simples, de baixo custo e bastante acurado.

O objetivo é fazer com que o aluno:

1) Perceba que a corda vibra quando submetida a uma tensão mecânica, mas algumas regiões bem pequenas da corda permanecem imóveis. em repouso ?
2) Que a posição destas regiões imóveis dependem do valor da tensão que a corda está submetida.

repouso

Descrição dos aparatos EQUIPAMENTO !

O custo dos componentes necessários para a realização do experimento é inferior a R$ 100,00 (cem reais – valores de 2007) e a construção, devido à simplicidade dos dispositivos, pode ser realizada pelos próprios alunos.

O experimento apresentará uma boa precisão e acurácia se for construído cuidadosamente. ?

É importante salientar também que a precisão dependerá da habilidade do aluno ao manusear o equipamento.

INVERTER

Abaixo apresentamos os materiais necessários para a construção do experimento:

- Linhas de costura de diversas espessuras (fazendo o papel da corda vibrante);
- Uma pequena bomba de aquário (gerador de pulsos elétrico);
- Uma tampa de caneta (sua extremidade permite perturbar somente uma pequena região na linha);
- Madeira de compensado – 4 pedaços de dimensões (9 x 52 x 1,5) cm (para fazer o trilho);
- Duas dobradiças de cobre (que permitem o fácil transporte do trilho);
- Uma haste de alumínio (para sustentar a roldana);
- Uma roldana de secador de roupas (para sustentar a outra extremidade da linha);
- Parafusos, cola de madeira e cola tipo “cola-tudo”(para fixar a bonba de aquário na base de madeira);

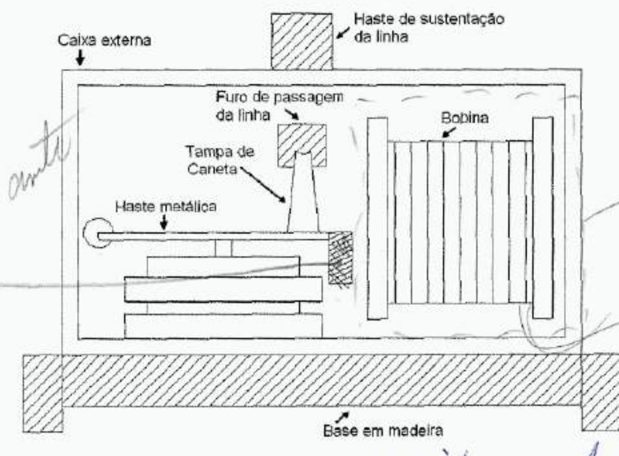
- Interruptor de luz (caso a bomba não o tenha);
- Pequenas esferas de aço, usadas em transmissão de carro (utilizadas para variar a tensão na corda);
- Embalagem de rolo de filme fotográfico de 35 mm (para sustentar as esferas de aço);

Montagem

A escolha do equipamento deve seguir determinadas especificações, em seguida a montagem pode ser iniciada. Nos parágrafos abaixo descrevemos, de forma detalhada, os passos para a construção do mesmo. do equipamento

Escolhemos uma tampa de caneta bem fina, de modo que somente a ponta da tampa toque na corda. Após a escolha da tampa, abrimos a cobertura plástica da bomba para ter acesso à haste interna de oscilação. Usamos cola - tudo para fixar a tampa de caneta nessa haste. Feito isso, montamos uma base de madeira com duas abas laterais e uma haste também em madeira para sustentar a corda que passará pela pequena bomba até o outro lado onde estará a roldana, que mantém a bombinha sobre o trilho de madeira.

ímã permanente



oscilador

~110

vibrador

?

Figura 14. Esquema de montagem da Bomba de aquário. Onde vemos a tampa de caneta sobre a haste metálica, ~~e a base de madeira~~ sustentando a bomba e facilitando sua locomoção.

Como a roldana é vendida para o uso em secadores de roupa, vem acompanhada de um gancho de parede, que precisa ser retirado para a fixação na haste de alumínio (usada para prender luminárias), fixamos a outra extremidade da haste ao trilho de madeira e a dobramos levemente como mostra a figura 12.

As diferentes tensões as quais a corda será submetida serão produzidas com as esferas de aço utilizadas em transmissões de carros, que em qualquer oficina vão para o lixo. As massas, foram medidas previamente juntamente com as densidades das linhas utilizadas, a fim de simplificar o experimento. A embalagem plástica de rolos de filme fotográfico é empregada como suporte para as esferas.

Procedimento experimental

Para determinarmos um modelo que descreva a relação entre as grandezas físicas envolvidas, podemos inicialmente fazer o levantamento das posições dos nós na corda vibrante em função da tensão na corda. Para tal, devemos produzir ondas estacionárias sobre a corda. As ondas são criadas pela oscilação da bomba de aquário, com freqüência fixa. Como o comprimento da corda também é mantido constante, temos que considerar somente duas variáveis: a tensão T e a densidade linear da corda ρ_L. Ou seja, para uma dada corda (densidade uniforme) esperamos que o aluno perceba a mudança na posição X dos nós (conseqüência), para cada valor de tensão T (causa).

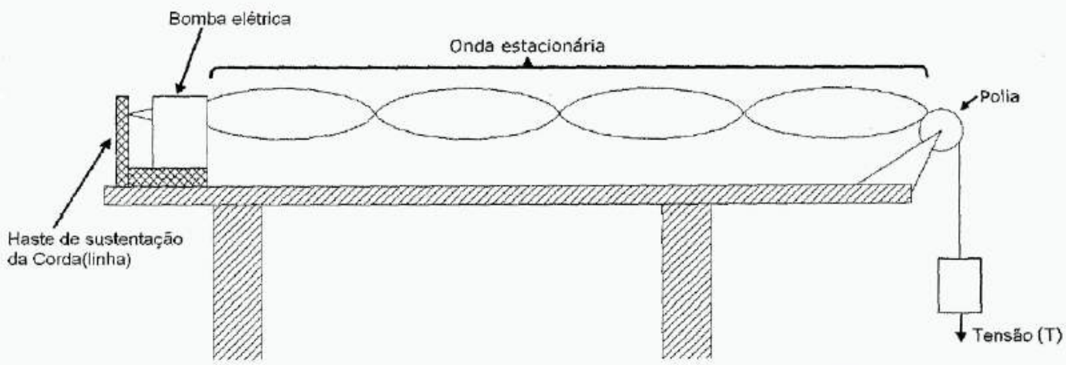


Figura 15. Representação esquemática do experimento ~~em uso~~. A massa na extremidade direita exerce uma tensão sobre a corda e o oscilador eletromecânico produz as ondas estacionárias sobre a corda.

Com a montagem feita, iniciamos a observação do fenômeno. Nesse momento o professor age como um motivador dos alunos, valorizando suas idéias e orientando quanto à maneira de estudar o experimento, mostrando que determinadas mudanças geram alguns efeitos e outras mudanças em nada interferem.

Resultados

Após o desenvolvimento de uma primeira discussão, proposto na seção anterior, as medições devem ser iniciadas. Estas medidas permitirão transformar a discussão apenas qualitativa, realizada na primeira etapa, numa discussão quantitativa, ou seja, mais fundamentada.

