DINAMÉRICO PEREIRA POMBO JÚNIOR

UMA INTRODUÇÃO AOS CORPOS VALORIZADOS

Primeira Edição

Rio de Janeiro

Instituto de Matemática - UFRJ

2012

Pombo Júnior, Dinamérico P., 1951 -

P784 Uma Introdução aos Corpos Valorizados / Dinamérico P. Pombo Júnior. - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2012.

67p.; 23cm.

Inclui Bibliografia.

ISBN: 978-85-87674-24-6

1. Teoria das Valorizações. 2. Números p-ádicos. I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. II. Título.

CDD 20: 512.784

Sumário

Introdução

Os números p-ádicos (p primo) foram introduzidos por K. Hensel, motivado por certos problemas de Teoria dos Números. Uma lúcida análise da contribuição fundamental de Hensel pode ser encontrada nas Notas Históricas de [12], em cujas referências são mencionados os artigos pioneiros de Hensel, que culminaram em [7].

Para dar uma ideia do que vem a ser um número 5-ádico, olhemos para as soluções inteiras das equações

$$X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5^n},$$

quando n varia em $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$. É fácil ver que $x \in \mathbb{Z}$ é solução de $X^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ se, e somente se, $x \equiv 2 \pmod 5$ ou $x \equiv 3 \pmod 5$. Também é fácil ver que $x \in \mathbb{Z}$ é solução de $X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5^2}$ se, e somente se, $x \equiv 7 \pmod{5^2}$ ou $x \equiv 18 \pmod{5^2}$, cabendo notar que $7 = 2 + 1.5$ e $18 = 3 + 3.5$, sendo 1, 2 e 3 inteiros entre 0 e 4. Continuando o processo, verifica-se que existem duas sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de inteiros compreendidos entre 0 e 4 de tal modo que $x \in \mathbb{Z}$ é solução da equação $X^2+1 \equiv 0 \pmod{5^n}$ se, e somente se, $x \equiv a_0+a_1 5+\cdots+a_{n-1}\, 5^{n-1} \pmod{5^n}$ ou $x \equiv b_0 + b_1\, 5 + \cdots + b_{n-1}\, 5^{n-1} \pmod{5^n}$, onde $a_0 = 2$, $b_0 = 3$, $a_1 = 1$ e $b_1 = 3$. Assim, somos naturalmente levados a considerar as séries formais da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, 5^n$ ($c_n \in \{0, 1, \dots, 4\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$), as quais em geral não convergem em $\mathbb{R}$. Como acabamos de observar, as somas parciais das séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, 5^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, 5^n$ fornecem (módulo 5^n) as soluções inteiras das equações $X^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5^n}$. Como veremos, a introdução dos números 5-ádicos forneceu um ambiente no qual qualquer série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, 5^n$ converge e, em particular, no qual as séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, 5^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, 5^n$ convergem e suas somas são soluções da equação $X^2 + 1 = 0$.

O objetivo desta monografia é apresentar alguns resultados básicos e centrais da teoria abstrata dos corpos valorizados, inaugurada no importante artigo [8] de Kürschák, muitos dos quais são aplicáveis aos números p-ádicos.

Os principais tópicos aqui abordados são as seguintes: corpos valorizados; corpos topológicos valorizáveis; corpos não arquimedianos e valorizações em $\mathbb{Q}$; teorema de aproximação; completamento de um corpo valorizado; corpos valorizados discretos e corpos locais; lema de Hensel; corpos arquimedianos completos; extensão de uma valorização a uma extensão finita. Finalmente, cabe mencionar que o conteúdo da presente monografia já foi exposto em cursos de pós-graduação do Instituto de Matemática da UFRJ.

§1. Valorizações

Nesta monografia adotaremos o enfoque de E. Artin [3], no qual [5] também se baseia. $\mathbb{K}$ denotará um corpo arbitrário, salvo menção expressa em contrário, e $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}\backslash\{0\}$ o grupo multiplicativo subjacente.

Definição 1.1. Uma aplicação $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ é dita uma *valorização* em $\mathbb{K}$ (ou um *valor absoluto* em $\mathbb{K}$), e o par $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é dito um *corpo valorizado*, se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

(a) $|0| = 0$ e $|\lambda| > 0$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$;

(b) $|\lambda\mu| = |\lambda|\,|\mu|$;

(c) existe $C \in \mathbb{R}$ tal que a relação $|\lambda| \leq 1$ implica $|1 + \lambda| \leq C$.

É claro que a restrição de $|\cdot|$ a qualquer subcorpo L de $\mathbb{K}$ é uma valorização em L.

Observação 1.2. Seja $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$. Então toda aplicação $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições (a) e (b) acima é um homomorfismo do grupo multiplicativo $\mathbb{K}^*$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}^*_+$. Consequentemente, $|1| = 1$. Em particular, se $|\cdot|$ é uma valorização em $\mathbb{K}$, então $C \geq 1$.

Proposição 1.3. *Seja $|\cdot|$ uma aplicação como na* Observação 1.2. *Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $|-1| = 1$;
(b) $|-\lambda| = |\lambda|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$;
(c) $|\lambda^{-1}| = \dfrac{1}{|\lambda|}$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Demonstração. (a): Como $1 = |1| = |(-1)(-1)| = |-1|^2$, $|-1| = 1$.
(b): Se $\lambda \in \mathbb{K}$, $|-\lambda| = |(-1)\lambda| = |-1|\,|\lambda| = |\lambda|$.
(c): Se $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $1 = |\lambda\lambda^{-1}| = |\lambda|\,|\lambda^{-1}|$; logo, $|\lambda^{-1}| = \dfrac{1}{|\lambda|}\cdot$

Exemplo 1.4. Definamos $|\lambda| = 1$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e $|0| = 0$. É claro que $|\cdot|$ é uma valorização em $\mathbb{K}$ ($C = 1$ é permissível), dita a *valorização trivial* em $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.5. Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito, a única valorização em $\mathbb{K}$ é a trivial. De fato, seja $|\cdot|$ uma valorização em $\mathbb{K}$ e seja $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Então existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $\lambda^n = 1$. Portanto, $1 = |\lambda^n| = |\lambda|^n$, e $|\lambda| = 1$.

Exemplo 1.6. Seja $\mathbb{Q}$ o corpo dos números racionais e fixemos um natural primo p. Para cada $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ existe um único inteiro n e existem dois inteiros não nulos a e b tais que $\mathrm{mdc}(a, p) = \mathrm{mdc}(b, p) = 1$ e $\lambda = p^n \dfrac{a}{b}$; definamos $|\lambda|_p = p^{-n}$. Definindo ainda $|0|_p = 0$, é fácil ver que as condições (a) e (b) da Definição 1.1 são satisfeitas. Seja $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ tal que $|\lambda|_p \leq 1$ e $\lambda \neq -1$. Então $\lambda = p^n \dfrac{a}{b}$, sendo n, a e b como acima e $n \geq 0$. Logo, $1 + \lambda = \dfrac{b + p^n}{b} = p^m \dfrac{c}{b}$, onde $m \geq n$ e $\mathrm{mdc}(c, p) = 1$, e daí resulta que $|1 + \lambda|_p = p^{-m} \leq p^{-n} = |\lambda|_p \leq 1$. Assim, acabamos de ver que $C = 1$ é permissível para $|\cdot|_p$. Portanto, $|\cdot|_p$ é uma valorização em $\mathbb{Q}$, dita a *valorização p-ádica* em $\mathbb{Q}$.

Exemplo 1.7. Sejam L um corpo e $L(X)$ o corpo das frações racionais com coeficientes em L. Fixemos $p(X) \in L[X]$ irredutível sobre L e $\alpha > 1$. Para cada $f(X) \in L(X)\backslash\{0\}$ existe um único inteiro n e existem $g(X), h(X) \in L[X]$ não nulos e tais que $\mathrm{mdc}(g(X), p(X)) = \mathrm{mdc}(h(X), p(X)) = 1$ e $f(X) = (p(X))^n \dfrac{g(X)}{h(X)}$; definamos $|f(X)| = \alpha^{-n}$. Definindo ainda $|0| = 0$ e argumentando como no exemplo anterior verifica-se que a aplicação que acabamos de definir é uma valorização em $L(X)$ (sendo $C = 1$ permissível).

Antes de continuar façamos a seguinte convenção: diremos que uma aplicação $|\cdot|\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1.1 é não trivial quando houver $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\lambda| < 1$. No caso particular em que $|\cdot|$ é uma valorização em $\mathbb{K}$, isto significa dizer que $|\cdot|$ não coincide com a valorização trivial em $\mathbb{K}$.

Exemplo 1.8. O valor absoluto usual $|\cdot|_\infty$ no corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é uma valorização em $\mathbb{C}$, já que $C = 2$ é permissível para $|\cdot|_\infty$.

Proposição 1.9. *Seja* $|\cdot|\colon \mathbb{K}\to\mathbb{R}$ *uma aplicação satisfazendo as condições* (a) *e* (b) *da* Definição 1.1*, com* $|\cdot|$ *não trivial, e seja* $G=\{|\lambda|;\ \lambda\in\mathbb{K}^*\}$*. Então o subgrupo* G *de* $\mathbb{R}_+^*$ (Observação 1.2) *satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *G é cíclico se, e somente se, o conjunto* $\{|\lambda|;\ \lambda\in\mathbb{K}, |\lambda|>1\}$ *possui um elemento mínimo;*

(b) *se G é cíclico, então todo elemento de G é isolado;*

(c) *se G não é cíclico, então G é denso em* $\mathbb{R}_+^*$ *.*

Demonstração. Inicialmente, provemos (a). Com efeito, suponhamos G cíclico e seja $\rho>1$ um gerador de G. Então existe $\lambda_0\in\mathbb{K}$ tal que $|\lambda_0|>1$ e $\rho=|\lambda_0|$. Seja $\lambda\in\mathbb{K}$ com $|\lambda|>1$, arbitrário. Então existe $n\in\mathbb{Z}$ tal que $|\lambda|=\rho^n$. Logo, $n\geq 1$, e $|\lambda|=\rho^n\geq\rho=|\lambda_0|$. Assim, $|\lambda_0|$ é um elemento mínimo do conjunto $\{|\lambda|;\ \lambda\in\mathbb{K}, |\lambda|>1\}$. Reciprocamente, suponhamos que $\rho>1$ seja um elemento mínimo do conjunto $\{|\lambda|;\ \lambda\in\mathbb{K}, |\lambda|>1\}$ e ponhamos $\alpha=\log\rho>0$. Pela definição de ρ, não é possível encontrar $\lambda\in\mathbb{K}^*$ tal que $0<\log|\lambda|<\alpha$ ou $-\alpha<\log|\lambda|<0$. Seja $\beta\in G$ arbitrário. Se $\beta>\rho$, existe um inteiro $\ell\geq 2$ tal que $\ell\alpha\leq\log\beta<(\ell+1)\alpha$. Logo, $0\leq\log\beta-\ell\alpha<\alpha$. Mas, como $\beta\rho^{-\ell}\in G$, vem $\log(\beta\rho^{-\ell})=\log\beta-\ell\alpha=0$; assim, $\beta\rho^{-\ell}=1$, isto é, $\beta=\rho^{\ell}$. Por outro lado, se $\beta<\rho^{-1}$, então $\beta=\rho^k$ para algum inteiro $k\leq -2$. Acabamos de verificar que ρ é um gerador de G, mostrando que G é cíclico.

Provemos (b). Primeiramente, $1=|1|$ é um ponto isolado pois, como vimos na demonstração de (a), $G\cap\left(\dfrac{1}{\rho},\rho\right)=\{1\}$. Agora, seja $|\lambda|$ um elemento arbitrário de G. Se $|\lambda|$ não fosse isolado, existiria uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}^*$ tal que $|\lambda_n|\neq|\lambda|$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=|\lambda|$. Mas então teríamos $|\lambda_n\lambda^{-1}|\neq 1$ para todo $n\in\mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n\lambda^{-1}|=1$, o que não pode ocorrer.

Finalmente, provemos (c). Com efeito, sejam $0<a<b$ arbitrários. Por hipótese, existe $\mu\in\mathbb{K}^*$ tal que $0<\log|\mu|<s=\log b-\log a$. Seja m o menor inteiro tal que $m\log|\mu|\geq\log b$; então $(m-1)\log|\mu|<\log b$. Afirmamos que $\log a<(m-1)\log|\mu|$. Caso contrário, teríamos $\log a\geq(m-1)\log|\mu|$, o que implicaria

$$s = \log b - \log a \leq m \log |\mu| - (m-1) \log |\mu| = \log |\mu| < s.$$

Portanto, $\log a < \log |\mu|^{m-1} < \log b$, e $a < |\mu^{m-1}| < b$, sendo $|\mu^{m-1}| \in G$. Assim, acabamos de mostrar que G é denso em $\mathbb{R}_+^*$.

Como consequência imediata da Proposição 1.9, temos:

Corolário 1.10. *Se* $|\cdot|$ *é uma valorização não trivial em* $\mathbb{K}$, *então* $G = \{|\lambda|;\ \lambda \in \mathbb{K}^*\}$ *é um grupo cíclico ou* G *é denso em* $\mathbb{R}_+^*$. *No primeiro caso, diz-se que* $|\cdot|$ *é discreta e, no segundo, que* $|\cdot|$ *é densa.*

As valorizações consideradas nos Exemplos 1.6 e 1.7 são discretas, ao passo que a valorização considerada no Exemplo 1.8 é densa, o mesmo ocorrendo para a restrição de $|\cdot|_\infty$ a $\mathbb{R}$ ou a $\mathbb{Q}$.

Definição 1.11. Sejam $|\cdot|$ e $|\cdot|_1 \colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ duas aplicações satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1.1, com $|\cdot|$ não trivial. Diz-se que $|\cdot|$ é *equivalente* a $|\cdot|_1$ se as relações $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < 1$ implicam $|\lambda|_1 < 1$ (logo, $|\cdot|_1$ também é não trivial).

Exemplo 1.12. Para quaisquer naturais primos distintos p e q, a valorização p-ádica não é equivalente à valorização q-ádica, pois $|p|_p = \dfrac{1}{p} < 1$ e $|p|_q = 1$. E a valorização p-ádica não é equivalente à valorização usual $|\cdot|_\infty$ em $\mathbb{Q}$, pois $|p|_p < 1$ e $|p|_\infty = p > 1$.

Proposição 1.13. *Se* $|\cdot|$ *é equivalente a* $|\cdot|_1$, *então* $|\lambda|_1 = 1$ *sempre que* $|\lambda| = 1$.

Demonstração. Fixemos $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\mu| < 1$ e seja $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = 1$. Para todo inteiro $n \geq 1$, temos $|\lambda^n \mu| = |\lambda|^n |\mu| < 1$, o que implica $|\lambda^n \mu|_1 < 1$, isto é, $|\lambda|_1 < \dfrac{1}{\sqrt[n]{|\mu|_1}}\cdot$ Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\mu|_1} = 1$, concluímos que $|\lambda|_1 \leq 1$. Por outro lado, como $|\lambda^{-1}| = 1$, segue do que acabamos de ver que $|\lambda^{-1}|_1 \leq 1$, ou seja, $|\lambda|_1 \geq 1$. Logo, $|\lambda|_1 = 1$, como queríamos provar.

Corolário 1.14. *A relação, introduzida na* Definição 1.11, *é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações* $|\cdot| \colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo* (a) *e* (b) *da* Definição 1.1 *e não triviais.*

Demonstração. É claro que a referida relação é reflexiva e transitiva, e a sua simetria decorre da Proposição 1.13.

Proposição 1.15. *Sejam* $|\cdot|, |\cdot|_1 \colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ *duas aplicações equivalentes. Então existe* $\alpha > 0$ *tal que* $|\cdot|_1 = |\cdot|^\alpha$*.*

Demonstração. Fixemos $\mu \in \mathbb{K}$ com $|\mu| > 1$ (logo, $|\mu|_1 > 1$) e seja $\lambda \in \mathbb{K}^*$ arbitrário. Então existe um único $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda| = |\mu|^\gamma$. Para $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tal que $\dfrac{m}{n} > \gamma$, temos $|\mu|^{\frac{m}{n}} > |\mu|^\gamma = |\lambda|$, isto é, $\left|\dfrac{\mu^m}{\lambda^n}\right| > 1$, o que implica $\left|\dfrac{\mu^m}{\lambda^n}\right|_1 > 1$, isto é, $(|\mu|_1)^{\frac{m}{n}} > |\lambda|_1$. Como $\lim\limits_{\frac{m}{n} \to \gamma} (|\mu|_1)^{\frac{m}{n}} = (|\mu|_1)^\gamma$, segue que $(|\mu|_1)^\gamma \geq |\lambda|_1$. Analogamente, fazendo $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ tender a γ por valores menores do que γ, concluímos que $(|\mu|_1)^\gamma \leq |\lambda|_1$. Consequentemente, $|\lambda|_1 = (|\mu|_1)^\gamma$. Além disso, temos

$$\frac{\log|\lambda|}{\log|\mu|} = \gamma = \frac{\log|\lambda|_1}{\log|\mu|_1}\,, \text{ ou seja, } \frac{\log|\lambda|_1}{\log|\lambda|} = \frac{\log|\mu|_1}{\log|\mu|}\,.$$

Finalmente, ponhamos $\alpha = \dfrac{\log|\mu|_1}{\log|\mu|} > 0$. Então $|\lambda|_1 = |\lambda|^\alpha$, concluindo assim a demonstração.

Se $|\cdot| \colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições (a) e (b) da Definição 1.1 e a desigualdade triangular (isto é, $|\lambda+\mu| \leq |\lambda|+|\mu|$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$), então $|\cdot|$ é uma valorização em $\mathbb{K}$, pois $C = 2$ é obviamente permissível para $|\cdot|$. (Neste caso, $d(\lambda,\mu) = |\lambda-\mu|$ é uma métrica em $\mathbb{K}$ e escreveremos "sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$" e "$(\mathbb{K}, |\cdot|)$ completo" em lugar de "sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, d)$" e "$(\mathbb{K}, d)$ completo".) Provaremos, a seguir, que a recíproca dessa afirmação é válida. Mas antes, mostremos a seguinte

Proposição 1.16. *Se* $|\cdot|$ *é uma valorização em* $\mathbb{K}$ *satisfazendo a desigualdade triangular, então*

$$\big||\lambda| - |\mu|\big|_\infty \leq |\lambda - \mu|$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*, onde* $|\cdot|_\infty$ *é a valorização usual em* $\mathbb{R}$*.*

Demonstração. Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ arbitrários. Devemos mostrar que $-|\lambda - \mu| \leq |\lambda| - |\mu| \leq |\lambda - \mu|$. Mas, pela desigualdade triangular,

$|\lambda| = |(\lambda-\mu)+\mu| \leq |\lambda-\mu|+|\mu|$, isto é, $|\lambda|-|\mu| \leq |\lambda-\mu|$. Finalmente, trocando os papéis de λ e μ, vem $|\mu|-|\lambda| \leq |\mu-\lambda| = |\lambda-\mu|$, o que conclui a demonstração.

Teorema 1.17. *Seja $|\cdot|$ uma valorização não trivial em $\mathbb{K}$. Então existe uma valorização $|\cdot|_1$ em $\mathbb{K}$ satisfazendo a desigualdade triangular e equivalente a $|\cdot|$.*

A demonstração do Teorema 1.17 repousa no seguinte

Lema 1.18. *Para que uma valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ satisfaça a desigualdade triangular, é necessário e suficiente que $C=2$ seja permissível para $|\cdot|$.*

Demonstração do Lema 1.18. Já observamos que $C=2$ é permissível para $|\cdot|$ caso $|\cdot|$ satisfaça a desigualdade triangular.

Reciprocamente, suponhamos $C=2$ permissível para $|\cdot|$. Afirmamos que, para quaisquer $\lambda_1,\dots,\lambda_{2^n} \in \mathbb{K}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), tem-se

$$|\lambda_1+\cdots+\lambda_{2^n}| \leq 2^n \max\big\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_{2^n}|\big\}.$$

De fato, vamos mostrar a afirmação por indução sobre n. Se $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $\mu \neq 0$ e $|\lambda| \leq |\mu|$, então $\left|\dfrac{\lambda}{\mu}\right| \leq 1$; logo, $\left|1+\dfrac{\lambda}{\mu}\right| \leq 2$, isto é, $|\lambda+\mu| \leq 2|\mu| = 2\max\big\{|\lambda|,|\mu|\big\}$. Assim, a afirmação é válida para $n=1$. Admitamos, agora, a afirmação verdadeira para $k \geq 1$ e sejam $\lambda_1,\dots,\lambda_{2^{k+1}} \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
&|\lambda_1+\cdots+\lambda_{2^k}+\lambda_{2^k+1}+\cdots+\lambda_{2^{k+1}}| \\
&\leq 2\max\big\{|\lambda_1+\cdots+\lambda_{2^k}|,|\lambda_{2^k+1},\dots,\lambda_{2^{k+1}}|\big\} \\
&\leq 2\max\big\{2^k\max\big\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_{2^k}|\big\},2^k\max\big\{|\lambda_{2^k+1}|,\dots,|\lambda_{2^{k+1}}|\big\}\big\} \\
&= 2^{k+1}\max\big\{|\lambda_1|,\dots|\lambda_{2^{k+1}}|\big\},
\end{aligned}$$

mostrando a validade da afirmação para $k+1$. Portanto, a afirmação é verdadeira.

