UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
ESCOLA POLITÉCNICA
ENGENHARIA CIVIL
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA APLICADA E ESTRUTURAS

ANÁLISE DE VIBRAÇÕES LIVRES EM ESTRUTURAS OFFSHORE COM ÊNFASE EM LINHAS DE ANCORAGEM

CRISTIANO SANTOS DE AGUIAR

Projeto de Final de Curso apresentado ao corpo docente do Departamento de Mecânica Aplicada e Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovado por:

_____
Prof. Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc (Orientador)

_____
Prof. Carlos Magluta, D.Sc. (Orientador)

_____
Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr. Ing.

_____
Prof. Roberto Fernandes de Oliveira, D.Sc.

Outubro / 2005

Aos meus pais, Geraldo e Lourdes,
que são a base de uma
família maravilhosa.

Escolhe um trabalho de que gostes,
e não terás que trabalhar nem um dia na tua vida.
(Confúcio)

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Geraldo Cardoso de Aguiar e Maria de Lourdes Santos de Aguiar, por me apoiarem em todos os momentos do meu caminho até aqui.

Aos meus irmãos, Luciano e Suzana, pela grande amizade e por serem exemplos que seguirei por toda minha vida.

À Thiago Ângelo Gonçalves de Lacerda, grande amigo dentro e fora da faculdade; este trabalho não seria possível sem a realização do seu projeto final de curso, do qual este é continuação.

Aos grandes amigos que ganhei durante toda a graduação, que com certeza estarão presentes em outras etapas de minha vida.

Aos orientadores Gilberto Bruno Ellwanger e Carlos Magluta, mestres que me apoiaram e incentivaram, sempre com interesse e vontade de fazer este projeto o mais rico possível.

Índice

1. Introdução e motivação 6

2. Sistema de ancoragem para unidades flutuantes 9

2.1. Tipos de materiais 9

2.1.1. Amarras 9
2.1.2. Cabos de Aço 10
2.1.3. Cabos de Poliéster 11
2.1.4. Cabos de Aramida 12

2.2. Tipos de ancoragem 13

2.2.1. Ancoragem convencional 13
2.2.2. Ancoragem *taut-leg* 14
2.2.3. Ancoragem vertical 15

3. Risers 17

3.1. Tipos de configurações 17

3.1.1. *Riser* vertical 17
3.1.2. *Riser* em catenária 18
3.1.3. *Riser* em configuração complexa 18

3.2. Tipos de materiais 19

3.2.1. *Riser* rígido 19
3.2.2. *Riser* flexível 21

4. Tipos de plataformas flutuantes 23

4.1. Semi-submersível 24

4.2. Navios 25

4.3. Spar-Buoy 30

4.4. Plataforma com pernas tracionadas (TLP – *Tension Leg Platform*) 31

5. Análise dinâmica de sistemas de ancoragem 34

5.1. Fundamentos 34

5.2. Matriz de rigidez 39

5.3. Matriz de massa 40

5.3.1. Matriz de massa consistente 41
5.3.2. Matriz de massa concentrada 41
5.3.3. Matriz de massa adicional 42

5.4. Vibrações livres 43

6. Formulação computacional 46

6.1. Estratégia de análise 46

6.2. Método do subespaço 49

7. Casos a serem estudados 52

7.1. Verificação do programa 52

7.1.1. Viga biapoiada 53
7.1.2. Linha em catenária 56
7.1.3. *Pipeline* bi-engastado em vão livre 58

7.2. Ancoragem convencional 62

7.2.1. Número de elementos do modelo 64
7.2.2. Resistência a flexão 65
7.2.3. Estudo dos modos naturais de vibração 66

7.3. Ancoragem *taut-leg* 73

7.3.1. Número de elementos 75
7.3.2. Resistência à flexão 75
7.3.3. Estudo dos modos naturais de vibração 76

7.4. Análise dos resultados 81

8. Fadiga de linhas de ancoragem 85

8.1. Cálculo do dano em linhas de ancoragem 86

9. Conclusão e sugestões para trabalhos futuros 89

10. Bibliografia 90

Apêndice: Formulação da matriz de rigidez geométrica para pórtico plano 92

Índice de figuras

Figura 2.1 - Elos de amarras. 9
Figura 2.2 - Cabos de Aço. 10
Figura 2.3 – Spar-buoy Mad Dog em operação no Golfo do Mexico 12
Figura 2.4 – Linha de ancoragem convencional. 13
Figura 2.5 – Linha de ancoragem *taut-leg* 14
Figura 2.6 – comparação entre a ancoragem convencional e *taut-leg* 15
Figura 2.7 – Exemplo de ancoragem vertical 16
Figura 3.1 – *Riser* na configuração vertical 17
Figura 3.2 – Configuração em catenária do *riser* 18
Figura 3.3 – Formas da configuração complexa de *riser* 19
Figura 3.4 – *Riser* rígido vertical 20
Figura 3.5 – *Riser* rígido em catenária e sua conexão 20
Figura 3.6 – Seção transversal de um *riser* flexível 21
Figura 3.7 – Utilização do *riser* flexível combinado com o rígido 22
Figura 4.1 – Movimentos de corpo rígido de uma semi-submersível 23
Figura 4.2 – Visão geral de uma semi-submersível 24
Figura 4.3 – Semi-submersível com ancoragem convencional 25
Figura 4.4 – Semi-submersível com ancoragem *taut-leg* 25
Figura 4.5 – Navio com ancoragem em ponto único (SPM) 27
Figura 4.6 – *turret* interno 27
Figura 4.7 – *turret* externo 28
Figura 4.8 – Visão geral do sistema CALM 29
Figura 4.9 – Navio com sistema DICAS de ancoragem 30
Figura 4.10 – Conceito de uma Spar Buoy 31
Figura 4.11 – Movimentos de corpo rígido de uma TLP 33
Figura 5.1 – Sistema mecânico massa-mola-amortecedor 35
Figura 5.2 – Sistema com múltiplas massas em série. 36
Figura 5.3 – Elemento de pórtico plano e seus deslocamentos nodais 38
Figura 6.1 – Fluxograma indicativo do funcionamento do programa 49
Figura 7.1 – Viga biapoiada utilizada para verificação. 53
Figura 7.2 – Gráfico mostrando a variação da freqüência com a carga axial 55
Figura 7.3 – Geometria da linha em catenária 57

Figura 7.4 – Exemplo de *pipeline* biengastado 58
Figura 7.5 – Modos transversais e freqüências naturais para o *pipeline* 61
Figura 7.6 – Modos axiais e freqüências naturais para o *pipeline*..... 62
Figura 7.7 – Visão geral do sistema de ancoragem convencional estudado..... 63
Figura 7.8 – Forma modal 1 para ancoragem convencional..... 66
Figura 7.9 – Forma modal 2 para ancoragem convencional..... 67
Figura 7.10 – Forma modal 3 para ancoragem convencional..... 67
Figura 7.11 – Forma modal 4 para ancoragem convencional..... 68
Figura 7.12 – Forma modal 5 para ancoragem convencional..... 68
Figura 7.13 – Forma modal 6 para ancoragem convencional..... 69
Figura 7.14 – Freqüências naturais para as formas modais analisadas (ancoragem convencional). 70
Figura 7.15 – Quarto modo de vibração no *offset* -10,0% (ancoragem convencional) .. 71
Figura 7.16 – Forma modal 7 na ancoragem convencional..... 72
Figura 7.17 – Forma modal 8 na ancoragem convencional..... 72
Figura 7.18 – Visão geral do sistema de ancoragem *taut-leg* estudado 74
Figura 7.19 – Forma modal 1 para ancoragem *taut-leg* 76
Figura 7.20 – Forma modal 2 para ancoragem *taut-leg* 77
Figura 7.21 – Forma modal 3 para ancoragem *taut-leg* 77
Figura 7.22 – Forma modal 4 para ancoragem *taut-leg* 78
Figura 7.23 – Forma modal 5 para ancoragem *taut-leg* 78
Figura 7.24 – Forma modal 6 para ancoragem *taut-leg* 79
Figura 7.25 – Freqüências naturais para as formas modais analisadas (ancoragem *taut-leg*)..... 80
Figura 7.26 – Forma modal 7 na ancoragem *taut-leg* 81
Figura 7.27 – Relação da variação da rigidez EA com as freqüências naturais. 82
Figura 7.28 – Comparação das freqüências naturais nos dois exemplos..... 83
Figura 7.29 – Variação da razão da tração na âncora por peso total suspenso..... 84
Figura 8.1 - Curva T-N – amarra e cabo de aço – extraída da API-2SK..... 85

Alguns termos relativos à indústria *offshore*:

Amarra - corrente, linha formada por elos ligados entre si.

Catenária - formato que uma linha assume quando está suspensa sob a ação do peso próprio

CBS - do inglês: *Catalog Breaking Load*. É o mesmo que o MBL.

DICAS - *Differentiated Compliance Anchoring System*, ancoragem com complacência diferenciada, para navios.

Fairlead - o ponto de conexão da linha de ancoragem no flutuante.

FPSO - *Floating Production Storage Offloading*, navio que permite além da produção, o armazenamento e escoamento do óleo produzido.

Hawser - espias ou cabo para atracação do navio, ligação com outro navio ou bóia no sistema de ancoragem CALM (descrito adiante no item 4.2).

Heave - movimento vertical da embarcação

Lâmina d'água (LDA) - profundidade ou distância vertical do fundo do mar à superfície da água

MBL - *Minimum Breaking Load*, carga mínima de ruptura de um cabo.

Offset - Distância percorrida pela plataforma no plano horizontal da superfície da água.

Pipeline - Duto para transporte de óleo ou gás.

Pitch - movimento de giro em torno do eixo y da embarcação

Projeção horizontal - Distância horizontal do *fairlead* à âncora

Projeção vertical - distância vertical do *fairlead* à ancora

Raio de ancoragem - Distância Horizontal ocupada por um sistema de ancoragem

Risers - tubulação rígida ou flexível que liga a plataforma ao fundo do mar para transporte dos fluidos.

Roll - movimento de rotação em torno do eixo x (aproamento) da embarcação.

SCR - *Steel Catenary Riser*, riser rígido com geometria de catenária.

Surge - movimento na direção x da embarcação

Sway - movimento na direção y da embarcação.

TDP - *Touchdown Point*, Ponto onde a linha de ancoragem ou riser em catenária toca o solo

Turret - Região onde as linhas e *risers* se conectam e este componente permite que a embarcação gire em torno deste ponto sem que as linhas se cruzem.

Yaw - movimento de rotação em torno do eixo z da embarcação.

1. Introdução e motivação

Nas últimas décadas, o Brasil viu o desenvolvimento de novas tecnologias que nos fizeram garantir a capacidade de extração de petróleo em poços localizados em águas cada vez mais profundas [1]. Desta forma, estas novas tecnologias passam inevitavelmente pela utilização de sistemas flutuantes de produção, já que as plataformas fixas não apresentam mais funcionalidade visto que possuem um limite técnico e econômico em torno de 400 metros de profundidade [2].

Atualmente a máxima perfuração de poços exploratórios situa-se entorno de 3.000 metros e a máxima explotação (produção econômica) em torno de 2.200 metros [2]. Nestas condições, estruturas complacentes como os sistemas flutuantes são submetidos a situações extremas resultantes das ações do meio ambiente tais como ondas, correntezas e vento. Assim se torna imprescindível a utilização de um eficiente sistema de ancoragem para garantir a essa estrutura flutuante a necessária segurança.

O sistema de ancoragem é um conjunto de linhas de ancoragem compostas por diferentes materiais e âncoras ou estacas, que transferem os esforços que agem sobre a plataforma para o solo. Os tipos de ancoragem, além de seus materiais e características, serão discutidos mais adiante neste trabalho.

Como as ações ambientais atuantes em um sistema flutuante não são de natureza estática, torna-se importante o estudo do comportamento dinâmico das linhas de ancoragem da plataforma. A estrutura complacente do sistema flutuante faz com que este apresente grandes movimentos horizontais. Tendo em vista este comportamento da estrutura, será realizado neste trabalho um estudo do comportamento dos modos de vibração e freqüências naturais das linhas de ancoragem conforme a plataforma se movimenta horizontalmente.

Este estudo foi realizado através do desenvolvimento de um programa em linguagem Fortran [3] que através do método dos elementos finitos [4] faz a análise da estrutura de uma linha de ancoragem através de elementos de pórtico plano. O programa

desenvolvido é uma continuação do trabalho realizado por Lacerda [5] em projeto final de curso.

No trabalho realizado em [5], foi discutida a diferença entre a consideração ou não da deformação axial do cabo e sua relação com a geometria e trações. Com base nos resultados apresentados neste trabalho, apenas a metodologia com deformação axial foi utilizada aqui. O programa herdado do trabalho anterior faz o cálculo da geometria da linha de ancoragem em catenária além das trações e foi inserido como uma subrotina do programa em Fortran desenvolvido no presente projeto. Com o resultado desta rotina foi possível extrair as coordenadas nodais e as respectivas trações através de implementações feitas no programa.

Os exemplos estudados neste trabalho englobam uma ancoragem do tipo convencional através de catenária completa e outra com ancoragem *taut-leg* com catenária incompleta (ver figuras 2.4 e 2.5 adiante).

O estudo da catenária também pode ser estendido para a análise de *risers* tanto flexíveis quanto os rígidos em catenária (SCR) que são utilizados com grande freqüência atualmente, já que estes tendem a viabilizar a explotação em grandes profundidades.

Na análise dos modos de vibração da linha de ancoragem, serão utilizadas duas maneiras de verificar como as freqüências e as formas modais se comportam. Uma delas é através do MAC (*Modal Assurance Criterion*) [6] que foi implementado tanto no código em Fortran quanto em uma planilha em MathCAD [7] para automatização do processo de comparação. A outra forma é simplesmente graficamente, observando as formas modais impressas.

O comportamento dinâmico tem importância também no estudo da fadiga de elementos estruturais. Neste trabalho, também serão apresentados os fundamentos do fenômeno de fadiga em linhas de ancoragem.

A organização deste trabalho segue a seguinte seqüência: no 2º capítulo são mostrados os tipos de ancoragem de plataformas flutuantes além dos materiais

empregados. No 3º capitulo são mostrados os tipos de *risers* e suas diversas formas de qualifica-los. No 4º capítulo, apresentam-se os tipos de plataformas flutuantes empregadas atualmente na indústria *offshore*.

Após a primeira parte, onde são apresentados os conceitos de sistemas flutuantes de produção e ancoragem, inicia-se a segunda parte do trabalho referente à análise dinâmica de estruturas. No 5º capítulo, são descritos os fundamentos da dinâmica estrutural e, posteriormente, descreve-se com a formulação do problema de vibrações livres que será resolvido. Então, a seguir é apresentada como foi realizada a implementação deste problema utilizando a linguagem Fortran. No 7º capítulo, o estudo das freqüências e das formas modais é realizado através das ferramentas descritas e, então, os resultados são analisados.

Os conceitos de fadiga estrutural em linha de ancoragem são mostrados no 8º capítulo. No 9º capítulo, são apresentadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2. Sistema de ancoragem para unidades flutuantes

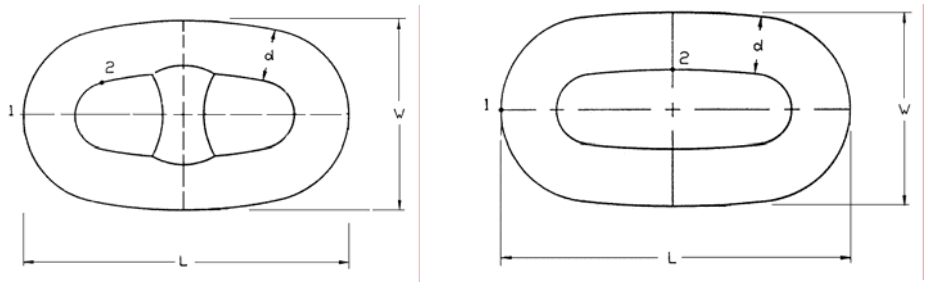
O sistema de ancoragem de uma unidade flutuante pode possuir diversos tipos de composição no que diz respeito ao material empregado ou configuração geométrica. Estudos destes aspectos possuem grande importância atualmente, visto que a indústria *offshore* trabalha em grandes profundidades, exigindo grandes comprimentos de cabos. Assim, a utilização de materiais leves como o poliéster minimiza os esforços devidos ao peso próprio. Uma linha de ancoragem ainda pode ser composta por diversos tramos de materiais diferentes além do poliéster; nestas composições também são utilizados cabos de aço, amarras e aramida. A seguir são descritos os tipos de materiais utilizados.

2.1. Tipos de materiais

2.1.1. Amarras

As amarras (são elos de aço), quanto à sua resistência, podem ser classificadas pelos graus 3 e 4. O grau 4 é o mais resistente. A utilização de um determinado grau vai depender da necessidade e dos custos envolvidos. Na Figura 2.1, são apresentados dois tipos de elos de amarras.

As dimensões de um elo de amarra são múltiplos dos diâmetros da amarra. O passo é igual a seis vezes o diâmetro.



Com malhete Sem malhete

Figura 2.1 - Elos de amarras.

A amarra pode romper por ultrapassar a carga de ruptura nominal ou por fadiga. O número de ciclos para romper a amarra será função principalmente dos movimentos

induzidos pelo corpo flutuante. Em FPSO's, a amarra terá sua vida reduzida se estiver trabalhando com trações elevadas. Com o objetivo de se prolongar a vida das amarras é recomendável que se trabalhe com trações correspondentes a 1/3 da tração de ruptura.

Durante o processo de fabricação, cada trecho de sete metros é testado com uma carga de aproximadamente 70% da carga nominal de ruptura. A Tabela 2.1 mostra as propriedades físicas de amarras típicas disponíveis no mercado.

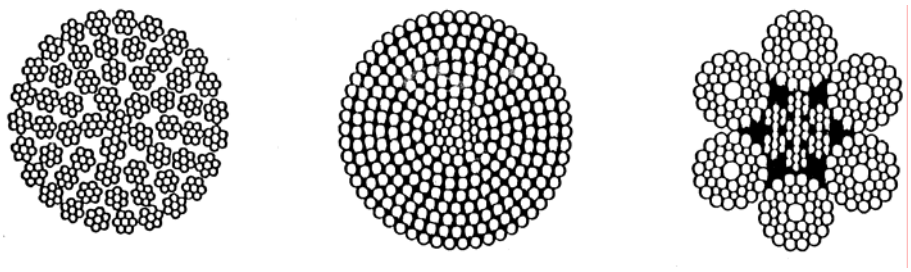
Tabela 2.1 – Propriedades físicas da amarra.

Material	Diâmetro (m)	MBL* (kN)	EA (kN)	Peso (kN/m)	
				seco	molhado
Amarra	0,095	9.001	710.268	1,9389	1,6822
Amarra	0,132	18000	1.420.536	3,878	3,364

* MBL (*Minimum Breaking Load*): Tração mínima de ruptura

2.1.2. Cabos de Aço

A classificação do cabo consiste de dois números, como por exemplo 6x19. O primeiro número indica a quantidade de pernas torcidas e o segundo indica a quantidade de fios em cada perna, que podem estar configurados de diversas formas. A Figura 2.2 ilustra alguns tipos desses cabos utilizados.



Multi Strand *Spiral Strand* *Six Strand Rope*

Figura 2.2 - Cabos de Aço.

As falhas por fadiga do cabo de aço geralmente ocorrem nas proximidades das terminações e dos componentes adjacentes à âncora ou a outras conexões. A Tabela 2.2 apresenta as propriedades físicas de um cabo de aço típico disponível no mercado.

Tabela 2.2 - Propriedades físicas de um cabo de aço.

Material	Diâmetro (m)	MBL (kN)	EA (kN)	Peso (kN/m)
Aço (6x37)	0,103	7.063	427.276	0,432

2.1.3. Cabos de Poliéster

O cabo de poliéster é um composto de material sintético, que apresenta uma flexibilidade axial bem maior que a do cabo de aço e das amarras, com a mesma carga de ruptura nominal e um peso submerso por unidade de comprimento bem menor.

A Petrobras foi a pioneira na utilização do cabo de poliéster na ancoragem de sistemas flutuantes para explotação de petróleo em águas profundas e ultra-profundas da costa brasileira [8]. A utilização do cabo de poliéster permitiu que a Petrobras levasse o sistema de completação molhada para águas mais profundas, pois existe uma limitação com amarras e cabos de aço devido ao peso submerso dos mesmos inviabilizar o sistema de ancoragem para grandes lâminas d'água. A outra grande vantagem está associada ao raio bem menor já que a restauração agora é realizada pela elasticidade do cabo de poliéster e não pelo caráter geométrico da linha de ancoragem constituída por amarras e cabo de aço.

Como pode ser observado na Tabela 2.3, para um mesmo MBL o peso molhado do cabo de poliéster é 28 vezes menor do que o da amarra. Nos arranjos de ancoragem em que se usa poliéster, a linha possui um trecho inicial e final de aproximadamente 100 metros de amarra; isso é usado para impedir que o cabo encoste no leito marinho e seja atacado por microorganismos e que no trecho superior não sofra fotossíntese. Esse sistema foi utilizado pela Petrobrás na bacia de campos e hoje está sendo na plataforma Spar-buoy Mad Dog (Figura 2.3) instalada no golfo do México [9].

Tabela 2.3 - Propriedades físicas do poliéster.

Material	Diâmetro (m)	MBL (kN)	EA* (kN) Quase-estático	Peso (kN/m)	
				seco	molhado
Poliéster	0,210	12.263	187.129	0,2845	0,0726

Figura 2.3 – Spar-buoy Mad Dog em operação no Golfo do Mexico

2.1.4. Cabos de Aramida

O cabo de Aramida é também um cabo de material sintético quase auto-flutuante, mas que apresenta uma flexibilidade axial similar a do cabo de aço. Desta forma, a resistência do cabo de aramida torna-se bem maior do que a do cabo de poliéster de mesmo diâmetro. No entanto, existem ainda problemas para a sua utilização em sistemas de produção e estudos detalhados ainda não foram realizados. A Tabela 2.4 mostra as propriedades físicas típicas para aramida.

Tabela 2.4 - Propriedades físicas da aramida

Material	Diâmetro (m)	MBL (kN)	EA (kN)	Peso (kN/m)	
				seco	molhado
Aramida	0,203	19.613	2,529 x10^6	0,307	0,0868

2.2. Tipos de ancoragem

Uma linha de ancoragem pode ser dividida em três tipos de acordo com a configuração que ela pode assumir. São encontradas ancoragem convencional, ancoragem tipo *taut-leg* e ancoragem vertical (utilizando tendões); cada uma delas se aplica a diferentes sistemas de ancoragem. O tipo da plataforma a ser ancorada, a geometria da unidade flutuante e a situação das condições ambientais no local de instalação são os principais fatores que influenciam a escolha de um sistema de ancoragem.

2.2.1. Ancoragem convencional

No sistema de ancoragem do tipo convencional, as linhas devem estar trabalhando como catenárias simples ou compostas como apresentado na Figura 2.4. Neste caso, o sistema de ancoragem transfere somente esforços horizontais para o solo. Isto se deve ao fato de as âncoras convencionais não terem eficiência para transmitir esforços verticais.

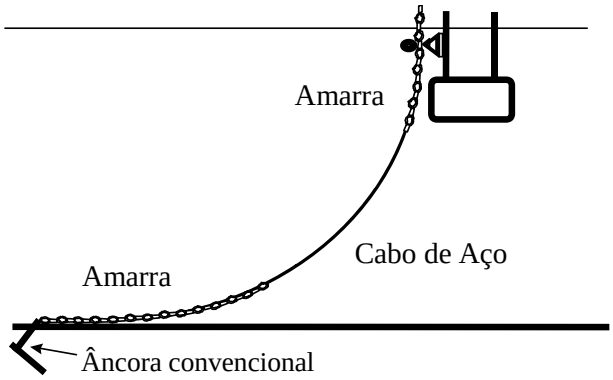


Figura 2.4 – Linha de ancoragem convencional.

Na condição operacional, este tipo de ancoragem pode ter grande parte da linha apoiada no solo e o próprio atrito desse trecho já absorve uma parte das solicitações.

Nesse caso é comumente utilizado na prática um trecho de amarra ao longo de todo o comprimento no solo.

A principal desvantagem do uso deste tipo é o grande raio de ancoragem (cerca de três vezes a lâmina d'água) que causa congestionamento de linhas de unidades próximas, interferindo diretamente no posicionamento das mesmas além de outros equipamentos submarinos próximos.

2.2.2. Ancoragem *taut-leg*

Um outro tipo de ancoragem, chamada ancoragem *taut-leg*, surgiu com o propósito de contornar as desvantagens do sistema convencional em catenária.

Neste tipo de ancoragem, a linha se encontra mais retesada, com um ângulo de topo de aproximadamente 45° com a vertical, tendo assim uma projeção horizontal menor, com a mesma ordem de grandeza da lâmina d'água. Além disso, este tipo de ancoragem proporciona uma maior rigidez ao sistema, sendo o passeio da embarcação limitado a *offset*s menores (distâncias menores). Neste caso, as âncoras a serem utilizadas precisam resistir a altas cargas verticais. Atualmente, as plataformas que estão sendo projetadas para atuarem em lâminas d'água maiores utilizam principalmente a ancoragem *taut-leg*. Um exemplo desse tipo de ancoragem é mostrado na Figura 2.5 Uma comparação entre o sistema convencional e *taut-leg* é apresentada na Figura 2.6.

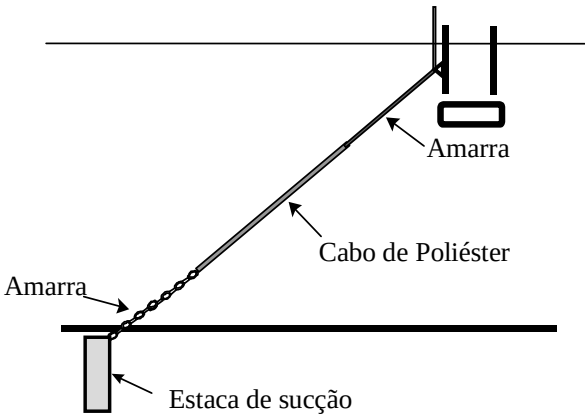


Figura 2.5 – Linha de ancoragem *taut-leg*

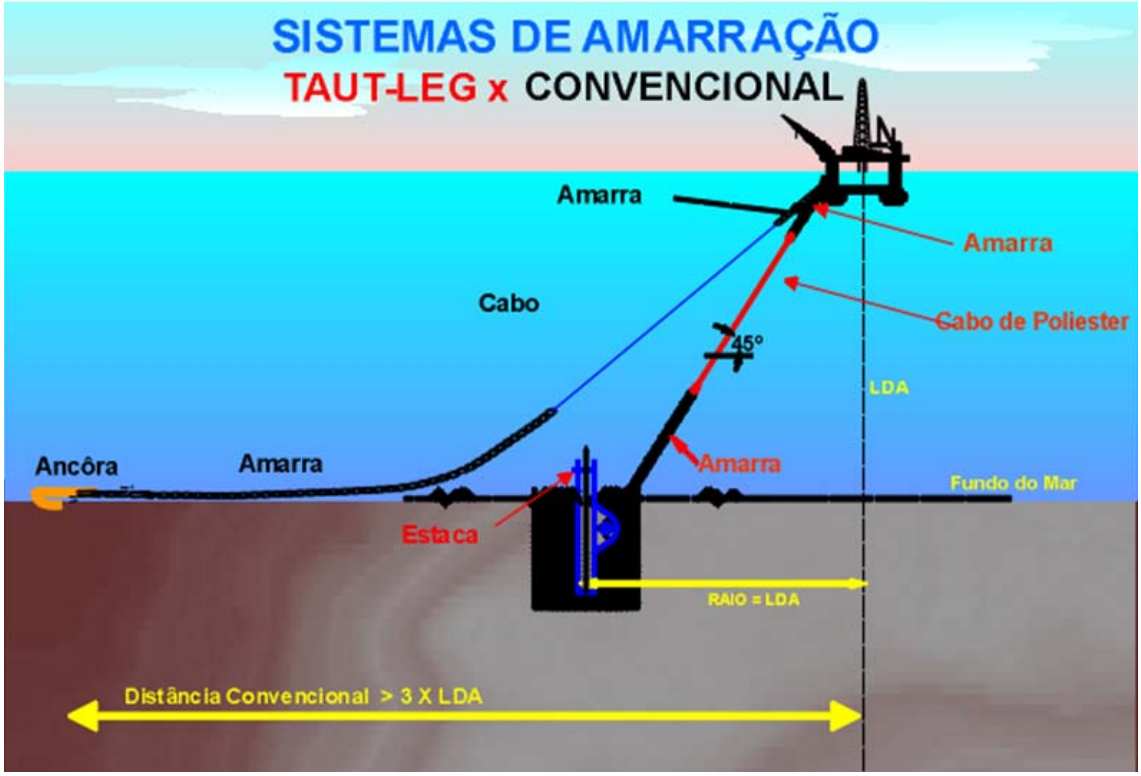


Figura 2.6 – comparação entre a ancoragem convencional e *taut-leg*

Em alguns casos que ocorrem neste tipo de ancoragem, é conveniente estabelecer-se uma pequena catenária, mas mantendo-se uma componente de força vertical na fundação.