Nessa etapa, nos limitaremos a medição da posição dos nós com a variação na tensão da corda, mantendo-se fixa a freqüência de vibração para uma dada linha. Em seguida, usamos linhas adicionais para estudar o comportamento das ondas para diferentes densidades.

Uma tabela deve ser construída, após a realização das medidas, para uma melhor visualização dos resultados, como ilustra a Tabela 1.

verificar

Tabela 1. ~~Tabela com os~~ dados das diferentes linhas empregadas no experimento.

Linha	Comprimento L (m)	Massa m (Kg)	Densidade linear ρ_L ± 0,01 (kg/m)
1	1,05±0,01	$(2{,}26 \pm 0{,}01) \times 10^{-6}$	$(2{,}15 \pm 0{,}01) \times 10^{-5}$
2	1,10±0,01	$(3{,}51 \pm 0{,}01) \times 10^{-5}$	$(3{,}19 \pm 0{,}01) \times 10^{-5}$
3	1,03±0,01	$(2{,}83 \pm 0{,}01) \times 10^{-4}$	$(2{,}75 \pm 0{,}01) \times 10^{-4}$
4	1,03±0,01	$(2{,}20 \pm 0{,}01) \times 10^{-3}$	$(2{,}14 \pm 0{,}01) \times 10^{-3}$

Colocando a linha de densidade $(2{,}15 \pm 0{,}01) \times 10^{-6}$ kg/m na base superior de madeira do experimento, aferimos os dados iniciais, apresentados na tabela abaixo.

Tabela 2. ~~Tabela com os~~ dados para a linha 1, de densidade $\rho = 2{,}15 \times 10^{-5}$ kg/m.

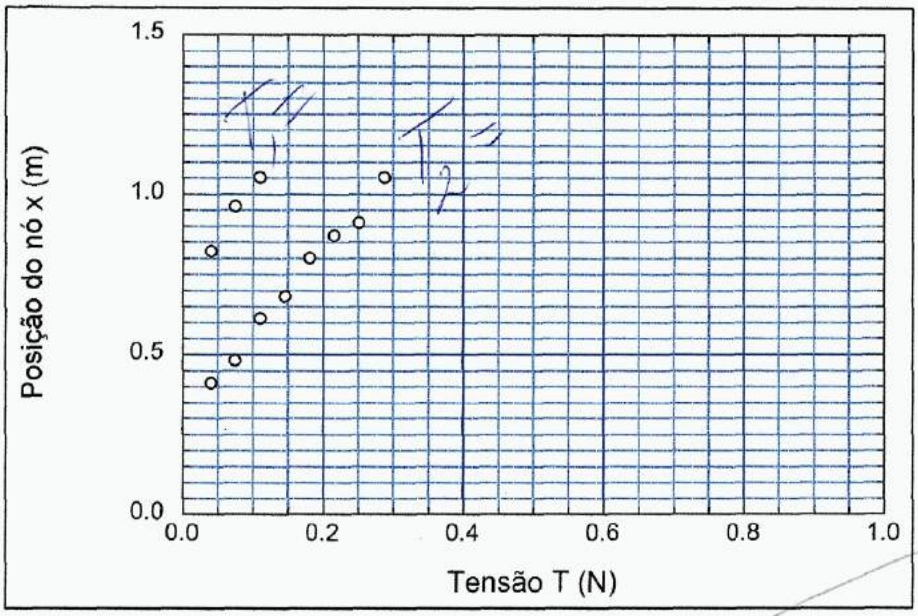
Linha 1 $\rho = 2{,}15 \times 10^{-5}$ kg/m				
Medida	**Tensão T (N) ± 0,01 N** 0,001 N	**Posição do nó X_1 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_2 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_3 ± 0,01 (m)**
1	0,041	0,41	0,82	1,05
2	0,076	0,48	0,96	-
3	0,111	0,61	1,05	-
4	0,147	0,68	-	-
5	0,182	0,80	-	-
6	0,217	0,87	-	-
7	0,252	0,91	-	-
8	0,288	1,05	-	-

Com os dados da Tabela 2, a construção de um gráfico com todas as posições dos nós para cada tensão na linha pode ser sugerida aos alunos. Devemos observar que conforme as posições aumentam, há uma diminuição no número de nós, e isso acontece para todas as linhas utilizadas.

É importante lembrar que, na presente etapa, os alunos desconhecem que a distância entre os nós é sempre a mesma para qualquer valor de tensão.

O professor deve sempre instigar e direcionar o desenvolvimento das atividades ao longo da aula. Nesta etapa, o professor deve propor aos alunos que procurem algum padrão definido nos dados obtidos da distância entre os nós e a tensão colocada na corda.

Um gráfico possuindo como eixos das ordenadas a posição dos nós e como eixo das abscissas a tensão da corda pode ser proposto para melhor visualizar esta tendência.



onde!

Figura 16. ~~Gráfico com a~~ posição dos nós em cada tensão para a linha 1 de $\rho = 2,15 \times 10^{-5}$ kg/m.

Posição dos nós em função da tensão aplicada

Pelo número de dados, a curva nos mostra uma relação linear entre a tensão e a posição dos nós. No entanto, se observarmos com mais atenção, ao diminuirmos gradativamente a tensão no experimento, percebemos que a distância entre os nós também diminui. Além disso, deixamos claro que vamos extrapolar os dados experimentais, fazendo com que a curva passe pela origem. Este procedimento se fez necessário devido à limitação do oscilador. Essa hipótese é bastante natural, mas precisa de uma posterior verificação.

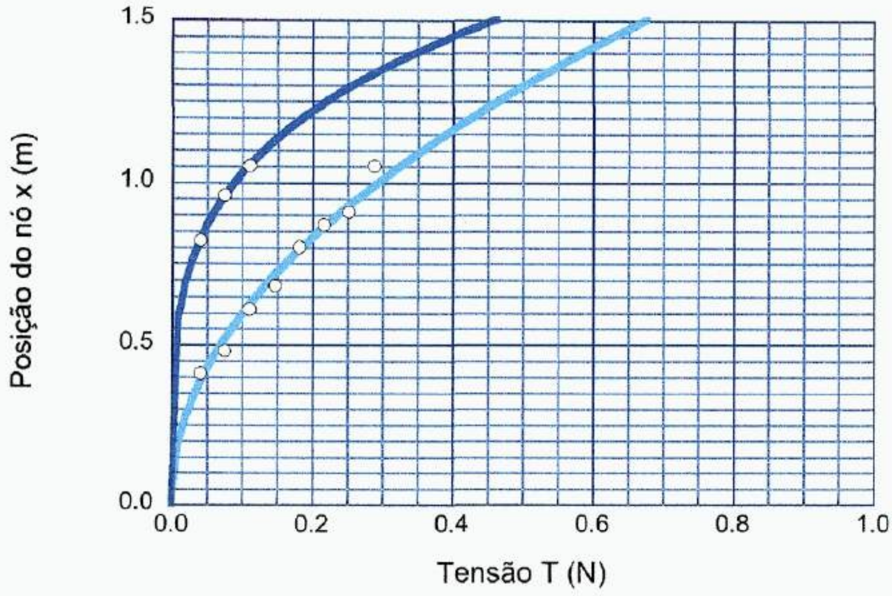


Figura 17. Gráfico com a posição dos nós e as curvas para a linha 1 de $\rho = 2,15 \times 10^{-5}$ kg/m. Cada cor representa um nó: azul claro - 1° nó, azul escuro – 2° nó.