Agora, sejam $n \in \mathbb{N}^*$ e $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ arbitrários, e tomemos $\ell \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \leq 2^\ell < 2n$. Então

$$\begin{aligned}
|\lambda_1+\cdots+\lambda_n| &= |\underbrace{\lambda_1+\cdots+\lambda_n+0+\cdots+0}_{2^\ell\text{ parcelas}}| \leq 2^\ell\max\big\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|\big\} \\
&\leq (2n)\max\big\{|\lambda_1|,\dots,|\lambda_n|\big\} \leq (2n)\big(|\lambda_1|+\cdots+|\lambda_n|\big).
\end{aligned}$$

Em particular, $|n|(=|n\cdot 1|)\le 2n$.

Finalmente, sejam $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ arbitrários. Então, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, temos

$$\begin{aligned}
&|\lambda+\mu|^n=|(\lambda+\mu)^n|=\left|\lambda^n+\binom{n}{1}\lambda^{n-1}\mu+\cdots+\binom{n}{n-1}\lambda\mu^{n-1}+\mu^n\right|\\
&\le 2(n+1)\left(|\lambda|^n+\left|\binom{n}{1}\right||\lambda|^{n-1}|\mu|+\cdots+\left|\binom{n}{n-1}\right||\lambda|\,|\mu|^{n-1}+|\mu|^n\right)\\
&\le 4(n+1)\left(|\lambda|^n+\binom{n}{1}|\lambda|^{n-1}|\mu|+\cdots+\binom{n}{n-1}|\lambda|\,|\mu|^{n-1}+|\mu|^n\right)\\
&=4(n+1)\big(|\lambda|+|\mu|\big)^n.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $n\in\mathbb{N}^*$, temos

$$|\lambda+\mu|\le\sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n+1}\big(|\lambda|+|\mu|\big)$$

e, como $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$, segue que $|\lambda+\mu|\le|\lambda|+|\mu|$. Assim, $|\cdot|$ satisfaz a desigualdade triangular e a demonstração está concluída.

Passemos à

Demonstração do Teorema 1.17. Se $1\le C\le 2$, 2 é permissível para $|\cdot|$ e o Lema 1.18 garante que $|\cdot|$ satisfaz a desigualdade triangular.

Admitamos $C>2$ e seja α o único número real tal que $C=2^\alpha$. Consideremos a valorização $|\cdot|_1=|\cdot|^{\frac{1}{\alpha}}$, que é equivalente a $|\cdot|$, e mostremos que $|\cdot|_1$ satisfaz a desigualdade triangular. Realmente, se $|\lambda|_1\le 1$, $|\lambda|\le 1$, e então $|1+\lambda|\le C$. Portanto, $|1+\lambda|_1=|1+\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}\le C^{\frac{1}{\alpha}}=2$, e o Lema 1.18 garante que $|\cdot|_1$ satisfaz a desigualdade triangular.

Isto conclui a demonstração.

Exercícios

1.1. (a) Sejam $\mathbb{K}$ um corpo, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}^*$ e $|\,.\,|:\mathbb{K}\to\mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1.1, com $|\,.\,|$ não trivial. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n^{-1}|=+\infty$. Exiba uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}^*$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty}|\lambda_n|=0$.
(b) Sejam $\mathbb{K}$ e $|\,.\,|$ como em (a) e seja $r>0$ arbitrário. Prove que existem $\lambda,\mu\in\mathbb{K}^*$ tais que $|\lambda|<r$ e $|\mu|>\dfrac{1}{r}$.

1.2. Leia a demonstração do Teorema 10 da página 16 de [3], cujo enunciado é o seguinte: se $|\,.\,|$ é uma valorização em um corpo $\mathbb{K}$, então podemos tomar $C = \max\{1, |2|\}$ (se $C = 1$ é permissível, a afirmação é clara; caso contrário, a afirmação decorre do Teorema 3.12 e de um argumento análogo àquele usado na demonstração do Lema 1.18).

§2. A topologia definida por uma valorização. Corpos topológicos valorizáveis

Neste parágrafo utilizaremos o argumento de Nachbin [9] para estabelecer um resultado de Shafarevich [11] que fornece uma condição necessária e suficiente para que um corpo topológico de Hausdorff seja valorizável.

Definição 2.1. Seja $|\cdot|: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições (a) e (b) da Definição 1.1. A topologia $\tau_{|\cdot|}$ definida por $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ é aquela cujos conjuntos abertos são os subconjuntos A de $\mathbb{K}$ com a seguinte propriedade: para todo $\lambda \in A$ existe $r > 0$ tal que $B(\lambda, r) = \{\mu \in \mathbb{K};\ |\mu - \lambda| < r\} \subset A$.

Exemplo 2.2. Se $|\cdot|$ é a valorização trivial em $\mathbb{K}$, $\tau_{|\cdot|}$ é a topologia discreta em $\mathbb{K}$. De fato, basta observar que $B(\lambda, 1) = \{\lambda\}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observação 2.3. Como consequência da Proposição 1.15, podemos afirmar que se $|\cdot|$ e $|\cdot|_1$ são duas valorizações em $\mathbb{K}$, não triviais e equivalentes, então $\tau_{|\cdot|} = \tau_{|\cdot|_1}$. Reciprocamente, é possível provar que se $|\cdot|$ e $|\cdot|_1$ são valorizações não triviais em $\mathbb{K}$ tais que $\tau_{|\cdot|} = \tau_{|\cdot|_1}$, então $|\cdot|$ e $|\cdot|_1$ são equivalentes (ver [1], p. 35).

Proposição 2.4. *Seja* $|\cdot|: \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ *como na* Definição 2.1*,* $|\cdot|$ *não trivial. Para que* $|\cdot|$ *satisfaça a condição* (c) *da* Definição 1.1*, é necessário e suficiente que* $\tau_{|\cdot|}$ *seja uma topologia de Hausdorff.*

Demonstração. Se a condição (c) é satisfeita, $|\cdot|$ é uma valorização não trivial em $\mathbb{K}$. Logo, pelo Teorema 1.17, existe uma valorização $|\cdot|_1$ em $\mathbb{K}$ que é equivalente a $|\cdot|$ e satisfaz a desigualdade triangular. Mas, como $\tau_{|\cdot|_1}$ é definida pela métrica $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K} \mapsto |\lambda - \mu|_1 \in \mathbb{R}$, $\tau_{|\cdot|_1}$ é uma topologia de Hausdorff e, portanto, pela Observação 2.3, $\tau_{|\cdot|}$ é uma topologia de Hausdorff.

Reciprocamente, suponhamos $\tau_{|\cdot|}$ uma topologia de Hausdorff. Como $-1 \neq 0$, existem $r, s > 0$ tais que $B(0, r) \cap B(-1, s) = \varnothing$. Consequentemente, as relações $\lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| < r$ implicam $|1 + \lambda| \geq s$. Finalmente, seja $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Se $|1+\lambda| > \dfrac{1}{r}$, $\left|\dfrac{-\lambda}{1+\lambda}\right| \leq \left|\dfrac{1}{1+\lambda}\right| < r$, o que implica $\left|1 - \dfrac{\lambda}{1+\lambda}\right| = \dfrac{1}{|1+\lambda|} \geq s$, isto é, $|1+\lambda| \leq \dfrac{1}{s}\cdot$ Portanto, $|1+\lambda| \leq \max\left\{\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{s}\right\}$, mostrando que a condição (c) é satisfeita para $C = \max\left\{\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{s}\right\}\cdot$

Definição 2.5. Seja $\mathbb{K}$ um corpo munido de uma topologia τ. Diz-se que $(\mathbb{K}, \tau)$ é um *corpo topológico* se as aplicações

$$(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \tau \times \tau) \longmapsto \lambda + \mu \in (\mathbb{K}, \tau),$$
$$(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \tau \times \tau) \longmapsto \lambda\mu \in (\mathbb{K}, \tau)$$

e

$$\lambda \in (\mathbb{K}^*, \tau^*) \longmapsto \lambda^{-1} \in (\mathbb{K}, \tau)$$

são contínuas, onde $\tau \times \tau$ denota a topologia produto em $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ e τ^* denota a topologia induzida por τ em $\mathbb{K}^*$.

Exemplo 2.6. Se τ é a topologia caótica em $\mathbb{K}$, então $(\mathbb{K}, \tau)$ é obviamente um corpo topológico.

Exemplo 2.7. Se τ é a topologia discreta em $\mathbb{K}$, então $(\mathbb{K}, \tau)$ é obviamente um corpo topológico.

Proposição 2.8. *Se $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um corpo valorizado, então $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ é um corpo topológico.*

Demonstração. Se $|\cdot|$ é a valorização trivial, $\tau_{|\cdot|}$ é a topologia discreta (Exemplo 2.2); logo, $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ é um corpo topológico (Exemplo 2.7). Se $|\cdot|$ não é a valorização trivial, o Teorema 1.17 garante a existência de uma valorização $|\cdot|_1$ em $\mathbb{K}$, equivalente a $|\cdot|$, a qual satisfaz a desigualdade triangular. Como $\tau_{|\cdot|} = \tau_{|\cdot|_1}$ em vista da Observação 2.3, podemos supor, sem perda de generalidade, que $|\cdot|$ satisfaça a desigualdade triangular.

Sejam $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{K}$ arbitrários. Como, para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tem-se

$$|(\lambda + \mu) - (\lambda_0 + \mu_0)| \leq |\lambda - \lambda_0| + |\mu - \mu_0|$$

e

$$|\lambda\mu - \lambda_0\mu_0| = |\lambda\mu - \lambda_0\mu + \lambda_0\mu - \lambda_0\mu_0| \leq |\mu|\,|\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0|\,|\mu - \mu_0|$$
$$\leq (1 + |\mu_0|)|\lambda - \lambda_0| + |\lambda_0|\,|\mu - \mu_0| \ (\text{ se } |\mu - \mu_0| \leq 1),$$

segue facilmente a continuidade da adição e da multiplicação em (λ_0, μ_0).

Tomemos agora $\lambda_0 \in \mathbb{K}^*$ arbitrário. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{|\lambda_0|}{2}$, resulta da Proposição 1.16 que $|\lambda| > |\lambda_0| - \dfrac{|\lambda_0|}{2} = \dfrac{|\lambda_0|}{2}\cdot$ Logo, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e $|\lambda^{-1} - \lambda_0^{-1}| = |\lambda - \lambda_0|\,|\lambda_0^{-1}|\,|\lambda^{-1}| = \dfrac{1}{|\lambda_0|}\,\dfrac{1}{|\lambda|}\,|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{2}{|\lambda_0|^2}\,|\lambda - \lambda_0|$, o que permite concluir a continuidade da aplicação $\lambda \in (\mathbb{K}^*, (\tau_{|\cdot|})^*) \mapsto \lambda^{-1} \in (\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ em λ_0.

Proposição 2.9. *Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico. Então, para quaisquer $\lambda_0 \in \mathbb{K}^*$ e $\mu_0 \in \mathbb{K}$, a aplicação $\lambda \in (\mathbb{K}, \tau) \mapsto \lambda_0\lambda + \mu_0 \in (\mathbb{K}, \tau)$ é um homeomorfismo. Logo, para que U seja um τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$, é necessário e suficiente que $U + \mu_0$ seja uma τ-vizinhança de μ_0 em $\mathbb{K}$; e, para que U seja uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$, é necessário e suficiente que $\lambda_0 U$ seja uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Ponhamos $\varphi(\lambda) = \lambda_0\lambda + \mu_0$ para $\lambda \in \mathbb{K}$. É claro que φ é bijetora, sendo $\varphi^{-1}(\lambda) = \lambda_0^{-1}\lambda - \lambda_0^{-1}\mu_0$ para $\lambda \in \mathbb{K}$. Assim, basta justificar a continuidade de φ. Mas, como a aplicação $\lambda \in (\mathbb{K}, \tau) \mapsto \lambda_0\lambda \in (\mathbb{K}, \tau)$ é claramente contínua, segue imediatamente a continuidade de φ.

Corolário 2.10. *Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico. Para que τ seja a topologia discreta, é necessário e suficiente que $\{0\}$ seja τ-aberto em $\mathbb{K}$.*

Demonstração. É claro que $\{0\}$ é τ-aberto se τ é a topologia discreta. Reciprocamente, suponhamos $\{0\}$ τ-aberto. Então, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\{\lambda\}$ é τ-aberto, em virtude da Proposição 2.9. Consequentemente, todo subconjunto de $\mathbb{K}$ é τ-aberto, e τ é a topologia discreta.

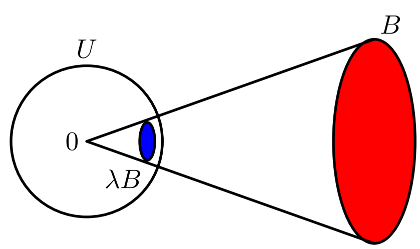
Definição 2.11. Diz-se que um corpo topológico $(\mathbb{K}, \tau)$ é *valorizável* se existe uma valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ tal que $\tau_{|\cdot|} = \tau$. Neste caso, pela Proposição 2.4, τ é uma topologia de Hausdorff.

Antes de atingir o objetivo deste parágrafo necessitaremos de alguns preliminares.

Definição 2.12. Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico. Diz-se que um subconjunto B de $\mathbb{K}$ é τ-*limitado* se para toda τ-vizinhança U de 0 em $\mathbb{K}$ existe uma τ-vizinhança W de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $WB \subset U$.

Exemplo 2.13. Se τ é a topologia discreta ou a topologia caótica, é claro que todo subconjunto de $\mathbb{K}$ é τ-limitado.

Proposição 2.14. *Seja* $(\mathbb{K}, \tau)$ *um corpo topológico não discreto* (*isto é, tal que* τ *não é a topologia discreta*)*. Para que um subconjunto* B *de* $\mathbb{K}$ *seja* τ*-limitado, é necessário e suficiente que para toda* τ*-vizinhança* U *de 0 em* $\mathbb{K}$ *exista* $\lambda \in \mathbb{K}^*$ *tal que* $\lambda B \subset U$.



Demonstração. Suponhamos B τ-limitado e seja U uma τ-vizinhança arbitrária de 0 em $\mathbb{K}$. Então existe uma τ-vizinhança W de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $WB \subset U$ e, como $(\mathbb{K}, \tau)$ não é discreto, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $\lambda \in W$ (Corolário 2.10). Logo, $\lambda B \subset U$. Reciprocamente, suponhamos a condição mencionada acima satisfeita e seja U uma τ-vizinhança arbitrária de 0 em $\mathbb{K}$. Pela continuidade da aplicação $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \tau \times \tau) \mapsto \lambda\mu \in (\mathbb{K}, \tau)$ em $(0, 0)$, existem duas τ-vizinhanças W e V de 0 em $\mathbb{K}$ tais que $WV \subset U$; e, por hipótese, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $\lambda B \subset W$. Como, pela Proposição 2.9, λV é uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$ e

$$(\lambda V)B = (\lambda B)V \subset WV \subset U,$$

acabamos de mostrar que B é τ-limitado.

Corolário 2.15. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo valorizado. Para que um subconjunto* B *de* $\mathbb{K}$ *seja* $\tau_{|\cdot|}$*-limitado, é necessário e suficiente que exista* $M > 0$ *tal que* $|\lambda| \leq M$ *para todo* $\lambda \in B$.

Demonstração. Se $|\cdot|$ é a valorização trivial, a afirmação é evidente.

Suponhamos então que $|\cdot|$ não seja a valorização trivial, o que implica que $(\mathbb{K}, \tau_{|\cdot|})$ é um corpo topológico não discreto.

Se B é $\tau_{|\cdot|}$-limitado, a Proposição 2.14 garante a existência de $\mu \in \mathbb{K}^*$ tal que $\mu B \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq 1\}$, o que fornece $|\lambda| \leq \dfrac{1}{|\mu|}$ para todo $\lambda \in B$. Assim, basta tomar $M = \dfrac{1}{|\mu|}\cdot$ Reciprocamente, seja U uma $\tau_{|\cdot|}$-vizinhança arbitrária de 0 em $\mathbb{K}$. Então existe $s > 0$ tal que $\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq s\} \subset U$. Logo, sendo M um número > 0 tal que $|\lambda| \leq M$ para todo $\lambda \in B$, segue que

$$\left\{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq \frac{s}{M}\right\} B \subset \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq s\} \subset U,$$

mostrando que B é $\tau_{|\cdot|}$-limitado.

Definição 2.16. Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{K}$ é *nilpotente* se $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ e que $\lambda \in \mathbb{K}^*$ é *antinilpotente* se λ^{-1} é nilpotente. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{K}$ é *neutro* se λ não é nilpotente nem antinilpotente.

Exemplo 2.17. (a) Se τ é a topologia caótica (respectivamente discreta) em $\mathbb{K}$, todo elemento de $\mathbb{K}$ é nilpotente (respectivamente 0 é o único elemento nilpotente de $\mathbb{K}$).

(b) Se $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um corpo valorizado, $\lambda \in \mathbb{K}$ é nilpotente (respectivamente antinilpotente, neutro) se, e somente se, $|\lambda| < 1$ (respectivamente $|\lambda| > 1$, $|\lambda| = 1$).

Proposição 2.18. *Sejam* $(\mathbb{K}, \tau)$ *um corpo topológico e* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. *Então temos:*

(a) *se* λ *e* μ *são nilpotentes, então* $\lambda\mu$ *é nilpotente;*

(b) *se* λ *e* μ *são antinilpotentes, então* $\lambda\mu$ *é antinilpotente.*

(c) *se* λ *é nilpotente (respectivamente antinilpotente) e* μ *é neutro, então* $\lambda\mu$ *é neutro ou nilpotente (respectivamente neutro ou antinilpotente).*

Demonstração. A afirmação (a) é clara e a afirmação (b) decorre imediatamente de (a).

Provemos (c). Com efeito, suponhamos λ nilpotente e μ neutro. Se $\lambda\mu$ é antinilpotente, então $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Por (b), como λ^{-1} é antinilpotente, segue que $\mu = \lambda^{-1}(\lambda\mu)$ é antinilpotente, o que não ocorre. Portanto, $\lambda\mu$ é neutro ou nilpotente. A demonstração da outra afirmação é análoga.

Corolário 2.19. *Se $(\mathbb{K}, \tau)$ é um corpo topológico, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *o produto de todo elemento nilpotente de $\mathbb{K}$ por todo elemento neutro de $\mathbb{K}$ é um elemento nilpotente de $\mathbb{K}$;*

(b) *o produto de todo elemento antinilpotente de $\mathbb{K}$ por todo elemento neutro de $\mathbb{K}$ é um elemento antinilpotente de $\mathbb{K}$;*

(c) *o produto de quaisquer dois elementos neutros de $\mathbb{K}$ é um elemento neutro de $\mathbb{K}$.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Sejam λ antinilpotente e μ neutro. Então μ^{-1} é neutro e, portanto, $(\lambda\mu)^{-1} = \lambda^{-1}\mu^{-1}$ é nilpotente por (a). Logo, $\lambda\mu$ é antinilpotente.

(b) $\Rightarrow$ (c): Sejam λ, μ neutros (então $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$). Se $\lambda\mu$ é nilpotente, $\lambda^{-1} = (\lambda\mu)^{-1}\mu$ é antinilpotente por (b), o que não ocorre. Analogamente, $\lambda\mu$ não é antinilpotente. Portanto, $\lambda\mu$ é nilpotente.

(c) $\Rightarrow$ (a): Sejam λ nilpotente e μ neutro. Pela Proposição 2.18(c), $\lambda\mu$ é nilpotente ou neutro. Se $\lambda\mu$ fosse neutro, a relação $\lambda = (\lambda\mu)\mu^{-1}$, o fato de μ^{-1} ser neutro e (c) implicariam λ neutro, o que não ocorre. Portanto, $\lambda\mu$ é nilpotente.

Proposição 2.20. *Sejam $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para que λ seja nilpotente (respectivamente antinilpotente, neutro), é necessário e suficiente que λ^ℓ seja nilpotente (respectivamente antinilpotente, neutro) para algum $\ell \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. A necessidade segue imediatamente da Proposição 2.18. Reciprocamente, admitamos $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e λ^ℓ nilpotente para algum inteiro $\ell > 1$.