2.2.3. Ancoragem vertical

Esta ancoragem baseia-se na utilização de tendões verticais, que precisam estar sempre tracionados devido ao excesso de empuxo proveniente da parte submersa da embarcação.

Este tipo de ancoragem é usado principalmente em plataformas tipo TLP (*Tension Leg Plataform*), mas também pode ser adotado por bóias, monobóias, entre outras.

Os tendões normalmente são tubulões de aço de alta resistência (X60, X70, X80 [10]) fabricados principalmente no Japão. Existem estudos para a utilização com cabos de aço ou material sintético. Os tendões proporcionam alta rigidez no plano vertical e

baixa rigidez no plano horizontal. A força de restauração no plano horizontal é fornecida pela componente horizontal da força de tração nos tendões.

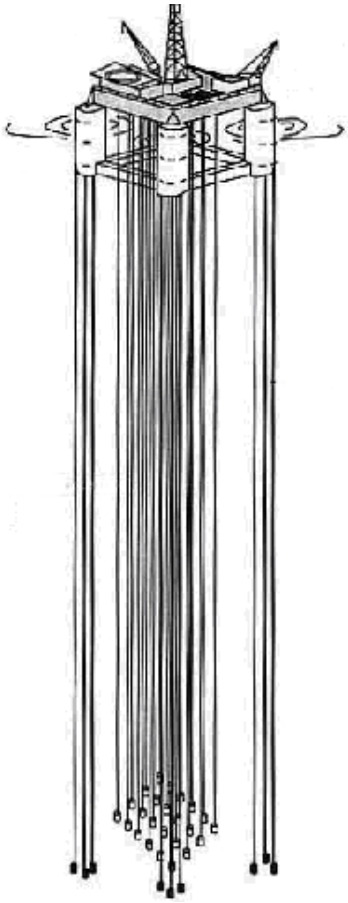


Figura 2.7 – Exemplo de ancoragem vertical

Devido aos baixos movimentos de *heave*, *roll* e *pitch* neste tipo de plataforma, as árvores de natais são posicionadas no corpo do flutuante de uma forma similar às jaquetas (árvore de natal seca).

3. Risers

Riser é a tubulação que liga o fundo do mar com a plataforma, cuja principal função é transportar os fluidos provenientes do poço até a plataforma ou vice-versa, como no caso de um poço injetor. O *riser* é, portanto, a interface entre a estrutura estática no fundo do mar e a estrutura flutuante que possui comportamento dinâmico.

Podemos classificar de forma simplória o *riser* de acordo com a sua configuração e material.

3.1. Tipos de configurações

De acordo com a configuração em sua instalação, podemos classificar os *risers* em vertical, catenária ou complexa (usando flutuadores).

3.1.1. *Riser* vertical

Neste tipo de *riser* aplicado uma força de tração no topo, com a finalidade de manter o *riser* sempre tracionado na posição vertical e evitando a sua flambagem. Na Figura 3.1 é mostrada a configuração de *riser* vertical.

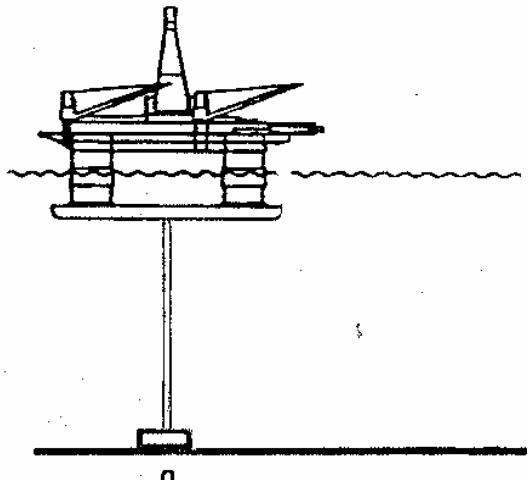


Figura 3.1 – *Riser* na configuração vertical

3.1.2. *Riser* em catenária

Configuração em que o *riser* é instalado com a sua geometria em forma de catenária completa, já que este equipamento não pode ter o seu ponto de conexão do fundo com o poço "levantado", ou seja, com esforço vertical. Além disso, o trecho sob o leito marinho deve ser considerável, para que o esforço na conexão seja o menor possível. A Figura 3.2 mostra a configuração em catenária do *riser.*

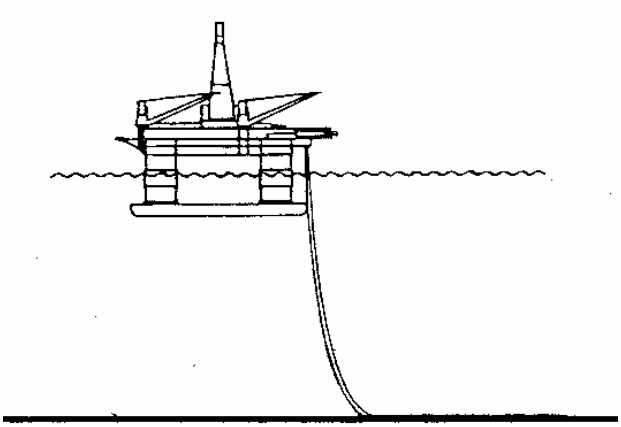


Figura 3.2 – Configuração em catenária do *riser*

3.1.3. *Riser* em configuração complexa

Derivada da configuração em catenária, o *riser* assume uma geometria em forma de catenária dupla através da instalação de flutuadores ou bóias mantidas submersas. Pode assumir diversas formas como é visto na Figura 3.3.

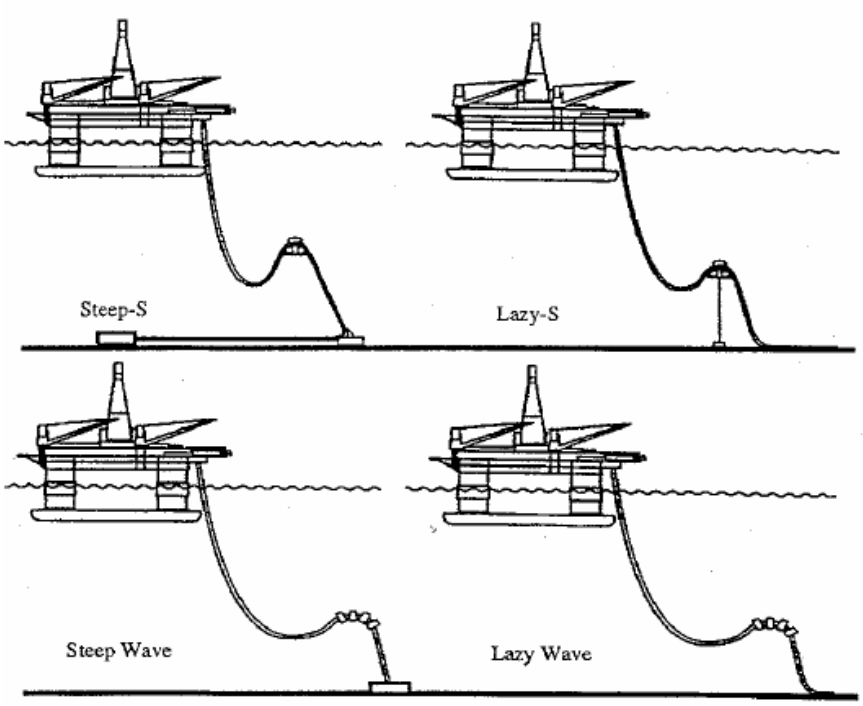


Figura 3.3 – Formas da configuração complexa de *riser*

3.2. Tipos de materiais

Atualmente na indústria *offshore* o tipo do material empregado na construção de *riser*, provavelmente, possui o papel mais importante em um estudo de viabilidade técnica e econômica para a instalação de unidades flutuantes em águas ultra-profundas. Assim, quanto ao material, o *riser* pode ser classificado em rígido ou flexível.

3.2.1. *Riser* rígido

O *riser* rígido é geralmente constituído de aço, mas poderia também ser de titânio ou compósitos. Em geral, é instalado na vertical (Figura 3.4), mas também pode ser instalado em catenária que é uma alternativa utilizada para lâminas d'água profundas. A Figura 3.5 mostra um *riser* rígido em catenária, comumente chamado pela sua sigla em inglês de *Steel Catenary Riser* (SCR).

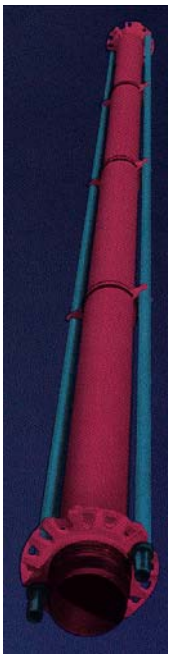


Figura 3.4 – *Riser* rígido vertical

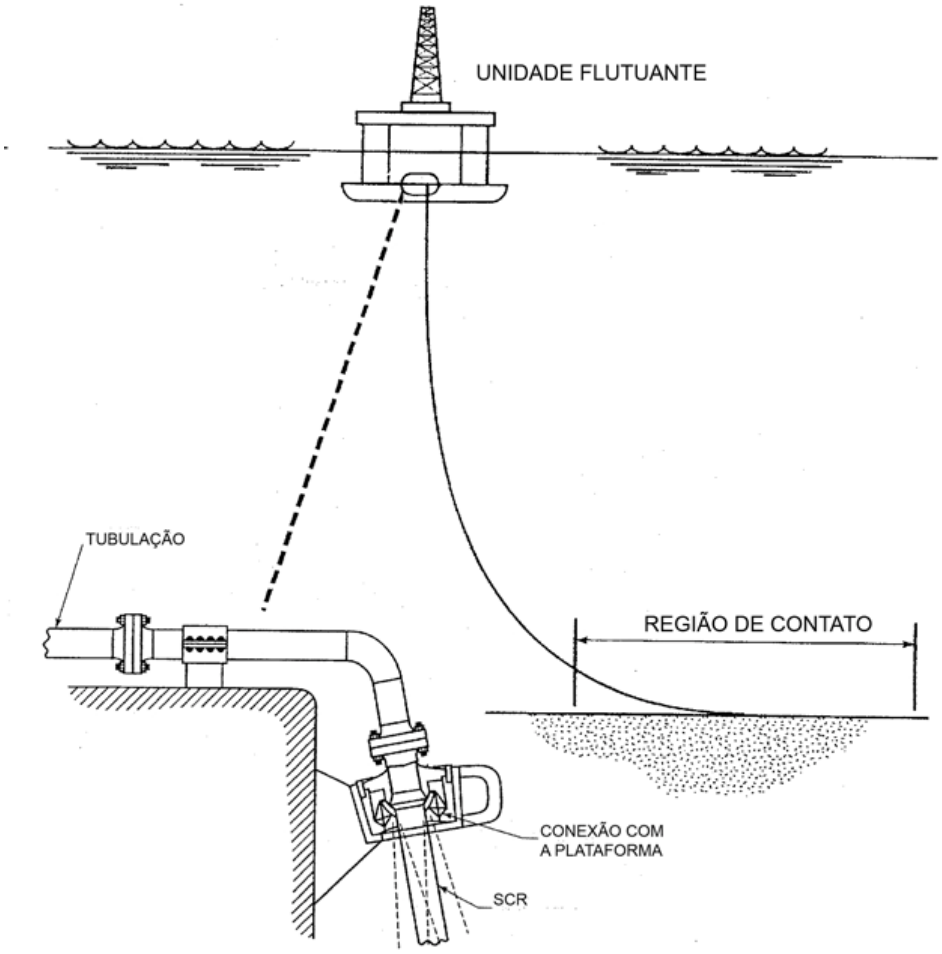


Figura 3.5 – *Riser* rígido em catenária e sua conexão

Risers deste tipo costumam ter o diâmetro suficientemente grande para acomodar a produção do fluido que irá ser transferido. Ao contrário das linhas de ancoragem, a rigidez à flexão deve ser levada em conta na configuração final. Em virtude dos grandes esforços devidos ao momento fletor, deve-se dedicar atenção especial à junta da extremidade, em contato com a plataforma e na região em que o *riser* tocar o fundo do mar (TDP - *Touchdown Point*).

3.2.2. *Riser* flexível

Este tipo de *riser* é em geral constituído de camadas de aço intercaladas com polietileno. As camadas de aço proporcionam flexibilidade ao *riser*, enquanto que as camadas de polietileno proporcionam estanqueidade, proteção contra corrosão e evitam a abrasão das camadas metálicas. As camadas que compõem um *riser* flexível são mostradas na Figura 3.6.

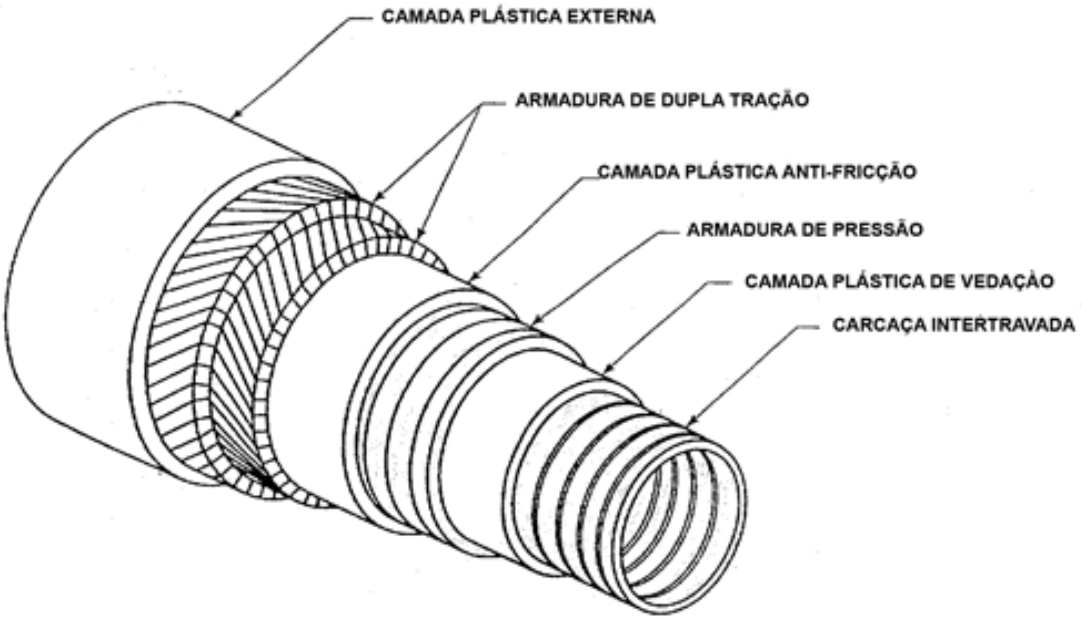


Figura 3.6 – Seção transversal de um *riser* flexível

Uma outra forma de utilização do *riser* flexível também pode ser em combinação com o rígido; esse exemplo de utilização é mostrado na Figura 3.7.

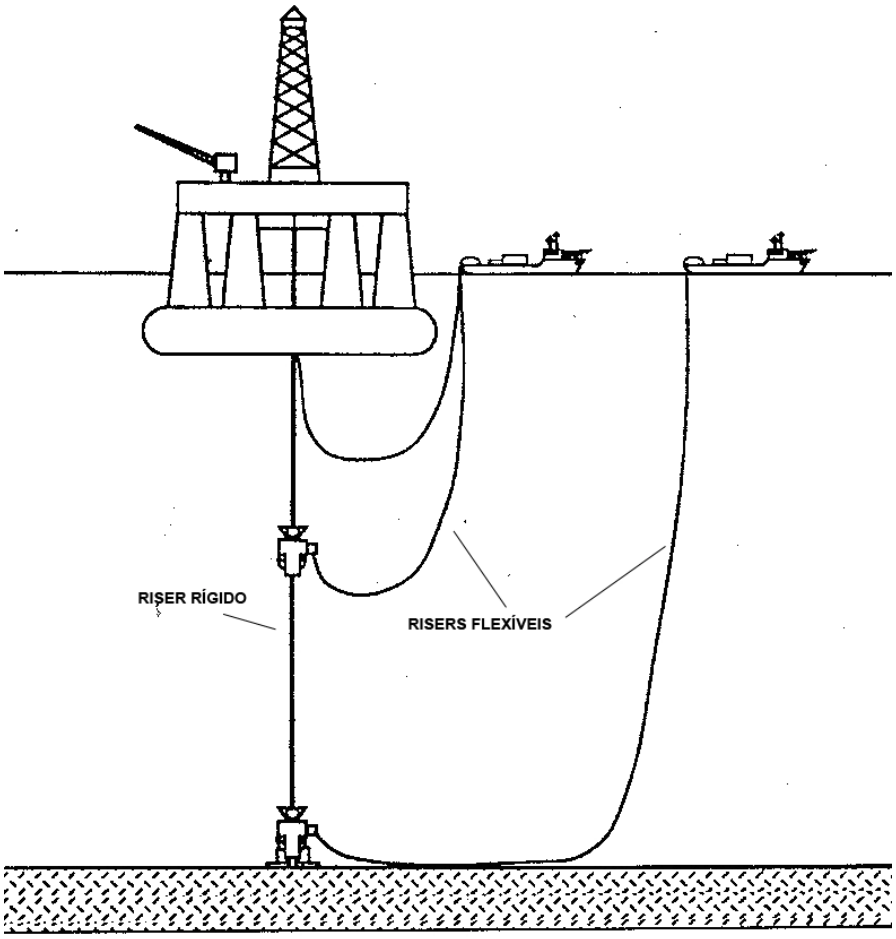


Figura 3.7 – Utilização do *riser* flexível combinado com o rígido

4. Tipos de plataformas flutuantes

Por plataforma flutuante entende-se uma estrutura complacente que é posicionada através de um sistema de ancoragem. As estruturas complacentes caracterizam-se por apresentarem grandes deslocamentos sob a ação das cargas ambientais. Devido a isso, é necessário haver um cuidado especial com o conjunto de válvulas responsáveis pelo controle da cabeça do poço de petróleo chamado de árvore de natal.

A árvore de natal de uma plataforma flutuante pode ser seca, localizada na plataforma ou molhada, no fundo do mar. Para que se possa utilizar uma árvore de natal seca é necessário reduzir a amplitude dos movimentos verticais (*heave*) e rotacionais (*roll* e *pitch*) do corpo flutuante através do aumento de rigidez axial do sistema de ancoragem. Os termos entre parênteses denominam os movimentos de corpo rígido de um sistema flutuante, na Figura 4.1 são representados esses movimentos para uma submersível.

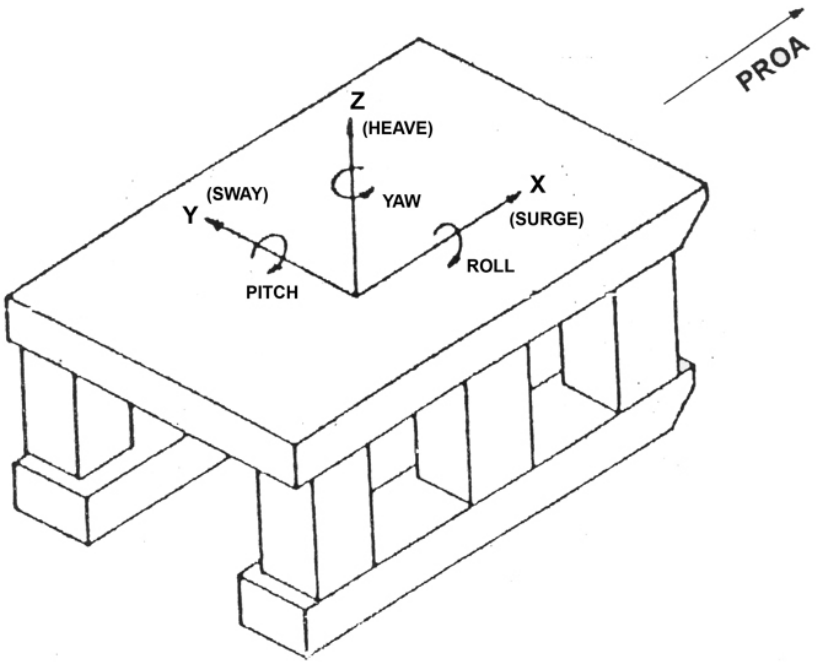


Figura 4.1 – Movimentos de corpo rígido de uma semi-submersível

A seguir são descritas as plataformas com ávore de natal molhada (Semi-submersível e FPSO) e seca (Spar-buoy e TLP).

4.1. Semi-submersível

Este tipo de plataforma se apóia em flutuadores submarinos, como visto na Figura 4.2, cuja profundidade pode ser alterada através do bombeio de água para o tanque de lastro. As plataformas semi-submersíveis podem ser de produção ou de perfuração. As plataformas de produção ficam fixas numa locação em torno de vinte anos e não armazenam óleo, ao contrário dos FPSOs que serão vistos mais adiante. Já as plataformas de perfuração ficam por um período menor numa locação, geralmente são denominadas MODU (*Mobile Offshore Drilling Unit*).

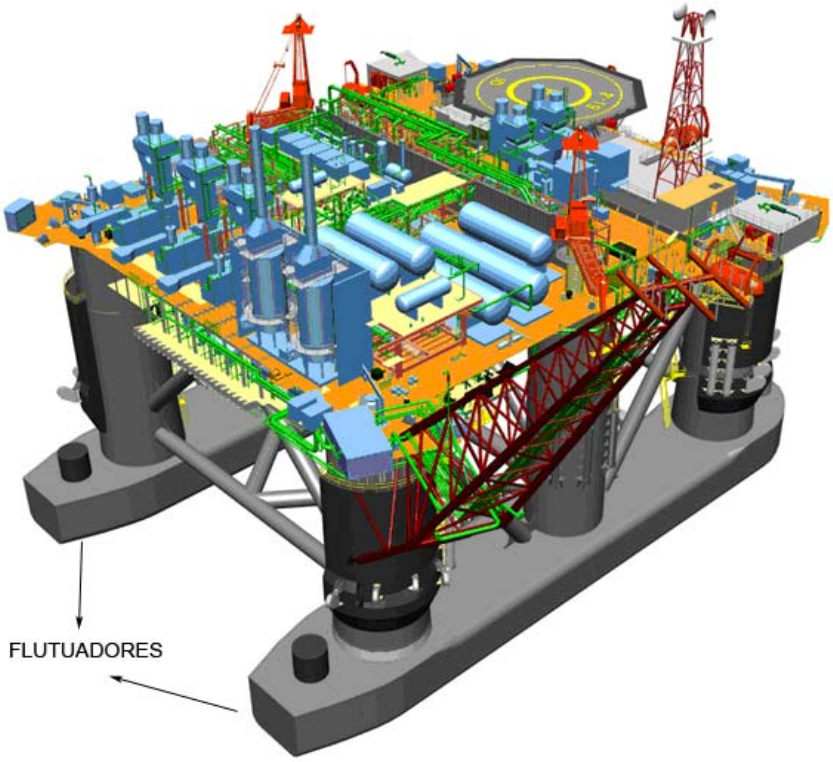


Figura 4.2 – Visão geral de uma semi-submersível

Uma plataforma semi-submersível pode ser ancorada através do sistema convencional (Figura 4.3) e *taut-leg* (Figura 4.4); o mesmo ocorre para as do tipo MODU.

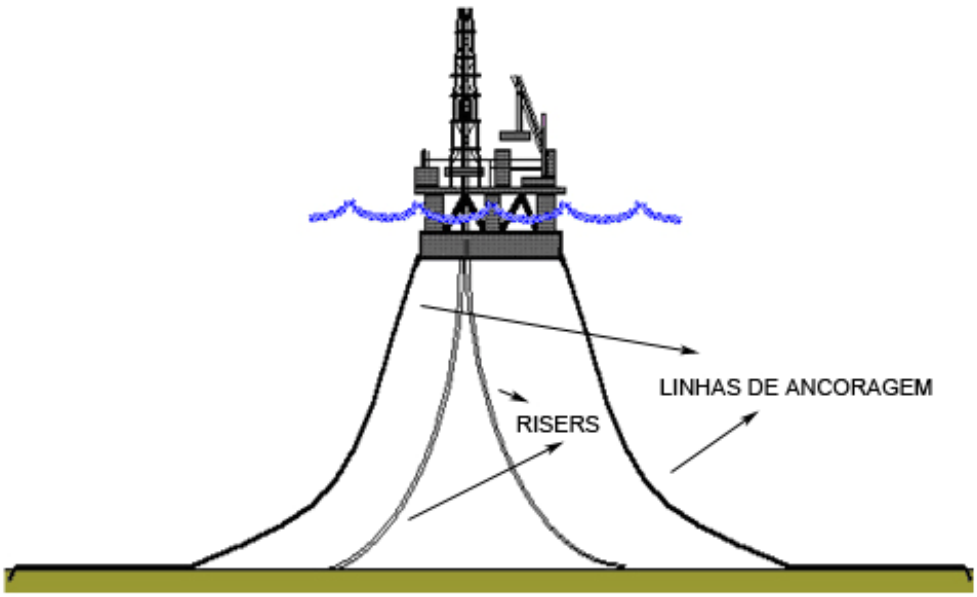


Figura 4.3 – Semi-submersível com ancoragem convencional

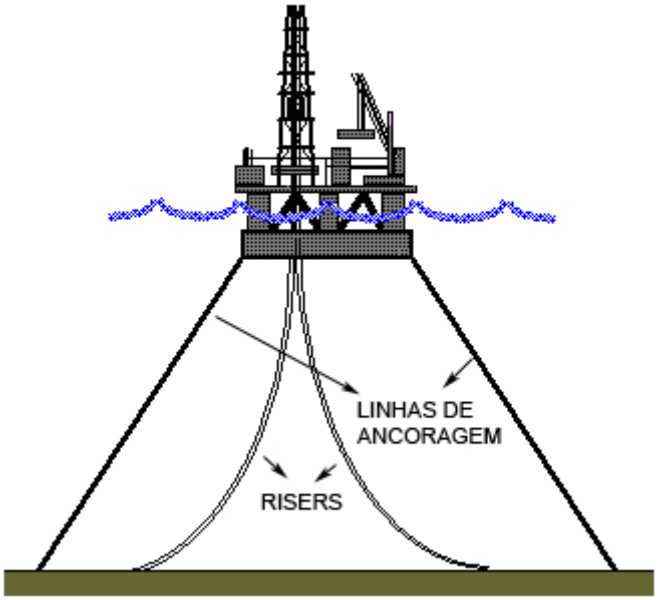


Figura 4.4 – Semi-submersível com ancoragem *taut-leg*

4.2. Navios

Com a descoberta de petróleo em lâminas d'água cada vez mais profundas, a tecnologia para explotação desse óleo tende a se aproximar cada vez mais da indústria naval. Além das necessidades de se ter uma unidade de produção localizada em águas profundas, existe o desafio de como escoar a produção, considerando as distâncias da costa e a profundidade do mar.