Percebendo que a distância entre os nós é igual para cada valor da tensão na linha, sugerimos ao aluno que meça a diferença entre as posições do primeiro nó e o ponto fixo, visto que há diminuição do número de nós à medida que aumentamos a tensão na linha. O objetivo é construir um novo gráfico, com o intuito de facilitar a compreensão das relações entre a tensão e a distância entre os nós.

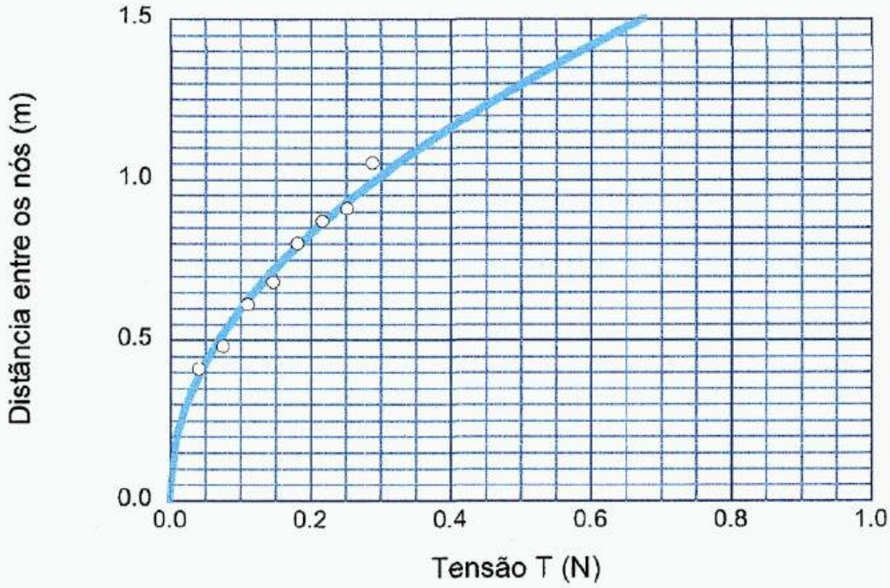


Figura 18. Gráfico com a distância entre nós para a linha 1 de $\rho = 2,15 \times 10^{-5}$ kg/m

Colocando o fio de densidade (2,15±0,01) x 10^{-6} kg/m na base superior de madeira do experimento, obtemos os dados iniciais, apresentados na tabela abaixo.

Tabela 3. Tabela com os dados para a linha 2, de densidade $\rho = 3,19 \times 10^{-5}$ kg/m.

Linha 2 $\rho = 3,19 \times 10^{-5}$ kg/m				
Medida	**Tensão T ± 0,01 (N)**	**Posição do nó X_1 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_2 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_3 ± 0,01 (m**
1	0,052	0,33	0,66	0,98
2	0,087	0,43	0,86	-
3	0,122	0,55	1,10	-
4	0,158	0,58	-	-
5	0,193	0,65	-	-
6	0,228	0,70	-	-
7	0,264	0,76	-	-
8	0,299	0,84	-	-
9	0,334	0,88	-	-
10	0,369	0,91	-	-
11	0,405	0,96	-	-
12	0,440	1,02	-	-
13	0,475	1,10	-	-

Com os dados da Tabela 3, construímos um gráfico com todas as posições dos nós para cada tensão na linha. Podemos observar que nossa análise anterior sobre a diminuição da tensão e a conseqüente diminuição da distância entre os nós, se torna mais clara para esse gráfico.

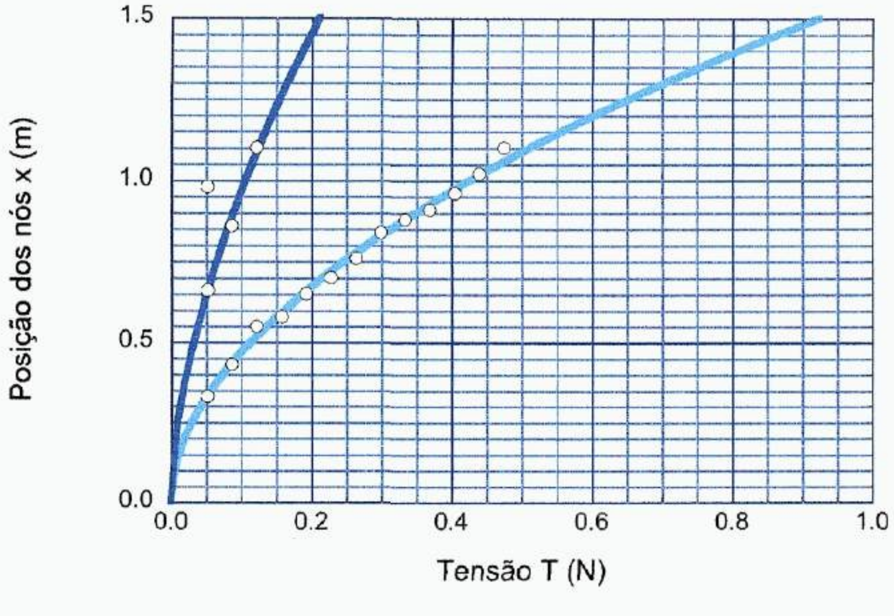


Figura 19. Gráfico com a posição dos nós e as curvas para a linha 2 de $\rho = 3{,}19 \times 10^{-5}$ kg/m

Como na linha anterior montamos um novo gráfico com a distância entre os nós cada tensão.

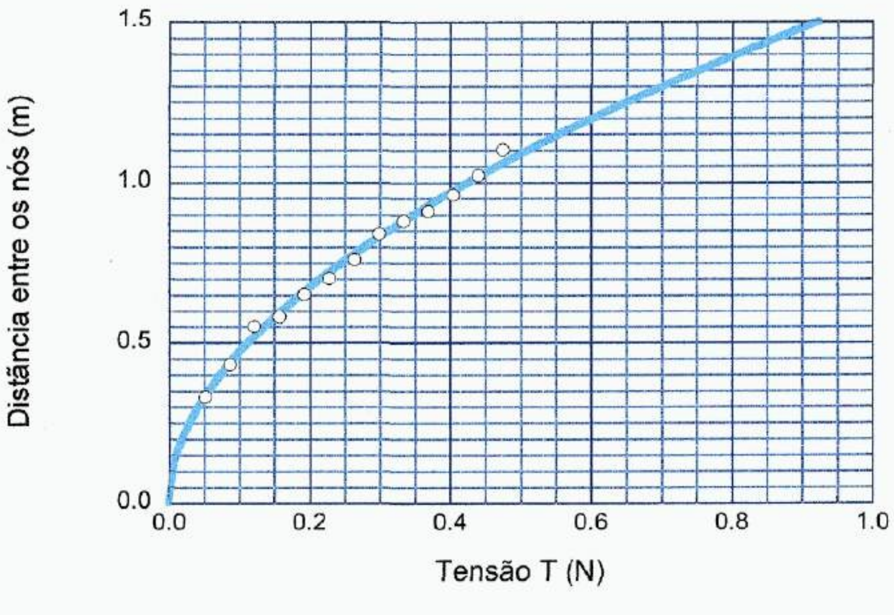


Figura 20. Gráfico com a distância entre nós para a linha 2 de $\rho = 3{,}19 \times 10^{-5}$ kg/m

Colocando o fio de densidade (2,15±0,01) x 10^{-6} kg/m na base superior de madeira do experimento, obtemos os dados iniciais, apresentados na tabela abaixo:

Tabela 4. Tabela ~~com os~~ dados para a linha 3, de densidade $\rho = 2{,}752 \times 10^{-4}$ kg/m.