Seja U uma τ-vizinhança arbitrária de 0 em $\mathbb{K}$ e seja $0 \leq i < \ell$. Pela continuidade da aplicação $\mu \in (\mathbb{K}, \tau) \mapsto \mu\lambda^i \in (\mathbb{K}, \tau)$ em 0, existe uma τ-vizinhança W_i de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $W_i\lambda^i \subset U$. Logo, considerando a τ-vizinhança $W = \bigcap_{0 \leq i < \ell} W_i$ de 0 em $\mathbb{K}$, tem-se $W\lambda^i \subset U$ para $0 \leq i < \ell$. Por outro lado, por hipótese, existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $(\lambda^\ell)^n = \lambda^{\ell n} \in W$ para $n \geq m$. Ponhamos $k = \ell m$ e seja $n \geq k$ arbitrário. Então $n = q\ell + r$, onde $q \geq m$ e $0 \leq r < \ell$. Consequentemente,

$$\lambda^n = \left(\lambda^\ell\right)^q \lambda^r \in W\lambda^r \subset U,$$

mostrando que λ é nilpotente. E, se λ^ℓ é antinilpotente, segue facilmente do que acabamos de ver que λ é antinilpotente. Finalmente, se λ^ℓ é neutro, decorre do que acabamos de mostrar que λ é neutro.

Podemos, agora, enunciar o resultado prometido:

Teorema 2.21. *Para que um corpo topológico de Hausdorff $(\mathbb{K}, \tau)$ seja valorizável, é necessário e suficiente que o subconjunto N de $\mathbb{K}$ formado pelos elementos nilpotentes ou neutros de $\mathbb{K}$ seja τ-limitado.*

Demonstração. Como a necessidade segue imediatamente do Exemplo 2.17(b) e do Corolário 2.15, passemos à suficiência. Como a suficiência é óbvia se $(\mathbb{K}, \tau)$ discreto, admitamos então $(\mathbb{K}, \tau)$ não discreto e N τ-limitado.

Afirmação 1. $N \neq \mathbb{K}$.

De fato, como $(\mathbb{K}, \tau)$ é de Hausdorff, existe um subconjunto τ-aberto A em $\mathbb{K}$ tal que $A \neq \varnothing$ e $A \neq \mathbb{K}$. Tomemos $\lambda \in A$ e $\mu \in \mathbb{K} \backslash A$. Então $A - \lambda = \{\xi - \lambda;\, \xi \in A\}$ é uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$ (Proposição 2.9) e $\mu - \lambda \notin A - \lambda$. Logo, $\mathbb{K}$ não τ-limitado pois, caso contrário, teríamos $\theta\mathbb{K} \subset A - \lambda$ para algum $\theta \in \mathbb{K}^*$ (Proposição 2.14), o que equivale a $\mathbb{K} = A - \lambda$. Consequentemente, $N \neq \mathbb{K}$, pois N é τ-limitado.

Sejam N_0 o conjunto dos elementos nilpotentes de $\mathbb{K}$ e N_1 o conjunto dos elementos neutros de $\mathbb{K}$ (logo, $N = N_0 \cup N_1$).

Afirmação 2. Se $\lambda \in N_0$ e $\mu \in N_1$, então $\lambda\mu \in N_0$.

De fato, seja W uma τ-vizinhança arbitrária de 0 em $\mathbb{K}$. Como N_1 é τ-limitado (pois N o é), existe uma τ-vizinhança V de 0 em $\mathbb{K}$ tal que

$VN_1 \subset W$. Mas, como $\mu^n \in N_1$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e como $\lambda^n \in V$ para n maior do que um certo $m \in \mathbb{N}^*$, segue que $(\lambda\mu)^n = \lambda^n\mu^n \in VN_1 \subset W$ para $n > m$, mostrando que $\lambda\mu \in N_0$.

Afirmação 3. N é uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$.

Como $N_0 \subset N$, basta ver que N_0 é uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$, o que faremos. Como $(\mathbb{K}, \tau)$ é de Hausdorff, existe uma τ-vizinhança W de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $1 \notin W$ e, como N é τ-limitado, existe uma τ-vizinhança V de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $VN \subset W$. Logo, $1 \notin VN$, o que implica $V \subset N_0$ (se não, haveria $t \in V$, $t \notin N_0$; assim, t seria neutro ou antinilpotente, isto é, t^{-1} pertenceria a N, o que forneceria $1 = tt^{-1} \in VN$). Portanto, N_0 é uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$.

Pela Afirmação 1, existe um elemento antinilpotente em $\mathbb{K}$ e, portanto, existe um elemento $a \in N_0$, $a \neq 0$. Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ ponhamos

$$\mathbb{Q}_i^\lambda = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; n > 0 \text{ e } \frac{\lambda^n}{a^m} \in N \right\} \quad \text{e}$$
$$\mathbb{Q}_s^\lambda = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; n > 0 \ \text{ e } \ \frac{\lambda^n}{a^m} \text{ é antinilpotente} \right\}.$$

Afirmação 4. $\mathbb{Q}_i^\lambda \neq \varnothing$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

De fato, pela continuidade da aplicação $\xi \in (\mathbb{K}, \tau) \mapsto \lambda\xi \in (\mathbb{K}, \tau)$ em 0 e pela Afirmação 3, existe uma τ-vizinhança V de 0 em $\mathbb{K}$ de modo que $\lambda V \subset N$. Seja $k \geq 1$ tal que $a^k \in V$. Então $\lambda a^k \in N$, isto é, $\dfrac{-k}{1} \in \mathbb{Q}_i^\lambda$.

Afirmação 5. $\mathbb{Q}_i^\lambda$ é minorante para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Realmente, sejam $\dfrac{M}{L}, \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, com $L, n > 0$, $\dfrac{M}{L} < \dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_i^\lambda$. Como $Lm - Mn > 0$, $a^{Lm-Mn} \in N_0$ pela Proposição 2.18(a). Ora, como $\dfrac{\lambda^n}{a^m} \in N$ e $\left(\dfrac{\lambda^L}{a^M}\right)^n = \left(\dfrac{\lambda^n}{a^m}\right)^L a^{Lm-Mn}$, conclui-se que $\left(\dfrac{\lambda^L}{a^M}\right)^n \in N$ (Proposição 2.18(a),(c)). Logo, pela Proposição 2.20, $\dfrac{\lambda^L}{a^M} \in N$, isto é, $\dfrac{M}{L} \in \mathbb{Q}_i^\lambda$.

Afirmação 6. $\mathbb{Q}_s^0 = \varnothing$ (claro); $\mathbb{Q}_s^\lambda \neq \varnothing$ e é majorante para todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

De fato, seja $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e seja W uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $\lambda \notin W$. Como N é τ-limitado, existe uma τ-vizinhança V de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $VN \subset W$. Como $a \in N_0$, existe $k \geq 1$ tal que $a^k \in V$. Portanto, $\dfrac{\lambda}{a^k}$ é antinilpotente (se $\dfrac{\lambda}{a^k} \in N$, $\lambda = a^k \dfrac{\lambda}{a^k} \in VN \subset W$), isto é, $\dfrac{k}{1} \in \mathbb{Q}_s^\lambda$. Finalmente, a última afirmação decorre do fato de $\mathbb{Q}_i^\lambda$ ser disjunto de $\mathbb{Q}_s^\lambda$ e da Afirmação 5.

Acabamos de mostrar que cada $\lambda \in \mathbb{K}^*$ determina um corte de Dedekind em $\mathbb{Q}$, cujo elemento separador será denotado por $\overline{\lambda}$.

Fixemos $0 < r < 1$ e definamos $v\colon \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ por $v(0) = 0$ e $v(\lambda) = r^{\overline{\lambda}}$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Por definição, $v(\lambda) > 0$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Afirmação 7. $v(a) = r$.

De fato, $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_i^a \Leftrightarrow \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \in N \Leftrightarrow n - m \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{n-m}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{m}{n} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{n} \leq 1$. Logo, $\overline{a} = 1$, e $v(a) = r$.

Afirmação 8. $v(\lambda\mu) = v(\lambda)v(\mu)$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

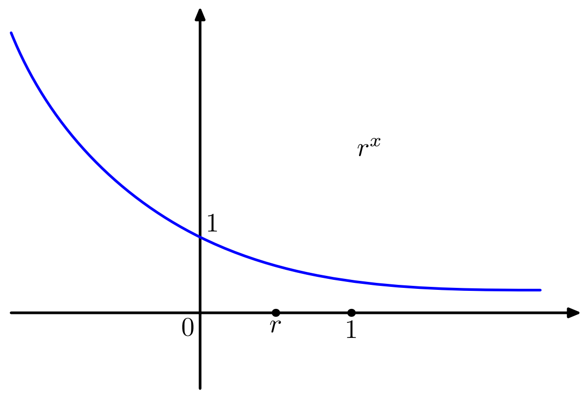
Evidentemente, basta considerar o caso em que $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$. Sejam então $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_i^\lambda$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_i^\mu$ arbitrários; então $\dfrac{\lambda^n}{a^m}, \dfrac{\mu^q}{a^p} \in N$. Logo,

$$\left(\frac{\lambda^n}{a^m}\right)^q \cdot \left(\frac{\mu^q}{a^p}\right)^n = \frac{(\lambda\mu)^{nq}}{a^{mq+pn}} \in N,$$

isto é, $\dfrac{mq+pn}{nq} \in \mathbb{Q}_i^{\lambda\mu}$. Daí, $\dfrac{mq+pn}{nq} = \dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} \leq \overline{(\lambda\mu)}$, o que implica $\overline{\lambda} + \overline{\mu} \leq \overline{(\lambda\mu)}$. Tomando agora $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}_s^\lambda$ e $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}_s^\mu$ arbitrários, conclui-se que $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} \geq \overline{(\lambda\mu)}$, o que implica $\overline{\lambda} + \overline{\mu} \geq \overline{(\lambda\mu)}$. Portanto, $\overline{\lambda\mu} = \overline{\lambda} + \overline{\mu}$, o que fornece

$$v(\lambda\mu) = r^{\overline{(\lambda\mu)}} = r^{\overline{\lambda}+\overline{\mu}} = r^{\overline{\lambda}} \cdot r^{\overline{\mu}} = v(\lambda)v(\mu).$$

Afirmação 9. $N = \{\lambda \in \mathbb{K};\ v(\lambda) \leq 1\}$.



De fato, se $v(\lambda) = r^{\overline{\lambda}} > 1$, $\overline{\lambda} < 0$, e então existe $\dfrac{m}{n} < 0$ em $\mathbb{Q}_s^\lambda$. Logo, $m < 0$, o que fornece $\lambda^n = \dfrac{\lambda^n}{a^m}\, a^m$ antinilpotente, como produto de dois elementos antinilpotentes. Logo, λ é antinilpotente pela Proposição 2.20. Reciprocamente, suponhamos λ antinilpotente. Sejam W uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $a \notin W$ ($(\mathbb{K}, \tau)$ é de Hausdorff), V uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $VN \subset W$ (N é τ-limitado) e $k \geq 1$ tal que $\lambda^{-k} \in V$ (λ^{-1} é nilpotente). Então $\lambda^k a$ é antinilpotente (se $\lambda^k a \in N$, $a = \lambda^{-k}(\lambda^k a) \in VN \subset W$, o que não ocorre), ou seja, $\dfrac{\lambda^k}{a^{-1}}$ é antinilpotente. Logo, $-\dfrac{1}{k} \in \mathbb{Q}_s^\lambda$, e $\overline{\lambda} \leq -\dfrac{1}{k} < 0$. Assim, $v(\lambda) > 1$.

Afirmação 10. $\tau = \tau_v$.

Para $\lambda \in \mathbb{K}$ e $0 < s < 1$ arbitrários, ponhamos $B(\lambda, s) = \{\mu \in \mathbb{K};\ v(\mu - \lambda) < s\}$. Seja $L \in \mathbb{Z}$ tal que $r^L > \dfrac{1}{s}$ (L é forçosamente < 0) e seja $b = a^L$. Então $v(b) = (v(a))^L$ (em virtude da Afirmação 8, $v(\lambda^{-1}) = (v(\lambda))^{-1}$ se $\lambda \in \mathbb{K}^*$); logo, $v(b) = r^L > \dfrac{1}{s}$ pela Afirmação 7. Pela continuidade da aplicação $\mu \in (\mathbb{K}, \tau) \mapsto b\mu \in (\mathbb{K}, \tau)$ em 0 e pela Afirmação 3, existe uma τ-vizinhança U de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $bU \subset N$. Consequentemente, pela Afirmação 9, $U \subset B(0, s)$, o que implica $\lambda + U \subset B(\lambda, s)$. Portanto, τ_v é menos fina do que τ.

Vejamos, agora, que τ é menos fina do que τ_v. De fato, seja V uma τ-vizinhança arbitrária de 0 em $\mathbb{K}$. Pela Proposição 2.14, existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tal que $\mu N \subset V$, já que N é τ-limitado. Seja $0 < s < \min\{1, v(\mu)\}$. Então $B(0,s) \subset V$. Realmente, se $v(\xi) < s < v(\mu)$, $v(\xi\mu^{-1}) < 1$. Logo, pela Afirmação 9, $\xi\mu^{-1} \in N$, o que fornece $\xi = \mu(\mu^{-1}\xi) \in \mu N \subset V$. Portanto, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $B(\lambda, s) \subset \lambda + V$, e τ é menos fina do que τ_v.

Afirmação 11. v é uma valorização em $\mathbb{K}$.

Inicialmente, mostremos que existe $\gamma > 0$ tal que $v(\lambda+\mu) \leq \gamma \max\{v(\lambda), v(\mu)\}$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. De fato, seja W uma τ-vizinhança de 0 em $\mathbb{K}$ tal que $1 \notin W$. Pela continuidade da adição em $(0,0)$ e pela Afirmação 10, existe $s > 0$ tal que $B(0,s) + B(0,s) \subset W$. Daí resulta que $v(\lambda+\mu) \leq \dfrac{1}{s} \max\{v(\lambda), v(\mu)\}$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Caso contrário, existiriam $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ para os quais $sv(\lambda+\mu) > \max\{v(\lambda), v(\mu)\}$, o que implicaria $sv(\lambda+\mu) > v(\lambda)$ e $sv(\lambda+\mu) > v(\mu)$. Logo, $\lambda + \mu \neq 0$, $v\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right) < s$ e $v\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\right) < s$, e então $1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} \in B(0,s) + B(0,s) \subset W$ (absurdo). Finalmente, acabamos de mostrar que $v(\lambda+\mu) \leq \gamma \max\{v(\lambda), v(\mu)\}$ para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, onde $\gamma = \dfrac{1}{s} \cdot$ Portanto, as relações $\lambda \in \mathbb{K}$, $v(\lambda) \leq 1$ implicam $v(1+\lambda) \leq \gamma$, provando a Afirmação 11.

Isto conclui a demonstração do teorema.

Corolário 2.22. *Para um corpo topológico de Hausdorff* $(\mathbb{K}, \tau)$*, as seguintes condições são equivalentes.*

(a) $(\mathbb{K}, \tau)$ *é não discreto e valorizável;*

(b) N_o*, o conjunto dos elementos nilpotentes de* $\mathbb{K}$*, é* τ*-limitado e diferente de* $\{0\}$*, e o produto de dois elementos neutros de* $\mathbb{K}$ *é um elemento neutro de* $\mathbb{K}$*.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Seja $|\cdot|$ uma valorização em $\mathbb{K}$ tal que $\tau = \tau_{|\cdot|}$, a qual não é a trivial pois $(\mathbb{K}, \tau)$ não é discreto. Como $N_0 = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| < 1\}$ pelo Exemplo 2.17(b), então $N_0 \neq \{0\}$; e N_0 é τ-limitado pelo Corolário 2.15.

Além disso, pelo Exemplo 2.17(b), o produto de dois elementos neutros de $\mathbb{K}$ é um elemento neutro de $\mathbb{K}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Seja $\lambda \in N_o\backslash\{0\}$. Então, pelo Corolário 2.19, $\lambda N_1 \subset N_0$, onde N_1 é o conjunto dos elementos neutros de $\mathbb{K}$. Portanto, N_1 é τ-limitado pelo Exercício 2.4(a),(c) e, consequentemente, $N = N_0 \cup N_1$ é τ-limitado pelo Exercício 2.4(b). Pelo Teorema 2.21, $(\mathbb{K}, \tau)$ é valorizável, e $(\mathbb{K}, \tau)$ não é discreto pois $N_0 \neq \{0\}$ (Exemplo 2.17(a)).

Exercícios

2.1. Sejam $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico e L um subcorpo de $\mathbb{K}$. Prove que (L, τ_L) é um corpo topológico, onde τ_L é a topologia induzida por τ em L.

2.2. Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico. Prove que todo elemento de $\mathbb{K}$ admite um sistema fundamental de τ-vizinhanças fechadas.

2.3. Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico tal que τ não é topologia caótica. Prove que τ é uma topologia de Hausdorff.

2.4. Sejam $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico e A e B dois subconjuntos de $\mathbb{K}$. Prove que:

(a) se $A \subset B$ e B é τ-limitado, então A é τ-limitado;

(b) se A e B são τ-limitados, então $A \cup B$ e $A + B$ são τ-limitados;

(c) se A é τ-limitado e $\lambda \in \mathbb{K}$ é arbitrário, então λA é τ-limitado;

(d) se A é τ-limitado, então $\overline{A}$ é τ-limitado.

2.5. Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico. Prove que todo subconjunto compacto de $\mathbb{K}$ é τ-limitado.

2.6. Seja $(\mathbb{K}, \tau)$ um corpo topológico metrizável (isto é, um corpo topológico cuja topologia provém de uma métrica). Prove que para que um subconjunto B de $\mathbb{K}$ seja τ-limitado, é necessário e suficiente que, para toda sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ convergindo para 0 e para toda sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em B, a sequência $(\lambda_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convirja para 0.

§3. Valorizações não arquimedianas

Neste parágrafo introduzimos e caracterizamos as valorizações não arquimedianas em um corpo arbitrário e provamos um teorema de Ostrowski, provado em [10], que classifica as valorizações não triviais no corpo dos números racionais.

Definição 3.1. Uma *valorização* $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ é dita *não arquimediana* se $C = 1$ é permissível para $|\cdot|$. Neste caso, diz-se que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um *corpo não arquimediano.*

Exemplo 3.2. As valorizações consideradas nos Exemplos 1.4, 1.6 e 1.7 são não arquimedianas.

Teorema 3.3. *Para uma valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $|\cdot|$ *é não arquimediana;*

(b) $|\lambda + \mu| \leq \max\{|\lambda|, |\mu|\}$ *para quaisquer* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$*;*

(c) *existe* $M > 0$ *tal que* $|n \cdot 1| \leq M$ *para todo* $n \in \mathbb{Z}$ (*isto é, o conjunto dos inteiros de* $\mathbb{K}$ *é* $\tau_{|\cdot|}$*-limitado*).

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b): Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mu \in \mathbb{K}^*$ tais que $|\lambda| \leq |\mu|$. Como $\left|\dfrac{\lambda}{\mu}\right| \leq 1$, segue que $\left|1 + \dfrac{\lambda}{\mu}\right| \leq 1$, isto é, $|\lambda + \mu| \leq |\mu| = \max\{|\lambda|, |\mu|\}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$, tem-se $|1+\lambda| \leq \max\{|\lambda|, |1|\} = 1$, mostrando que $|\cdot|$ é não arquimediana.

(b) $\Rightarrow$ (c): Como $|1| = 1$, segue por indução que $|n \cdot 1| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e a Proposição 1.3(b) garante que $|n \cdot 1| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(c) $\Rightarrow$ (b): Basta considerar o caso em que $|\cdot|$ não é a valorização trivial. Pelo Teorema 1.17, podemos supor que $|\cdot|$ satisfaça a desigualdade triangular. Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ arbitrários. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\begin{aligned}
|\lambda+\mu|^n = |(\lambda+\mu)^n| &= \left|\lambda^n + \binom{n}{1}\lambda^{n-1}\mu + \cdots + \binom{n}{n-1}\lambda\mu^{n-1} + \mu^n\right| \\
&\leq |\lambda|^n + \left|\binom{n}{1}\right| |\lambda|^{n-1}|\mu| + \cdots + \left|\binom{n}{n-1}\right| |\lambda|\,|\mu|^{n-1} + |\mu|^n \\
&\leq M\left((\max\{|\lambda|,|\mu|\})^n + \cdots + (\max\{|\lambda|,|\mu|\})^n\right) \\
&\leq M(n+1)\left(\max\{|\lambda,|\mu|\}\right)^n,
\end{aligned}$$

ou seja, temos

$$|\lambda+\mu| \leq \sqrt[n]{M}\,\sqrt[n]{n+1}\,\max\{|\lambda|,|\mu|\}.$$

Finalmente, como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, concluímos que $|\lambda+\mu| \leq \max\{|\lambda|,|\mu|\}$.