Para atender a estes desafios surgiu a alternativa dos FPSO's (*Floating Production Storage Offloading*). Este tipo de unidade estacionária de produção consiste na utilização de um navio ancorado, que suporta no seu convés uma planta de processo, armazena o óleo produzido e ainda permite o escoamento da produção para outro navio, chamado aliviador, que é periodicamente amarrado no FPSO para receber e transportar o óleo até os terminais petrolíferos.

Assim como as plataformas semi-submersíveis, os navios podem ser ancorados através de linhas de ancoragem na forma convencional ou *taut-leg*, mas o grande diferencial está na forma como estas ancoragens se conectam ao navio, que podem ser do tipo SPM (*Single Point Mooring*) ou DICAS (*Differentiated Compliance Anchoring System*).

A ancoragem do tipo SPM, mostrada na Figura 4.5, apresenta grande vantagem quando utilizado em navios, já que este pode permitir que a embarcação gire, se alinhando de acordo com a incidência da condição ambiental. A ancoragem com ponto único pode se dar basicamente através do *turret* ou utilizando o sistema CALM (*Catenary Anchor Leg Mooring*). No sistema de ancoragem com *turret* todas as linhas de ancoragem e *risers* são presas neste componente da estrutura que basicamente permite o giro relativo entre ele e a embarcação evitando assim que as linhas de ancoragem e *risers* se cruzem. O *turret* pode ser montado interno (Figura 4.6) ou externamente (Figura 4.7) a embarcação.

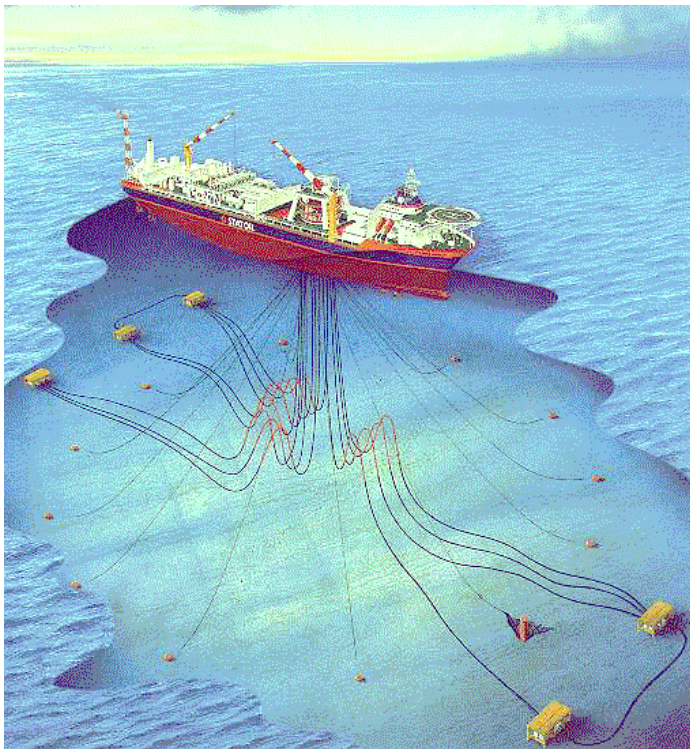


Figura 4.5 – Navio com ancoragem em ponto único (SPM)

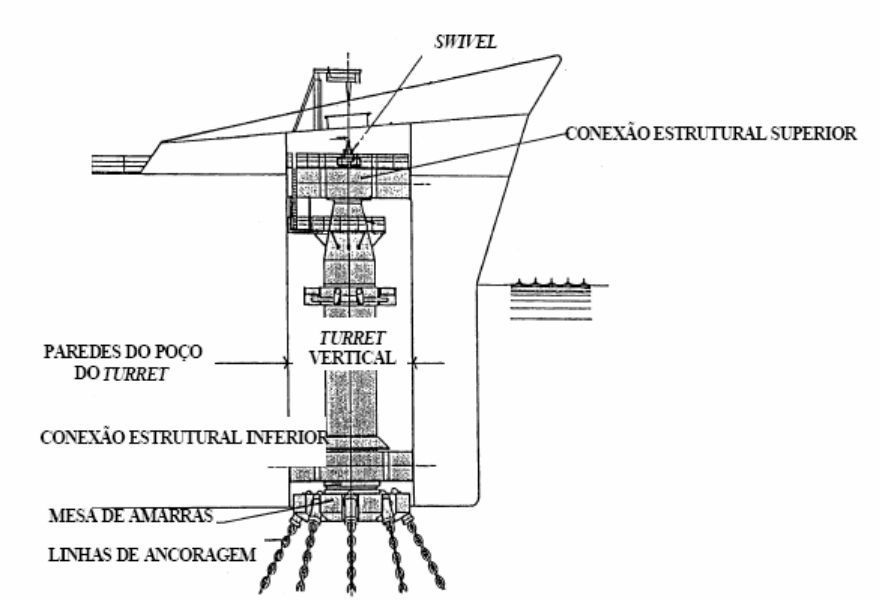


Figura 4.6 – *turret* interno

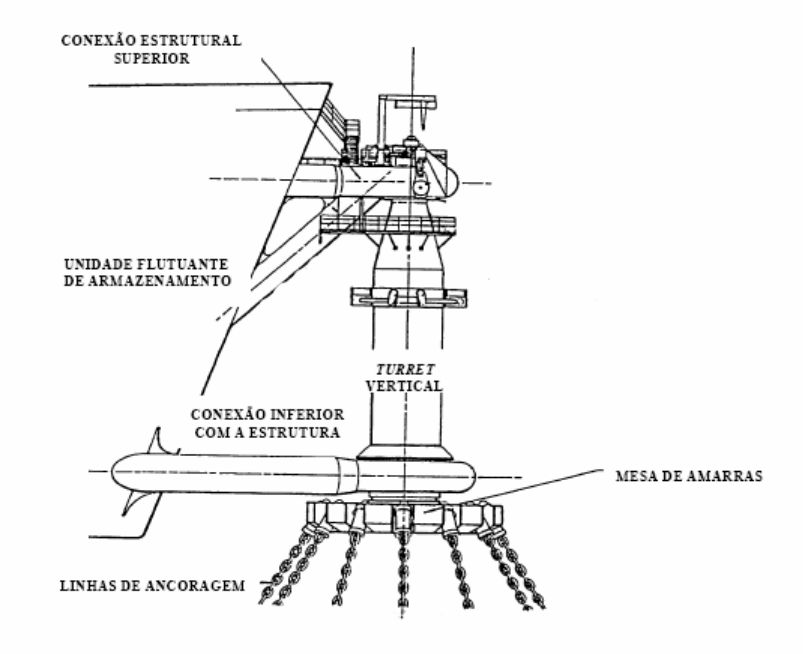


Figura 4.7 – *turret* externo

.

Outro tipo de ancoragem utilizado em navios FPSO's é o CALM (*Catenary Anchor Leg Mooring*). O sistema CALM consiste numa bóia de grandes dimensões que suporta um número de linhas de ancoragem em catenária. Os *risers* são presos na parte de baixo da bóia CALM e utilizam um cabo sintético (*hawser*), para fazer a amarração entre a bóia e o navio, uma visão geral deste sistema é apresentado na Figura 4.8. Assim como no sistema com *turret*, este sistema de ancoragem permite que a embarcação se alinhe com a resultante dos carregamentos ambientais.

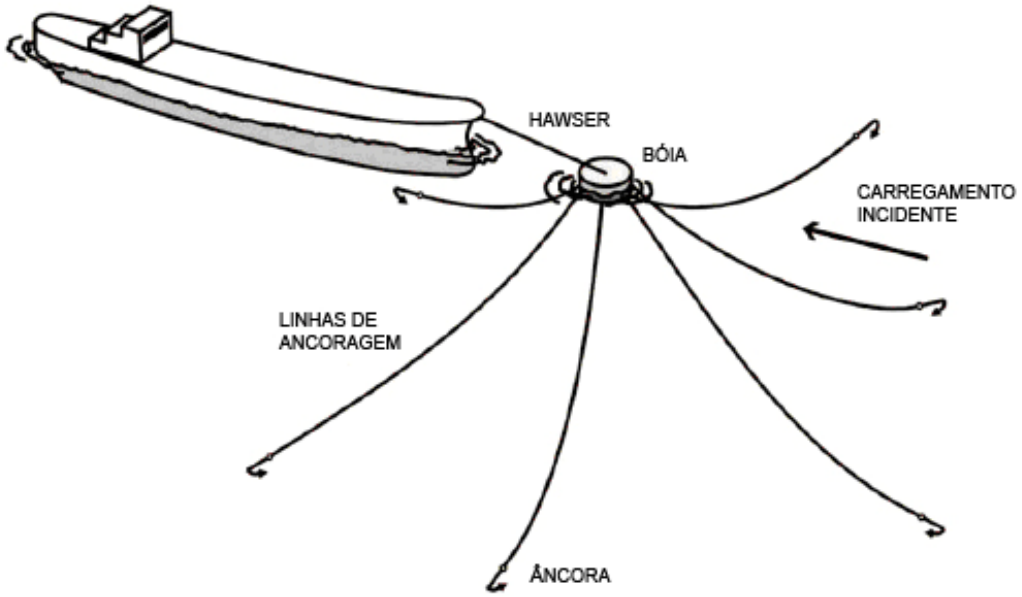


Figura 4.8 – Visão geral do sistema CALM

O DICAS é um sistema de ancoragem desenvolvido pela PETROBRAS, constituído basicamente por um sistema de amarração disperso com diferentes resistências na proa e na popa do navio, ou seja, é um sistema de ancoragem com complacência diferenciada. Uma visão deste sistema é apresentada na Figura 4.9.

A diferença básica entre o sistema SPM e o DICAS é que este último se alinha parcialmente às condições ambientais, tendo, portanto, situações em que fica efetivamente com o mar incidindo de través, ou seja, a 90° com o eixo do navio. O sistema DICAS por dispensar o *turret* é um sistema mais simples sob o ponto de vista de construção e podendo até apresentar uma economia, já que o *turret* é um equipamento de alto valor. Outra vantagem desse sistema é que ele permite uma maior liberdade para conexão dos *risers* na plataforma, já que com a utilização do *turret*, o engenheiro está limitado a esta região para definição do arranjo dos *risers* e ancoragem.

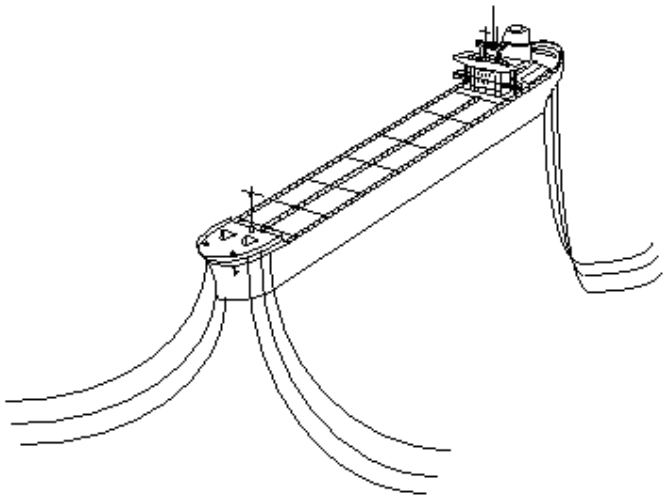


Figura 4.9 – Navio com sistema DICAS de ancoragem

4.3. Spar-Buoy

O sistema Spar consiste de um único cilindro vertical de aço de grande diâmetro, ancorado, operando com um calado de profundidade constante de cerca de 200 metros, o que gera apenas pequenos movimentos verticais e, consequentemente, possibilita a adoção de *risers* rígidos de produção.

Spar-Buoys são ancoradas de uma forma similar às plataformas semi-submersíveis de produção e os FPSOs, isto é, linhas de ancoragem em forma de catenária constituídas por diversos trechos de materiais diferentes (amarras, cabos de aço e poliéster).

Uma das grandes vantagens neste conceito é que a parte superior dos *risers* fica abrigada dentro do cilindro da *Spar* protegendo os *risers* de ondas e correntes onde o efeito sobre os mesmos geralmente é maior.

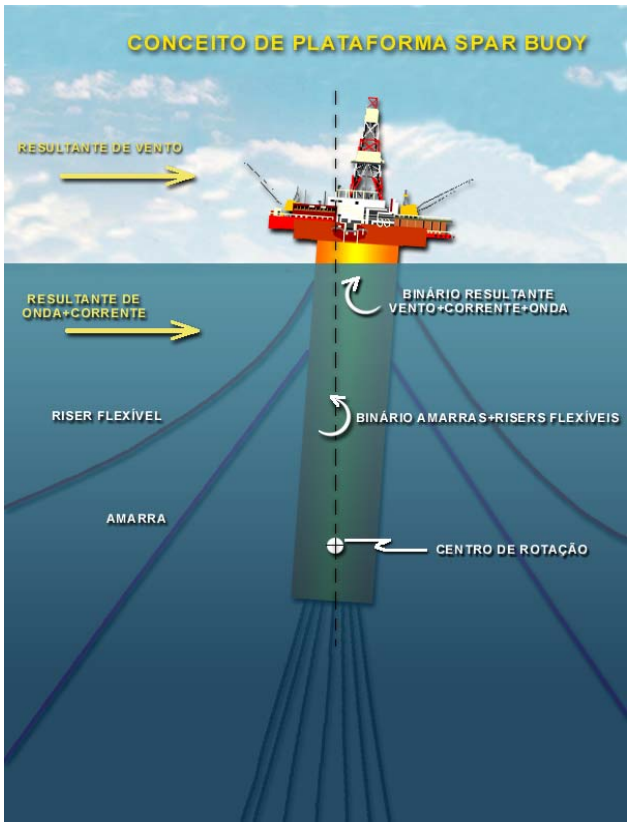


Figura 4.10 – Conceito de uma Spar Buoy

4.4. Plataforma com pernas tracionadas (TLP – *Tension Leg Platform*)

A TLP é uma plataforma complacente mantida numa posição onde o empuxo é bem maior do que o peso, sendo a diferença absorvida por um conjunto de tendões tracionados; um exemplo de TLP já foi mostrado na Figura 2.7 que mostra uma ancoragem vertical. O casco da TLP é semelhante ao de uma semi-submersível e é constituído basicamente de seções tubulares retangulares horizontais (*pontoons*) e cilindros verticais enrijecidos. No entanto, os *pontoons* de uma TLP são bem menores do que os correspondentes de uma semi-submersível, já que o comportamento é diferenciado.

A ancoragem de uma TLP é realizada por tendões verticais que podem ser internos às colunas, onde são acoplados ao sistema de tensionamento, ou podem ser externos, onde o tensionamento é realizado pela diminuição do lastro e por um tensionador instalado numa embarcação auxilar.

O conceito de TLP baseia-se no excesso de empuxo proveniente da parte submersa do casco, o qual mantém os tendões tracionados. Os tendões, que são o sistema de ancoragem da TLP, devem ser mantidos tracionados ao longo de todo seu comprimento, a fim de evitar-se a desconexão no fundo do mar.

A TLP é uma evolução do conceito de semi-submersível, pois por restringir os movimentos verticais permite a árvore de natal do tipo seca o que facilita o controle e intervenções nos poços. Desta forma torna-se desnecessária a utilização de embarcações com posicionamento dinâmico para a intervenção nos poços, o que ocorre quando é utilizada a completação molhada em que as árvores de natal ficam no fundo do mar. Esta é uma das principais vantagens das TLPs em relação a outros sistemas flutuantes utilizados atualmente.

Um dos principais componentes das TLPs é o seu sistema de ancoragem, que é representado pelos tendões. Os tendões de uma TLP possuem rigidez no plano vertical tão alta que os períodos naturais de *heave*, *roll* e *pitch* (ver Figura 4.11) apresentam valores entre 2 e 4 segundos [11]. A força de restauração no plano horizontal para uma TLP é fornecida pela componente horizontal da força de tração nos tendões. Estas componentes são pequenas de tal forma que os períodos naturais de *surge*, s*way* e *yaw* são da ordem de 100 segundos, bem superiores aos dos estados de mar típicos.

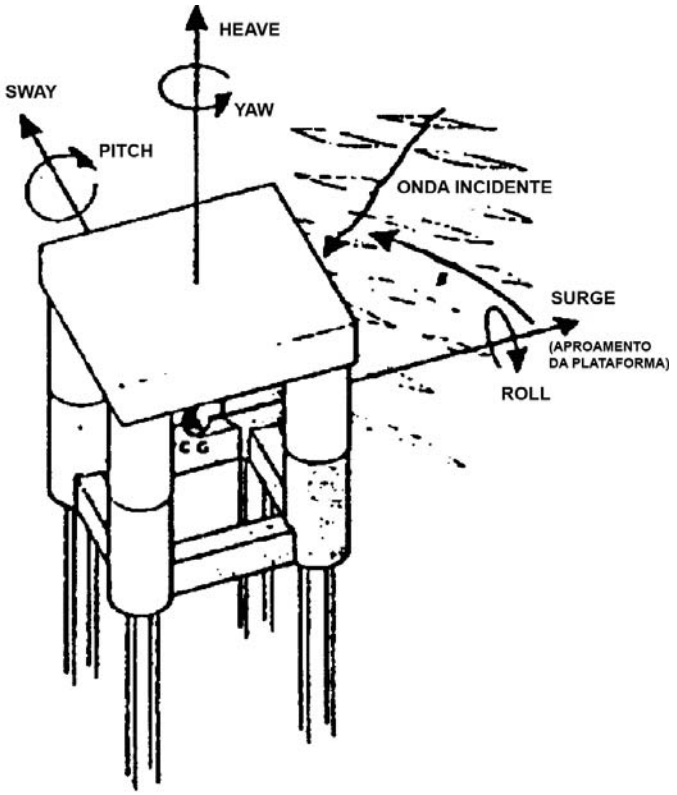


Figura 4.11 – Movimentos de corpo rígido de uma TLP

Outra importante vantagem deste conceito é o fato de tornar mais simples e limpo o arranjo de fundo, pois não são necessárias linhas de ancoragem em catenária similares às utilizadas em plataformas semi-submersíveis, que exigem maiores raios.

5. Análise dinâmica de sistemas de ancoragem

No universo atual da indústria *offshore*, a utilização de sistemas flutuantes de explotação em águas cada vez mais profundas torna imprescindível a consideração do comportamento dinâmico dessas estruturas, já que essas são muito mais complacentes do que as estruturas fixas utilizadas com mais freqüência no passado. Além da maior complacência da estrutura ancorada por linhas, o carregamento das ondas incidentes é estritamente variável no tempo.

O comportamento dinâmico de estruturas *offshore* flutuantes é muito importante de ser analisado, pois devido a esta variação do carregamento no tempo e, conseqüentemente, dos esforços solicitantes dos componentes estruturais surge um grande problema bastante estudado atualmente: a fadiga. Mais adiante em outro capítulo, este problema será abordado com mais detalhes.

Neste capítulo, serão discutidos os principais conceitos fundamentais da análise dinâmica de estruturas. Partindo-se de princípios básicos de sistemas simples será mostrado como é realizada a análise de estruturas complexas. A seguir, serão mostrados os fundamentos de uma análise de vibrações livres para o cálculo de modos e freqüências naturais de uma estrutura, que é o objetivo principal do programa em Fortran [3] desenvolvido neste trabalho e descrito no capítulo seguinte.

5.1. Fundamentos

Inicialmente será apresentada uma formulação de um sistema de um único grau de liberdade. Em análise estrutural dinâmica, entende-se como grau de liberdade o número de coordenadas independentes necessárias para especificar a configuração ou posição de um sistema em qualquer tempo [12].

O modelo matemático para o estudo do sistema de um grau de liberdade é mostrado na Figura 5.1a, onde m é a massa para representar a inércia do sistema, a restauração elástica e a energia potencial do sistema é representada pela mola com

rigidez linear *k* e a perda de energia é representada pelo amortecedor de constante igual a *c*. As forças externas variáveis no tempo são representadas por *F(t)*.

O princípio de D`Alembert estabelece que o equilíbrio dinâmico de um sistema pode ser obtido adicionando-se às forças externas aplicadas uma força fictícia, chamada de força de inércia, proporcional à aceleração e com sentido contrário ao do movimento, sendo a constante de proporcionalidade igual à massa do sistema.

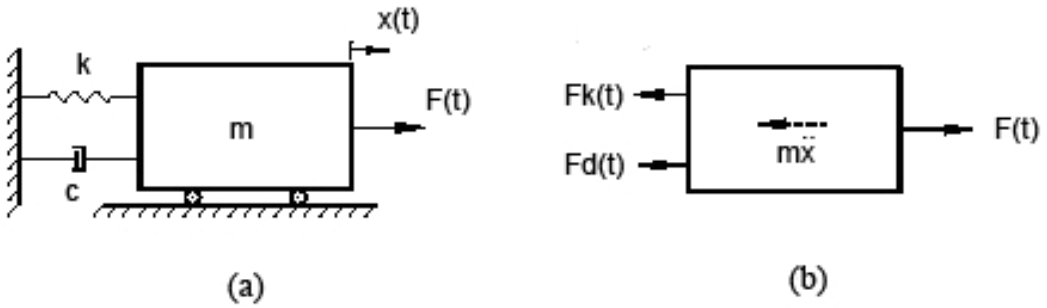


Figura 5.1 – Sistema mecânico massa-mola-amortecedor

Considerando o diagrama de corpo livre (DCL) mostrado na Figura 5.1b, onde *Fk(t)* é a força proveniente da mola, *Fd(t)* é a força de amortecimento. Considerando o amortecimento viscoso, é assumido que essa força é proporcional à velocidade e tem sentido oposto ao movimento. Escrevendo o equilíbrio das forças na direção x, tem-se

$$m\ddot{x} + Fd(t) + Fk(t) = F(t)$$

Adotando-se o amortecimento como viscoso, pode-se escrever sua respectiva força em função de sua constante *c* e da velocidade $\dot{x}$. Sendo a rigidez da mola linear com constante *k*, escreve-se a equação diferencial do movimento para um grau de liberdade (1):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \qquad (1)$$

Na maioria dos casos estudados na analise estrutural não é possível descrever seu comportamento através de um sistema de um único grau de liberdade. Na realidade, uma estrutura possui uma distribuição contínua de massa, o que resultaria em infinitos

graus de liberdade. É possível realizar a análise da estrutura como um sistema contínuo, mas estes métodos analíticos se tornam difíceis de serem aplicados em estruturas mais complexas.

No caso de estruturas complexas, pode ser elaborado um modelo matemático em que a estrutura é idealizada como uma série finita de massas discretizadas conectadas por molas e amortecedores (Figura 5.2a), ou seja, um sistema de *n* graus de liberdade é resolvido com um sistema de *n* equações. Os valores dos parâmetros do sistema (massa, amortecimento e rigidez) são determinados através das características dos elementos da estrutura (massa, módulo de elasticidade, área transversal etc.).

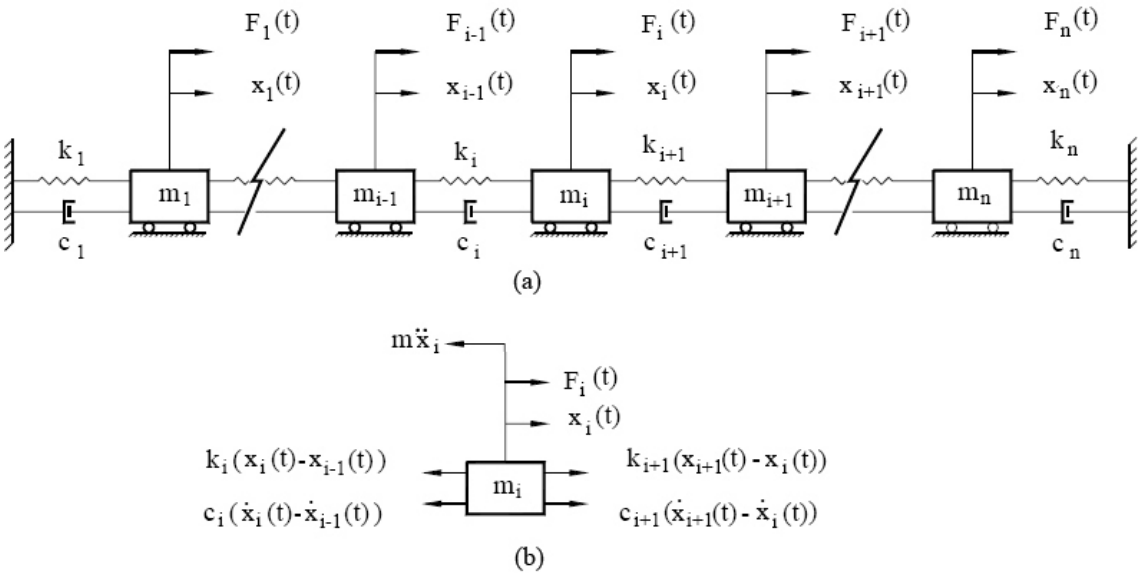


Figura 5.2 – Sistema com múltiplas massas em série.

O número de graus de liberdade de uma estrutura é dado pela quantidade de massas utilizadas no modelo discretizado e os deslocamentos permitidos para cada massa.

Utilizando o principio de D`Alembert e fazendo o equilíbrio do DCL de uma massa *i* qualquer no sistema mostrado na Figura 5.2b, tem-se a equação (2):

$$F_i(t) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - k_i(x_i - x_{i-1}) = m_i\ddot{x}_i \qquad (2)$$

Rearranjando a equação (2) obtém-se a equação (3).

$$m_i\ddot{x}_i - c_{i+1}\dot{x}_{i+1} + (c_i + c_{i+1})\dot{x}_i - c_i\dot{x}_{i-1} - k_{i+1}x_{i+1} + (k_i + k_{i+1})x_i - k_i x_{i-1} = F_i(t) \qquad (3)$$

A equação (3) pode ser escrita de forma matricial, como mostrada na equação (4) para três massas:

$$\begin{bmatrix} m_1 & & \\ & m_2 & \\ & & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ & -c_3 & (c_3 + c_4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ & -k_3 & (k_3 + k_4) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{bmatrix} \qquad (4)$$

A equação diferencial do movimento (4) pode ser generalizada para o caso de sistemas com múltiplos graus liberdade através da equação (5):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(\mathbf{t}) \qquad (5)$$

onde:

M – Matriz de massa, neste exemplo mostrada como diagonal, mas nem sempre isso ocorre;

C – Matriz de amortecimento;

K – Matriz de rigidez;

$\mathbf{u}$, $\dot{\mathbf{u}}$ e $\ddot{\mathbf{u}}$ – Vetores de deslocamento, velocidade e aceleração, respectivamente;

F – Vetor com as forças aplicadas.

A discretização de um elemento contínuo pode ser idealizada pelo método dos elementos finitos que transforma a estrutura em uma série de elementos ligados entre si por um número finito de pontos.

Neste trabalho, a linha será discretizada com elementos de pórtico plano como o mostrado na Figura 5.3 apesar da linha de ancoragem não apresentar rigidez à flexão. Isto foi realizado desta forma para que o programa desenvolvido também possa ser

utilizado para outras análises, como por exemplo, *risers* rígidos em catenária onde a rigidez à flexão é de fundamental importância. Em cada exemplo a ser estudado será realizada uma verificação do valor da rigidez à flexão a ser empregado para que esta não influencie na resposta, com é desejado em uma linha flexível.