Linha 3 $\rho = 2{,}752 \times 10^{-4}$ kg/m					
Medida	**Tensão T ± 0,01 (N)**	**Posição do nó X_1 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_2 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_3 ± 0,01 (m**	**Posição do nó X_4 ± 0,01 (m**
1	0,155	0,210	0,420	0,630	0,840
2	0,190	0,230	0,460	0,690	0,920
3	0,224	0,255	0,510	0,765	1,030
4	0,258	0,270	0,540	0,810	1,030
5	0,293	0,290	0,580	0,870	1,030
6	0,362	0,310	0,620	0,930	1,030
7	0,396	0,325	0,650	0,975	1,030
8	0,431	0,345	0,690	1,030	-
9	0,466	0,360	0,720	1,030	-
10	0,500	0,380	0,760	1,030	-
11	0,569	0,400	0,800	1,030	-

Com os dados da Tabela 3, construímos um gráfico com todas as posições dos nós para cada tensão na linha.

Cuidado!

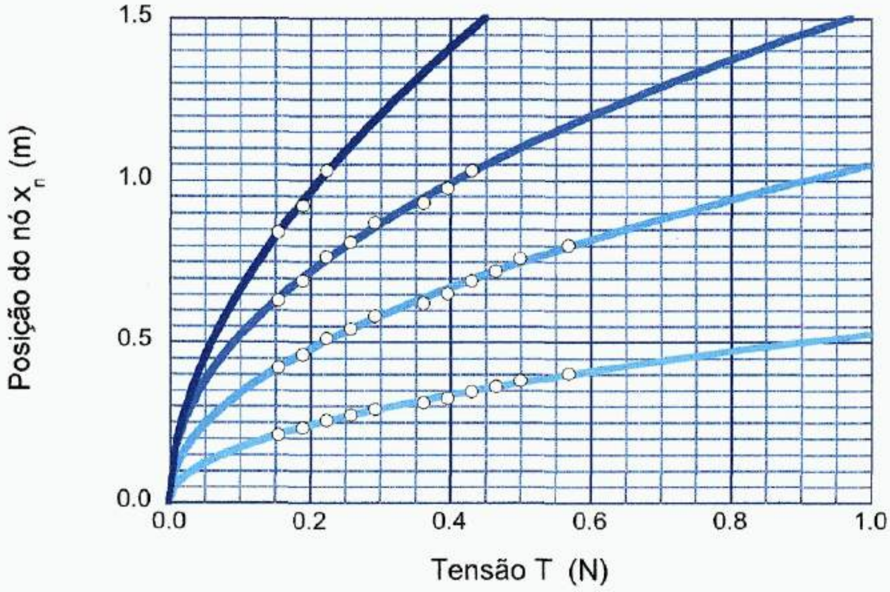


Figura 21. Gráfico com a posição dos nós para a linha 3 de $\rho = 2{,}752 \times 10^{-4}$ kg/m

Repetimos o procedimento para cada linha utilizada e construímos um gráfico com a distância entre os nós.

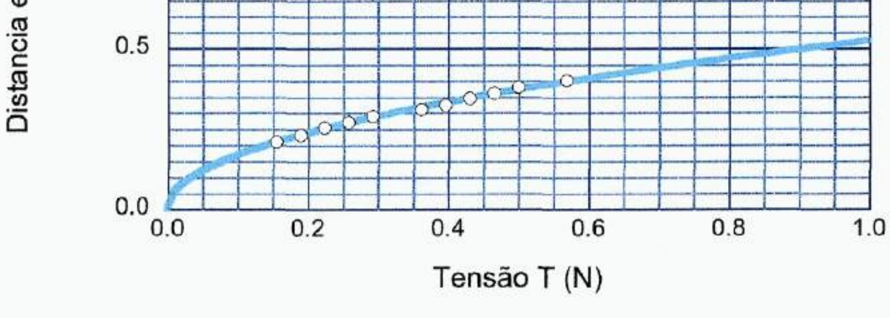


Figura 22. Gráfico com a distância entre nós para a linha 3 de $\rho = 2{,}752 \times 10^{-4}$ kg/m

Tabela 5. Tabela com os dados para a linha 4, de densidade ρ = 2,1415 x 10^{-3} kg/m.

Linha 4 ρ = 2,1415 x 10^{-3} kg/m									
Medida	**Tensão T ± 0,01 (N)**	**Posição do nó X_1 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_2 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_3 ± 0,01 (m**	**Posição do nó X_4 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_5 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_6 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_7 ± 0,01 (m)**	**Posição do nó X_8 ± 0,01 (m**
1	0,182	0,130	0,260	0,390	0,520	0,650	0,780	0,910	1,030
2	0,288	0,147	0,300	0,440	0,590	0,736	0,883	1,030	-
3	0,358	0,160	0,320	0,480	0,640	0,800	0,965	1,030	-
4	0,393	0,170	0,343	0,516	0,680	0,855	1,030	-	-
5	0,499	0,185	0,370	0,560	0,740	0,925	1,030	-	-
6	0,534	0,200	0,400	0,600	0,800	1,000	-	-	-
7	0,570	0,206	0,412	0,620	0,825	1,030	-	-	-
8	0,711	0,230	0,460	0,690	0,920	1,030	-	-	-
9	0,852	0,245	0,490	0,736	0,980	-	-	-	-
10	0,922	0,255	0,510	0,765	1,030	-	-	-	-
11	0,993	0,260	0,520	0,780	1,030	-	-	-	-

Com os dados da Tabela 3, construímos um gráfico com todas as posições dos nós para cada tensão na linha.