Corolário 3.4. *Sejam* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo valorizado e* L *um subcorpo de* $\mathbb{K}$ *tal que a restrição de* $|\cdot|$ *a* L *é uma valorização não arquimediana. Então* $|\cdot|$ *é uma valorização não arquimediana.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.3, já que os inteiros de $\mathbb{K}$ coincidem com os de L.

Corolário 3.5. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo valorizado de característica prima. Então* $|\cdot|$ *é uma valorização não arquimediana.*

Demonstração. Segue imediatamente do Teorema 3.3, já que a hipótese sobre a característica de $\mathbb{K}$ implica trivialmente a $\tau_{|\cdot|}$-limitação do conjunto dos inteiros de $\mathbb{K}$.

Corolário 3.6. *Seja* $|\cdot|$ *uma valorização não arquimediana em* $\mathbb{K}$*. Se* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *e* $|\lambda| \neq |\mu|$*, então* $|\lambda+\mu| = \max\{|\lambda|,|\mu|\}$.

Demonstração. Suponhamos $|\lambda| < |\mu|$. Então $|\lambda+\mu| \leq \max\{|\lambda|,|\mu|\} = |\mu|$. Por outro lado, $|\mu| = |(\lambda+\mu)-\lambda| \leq \max\{|\lambda+\mu|,|\lambda|\} = |\lambda+\mu|$ (se $\max\{|\lambda+\mu|,|\lambda|\} = |\lambda|$, viria $|\mu| \leq |\lambda|$). Logo, $|\lambda+\mu| = |\mu| = \max\{|\lambda|,|\mu|\}$.

Corolário 3.7. *Seja* $|\cdot|$ *como no* Corolário 3.6 *e sejam* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *tais que* $|\lambda_2| < |\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n| < |\lambda_1|$. *Então* $|\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n| = |\lambda_1|$.

Demonstração. Como $|\lambda_2 + \cdots + \lambda_n| \leq \max\{|\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|\} < |\lambda_1|$, o resultado segue imediatamente do corolário anterior.

Proposição 3.8. *Seja* $|\cdot|$ *uma valorização não arquimediana em* $\mathbb{K}$. *Se* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $r, s > 0$ *e* $B(\lambda, r) = \{t \in \mathbb{K}; |t-\lambda| < r\} \cap B(\mu, s) = \{t \in \mathbb{K}; |t-\mu| < s\} \neq \varnothing$, *então* $B(\lambda, r) \subset B(\mu, s)$ *ou* $B(\mu, s) \subset B(\lambda, r)$.

Demonstração. Seja $t_0 \in B(\lambda, r) \cap B(\mu, s)$ e admitamos $r \leq s$. Vamos mostrar que $B(\lambda, r) \subset B(\mu, s)$. Realmente, para todo $t \in B(\lambda, r)$, tem-se

$$|t - \mu| \leq \max\{|t - \lambda|, |\lambda - t_0|, |t_0 - \mu|\} < s.$$

Proposição 3.9. *Sejam* $|\cdot|$, λ *e* r *como na* Proposição 3.8. *Então* $B(\mu, r) = B(\lambda, r)$ (*respectivamente* $\overline{B}(\mu, r) = \overline{B}(\lambda, r)$) *para todo* $\mu \in B(\lambda, r)$ (*respectivamente* $\mu \in \overline{B}(\lambda, r)$), *onde* $\overline{B}(\lambda, r) = \{t \in \mathbb{K}; |t - \lambda| \leq r\}$.

Demonstração. Seja $\mu \in B(\lambda, r)$. Então, para todo $t \in B(\mu, r)$, tem-se $|t - \lambda| \leq \max\{|t - \mu|, |\mu - \lambda|\} < r$; logo, $B(\mu, r) \subset B(\lambda, r)$. Analogamente, $B(\lambda, r) \subset B(\mu, r)$; assim, $B(\mu, r) = B(\lambda, s)$. A verificação da outra afirmação é análoga.

Proposição 3.10. *Seja* $|\cdot|$ *como na* Proposição 3.8. *Então, para quaisquer* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $r > 0$, $B(\lambda, r)$ *é* $\tau_{|\cdot|}$*-fechado em* $\mathbb{K}$ *e* $\overline{B}(\lambda, r)$ *é* $\tau_{|\cdot|}$*-aberto em* $\mathbb{K}$. *Portanto, todo elemento de* $\mathbb{K}$ *admite um sistema fundamental de* $\tau_{|\cdot|}$*-vizinhanças abertas e fechadas em* $\mathbb{K}$.

Demonstração. O fato de que $B(\lambda, r)$ é $\tau_{|\cdot|}$-fechado em $\mathbb{K}$ segue imediatamente da Proposição 3.8 e o fato de que $\overline{B}(\lambda, r)$ é $\tau_{|\cdot|}$-aberto em $\mathbb{K}$ segue imediatamente da Proposição 3.9.

Proposição 3.11. *Seja* $|\cdot|$ *uma valorização não arquimediana em* $\mathbb{K}$ *e seja* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $\mathbb{K}$. *Para que* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *seja uma sequência de Cauchy em* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, *é necessário e suficiente que* $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$.

Demonstração. Como a necessidade é clara, provemos a suficiência. Com efeito, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}^*$, tem-se

$$\begin{aligned}|\lambda_{n+k} - \lambda_n| &= |(\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1}) + \cdots + (\lambda_{n+1} - \lambda_n)| \\ &\le \max\{|\lambda_{n+k} - \lambda_{n+k-1}|, \ldots, |\lambda_{n+1} - \lambda_n|\}.\end{aligned}$$

Seja $r > 0$ arbitrário. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \le r$ para todo $n \ge n_0$, e o que acabamos de ver implica que $|\lambda_{n+k} - \lambda_n| \le r$ para quaisquer $n \ge n_0$ e $k \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Teorema 3.12. *Se $|\cdot|$ é uma valorização não trivial em $\mathbb{Q}$, então $|\cdot|$ é equivalente a $|\cdot|_\infty$ ou a alguma valorização p-ádica.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que $|\cdot|$ satisfaça a desigualdade triangular (Teorema 1.17).

Afirmação 1. Sejam m, n inteiros ≥ 2. Então

$$|m| \le (\max\{1, |n|\})^{\frac{\log m}{\log n}}.$$

Com efeito, seja $m = a_0 + a_1 n + \cdots + a_r n^r$ $(0 \le a_i < n,\ a_r \ne 0)$ a decomposição n-ádica de m. Como $|a_i| = |\underbrace{1 + \cdots + 1}_{a_i \text{ vezes}}| \le |1| + \cdots + |1| = a_i < n$ para $0 \le i \le r$, segue que

$$\begin{aligned}|m| &\le |a_0| + |a_1|\,|n| + \cdots + |a_r|\,|n|^r \le n + n|n| + \cdots + n|n|^r \\ &= n(1 + |n| + \cdots + |n|^r) \le n(r+1)\,(\max\{1, |n|\})^r.\end{aligned}$$

Mas, como $n^r \le m$, tem-se $r \le \dfrac{\log m}{\log n} \cdot$ Logo,

$$n(r+1)\,(\max\{1, |n|\})^r \le n\left(\frac{\log m}{\log n} + 1\right)(\max\{1, |n|\})^{\frac{\log m}{\log n}}$$

e, consequentemente,

$$|m| \le n\left(\frac{\log m}{\log n} + 1\right)(\max\{1, |n|\})^{\frac{\log m}{\log n}}.$$

Seja $s \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Substituindo m por m^s na desigualdade acima, concluímos que

$$|m|^s \leq n \left(s \frac{\log m}{\log n} + 1 \right) (\max\{1, |n|\})^{s \frac{\log m}{\log n}},$$

ou seja,

$$|m| \leq \sqrt[s]{n} \sqrt[s]{s \frac{\log m}{\log n} + 1} \ (\max\{1, |n|\})^{\frac{\log m}{\log n}}.$$

Finalmente, como $\lim\limits_{s \to \infty} \sqrt[s]{n} = \lim\limits_{s \to \infty} \sqrt[s]{s \frac{\log m}{\log n} + 1} = 1$, a Afirmação 1 está provada.

Afirmação 2. Se $|k| > 1$ para todo inteiro $k \geq 2$, $| \cdot |$ é equivalente a $| \cdot |_\infty$.

Com efeito, pela Afirmação 1, tem-se

$$|m| \leq |n|^{\frac{\log m}{\log n}}, \text{ isto é, } |m|^{\frac{1}{\log m}} \leq |n|^{\frac{1}{\log n}}$$

para quaisquer inteiros $m, n \geq 2$. Trocando os papéis de m e n, vem

$$|n|^{\frac{1}{\log n}} \leq |m|^{\frac{1}{\log m}}$$

para quaisquer inteiros $m, n \geq 2$. Portanto, para quaisquer inteiros $m, n \geq 2$,

$$|n|^{\frac{1}{\log n}} = |m|^{\frac{1}{\log m}}$$

Logo, existe $\alpha > 0$ tal que $|m|^{\frac{1}{\log m}} = e^\alpha$ para todo inteiro $m \geq 2$. Afirmamos que $|\lambda| = (|\lambda|_\infty)^\alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$. Realmente, a igualdade é claramente válida para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. Agora, se m é um inteiro ≥ 2, tem-se

$$|m| = e^{\alpha \log m} = e^{\log m^\alpha} = m^\alpha = (|m|_\infty)^\alpha.$$

Logo, se m é um inteiro < 0, $|m| = |-m| = (|-m|_\infty)^\alpha = (|m|_\infty)^\alpha$. Finalmente, seja $\lambda = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ arbitrário ($m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$). Então

$$|\lambda| = \frac{|m|}{|n|} = \frac{(|m|_\infty)^\alpha}{(|n|_\infty)^\alpha} = \left(\left| \frac{m}{n} \right|_\infty \right)^\alpha = (|\lambda|_\infty)^\alpha,$$

e daí resulta que $| \cdot |$ é equivalente a $| \cdot |_\infty$.

Afirmação 3. Se $|k| \leq 1$ para algum inteiro $k \geq 2$, $|\cdot|$ é equivalente a alguma valorização p-ádica.

Com efeito, tomando $n = k$ na Afirmação 1, conclui-se que $|m| \leq 1$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Logo, pelo Teorema 3.3, a valorização $|\cdot|$ é não arquimediana. Além disso, como $|\cdot|$ não é a valorização trivial, existe um inteiro $\ell > 1$ tal que $|\ell| < 1$. Assim, o conjunto

$$I = \{n \in \mathbb{Z}; \, |n| < 1\},$$

que claramente é um ideal de $\mathbb{Z}$, satisfaz $I \neq \{0\}$ e $I \neq \mathbb{Z}$. Logo, existe um inteiro $p \geq 2$ tal que $I = p\mathbb{Z}$. Afirmamos que p é primo. Realmente, escrevamos $p = p_1 p_2$, onde $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$. Como $|p| = |p_1|\,|p_2| < 1$, então $|p_1| < 1$ ou $|p_2| < 1$. Se $|p_1| < 1$ isto é, se $p_1 \in I$, $p \mid p_1$, o que implica $p_1 = \pm p$ e $p_2 = \pm 1$. Analogamente, se $|p_2| < 1$, $p_2 = \pm p$ e $p_1 = \pm 1$. Portanto, p é primo. Ponhamos $c = |p|$ $(0 < c < 1)$ e $\alpha = -\dfrac{\log c}{\log p}\cdot$ Afirmamos que

$$(|\lambda|_p)^\alpha = |\lambda|$$

para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$. Realmente, a igualdade é válida para $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$. Agora, se m é um inteiro, com $m \neq 0$ e $m \neq 1$, existe um único $n \in \mathbb{N}$ e existe $s \in \mathbb{Z}$ primo com p de modo que $m = p^n s$. Logo, $|m| = |p|^n |s| = |p|^n = c^n$ (notemos que, se $|s| < 1$, $s \in I$, o implicaria $p \mid s$). Por outro lado, $(|m|_p)^\alpha = (p^{-n})^\alpha = p^{n\,\frac{\log c}{\log p}} = \left(p^{\frac{\log c}{\log p}}\right)^n = c^n = |m|$, pois $p^{\frac{\log c}{\log p}} = e^{\frac{\log c}{\log p}\cdot \log p} = e^{\log c} = c$. Finalmente, seja $\lambda = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ arbitrário $(m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$. Então

$$(|\lambda|_p)^\alpha = \left(\frac{|m|_p}{|n|_p}\right)^\alpha = \frac{|m|}{|n|} = |\lambda|,$$

mostrando que $|\cdot|$ é equivalente a $|\cdot|_p$.

Consequentemente, em vista das Afirmações 2 e 3, a demonstração do teorema está concluída.

Exercícios

3.1. Seja $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ um corpo não arquimediano e seja $\left(\overline{B}(\lambda_i, r_i)\right)_{i \in I}$ uma família de bolas em $\mathbb{K}$ tal que, para quaisquer $i, j \in I$,

$$\overline{B}(\lambda_i, r_i) \cap \overline{B}(\lambda_j, r_j) \neq \emptyset.$$

Prove que $\big(\overline{B}(\lambda_i, r_i)\big)_{i\in I}$ é uma família totalmente ordenada pela relação de inclusão (isto é, para quaisquer $i, j \in I$, tem-se $\overline{B}(\lambda_i, r_i) \subset \overline{B}(\lambda_j, r_j)$ ou $\overline{B}(\lambda_j, r_j) \subset \overline{B}(\lambda_i, r_i)$).

3.2. Seja $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ um corpo não arquimediano (com $|\,.\,|$ não trivial) tal que para toda família $\big(\overline{B}(\lambda_i, r_i)\big)_{i\in I}$ de bolas em $\mathbb{K}$, com $\overline{B}(\lambda_i, r_i) \cap \overline{B}(\lambda_j, r_j) \neq \emptyset$ para quaisquer $i, j \in I$, tem-se

$$\bigcap_{i\in I} \overline{B}(\lambda_i, r_i) \neq \emptyset.$$

Prove que $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ é completo.

Sugestão: Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$. Considere a sequência $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de bolas em $\mathbb{K}$, onde

$$B_n = \big\{\lambda \in \mathbb{K}\,;\, |\lambda - \lambda_n| \leq \max_{k\geq n} |\lambda_k - \lambda_{k+1}|\big\}.$$

Nota: É possível provar que, se $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ é um corpo não arquimediano completo (com $|\,.\,|$ não trivial) cuja valorização é discreta, então para toda família $\big(\overline{B}(\lambda_i, r_i)\big)_{i\in I}$ de bolas em $\mathbb{K}$ tal que $\overline{B}(\lambda_i, r_i) \cap \overline{B}(\lambda_j, r_j) \neq \emptyset$ para quaisquer $i, j \in I$, tem-se

$$\bigcap_{i\in I} \overline{B}(\lambda_i, r_i) \neq \emptyset.$$

§4. O teorema de aproximação de Artin-Whaples

O objetivo deste parágrafo é estabelecer o teorema mencionado em seu título, provado em [2], a saber:

Teorema 4.1. *Sejam* $|\cdot|_1, |\cdot|_2, \ldots, |\cdot|_n$ *valorizações não triviais em um corpo* $\mathbb{K}$*, duas a duas não equivalentes. Então, para quaisquer* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ *e* $r > 0$*, existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tal que* $|\lambda_j - \lambda|_j < r$ *para* $j = 1, 2, \ldots, n$*.*

Se considerarmos $\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ vezes}}$ *munido da topologia produto* $\tau_{|\cdot|_1} \times \tau_{|\cdot|_2} \times \cdots \times \tau_{|\cdot|_n}$*, o Teorema 4.1 afirma que a diagonal* Δ *de* $\mathbb{K}^n$ *é densa em* $\mathbb{K}^n$*.*

A demonstração do teorema dependerá dos resultados a seguir.

Lema 4.2. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo valorizado.*

(a) *Se* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $|\lambda| < 1$*, então* $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$*.*

(b) *Se* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $|\lambda| > 1$*, então* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^n}{1+\lambda^n} = 1$*.*

Demonstração. (a): Basta lembrar que $|\lambda^n| = |\lambda|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

(b): Como $\left|\dfrac{\lambda^n}{1+\lambda^n} - 1\right| = \left|\dfrac{1}{1+\lambda^n}\right| = \left|\dfrac{(\lambda^{-1})^n}{1+(\lambda^{-1})^n}\right|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $|\lambda^{-1}| < 1$, a afirmação decorre de (a).

Lema 4.3. *Sejam* $|\cdot|_1, |\cdot|_2, \ldots, |\cdot|_n$ *como no* Teorema 4.1. *Então existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tal que* $|\lambda|_1 > 1$ *e* $|\lambda|_j < 1$ *para* $j = 2, \ldots, n$*.*

Demonstração. A demonstração será por indução sobre n. Inicialmente, vejamos o caso em que $n = 2$. Com efeito, como $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ não são equivalentes, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tais que $|\lambda|_1 < 1$, $|\lambda|_2 \geq 1$, $|\mu|_2 < 1$ e $|\mu|_1 \geq 1$. Seja $\theta = \mu\lambda^{-1}$; então $|\theta|_1 = \dfrac{|\mu|_1}{|\lambda|_1} > |\mu|_1 \geq 1$ e $|\theta|_2 = \dfrac{|\mu|_2}{|\lambda|_2} < \dfrac{1}{|\lambda|_2} \leq 1$.

Seja $n > 2$ e suponhamos o resultado válido para $n-1$. Pela hipótese de indução, existe $\xi \in \mathbb{K}$ tal que $|\xi|_1 > 1$ e $|\xi|_j < 1$ para $j = 2, \ldots, n-1$.

E, pelo caso $n = 2$, existe $t \in \mathbb{K}$ tal que $|t|_1 > 1$ e $|t|_n < 1$. Dividamos a verificação em dois casos.

1º **caso**: $|\xi|_n \leq 1$.

Ponhamos $z_k = t\xi^k$ ($k \in \mathbb{N}$). Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $|z_k|_1 = |t|_1(|\xi|_1)^k > (|\xi|_1)^k > 1$ e $|z_k|_n = |t|_n(|\xi|_n)^k < (|\xi|_n)^k \leq 1$. E, como $|z_k|_j = |t|_j(|\xi|_j)^k$ para $j = 2, \ldots, n-1$ e $k \in \mathbb{N}$ arbitrário, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $|z_k|_j < 1$ para $j = 2, \ldots, n-1$, em virtude do Lema 4.2(a).

2º **caso**: $|\xi|_n > 1$.

Ponhamos $z_k = t\,\dfrac{\xi^k}{1+\xi^k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Então, pelo Lema 4.2(b), $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\xi^k}{1+\xi^k} = 1$ por $\tau_{|\cdot|_1}$ (pois $|\xi|_1 > 1$), o que fornece $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = t$ por $\tau_{|\cdot|_1}$. Analogamente, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = t$ por $\tau_{|\cdot|_n}$. Por outro lado, como $|\xi|_j < 1$ para $j = 2, \ldots, n-1$, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ por $\tau_{|\cdot|_j}$ para $j = 2, \ldots, n-1$ pelo Lema 4.2(a). Finalmente, pelo que acabamos de observar e como $|t|_1 > 1$ e $|t|_n < 1$, podemos tomar $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $|z_k|_1 > 1$ e $|z_k|_j < 1$ para $j = 2, \ldots, n$.

Corolário 4.4. *Nas condições do* Teorema 4.1, *existe uma sequência* $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathbb{K}$ *tal que* $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 1$ *por* $\tau_{|\cdot|_1}$ *e* $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ *por* $\tau_{|\cdot|_j}$ *para* $j = 2, \ldots, n$.

Demonstração. Pelo Lema 4.3, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda|_1 > 1$ e $|\lambda|_j < 1$ para $j = 2, \ldots, n$. Definamos $t_k = \dfrac{\lambda^k}{1+\lambda^k}$ ($k \in \mathbb{N}$). Pelo Lema 4.2, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 1$ por $\tau_{|\cdot|_1}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ por $\tau_{|\cdot|_j}$ para $j = 2, \ldots, n$.

Passemos à

Demonstração do Teorema 4.1. Pelo Corolário 4.4, para cada $j = 1, \ldots, n$ existe uma sequência $\left(t_k^{(j)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} t_k^{(j)} = 1$ por $\tau_{|\cdot|_j}$ e $\lim\limits_{k\to\infty} t_k^{(j)} = 0$ por $\tau_{|\cdot|_i}$ para $i = 1, \ldots, n$ e $i \neq j$. Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\theta_k = t_k^{(1)}\lambda_1 + \cdots + t_k^{(j)}\lambda_j + \cdots + t_k^{(n)}\lambda_n\,.$$

Como, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\theta_k - \lambda_j = t_k^{(1)}\lambda_1 + \cdots + (t_k^{(j)} - 1)\lambda_j + \cdots + t_k^{(n)}\lambda_n \ (k \in \mathbb{N}),$$

conclui-se que $\lim\limits_{k\to\infty} \theta_k = \lambda_j$ por $\tau_{|\cdot|_j}$. Portanto, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, tem-se $|\theta_k - \lambda_j|_j < r$ para $j = 1, \ldots, n$, concluindo assim a demonstração do teorema.