Figura 5.3 – Elemento de pórtico plano e seus deslocamentos nodais

A partir do conceito de discretização de estruturas contínuas, um pórtico plano é dividido em elementos conectados por nós e em cada nó serão permitidos 3 movimentos: 2 translações e 1 rotação. Serão três graus de liberdade por nó totalizando seis graus de liberdade em um único elemento de pórtico plano.

Uma mola linear do sistema mecânico da Figura 5.1a tem a sua rigidez k igual à força que surge nesta mola quando aplicamos um deslocamento unitário na direção x. Analogamente, no elemento de pórtico plano, é possível considerar que existem diversas molas nas várias direções permitidas. Assim, a análise dinâmica de um elemento estrutural discretizado recai no sistema com n graus de liberdade mostrado na Figura 5.2a. Pode-se então conceituar o elemento $K_{i,j}$ da matriz de rigidez **K** da equação (5) como sendo a força que aparece na direção do grau de liberdade i quando é imposto um deslocamento na direção do grau de liberdade j, mantendo todos os demais nulos.

Para a matriz de massa, o termo $M_{i,j}$ representa o coeficiente para a força de inércia na direção do grau de liberdade i quando é imposta uma aceleração unitária na direção do grau de liberdade j. Já o termo $C_{i,j}$ da matriz de amortecimento representa o coeficiente para força que aparece na direção do grau de liberdade i quando é imposta uma velocidade unitária na direção do grau de liberdade j.

5.2. Matriz de rigidez

A matriz de rigidez de um elemento de pórtico plano da Figura 5.3 é obtida através da relação entre os deslocamentos e as forças nodais como já descrito anteriormente. Mas no caso de estruturas que apresentam acoplamento entre esforço axial e de flexão, como é o caso das linhas de ancoragens estudadas neste trabalho, a rigidez do elemento é alterada devido à presença da carga axial.

Uma maneira aproximada de se levar em consideração os efeitos não-lineares que surgem do acoplamento axial com a flexão é através da equação (6) para a matriz de rigidez de um elemento:

$$\mathbf{K_E} = \mathbf{K_p} + \mathbf{K_G} \qquad (6)$$

onde $\mathbf{K_p}$ é a matriz de rigidez clássica linear de um pórtico plano e $\mathbf{K_G}$ é a matriz de rigidez resultante da interação flexo-compressão. A matriz de rigidez geométrica foi obtida de Venâncio [13]. Essas matrizes são mostradas a seguir.

$$\mathbf{K_p} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \textit{Simétrica} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K_G} = \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & \textit{Simétrica} & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

onde:

E – Módulo de elasticidade;

I – Momento de inércia da seção;

L – comprimento do elemento;

T – Esforço axial aplicado no elemento (tomada como constante neste trabalho e sendo a média das trações aplicadas nos nós do elemento).

Determinada a matriz de rigidez de um elemento através da equação (6) é necessário o cálculo matriz de rigidez global da estrutura. Essa matriz global está referida a um sistema de coordenadas global, onde estão definidos os pontos nodais da estrutura discretizada. No entanto, a matriz de rigidez de um elemento é definida em um sistema local que é mostrado na Figura 5.3. Torna-se então necessário rotacionar essa matriz do elemento para o sistema global, definindo assim a matriz de rigidez do elemento nos eixos globais. Escreve-se a equação:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{E}}\mathbf{R} \qquad (7)$$

sendo **R** é a matriz de rotação para o elemento de pórtico plano, onde θ é o ângulo formado entre o eixo x local e o X global; essa matriz é dada por:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A montagem da matriz de rigidez global da estrutura é feita somando-se as contribuições de rigezas de todos os elementos referentes ao mesmo deslocamento.

5.3. Matriz de massa

A matriz de massa, que representa os coeficientes da força de inércia surgida na análise dinâmica pode ser considerada de duas formas: concentrada ou consistente. Ainda no caso de estruturas submersas como linhas de ancoragens, é utilizado o conceito de massa adicional.

5.3.1. Matriz de massa consistente

No caso da matriz de massa consistente, é levado em consideração o efeito da aplicação da aceleração na direção *i* na força de inércia na direção *j*. Ou seja, os coeficientes $M_{i,j}$ da matriz de massa quando $i \neq j$ não são nulos.

A metodologia de determinação destes coeficientes é similar à utilizada para o cálculo da matriz de rigidez de uma estrutura. Resumindo, o termo $M_{i,j}$ é determinado aplicando-se uma aceleração unitária na direção *j* e calculando-se a força de inércia que surge na direção *i*, mantendo-se todas as acelerações em outras direções iguais a zero. A matriz de massa consistente para o elemento de pórtico plano da Figura 5.3 é mostrada a seguir:

$$\frac{\overline{m}L}{420}\begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \textit{Simétrica} & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

5.3.2. Matriz de massa concentrada

O método mais simples de considerar as propriedades de inércia para um sistema dinâmico é assumir que a massa da estrutura está concentrada nos pontos nodais onde as translações estão definidas. Geralmente, nas rotações o coeficiente de inércia adotado é zero, mas em alguns casos quando se deseja uma maior representação deste movimento, o valor deste coeficiente é escolhido como uma porcentagem da massa de translação. A seguir é mostrado um exemplo de matriz de massa para um elemento de pórtico plano (Figura 5.3), com massas de rotação iguais a zero.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A distribuição de massa do elemento pode ser tomada como sendo uma função qualquer, mas o método usual para determinação das massas nodais é considerar que a distribuição de massa no elemento é uniforme, ou seja:

$$m_1 = m_2 = m_4 = m_5 = \frac{\overline{m}L}{2}$$

sendo $\overline{m}$ a massa distribuída no elemento e L o seu comprimento.

5.3.3. Matriz de massa adicional

Para acelerar um corpo imerso em água, não é somente o corpo que deve ser acelerado, mas também a massa de certa quantidade de água próximo do corpo [14]. Como resultado, a força F' necessária para acelerar um corpo imerso em água é maior do que a força F utilizada para acelerá-lo no vácuo. Isto pode ser expresso pela expressão:

$$F' = (m + m')a > F = ma$$

onde m' é a massa adicionada (ou massa hidrodinâmica) e a soma $m + m'$ também pode ser referenciada como massa virtual.

A massa adicionada é usualmente expressa por:

$$m' = C_m \rho_F Vol$$

onde C_m é o coeficiente de massa adicionada, que pode ser tomado igual a 1 no caso de corpos cilíndricos. Este será o mesmo valor adotado para as linhas de ancoragem estudadas neste trabalho, tendo em vista que o cálculo deste coeficiente não está no escopo deste projeto final de curso. ρ_F é a massa específica do fluido e Vol é o volume de fluido deslocado pelo objeto. A matriz de massa adicionada para o elemento de

pórtico plano da Figura 5.3 submerso é mostrado a seguir. Como simplificação, será utilizada apenas a contribuição nas direções 2 e 5:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_a AL}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_a AL}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde A é a área transversal, ρ_a é a massa específica da água e L o comprimento do elemento.

5.4. Vibrações livres

Quando um sistema vibra apenas devido a condições iniciais, ou seja, sem a ação de nenhuma força excitadora externa, o movimento é chamado de vibração livre. Assim, com a anulação do vetor F da equação (8) e escrevendo o deslocamento ela se reduz a:

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{C\dot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{0} \qquad (8)$$

Adotando-se o amortecimento **C** proporcional à matriz de massa e rigidez, ou seja, $\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$. Então é possível dizer que os modos de vibração calculados com o problema amortecido são iguais aos não amortecidos, assim a equação (9) é escrita:

$$\mathbf{M\ddot{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{0} \qquad (9)$$

Adotando-se por hipótese que o vetor de deslocamento pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{u}(x,t) = \varphi(x) \cdot q(t) \qquad (10)$$

onde φ é o vetor que representa fisicamente a deformada e q(t) a função que representa o movimento no tempo e pode ser escrita na forma complexa:

$$q(t) = a \cdot e^{i\omega t} \qquad (11)$$

com ω sendo a freqüência angular em rad/s e a uma constante. Como na equação (10) apenas a função q dependente do tempo, pode-se obter sua derivada em relação ao tempo na forma:

$$\ddot{q}(t) = -\omega^2 \cdot a \cdot e^{i\omega t} \qquad (12)$$

Com base em (12), substituindo (10) em (9) chega-se a:

$$(-\mathbf{M}\omega^2\varphi + \mathbf{K}\varphi)a \cdot e^{i\omega t} = \mathbf{0} \qquad (13)$$

Na equação (13), o termo $a \cdot e^{i\omega t}$ não pode ser zero o que representaria a ausência da dinâmica do movimento. Assim, pode-se escrever:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\varphi = \mathbf{0} \qquad (14)$$

que é um sistema de n equações algébricas homogêneas com n componentes do vetor φ e o parâmetro ω^2 desconhecidos. A formulação da equação (14) é um importante problema matemático conhecido por problema de autovalor. Como a solução do problema não pode ser trivial $\varphi = 0$, o que resultaria na ausência de deslocamentos nodais, conclui-se que:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \qquad (15)$$

A equação (15) exprime um polinômio de grau n resultando em n valores de ω^2. Este polinômio é conhecido como equação característica do sistema. Para cada valor de ω^2 satisfazendo a equação característica, podemos resolver a equação (14) em termos de uma constante arbitrária. Como os valores calculados para os coeficientes φ são arbitrários, é necessária uma normalização desses valores. Nesse trabalho esse processo

será realizado com relação à matriz de massa. A normalização, assim, ficará de acordo com a fórmula:

$$\phi_j = \frac{\varphi_j}{\sqrt{\varphi_j{}^T \mathbf{M} \varphi_j}}$$

onde φ_j é o autovetor e **M** é a matriz de massa.

Como solução do problema de autovalores, é determinado ω_i, as freqüências naturais e seus respectivos autovetores associados φ_i que representam os modos de vibração do sistema. O máximo número de modos de vibração é igual ao número de graus de liberdade da estrutura que depende da forma como ela é discretizada. Quanto maior a discretização maior será o número máximo de modos de vibração.

6. Formulação computacional

Neste trabalho foi desenvolvido um programa utilizando a linguagem Fortran para a solução do problema dinâmico de vibrações livres caracterizado pela equação (14). Neste capítulo será mostrada a estratégia de análise para a obtenção das matrizes envolvidas no problema, **K** e **M**. Ainda neste capítulo será mostrado o método de iteração por subespaço, utilizado no programa desenvolvido para a solução do problema de autovalores.

6.1. Estratégia de análise

O programa desenvolvido calcula os modos de vibração de uma estrutura utilizando elementos de pórtico plano. A forma de entrada de dados pode ser através das coordenadas dos nós e propriedades dos elementos, dando liberdade aos usuários de criar um pórtico plano com a forma que deseja. Outra forma de entrada de dados é através das propriedades de uma linha, para o cálculo de uma catenária e seus modos de vibração.

No caso de análise de linhas de ancoragem, os dados de entrada do programa são apenas as propriedades da linha e o número de elementos desejado para o modelo. O próprio programa faz a geração dos nós e a conectividade dos elementos.

A geometria da catenária é gerada a partir do programa em Fortran desenvolvido no projeto final de curso de Lacerda [5]. O programa desenvolvido no referido trabalho é inserido aqui como uma subrotina. Os dados necessários para a subrotina que gera a geometria da catenária são:

Xt – Projeção horizontal do cabo;
Yc – Distância vertical do fundo até o ponto de conexão;
W – Peso por metro do cabo;
St – Comprimento total do cabo;
EA – Rigidez axial da ancoragem.

Após a geração da geometria da catenária e com o número de divisões do modelo discretizado, o programa calcula as coordenadas dos nós, numera os deslocamentos e cria a incidência dos elementos automaticamente. Adicionalmente, o programa também calcula a força axial que surge do equilíbrio estático da catenária e a partir dessa força calcula a matriz de rigidez do elemento.

Com base nesses dados são calculadas as matrizes de massa, de massa adicionada e de rigidez. Através de um ciclo para todos os elementos o programa calcula as matrizes globais da estrutura. Neste ponto são utilizados os dados do arquivo de entrada referentes às condições de contorno do problema. Na resolução de catenárias, são dados os deslocamentos restringidos nos nós do topo e do fundo. No caso de pórtico, é fornecido o nó e quais são as restrições que devem ser impostas pelo usuário.

Dentre os métodos conhecidos para a inserção das condições de contorno na matriz de rigidez e de massa, foi escolhido não montar as linhas e as colunas referentes aos deslocamentos restringidos.

Montadas as matrizes de massa e rigidez da estrutura, o programa utiliza o método de iteração por subespaço para a solução do problema de autovalores da equação (14). Este método não é o escopo do estudo deste trabalho e será descrito sucintamente adiante.

Ao programa também é fornecido o *offset* da plataforma que será utilizado para o cálculo dos modos e freqüências naturais ao longo do passeio do flutuante. Mais detalhes relacionados à forma de estudo dos casos deste trabalho são descritos no capítulo seguinte.

De posse dos resultados, o programa imprime arquivos de saída com as coordenadas nodais, modos de vibração e freqüências. A fim de correlacionar os modos de vibração de duas configurações de *offset* distintas, foi utilizado o MAC (*Modal Assurance Criterion*) [6]. O MAC pode ser calculado através da equação (16):

$$MAC_{i,j} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} (\Phi_i)_k (\varphi_j)_k\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} (\Phi_i)_k^{\,2}\right]\left[\sum_{k=1}^{n} (\varphi_j)_k^{\,2}\right]} \qquad (16)$$

onde:

$(\Phi_i)_k$ – é a k-ésima coordenada do vetor Φ_i da matriz modal $[\Phi]$;

$(\varphi_i)_k$ – é a k-ésima coordenada do vetor φ_i da matriz modal $[\varphi]$;

n – número de graus de liberdade do problema.

O valor do MAC próximo de 1 representa que os modos de vibração são semelhantes, enquanto que o valor calculado próximo a zero indica que o autovetores são ortogonais. Desta forma torna-se bastante simples a identificação, dentro da lista de modos calculados para configurações diferentes, se houve alguma alteração na ordem dos modos calculados ou o aparecimento de novos modos.

A seguir, na Figura 6.1, é apresentado um fluxograma indicando o funcionamento do programa desenvolvido neste trabalho.

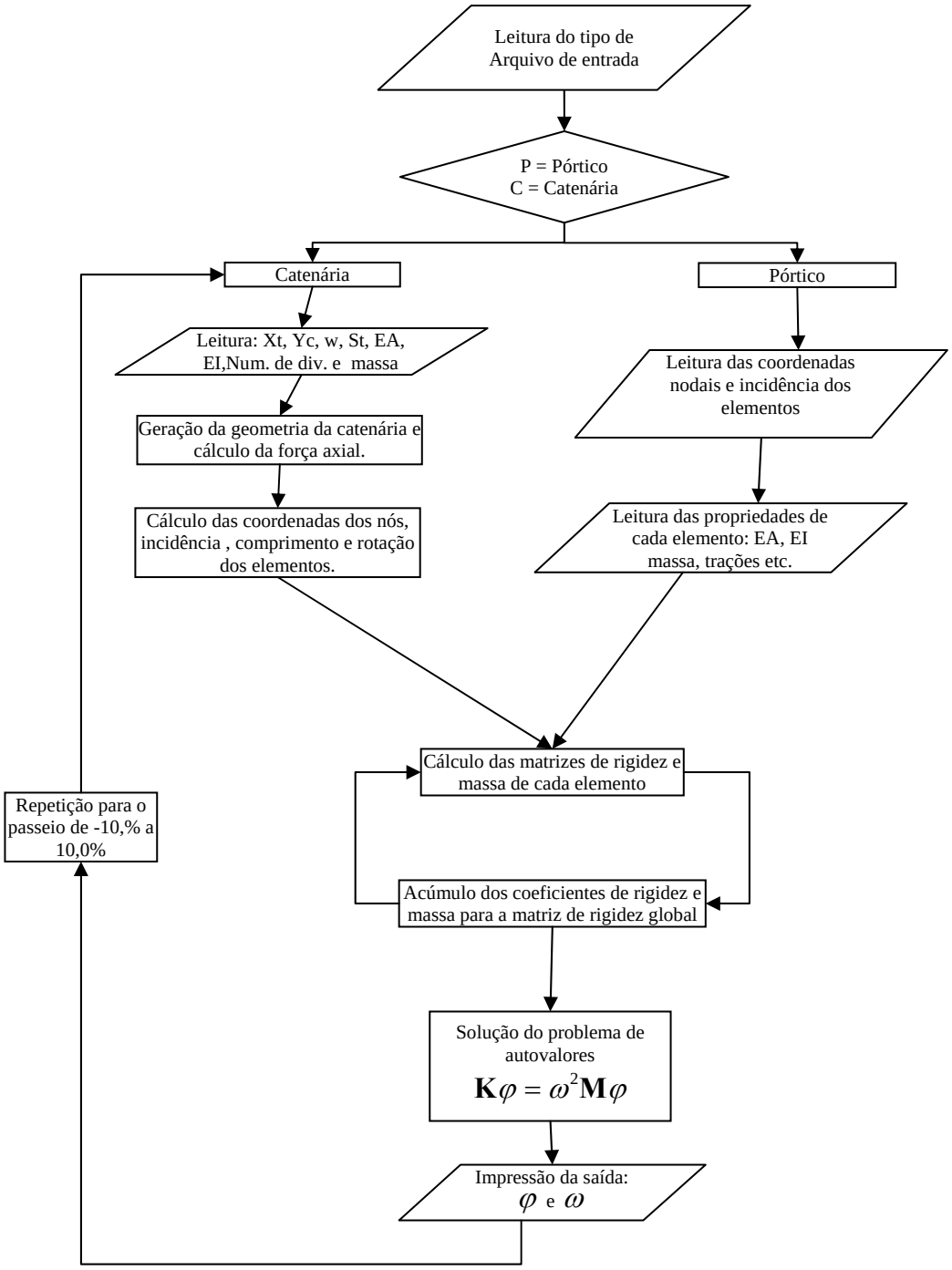


Figura 6.1 – Fluxograma indicativo do funcionamento do programa

6.2. Método do subespaço

O problema de autovalores de vibrações livres expresso pela equação (14) é resolvido neste trabalho através do método de iteração por subespaço, desenvolvido por K. J. Bathe [4]. A principal idéia do método é reduzir o tempo de processamento, já que as matrizes de massa e rigidez são projetadas para um subespaço com a dimensão do

número de autovalores desejados para a resposta. Ou seja, ao invés de calcular os autovalores para o problema de dimensão *n*, sendo *n* o número de graus de liberdade da estrutura, o cálculo é feito apenas para o número de modos pedidos.

Para iniciar a iteração, é necessário estabelecer os vetores de partida $\mathbf{X_k}$. A matriz modal inicial formada pelos vetores de partida, tem como primeira e última coluna a diagonal da matriz de massa, e os vetores intermediários são números aleatórios. Estabelecidos os vetores de partida, inicia-se a iteração seguindo os passos:

1) Calcula-se $\mathbf{X_{k+1}}$ de acordo com a equação:

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_{\mathbf{k+1}} = \mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathbf{k}}$$

Logo,

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k+1}} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathbf{k}} \qquad (17)$$

2) Projetam-se as matrizes de rigidez e massa para o subespaço formado pelos vetores $\mathbf{X_{k+1}}$ determinados na equação (17), formando as matrizes **m** e **k** que têm dimensão *q*, sendo *q* o número de autovalores pedidos como resposta. A projeção é realizada pelas equações:

$$\mathbf{m} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}{}_{\mathbf{k+1}}\mathbf{M}\mathbf{X}_{\mathbf{k+1}} \qquad (18)$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}{}_{\mathbf{k+1}}\mathbf{K}\mathbf{X}_{\mathbf{k+1}} \qquad (19)$$

3) Com as matrizes m e k calculadas nas equações (18) e (19), resolve-se o problema de autovalores da equação (20) pelo método de Jacobi [4].

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\Phi} = \lambda\mathbf{m}\boldsymbol{\Phi} \qquad (20)$$

onde:

$\boldsymbol{\Phi}$ - são os autovetores do subespaço;

λ - são os autovalores.

4) Compara-se os autovalores com os calculados anteriormente e se houve convergência:

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{X}_{\mathbf{k+1}}\boldsymbol{\Phi}$$

E tem-se que:

$$\omega^2 = \lambda$$

Caso não haja convergência, inicia-se uma nova iteração na equação (17) com:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\varphi}$$

7. Casos a serem estudados

Neste capítulo serão mostrados os resultados encontrados com o programa em linguagem Fortran elaborado no presente trabalho, para o cálculo dos modos e freqüências naturais de vibração. Primeiro serão efetuados testes para a verificação da eficácia do programa desenvolvido, no item que se segue. Após a verificação será apresentada a metodologia realizada para o estudo dos dois casos, um em ancoragem convencional e outro em ancoragem *taut-leg*. No último item deste capítulo será feita a análise dos resultados encontrados.

7.1. Verificação do programa

Neste item serão estudados exemplos que além de úteis para transmitir confiança no uso do programa desenvolvido, também apresenta alguns conceitos relacionados à análise de vibrações livres em estruturas civis e *offshore*.

O primeiro exemplo a ser verificado no programa em Fortran será uma viga biapoiada. Neste exemplo, busca-se a comparação dos resultados com cálculos analíticos e através do programa comercial SAP2000 [15], além do estudo da sensibilidade do número de elementos na resposta. Na viga bi-apoiada, verifica-se também a consideração da carga axial através do cálculo da carga crítica de flambagem.

A seguir, será apresentado um problema de uma catenária utilizando dados hipotéticos de uma linha, apenas para a verificação do programa com o SAP2000 [15]. A geometria da estrutura foi modelada nos dois programas e os resultados das freqüências naturais foram comparados.

O último exemplo estudado é de um *pipeline* (oleoduto) biengastado, onde o objetivo é a análise dos modos de vibração de freqüências mais altas, comparando com fórmulas analíticas.

7.1.1. Viga biapoiada

Neste modelo apresentado na Figura 7.1, inicialmente sem utilizar carga axial, são calculados os modos de vibração utilizando diversos números de elementos. Os valores das freqüências naturais são comparados com a resposta analítica, dada pela equação (21). O objetivo deste teste é verificar qual o número de elementos necessários para que as respostas das freqüências naturais convirjam para o resultado analítico. Desta forma, será verificado o funcionamento do programa além de perceber quantos elementos serão utilizados para outros testes neste modelo de viga:

$$\omega = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\overline{m}L^4}} \qquad (21)$$

Onde:

ω – freqüência circular natural em rad/s;

n – número do modo;

E – Módulo de elasticidade (Adotado o valor de 26.072 MPa);

I – Momento de inércia (Ver Figura 7.1);

$\overline{m}$ – massa distribuída na viga (Adotado 2.549 kg/m^3);

L – Comprimento da viga (Ver Figura 5.3).

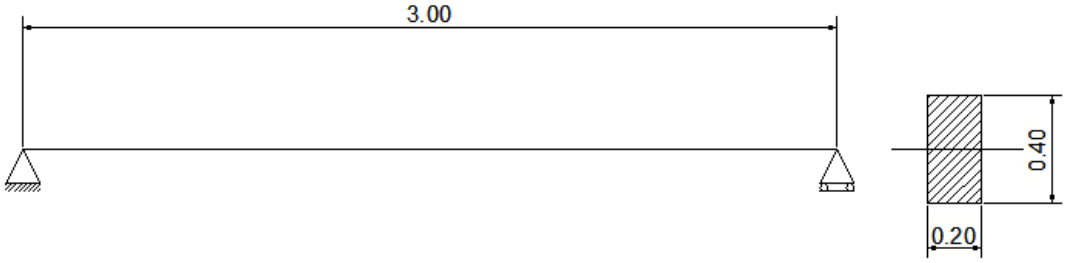


Figura 7.1 – Viga biapoiada utilizada para verificação.

Na Tabela 7.1 são mostrados os resultados encontrados para os quatro primeiros modos de vibração da viga para diversos números de elementos e, na Tabela 7.2, é mostrada a diferença percentual com relação ao método analítico.

Tabela 7.1 – Freqüências naturais em Hz para a viga biapoiada com diversos elementos

Num. Elem.	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5
7	64,4633	257,9590	581,4120	1038,18	1636,16
9	64,4621	257,8880	580,6230	1033,96	1621,08
11	64,4618	257,8650	580,3660	1032,56	1615,93
20	64,4615	257,8480	580,1730	1031,49	1611,96
Analítico	64,45027	257,80078	580,05181	1031,203	1611,2549

Tabela 7.2 – Diferença percentual em relação ao método analítico

Num. Elm.	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
7	0,020%	0,061%	0,234%	0,672%	1,522%
9	0,018%	0,034%	0,098%	0,267%	0,606%
11	0,018%	0,025%	0,054%	0,131%	0,289%
20	0,017%	0,018%	0,021%	0,028%	0,044%

Verifica-se que os resultados apresentam diferenças muito pequenas, convergindo para o cálculo analítico. O modelo discretizado com 20 elementos possui a maior diferença igual a 0,044% para o modo 5, esse valor percentual mostra a eficácia do programa desenvolvido. Sendo assim, para os testes a seguir serão utilizados 20 elementos para a discretização da viga estudada.

O próximo passo foi a verificação da entrada da matriz de rigidez geométrica no processo de cálculo. Para isso foi feito um estudo do modelo de viga com 20 elementos, variando-se a carga axial, tanto para compressão quanto para tração. O objetivo desta análise é verificar como as freqüências naturais da estrutura se comportam quando esta é submetida a um carregamento axial, principalmente quando este se aproxima da carga de flambagem. A carga crítica de flambagem (P_{cr}) de uma viga biapoiada é dada pela equação (22):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (22)$$

Na Tabela 7.3 são mostrados os resultados das freqüências naturais (em Hz) calculadas para diversas cargas P, mostradas como a razão P / P_{cr}, para os 5 primeiros modos.

Tabela 7.3 – Freqüências naturais em Hz para diferentes cargas axiais

	P/Pcr	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
TRAÇÃO	-1,0	91,16	288,28	611,55	1063,23	1643,86
	-0,9	88,85	285,38	608,49	1060,10	1640,7
	-0,8	86,48	282,45	605,40	1056,96	1637,53
	-0,6	81,54	276,51	599,20	1050,65	1631,17
	-0,5	78,95	273,49	596,07	1047,48	1627,98
	-0,4	76,27	270,43	592,92	1044,30	1624,79
	-0,3	73,50	267,34	589,76	1041,11	1621,59
	-0,2	70,61	264,21	586,58	1037,92	1618,38
	0,0	64,46	257,85	580,17	1031,49	1611,96
COMPRESSÃO	0,2	57,66	251,32	573,69	1025,03	1605,5
	0,3	53,94	247,99	570,43	1021,78	1602,26
	0,4	49,93	244,62	567,14	1018,52	1599,02
	0,5	45,58	241,20	563,83	1015,25	1595,76
	0,6	40,77	237,73	560,51	1011,98	1592,51
	0,8	28,84	230,63	553,79	1005,39	1585,97
	0,9	20,40	227,00	550,41	1002,07	1582,69
	1,0	0,78	223,31	547,00	998,75	1579,41

Nota-se que a carga axial tem maior influência no primeiro modo de vibração. Neste, a freqüência tende a zero quando a força axial aplicada tende à carga crítica de flambagem. Na Figura 7.2 é mostrado um gráfico da variação das freqüências naturais normalizadas pelo valor sem carga axial dos cinco primeiros modos conforme é feita a variação da carga axial.