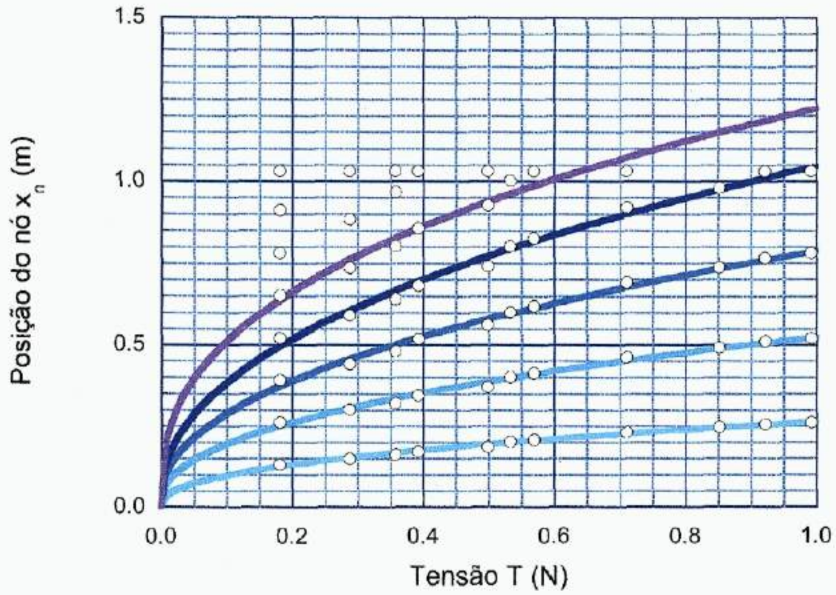


Figura 23. Gráfico com a posição dos nós para a linha 4 de $\rho = 2,1415 \times 10^{-3}$ kg/m

Novamente construímos o gráfico da distância entre os nós.

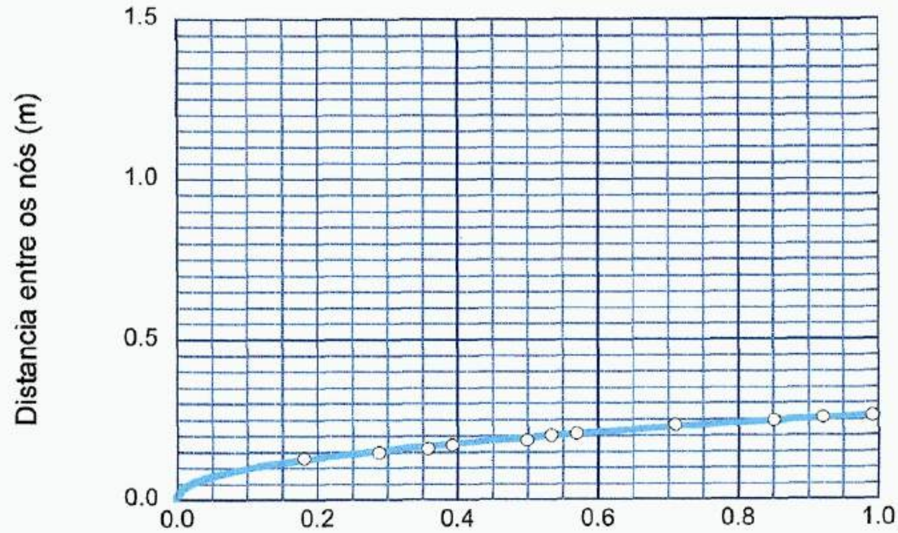


Figura 24. Gráfico com a distância entre nós para a linha 4 de $\rho = 2,1415 \times 10^{-3}$ kg/m

Como a cada linha a densidade linear é aumentada, analisamos em um novo gráfico a relação entre a distância dos nós para cada tensão de todas as linhas utilizadas.

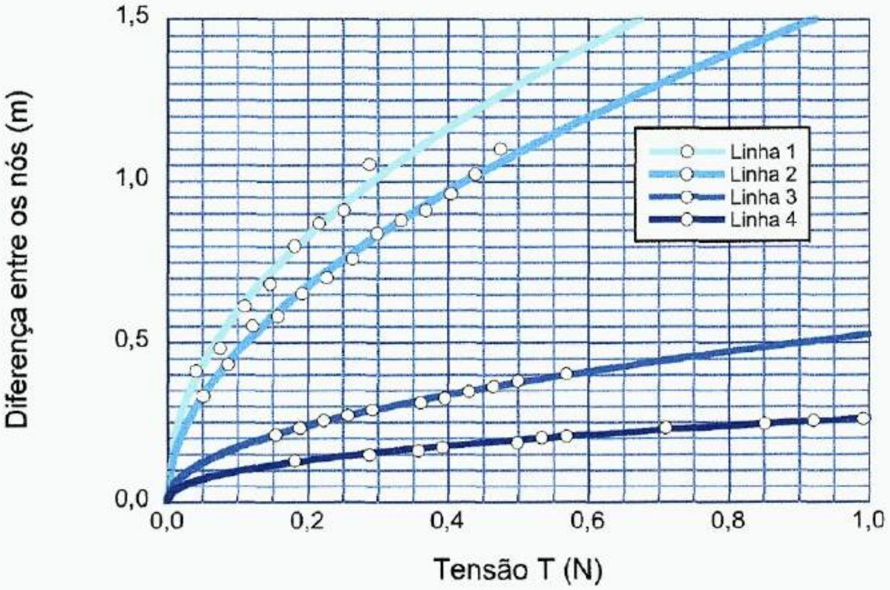


Figura 25. Gráfico com a distância entre nós para todas as linhas

Portando, conforme diminuímos a tensão, automaticamente a distância dos nós também deve diminuir e se aproximar do zero.

Análise dos resultados

Não basta somente determinar graficamente a relação funcional entre a distância entre os nós e a tensão na corda. O ideal é obtermos também uma forma algébrica entre essas duas grandezas.

Nesta seção apresentaremos um método de construção geométrica de curvas cônicas para estabelecer qual é a função que relaciona os dois parâmetros considerados. [3]

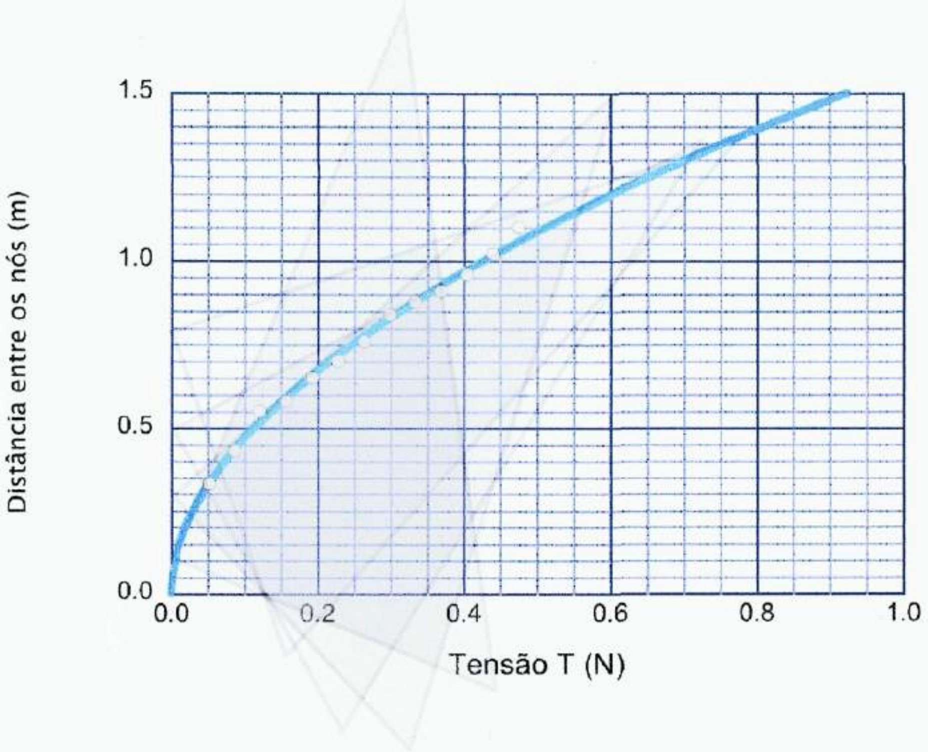


Figura 26. Verificação da parábola no gráfico com a distância entre nós para a linha 2.