Corolário 4.5. *Sejam* $|\cdot|_1, |\cdot|_2, \ldots, |\cdot|_n$ *como no* Teorema 4.1 *e sejam* $v_1, v_2, \ldots, v_n \geq 0$. *Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $(|\lambda|_1)^{v_1}(|\lambda|_2)^{v_2}\ldots(|\lambda|_n)^{v_n} = 1$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}^*$*;*

(b) $v_1 = v_2 = \cdots = v_n = 0$.

Demonstração. É claro que (b) $\Rightarrow$ (a). Mostremos que (a) $\Rightarrow$ (b). Pelo Teorema 1.17, podemos supor que $|\cdot|_1, |\cdot|_2, \ldots, |\cdot|_n$ satisfaçam a desigualdade triangular. Admitamos algum $v_i > 0$, digamos v_1, e seja $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu|_1 > 2^{\frac{v_2+\cdots+v_n}{v_1}} + \frac{1}{2}\cdot$ Aplicando o Teorema 4.1 para $\lambda_1 = \mu$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$ e $r = \frac{1}{2}$, obtém-se $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda - \mu|_1 < \frac{1}{2}$ e $|\lambda - 1|_i < \frac{1}{2}$ para $i = 2, \ldots, n$. Portanto, pela Proposição 1.16, $|\lambda|_1 > 2^{\frac{v_2+\cdots+v_n}{v_1}}$ e $|\lambda|_i > \frac{1}{2}$ para $i = 2, \ldots, n$, o que implica $(|\lambda|_1)^{v_1} > 2^{v_2+\cdots+v_n}$ e $(|\lambda|_2)^{v_2}\ldots(|\lambda|_n)^{v_n} \geq \frac{1}{2^{v_2}}\cdots\frac{1}{2^{v_n}} = \frac{1}{2^{v_2+\cdots+v_n}}\cdot$ Consequentemente,

$$(|\lambda|_1)^{v_1}\,(|\lambda|_2)^{v_2}\ldots(|\lambda|_n)^{v_n} > 1.$$

Exercício

4.1. Sejam $p_1, \ldots, p_l \geq 1$ primos dois a dois distintos, $m_1, \ldots, m_l \geq 1$ inteiros e $q_1, \ldots, q_l \in \mathbb{Q}$. Prove que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|q - q_i|_{p_i} < \frac{1}{p_i^{m_i}} \quad \text{para} \quad i = 1.\ldots, l.$$

§5. O completamento de um corpo valorizado

Neste parágrafo mostraremos que todo corpo valorizado admite um completamento, essencialmente único. Mas antes vejamos dois exemplos.

Exemplo 5.1. $(\mathbb{Q}, |\cdot|_5)$ não é completo.

Com efeito, vimos na introdução que existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em $\mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{cases} \lambda_{n+1} \equiv \lambda_n \pmod{5^n} \text{ e} \\ \lambda_n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5^n} \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Como $|\lambda_{n+1} - \lambda_n|_5 \leq \dfrac{1}{5^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, segue da Proposição 3.11 que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{Q}, |\cdot|_5)$. Admitamos que exista $\lambda \in \mathbb{Q}$ de modo que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$ por $\tau_{|\cdot|_5}$. Então, como $|\lambda_n^2 + 1|_5 \leq \dfrac{1}{5^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, conclui-se que

$$\lambda^2 + 1 = \lim_{n\to\infty} (\lambda_n^2 + 1) = 0,$$

o que não pode ocorrer. Portanto, $(\mathbb{Q}, |\cdot|_5)$ não é completo.

Exemplo 5.2. Seja $|\cdot|$ a valorização trivial em $\mathbb{K}$. Então $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo.

Realmente, seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n - \lambda_m| < 1$ para todo $n \geq m$, o que implica $\lambda_n = \lambda_m$ para todo $n \geq m$. Logo, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para λ_m por $\tau_{|\cdot|}$.

No teorema a seguir, admitiremos que a valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ satisfaça a desigualdade triangular (Teorema 1.17).

Teorema 5.3. *Seja $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ um corpo valorizado. Então existem um corpo valorizado completo $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ e um homomorfismo injetor $\varphi\colon \mathbb{K} \to \widehat{\mathbb{K}}$ de modo que $||\varphi(\lambda)|| = |\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varphi(\mathbb{K})$ é $\tau_{||\cdot||}$-denso em $\widehat{\mathbb{K}}$. Além disso, se $(L, |||\cdot|||)$ é um corpo valorizado completo e $\psi\colon \mathbb{K} \to L$ é um homomorfismo* *injetor tal que* $|||\psi(\lambda)||| = |\lambda|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $\psi(\mathbb{K})$ *é* $\tau_{|||\cdot|||}$*-denso em* L*, então existe um único isomorfismo* $h\colon \widehat{\mathbb{K}} \to L$ *tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathbb{K}} & \xrightarrow{h} & L \\ \varphi \nwarrow & & \nearrow \psi \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

é comutativo e $|||h(z)||| = ||z||$ *para todo* $z \in \widehat{\mathbb{K}}$*.*

Demonstração. Consideremos o conjunto A de todas as sequências de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ munido das operações

$$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

e

$$(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Como $|(\lambda_n + \mu_n) - (\lambda_m + \mu_m)| \leq |\lambda_n - \lambda_m| + |\mu_n - \mu_m|$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, segue que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} + (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. E, como toda sequência de Cauchy é limitada, resulta de

$$\begin{aligned} |\lambda_n\mu_n - \lambda_m\mu_m| &= |\lambda_n\mu_n - \lambda_n\mu_m + \lambda_n\mu_m - \lambda_m\mu_m| \\ &\leq |\lambda_n|\,|\mu_n - \mu_m| + |\mu_m|\,|\lambda_n - \lambda_m| \quad (n, m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. É fácil ver que $(A, +, \cdot\,)$ é um anel comutativo com elemento unidade $(1, 1, \ldots, 1, \ldots)$. Seja I o conjunto de todas as sequências de elementos de $\mathbb{K}$ que convergem para 0, o qual é claramente um ideal de A.

Afirmação 1. I é um ideal maximal de A.

Com efeito, seja J um ideal de A tal que $I \subset J \subset A$ e $I \neq J$, e mostremos que $J = A$. Inicialmente, observemos que $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $\tau_{|\cdot|_\infty}$-convergente em $\mathbb{R}$ para qualquer $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Realmente, pela Proposição 1.16, $|\,|\lambda_n| - |\lambda_m|\,|_\infty \leq |\lambda_n - \lambda_m|$ para $n, m \in \mathbb{N}$, e então $(|\lambda_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, |\cdot|_\infty)$, que é completo. Agora, seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J\backslash I$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} |\mu_n| = \beta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $|\mu_n| \geq \dfrac{\beta}{2}$ para todo

$n \geq n_0$. Vejamos que a sequência

$$(0, 0, \dots, 0, \underbrace{\mu_{n_0}^{-1},}_{n_0-\text{ésima posição}} \mu_{n_0+1}^{-1}, \dots)$$

pertence a A. Realmente,

$$\left|\mu_n^{-1} - \mu_m^{-1}\right| = \frac{|\mu_n - \mu_m|}{|\mu_n|\,|\mu_m|} \leq \frac{4}{\beta^2}\,|\mu_n - \mu_m|$$

para quaisquer $n, m \geq n_0$. Logo, como J é um ideal de A,

$$\begin{aligned}
&(0, \dots, 0, \dots, 0, \underbrace{1,}_{n_0-\text{ésima posição}} 1, 1, \dots) \\
&= (0, \dots, 0, \dots, 0, \underbrace{\mu_{n_0}^{-1},}_{n_0-\text{ésima posição}} \mu_{n_0+1}^{-1}, \dots)\cdot \\
&\cdot (\mu_0, \dots, \mu_{n_0-1}, \mu_{n_0}, \mu_{n_0+1}, \dots)
\end{aligned}$$

pertence a J, e daí resulta que

$$\begin{aligned}
&(1, 1, \dots, 1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \\
&= (0, 0, \dots, 0, \underbrace{1,}_{n_0-\text{ésima posição}} 1, \dots, 1, \dots) \\
&+ (1, 1, \dots, 1, \underbrace{0,}_{n_0-\text{ésima posição}} \dots, 0, \dots)
\end{aligned}$$

pertence a J. Consequentemente, $J = A$, provando a Afirmação 1.

Portanto, o anel quociente $\widehat{\mathbb{K}} = A/I$ é um corpo. Para cada $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$, designemos sua classe de equivalência (módulo I) por $\overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}}$. Para $z \in \widehat{\mathbb{K}}$ arbitrário, definamos $||z|| = \lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n|$, onde $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}}$. Mostremos que $||\cdot||$ está bem definida. Realmente, se $\overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}} = \overline{(\lambda'_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, a sequência $(\lambda_n - \lambda'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$ e da relação $|\,|\lambda_n| - |\lambda'_n|\,|_\infty \leq |\lambda_n - \lambda'_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Proposição 1.16) segue que $\lim\limits_{n\to\infty}(|\lambda_n| - |\lambda'_n|) = 0$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \lim_{n\to\infty}(|\lambda_n| - |\lambda'_n|) + \lim_{n\to\infty} |\lambda'_n| = \lim_{n\to\infty} |\lambda'_n|.$$

Afirmamos que a aplicação

$$||\cdot||\colon \widehat{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

é uma valorização em $\widehat{\mathbb{K}}$. Realmente, é claro que $||z|| \geq 0$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{K}}$ e que $||0|| = 0$. E, se $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \widehat{\mathbb{K}}$ e $||z|| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$, então $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$; logo, $z = 0$. Sejam $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ e $w = \overline{(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ elementos arbitrários de $\widehat{\mathbb{K}}$. Então é claro que $||zw|| = ||z||\,||w||$. Além disso, como $z + w = \overline{(\lambda_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ e $|\lambda_n + \mu_n| \leq |\lambda_n| + |\mu_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, conclui-se que

$$||z + w|| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n + \mu_n| \leq \lim_{n\to\infty} |\lambda_n| + \lim_{n\to\infty} |\mu_n| = ||z|| + ||w||.$$

Definamos $\varphi\colon \mathbb{K} \to \widehat{\mathbb{K}}$ por $\varphi(\lambda) = \overline{(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda, \ldots)}$. Então φ é um homomorfismo injetor (logo, $\varphi(\mathbb{K})$ é um subcorpo de $\widehat{\mathbb{K}}$ isomorfo a $\mathbb{K}$) tal que $||\varphi(\lambda)|| = |\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Afirmação 2. $\varphi(\mathbb{K})$ é $\tau_{||\cdot||}$-denso em $\widehat{\mathbb{K}}$.

De fato, sejam $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \widehat{\mathbb{K}}$ e $r > 0$ arbitrários. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n - \lambda_m| \leq r$ para todo $n \geq m$. Logo,

$$||z - \varphi(\lambda_m)|| = \lim_{n\to\infty} |\lambda_n - \lambda_m| \leq r,$$

provando a Afirmação 2.

Afirmação 3. $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ é completo.

Com efeito, seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$. Pela Afirmação 2, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que $||z_n - \varphi(\lambda_n)|| \leq \dfrac{1}{n+1}\cdot$ Como

$$\begin{aligned} |\lambda_n - \lambda_m| &= ||\varphi(\lambda_n) - \varphi(\lambda_m)|| \leq ||\varphi(\lambda_n) - z_n|| + ||z_n - z_m|| + ||z_m - \varphi(\lambda_m)|| \\ &\leq \frac{1}{n+1} + ||z_n - z_m|| + \frac{1}{m+1} \end{aligned}$$

para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$. Seja $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \widehat{\mathbb{K}}$. Então $\lim_{n\to\infty} \varphi(\lambda_n) = z$ e da relação

$$||z_n - z|| \leq ||z_n - \varphi(\lambda_n)|| + ||\varphi(\lambda_n) - z|| \leq \frac{1}{n+1} + ||\varphi(\lambda_n) - z|| \ (n \in \mathbb{N})$$

segue que $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, provando a Afirmação 3.

Assim, a primeira parte da demonstração está concluída. Passemos à segunda parte. Sejam então $(L, |||\cdot|||)$ e ψ como no enunciado do teorema. Então a aplicação $h_1\colon \varphi(\mathbb{K}) \to L$, dada por $h_1(\varphi(\lambda)) = \psi(\lambda)$ para $\lambda \in \mathbb{K}$, é uniformemente contínua, pois

$$|||h_1(\varphi(\lambda)) - h_1(\varphi(\mu))||| = |||\psi(\lambda) - \psi(\mu)||| = |\lambda - \mu| = ||\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)||$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Como $(L, |||\cdot|||)$ é completo e $\varphi(\mathbb{K})$ é $\tau_{||\cdot||}$-denso em $\widehat{\mathbb{K}}$, existe uma única aplicação uniformemente contínua $h\colon \widehat{\mathbb{K}} \to L$ tal que $h|_{\varphi(\mathbb{K})} = h_1$. Logo, $h \circ \varphi = \psi$. Seja $z \in \widehat{\mathbb{K}}$ arbitrário. Pela Afirmação 2, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tal que $z = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\lambda_n)$, o que implica

$$\begin{aligned} |||h(z)||| &= \lim_{n\to\infty} |||h(\varphi(\lambda_n))||| = \lim_{n\to\infty} |||h_1(\varphi(\lambda_n))||| = \lim_{n\to\infty} |||\psi(\lambda_n)||| \\ &= \lim_{n\to\infty} ||\varphi(\lambda_n)|| = ||z||. \end{aligned}$$

Além disso, também é fácil ver que h é um homomorfismo. Mostremos que h é um isomorfismo. Realmente, seja $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \widehat{\mathbb{K}}$ tal que $h(z) = 0$. Então $z = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\lambda_n)$, $|\lambda_n| = |||\psi(\lambda_n)|||$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \psi(\lambda_n) = \lim_{n\to\infty} h(\varphi(\lambda_n)) = h(z) = 0.$$

Consequentemente, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I$, e $z = 0$. Portanto, h é injetor. Agora, seja $w \in L$ arbitrário. Como, por hipótese, $\psi(\mathbb{K})$ é $\tau_{|||\cdot|||}$-denso em L, existe uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tal que $w = \lim\limits_{n\to\infty} \psi(\mu_n)$. Por outro lado, como

$$||\varphi(\mu_n) - \varphi(\mu_m)|| = |||\psi(\mu_n) - \psi(\mu_m)||| \text{ para quaisquer } n, m \in \mathbb{N},$$

segue que $(\varphi(\mu_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$, o qual é completo. Logo, existe $z \in \widehat{\mathbb{K}}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\mu_n) = z$. Portanto,

$$h(z) = h\left(\lim_{n\to\infty} \varphi(\mu_n)\right) = \lim_{n\to\infty} h(\varphi(\mu_n)) = \lim_{n\to\infty} \psi(\mu_n) = w.$$

Assim, h é sobrejetor.

Finalmente, seja $\widetilde{h}\colon \widehat{\mathbb{K}} \to L$ uma aplicação como no enunciado do teorema. Como $\widetilde{h}\colon \widehat{\mathbb{K}} \to L$ é contínua e $\widetilde{h}|_{\varphi(\mathbb{K})} = h_1$, então $\widetilde{h} = h$, provando a unicidade e concluindo a demonstração.

Podemos resumir o que acabamos de ver dizendo que $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ é um corpo valorizado completo contendo $\mathbb{K}$ como subcorpo, densamente, e cuja valorização estende a de $\mathbb{K}$; além disso, $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ é essencialmente único.

Definição 5.4. Nas condições do Teorema 5.3, diz-se que $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ é o *completamento* de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Observação 5.5. Se $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um corpo não arquimediano, $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ também o é.

De fato, sejam $z = \overline{(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}}$, $w = \overline{(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in \widehat{\mathbb{K}}$. Como $z + w = \overline{(\lambda_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}}$ e $|\lambda_n + \mu_n| \leq \max\{|\lambda_n|, |\mu_n|\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtém-se $||z+w|| \leq \max\{||z||, ||w||\}$. Portanto, $||\cdot||$ é não arquimediana.

Exemplo 5.6. O completamento de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ é dito o *corpo dos números p-ádicos* e denotado por $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$.

A notação usada para designar a valorização em $\mathbb{Q}_p$ é justificada pela proposição a seguir.

Proposição 5.7. *Se* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *é um corpo não arquimediano, então*

$$\big\{|\lambda|; \lambda \in \mathbb{K}\big\} = \big\{||z||; z \in \widehat{\mathbb{K}}\big\}.$$

Demonstração. É claro que $\{|\lambda|; \lambda \in \mathbb{K}\} \subset \{||z||; z \in \widehat{\mathbb{K}}\}$. Reciprocamente, seja $z \in \widehat{\mathbb{K}}$, $z \neq 0$. Então existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $||\lambda - z|| < ||z||$, pois $\mathbb{K}$ é $\tau_{||\cdot||}$-denso em $\widehat{\mathbb{K}}$. Logo, pelo Corolário 3.6, $||z|| = ||\lambda||$. Mas, como $||\lambda|| = |\lambda|$, vem $||z|| = |\lambda|$.

Exemplo 5.8. $\{|\mu|_p;\, \mu \in \mathbb{Q}_p\} = \{p^n; n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}$.

Proposição 5.9. *Seja* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em um corpo não arquimediano completo* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$*. Para que a série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ *convirja, é necessário e suficiente que* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$*.*

Demonstração. A necessidade é clara, sendo válida para qualquer corpo valorizado. Provemos então a suficiência. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $\mu_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k$.

Como $\mu_{n+1} - \mu_n = \lambda_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a hipótese e a Proposição 3.11 garantem que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Logo, como $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo, a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ converge.

Exemplo 5.10. Fixemos um natural primo p e seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de inteiros, com $0 \leq a_n \leq p-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Q}_p$.

De fato, como $|a_n p^n|_p \leq \dfrac{1}{p^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n p^n = 0$, e a afirmação segue da Proposição 5.9. Seja

$$\mathbb{Z}_p = \{\lambda \in \mathbb{Q}_p\,;\, |\lambda|_p \leq 1\}.$$

Como $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k p^k \in \mathbb{Z}_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e como $\mathbb{Z}_p$ é $\tau_{|\cdot|_p}$-fechado em $\mathbb{Q}_p$, conclui-se que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$. Em particular, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (p-1)p^n = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots \in \mathbb{Z}_p$. Notemos que, como

$$(p-1) + (p-1)p + \cdots + (p-1)p^n = (p-1)(1 + \cdots + p^n) = (p-1)\,\frac{1-p^{n+1}}{1-p}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (p-1)p^n = -1$.

Definição 5.11. Seja $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ um corpo não arquimediano, com $|\cdot|$ não trivial. Então é fácil ver que $A = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq 1\}$ é um anel, dito o *anel da valorização*, e que $M = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| < 1\}$ é um ideal não trivial e próprio de A, dito o *ideal da valorização*.

Observação 5.12. M é o único ideal maximal de A. De fato, se I é um ideal próprio de A, então $I \subset M$. Realmente, se existisse $\lambda \in I$ tal que $\lambda \notin M$, então $|\lambda| = 1$, o que implicaria $I = A$.

Exemplo 5.13. No caso em que $(\mathbb{K}, |\cdot|) = (\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$, tem-se $A = \mathbb{Z}_p$ e $M = p\mathbb{Z}_p$.

Proposição 5.14. *Sejam* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *como na* Definição 5.11 *e* $(\widehat{\mathbb{K}}, ||\cdot||)$ *o seu completamento. Sejam* $A = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| \leq 1\}$, $M = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| < 1\}$, $\widehat{A} = \{z \in \widehat{\mathbb{K}}; ||z|| \leq 1\}$ *e* $\widehat{M} = \{z \in \widehat{\mathbb{K}}; ||z|| < 1\}$. *Então os corpos* A/M *e* $\widehat{A}/\widehat{M}$ *são isomorfos.*

Demonstração. Definamos $\psi\colon A/M \to \widehat{A}/\widehat{M}$ por $\psi(\lambda + M) = \lambda + \widehat{M}$ para $\lambda \in A$. A aplicação ψ está bem definida pois, se $\lambda, \mu \in A$ e $\lambda + M = \mu + M$, $||\lambda - \mu|| = |\lambda - \mu| < 1$, isto é, $\lambda + \widehat{M} = \mu + \widehat{M}$. Afirmamos que ψ é um isomorfismo. De fato, é claro que ψ é um homomorfismo. Se $\lambda \in A$ e $\psi(\lambda + M) = \widehat{M}$, $\lambda \in \widehat{M}$; logo, $\lambda \in M$, e $\lambda + M = M$. Portanto, ψ é injetor. Se $z \in \widehat{A}$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $||z - \lambda|| < 1$, pela $\tau_{||\cdot||}$-densidade de $\mathbb{K}$ em $\widehat{\mathbb{K}}$, o que implica $|\lambda| = ||\lambda|| \leq \max\{||z - \lambda||, ||z||\} \leq 1$ (ou seja, $\lambda \in A$). Logo, $\psi(\lambda + M) = \lambda + \widehat{M} = z + \widehat{M}$, e ψ é sobrejetor.