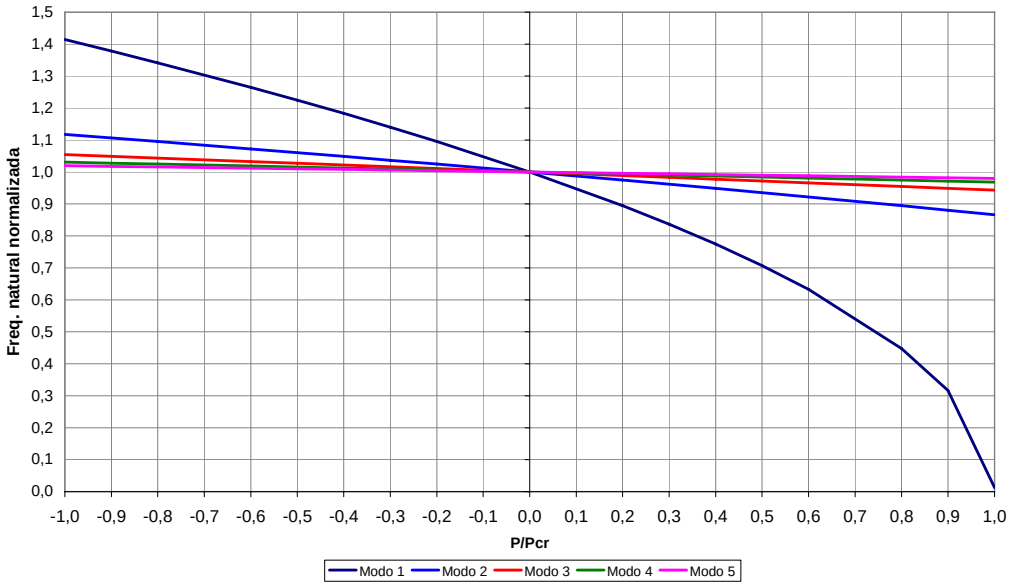


Figura 7.2 – Gráfico mostrando a variação da freqüência com a carga axial

Neste ponto é importante observar o comportamento da viga com este teste. Verifica-se que quando se aproxima da carga crítica, a queda da freqüência natural do primeiro modo é muito rápida, mas quando a carga muda para tração o comportamento é praticamente linear. Neste gráfico também pode-se observar a menor influência da carga axial nos demais modos.

Para mostrar a precisão dos cálculos efetuados pelo programa desenvolvido neste trabalho, foi realizada uma comparação entre os valores das freqüências (em Hz) encontradas e os determinados com o software comercial SAP2000 [15]. Essa comparação foi feita para uma compressão de $0,2P_{cr}$ e sendo calculados 5 modos de vibração

Tabela 7.4 – Comparação com o SAP2000 – Compressão $0,2P_{cr}$ (freqüências em Hz)

MODO	Prog.	SAP	DIF.
1	57,66	57,67	0,03%
2	251,32	251,38	0,02%
3	266,57	266,45	0,04%
4	573,69	573,72	0,01%
5	801,37	797,45	0,49%

Os resultados mostram que o programa desenvolvido em Fortran apresentou resultados muito confiáveis. A maior diferença ficou em torno de 0,49% para o modo 5.

7.1.2. Linha em catenária

Neste teste para verificação do programa desenvolvido em Fortran, foi utilizado o exemplo de uma estrutura com geometria mais complexa, como uma catenária. Um exemplo com dados arbitrários foi elaborado e através da discretização utilizando 50 elementos, com as coordenadas nodais calculadas de acordo com a geometria gerada pelo programa em Fortran desenvolvido por Lacerda no projeto de fim de curso [5]. As propriedades da linha utilizada encontram-se na Tabela 7.5. A geometria da linha estudada encontra-se na Figura 7.3.

Tabela 7.5 – Dados da linha utilizada para verificação

Xt (m)	Yc (m)	St (m)	w (N/m)	Massa (kg/m)	Massa adicionada (kg/m)	EA (N)	EI ($N.m^2$)
1320	1380	2100	62,2	24,1	29,4	$1,516x10^8$	$3,456x10^5$

Onde:

Xt – Projeção horizontal da linha;

Yc – Projeção vertical;

St – Comprimento de cabo;

w – Peso por metro da linha;

EA – Rigidez axial;

EI – Rigidez à flexão.

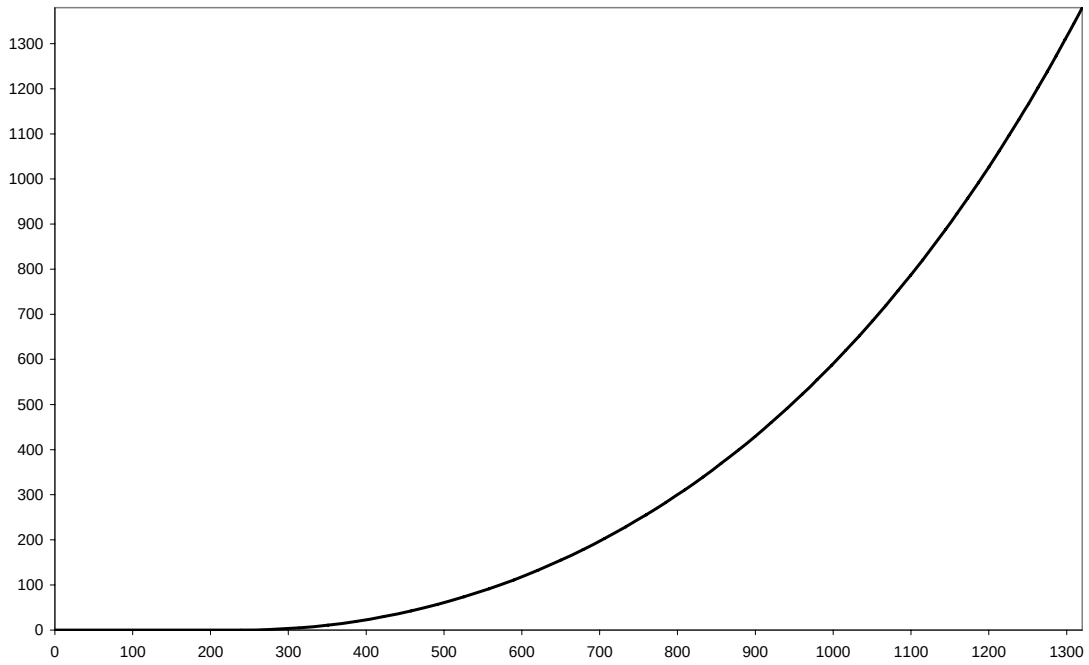


Figura 7.3 – Geometria da linha em catenária

Os resultados dessa comparação encontram-se na Tabela 7.6 em termos dos períodos naturais em segundos dos modos de vibração.

Tabela 7.6 – Comparação dos períodos naturais em segundos

Modo	SAP	Prog	Dif
1	69,47	68,99	0,68%
2	37,49	37,20	0,77%
3	22,78	22,58	0,88%
4	18,25	18,07	1,02%
5	14,13	13,96	1,19%

Mais uma vez o programa desenvolvido neste trabalho apresentou bons resultados, com a maior diferença igual a 1.19% para o modo 5.

7.1.3. *Pipeline* bi-engastado em vão livre

Neste exemplo um duto de 40 m de comprimento, considerado de uma forma simplificada como bi-engastado, foi modelado no programa desenvolvido em Fortran com o objetivo de comparar o resultado obtido numericamente com cálculos analíticos, principalmente para modos de freqüências mais elevadas. A Figura 7.4 mostra o modelo do pipeline e as dimensões utilizadas.

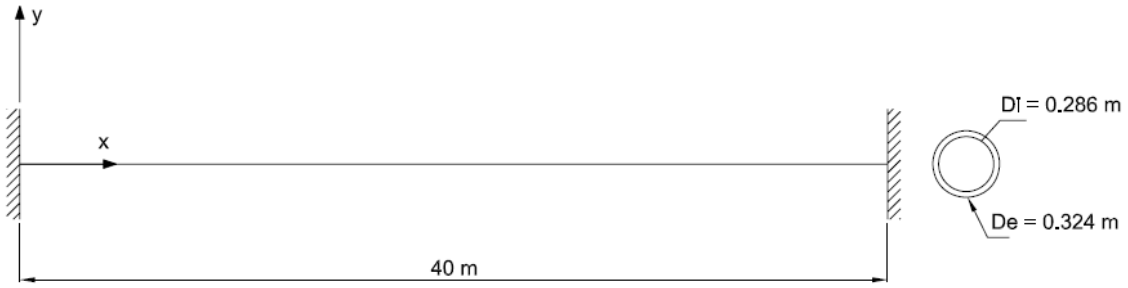


Figura 7.4 – Exemplo de *pipeline* biengastado

O material do *pipeline* é aço, cujo módulo de elasticidade adotado foi de $2{,}07 \times 10^{11}$ N/m^2 e a massa específica é de 7849,1 kg/m^3. Nesta análise, será considerado também que o duto possui fluido interno com massa específica igual 800 kg/m^3 e fluido externo sendo água do mar com 1025 kg/m^3.

A análise computacional foi realizada utilizando a discretização do modelo em 250 elementos e 100 modos de vibração foram solicitados para cálculo. Para o cálculo

analítico, as equações que serão apresentadas aqui foram retiradas do livro Formulas for Natural Frequency and Mode Shape de Robert D. Blevins [16].

Neste exemplo o cálculo analítico, assim como o pós-processamento dos resultados do programa, foram realizados utilizando o MathCAD. Como o número de modos calculados numericamente foi elevado, a verificação do tipo de modo de vibração visualmente consumiria muito tempo. Então a seguinte razão foi utilizada como base para a separação dos modos:

$$R_j = \frac{\sum \phi_x^j}{\sum \phi_y^j} \qquad (23)$$

onde

$\sum \phi_x^j$ é o somatório dos deslocamentos na direção x do modo j (ver Figura 7.4);

$\sum \phi_y^j$ é o somatório dos deslocamentos na direção y do modo j.

Se o resultado da equação (23) for maior do que 1,0 o modo é axial, caso contrário é considerado transversal. Desta forma, do total de 100 modos calculados, 64 eram transversais e 36 axiais.

As freqüências naturais dos modos de vibração transversais da viga biengastada foram calculados analiticamente pela equação (24)

$$f_i = \frac{\lambda_i^{\,2}}{2\pi L^2}\sqrt{\frac{EI}{M}} \qquad (24)$$

onde:

λ_i - é o parâmetro adimensional da freqüência natural *i*;

L – comprimento da viga;

M – massa por metro da viga;

EI – rigidez a flexão.

O parâmetro adimensional λ é calculado através da equação:

$$\lambda_i = \frac{(2i+1)\pi}{2}$$

onde *i* é o modo de vibração solicitado.

A fórmula para o respectivo modo de vibração é dada pela seguinte expressão:

$$y_i\left(\frac{x}{L}\right) = \cosh\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \sigma_i\left[\operatorname{senh}\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\lambda_i x}{L}\right)\right]$$

onde:

$$\sigma_i = \begin{cases} 0{,}982502215 \\ 1{,}000777312 \\ 0{,}999966450 \\ 1{,}000001450 \\ 0{,}999999937 \\ 1{,}0 \rightarrow i > 5 \end{cases}$$

O gráfico da Figura 7.5 mostra a variação das freqüências naturais dos modos de vibração transversais calculados pelo método analítico da equação (24) e o método numérico do programa.

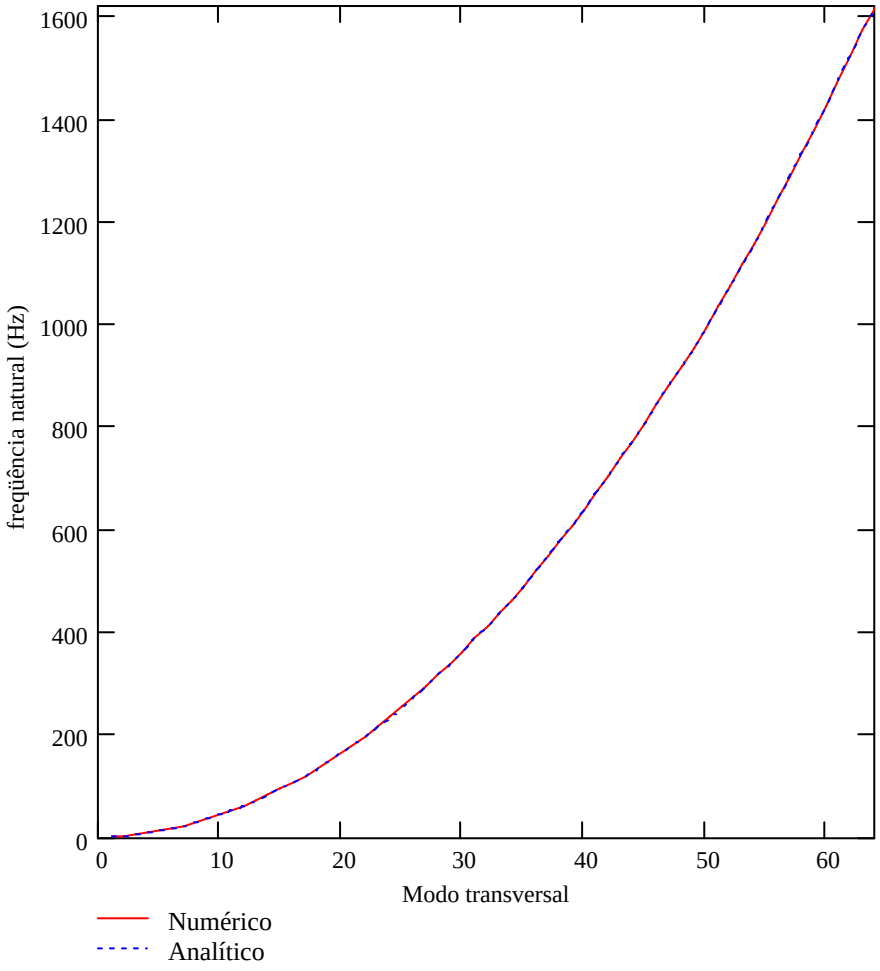


Figura 7.5 – Modos transversais e freqüências naturais para o *pipeline*

Nota-se que os dois métodos possuem as mesmas curvas, verificando que o programa apresenta resultados muito bons até para as freqüências mais altas quando o modelo é discretizado com muitos elementos, como foi neste exemplo. Agora o mesmo teste irá verificar o comportamento das freqüências dos modos axiais.

A equação para o cálculo analítico das freqüências naturais dos modos axiais para uma viga bi-engastada de acordo com [16] é:

$$f_i = \frac{i}{2L}\sqrt{\frac{EA}{M}} \qquad (25)$$

onde i é o modo axial solicitado e EA é a rigidez axial da viga.

Assim a variação da freqüência natural dos modos axiais para os dois métodos considerados é mostrada na Figura 7.6:

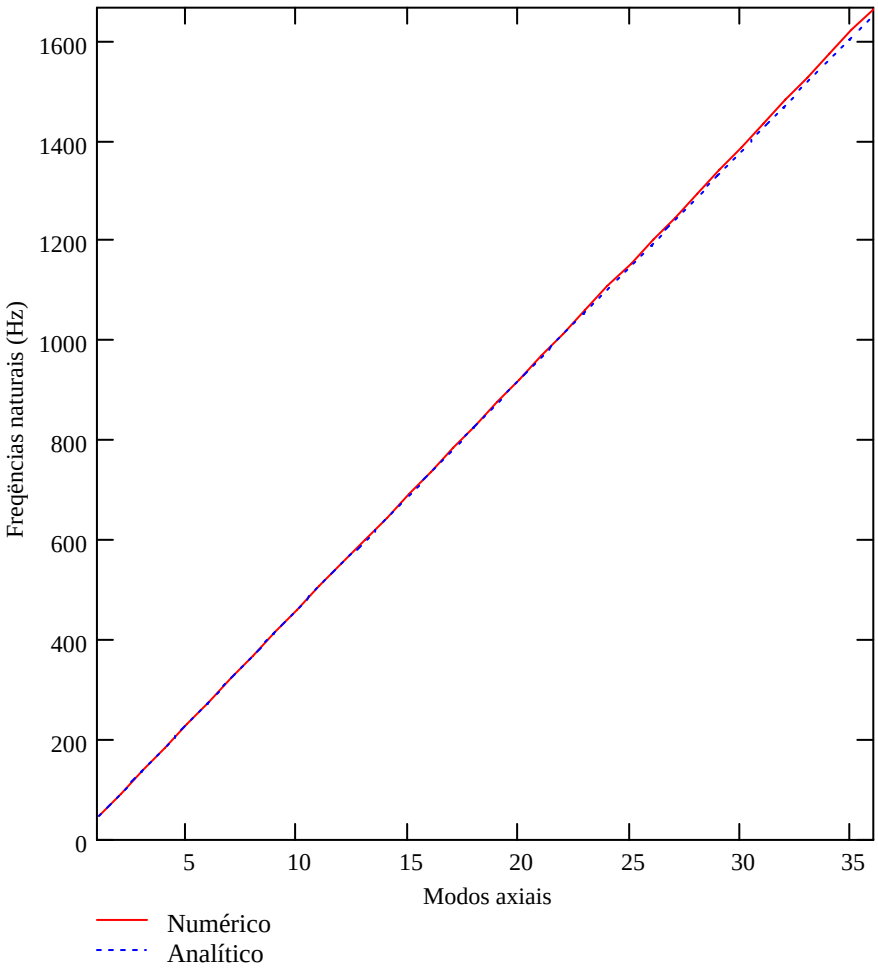


Figura 7.6 – Modos axiais e freqüências naturais para o *pipeline*

Assim como o observado para os modos transversais, o programa apresentou resultados muito satisfatórios tanto para baixas freqüências quanto para as mais altas. Então de acordo com os exemplos estudados neste item, o programa tem confiança necessária para as análises dos casos de ancoragem apresentadas a seguir.

7.2. Ancoragem convencional

Neste exemplo foram analisados os modos de vibração de uma ancoragem do tipo convencional típica de um sistema simples composto por duas linhas. Foi realizado

um estudo do comportamento dos modos de vibração quando a plataforma é submetida a um *offset* de 10% da lâmina d'água. O sistema de ancoragem e sua geometria quando a plataforma é movimentada são mostrados na Figura 7.7.

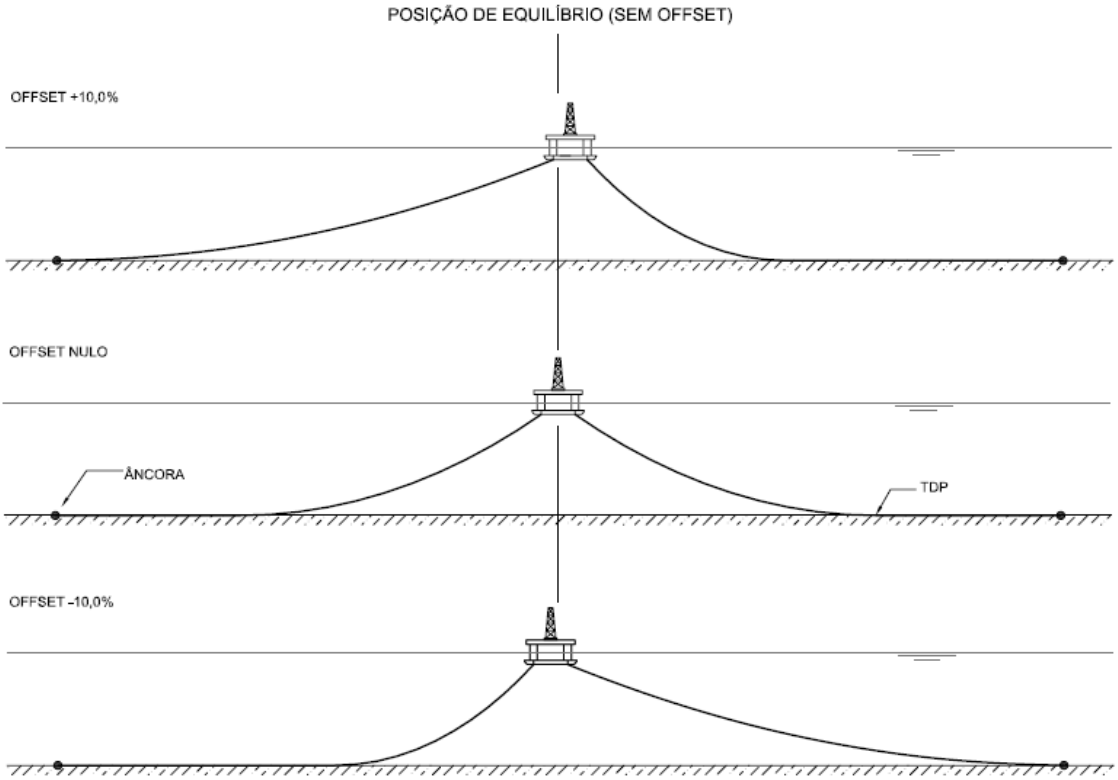


Figura 7.7 – Visão geral do sistema de ancoragem convencional estudado.

Este exemplo apresenta 200 metros de lâmina d'água e o sistema flutuante encontra-se em equilíbrio a 960 metros de distância da âncora. O cabo possui 1000 metros de comprimento com dois trechos de amarras diferentes, sendo um trecho de 650 metros com diâmetro de 0,095 m e um o outro de 350 metros com diâmetro de 0,132 m e suas propriedades encontram-se na Tabela 2.1. A geometria e os dados da linha de ancoragem analisada são de acordo com suas propriedades equivalentes que se encontram na Tabela 7.7. Os dados deste exemplo foram retirados da tese de doutorado de Alberto Omar Vázquez Hernandez [17].

Tabela 7.7 – Propriedades equivalentes da linha convencional

EA (N)	Massa (kg/m)	Massa adicionada (kg/m)	Peso molhado (N/m)
$8{,}608 \times 10^8$	266,92	29,79	2271

7.2.1. Número de elementos do modelo

Para a discretização da linha deve ser determinado o número de elementos do modelo computacional. Para que esse número não seja desnecessariamente alto, o que geraria maior tempo de processamento, será realizado um estudo para a determinação da quantidade ideal de elementos do modelo de acordo com critérios escolhidos neste projeto que serão descritos a seguir.

Nessa avaliação serão utilizadas as seis primeiras freqüências naturais calculadas pelo programa, visto que esse será o número de modos estudados adiante no presente projeto. Neste ponto, as formas modais apresentadas pelo programa não são avaliadas, já que aqui se buscou apenas a estabilidade numérica das seis primeiras freqüências naturais. Assim, o valor das freqüências naturais quando a quantidade de elementos é aumentada foi determinado e está apresentado na Tabela 7.8.

Nesta tabela são inseridas as freqüências naturais calculadas para cada quantidade de elementos. Em cada análise, o valor da freqüência natural é comparado com o calculado no passo anterior. Caso esta diferença seja maior do que uma tolerância estipulada no projeto, que é de 1×10^{-5}, a célula referente é hachurada.

Tabela 7.8 – Variação do número de elementos – Ancoragem convencional

Num. Elm.	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
10	0,139754	0,196776	0,275604	0,286434	0,361926	0,429459
15	0,139657	0,195874	0,276617	0,286774	0,363226	0,429182
20	0,139623	0,195545	0,276831	0,286897	0,363705	0,429106
30	0,139597	0,195303	0,276929	0,286980	0,364050	0,429057
40	0,139588	0,195216	0,276950	0,287007	0,364170	0,429040
50	0,139584	0,195175	0,276957	0,287019	0,364226	0,429032
60	0,139582	0,195153	0,276959	0,287025	0,364256	0,429028
70	0,139581	0,195139	0,276960	0,287029	0,364274	0,429026
80	0,139580	0,195131	0,276961	0,287031	0,364286	0,429024
90	0,139579	0,195125	0,276961	0,287033	0,364294	0,429023
100	0,139579	0,195120	0,276961	0,287034	0,364300	0,429022
110	0,139578	0,195117	0,276961	0,287034	0,364304	0,429022

Observando a Tabela 7.8 nota-se que a partir do uso de 90 elementos as freqüências naturais alcançam a estabilidade numérica para todos os modos, sinalizando assim que a partir deste número de elementos não haverá grandes mudanças nos

resultados apresentados. No exemplo a ser estudado, foram adotados 110 elementos para resultados mais precisos.

7.2.2. Resistência a flexão

Como já dito, a resistência à flexão (EI) de uma linha de ancoragem pode ser desprezada. Tendo em vista esse comportamento da estrutura, o mesmo estudo feito com o número de elementos foi repetido aqui para a resistência à flexão, onde sucessivas reduções no valor de EI mostram a influência deste termo nos resultados.

Assim como no estudo do número de elementos, apenas a estabilidade numérica das freqüências naturais foi avaliada e nada foi verificado com relação às formas modais. A Tabela 7.9 mostra essa avaliação da resistência à flexão onde o valor inicial para o EI (1,991 x 10^6 N.m^2) é estimado a partir de dados equivalentes para a linha estudada. Esse valor é apenas um ponto de partida para o estudo da influência da flexão na ancoragem convencional em amarra. A tolerância para a estabilidade dos resultados adotada aqui é a mesma do estudo anterior, ou seja, 1 x 10^{-5}.

Tabela 7.9 – Avaliação da resistência a flexão – Ancoragem convencional

EI	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
1,991E+06	0,139578	0,195117	0,276961	0,287034	0,364304	0,429022
1,991E+05	0,139573	0,195102	0,276942	0,286996	0,364221	0,428868
1,991E+04	0,139572	0,195101	0,276940	0,286992	0,364212	0,428853
1,991E+03	0,139572	0,195101	0,276940	0,286991	0,364211	0,428852
1,991E+02	0,139572	0,195101	0,276940	0,286991	0,364211	0,428851
1,991E+01	0,139572	0,195101	0,276940	0,286991	0,364211	0,428851
1,991E-04	0,139572	0,195101	0,276940	0,286991	0,364211	0,428851
0,00	0,139572	0,195101	0,276940	0,286991	0,364211	0,428851

Observando a Tabela 7.9 nota-se que a partir do valor de EI igual a 1,991 x 10^3 N.m^2 a influência da flexão no cálculo dos modos naturais de vibração é irrelevante; este estudo foi estendido até o valor de EI igual a zero para mostrar que valores muito pequenos também não causam alterações nos resultados, cabe ressaltar que aqui o valor de EI igual a zero não acarretará em nenhum erro numérico no processo, já que existe ainda a parcela referente à rigidez geométrica ($\mathbf{K_G}$). Assim, o valor igual a zero será adotado para o estudo dos modos de vibração a seguir.

7.2.3. Estudo dos modos naturais de vibração

Já determinados os dados que irão alimentar o modelo numérico elaborado em Fortran, inicia-se o processo do estudo dos modos naturais de vibração quando a plataforma é movimentada em 10,0% da lâmina d'água tanto sendo afastada da âncora como aproximada (Figura 7.7).

É necessário aqui determinar como referência para comparação dos modos de vibração a configuração em que a plataforma se encontra em equilíbrio, ou seja com *offset* nulo. Nesta configuração os seis primeiros modos de vibração e suas respectivas freqüências estão representados nas figuras 7.8 a 7.13.