Podemos aproveitar os resultados obtidos até o momento e exercitar a interdisciplinaridade com a Matemática.

Sobre qualquer uma das curvas do gráfico da Figura 25 podemos fazer a seguinte análise geométrica: traçamos os dois segmentos de reta em cinza, como indicado na Figura 26, utilizando um esquadro para auxiliar. Um dos segmentos é tangente à curva que desejamos analisar (ponto P, pertencente à curva considerada na figura 27), o outro segmento forma um ângulo reto com o primeiro e corta o eixo das tensões T em um determinado ponto F.

Observamos que, se procedermos da mesma maneira considerando outros pontos $P(s)$, sobre a mesma curva, obtemos o mesmo ponto F, determinado anteriormente. Não importa qual ponto P escolhamos sobre a curva considerada, o procedimento descrito conduz sempre ao mesmo ponto F. Mais ainda, se prolongarmos o eixo das abscissas x de uma distância igual à distância que vai do vértice da curva (ponto 0,0) ao ponto focal F, definimos a posição F', correspondente à linha diretriz da curva considerada (linha H em vermelho).

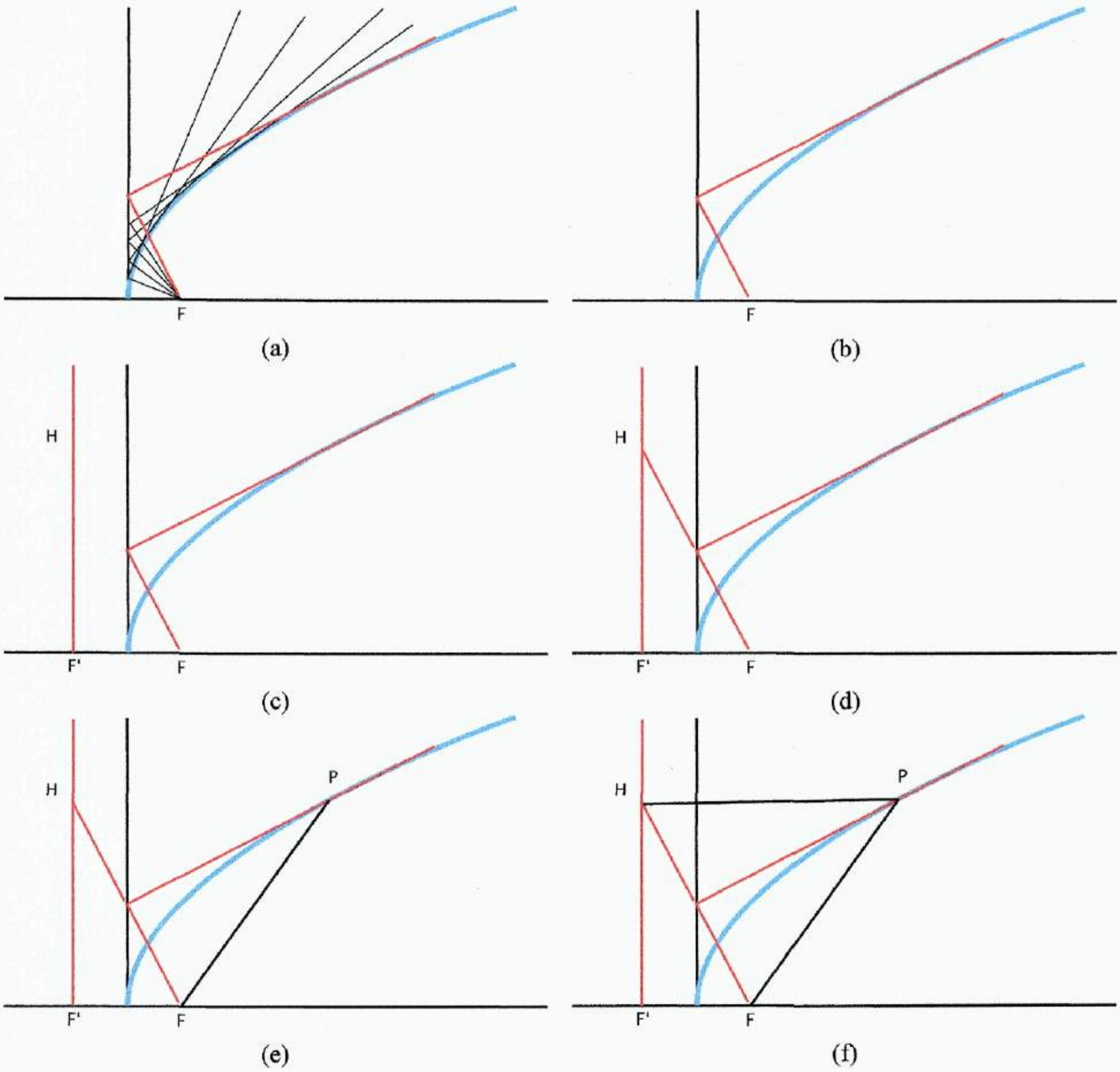


Figura 27. Construção da parábola.

Percebemos, então, que a excentricidade e da curva (a razão entre as distâncias FP e HP (e=FP/HP)) é sempre igual a uma unidade. Curvas que obedecem a estas propriedades são denominadas parábolas. Quando o eixo de simetria da curva coincide com um dos eixos de coordenadas elas obedecem sempre à seguinte expressão algébrica:

$$F(x) = a + bx + cx^2, \tag{12}$$

No nosso problema, x corresponde ao parâmetro D, as letras a, b e c são constantes a serem determinadas e $F(x)$ corresponde ao parâmetro T.

Portanto, podemos escrever que a tensão está relacionada com a distância entre os nós pela expressão:

$$T = a + bD + cD^2. \tag{13}$$

Podemos determinar os valores das constantes a, b e c procedendo da seguinte maneira: quando a tensão é nula, não temos corda vibrando e, por conseqüência, não há nós.

Para que isso seja previsto pela Eq. (13), devemos considerar:

$$a = 0. \tag{14}$$

Isso reduz a Eq. (13) à forma:

$$\begin{aligned} T &= bD + cD^2 \\ &= D(b + cD). \end{aligned} \tag{15}$$

Uma vez mais, observamos que, para $T = 0$, devemos ter

$$D = 0, \tag{16}$$

(que é uma solução já conhecida), mas também uma outra solução:

$$D = -\frac{b}{c}. \tag{17}$$

Entretanto, se b for diferente de zero, existirá uma distância D não nula, correspondendo a uma tensão nula. Isso significa produzir uma onda estacionária sem tensão na corda! Portanto, não temos outra escolha senão também considerar $b = 0$.