Exercícios

5.1. Sejam $p, q \geq 1$ primos distintos. Prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ converge em $\mathbb{Q}_p$ para $\dfrac{1}{1-p}$ e diverge em $\mathbb{Q}_q$.

5.2. Prove a existência do completamento de um corpo valorizado $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ (cuja valorização satisfaça a desigualdade triangular), usando o argumento indicado abaixo.

Sejam $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$ a métrica proveniente da valorização $|\,.\,|$ e $(X, \hat{d})$ o completamento do espaço métrico $(\mathbb{K}, d)$. Para $z \in X$, defina $||z|| = \hat{d}(z, 0)$. Para $z, w \in X$ arbitrários, existem sequências $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}$ tais que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para z e $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para w.

(a) Prove que $(\lambda_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\lambda_n \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $(X, \hat{d})$. Como $(X, \hat{d})$ é completo, $(\lambda_n + \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento de X, denotado por $z + w$, e $(\lambda_n \mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento de X, denotado por zw.

(b) Prove que as aplicações

$$(z, w) \in X \times X \mapsto z + w \in X \quad \text{e} \quad (z, w) \in X \times X \mapsto zw \in X$$

estão bem definidas e tornam X um anel comutativo com unidade.

(c) Seja $z \in X$, $z \neq 0$ (então $||z|| > 0$) e seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{K}$ convergindo para z. Prove que $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = ||z||$ e, por consequência, podemos admitir que $\lambda_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) Prove que a sequência $(\lambda_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um elemento de X, denotado por z^{-1}. Prove que z^{-1} independe da sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida em (c).

(e) Conclua que X é um corpo contendo $\mathbb{K}$ como subcorpo.

(f) Finalmente, prove que $||\,.\,||$ é uma valorização em X satisfazendo a desigualdade triangular e que estende $|\,.\,|$.

§6. Corpos não arquimedianos munidos de valorizações discretas e corpos locais

Neste parágrafo enfocaremos fatos básicos sobre corpos não arquimedianos munidos de valorizações discretas e estabeleceremos uma condição necessária e suficiente para que um corpo não arquimediano completo seja localmente compacto (ou seja, local).

Proposição 6.1. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo não arquimediano, com* $|\cdot|$ *não trivial. Para que a valorização* $|\cdot|$ *seja discreta, é necessário e suficiente que* M *seja um ideal principal de* A.

Demonstração. Suponhamos $|\cdot|$ discreta. Pela Proposição 1.9(a), existe $\pi \in M\backslash\{0\}$ tal que $|\pi| = \sup\{|\lambda|; \lambda \in M\backslash\{0\}\}$. Afirmamos que $M = \pi A$. De fato, é claro que $\pi A \subset M$. Por outro lado, se $\lambda \in M$, $|\lambda| \leq |\pi|$, e então $\lambda = \pi(\pi^{-1}\lambda) \in \pi A$. Portanto, $M = \pi A$, mostrando que M é um ideal principal de A.

Reciprocamente, suponhamos $M = \pi A$ para algum $\pi \in M\backslash\{0\}$. Vamos verificar que $|\pi|$ é um gerador do grupo $\{|\lambda|; \lambda \in \mathbb{K}^*\}$. De fato, seja $\lambda \in \mathbb{K}^*$ arbitrário. Se $|\lambda| < 1$, a igualdade $M = \pi A$ fornece $|\lambda| \leq |\pi|$. Se $|\lambda| = |\pi|$, nada mais há a fazer. Admitamos $|\lambda| < |\pi|$. Como $\lim_{k\to\infty} |\pi|^k = 0$ ($|\pi| < 1$), existe $k_0 \geq 2$ tal que $|\pi|^k \leq |\lambda|$ para todo $k \geq k_0$. Seja ℓ o menor inteiro $k \geq 2$ tal que $|\pi|^k \leq |\lambda|$. Como $|\pi|^{\ell-1} > |\lambda|$, $\left|\dfrac{\lambda}{\pi^{\ell-1}}\right| < 1$, e então $\left|\dfrac{\lambda}{\pi^{\ell-1}}\right| \leq |\pi|$. Logo, $|\lambda| \leq |\pi|^\ell$, e $|\lambda| = |\pi|^\ell$. E, se $|\lambda| > 1$, o que acabamos de ver garante a existência de um inteiro $s \geq 2$ tal que $\left|\dfrac{1}{\lambda}\right| = |\pi|^s$; portanto, $|\lambda| = |\pi|^{-s}$. Assim, acabamos de verificar que $|\pi|$ é um gerador do grupo $\{|\lambda|; \lambda \in \mathbb{K}^*\}$, mostrando que $|\cdot|$ é discreta.

Proposição 6.2. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo não arquimediano, com* $|\cdot|$ *não trivial e discreta, e seja* $\pi \in M$ *tal que* $M = \pi A$. *Se* $I \neq \{0\}$ *é um ideal próprio de* A*, existe um inteiro* $n \geq 1$ *tal que* $I = \pi^n A$.

Demonstração. Fixemos $\mu \in I \backslash \{0\}$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} \pi^k = 0$, existe um inteiro $s \geq 1$ tal que $|\pi|^s \leq |\mu|$. Logo, $\pi^s = \mu \dfrac{\pi^s}{\mu} \in IA \subset I$. Seja n o menor inteiro $s \geq 1$ tal que $\pi^s \in I$. Afirmamos que $I = \pi^n A$. Realmente, como I é um ideal de A, $\pi^n A \subset I$. Por outro lado, seja $\lambda \in I\backslash\{0\}$ arbitrário, e admitamos que $\left|\dfrac{\pi^n}{\lambda}\right| < 1$. Então existe $\xi \in A$ tal que $\dfrac{\pi^n}{\lambda} = \pi\xi$, o que implica $\pi^{n-1} = \lambda\xi \in IA \subset I$, contrariando a escolha de n. Portanto, $\left|\dfrac{\lambda}{\pi^n}\right| \leq 1$, o que fornece $\lambda = \pi^n \dfrac{\lambda}{\pi^n} \in \pi^n A$. Consequentemente, $I = \pi^n A$, como queríamos provar.

Corolário 6.3. *Sejam* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *e* π *como na* Proposição 6.2. *Então* $(\pi^n A)_{n\geq 1}$ *é um sistema fundamental de* $\tau_{|\cdot|}$*-vizinhanças de 0 em* A *formado por ideais de* A*.*

Demonstração. Cada $\pi^n A$ é uma $\tau_{|\cdot|}$-vizinhança de 0 em A, pois $\pi^n A \supset B(0, |\pi|^n)$. E, se $0 < r \leq 1$, $B(0,r) = \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| < r\}$ é um ideal próprio de A, com $B(0,r) \neq \{0\}$; logo, pela Proposição 6.2, $B(0,r) = \pi^n A$ para algum $n \geq 1$. Isto conclui a demonstração.

Definição 6.4. Sejam $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ um corpo não arquimediano, com $|\cdot|$ não trivial, A o anel da valorização e M o ideal da valorização. Diz-se que $\mathcal{A} \subset A$ é um *conjunto de representantes* para A/M se para cada $\lambda \in A$ existe um único $\mu \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda + M = \mu + M$.

Exemplo 6.5. Para cada primo $p \geq 2$, $\{0, \ldots, p-1\}$ é um conjunto de representantes para $\mathbb{Z}_p/M_p$, onde $M_p = p\,\mathbb{Z}_p$.

Com efeito, seja $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ arbitrário. Como $B(\lambda, 1) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$, existe $\mu \in \mathbb{Q}$ tal que $|\mu|_p \leq 1$ e $\lambda + M_p = \mu + M_q$. Mostremos que existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu + M_p = \ell + M_p$. Como a afirmação é óbvia se $\mu = 0$, admitamos $\mu \neq 0$ e escrevamos $\mu = p^n \dfrac{a}{b}$, onde $n \geq 0$ e $\mathrm{mdc}(a,p) = \mathrm{mdc}(b,p) = 1$. Mas, como $\mu + M_p = \ell + M_p$ equivale a

$$\left|p^n \frac{a}{b} - \ell\right|_p = \frac{|p^n a - b\ell|_p}{|b|_p} = |p^n a - b\ell|_p < 1,$$

devemos ter $b\ell \equiv p^n a \pmod p$. Ora, se $n \geq 1$, $p^n a \equiv 0 \pmod p$, e basta tomar $\ell = 0$. Por outro lado, se $n = 0$, a equação $bX \equiv a \pmod p$ admite uma solução inteira ℓ, pois $\mathrm{mdc}(b, p) = 1/a$ ([6], Teorema 25). Logo, a existência de $\ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\mu + M_p = \ell + M_p$ está assegurada. Finalmente, seja $0 \leq r \leq p-1$ o resto da divisão euclidiana de ℓ por p. Então, como $\ell + M_p = r + M_p$, obtém-se $\lambda + M_p = r + M_p$. E, como $u + M_p \neq v + M_p$ para quaisquer $u, v \in \{0, \ldots, p-1\}$, $u \neq v$, a asserção está justificada.

Proposição 6.6. *Seja $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ um corpo não arquimediano completo, com $|\cdot|$ não trivial e discreta. Seja $\mathcal{A} \subset A$ um conjunto de representantes para A/M e escrevamos $M = \pi A$. Então temos:*

(a) *para toda sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n \in A$;*

(b) *para cada $\lambda \in A$ existe uma única sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ tal que $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$.*

Demonstração. (a): Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}$. Como $|a_n \pi^n| \leq |\pi|^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{n\to\infty} |\pi|^n = 0$, segue da Proposição 5.9 que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n$ converge. E, como A é $\tau_{|\cdot|}$-fechado em $\mathbb{K}$ e $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \pi^k \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \pi^n \in A$.

(b): Seja $\lambda \in A$ arbitrário. Por hipótese, existe um único $a_0 \in \mathcal{A}$ tal que $\lambda - a_0 \in M$. Logo, existe $\mu_1 \in A$ tal que $\lambda - a_0 = \pi \mu_1$. Por hipótese, existe um único $a_1 \in \mathcal{A}$ tal que $\mu_1 - a_1 \in M$. Logo, existe $\mu_2 \in A$ tal que $\mu_1 - a_1 = \pi \mu_2$. Portanto,

$$\lambda = a_0 + \pi \mu_1 = a_0 + \pi(a_1 + \pi \mu_2) = a_0 + \pi a_1 + \pi^2 \mu_2 .$$

Continuando o processo, obtemos uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}$ e uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em A de modo que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lambda = a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n \pi^n + \mu_{n+1}\pi^{n+1}$. Daí resulta que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$|\lambda - (a_0 + a_1\pi + \cdots + a_n\pi^n)| = |\mu_{n+1}|\,|\pi|^{n+1} \leq |\pi|^{n+1},$$

o que fornece $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n$. Finalmente, como a unicidade da sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é clara, a demonstração está concluída.

O desenvolvimento $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\pi^n$ é dito o *desenvolvimento de Hensel* de λ.

Exemplo 6.7. Seja p um inteiro primo ≥ 2.

Já havíamos observado, no Exemplo 5.10, que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$ para toda sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de inteiros compreendidos entre 0 e $p-1$. Por outro lado, como $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ é um conjunto de representantes para $\mathbb{Z}_p/M_p$ (Exemplo 6.5), a Proposição 6.6(b) assegura que o desenvolvimento de Hensel de cada $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ é da forma $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n$, onde $0 \leq a_n \leq p-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, seja $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ tal que $|\lambda|_p > 1$. Então $|\lambda|_p = p^s$ para algum inteiro $s \geq 1$. Pelo que acabamos de ver, existe uma única sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de inteiros entre 0 e $p-1$ tal que $p^s\lambda = a_0 + a_1 p + \cdots + a_{s-1}p^{s-1} + a_s p^s + a_{s+1}p^{s+1} + \ldots$. Portanto,

$$\lambda = \frac{a_0}{p^s} + \frac{a_1}{p^{s-1}} + \cdots + \frac{a_{s-1}}{p} + a_s + a_{s+1}p + a_{s+2}p^2 + \ldots .$$

Observação 6.8. Para todo inteiro primo $p \geq 2$, $\mathbb{Z}_p/M_p$ é isomorfo ao corpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{0, 1, \ldots, p-1\}$.

De fato, consideremos o homomorfismo sobrejetor $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$ dado por $\varphi(\lambda) = a_0$ se $\lambda = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in \mathbb{Z}_p$. Como $\mathrm{Ker}(\varphi) = p\mathbb{Z}_p = M_p$, o teorema do isomorfismo garante que $\mathbb{Z}_p/M_p$ é isomorfo a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Observação 6.9. Utilizando o exercício enunciado nas páginas 28 e 29 de [1], o qual pressupõe o que acabamos de ver, conclui-se que $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ não é completo para todo primo $p \geq 2$.

Definição 6.10. Seja $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ um corpo não arquimediano, com $|\cdot|$ não trivial. Diz-se que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é *local* quando A é $\tau_{|\cdot|}$-compacto.

Proposição 6.11. *Se $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um corpo local, então $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo.*

Demonstração. Seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Como $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $\tau_{|\cdot|}$-limitada e $|\cdot|$ é não trivial, existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tal que $|\lambda_n| \le |\lambda|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, como A é $\tau_{|\cdot|}$-compacto, existe uma subsequência $(\lambda n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(\lambda n_k\, \lambda^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Consequentemente, $(\lambda n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, e daí resulta que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Logo, $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo.

Teorema 6.12. *Para um corpo não arquimediano completo* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$*, com* $|\cdot|$ *não trivial, as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *é local;*

(b) *a valorização* $|\cdot|$ *é discreta e o corpo* A/M *é finito.*

Demonstração. Inicialmente, provemos que (b) implica (a). Com efeito, seja B um subconjunto infinito de A e mostremos que B possui um ponto de acumulação. Seja q o número de elementos de A/M e escrevamos $M = \pi A$ (Proposição 6.1). Evidentemente, $M^n = \pi^n A$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Vamos mostrar que existe uma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em B, de elementos dois a dois distintos, tal que $B_n = B \cap (b_n + M^n)$ é infinito para todo $n \in \mathbb{N}^*$ e $B_n \supset B_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Com efeito, como B é infinito, existe $\lambda \in A$ tal que $B \cap (\lambda + M)$ é infinito. Assim, tomando $b_1 \in B \cap (\lambda + M)$, vem $B \cap (b_1 + M) = B \cap (\lambda + M)$, e a afirmação é válida para $n = 1$. Seja $k \in \mathbb{N}^*$ e suponhamos construídos $b_1, \ldots, b_k \in B$ de modo que as condições descritas acima sejam satisfeitas. Afirmamos que A/M é isomorfo a $M^k\big/M^{k+1}$. Realmente, consideremos o homomorfismo sobrejetor $\varphi\colon \lambda \in A \mapsto \lambda\pi^k + M^{k+1} \in M^k\big/M^{k+1}$. Então $\mathrm{Ker}(\varphi) = M$. De fato, se $\lambda \in A$ e $\varphi(\lambda) = M^{k+1}$, $\lambda\pi^k \in M^{k+1} = \pi^{k+1}A$; assim, $\lambda\pi^k = \mu\pi^{k+1}$ para algum $\mu \in A$, isto é, $\lambda = \mu\pi \in M$. Como é claro que $M \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$, temos $\mathrm{Ker}(\varphi) = M$, e o teorema do isomorfismo garante que A/M é isomorfo a $M^k\big/M^{k+1}$. Portanto, existem $\mu_1, \ldots, \mu_q \in M^k$ tais que $M^k = \big(\mu_1 + M^{k+1}\big) \cup \cdots \cup \big(\mu_q + M^{k+1}\big)$, sendo a união disjunta, o que fornece

$$\begin{aligned} B_k = B \cap (b_k + M^k) &= B \cap \Big[\big((b_k + \mu_1) + M^{k+1}\big) \cup \cdots \cup \big((b_k + \mu_q) + M^{k+1}\big)\Big] \\ &= \Big[B \cap \big((b_k + \mu_1) + M^{k+1}\big)\Big] \cup \cdots \cup \Big[B \cap \big((b_k + \mu_q) + M^{k+1}\big)\Big]. \end{aligned}$$

Como B_k é infinito, existe $1 \le j \le q$ tal que $B \cap \big((b_k + \mu_j) + M^{k+1}\big)$ é infinito. Ponhamos $B_{k+1} = B \cap \big((b_k + \mu_j) + M^{k+1}\big)$ e tomemos $b_{k+1} \in B_{k+1}$ tal que

$b_{k+1} \neq b_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Como $B_{k+1} \subset B_k$, a asserção é verdadeira para $n = k+1$. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário; como $b_{n+1} - b_n \in M^n = \pi^n A$, $|b_{n+1} - b_n| \leq |\pi|^n$. Logo, $\lim_{n\to\infty}(b_{n+1} - b_n) = 0$, e da Proposição 3.11 e do fato de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ ser completo segue que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ para o qual $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. Finalmente, como cada $b_n \in A$ e A é $\tau_{|.|}$-fechado em $\mathbb{K}$, concluímos que $\lambda \in A$. Assim, acabamos de mostrar que A é $\tau_{|.|}$-compacto, provando que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é local.

Provemos, agora, que (a) implica (b). Admitamos A/M infinito. Então existe uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A tal que $\lambda_n + M \neq \lambda_m + M$ sempre que $n \neq m$, o que fornece $|\lambda_n - \lambda_m| = 1$ sempre que $n \neq m$ e implica que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite subsequência convergente. Logo, A não é $\tau_{|.|}$-compacto. Por outro lado, admitamos que $|\cdot|$ não seja discreta. Então existe uma sequência $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{K}^*$ tal que $|\mu_n| < |\mu_{n+1}|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} |\mu_n| = 1$. Daí resulta que, para $m < n$, $|\mu_m - \mu_n| = \max\{|\mu_m|, |\mu_n|\} = |\mu_n|$ (Corolário 3.6). Portanto, analogamente ao que acabamos de ver, A não é $\tau_{|.|}$-compacto.

Isto conclui a demonstração do teorema.

Corolário 6.13. *$(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$ é um corpo local.*

Demonstração. Imediata a partir do Teorema 6.12, lembrando o Exemplo 5.8 e a Observação 6.8.

Exemplo 6.14. Para p um natural primo e $f(X_1, \ldots, X_m) \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_m]$, as seguintes condições são equivalentes:

(a) para todo inteiro $n \geq 1$ a equação $f(X_1, \ldots, X_m) \equiv 0 \pmod{p^n}$ tem solução em $\mathbb{Z}^m$;

(b) a equação $f(X_1, \ldots, X_m) = 0$ tem solução em $\big(\mathbb{Z}_p\big)^m$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existem $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)} \in \mathbb{Z}$ tais que $f\big(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\big) \equiv 0 \pmod{p^n}$; logo, $|f\big(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\big)|_p \leq \dfrac{1}{p^n}\cdot$ Consideremos a sequência $\Big(\big(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em $\big(\mathbb{Z}_p\big)^m$. Como $\big(\mathbb{Z}_p\big)^m$ é $\tau_{|\cdot|_p} \times \cdots \times \tau_{|\cdot|_p}$-compacto, existe uma subsequência $\Big(\big(x_1^{(n_k)}, \ldots, x_m^{(n_k)}\big)\Big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de $\Big(\big(x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergindo para $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in (\mathbb{Z}_p)^m$. Finalmente, da continuidade da função polinomial associada ao polinômio $f(X_1,\ldots,X_m)$ e do fato de que $|\big(x_1^{(n_k)},\ldots,x_m^{(n_k)}\big)|_p \leq \dfrac{1}{p^{n_k}}$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$ resulta que $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)=0$, provando (b).

(b) $\Rightarrow$ (a): Realmente, sejam $\mu_1,\ldots,\mu_m \in \mathbb{Z}_p$ tais que $f(\mu_1,\ldots,\mu_m)=0$ e fixemos $n \in \mathbb{N}^*$. Como o Exemplo 6.7 assegura que $\mathbb{Z}$ é $\tau_{|\cdot|_p}$-denso em $\mathbb{Z}_p$, existem $\ell_1^{(n)},\ldots,\ell_m^{(n)} \in \mathbb{Z}$ tais que $|\mu_1-\ell_1^{(n)}|_p \leq \dfrac{1}{p^n},\ldots,|\mu_m-\ell_m^{(n)}|_p \leq \dfrac{1}{p^n}$, o que implica $|f\big(\ell_1^{(n)},\ldots,\ell_m^{(n)}\big)|_p \leq \dfrac{1}{p^n}$ e permite concluir que $f(\ell_1^{(n)},\ldots,\ell_m^{(n)}) \equiv 0 \pmod{p^n}$. Portanto, a equação $f(X_1,\ldots,X_m)\equiv 0 \pmod{p^n}$ admite solução em $\mathbb{Z}^m$.