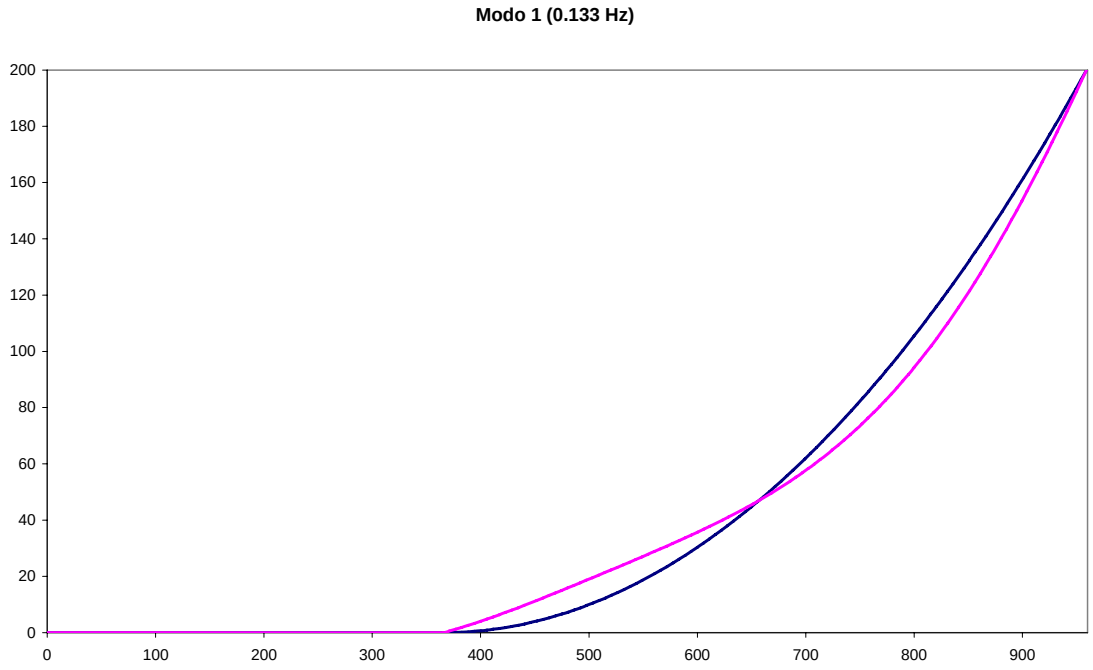


Figura 7.8 – Forma modal 1 para ancoragem convencional

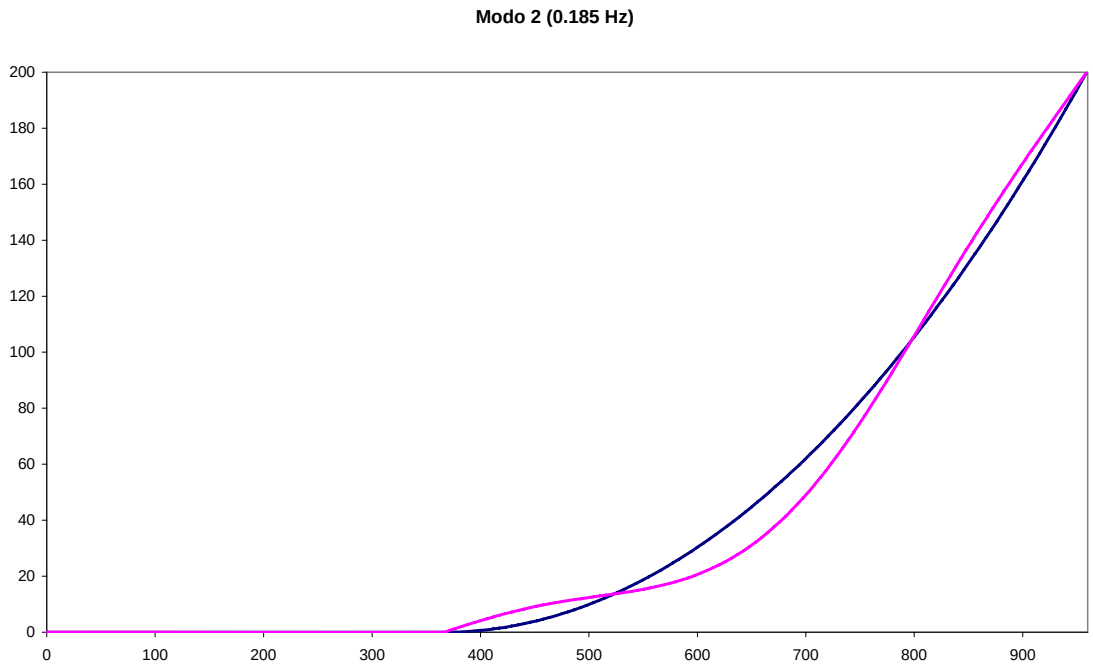


Figura 7.9 – Forma modal 2 para ancoragem convencional

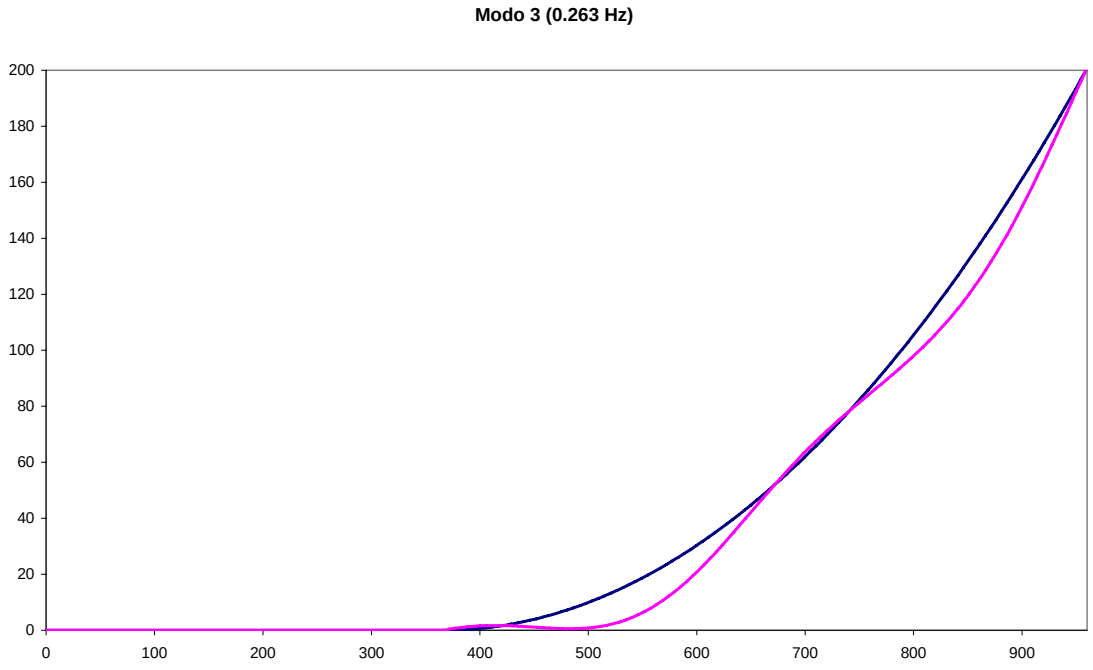


Figura 7.10 – Forma modal 3 para ancoragem convencional

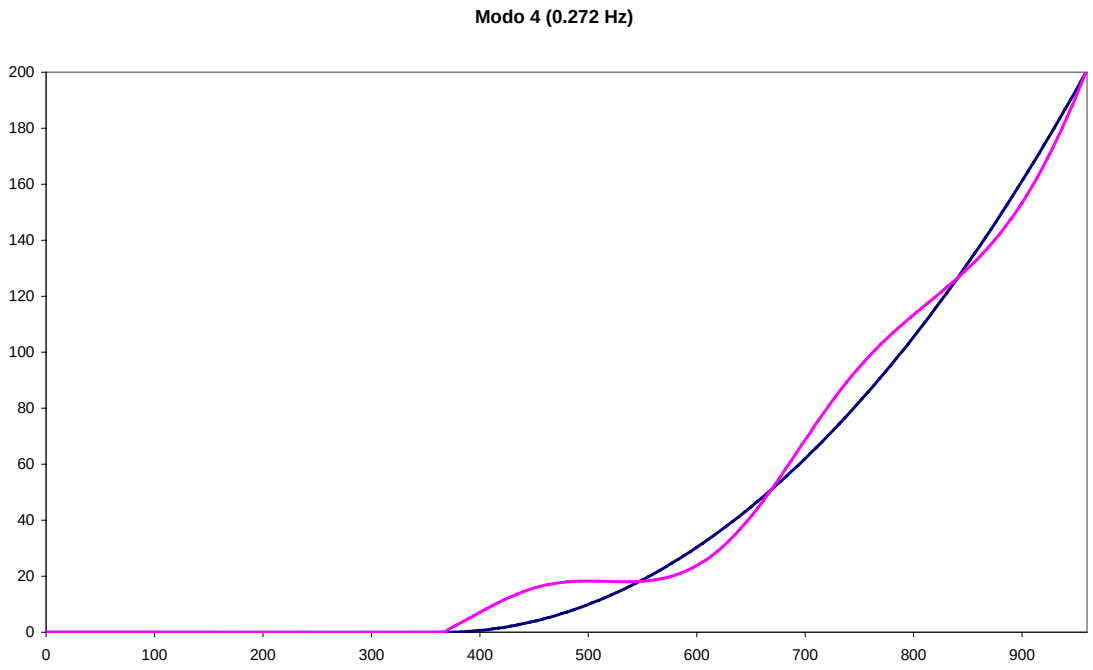


Figura 7.11 – Forma modal 4 para ancoragem convencional

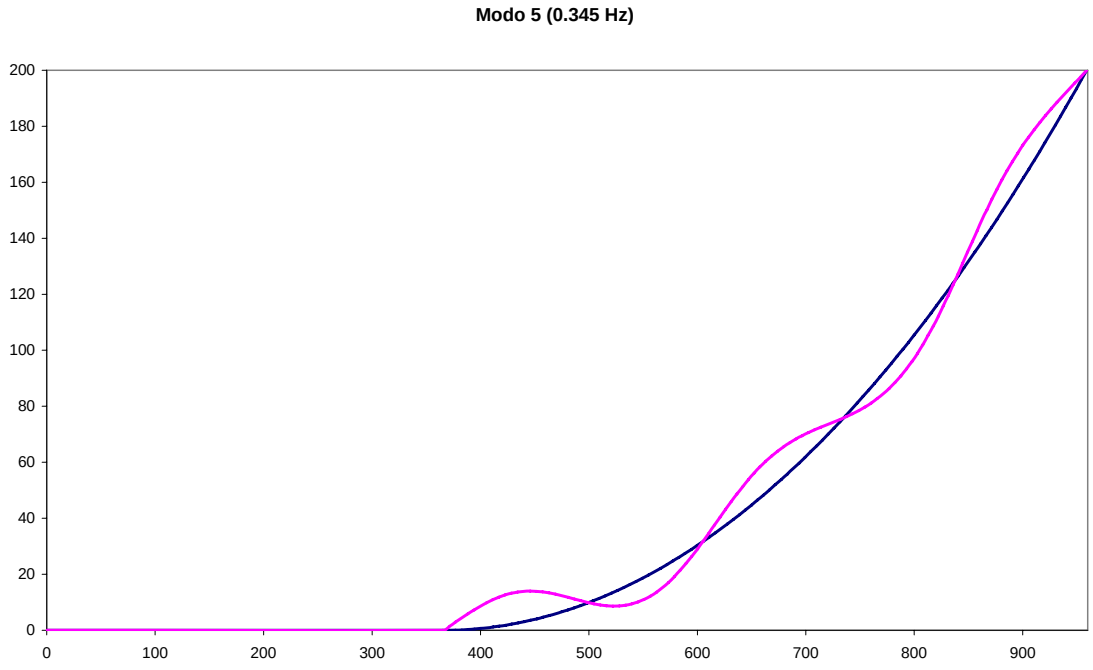


Figura 7.12 – Forma modal 5 para ancoragem convencional

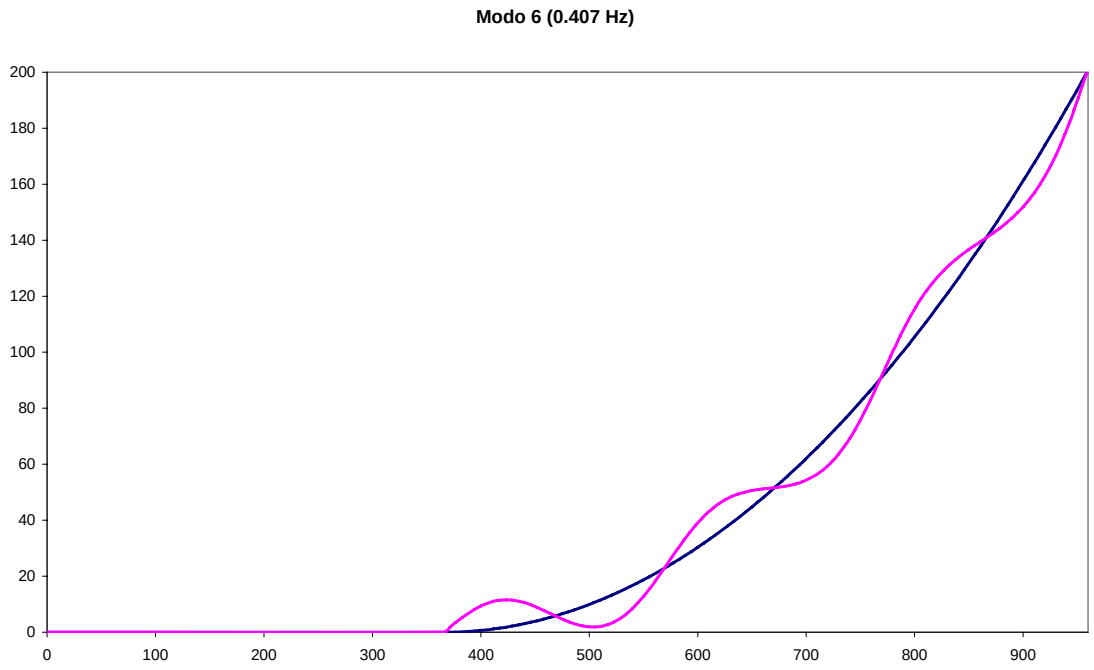


Figura 7.13 – Forma modal 6 para ancoragem convencional

Definidas as formas modais a serem estudadas, utiliza-se o programa em Fortran para a realização do cálculo dos modos de vibração em cada configuração de *offset*. Em cada passo, o programa imprime a matriz modal $[\Phi]$ calculada. A partir das matrizes modais calculadas no programa em Fortran, utiliza-se o software MathCAD para comparação entre os modos através do MAC. Esta metodologia resultou em maior agilidade nas análises, já que o cálculo das matrizes modais, procedimento que exige mais tempo de processamento, foi efetuado apenas uma vez. No MathCAD, a equação (16) do MAC foi implementada e resolvida para as respectivas configurações de acordo com a necessidade.

Neste ponto, o MAC teve grande importância, já que serviu de indicação das possíveis mudanças entre as configurações de *offset*. Quando o problema de autovalores é resolvido, as freqüências naturais e seus respectivos modos de vibração são ordenados de forma crescente. Então, como a aplicação do *offset* pode alterar a freqüência natural de um modo de forma mais significativa que outro, as formas modais podem trocar de posição ou até mesmo não surgir na listagem dos seis primeiros modos analisados neste projeto.

A seguir, na Figura 7.14, são mostradas as freqüências naturais para as formas modais determinadas nas análises em cada configuração de *offset*. Observa-se que duas outras formas surgem além das seis iniciais e serão chamas de modo 7 e modo 8.

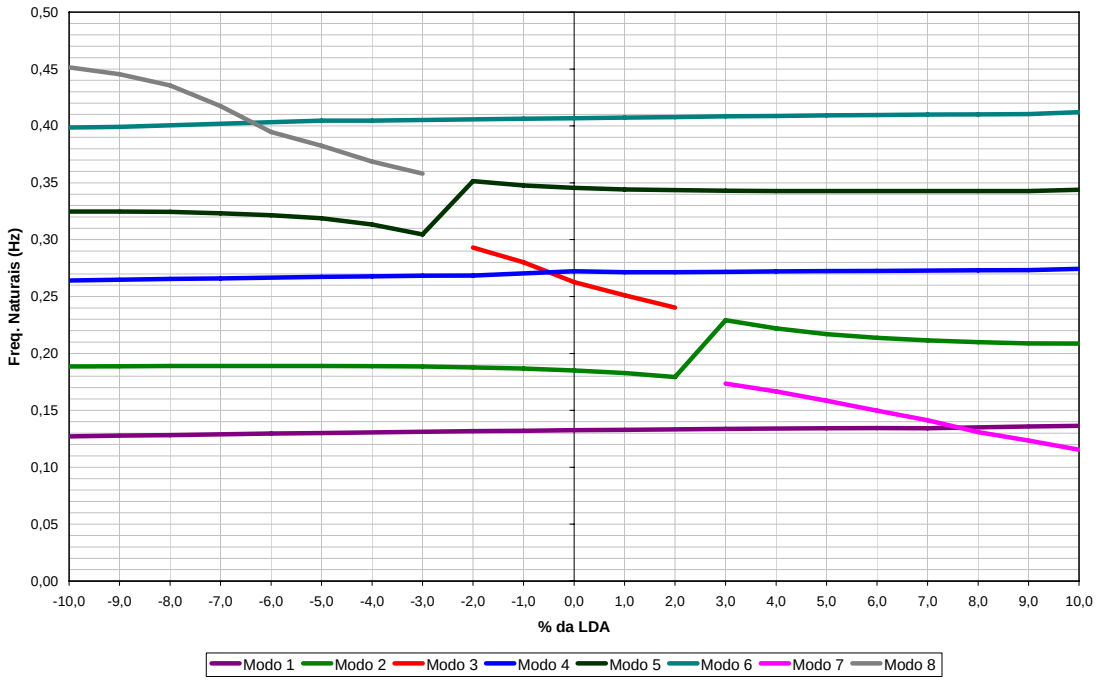


Figura 7.14 – Freqüências naturais para as formas modais analisadas (ancoragem convencional).

Como já dito, o MAC serviu como indicativo de como se comportam as formas modais e nenhum valor específico de correlação foi utilizado como referência para se concluir que um modo de vibração trocou de posição na listagem. A análise do MAC, neste caso, foi mais qualitativa, indicando tendências de mudanças.

Um exemplo dessa verificação é na forma modal 5, mostrada na Figura 7.12. Esta mesma forma modal se encontra na quarta posição na listagem da configuração de *offset* igual a -10,00%. Como pode ser visto na Figura 7.15, o modo 4 nesta configuração se iguala à forma modal 5 da referência no *offset* nulo.

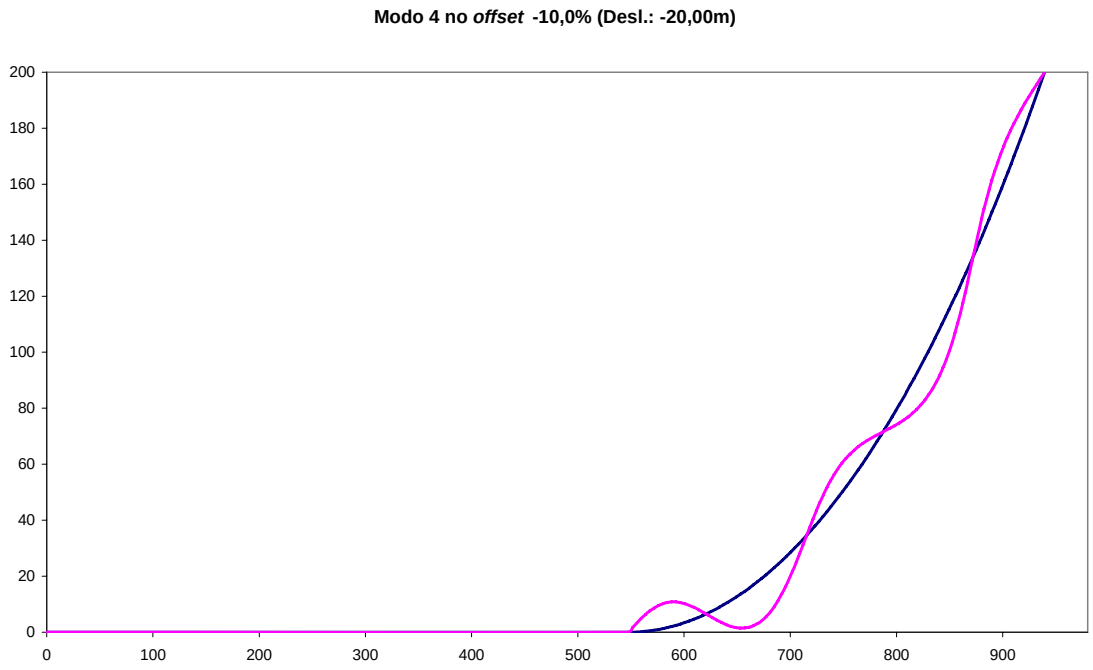


Figura 7.15 – Quarto modo de vibração no *offset* -10,0% (ancoragem convencional)

Neste caso, o MAC calculado apresentou uma correlação entre estas configurações de 0,687. Este valor é relativamente baixo, mas mostrou onde deveria ser realizada uma verificação através da própria deformada dos modos. Este procedimento poupa tempo já que evita que sejam verificados todos os modos em todas as configurações através das deformadas. A Tabela 7.10 mostra o MAC para as configurações -10,0% e *offset* nulo.

Tabela 7.10 – MAC entre -10,0% e offset nulo

	1	2	3	4	5	6
1	0,960	0,007	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,005	0,901	0,034	0,030	0,002	0,000
3	0,000	0,001	0,312	0,648	0,012	0,000
4	0,000	0,008	0,133	0,125	0,687	0,019
5	0,000	0,000	0,005	0,001	0,041	0,898
6	0,001	0,015	0,153	0,056	0,081	0,054

Nesta mesma tabela verifica-se também a mudança da forma modal 4 (Figura 7.11) para a terceira posição com a correlação igual a 0,648.

As duas formas modais que surgem foram chamadas de novos modos por não possuírem correlação significativa com nenhuma outra forma. Estas formas são apresentadas a seguir nas figuras 7.16 e 7.17.

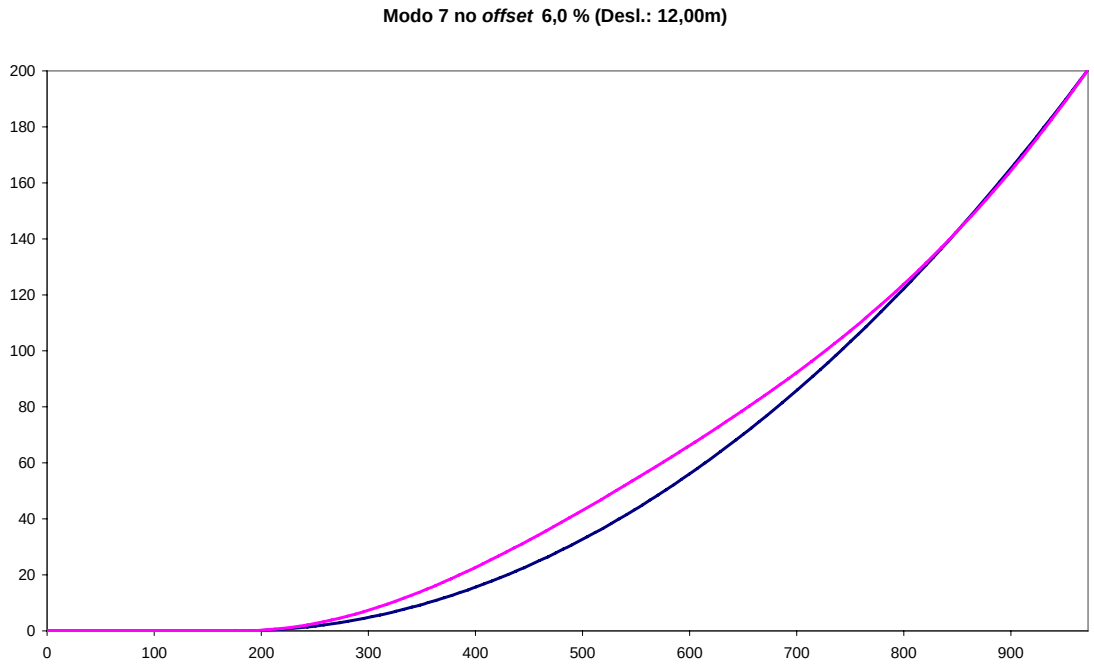


Figura 7.16 – Forma modal 7 na ancoragem convencional

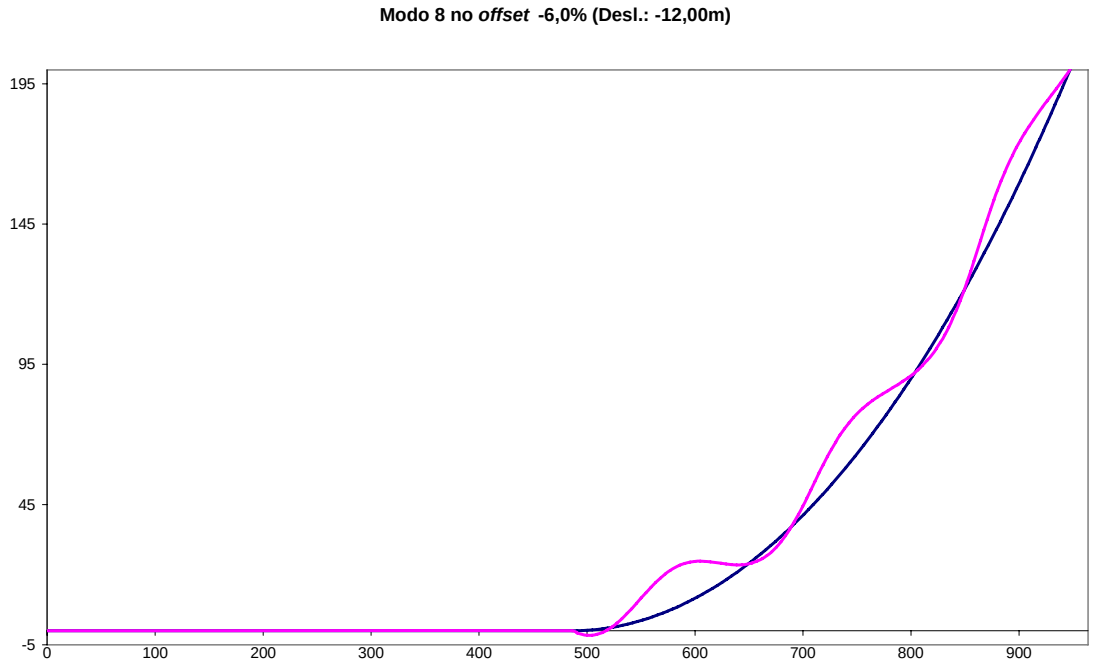


Figura 7.17 – Forma modal 8 na ancoragem convencional

Nota-se que os modos 3, 7 e 8 são modos com comportamentos singulares, com ondas de amplitudes variadas. No modo 8, particularmente, pode-se observar que no trecho de contato com o solo ocorre uma incompatibilidade com a realidade, já que a pequena ondulação próximo ao leito marinho faz com que a linha "atravesse" o solo. Isto não pode existir, então é necessário identificar a relevância deste modo e caso este seja indispensável, deve ser realizada uma análise não linear do problema.

O gráfico da Figura 7.14 mostra que as formas modais 1, 4 e 6 possuem pouca variação ao longo do percurso, enquanto que as formas 2 e 5 apresentam apenas um ponto onde há uma maior variação da freqüência natural.

7.3. Ancoragem *taut-leg*

Este exemplo possui 3000 metros de lâmina d'água e o sistema flutuante encontra-se em equilíbrio a 2520 metros de distância da âncora. Como no exemplo anterior, aqui também será aplicado um *offset* de 10% da lâmina d'água na plataforma com o intuito de estudar a variação das freqüências naturais e as formas modais da linha de ancoragem. Na Figura 7.18, é mostrada uma visão geral do sistema de ancoragem *tau-leg* estudado neste trabalho.