Finalmente, podemos escrever que, a distância entre os nós da corda vibrante e a tensão a qual ela está submetida obedecem à seguinte relação algébrica:

$$T = cD^2. \tag{18}$$

Reescrevendo a expressão acima, de forma que a conseqüência fique em função da causa, obtemos:

$$D = \left(\frac{T}{c}\right)^{1/2}. \tag{19}$$

Assim, podemos concluir que a distância D entre os nós da corda vibrante é função da raiz quadrada da tensão T a qual ela, a corda, está submetida.

Da Figura 25, podemos concluir que o valor de c depende de qual corda consideremos e, deste modo, o valor da constante c depende de alguma característica da corda empregada.

Usando a técnica da análise dimensional, temos que a dimensão de c, $[c]$, deve ser descrita pelo produto:

$$[c] = [T][D]^{-2}. \tag{20}$$

Estamos adotando T_0 como tensão da corda na análise dimensional, para não confundir com T da unidade de tempo. Como as dimensões de T_0 e D são, respectivamente,

$$\begin{aligned}[T_0] &= MLT^{-2} \\ [D] &= L\end{aligned}, \tag{21}$$

podemos escrever que a dimensão de c é igual a

$$[c] = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}. \tag{22}$$

O termo ML^{-1} na Eq. (22) nos sugere que o valor de c está associado à densidade linear das linhas empregadas e o termo T^{-2} deve corresponder a uma freqüência característica da oscilação.

Podemos determinar os valores de c, usando a Eq. (18), como hipótese de trabalho. Essa equação nos sugere que há uma relação funcional entre a tensão na corda e o quadrado da distância entre os nós.

Podemos então construir um gráfico entre estas duas grandezas, representadas na Figura 28, e analisar o resultado.

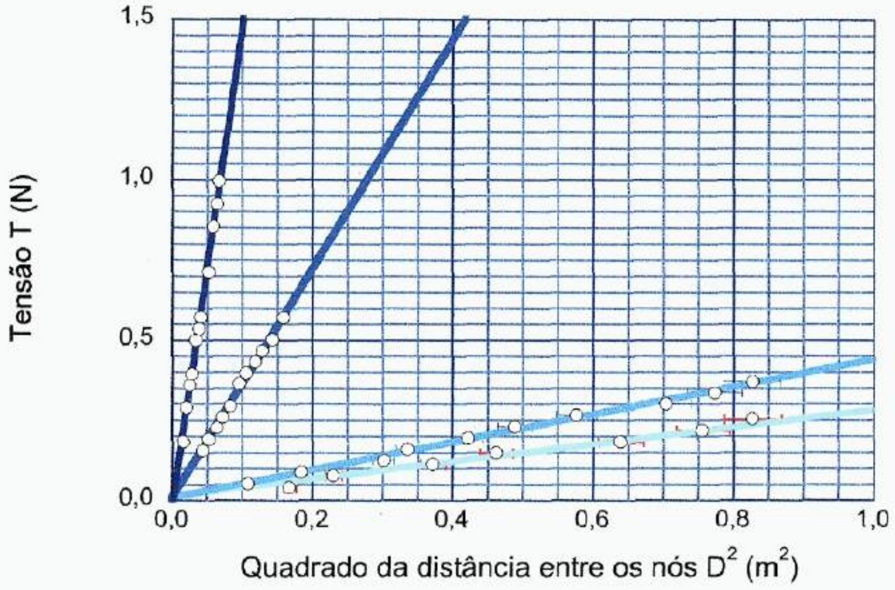


Figura 29. Gráfico relacionando a tensão na corda com o quadrado da diferença dos nós para todas as cordas.

De fato, fazendo um novo gráfico relacionando os diferentes valores de c encontrados para as diferentes cordas em função da densidade linear delas, obtemos a Figura 30:

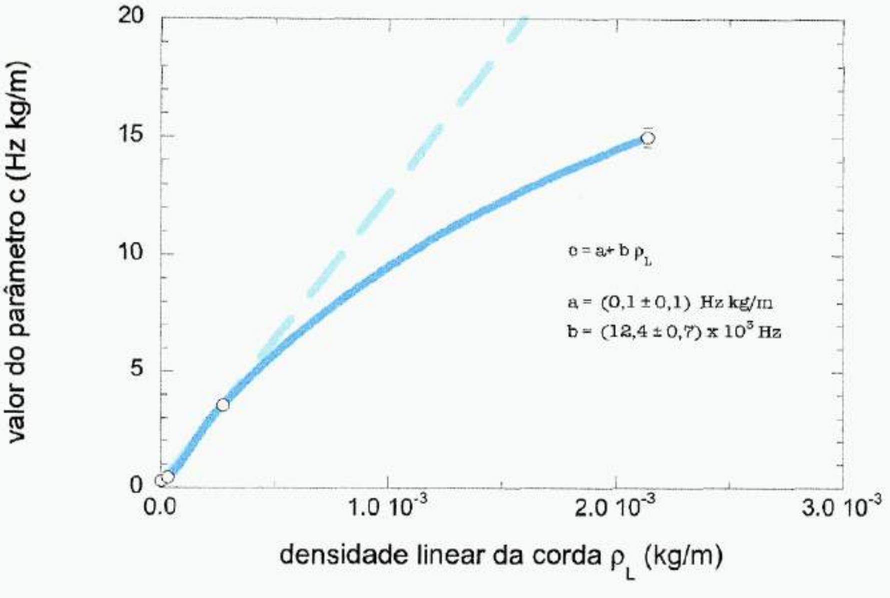


Figura 30. Gráfico relacionando o parâmetro c com a densidade linear de todas as cordas.

Podemos concluir da análise da curva no gráfico da Figura 30, em primeira aproximação, que o coeficiente c é diretamente proporcional à densidade linear das cordas:

$$a \sim 0 \tag{23}$$

e

$$c \sim b\rho_L \,. \tag{24}$$

Observemos, ainda, segundo a Eq.(22), que o coeficiente b tem dimensão de freqüência e deve estar relacionado com o quadrado de alguma freqüência característica do experimento. Não é difícil associar esta freqüência característica com a freqüência de oscilação imposta pelo oscilador eletromecânico.

Para verificar tal hipótese, basta lembrar aos alunos que o oscilador foi projetado para funcionar conforme a oscilação da rede elétrica f, de 60 Hz. Se for este o caso, temos:

$$f^2 = 3,6 \times 10^3 Hz^2 \,. \tag{25}$$

Podemos escrever, então, que

$$\frac{b}{f^2} = \frac{12,4}{3,6} = 3,6 \tag{26}$$

ou, ainda, substituindo esse resultado na Eq. (24), que o parâmetro c pode ser descrito em boa aproximação pela equação:

$$c \sim 3,6 f^2 \rho_L \,. \tag{27}$$

Finalmente, podemos combinar as Eqs. (27) e (19) na forma:

$$1,9fD \sim \left(\frac{T}{\rho_L}\right)^{1/2}. \tag{28}$$

Definindo $2D = \lambda$ como comprimento da onda λ da deformação (onda) produzida na corda vibrante, percebemos que a Eq. (28) não é muito diferente da fórmula usual dada nos livros:

$$f\lambda = \left(\frac{T}{\rho_L}\right)^{1/2}. \tag{29}$$

Evidentemente, uma melhor ou pior aproximação para a equação tradicional vai depender das densidades das cordas empregadas.