Exercícios

6.1. Prove a seguinte extensão do Exemplo 6.14:

Para p um natural primo e $f(X_1,\ldots,X_m) \in \mathbb{Z}_p[X_1,\ldots,X_m]$, as seguintes condições são equivalentes:

(a) para todo inteiro $n \geq 1$ existem $x_1^{(n)},\ldots,x_m^{(n)} \in \mathbb{Z}$ tais que

$$|f(x_1^{(n)},\ldots,x_m^{(n)})|_p \leq \frac{1}{p^n};$$

(b) a equação $f(X_1,\ldots,X_m)=0$ tem solução em $(\mathbb{Z}_p)^m$.

6.2. Nas condições da Proposição 6.6, suponha ainda que $0 \in \mathcal{A}$. Prove que todo $\lambda \in \mathbb{K}^*$ se expressa de modo único na forma

$$\lambda = \sum_{n=N}^{\infty} a_n \pi^n \quad (a_n \in \mathcal{A},\ \ a_N \neq 0),$$

para algum $N \in \mathbb{Z}$.

§7. O lema de Hensel

Neste parágrafo apresentaremos uma versão do lema de Hensel e algumas consequências da mesma.

Teorema 7.1. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo não arquimediano completo, com* $|\cdot|$ *não trivial, e seja* $f(X) \in A[X]$. *Suponhamos que exista* $\lambda_0 \in A$ *tal que* $|f(\lambda_0)| < |f'(\lambda_0)|^2$, *onde* $f'(X) \in A[X]$ *designa a derivada formal de* $f(X)$. *Então existe* $\lambda \in A$ *tal que* $f(\lambda) = 0$.

Demonstração. Obviamente, basta considerar o caso em que $f(\lambda_0) \neq 0$. Escrevamos $f(X) = \mu_0 + \mu_1 X + \cdots + \mu_m X^m$, onde $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_m \in A$ e $\mu_m \neq 0$; então $f'(X) = \mu_1 + 2\mu_2 X + \cdots + m\mu_m X^{m-1}$. Temos que

$$(*) \qquad \begin{aligned} f(X+Y) &= \mu_0 + \mu_1(X+Y) + \cdots + \mu_m(X+Y)^m \\ &= f(X) + f_1(X)Y + f_2(X)Y^2 + \ldots , \end{aligned}$$

onde cada $f_j(X) \in A[X]$ e $f_1(X) = f'(X)$, sendo X e Y indeterminadas independentes.

Como $|f(\lambda_0)| < |f'(\lambda_0)|^2 \leq |f'(\lambda_0)| = |f_1(\lambda_0)|$, então $\dfrac{f(\lambda_0)}{f_1(\lambda_0)} \in A$; logo, existe $a_0 \in A$ tal que $f(\lambda_0) + a_0\, f_1(\lambda_0) = 0$. Por (*),

$$\begin{aligned} f(\lambda_0 + a_0) &= f(\lambda_0) + f_1(\lambda_0)a_0 + f_2(\lambda_0)a_0^2 + f_3(\lambda_0)a_0^3 + \ldots \\ &= f_2(\lambda_0)a_0^2 + f_3(\lambda_0)a_0^3 + \ldots , \end{aligned}$$

o que fornece

$$|f(\lambda_0 + a_0)| \leq \max_{j\geq 2} |f_j(\lambda_0)|\, |a_0|^j \leq \max_{j \geq 2} |a_0|^j = |a_0|^2.$$

Por outro lado, $|a_0|^2 = \dfrac{|f(\lambda_0)|^2}{|f_1(\lambda_0)|^2} = \dfrac{|f(\lambda_0)|^2}{|f'(\lambda_0)|^2} < |f(\lambda_0)|$ (por hipótese); assim, $|f(\lambda_0 + a_0)| < |f(\lambda_0)|$. Além disso,

$$\begin{aligned} &|f_1(\lambda_0 + a_0) - f_1(\lambda_0)| = |f'(\lambda_0 + a_0) - f'(\lambda_0)| \\ &\leq |2\mu_2\, a_0| \leq |a_0| = \frac{|f(\lambda_0)|}{|f_1(\lambda_0)|} = \frac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|} < |f'(\lambda_0)| = |f_1(\lambda_0)|. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Corolário 3.6, $|f_1(\lambda_0 + a_0)| = |f_1(\lambda_0)|$. Ponhamos $\lambda_1 = \lambda_0 + a_0$. Se $f(\lambda_1) = 0$, a demonstração está concluída. Admitamos $f(\lambda_1) \neq 0$. Como

$$|f(\lambda_1)| < |f(\lambda_0)| < |f_1(\lambda_0)|^2 = |f_1(\lambda_1)|^2 \leq |f_1(\lambda_1)|,$$

$\dfrac{f(\lambda_1)}{f_1(\lambda_1)} \in A$, e então existe $a_1 \in A$ tal que $f(\lambda_1) + a_1 f_1(\lambda_1) = 0$. Raciocinando como acima, obtém-se $|f(\lambda_1 + a_1)| \leq |a_1|^2$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |a_1|^2 = \frac{|f(\lambda_1)|^2}{|f_1(\lambda_1)|^2} &= \frac{|f(\lambda_1)|^2}{|f_1(\lambda_0)|^2} < |f(\lambda_1)| \frac{|f(\lambda_0)|}{|f_1(\lambda_0)|^2} \\ &= |f(\lambda_1)| \frac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|^2} < |f(\lambda_1)|; \end{aligned}$$

assim, $|f(\lambda_1 + a_1)| < |f(\lambda_1)|$. Além disso,

$$|f_1(\lambda_1 + a_1) - f_1(\lambda_1)| \leq |a_1| = \frac{|f(\lambda_1)|}{|f_1(\lambda_1)|} < |f_1(\lambda_1)|,$$

e o Corolário 3.6 fornece $|f_1(\lambda_1 + a_1)| = |f_1(\lambda_1)|$. Ponhamos $\lambda_2 = \lambda_1 + a_1$. Já vimos que $|f(\lambda_2)| < |f(\lambda_1)| < |f(\lambda_0)|$ e $|f_1(\lambda_2)| = |f_1(\lambda_1)| = |f_1(\lambda_0)|$.

Continuando o processo, caso seja necessário, obtém-se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em A de tal maneira que sendo $\lambda_{n+1} = \lambda_n + a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, tem-se $|f(\lambda_{n+1})| \leq |a_n|^2 = \dfrac{|f(\lambda_n)|^2}{|f_1(\lambda_n)|^2}$, $|f(\lambda_{n+1})| < |f(\lambda_n)|$ e $|f_1(\lambda_n)| = |f_1(\lambda_0)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} |f(\lambda_n)|$. Como $|f(\lambda_{n+1})| \leq \dfrac{|f(\lambda_n)|^2}{|f_1(\lambda_n)|^2} = \dfrac{|f(\lambda_n)|^2}{|f'(\lambda_0)|^2}$ $(n \in \mathbb{N})$, se $\alpha > 0$ teríamos $1 \leq \dfrac{\alpha}{|f'(\lambda_0)|^2}$, e então $|f'(\lambda_0)|^2 \leq \alpha \leq |f(\lambda_0)|$, o que não ocorre. Logo, $\alpha = 0$, isto é, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda_n) = 0$. Agora, como

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| = |a_n| = \frac{|f(\lambda_n)|}{|f_1(\lambda_n)|} = \frac{|f(\lambda_n)|}{|f_1(\lambda_0)|}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, segue da Proposição 3.11 que $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Como, por hipótese, $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ para o qual $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Mas, como A é $\tau_{|\cdot|}$-fechado em $\mathbb{K}$, conclui-se que $\lambda \in A$. Finalmente, como $f(\lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\lambda_n)$, segue que $f(\lambda) = 0$.

Isto conclui a demonstração do teorema.

Corolário 7.2. *Nas condições do* Teorema 7.1, $|\lambda-\lambda_0| \le \dfrac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|}\cdot$ *Além disso, λ é a única raiz μ da equação $f(X)=0$ tal que* $|\mu-\lambda_0| \le \dfrac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|}\cdot$

Demonstração. Sendo a_n e λ_n como na demonstração do Teorema 7.1, tem-se

$$\begin{aligned}|\lambda_{n+1}-\lambda_0| &= |(\lambda_{n+1}-\lambda_n)+\cdots+(\lambda_1-\lambda_0)| = |a_n+\cdots+a_0| \le \max_{0\le k\le n}|a_k| \\ &= \max_{0\le k\le n}\frac{|f(\lambda_k)|}{|f_1(\lambda_k)|} = \max_{0\le k\le n}\frac{|f(\lambda_k)|}{|f'(\lambda_0)|} = \frac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|}\end{aligned}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, o que implica $|\lambda-\lambda_0| \le \dfrac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|}\cdot$

Agora, seja $\mu\in A$ tal que $f(\mu)=0$ e $|\mu-\lambda_0| \le \dfrac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|}$, e admitamos que $\theta=\mu-\lambda\ne 0$. Primeiramente,

$$|\theta| \le \max\big\{|\mu-\lambda_0|, |\lambda-\lambda_0|\big\} \le \frac{|f(\lambda_0)|}{|f'(\lambda_0)|} < |f'(\lambda_0)|.$$

Como $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$, $f_1(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(\lambda_n)$, o que implica $|f_1(\lambda)|=\lim\limits_{n\to\infty}|f_1(\lambda_n)|$ em virtude da Proposição 1.16. Mas, como $|f_1(\lambda_n)|=|f_1(\lambda_0)|$ para todo $n\in\mathbb{N}$, vem $|f_1(\lambda)|=|f_1(\lambda_0)|=|f'(\lambda_0)|$; logo, $|\theta|<|f_1(\lambda)|$. Por um argumento usado na demonstração do Teorema 7.1,

$$0=f(\mu)=f(\lambda+\theta)=f_1(\lambda)\theta+f_2(\lambda)\theta^2+f_3(\lambda)\theta^3+\dots\,.$$

Como, para $j\ge 2$, $|f_j(\lambda)\theta^j| = |f_j(\lambda)|\,|\theta|^j \le |\theta|^j \le |\theta|^2 < |\theta|\,|f_1(\lambda)|$, o Corolário 3.7 fornece $|f(\mu)|=|\theta\, f_1(\lambda)|>0$, isto é, $f(\mu)\ne 0$, o que é absurdo. Consequentemente, $\mu=\lambda$.

Antes de apresentar algumas aplicações do lema de Hensel, vamos introduzir a seguinte notação: para $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}_p$, escreveremos $\lambda\equiv\mu \pmod{p^n}$ se $|\lambda-\mu|_p \le \dfrac{1}{p^n}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$. Notemos que, se $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}$, recupera-se a noção clássica de congruência módulo p^n.

Corolário 7.3. *Seja $f(X)\in\mathbb{Z}_p[X]$ e suponhamos que exista $\lambda_0\in\mathbb{Z}_p$ tal que $f(\lambda_0)\equiv 0 \pmod p$ e $f'(\lambda_0)\not\equiv 0 \pmod p$. Então existe um único $\lambda\in\mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda\equiv\lambda_0 \pmod p$ e $f(\lambda)=0$.*

Demonstração. Como $|f(\lambda_0)|_p \leq \dfrac{1}{p}$ e $|f'(\lambda_0)|_p = 1$, temos $|f(\lambda_0)|_p < \big(|f'(\lambda_0)|_p\big)^2$. Pelo Teorema 7.1 e o Corolário 7.2, existe um único $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tal que $|\lambda - \lambda_0|_p \leq \dfrac{|f(\lambda_0)|_p}{|f'(\lambda_0)|_p} = |f(\lambda_0)|_p \leq \dfrac{1}{p}$ (isto é, tal que $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{p}$) e $f(\lambda) = 0$.

Exemplo 7.4. Consideremos $f(X) = X^2 - 6 \in \mathbb{Z}[X]$; então $f'(X) = 2X$. Como $f(1) \equiv 0 \pmod 5$ e $f'(1) = 2 \not\equiv 0 \pmod 5$, o Corolário 7.3 garante que existe um único $\lambda \in \mathbb{Z}_5$ tal que $\lambda \equiv 1 \pmod 5$ e $f(\lambda) = 0$ (isto é, $\lambda^2 = 6$). Obviamente, $\lambda \notin \mathbb{Q}$.

Corolário 7.5. *Seja $\mu \in \mathbb{Z}_2$ tal que $\mu \equiv 1 \pmod{2^3}$. Então existe um único $\lambda \in \mathbb{Z}_2$ tal que $\lambda \equiv 1 \pmod{2^2}$ e $\lambda^2 = \mu$.*

Demonstração. Seja $f(X) = X^2 - \mu \in \mathbb{Z}_2[X]$; então $f'(X) = 2X$. Como $|f(1)|_2 = |1-\mu|_2 \leq \dfrac{1}{2^3}$ e $|f'(1)|_2 = |2|_2 = \dfrac{1}{2}$, $|f(1)|_2 < \big(|f'(1)|_2\big)^2$ e $\dfrac{|f(1)|_2}{|f'(1)|_2} \leq \dfrac{1}{2^2}$, e o resultado segue diretamente do Teorema 7.1 e do Corolário 7.2.

Corolário 7.6. *Seja p um natural primo > 2. Seja $\mu \in \mathbb{Z}_p$ tal que $|\mu|_p = 1$ e suponhamos que exista $\lambda_0 \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda_0^2 \equiv \mu \pmod{p}$. Então existe um único $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{p}$ e $\lambda^2 = \mu$.*

Demonstração. Seja $f(X) = X^2 - \mu \in \mathbb{Z}_p[X]$; então $f'(X) = 2X$. Por hipótese, $f(\lambda_0) \equiv 0 \pmod{p}$. Além disso, $f'(\lambda_0) = 2\lambda_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Realmente, como $|\lambda_0^2 - \mu|_p \leq \dfrac{1}{p} < 1 = |\mu|_p$, o Corolário 3.6 fornece $|\lambda_0^2| = 1$; assim, $|f'(\lambda_0)| = |2|_p\,|\lambda_0|_p = |\lambda_0|_p = 1$. Portanto, o resultado segue diretamente do Corolário 7.3.

Corolário 7.7. *Seja p um natural primo, $p \neq 3$, e seja $\mu \in \mathbb{Z}_p$ tal que $|\mu|_p = 1$. Suponhamos que exista $\lambda_0 \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda_0^3 \equiv \mu \pmod{p}$. Então existe um único $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{p}$ e $\lambda^3 = \mu$.*

Demonstração. Seja $f(X) = X^3 - \mu \in \mathbb{Z}_p[X]$; então $f'(X) = 3X^2$. Por hipótese, $f(\lambda_0) \equiv 0 \pmod{p}$. Além disso, $f'(\lambda_0) = 3\lambda_0^2 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Realmente, como $|\lambda_0^3 - \mu|_p \leq \dfrac{1}{p} < 1 = |\mu|_p$, vem $|\lambda_0|_p^3 = 1$ pelo Corolário

3.6. Portanto, $|\lambda_0|_p = 1$ e então $|f'(\lambda_0)|_p = |3\lambda_0^2|_p = |3|_p(|\lambda_0|_p)^2 = 1$, isto é, $f'(\lambda_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Pelo Corolário 7.3, existe um único $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tal que $\lambda \equiv \lambda_0 \pmod{p}$ e $\lambda^3 = \mu$.

Exercício

7.1. Prove que, para cada inteiro $n \geq 1$, a equação $X^2 \equiv 6 \pmod{5^n}$ (respectivamente $X^2 \equiv 17 \pmod{2^n}$, $X^3 \equiv 10 \pmod{7^n}$) possui solução inteira.

§8. Classificação dos corpos arquimedianos completos

Uma valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ é *arquimediana*, e $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um *corpo arquimediano*, quando $C = 1$ não é permissível para $|\cdot|$, isto é, quando $|\cdot|$ não é não arquimediana. O objetivo deste parágrafo é estabelecer um teorema de Ostrowski, provado em [10], que classifica os corpos arquimedianos completos. No enunciado do referido teorema, admitiremos que a valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ satisfaça a desigualdade triangular (Teorema 1.17).

Teorema 8.1. *Se $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é um corpo arquimediano completo, então $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $|\cdot|$ é equivalente a $|\cdot|_\infty$.*

Pelo Corolário 3.5, a característica de $\mathbb{K}$ é zero. A demonstração do teorema dependerá dos lemas a seguir.

Lema 8.2. *Se $|\cdot|$ é uma valorização arquimediana em $\mathbb{C}$, então $|\cdot|$ é equivalente a $|\cdot|_\infty$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.17, podemos supor que $|\cdot|$ satisfaça a desigualdade triangular. Como a restrição de $|\cdot|$ a $\mathbb{Q}$ é arquimediana, o Teorema 3.12 garante que a restrição de $|\cdot|$ a $\mathbb{Q}$ é equivalente à restrição de $|\cdot|_\infty$ a $\mathbb{Q}$. Logo, pela Proposição 1.15, existe $\alpha > 0$ tal que $|\lambda| = \big(|\lambda|_\infty\big)^\alpha$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$, o que implica $|x| = \big(|x|_\infty\big)^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Seja $z = x + iy \in \mathbb{C}$ arbitrário. Então

$$(*) \qquad |z| \leq |x| + |i|\,|y| = |x| + |y| = \big(|x|_\infty\big)^\alpha + \big(|y|_\infty\big)^\alpha \leq 2\big(|z|_\infty\big)^\alpha,$$

e daí resulta que $|\cdot|$ e $|\cdot|_\infty$ são equivalentes. Caso contrário, existiria $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| > 1$ e $|w|_\infty < 1$ (lembrar o Lema 4.3). Mas, como $\lim\limits_{n\to\infty} |w^n| = +\infty$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \big(|w^n|_\infty\big)^\alpha = 0$, podemos tomar $\ell \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande para que $|w^\ell| > 2$ e $\big(|w^\ell|_\infty\big)^\alpha < 1$. Por outro lado, por (*), $|w^\ell| \leq 2\big(|w^\ell|_\infty\big)^\alpha < 2$, o que não ocorre. Isto conclui a demonstração.

Lema 8.3. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *como no* Teorema 8.1. *Se o polinômio* X^2+1 *é irredutível sobre* $\mathbb{K}$, *então*

$$\left|\lambda^2+\mu^2\right| \geq \frac{|4|}{1+|4|} \max\left\{|\lambda|^2, |\mu|^2\right\}$$

para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Demonstração. Seja $\Delta = \dfrac{|4|}{1+|4|}$; $0 < \Delta < 1$. Se a afirmação fosse falsa, existiriam $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tais que $|\lambda^2+\mu^2| < \Delta \max\{|\lambda|^2, |\mu|^2\}$. Logo, $\lambda \neq 0$ ou $\mu \neq 0$, e podemos supor $|\lambda| \leq |\mu|$ e $\mu \neq 0$. Logo, $|\lambda^2+\mu^2| < \Delta|\mu|^2$, isto é, $\left|\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2+1\right| < \Delta$. Seja $\lambda_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}\cdot$ Então $\delta_1 = |\lambda_1^2+1| < \Delta < 1$ e $\big||\lambda_1^2+1|-|1|\big|_\infty = \big||\lambda_1^2+1|-1\big|_\infty \leq |(\lambda_1^2+1)-1| = |\lambda_1^2|$, o que implica $|\lambda_1^2+1|-1 \geq -|\lambda_1^2|$, isto é, $|\lambda_1^2| \geq 1-|\lambda_1^2+1| = 1-\delta_1 > 0$. Em particular, $\lambda_1 \neq 0$. Ponhamos $\lambda_2 = \lambda_1+\xi_1$, onde $\xi_1 \in \mathbb{K}$. Então $1+\lambda_2^2 = 1+\lambda_1^2+2\lambda_1\,\xi_1+\xi_1^2$. Fazendo $\xi_1 = -\dfrac{\lambda_1^2+1}{2\lambda_1}$, vem $1+\lambda_2^2 = \xi_1^2$. Definamos $\delta_2 = |1+\lambda_2^2|$. Então

$$\delta_2 = |\xi_1^2| = \frac{|\lambda_1^2+1|^2}{|4|\,|\lambda_1|^2} = \frac{\delta_1^2}{|4|\,|\lambda_1|^2} = \delta_1\,\frac{\delta_1}{|4|\,|\lambda_1|^2} \leq \delta_1\,\frac{\delta_1}{|4|(1-\delta_1)}\cdot$$

Seja $\gamma = \dfrac{\delta_1}{|4|(1-\delta_1)} \geq 0$; $\gamma < 1$, pois $\gamma < 1$ equivale a $\delta_1 < |4|(1-\delta_1)$ e $\delta_1 < |4|(1-\delta_1)$ equivale a $\delta_1(1+|4|) < |4|$, o que efetivamente ocorre $(\delta_1 < \Delta)$. Continuando este processo construímos uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ em $\mathbb{K}^*$ tal que $\lambda_{n+1}-\lambda_n = \xi_n = -\dfrac{\lambda_n^2+1}{2\lambda_n}$, $\delta_n = |\lambda_n^2+1|$ e $\delta_{n+1} \leq \gamma\,\delta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Logo, para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\lambda_{n+1}-\lambda_n|^2 = |\xi_n|^2 = |1+\lambda_{n+1}^2| = \delta_{n+1} \leq \gamma^n\,\delta_1\,,$$

e então $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Como $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge para um certo $\lambda \in \mathbb{K}$. Portanto, $\lambda^2+1 = \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda_n^2+1) = 0$, contrariando a irredutibilidade de X^2+1.