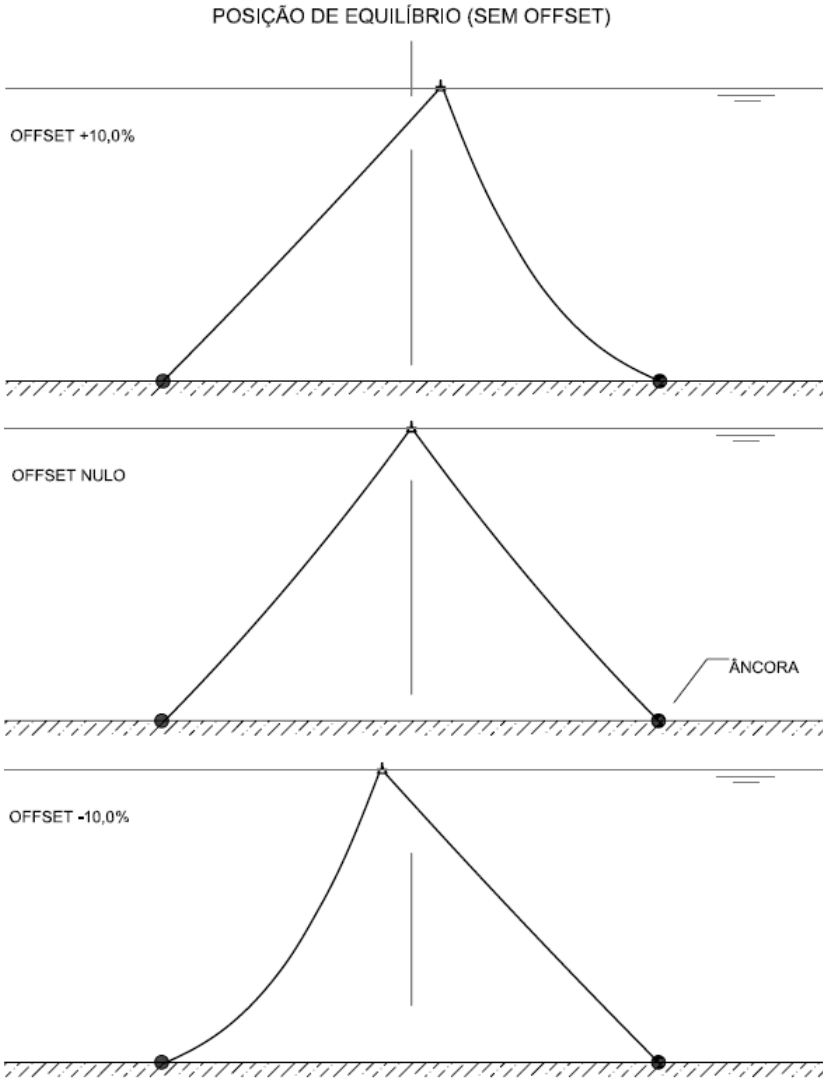


Figura 7.18 – Visão geral do sistema de ancoragem *taut-leg* estudado

O cabo possui 3840 metros de comprimento, possuindo um trecho inicial e um final de 170 metros em amarras e 3500 metros de poliéster. Na análise, ele será simulado com um único trecho com suas propriedades equivalentes às do cabo real. As propriedades da amarra e do poliéster encontram-se respectivamente na Tabela 7.11. Os valores equivalentes calculados encontram-se na Tabela 7.12.

Tabela 7.11 – Propriedades do poliéster e da amarra utilizados na ancoragem *taut-leg*

Material	Diâmetro (m)	MBL (kN)	EA (kN) Quase-estático	W (kN/m)	
				seco	molhado
Amarra	0,10	9.864	766.000	2,0413	1,7759
Poliéster	0,191	9810	151.574	0,2364	0,0622

Tabela 7.12 – Propriedades equivalentes

EA (N)	EI (N.m^2)	Massa (kg/m)	Massa adicionada (kg/m)	Peso molhado (N/m)
1,632 x 10^8	3,571 x 10^5	40,4	28,2	214

7.3.1. Número de elementos

Assim como o exemplo anterior, foi realizada aqui uma análise da sensibilidade do modelo quanto ao número de elementos; este estudo encontra-se na Tabela 7.13.

Tabela 7.13 – Variação do numero de elementos – Ancoragem *taut-leg*

Num. Elm.	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
10	0,038953	0,074583	0,112046	0,149332	0,186734	0,224101
15	0,038966	0,074579	0,112046	0,149317	0,186707	0,224013
20	0,038971	0,074578	0,112046	0,149314	0,186703	0,223997
30	0,038974	0,074577	0,112046	0,149311	0,186702	0,223989
40	0,038975	0,074577	0,112046	0,149310	0,186701	0,223987
50	0,038976	0,074577	0,112046	0,149310	0,186701	0,223986
60	0,038976	0,074577	0,112046	0,149310	0,186701	0,223985
70	0,038977	0,074576	0,112046	0,149310	0,186701	0,223985
80	0,038977	0,074576	0,112046	0,149309	0,186701	0,223984
100	0,038977	0,074576	0,112046	0,149309	0,186701	0,223984

Nota-se que a partir de 30 elementos, os resultados convergem rapidamente para a estabilidade. Apesar da modelagem com 30 elementos apresentar resultados satisfatórios, escolheu-se realizar a análise da linha com 100 elementos para que a geometria da catenária esteja bem representada.

7.3.2. Resistência à flexão

Na calibração da rigidez à flexão a ser utilizada, o valor inicial foi, assim como na ancoragem convencional, escolhido de acordo com dados equivalentes. O estudo da influência da rigidez a flexão na ancoragem *taut-leg* está representado na Tabela 7.14.

Tabela 7.14 – Avaliação da resistência a flexão – Ancoragem *taut-leg*

EI	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5	Modo 6
1,783E+06	0,038977	0,074577	0,112047	0,149310	0,186701	0,223985
1,783E+05	0,038977	0,074577	0,112047	0,149310	0,186701	0,223984
1,783E+04	0,038977	0,074577	0,112047	0,149310	0,186701	0,223984
1,783E-04	0,038977	0,074577	0,112047	0,149310	0,186701	0,223984
0,00	0,038977	0,074577	0,112047	0,149310	0,186701	0,223984

Neste exemplo, a rigidez a flexão tem pequena influência, comprovado pela Tabela 7.14, que mostra uma rápida convergência dos resultados conforme se varia o valor de EI. O estudo foi extrapolado para um valor da rigidez pequeno (1.783 x 10^{-4} N.m^2), verificando que o valor pequeno não altera o resultado.

7.3.3. Estudo dos modos naturais de vibração

O procedimento de analisar a linha de ancoragem quando são efetuados deslocamentos na plataforma, tanto se aproximando em 10% da lâmina d'água quanto se afastando foi aqui repetido para a ancoragem *taut-leg.* Assim como no exemplo anterior foi definido o *offset* nulo como a referência para comparação dos modos. Nas figuras 7.19 a 7.24 são apresentadas as formas modais 1 a 6 que inicialmente serão alvo do estudo neste exemplo.

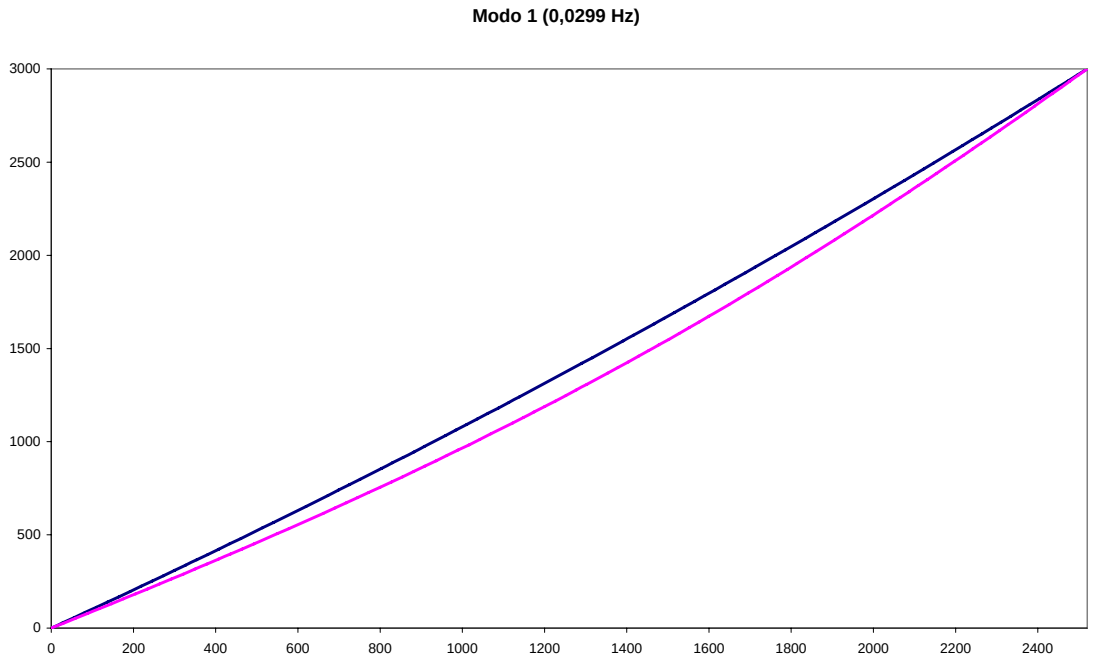


Figura 7.19 – Forma modal 1 para ancoragem *taut-leg*

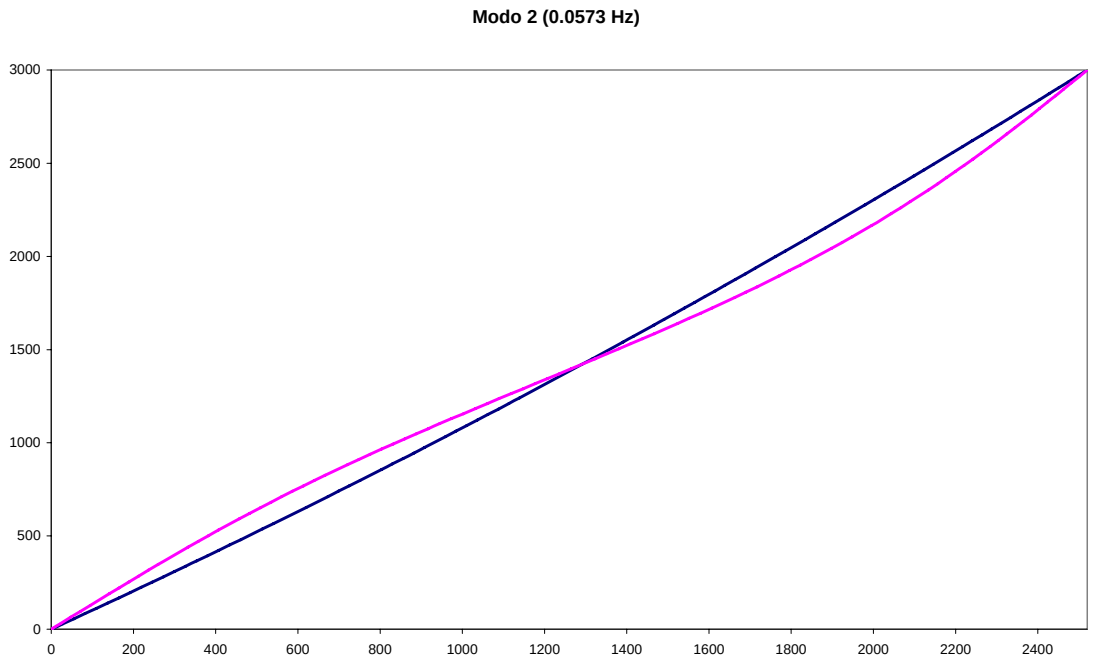


Figura 7.20 – Forma modal 2 para ancoragem *taut-leg*

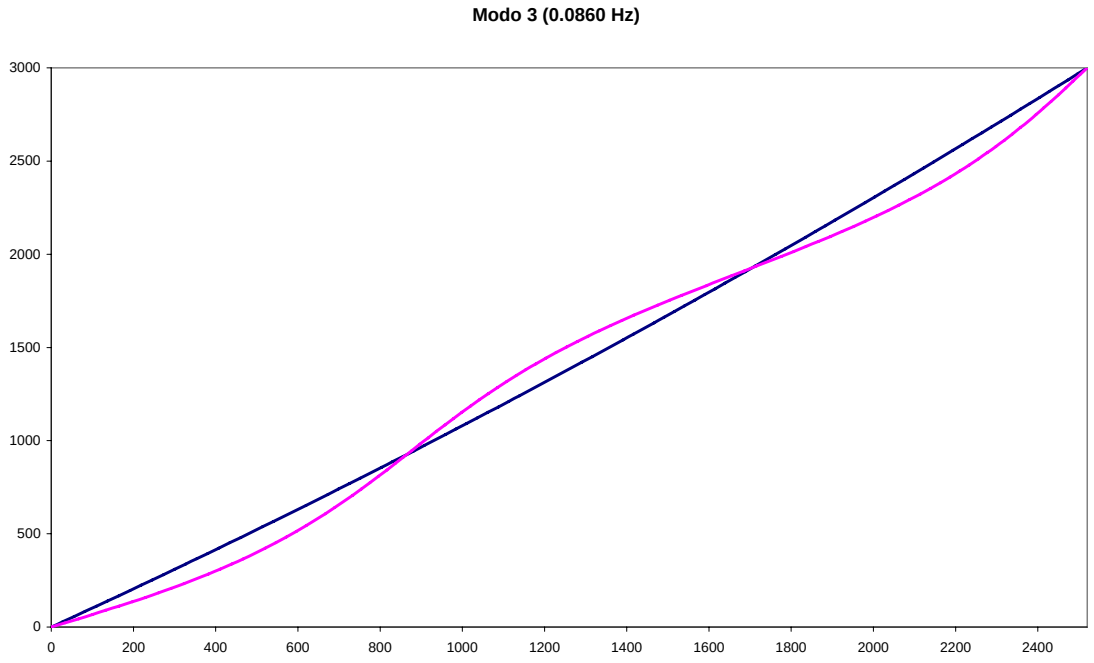


Figura 7.21 – Forma modal 3 para ancoragem *taut-leg*

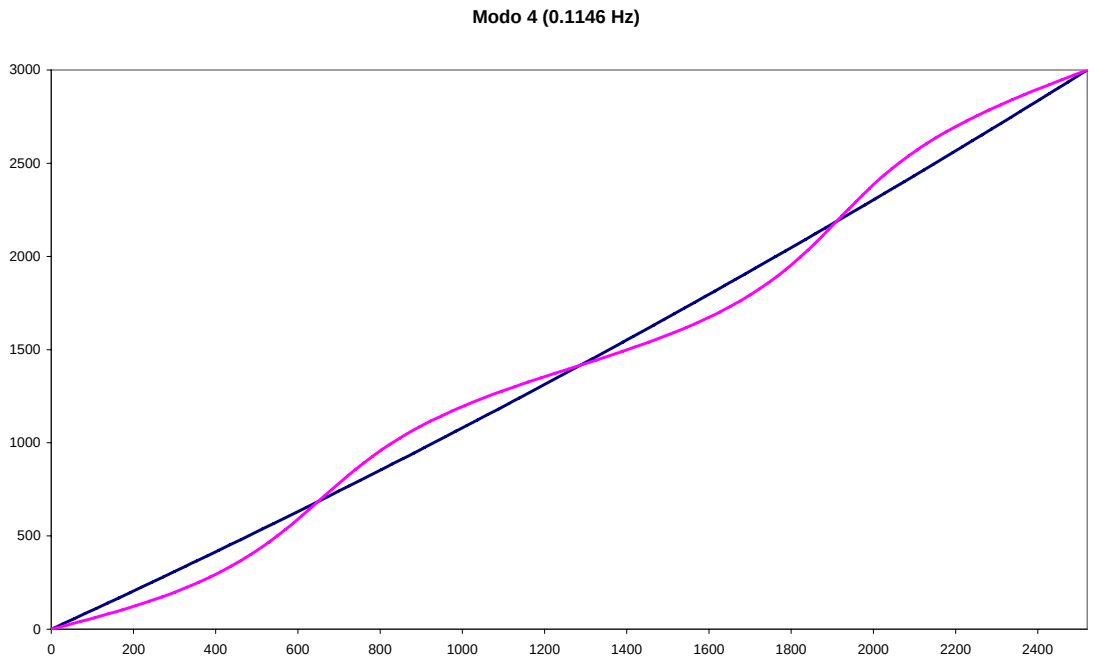


Figura 7.22 – Forma modal 4 para ancoragem *taut-leg*

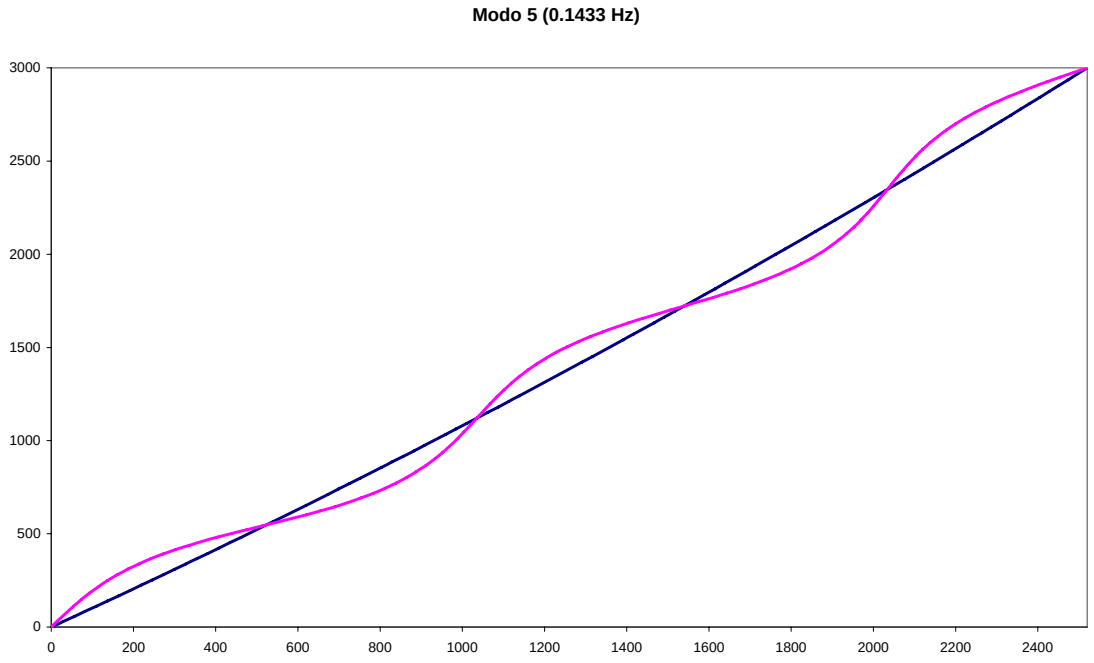


Figura 7.23 – Forma modal 5 para ancoragem *taut-leg*

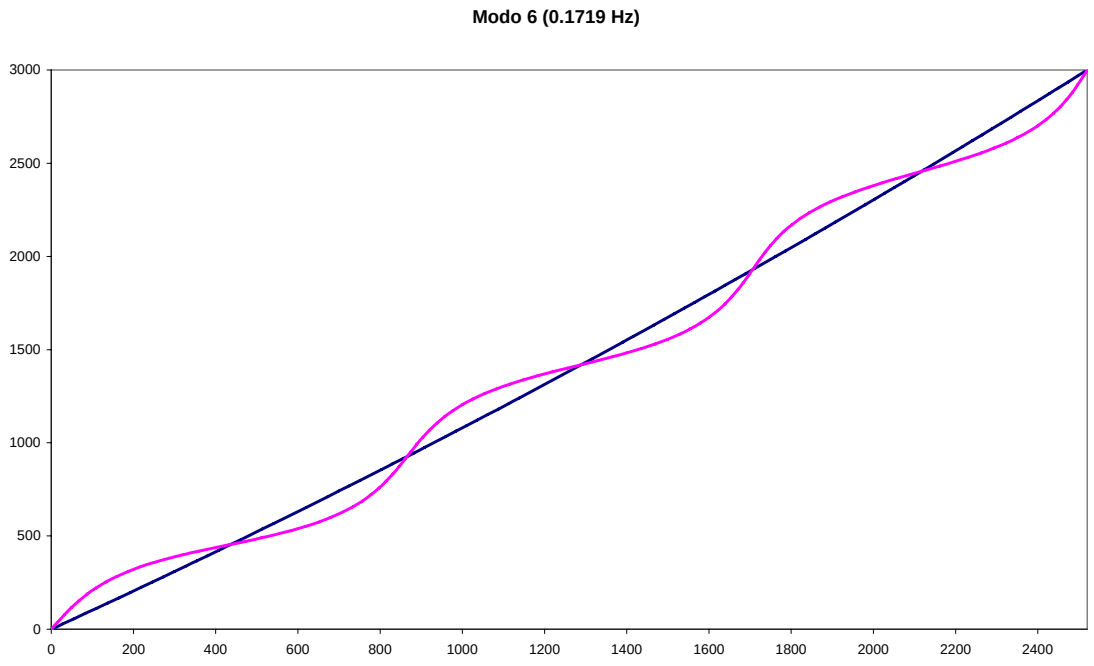


Figura 7.24 – Forma modal 6 para ancoragem *taut-leg*

Neste exemplo houve maior dificuldade para identificação das formas modais nas configurações com *offset* de -3,0% a -10,0%; nesta faixa de deslocamento foi necessária comparação através da impressão dos modos. O gráfico mostrando a variação das freqüências naturais das formas modais estudadas neste exemplo encontra-se na Figura 7.25.

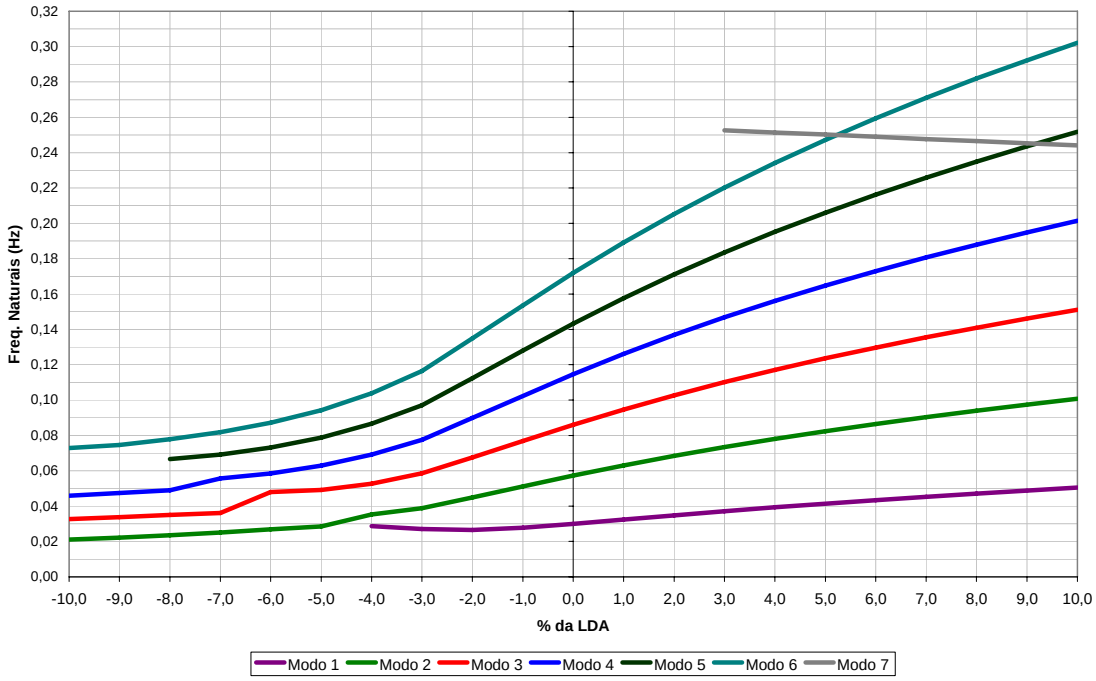


Figura 7.25 – Freqüências naturais para as formas modais analisadas (ancoragem *taut-leg*)

Neste caso nota-se também que ocorrem poucas configurações com singularidades, como ocorre no exemplo de ancoragem convencional. Aqui, configurações com amplitude de onda pequena ocorrem apenas em algumas configurações isoladas e não foram mostradas no gráfico.

Dentre as diferenças apontadas pelo MAC, a mais significativa foi o surgimento da forma modal 7 vista na Figura 7.26. O interessante é observar que esta forma reduz sua freqüência natural conforme se aumenta a tração, contrariamente ao esperado.

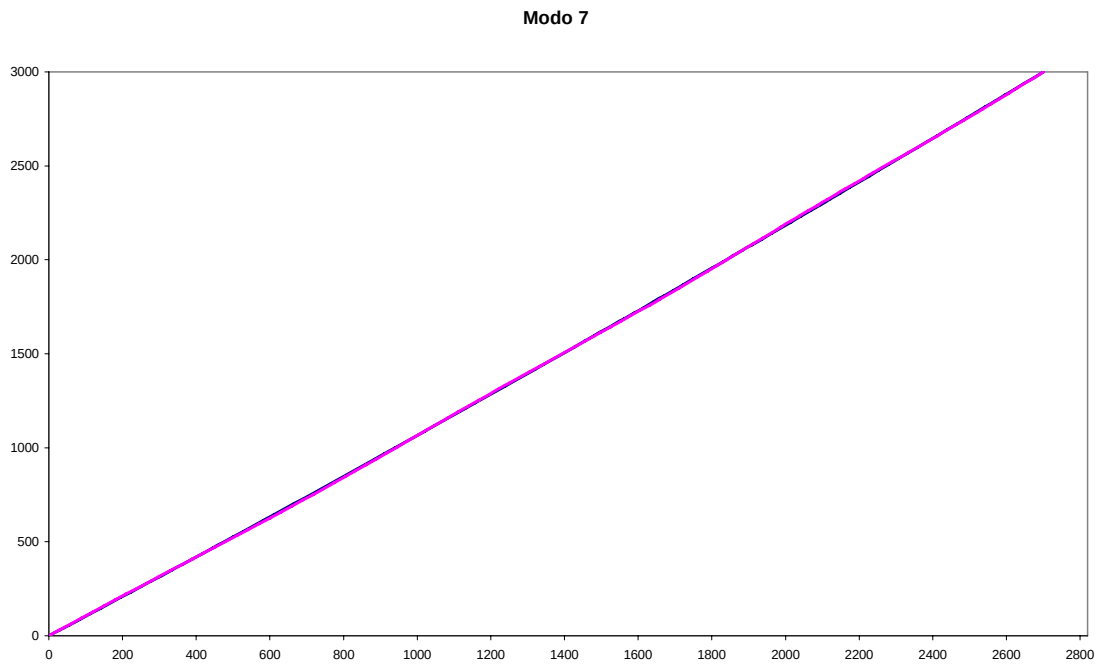


Figura 7.26 – Forma modal 7 na ancoragem *taut-leg*

7.4. Análise dos resultados

Observando os resultados obtidos para os dois tipos de ancoragens estudados neste trabalho, percebe-se que a alteração provocada pela movimentação da plataforma não é apenas nos valores das freqüências naturais, mas também na ordem que as formas modais aparecem na listagem solicitada. Nota-se também que os comportamentos das duas ancoragens são diferentes.

Na ancoragem convencional, a influência da rigidez à flexão (EI) é maior do que na ancoragem *taut-leg*; esta conclusão pode ser observada quando é feito o estudo em ambos os casos e mostrado nas tabelas 7.9 e 7.14. Nota-se que na ancoragem convencional a rigidez EI igual a 1,991 x 10^3 Nm^2 não influencia nos resultados, para a ancoragem *taut-leg* isto ocorre para EI igual a 1.783 x 10^5 Nm^2, ou seja, por volta de 100 vezes maior. Pode-se explicar este comportamento quando se verifica que a ancoragem convencional possui a curvatura maior do que a *taut-leg*, resultando na maior influencia da rigidez à flexão nos resultados.

Um estudo da influência da rigidez axial (EA) mostra que a ancoragem *taut-leg* tem menor variação das freqüências naturais quando a rigidez axial é alterada. A Figura 7.27 mostra a variação da razão da freqüência natural do primeiro modo normalizada

pelo valor de referência (freqüências calculadas para rigidez EA real da linha). Nota-se que a ancoragem convencional apresenta estabilidade das freqüências para sucessivos aumentos do valor de EA.