A idéia, entretanto, não é determinar a fórmula tradicional, mas mostrar ao aluno que através da técnica de análise e síntese dos resultados, podemos estabelecer relações entre as grandezas físicas sem invocar nenhum modelo *a priori*. Mais ainda, toda uma discussão de validade da lei de dispersão pode ser apresentada.

No nosso experimento, por exemplo, percebemos que cordas de maior densidade não serão capazes de sustentar as oscilações impostas pela bomba de forma harmônica.

vibrador

Conclusões

A experiência da corda vibrante pode ser utilizada como mais uma ferramenta na prática pedagógica de um professor, sendo capaz de influenciar positivamente na formação intelectual e cognitiva do aluno, abrindo novas portas para os estudantes ao revelar as técnicas empregadas no meio científico para a determinação das leis físicas.

O experimento sugerido também mostrou estar de acordo com as exigências de um laboratório didático, devido a vários fatores. Entre eles:

- O baixo custo empregado para o desenvolvimento da experiência;
- O tempo gasto com a coleta de dados é relativamente pequeno (cerca de uma hora);
- Fenômenos complexos podem ser apresentados para os alunos de uma forma simples, evitando grandes formalismos matemáticos;
- Desenvolvemos nos alunos o raciocínio crítico necessário para uma formação ampla e completa;
- Introduzimos um assunto moderno e de muitas aplicações tecnológicas de uma forma simples e que possibilita a compreensão por parte de todos;
- Levamos para a sala de aula a física como uma ciência de caráter experimental.

Outro ponto de registro é a proposta de interdisciplinaridade entre professores de matemática e física, apontando alternativas para uma prática docente interligada e contextualizada.

O processo histórico envolvendo o fenômeno cria grande expectativa e desperta o interesse do aluno em relação à disciplina, eliminando de vez o estigma de "disciplina chata".

Por fim, o tema tem uma riqueza extraordinária de conteúdo e abordagens que despertam a curiosidade do aluno acerca dos fenômenos ondulatórios, presentes em seu cotidiano. Talvez por esta razão o assunto seja uma fonte inesgotável de diferentes propostas educacionais, visando ao aprendizado dinâmico, instrutivo, tecnológico e aplicado, e constituindo-se como mais uma contribuição aos nossos colegas, fato que nos possibilitará adequarmos nosso planejamento de curso sob uma visão mais integrada e contextualizada de ensino.

Apresentamos uma proposta de ensino que enfatiza aspectos importantes do processo científico tais como: (i) a observação do fenômeno buscando desenvolver a curiosidade em relação ao mesmo e observar a relação de causa e efeito; (ii) a experimentação e medição provocando os fenômenos várias vezes, registrando-se todas as possíveis variações e valores relacionados a ele; e, finalmente, depois da análise dos resultados da experimentação, formalizamos uma lei física, representada por uma relação matemática, que estabelece uma relação - de causa e efeito - acerca dos resultados obtidos e estudados.

O método aqui proposto se mostra importante na formação dos alunos, pois ajuda a desenvolver suas Competências e Habilidades, como sugerido pelos PCN's.

Portanto, ao empregar este método em sala de aula, em uma turma, esperamos observar as seguintes competências e habilidades desenvolvidas pelos alunos, de acordo com os PCN's:

- Utilizar e compreender tabelas, gráficos e relações matemáticas gráficas para a expressão do saber físico. Ser capaz de discriminar e traduzir as linguagens matemáticas;
- Elaborar sínteses ou esquemas estruturados dos temas físicos trabalhados;
- Desenvolver a capacidade de investigação física;
- Classificar, organizar, sistematizar. Identificar regularidades. Observar, estimar ordens de grandeza, compreender o conceito de medir, fazer hipóteses, testar;
- Conhecer e utilizar conceitos físicos. Relacionar grandezas, quantificar, identificar parâmetros relevantes. Compreender e utilizar leis e teorias físicas;
- Compreender a física no mundo vivencial e nos equipamentos e procedimentos tecnológicos;
- Construir e investigar situações–problema, identificar a situação física, utilizar modelos físicos, generalizar de uma a outra situação, prever, avaliar, analisar previsões;
- Reconhecer a física enquanto construção humana, aspectos de sua história e relações com o contexto cultural, social, político e econômico;

Além disso, a experimentação motiva os estudantes, ativa a curiosidade, desenvolve a capacidade de analisar resultados e permite a troca de conceitos com o professor de forma mais estreita.

Com isso, acreditamos que esse método permita auxiliar o aluno no seu aprendizado, pois ordena os conceitos, planeja as estratégias de trabalho, promove atitudes críticas, objetivas e científicas, mostrando os caminhos e métodos de investigação quando se encontram frente a uma situação desconhecida.

Referências

[1] Marie-Geneviève Séré, Suzana Maria Coelho, António Dias Nunes, "O Papel da Experimentação no Ensino da Física" Faculdade de Física PUCRS. Porto Alegre, RS.2004

[2] Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), Parte III, 1999.

[3] J. M. Blair, "A Variation of Melds's Experiment", Am. J. Phys. 28, 11 (Nov. 1970) 1317-8; C. N. Wall e R. R. Levine, Physics Laboratory manual, prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962, 2a edição, Experiencia 60.

[4] Ramalho, Nicolau e Toledo, "Os Fundamentos da Física", 8ª ed., Ed Moderna, Rio de Janeiro, 2004.

[5] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – 9.394/96 (LDB).

[6] S. Jacquemard, "Pitágoras e a harmonia das esferas", Difel, Rio de Janeiro, 2006;

[7] R.H. Hoppin, "Medieval Music", W.W. Norton & Co., New York, 1978.

[8] Wikipédia : Pitágoras, quadro de Raffaello Sanzio (1509) exposto na *Escola de Atenas*

[9] Coleção Os Pensadores, "Os Pré-socráticos", Abril Cultural, São Paulo, 1.ª edição, vol. I, 1973.

[10] J. G. Roederer, "Introdução à física e psicofísica da música", USP, São Paulo, 1988.

[11] "Música e revolução científica" in *Kepler, a harmonia dos astros*, em: coleção Scientific American apresenta Gênios da Ciência, Duetto, São Paulo, 2005.

[12] D. MacKie, "The rise of scientific societies and periodicals", Phys. Edu.1966.

[13] "Correspondance du P. Marin Mersenne: Religieux Minime/P.Marin,Mersenne". - Paris: Centre National, 1980.

[14] C. C. Gillispie, "Dictionary of Scientific Biographies", Princeton University Press, 1981, vol. 9.

[15] K. F. Graff, "A History of Ultrasonics", *in* Physical Acoustics, vol. XV, Academic Press, New York, 1982.

[16] M. Baron. "Curso de História da Matemática: Origens e desenvolvimento do cálculo" Brasília, Ed. Universidade de Brasília, 1985.

[17] J. M. Blair, "A Variation of Melde's Experiment", Am. J. Phys. 28, 1 (Nov. 1970) 1317-8; C. N. Wall e R. R. Levine, Physics Laboratory manual, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962, 2a edição, Experiência 60.