Lema 8.4. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *como no* Teorema 8.1 *e suponhamos o polinômio* X^2+1 *irredutível sobre* $\mathbb{K}$. *Então* $|\cdot|$ *pode ser estendida ao corpo* $\mathbb{K}(i)$, *onde* $i^2+1=0$.

Demonstração. Definamos $|| \cdot ||\colon \mathbb{K}(i) \to \mathbb{R}$ por $||\lambda + i\mu|| = \sqrt{|\lambda^2 + \mu^2|}$. Afirmamos que $|| \cdot ||$ é uma valorização em $\mathbb{K}(i)$ que estende $| \cdot |$. De fato, sejam $\lambda + i\mu,\ \theta + i\xi \in \mathbb{K}(i)$. É claro que $||\lambda + i\mu|| \geq 0$ e $||0|| = 0$. Se $||\lambda + i\mu|| = 0$, $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Daí, $\lambda = \mu = 0$, pois se $\lambda \neq 0$, $\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^2 + 1 = 0$, contrariando a irredutibilidade de $X^2 + 1$. E

$$\begin{aligned} ||(\lambda + i\mu)(\theta + i\xi)|| &= ||(\lambda\theta - \mu\xi) + i(\lambda\xi + \mu\theta)|| = \sqrt{|(\lambda\theta - \mu\xi)^2 + (\lambda\xi + \mu\theta)^2|} \\ &= \sqrt{|\lambda^2 + \mu^2|\,|\theta^2 + \xi^2|} = \sqrt{|\lambda^2 + \mu^2|}\,\sqrt{|\theta^2 + \xi^2|} = ||\lambda + i\mu||\,||\theta + i\xi||. \end{aligned}$$

Admitamos que $||\lambda + i\mu|| \leq 1$; então $|\lambda^2 + \mu^2| \leq 1$. Pelo Lema 8.3,

$$|\lambda|^2 \leq \max\left\{|\lambda|^2, |\mu|^2\right\} \leq \frac{1}{\Delta}\,|\lambda^2 + \mu^2| \leq \frac{1}{\Delta}\,, \text{ isto é, } |\lambda| \leq \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\cdot$$

Analogamente, $|\mu| \leq \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\cdot$ Portanto,

$$\begin{aligned} ||1 + (\lambda + i\mu)||^2 &= ||(1 + \lambda) + i\mu||^2 = |(1 + \lambda)^2 + \mu^2| = |1 + 2\lambda + \lambda^2 + \mu^2| \\ &\leq 1 + |2|\,|\lambda| + |\lambda|^2 + |\mu|^2 \leq 1 + \frac{|2|}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2}{\Delta}\,, \end{aligned}$$

$$\text{isto é, } ||1 + (\lambda + i\mu)|| \leq \sqrt{1 + \frac{|2|}{\sqrt{\Delta}} + \frac{2}{\Delta}}\cdot$$

Acabamos de verificar que $|| \cdot ||$ é uma valorização em $\mathbb{K}(i)$. Finalmente, se $\lambda \in \mathbb{K}$, $||\lambda|| = \sqrt{|\lambda^2|} = \sqrt{|\lambda|^2} = |\lambda|$.

Passemos à

Demonstração do Teorema 8.1. Como a característica de $\mathbb{K}$ é zero, $\mathbb{K}$ contém um subcorpo P isomorfo a $\mathbb{Q}$. Logo, pelo Teorema 3.12, podemos supor que $| \cdot |$ induza a valorização usual em P. Portanto, $\mathbb{K}$ contém o completamento de P com respeito à valorização usual, a saber, $\mathbb{R}$. Há então duas possibilidades a serem consideradas.

Primeira possibilidade: Existe $i \in \mathbb{K}$ tal que $i^2 + 1 = 0$.

Então $\mathbb{K}$ contém $\mathbb{C}$ e o Lema 8.2 garante que a restrição de $| \cdot |$ a $\mathbb{C}$ é equivalente à $| \cdot |_\infty$. Vamos provar que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Admitamos que exista $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha \notin \mathbb{C}$. Como a aplicação

$$z \in \mathbb{C} \longmapsto |\alpha - z| \in \mathbb{R}$$

é contínua e $\lim\limits_{|z|_\infty \to +\infty} |\alpha - z| = +\infty$ (pois $|\alpha - z| \geq |z| - |\alpha|$ e $|\cdot|$ é equivalente a $|\cdot|_\infty$), existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $|\alpha - w| = \inf\limits_{z \in \mathbb{C}} |\alpha - z|$. Seja $\beta = \alpha - w \in \mathbb{K}$; então

$$0 < |\beta| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |\beta - z|.$$

Seja $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |\mu| < |\beta|$ e seja $n \in \mathbb{N}^*$ arbitrário. Como

$$\beta^n - \mu^n = (\beta - \mu)(\beta - w_1\mu) \ldots (\beta - w_{n-1}\mu),$$

onde $w_1, \ldots, w_{n-1}$ são as raízes n-ésimas da unidade diferentes de 1, temos

$$\beta^n - \mu^n \beta - \mu = \prod_{\sigma^n = 1, \sigma \neq 1} (\beta - \sigma\mu).$$

Como

$$\left| \prod_{\sigma^n = 1, \sigma \neq 1} (\beta - \sigma\mu) \right| = \prod_{\sigma^n = 1, \sigma \neq 1} |\beta - \sigma\mu| \geq |\beta|^{n-1},$$

segue que

$$\frac{|\beta - \mu|}{|\beta|} \leq \frac{|\mu^n - \beta^n|}{|\beta^n|} = \left| \left(\frac{\mu}{\beta} \right)^n - 1 \right| \leq \left| \frac{\mu}{\beta} \right|^n + 1.$$

Mas, como $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{\mu}{\beta} \right|^n = 0$, concluímos que $|\beta - \mu| \leq |\beta|$; logo, $|\beta - \mu| = |\beta|$. Tomando $\beta - \mu$ em lugar de β e repetindo o processo obtemos $|\beta - m\mu| = |\beta|$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $|m|\,|\mu| \leq |\beta - m\mu| + |\beta| = 2|\beta|$ para todo $m \in \mathbb{N}^*$, contrariando a hipótese de $|\cdot|$ ser arquimediana. Assim, acabamos de provar que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Segunda possibilidade: Não existe $i \in \mathbb{K}$ tal que $i^2 + 1 = 0$.

Neste caso, adicionemos uma raiz i do polinômio $X^2 + 1$, obtendo a extensão $\mathbb{K}(i)$ de $\mathbb{K}$. Pelo Lema 8.4, podemos estender a valorização $|\cdot|$ a uma valorização em $\mathbb{K}(i)$. Finalmente, seja $\widehat{\mathbb{K}(i)}$ o completamento de $\mathbb{K}(i)$. Pela primeira possibilidade, $\widehat{\mathbb{K}(i)} = \mathbb{C}$, o que implica $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

§9. Extensão de uma valorização

O objetivo deste parágrafo é provar o teorema a seguir, em cujo enunciado assumiremos que a valorização $|\cdot|$ em $\mathbb{K}$ satisfaça a desigualdade triangular.

Teorema 9.1. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *um corpo valorizado completo, com* $|\cdot|$ *não trivial, e seja* L *uma extensão finita de* $\mathbb{K}$*. Então existe uma única valorização* $||\cdot||$ *em* L *de modo que* $(L, ||\cdot||)$ *é completo e* $||\lambda|| = |\lambda|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

Como, no caso em que $|\cdot|$ é arquimediana, o resultado segue imediatamente do Teorema 8.1, resta provar o resultado no caso em que $|\cdot|$ é não arquimediana. Neste contexto, estabeleceremos a unicidade no caso geral e a existência no caso em que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é local. Mas antes, necessitaremos de algum preliminares.

Definição 9.2. Seja $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ como no enunciado do Teorema 9.1 e seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação

$$||\cdot||\colon E \to \mathbb{R}$$

é uma *norma* em E, e $(E, ||\cdot||)$ é *um espaço normado* sobre $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, se as seguintes condições são satisfeitas para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

(a) $||x|| \geq 0$ e $||x|| = 0$ se e só se $x = 0$;
(b) $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$;
(c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Proposição 9.3. *Seja* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *como na* Definição 9.2 *e seja* E *um espaço vetorial de dimensão finita* $n \geq 1$ *sobre* $\mathbb{K}$*. Então quaisquer duas normas em* E *são equivalentes, isto é, definem a mesma topologia em* E*.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de E. Para $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$ arbitrário, ponhamos $||x||_0 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$. É claro que $||\cdot||_0$ é uma norma em E que o torna um espaço normado completo. Basta então mostrar que qualquer norma $||\cdot||$ em E é equivalente a $||\cdot||_0$, o que passamos a fazer. Primeiramente, para todo $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$, temos

$$||x|| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, ||e_i|| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} ||e_i|| \right) ||x||_0 .$$

Logo, a identidade $1_E \colon (E, \tau_{||\cdot||_0}) \to (E, \tau_{||\cdot||})$ é contínua, onde $\tau_{||\cdot||}$ (respectivamente $\tau_{||\cdot||_0}$) é a topologia definida por $||\cdot||$ (respectivamente $||\cdot||_0$) em E. Reciprocamente, para mostrar que $1_E \colon (E, \tau_{||\cdot||}) \to (E, \tau_{||\cdot||_0})$ é contínua, usaremos indução sobre $n \geq 1$. Se $n = 1$ e $x = \lambda_1 e_1 \in E$, temos

$$||x||_0 = |\lambda_1| = \frac{1}{||e_1||} \, ||\lambda_1 e_1|| = \frac{1}{||e_1||} \, ||x||,$$

e a afirmação é válida para $n = 1$. Seja $m \geq 2$ e suponhamos a afirmação válida para $m-1$. Inicialmente, afirmamos que para todo $r > 0$ existe $s > 0$ tal que as relações $x \in E$, $||x|| < s$ implicam $|\lambda_m| < r$. Caso contrário, existiria $r > 0$ tal que para todo $s > 0$ haveria $x \in E$ com $||x|| < s$ e $|\lambda_m| \geq r$. Ponhamos $y = \dfrac{x}{\lambda_m}$; então $||y|| = \dfrac{||x||}{|\lambda_m|} < \dfrac{s}{r}$ e $y = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_{m-1} e_{m-1} + e_m$. Trocando s por sr, vemos que para todo $s > 0$ podemos encontrar $y \in E$, da forma mencionada acima, tal que $||y|| < s$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe $y_n = \mu_1^{(n)} e_1 + \cdots + \mu_{m-1}^{(n)} e_{m-1} + e_m \in E$ tal que $||y_n|| < \dfrac{1}{n} \cdot$ Seja F o subespaço vetorial de dimensão $m-1$ de E gerado por $e_1, \ldots, e_{m-1}$ e seja $z_n = \mu_1^{(n)} e_1 + \cdots + \mu_{m-1}^{(n)} e_{m-1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Então $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em $(F, ||\cdot||)$. Pela continuidade da aplicação linear $1_F \colon (F, \tau_{||\cdot||}) \to (F, \tau_{||\cdot||_0})$ (hipótese de indução), segue que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em $(F, ||\cdot||_0)$, o que equivale a dizer que $(\mu_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ para $i = 1, \ldots, m-1$. Como $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é completo, para cada $i = 1, \ldots, m-1$ existe $\xi_i \in \mathbb{K}$ para o qual $(\mu_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Seja $z = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_{m-1} e_{m-1} + e_m$ e seja $\beta > 0$ arbitrário. Como

$$\begin{aligned} ||y_n - z|| &= ||(\mu_1^{(n)} - \xi_1) e_1 + \cdots + (\mu_{m-1}^{(n)} - \xi_{m-1}) e_{m-1}|| \\ &\leq |\mu_1^{(n)} - \xi_1| \, ||e_1|| + \cdots + |\mu_{m-1}^{(n)} - \xi_{m-1}| \, ||e_{m-1}||, \end{aligned}$$

existe $\ell \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande para que $||y_\ell - z|| < \dfrac{\beta}{2}$ e $\dfrac{1}{\ell} < \dfrac{\beta}{2}\cdot$ Portanto,

$$||z|| \leq ||z - y_\ell|| + ||y_\ell|| < \frac{\beta}{2} + \frac{1}{\ell} < \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta.$$

Mas, como β é arbitrário, concluímos que $||z|| = 0$. Consequentemente,

$$0 = z = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_{m-1} e_{m-1} + e_m\,,$$

contrariando a independência linear do conjunto $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Assim, a nossa afirmação está justificada, a partir da qual podemos garantir que para todo $r > 0$ existe $s > 0$ tal que as relações $x \in E$, $||x|| < s$ implicam $||x||_0 < r$, provando a continuidade de $1_E\colon (E, \tau_{||\cdot||}) \to (E, \tau_{||\cdot||_0})$.

Corolário 9.4. *Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de um espaço normado $(E, ||\cdot||)$ sobre $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ e seja $x_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^{(k)} e_i$ $(k \in \mathbb{N})$ uma sequência em E. Então $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E$ se, e somente se, $(\xi_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $\xi_i \in \mathbb{K}$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Demonstração. Imediata a partir da Proposição 9.3.

Passemos à

Demonstração do Teorema 9.1 (caso não arquimediano). Inicialmente, provemos a unicidade. Com efeito, seja $||\cdot||$ uma valorização em L tal que $||\lambda|| = |\lambda|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e seja $n \geq 1$ a dimensão de L como $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Então $(L, ||\cdot||)$ é um espaço normado sobre $(\mathbb{K}, |\cdot|)$. Logo, pela Proposição 9.3, $(L, ||\cdot||)$ é completo.

Para cada $z \in L$ seja $N(z)$ o determinante da aplicação $\mathbb{K}$-linear $w \in L \mapsto zw \in L$ (obviamente, $N(z) = z^n$ se $z \in \mathbb{K}$). Sendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de L e escrevendo $z \in L$ como $z = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K})$, segue que $N(z)$ é um polinômio homogêneo em $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Se $z \in L$ e $||z|| < 1$, $(z^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \to 0$, e o Corolário 9.4 garante que $(N(z^k))_{k\in\mathbb{N}^*} \to 0$, isto é, $((N(z))^k)_{k\in\mathbb{N}^*} \to 0$; logo, $|N(z)| < 1$. Analogamente, se $z \in L$ e $||z|| > 1$, então $|N(z)| > 1$. Consequentemente, se $z \in L$ e $|N(z)| = 1$, então $||z|| = 1$.

Seja $z \in L^*$ arbitrário e consideremos $w = \dfrac{z^n}{N(z)} \cdot$ Então

$$N(w) = \frac{N(z^n)}{N(N(z))} = \frac{(N(z))^n}{(N(z))^n} = 1,$$

e o que acabamos de observar fornece $||w|| = 1$. Portanto,

$$||z||^n = ||z^n|| = |N(z)|,$$

ou seja,

$$||z|| = \sqrt[n]{|N(z)|}.$$

Em resumo, acabamos de ver que se for possível obter uma extensão $||\cdot||$ da valorização $|\cdot|$ a L, então ter-se-á $(L, ||\cdot||)$ completo e $||z|| = \sqrt[n]{|N(z)|}$ para $z \in L$, concluindo a demonstração da unicidade.

Para provar a existência, é suficiente mostrar que a função $v(z) = \sqrt[n]{|N(z)|}$ é uma valorização em L que estende $|\cdot|$. Ora, se $z \in \mathbb{K}$, $N(z) = z^n$, de modo que $v(z) = |z|$. Além disso, é claro que v satisfaz as condições (a) e (b) da definição de valorização. Resta então mostrar que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que as condições $z \in L$, $v(z) \leq 1$ implicam $v(1+z) \leq C$, o que faremos no caso em que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é local. Realmente, consideremos a norma $||\cdot||_0$ em L (lembrar a demonstração da Proposição 9.3). Como v é contínua no subconjunto compacto $\{z \in L; ||z||_0 = 1\}$ de L e $v(z) > 0$ para $z \in L$ com $||z||_0 = 1$, existem $\alpha, \beta > 0$ tais que $\alpha \leq v(z) \leq \beta$ sempre que $||z||_0 = 1$, o que implica $\alpha \leq \dfrac{v(z)}{||z||_0} \leq \beta$ sempre que $z \in L^*$. Finalmente, seja $z \in L^*$ com $v(z) \leq 1$. Então $||z||_0 \leq \dfrac{1}{\alpha}$, o que fornece

$$v(1+z) \leq \beta||1+z||_0 \leq \beta\big(||1||_0 + ||z||_0\big) \leq \beta\left(||1||_0 + \frac{1}{\alpha}\right).$$

Assim, basta tomar $C = \beta\left(||1||_0 + \dfrac{1}{\alpha}\right)$ para concluir a demonstração do teorema.

Observação 9.5. O argumento usado na demonstração do fato de que v satisfaz a condição (c) da Definição 1.1, no caso em que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ é local, pode ser encontrado na página 56 de [4], cabendo mencionar que as relações $z \in L$, $v(z) \leq 1$ implicam $v(1+z) \leq 1$ (Corolário 3.4). Para uma demonstração do mesmo fato para $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ como no enunciado do Teorema 9.1 consultar o §4 do Capítulo 2 de [3] ou o Capítulo 7 de [5].

Exercícios

9.1. Sejam $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ um corpo não arquimediano completo, com $|\,.\,|$ não trivial, X um conjunto não vazio e $\mathcal{B}(X)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações limitadas de X em $\mathbb{K}$. Prove que a aplicação

$$||\,.\,|| : f \in \mathcal{B}(X) \mapsto ||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)| \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{B}(X)$ tal que $||f+g|| \leq \max\{||f||, ||g||\}$ para quaisquer $f, g \in \mathcal{B}(X)$ (o que implica a condição (c) da Definição 9.2), que o torna um espaço normado completo.

9.2. Sejam $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ e $(E, ||\,.\,||)$ como na Definição 9.2. Suponha, ainda, $E \neq \{0\}$ e $||x+y|| \leq \max\{||x||, ||y||\}$ para quaisquer $x, y \in E$. Prove que $|\,.\,|$ é uma valorização não arquimediana.

9.3. Sejam $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ e $(E, ||\,.\,||)$ como na Definição 9.2 e M um subespaço vetorial de dimensão finita de E. Prove que M é fechado em E.

9.4. Seja $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ como na Definição 9.2 e sejam $(E, ||\,.\,||)$ e $(F, ||\,.\,||)$ dois espaços normados sobre $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$, sendo a dimensão de E finita. Prove que toda aplicação linear de E em F é contínua.

9.5. Sejam $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ um corpo local e $(E, ||\,.\,||)$ um espaço normado sobre $(\mathbb{K}, |\,.\,|)$ de dimensão finita. Prove que E é localmente compacto.

Referências

[1] Y. Amice, Les nombres p-adiques, Presses Universitaires de France, 1975.

[2] E. Artin and G. Whaples, Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 469-492.

[3] E. Artin, Algebraic Numbers and Algebraic Functions, New York University, 1951.

[4] J.W.S. Cassels, Global Fields, in Algebraic Number Theory (Proc. Instructional Conf. Brighton, 1965), 42-84, Thompson, 1967.

[5] J.W.S. Cassels, Local Fields, London Mathematical Society Student Texts 3, Cambridge University Press, 1986.

[6] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth edition, Oxford University Press, 1979.

[7] K. Hensel, Zahlentheorie, Berlin, 1913.

[8] J. Kürschák, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie, J. Riene Angew. Math. 142 (1913), 211-253.

[9] L. Nachbin, Espaços Vetoriais Topológicos, Notas de Matemática 4, Livraria Boffoni, 1948.

[10] A. Ostrowski, Über einege Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$, Acta Math. 41 (1918), 271-284.

[11] I.R. Shafarevich, On the normalizability of topological fields, Dokl. Akad. Nauk SSSR 40 (1943), 133-135.

[12] S. Warner, Topological Fields, Notas de Matemática 126, North-Holland, 1989.