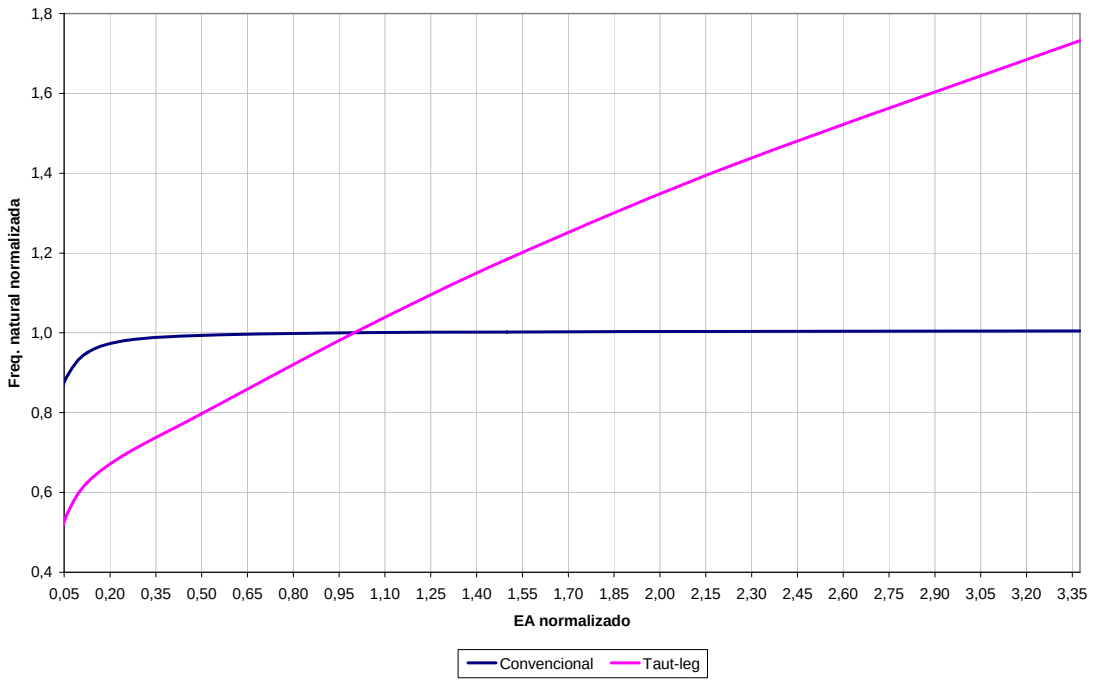


Figura 7.27 – Relação da variação da rigidez EA com as freqüências naturais.

O resultado apresentado no gráfico da Figura 7.27 confirma a importância da rigidez axial EA para os resultados na ancoragem *taut-leg*. Este comportamento é esperado, já que o princípio da ancoragem *taut-leg* é trabalhar tracionada. Devido a isso, a rigidez axial possui maior importância por gerar maiores trações, conseqüentemente aumento da rigidez e da freqüência natural.

Esse comportamento também é comprovado quando se analisa a variação das freqüências naturais conforme se desloca o ponto de conexão. Na ancoragem *taut-leg,* quando a plataforma se afasta da âncora a partir do ponto de equilíbrio da plataforma, as freqüências naturais tendem a aumentar de forma acentuada. Este crescimento é ainda maior nos modos com freqüências mais elevadas como pode ser visto na Figura 7.25.

O comportamento da ancoragem convencional possui menores variações, como pode ser visto no gráfico da Figura 7.28. Para correta comparação, foram escolhidos modos similares nos dois exemplos, como é o caso do modo 1 na ancoragem

convencional (Figura 7.8) e o modo 2 no exemplo *taut-leg* (Figura 7.20). Neste gráfico as freqüências naturais são normalizadas com relação à configuração de referência com *offset* nulo.

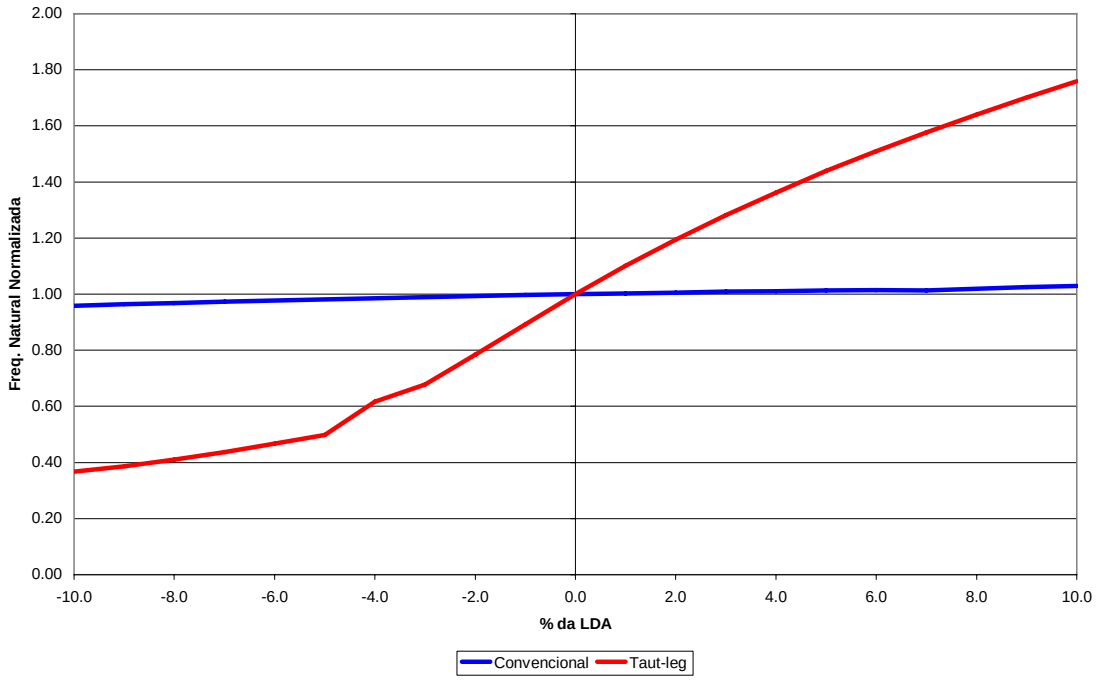


Figura 7.28 – Comparação das freqüências naturais nos dois exemplos

Este comportamento pode ser explicado assumindo que dada a seguinte relação:

$$\omega \propto \sqrt{\frac{K}{M}}$$

ou seja, a freqüência natural é diretamente proporcional à rigidez e inversamente proporcional à massa. No gráfico da Figura 7.29 é mostrada a variação da tração na âncora conforme se desloca a plataforma e nele pode-se visualizar o comportamento diferenciado da ancoragem *taut-leg*. Neste gráfico, a tração (T) é normalizada pelo peso suspenso do cabo (P).

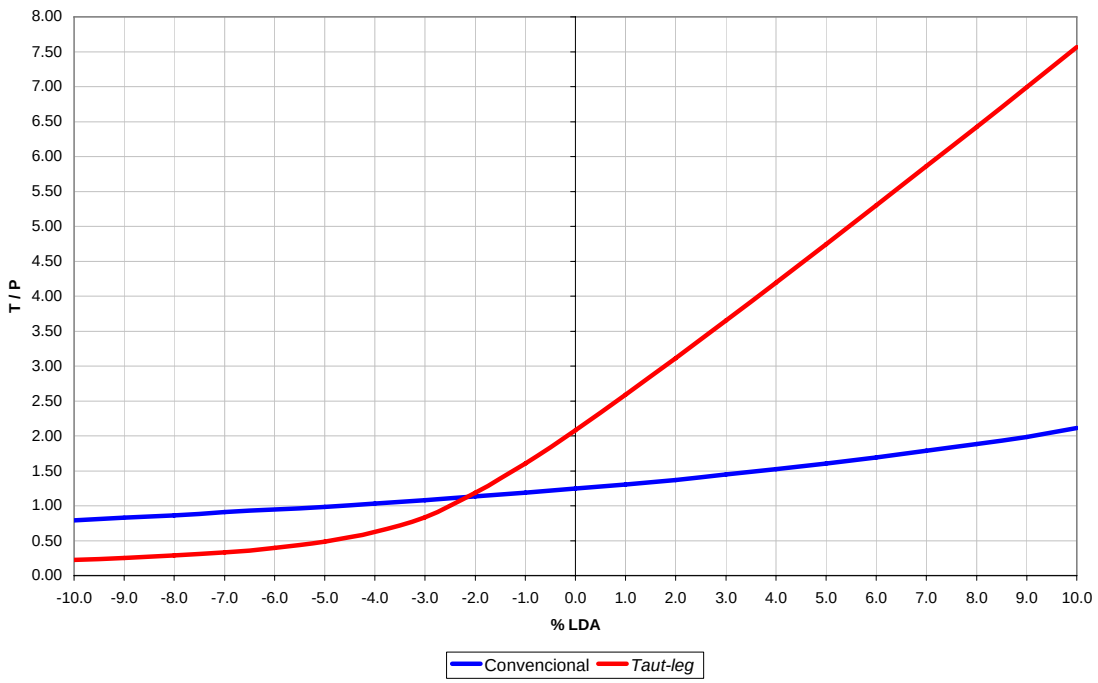


Figura 7.29 – Variação da razão da tração na âncora por peso total suspenso

Nota-se claramente que o comportamento é coerente com o resultado das freqüências encontradas, ou seja a partir do *offset* -5,0% há um crescimento mais acentuado da razão T / P para a ancoragem *taut-leg*, enquanto a ancoragem convencional apresenta uma menor variação ao longo de todo percurso.

Mas é importante verificar que mesmo com o aumento da tração mais acentuado do exemplo *taut-leg*, as freqüências naturais da ancoragem convencional são maiores. Para exemplificar tem-se que a freqüência natural modo 2 no exemplo convencional para *offset* nulo é 0,13256 Hz, enquanto a freqüência natural para a forma modal similar na mesma condição da ancoragem *taut-leg* é 0.05726 Hz. Isto é explicado pelo fato da ancoragem com amarra possuir a rigidez maior, já que o EA da amarra é maior do que o do poliéster como pode ser visto nos dados equivalentes dos dois casos, mostrado nas tabelas 7.7 e 7.12.

8. Fadiga de linhas de ancoragem

Nos capítulos anteriores foi realizado um estudo de vibrações livres aplicado a linhas de ancoragem; neste capítulo serão apresentados os conceitos da análise de fadiga neste tipo de estrutura. Uma análise detalhada deste fenômeno pode ser encontrada no projeto final de curso de Ikaro [18]

Quando uma estrutura é submetida a carregamentos repetidos, pode ocorrer o fenômeno de fadiga, onde pequenas trincas inicialmente aparecem e, se não houver nenhuma intervenção, estes defeitos podem crescer levando a estrutura à ruptura. Na maioria dos casos, estes defeitos podem ser previstos no projeto, onde deve-se verificar se as cargas cíclicas estão abaixo do estado limite de resistência do material à fadiga. Entretanto, para estruturas *offshore*, que são submetidas a carregamentos ambientais, as tensões produzidas são variáveis, tornando esse método impraticável. Desta forma, é necessário o emprego de um método aproximado, com a utilização das curvas T-N (linhas de ancoragem) e S-N(juntas soldadas, risers, etc.) no cálculo do dano por fadiga.

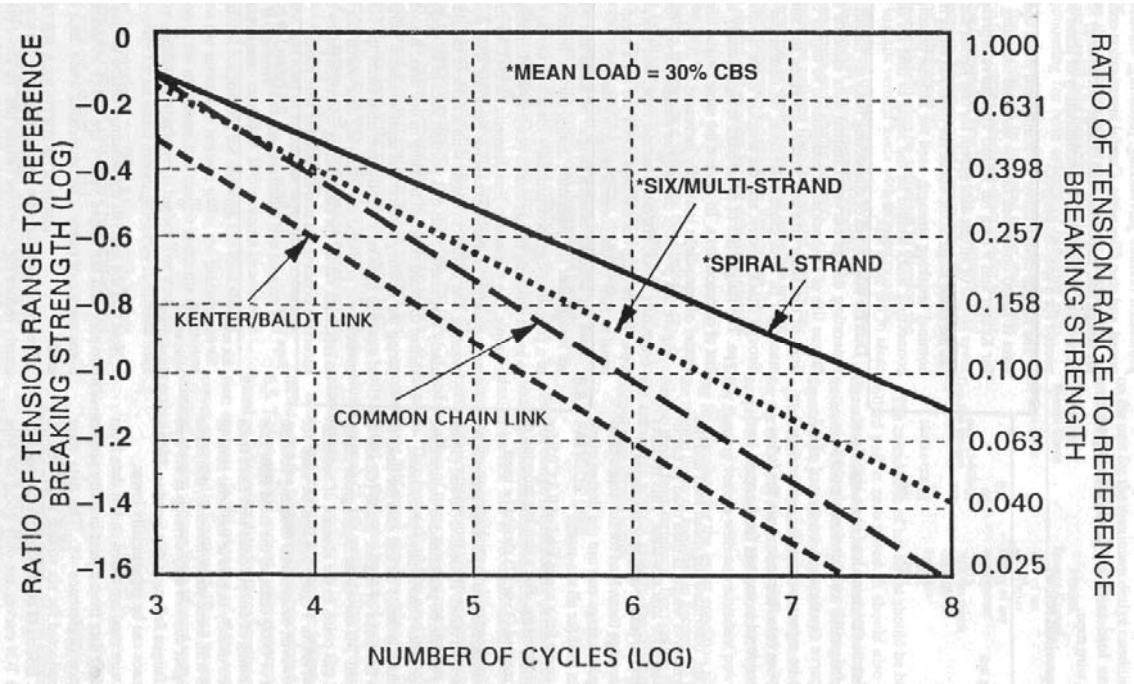


Figura 8.1 - Curva T-N – amarra e cabo de aço – extraída da API-2SK

As curvas T-N são empregadas nos diversos trechos das linhas de ancoragem e utilizam diretamente a variação dos esforços normais obtidos nas respectivas análises dinâmicas.

8.1. Cálculo do dano em linhas de ancoragem

No caso de unidades flutuantes ancoradas permanentes, a avaliação da vida de fadiga do sistema de ancoragem e do sistema de *risers* torna-se essencial, pois há uma grande dificuldade de inspeção, manuseio e troca destas estruturas esbeltas em mar aberto, principalmente em lâminas de água profundas.

A utilização destas unidades em sistemas permanentes é recente, contribuindo para que as ferramentas necessárias para a avaliação do dano por fadiga sejam estudadas, como é o caso da realização de testes para a determinação das curvas T-N referentes a cabos e amarras de grandes diâmetros, usuais em sistemas de ancoragem.

Os testes de fadiga são usualmente realizados com uma carga flutuante, que é caracterizada pela variação total do ciclo da carga (valor máximo menos o mínimo de T), pelo valor médio da mesma (P) e pelo número de ciclos de carga (N) até a falha. Os resultados destes testes são plotados, gerando-se as denominadas curvas T-N e S-N, as quais relacionam a variação do esforço axial (T) ou a variação da tensão (S) ao número de ciclos de carga (N).

Uma curva T-N pode ser expressa na forma [19]:

$$N(T) = K\,R^{-m}$$

onde

$N(T)$ = número de ciclos admissíveis para a variação da tração T;

R = razão entre variação de tração(dupla amplitude) e MBL;

K = parâmetro da curva T-N (é adimensional no caso da curva T-N); no caso de cabos de aço K é função de Lm (razão entre o valor médio da tração e o MBL);

m = inclinação da curva T-N.

Na Tabela 8.1 são apresentados os parâmetros de curvas T-N de amarras e cabo de aço.

Tabela 8.1 - 1 curvas T-N Amarra e Cabo de Aço (tabela extraída da API 2SK)

Componente	m	K	Observações
Amarra	3,36	370	
Elo Kenter	3,36	90	
Cabo de aço Six/multi strand rope	4,09	10**(3,20-2,79Lm)	
Cabo de aço Six/multi strand rope	4,09	231	Lm = 0,3
Cabo de aço Spiral strand rope	5,05	10**(3,25-3,43Lm)	
Cabo de aço Spiral strand rope	5,05	166	Lm = 0,3

O dano por fadiga em um ponto da linha de ancoragem é função do histórico de trações neste ponto e das curvas T-N do material, podendo ser expresso como:

$$d_i = d_i\,(T_i\,,\,P_i\,,\,n_i\,)$$

O dano total por fadiga é calculado pela regra de acúmulo linear de PALMGREN-MINER. De acordo com este critério o dano por fadiga d_i, causado por n_i ciclos da variação de tração T_i é fornecido pela seguinte expressão:

$$d_i = \frac{n_i}{N_i} L_i$$

sendo L_i o período de tempo em um ano usado para contagem dos ciclos n_i.

O dano total causado por vários carregamentos é determinado pelo somatório de todos os danos parciais, isto é;

$$D = \sum_{i=1}^{N} d_i$$

A vida útil em anos é determinada por:

$$Vida = \frac{1}{D}$$

Conhecidas as curvas T-N e S-N dos materiais e aplicando a regra de dano linear, o problema se limita na obtenção do número de ciclos atuantes dos diferentes níveis de cargas na estrutura.

O cálculo de dano por fadiga não só em linhas de ancoragem mas também em outros componentes estruturais de um sistema flutuante é um importante ramo de estudo atualmente. Neste trabalho foram apenas apresentados alguns conceitos fundamentais para esta análise, ficando como sugestão para trabalhos futuros o estudo da fadiga estrutural em sistemas de ancoragem *offshore*.

9. Conclusão e sugestões para trabalhos futuros

Neste trabalho, buscou-se de uma forma geral apresentar os conceitos que norteiam algumas áreas na análise de estruturas *offshore*. No caso do cálculo de modos de vibração de linhas de ancoragem através de elementos de pórtico plano, conclui-se que a movimentação da plataforma conduz a alterações nas freqüências naturais e nos modos de vibração para os dois tipos de ancoragens estudadas.

Na ancoragem *taut-leg*, as diferenças são maiores quando as trações aumentam mais rapidamente, ao contrário da ancoragem convencional que possui um comportamento com menores variações nas trações e freqüências naturais. Com relação aos modos de vibração, o movimento da plataforma causa alterações nas formas modais da linha de ancoragem. Esta mudança nos modos de vibração indica que uma análise dinâmica de linhas de ancoragem por superposição modal não pode ser aplicada, já que a estrutura complacente da plataforma flutuante induz grandes movimentos e, consequentemente, mudanças nos modos de vibração.

Sugere-se como continuidade deste trabalho o cálculo das freqüências naturais e os modos de vibração associados a todas as direções, através de elementos de pórtico espacial. O cálculo dos modos de vibração nas direções fora do plano da catenária é muito importante para a análise de fadiga de *risers*, já que a incidência de corrente causa vibrações nestas direções pelo desprendimento de vórtices. Como este trabalho mostrou a mudança dos modos de vibração no plano da catenária, o mesmo deve ocorrer nas outras direções.

E, finalmente, um estudo mais aprofundado do cálculo de fadiga em linhas de ancoragem também pode ser feito em trabalhos futuros, já que este fenômeno hoje apresenta um dos grandes problemas enfrentados pela indústria *offshore*.

10. Bibliografia

[1] ***Petróleo,*** *Scientific American Brasil – Edição Especial Nº 3, 2004.*

[2] *Ellwanger, Gilberto Bruno*, ***Apostila do Curso de Offshore Mestrado, MBP, MSO****, 2005.*

[3] ***FORTRAN 90 –*** *Compaq Visual Fortran6, Compaq Computer Corporation, 2000.*

[4] *Bathe, Klaus-Jürgen,* ***Finite Element Procedures****. New Jersey, Prentice-Hall, 1996.*

[5] *Lacerda, Thiago Ângelo Gonçalves de,* ***Análise de Sistemas de Ancoragem de Plataformas Flutuantes****, Projeto Final de Curso (DME/UFRJ), 2005.*

[6] *Friswell, M. I., Mottershead, J. E.,* ***Finite Element Model Updating in Structural Dynamics****, 1ed., Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, Netherlands, 1995.*

[7] ***Mathcad – versão 11*** *- Mathsoft Engineering & Education, Inc., 2002.*

[8] *Masetti, Isaias Quaresma,* ***Análise dinâmica de navios ancorados com Complacência diferenciada,*** *tese de doutorado (COPPE/UFRJ), 1997.*

[9] *Offshore Technology,* ***Mad Dog – Gulf of México****, Disponível em: http://www.offshore-technology.com/projects/mad_dog/, Julho 2005.*

[10] ***API, API SPEC 5L****, Specification for Line Pipe, 2004.*

[11] *Chou, F.S.F.; Ghosh, S. and Huang, E.W.,* ***Conceptual Design Process of a Tension Leg Platform****. In: SNAME Transactions, Vol. 91. pp, 1983.*

[12] *Paz, Mario,* ***Structural Dynamics: Theory and Computation****, New York: Chapman & Hall, 1997.*

[13] *Venancio Filho, Fernando,* ***Análise Matricial de Estruturas (Estática, Estabilidade, Dinâmica)****, Rio de Janeiro, Almeida Neves – Editores, 1975.*

[14] *Berteaux, H. O.,* ***Buoy Engineering,*** *New York – London – Sydney – Toronto: John Wiley & Sons, 1976.*

[15] ***SAP2000 – Versão 8.2.3*** *- Computers and Structures, Inc., 2002.*

[16] *Blevins, Robert D.,* ***Formulas for Natural Frequency and Mode Shape****, Florida: Krieger Publishing Company, 1993*

[17] *Hernandez, Alberto Omar Vazquez,* ***Fatores parciais de segurança de linhas de ancoragem de estruturas flutuantes****, tese de doutorado (COPPE/UFRJ), 2002.*

[18] *Riva, Ikaro dos Reis,* ***Análise de Fadiga de Estruturas Metálicas com Ênfase em Offshore****, Projeto Final de Curso (DME/UFRJ), 2004.*

[19] ***API, API RP 2S K***, *Recommended Practice for Planning, Designing and Analysis of Stationkeepung Systems for Floating Structures*, *1997.*

[20] ***Catálogo de Cabos de Aço***, *CIMAF Cabos S.A., 2002.*

[21] *RAO, Singiresu S.,* ***Mechanical Vibrations****. 3 ed. New York, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.*

[22] *Faltinsen,O. M.,* ***Sea Loads on Ships and Offshore Strutures - Ocean Technology****, Cambridge University Press, 1993.*

[23] *Wilson, James F.,* ***Dynamics of Offshore Structures****, New York, John Wiley & Sons, 1984.*

[24] *Clough, Ray W.,* ***Dynamics of Structures****, New York, McGraw-Hill, 1993.*

[25] *Magluta, Carlos.* ***Análise Dinâmica de Estrutura Flexível em Meio Fluido****. Tese de Mestrado (COPPE/UFRJ), 1985.*

[26] *Corrêa, Fabrício Nogueira,* ***Aplicação de Metodologias Híbridas em Estudos Paramétricos sobre o Comportamento de Sistemas Offshore****. Tese de Mestrado (COPPE/UFRJ), 2003.*

[27] *Gere, James M., Weaver JR., William.,* ***Matrix Analysis of Framed Structures****. New York, Van Nostrand & Reinhold, 1980.*

[28] Kayser Junior, Dary Lottmar, ***Análise Dinâmica de Linhas Flexíveis com Elemento de Pórtico Não Linear Geométrico Híbrido,*** *Tese de mestrado (COPPE/UFRJ), 2003.*

Apêndice: Formulação da matriz de rigidez geométrica para pórtico plano

Considere uma barra em flexão da Figura A.1, de seção transversal constante, com momento de inércia constante e igual a I e o comprimento L, referida nos eixos locais x, y, com os deslocamentos nodais indicados [13].

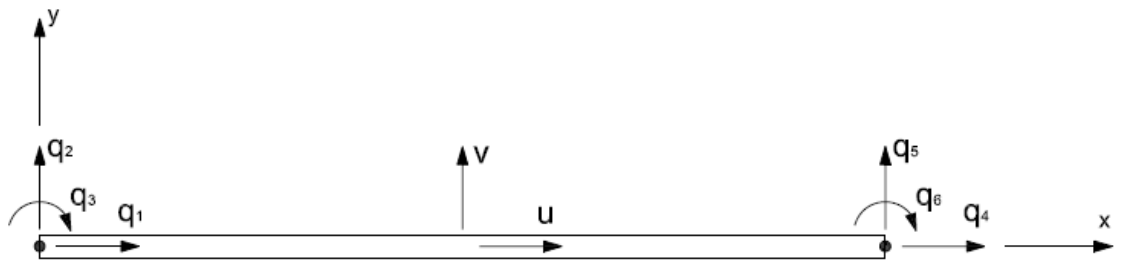


Figura A.1- elemento de pórtico plano e seus deslocamentos

Os respectivos deslocamentos *u* e *v* da barra podem ser escrito com as suas funções de interpolação para cada deslocamento nodal.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{x}{L} & 6\left(\frac{x}{L^2}-\frac{x^2}{L^3}\right)y & \left(-1+4\frac{x}{L}-3\frac{x^2}{L^2}\right)y & \frac{x}{L} & 6\left(-\frac{x}{L^2}+\frac{x^2}{L^3}\right)y & 2\left(\frac{x}{L}-3\frac{x^2}{L^2}\right)y \\ 0 & 1-3\frac{x^2}{L^2}+2\frac{x^3}{L^3} & x-2\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} & 0 & 3\frac{x^2}{L^2}-2\frac{x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L}+\frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{Bmatrix}$$

Sendo a relação não linear entre deslocamentos e deformações unitárias neste caso escrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \qquad \text{(A.1)}$$

onde u_0 o valor de u para $y=0$.

A energia de deformação é representada por:

$$U = \frac{E}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^2 dV \qquad \text{(A.2)}$$

Substituindo a equação (A.1) em (A.2), desprezando os termos de ordem elevada $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^4$ e sendo que $\int_A y dA = 0$ e $\int_A y^2 dA = I$, obtém-se:

$$U = \frac{EA}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EI}{2}\int_0^L \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int_0^L \frac{\partial u_0}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx \qquad \text{(A.3)}$$

Utilizando a equação matricial das funções de interpolação do início do capítulo e introduzindo-as na equação (A.3) podem ser efetuadas as integrais obtendo-se:

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{EA}{2L}\left(q_1{}^2 - 2q_1q_4 + q_4{}^2\right) + 2\frac{EI}{L^3} + (q_2{}^2 + L^2 q_3{}^2 + 3q_5{}^2 + L^2 q_6{}^2 + 3Lq_2q_3 - 6q_2q_5 + \\ & + 3Lq_2q_6 - 3Lq_3q_5 + L^2 Lq_3q_6 - 3Lq_5q_6) + \frac{EA}{L^2}(q_4 - q_1)(\frac{3}{5}q_2{}^2 + \frac{1}{15}L^2 q_3{}^2 + \frac{3}{5}q_5{}^2 + \\ & \frac{1}{15}L^2 q_6{}^2 + \frac{1}{10}Lq_2q_3 - \frac{6}{5}q_2q_5 + \frac{1}{10}Lq_2q_6 - \frac{1}{10}Lq_3q_5 - \frac{1}{30}L^2 Lq_3q_6 - \frac{1}{10}Lq_5q_6) \end{aligned} \qquad \text{(A.4)}$$

Como a força axial pode ser escrita por:

$$P = \frac{EA}{L}(q_1 - q_4)$$

Assim, é possível escrever a equação (A.4) na forma matricial a seguir:

$$U = \frac{1}{2}\{q\}^T([K_E] - [K_G])\{q\}$$

onde KE é a matriz de rigidez clássica de pórtico plano e KG é a matriz de rigidez geométrica dadas por:

$$\mathbf{K}_E = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & \textit{Simétrica} & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{T}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & \textit{Simétrica} & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$